

T-1402 db

No d'ordre:90-33

ANNEE 1990

**THESE**

**PRESENTEE DEVANT**

**L'ECOLE CENTRALE DE LYON**

**POUR OBTENIR  
LE GRADE DE DOCTEUR  
SPECIALITE MECANIQUE**

**PAR**

**BAGUS BUDIWANTORO**

**IDENTIFICATION TEMPORELLE DES STRUCTURES  
LINEAIRES ET NON LINEAIRES**

**SOUTENUE LE  
20 DECEMBRE 1990**

**JURY :**

**MR. LALLEMENT**

**MR. DECK**

**MR. JEZEQUEL**

**MR. THOMAS**

**MR. LEMBREGTS**

**PRESIDENT**

**EXAMINATEUR**

**DIRECTEUR**

**RAPPORTEUR**

**EXAMINATEUR**

**ECOLE CENTRALE DE LYON**

**1990**

Vol 2

No d'ordre:90-33

ANNEE 1990

**THESE**

**PRESENTEE DEVANT**

**L'ECOLE CENTRALE DE LYON**

**POUR OBTENIR  
LE GRADE DE DOCTEUR  
SPECIALITE MECANIQUE**

**PAR**

**BAGUS BUDIWANTORO**

**IDENTIFICATION TEMPORELLE DES STRUCTURES  
LINEAIRES ET NON LINEAIRES**

**SOUTENUE LE  
20 DECEMBRE 1990**

**JURY :**

<b>MR. LALLEMENT</b>	<b>PRESIDENT</b>
<b>MR. DECK</b>	<b>EXAMINATEUR</b>
<b>MR. JEZEQUEL</b>	<b>DIRECTEUR</b>
<b>MR. THOMAS</b>	<b>RAPPORTEUR</b>
<b>MR. LEMBREGTS</b>	<b>EXAMINATEUR</b>

**ECOLE CENTRALE DE LYON  
1990**

# ECOLE CENTRALE DE LYON

Directeur : J. BORDET  
Directeur Adjoint : E. PASCAUD  
Directeur des Etudes : F. SIDOROFF

## LISTE DES PERSONNES HABILITEES A ENCADRER DES THESES A L'E.C.L.

(Doctorat d'Etat ou Habilitation au sens de l'Arrêté du 5 juillet 1984,  
modifié par l'Arrêté du 21 mars 1988)

### Mathématiques-Informatique-Systèmes

B. DAVID	Professeur
M. MARION (Mme)	Professeur
J.F. MAITRE	Professeur
J. ROZINOER	Maître de Conférences
G. THOMAS	Maître de Conférences
F. MUSY	Maître de Conférences

### Physicochimie des Interfaces

P. CLECHET	Professeur
J. JOSEPH	Professeur
J.R. MARTIN	Professeur
L. PORTE	Professeur
G. ESCHALIER	Maître de Conférences
A. GAGNAIRE	Maître de Conférences
Cl. MARTELET	Maître de Conférences
R. OLIER	Maître de Conférences
Y. ROBACH	Maître de Conférences
P. PICHAT	Directeur de Recherche au CNRS
J.M. HERRMANN	Directeur de Recherche au CNRS
N. JAFFREZIC (Mme)	Directeur de Recherche au CNRS

### Matériaux : Mécanique Physique

P. GUIRALDENQ	Professeur
D. TREHEUX	Professeur
B. VANNES	Professeur
L. VINCENT	Professeur
J. BLANC-BENON	Professeur - Lyon I
J. BRUGIRARD	Professeur - Lyon I
B. COQUILLET	Maître de Conférences
D. NGUYEN	Maître de Conférences
S. FAYEULLE	Chargé de Recherche au CNRS
D. JUVE (Mme)	Ingénieur d'Etudes

### Electronique

R. BLANCHET	- Professeur
M. LE HELLEY	Professeur
Y. HELLOUIN	Maître de Conférences
P. VIKTOROVITCH	Directeur de Recherche au CNRS
G. HOLLINGER	Directeur de Recherche au CNRS
M. GENDRY	Chargé de Recherche au CNRS
S. KRAWCZYK	Chargé de Recherche au CNRS
J. TARDY	Chargé de Recherche au CNRS

## Electrotechnique

Ph. AURIOL	Professeur
A. NICOLAS	Professeur
G. ROJAT	Maître de Conférences

## Mécanique des Solides

B. CAMBOU	Professeur
F. SIDOROFF	Professeur
L. JEZEQUEL	Professeur
A. DOGUI	Maître de Conférences
Cl. SURRY	Professeur - E.N.I.S.E.

## Technologie des Surfaces

J. M. GEORGES	Professeur
J. SABOT	Professeur
J.M. MARTIN	Professeur
N. ALBEROLA (Mme)	Maître de Conférences
H. MONTES	Maître de Conférences
T. MATHIA	Directeur de Recherche au CNRS
Ph. KAPSA	Chargé de Recherche au CNRS
J.L. LOUBET	Chargé de Recherche au CNRS

## Mécanique des Fluides

J. MATHIEU	Professeur Classe Exceptionnelle
E. ALCARAZ	Professeur
D. JEANDEL	Professeur
D. JUVE	Professeur
F. LEBOEUF	Professeur
J. BATAILLE	Professeur Lyon I
B. GAY	Professeur Lyon I
J.N. GENGE	Professeur Lyon I
M. LANCE	Professeur Lyon I
R. MOREL	Professeur - INSA
Cl. CAMBON	Chargé de Recherche au CNRS
J.P. BERTOGLIO	Chargé de Recherche au CNRS
P. FERRAND	Chargé de Recherche au CNRS
D. HENRY	Chargé de Recherche au CNRS

## Acoustique

(Mlle)	G. COMTE-BELLOT	Professeur Classe Exceptionnelle
	M. ROGER	Maître de Conférences
	Ph. BLANC-BENON	Chargé de Recherche au CNRS
	M. SUNYACH	Professeur Lyon I (IUT)

## Machines Thermiques

M. BRUN	Professeur
Ph. ARQUES	Professeur
J. Cl. CHAMPOUSSIN	Professeur Lyon I

## TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS		v
RESUME		vi
CHAPITRE I.	INTRODUCTION	1
PREMIER PARTIE		
CHAPITRE II.	REPRESENTATION ET THEORIE GENERALE DES SYSTEMES VIBRANTS	5
2.1.	REPRESENTATION DES SYSTEMES LINEAIRES	5
2.1.1.	REPRESENTATION DANS L'ESPACE D'ETAT	5
2.1.2.	REPRESENTATION DES MODELES ARMA DANS L'ESPACE D'ETAT	8
2.1.3.	REPRESENTATION TEMPORELLE	8
2.1.4.	REPRESENTATION DE LA TRANSFORMEE EN Z	9
2.1.5.	MODELE AUTO REGRESSIF (AR)	10
2.1.6.	MODELE A MOYENNE GLISSANTE (MA)	11
2.2.	DEFINITION DES PROBLEMES	11
2.2.1.	APPROXIMATION DES MODES NORMAUX A PARTIR DES MODES COMPLEXES	17
2.2.2.	ESTIMATION DE L'ORDRE DU SYSTEME	19
CHAPITRE III.	TECHNIQUES D'IDENTIFICATION	23
3.1.	IDENTIFICATION EN UTILISANT LA TRANSFORMEE EN Z	23
3.1.1.	GENERALITES	23
3.1.2.	IDENTIFICATION A L'AIDE D'UN PAR LE FILTRE DE KALMAN	29
3.1.2.1.	GENERALITES	29
3.1.2.2.	EXPRESSION DE LA MATRICE DE COVARIANCE DE L'ERREUR $P(k/k)$	32
3.1.2.3.	EXPRESSION DU GAIN DU FILTRE DE KALMAN	34
3.1.2.4.	INITIALISATION ET MISE EN OEUVRE DU FILTRE DE KALMAN	35
3.1.3.	L'ALGORITHME DES MOINDRES CARRES	35

3.2.	IDENTIFICATION PAR LA METHODE D'IBRAHIM	40
3.2.1.	GENERALITES <sup>1</sup>	40
3.2.1.1.	EVALUATION DE LA PRECISION D'IDENTIFICATION	43
3.2.2.	METHODE DES MOINDRES CARRES SIMPLE (SINGLE LEAST SQUARE)	44
3.2.3	METHODE DES MOINDRES CARRES DOUBLE (DOUBLE LEAST SQUARE)	45
3.3.	IDENTIFICATION PAR UNE SEULE STATION DE MESURE	48
3.4.	IDENTIFICATION RECURSIVE AUX VARIABLES INSTRUMENTALES	55
3.5.	IDENTIFICATION EN UTILISANT UNE MATRICE D'AUTOCORRELATION	57
3.6.	PRESENTATION DE DEUX NOUVELLES TECHNIQUES D'IDENTIFICATION	62
3.6.1.	IDENTIFICATION A PARTIR D'UNE SEULE REPONSE EN UTILISANT UNE MATRICE D'AUTOCORRELATION	62
3.6.2.	IDENTIFICATION A PARTIR D'UNE SEULE REPONSE A L'AIDE DE VARIABLES INSTRUMENTALES	63
CHAPITRE 4.	RESULTATS	64
4.1.	SIMULATION NUMERIQUE	64
4.1.1.	CAS DE FREQUENCE ECARTEES	65
4.1.2.	CAS DE DEUX FREQUENCES RAPPROCHEES	80
4.2.	TEST DE VALIDATION	85
4.2.1.	BANC D'ESSAI	86
4.2.2.	RESULTATS EXPERIMENTAUX	88
4.3.	CONCLUSIONS	88
DEUXIEME PARTIE		
CHAPITRE 5.	STRUCTURES NON LINEAIRES	100
5.1.	COMPORTEMENT NON LINEAIRE EN MECANIQUE	100
5.2.	LES CAUSES ET LES EFFETS DES NON LINEARITES	100
5.2.1.	ANALYSE UNIDIMENSIONNELLE	101
5.2.2.	LES SYSTEMES NON LINEAIRES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE	108

CHAPITRE 6.	TECHNIQUES DE RESOLUTION NUMERIQUE ET D'IDENTIFICATION	111
6.1.	QUELQUES METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS NON LINEAIRES	111
6.1.1.	METHODE DE KRILOV-BOGOLIUBOV- MITROPOLSKY	111
6.1.1.1.	CAS D'UN SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE EXCITE PAR UNE FORCE SINUSOIDALE	111
6.1.1.2.	CAS D'UN SYSTEME A N DEGRES DE LIBERTE	112
6.1.2.	METHODE DE BARETT.	116
6.2.	TECHNIQUES D'IDENTIFICATION	118
6.2.1.	INTRODUCTION	118
6.2.2.	PROCESSUS D'IDENTIFICATION	121
6.2.2.1.	GENERALITES	121
6.2.2.2.	METHODE DIRECTE	122
6.2.2.3.	APPROCHE GENERALE	122
6.2.2.4.	APPROCHE PAR FILTRAGE	124
6.2.2.5.	METHODE QUASI LINEAIRE	126
6.2.2.6.	MODELE NARMAX	129
6.2.2.6.1.	REPRESENTATION DU MODELE	129
6.2.2.6.2.	METHODE DU GRADIENT	130
6.2.2.6.3.	NOMBRE MAXIMUM DE COEFFICIENTS	132
6.2.2.6.4.	VALIDATION DU MODELE	133
CHAPITRE 7.	RESULTATS	135
7.1.	RESULTATS NUMERIQUES.	135
7.1.1.	COMPARAISON BASEE SUR LE MODELE DE LA FORCE DE RAIDEUR	135
7.1.2.	COMPARAISON ENTRE LA MODELISATION DE LA FORCE INTERNE ET LE MODELE NARMAX	138
7.2.	CONCLUSIONS	141
CHAPITRE 8.	CONCLUSION GENERALE ET DEVELOPPEMENTS FUTURS	147

NOMENCLATURE		150
	PREMIERE PARTIE	150
	DEUXIEME PARTIE	151
ANNEXES		152
	- GENERALITES	152
	- MISE EN OEUVRE DU FILTRE DE KALMAN	157
	- MATRICE DES MOMENTS MESURES	158
BIBLIOGRAPHIE		159
	REFERENCES SUR LA PREMIERE PARTIE	159
	REFERENCES SUR LA DEUXIEME PARTIE	162
	REFERENCES GENERALES	164



## *REMERCIEMENTS*

Monsieur JEZEQUEL, Directeur du Département de Mécanique des Solides de l'Ecole Centrale de Lyon, m'a accueilli dans son Laboratoire pour réaliser ce travail. Je lui suis reconnaissant quant à l'acquis personnel que j'en ai tiré. Je le remercie profondément de me faire l'honneur de participer à ce jury.

Je remercie très vivement Monsieur LALLEMENT, Professeur à l'Université de Franche-Comté-Besançon qui me fait l'honneur de présider le jury et qui a accepté d'être rapporteur de ce travail.

J'exprime ma grande reconnaissance à Monsieur THOMAS, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon, qui a accepté d'être rapporteur de ce travail.

Je remercie également Monsieur DECK, Directeur Technique-SOPEMA-Velizy et à Monsieur LEMBREGTS, Directeur Technique-LMS-Louvain-Belgique, qui ont accepté d'être examinateurs de ce travail.

Je dois beaucoup aux chercheurs et à tout le personnel du Département de Mécanique des Solides de l'Ecole Centrale de Lyon qui m'ont accompagné pendant mes études. Ils sont, hélas, trop nombreux pour être tous cités ici; qu'ils me pardonnent et veuillent bien se reconnaître à travers leurs responsables nommés précédemment. Je les assure tous de ma profonde reconnaissance.

## RESUME

L'identification temporelle des structures linéaires vise à déterminer les paramètres modaux d'un système dynamique par la connaissance des signaux d'excitations et des réponses.

Les méthodes d'identification dans le domaine temporel utilisent soit des réponses forcées, qui permettent la construction des fonctions de transfert, soit les réponses libres, qui facilitent la recherche des modes normaux.

En régime forcé, les fréquences propres et les facteurs d'amortissements sont extraits des fonctions de transfert comme étant les pôles de fractions rationnelles alors qu'en régime libre, ils sont obtenus comme solutions d'un problème aux valeurs propres où les vecteurs propres correspondants coïncident avec les modes complexes.

Nous retrouvons aussi cette séparation dans le cadre d'une identification non-paramétrique basée sur la représentation externe du système et une identification paramétrique basée sur la représentation interne du système. Dans une méthode d'identification non-paramétrique, les paramètres sont "abstraits" sans relation directe avec la physique du phénomène réel. Alors que les paramètres estimés lors de l'application d'une méthode d'identification paramétrique pour notre problème de structures dynamique sont ceux-là mêmes apparaissant dans le modèle de comportement que forment les lois fondamentales de la mécanique.

L'une des principales difficultés dans l'identification des structures dynamiques réside dans le choix du nombre de degrés de liberté à prendre en compte.

L'approximation linéaire du comportement des structures est souvent mise en défaut par la présence de non linéarités. Celles-ci peuvent devenir très importantes et sont alors essentielles à détecter et à identifier. Cette identification doit alors fournir un modèle susceptible de simuler le comportement non linéaire de la structure avec le plus d'exactitude possible.

Le modèle de la force interne et le modèle NARMAX permettent de déduire le comportement dynamique d'une structure non linéaire.

## **INTRODUCTION.**

## CHAPITRE I. INTRODUCTION.

Le comportement dynamique d'une structure est déterminé par la connaissance des paramètres modaux (fréquences propres, facteurs d'amortissements, formes propres des modes, ect.). Leur connaissance permettra ainsi d'affiner et de vérifier un modèle, d'analyser finement une partie d'une structure trop complexe à modéliser analytiquement.

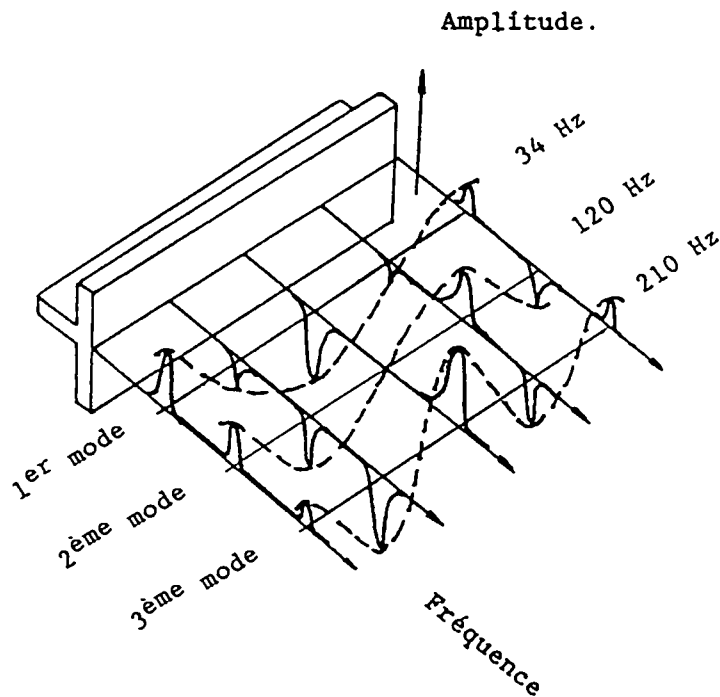


Figure 1.1.

Récemment, les deux techniques d'étude de structures les plus souvent utilisées aboutissaient à un modèle analytique à résoudre. La méthode du paramétrage global consiste à idéaliser les masses, les éléments élastiques et amortisseurs, alors que la méthode des éléments finis considère la structure comme continue avec une distribution de masse et de raideur [24].

Le grand avantage de ces méthodes est de prédire les comportements dynamiques avant que la structure ne soit construite, et de maîtriser ainsi lors de la conception les problèmes de vibration, de bruit et de fatigue.

Malheureusement, cette opération nécessite beaucoup de temps et elle est très complexe, bien que des programmes informatiques puissent effectuer le traitement de masse des données. De plus, ces opérations nécessitent beaucoup d'habileté et d'expérience de l'utilisateur. Il n'est pas exceptionnel qu'une structure, comme celle d'un avion ou d'une voiture, demande des milliers d'heures d'ingénieurs pour aboutir à la création d'un modèle qui n'est en fait qu'une approximation [21, 24]. La plupart des modèles numériques de structure doivent être vérifiés par un test dynamique réel lorsque le prototype est construit, avant de les utiliser pour les prévisions et la simulation du comportement dynamique.

La détermination à partir de tests des paramètres modaux, qui conditionne le comportement dynamique des structures, est donc un problème important [1, 2, 3, 6, 16].

Dans ce mémoire, c'est la notion d'identification dans le domaine temporel qui retiendra principalement notre attention.

On entend par identification la détermination des caractéristiques des modèles à partir de l'observation des réponses des systèmes à des excitations dynamiques. L'identification des systèmes dynamiques se divise en deux grandes familles, suivant que les réponses sont observées dans le domaine fréquentiel ou dans le domaine temporel.

Les procédures d'identification dans le domaine fréquentiel visent soit à isoler un mode normal en utilisant plusieurs points d'excitation pour des forces harmoniques dont la fréquence est proche de l'une des fréquences de résonance du système (méthode d'appropriation modale), soit à déterminer à partir des réponses fréquentielles les caractéristiques modales apparaissant dans l'expression des souplesses dynamiques (Identification modale). A l'heure actuelle les procédures d'identification les plus utilisées consistent en un lissage par la méthode des moindres carrés des fonctions de transfert pour obtenir la fraction rationnelle représentant chaque fonction de transfert qui approxime au mieux les valeurs expérimentales [18].

Les méthodes d'identification dans le domaine temporel utilisent soit des réponses forcées, qui permettent la construction des fonctions de transfert, soit les réponses libres, qui facilitent la recherche des modes normaux [1, 2, 3, 6, 11, 12, 14].

En régime forcé, les fréquences propres et les facteurs d'amortissements sont extraits des fonctions de transfert comme étant les pôles de fractions rationnelles alors qu'en régime transitoire, ils sont obtenus comme solutions d'un problème aux valeurs propres où les vecteurs propres correspondants coïncident avec les modes complexes [14, 16].

Nous retrouvons aussi cette séparation dans le cadre d'une identification non-paramétrique basée sur la représentation externe du système et une identification paramétrique basée sur la représentation interne du système. Dans une méthode d'identification non-paramétrique, les paramètres sont "abstraits" sans relation directe avec la physique du phénomène réel. Alors que les paramètres estimés lors de l'application d'une méthode d'identification paramétrique pour notre problème de structures dynamique sont ceux-là mêmes apparaissant dans le modèle de comportement que forment les lois fondamentales de la mécanique.

L'une des principales difficultés dans l'identification des structures dynamiques réside dans le choix du nombre de degrés de liberté à prendre en compte [13, 20]. Au travers de l'examen des méthodes d'identification usuelles, nous essayons de répondre à ces questions.

Le mémoire comporte deux grandes parties.

La première partie composée de trois chapitres est consacrée au problème d'identification des structures dynamiques linéaires.

La deuxième partie est divisée en trois chapitres et traite de l'identification des systèmes non linéaires.

Le premier chapitre de la première partie va nous permettre d'écrire notre problème sous plusieurs représentations, pour obtenir les relations afin d'extraire les fréquences propres et les facteurs d'amortissements. Il nous permettra aussi d'avoir une technique pour choisir le nombre de degrés de liberté à prendre en compte lors de l'identification des systèmes et d'utiliser une méthode pour le calcul des modes normaux à partir d'une sous détermination des modes complexes [9].

Le chapitre 3 (le deuxième chapitre de la première partie) traite des différentes méthodes d'identifications :

- \* La méthode d'identification par filtre de Kalman qui utilise la transformée en  $z$  et qui extrait les paramètres modaux en déterminant les coefficients des polynômes en  $z^{-1}$ .

- \* Les méthodes ITD et SSTD qui déterminent les paramètres modaux du système à partir de la réponse libre. La procédure d'analyse est basée sur la construction du modèle mathématique du système vibrant à partir de la réponse expérimentale. Le nombre de degrés de liberté du modèle est supposé égal au nombre des modes excités.

- \* L'estimation des paramètres du système, peut être réalisée par l'intermédiaire d'une méthode recursive d'identification. Pour générer un processus d'identification recursive aux variables instrumentales suffisamment précis, un critère de performance "J" est défini pour minimiser l'erreur d'identification.

- \* Une méthode d'identification utilisant une matrice d'autocorrelation associée à une ou plusieurs excitations aléatoire.

En accord avec la méthode SSTD, on propose deux nouvelles techniques d'identification à partir d'une seule réponse basée sur :

- \* l'utilisation d'une matrice d'autocorrelation
- \* l'introduction de variables instrumentales.

Dans le chapitre 4, nous étudierons l'efficacité de ces diverses méthodes sur des exemples types.

Le premier chapitre de la deuxième partie est une analyse des principales causes de nonlinéarité et leur influence sur le comportement dynamique des structures mécaniques.

Dans un second chapitre, on s'intéressera aux méthodes numériques permettant de résoudre des équations non linéaires. Cette nécessité est dictée par le fait qu'il faut simuler le comportement non linéaire des modèles pour pouvoir le comparer à l'expérience. On va s'attacher aussi dans ce chapitre à présenter diverses méthodes d'identification de modèles non linéaires. Enfin le dernier chapitre appliquera les résultats du chapitre 6 à des systèmes non linéaires à plusieurs degrés de liberté.

**REPRESENTATION ET THEORIE GENERALE DES  
SYSTEMES VIBRANTS**



## PREMIER PARTIE

### CHAPITRE II.

#### REPRESENTATION ET THEORIE GENERALE DES SYSTEMES VIBRANTS.

##### 2.1. REPRESENTATION DES SYSTEMES LINEAIRES

##### 2.1.1. REPRESENTATION DANS L'ESPACE D'ETAT.

La représentation classique de la relation entre les excitations (signaux d'entrée) et les réponses (ou signaux de sortie) des structures ou des systèmes linéaires est basée sur l'utilisation d'équations différentielles [10,11]. Elle est la plus naturelle car elle traduit de manière directe le comportement du système analysé. Cette représentation peut aussi se ramener, sans qu'il y ait équivalence absolue, à une représentation par fonction de transfert.

La représentation dans l'espace d'état permet de tirer profit des nombreux résultats disponibles en algèbre linéaire et de dégager facilement des propriétés remarquables.

Soit  $x(t)$  un vecteur de dimension  $n$  ayant les composantes suivantes :

$$x(t) = [ x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) ]^T \quad (2.1)$$

On l'appellera état  $x(t)$  du système, déterminé pour une certaine entrée  $u(t)$  connue à partir d'une valeur initiale  $x(t_0)$  donnée, pour tout  $t > t_0$ .

Un système est dit décrit dans l'espace d'état si son fonctionnement est régi par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t). \quad (2.2)$$

Le vecteur  $x(t)$  dans le cas général n'est accessible qu'à travers une observation associée à une équation modélisant la mesure :

$$y(t) = H \cdot x(t) \quad (2.3)$$

Les quantités  $A, B, H$  sont des matrices de dimensions appropriées.

### 2.1.1.1. REPRESENTATION DANS L'ESPACE D'ETAT A PARTIR DE LA REPRESENTATION PAR EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

Considérons un système linéaire gouverné par l'équation différentielle suivante :

$$y^p(\tau) + a_{p-1} \cdot y^{p-1} + \dots + a_0 \cdot y(\tau) = b_0 \cdot u(\tau) \quad (2.4)$$

où :

$$\frac{d^p y(\tau)}{d\tau^p} = y^p(\tau).$$

A partir de cette représentation nous avons la liberté de choisir plusieurs représentations possibles dans l'espace d'état . A titre d'exemple prenons un vecteur d'état  $x(t)$  dont les composantes  $X_i$  seront définies comme suit :

$$\begin{aligned} X_1(\tau) &= y(\tau) \\ X_2(\tau) &= y(\tau) = \dot{X}_1 \\ &\vdots \\ X_p(\tau) &= y^{p-1}(\tau) = \dot{X}_{p-1} \end{aligned}$$

Dès lors nous pourrons écrire :

$$\dot{X}(\tau) = A \cdot X(\tau) + B \cdot U(\tau) \quad (2.5)$$

en posant

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{p-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ b_0 \end{bmatrix}$$

H prendra dans ce cas la forme suivante :

$$H = [ 1, 0, \dots, 0 ]$$

### 2.1.1.2. RESOLUTION DES EQUATIONS D'ETAT.

Si le système défini par l'équation (2.5) n'est pas excité, nous aurons l'équation homogène suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$$

avec la condition initiale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0)$  nous aurons la solution :

$$\mathbf{x}(t) = (\exp \mathbf{A}(t-t_0)) \cdot (\mathbf{x}(0)).$$

La solution générale, dans le cas d'un système excité par une entrée  $u$  est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{x}(t) = (\exp \mathbf{A}(t-t_0)) \cdot (\mathbf{x}(0)) + (\exp \mathbf{A}(t-t_0)) \cdot \int (\exp \mathbf{A}(t-\tau)) \cdot \mathbf{B} \cdot u(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

la quantité  $\exp \mathbf{A}(t-t_0)$  est appelée matrice de transition.

#### Equations d'état dans le cas d'un système discret.

Reprenons les équations décrivant le système continu :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot u(t) \\ y(t) &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(t) + v(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pour le cas discret, on peut écrire de manière formelle les équations d'état sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= \varphi(k) \cdot X(k) + G(k) \cdot u(k) \\ y(k) &= H(k) \cdot X(k) + v(k) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

avec

$$\varphi(t-t_0) = \exp A(t-t_0) \text{ et } \varphi(k+1, k) = \varphi(k) = \exp AT$$

$$\begin{aligned} \text{si } t &= k+1 \\ t_0 &= k \text{ et } T \text{ est la période d'échantillonnage.} \end{aligned}$$

### 2.1.2. REPRESENTATION DES MODELES ARMA DANS L'ESPACE D'ETAT.

Considérons le modèle ARMA d'ordre (p,q). Pour simplifier l'écriture, nous prendrons  $p = q$

$$a_0 y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + \dots + a_p \cdot y(k-p) = b_0 \cdot u(k) + \dots + b_p \cdot u(k-p) \quad (2.9)$$

Nous nous proposons de donner une représentation de ce modèle dans l'espace d'état. Auparavant, reprenons la représentation :

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= \varphi(k) \cdot X(k) + G(k) \cdot u(k) \\ y(k) &= H(k) \cdot X(k) + v(k) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

### 2.1.3. REPRESENTATION TEMPORELLE.

Nous adopterons par la suite l'équation (2.9) écrite avec  $a_0 = 1$ , et noterons notre modèle comme suit :

$$y(k) = \sum_{i=1}^p a_i \cdot y(k-i) + \sum_{i=0}^q b_i \cdot u(k-i) \quad (2.11)$$

Ceci permet de mettre en évidence le schéma bloc de la figure 2.1

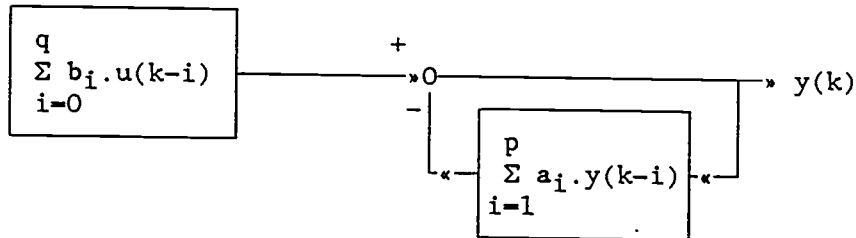


Fig.2.1 Schéma bloc de la représentation temporelle du modèle ARMA.

#### 2.1.4. REPRESENTATION DE LA TRANSFORMÉE EN Z.

Soit  $Y(z)$ , la transformée en  $z$  de la séquence  $y(k)$ , définie par :

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k) \cdot z^{-k} \quad (2.12)$$

Nous aurons à évaluer les transformées en  $z$  de  $y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-p)$ , échantillons antérieurs à  $y(k)$ . On remarque que la transformée de  $y(k-1)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} y(k-1) \cdot z^{-k} &= z^{-1} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} y(k-1) \cdot z^{-(k-1)} \\ &= z^{-1} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} y(k) \cdot z^{-k} = z^{-1} \cdot Y(z) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ainsi l'équation temporelle (2.11) du modèle ARMA devient :

$$\begin{aligned} Y(z) + a_1 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + \dots + a_p \cdot z^{-p} \cdot Y(z) = \\ b_0 \cdot U(z) + b_1 \cdot z^{-1} \cdot U(z) + \dots + b_q \cdot z^{-q} \cdot U(z) \end{aligned} \quad (2.14)$$

soit

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_q \cdot z^{-q}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_p \cdot z^{-p}} = \frac{B(z)}{A(z)} = H(z) \quad (2.15)$$

que nous appellerons fonction de transfert en ( $z$ ).

### 2.1.5. MODELE AUTOREGRESSIF (AR).

Dans le cas où les  $b_i$  sont nuls, sauf  $b_0$ , le modèle se réduit à :

$$y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + \dots + a_p \cdot y(k-p) = b_0 \cdot U(k) \quad (2.16)$$

La fonction de transfert  $H(z)$  peut être écrite sous la forme suivante, qui met en évidence les pôles  $p_i$  :

$$H(z) = \frac{1}{(1-p_1 \cdot z^{-1})(1-p_2 \cdot z^{-1}) \dots (1-p_p \cdot z^{-1})} \quad (2.17)$$

### 2.1.6. MODELE A MOYENNE GLISSANTE (MA).

On supposera que les  $a_i = 0 \forall i > 0$  .

$$y(k) = b_0 \cdot u(k) + \dots + b_q \cdot u(k-q) \quad (2.18)$$

Dans le domaine spectral  $A(z) = 1$ . Le modèle sera alors caractérisé par la position de ses zéros dans le plan complexe, ce qui lui vaut le nom de modèle tout zéro.

## 2.2. DEFINITION DES PROBLEMES.

L'équation matricielle de la dynamique pour un système discret de taille  $n$  est :

$$M \cdot \ddot{y} + C \cdot \dot{y} + K \cdot y = f \quad (2.19)$$

avec  $M, K, C$  matrices de taille  $n \times n$

$y$  vecteur déplacement de taille  $n \times 1$

$f$  vecteur force de taille  $n \times 1$

L'amortissement introduit est un amortissement visqueux, ce qui signifie que les pertes augmentent linéairement en fonction de la pulsation.

L'équation (2.19) est une équation différentielle du second ordre que l'on ramène au premier ordre en posant :

$$A \cdot \dot{X} + B \cdot X = F \quad (2.20)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad X = (\dot{y}; y) \tau \\ F = (0; f) \tau$$

Les matrices A et B sont de taille  $2n \times 2n$ , et les vecteurs X et F sont de taille  $2n \times 1$ .

Le système homogène associé à l'équation (2.20) admet  $2n$  valeurs propres et  $2n$  vecteurs correspondant à :

$$(\lambda_i \cdot A + B) \psi_i = 0 \quad (2.21)$$

La symétrie des matrices A et B et les propriétés d'orthogonalité permettent d'écrire :

$$\psi_i \cdot A \cdot \psi_j^T = \alpha_i \cdot \delta_{ij} \\ \psi_i \cdot B \cdot \psi_j^T = \beta_i \cdot \delta_{ij} \quad (2.22)$$

En multipliant l'équation (2.21) par  $\psi_i^T$ ,

$$\psi_i^T \cdot B \cdot \psi_i + \lambda_j \cdot \psi_i^T \cdot A \cdot \lambda_j = 0 \quad (2.23)$$

ce qui donne avec l'équation (2.22)

$$\lambda_i = - \frac{\beta_i}{\alpha_i} \quad (2.24)$$



Effectuons maintenant la transformée de Laplace de l'équation (2.20) avec :

$$\mathbf{X}(t) = \sum \xi_r(t) \cdot \psi_r \quad (2.25)$$

c'est-à-dire en décomposant  $\mathbf{X}(t)$  sur la base des modes propres (espace vectoriel de dimensions  $2n$ ).

On a alors les relations :

$$L(\mathbf{X}) = \sum_{r=1}^{2n} L(\xi_r) \cdot \psi_r$$

$$L(\dot{\mathbf{X}}) = \sum_{r=1}^{2n} L(\dot{\xi}_r) \cdot \psi_r = \sum_{r=1}^{2n} L(\xi_r) \cdot p \cdot \psi_r - \sum_{r=1}^{2n} \xi_r(0) \cdot \psi_r$$

ce qui donne :

$$(p \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \sum_{r=1}^{2n} L(\xi_r) \cdot \psi_r - \mathbf{A} \cdot \sum_{r=1}^{2n} \xi_r(0) \cdot \psi_r(0) \cdot \psi_r = L(\mathbf{F}) \quad (2.26)$$

En conjuguant avec  $\psi_i^t$ , on a :

$$(p \cdot \alpha_i + \beta_i) \cdot L(\xi_i) = \psi_i^t \cdot L(\mathbf{F}) + \alpha_i \cdot \xi_i(0)$$

d'où

$$L(\xi_i) = \frac{\psi_i^t \cdot L(\mathbf{F}) + \alpha_i \cdot \xi_i(0)}{\alpha_i(p - \lambda_i)} \quad (2.27)$$

On obtient alors pour X :

$$L(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\psi_{ik} \cdot L(\mathbf{F}) + \xi_i(0) \cdot \alpha_i}{\alpha_i(p - \lambda_i)} \cdot \psi_i$$

Si on s'intéresse à la réponse du système au point k ( $\xi_k(0)=0$ ) pour une excitation au point 1, nous pouvons déduire la fonction mono-dimensionnelle de transfert :

$$S_{1k}(p) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\psi_i^1 \cdot \psi_i^k}{\alpha_i(p - \lambda_i)}$$

Via la transformée en Z, on a :

$$S_{k1}(z) = \sum_{r=1}^{2n} \frac{\psi_i^k \cdot \psi_i^1}{\alpha_i(1 - (\exp(\lambda_i \cdot \Delta t)) \cdot z^{-1})} \text{ pour } |z| > 1.$$

Posons  $\mu_i = \exp(\lambda_i \cdot \Delta t)$ , ce qui donne :

$$S_{k1}(z) = \sum_{r=1}^{2n} \frac{\psi_i^k \cdot \psi_i^1}{(\mu_i^{-1} - z^{-1})} \frac{\mu_i^{-1}}{\alpha_i} \quad (2.28)$$

Pour un système résonant, la fonction de transfert de l'équation (2.28) est réelle dans le domaine temporel, les pôles  $\lambda_i$  sont deux à deux conjugués. Par conséquent, les vecteurs propres sont aussi deux à deux conjugués.

Soit k le point d'excitation associé à la suite d'impulsions  $(U_n)_{n \in I}$

Soit l le point de mesure associé à la suite de réponses  $(Y_n)_{n \in I}$

Nous supposons que  $\text{card}(I) < \infty$

Le système  $S = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est dit causal si  $s_k = 0$  pour  $k < 0$  et strictement causal si  $s_k = 0$  pour  $k \leq 0$ .

En utilisant cette définition et l'équation (2.28), on a l'écriture en  $Z$  suivante :

$$Y(Z) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\mu_i^{-1}}{\alpha_i} \cdot \frac{\psi_i^k \cdot \psi_i^1}{(\mu_i^{-1} - z^{-1})} \cdot U(Z) = S(Z) \cdot U(Z) \quad (2.29)$$

avec  $Y(Z), U(Z)$  transformées en  $Z$  des signaux d'excitation et de réponse.

En écrivant  $S(Z)$  sous forme de fraction rationnelle, on obtient :

$$S(Z) = \frac{P(Z^{-1})}{Q(Z^{-1})} \quad (2.30)$$

les polynômes  $P$  et  $Q$  étant des polynômes en  $Z^{-1}$ .

Explicitons ces deux polynômes à partir de l'équation (2.29)

$$Q(Z^{-1}) = \prod_{i=1}^{2n} \alpha_i \cdot (\mu_i^{-1} - Z^{-1})$$

$$P(Z^{-1}) = \sum_{i=1}^{2n} \mu_i^{-1} \cdot \psi_i^k \cdot \psi_i^1 \left( \prod_{j \neq i} \alpha_j (\mu_j^{-1} - Z^{-1}) \right) \quad (2.31)$$

Ceci permet d'écrire l'équation (2.29) sous forme abrégée :

$Q(Z^{-1}) \cdot Y(Z) = P(Z^{-1}) \cdot U(Z)$ . Nous supposons que les modes complexes ont une partie réelle positive.

Comme P,Q sont des polynômes , on les écrit :

$$Q(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{2n} a_k \cdot z^{-k}$$

$$P(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{2n-1} b_k \cdot z^{-k}$$

De ce fait , on peut écrire le problème dans le domaine temporel, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k \cdot y_{1-k} = \sum_{k=0}^{2n-1} b_k \cdot u_{1-k} \quad (2.32)$$

Si l'excitation choisie est un bruit blanc c'est-à-dire une suite de variables indépendantes centrées et de variance finie, alors le signal de réponse ( $y_n$ ), satisfaisant à l'équation (2.32) est appelé processus A.R.M.A.

D'après l'équation (2.31), nous remarquons que les  $\mu_i^{-1}$  sont les racines du polynôme  $Q(z^{-1})$ . La seule détermination des coefficients  $a_i$  et  $b_i$  permet donc, par l'intermédiaire des  $\mu_i$ , de calculer les fréquences propres et les facteurs d'amortissements du système.

En effet, puisque  $\mu_i = \exp(\lambda_i \cdot \Delta t)$ , on a :

$$f_i = \frac{1}{2\pi \cdot \Delta t} \tan^{-1} \left( \frac{S_i}{r_i} \right) \quad (\text{les fréquences propres}) \quad (2.33)$$

$$\zeta_i = \frac{-\sigma_i}{(\sigma_i^2 + \omega_i^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{les facteurs d'amortissements}) \quad (2.34)$$

avec :

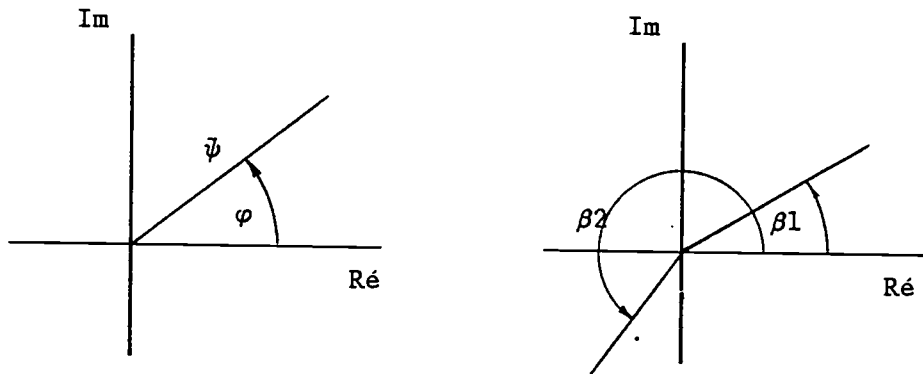
$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= 2\pi \cdot f_i \\ \sigma_i &= \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \ln (S_i^2 + r_i^2) \\ e^{\lambda_i \cdot \Delta t} &= r_i + j \cdot S_i \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Le problème de "Modal vibrations testing" détermine les valeurs de fréquences propres, de vecteurs propres et de facteurs d'amortissements du système (c'est-à-dire les paramètres modaux du système).

### 2.2.1. APPROXIMATION DES MODES NORMAUX A PARTIR DES MODES COMPLEXES [9].

Les modes normaux sont définis comme les vecteurs modaux des systèmes conservatifs associées et ont des angles de phase de 0.0 ou 180.0 degrés.

Par contre, les modes complexes font apparaître des angles de phase quelconques. Chaque élément du vecteur modal est décrit par la partie réelle et la partie imaginaire ou l'amplitude et l'angle de phase relatifs à un composant arbitraire.



Composante d'un mode complexe  $\psi$

Frontière pour le signe( $\pm$ ) d'un mode normal  $\Phi$

Fig. 2.2. Approximation des modes normaux à partir des modes complexes.

Si on a la relation des modes normaux suivante :

$$[M]^{-1} [K] \{ \Phi \} = \omega^2 \{ \Phi \} \quad (2.36)$$

On peut approximer chaque composante du mode normal  $\Phi_j$  de la façon suivante :

$$\psi_j = R_j + iI_j \quad (2.37)$$

$$\Phi_j = \pm \sqrt{\frac{2}{(Re_j^2 + Im_j^2)}} \quad (2.38)$$

où l'angle de phase  $\alpha_j$  du mode normal approximé  $\Phi_j$  dépend des relations suivantes :

$$\varphi_i = \tan^{-1} (Im_j/Re_j) \quad (2.39)$$

$$\alpha_j = 0.0 \text{ deg.} \quad \beta_2 < \varphi_i < \beta_1 \quad (2.40)$$

$$\alpha_j = 180.0 \text{ deg.} \quad \beta_1 < \varphi_i < \beta_2 \quad (\beta_1 \text{ et } \beta_2 \text{ arbitraires}) \quad (2.41)$$

Il faut ajouter qu'indépendamment du choix de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , il n'est pas acceptable d'assigner deux signes différents à deux modes normaux approximés car l'angle de phase des deux modes complexes correspondants diffèrent de quelques degrés. Chaque approximation peut aboutir à des résultats erronés et à des conclusions trompeuses.

## 2.2.2. ESTIMATION DE L'ORDRE DU SYSTEME |13|.

Lorsqu'on simule un système à entrée et sortie unique au moyen d'une équation aux différences finies, son ordre doit généralement être assigné et déterminé en comparant la qualité de coïncidence obtenue entre des modèles d'ordre différent.

Ce chapitre décrit une manière d'estimer l'ordre du système sans commencer par adapter les coefficients des modèles utilisés. Il nous donne des essais statistiques intuitifs plutôt que rigoureux. Une procédure itérative de simulation permettant d'estimer l'ordre du système sera mise en oeuvre. Cette méthode nécessite alors une seule identification (associé à l'ordre estimé) permettant ainsi un gain de temps appréciable.

### 2.2.2.1. FORMULATION MATHEMATIQUE.

Pour illustrer le problème, on prend un modèle du type ARMA de la forme

:

$$\begin{aligned} y(t) &= a(n)^T h(t,n) \\ h(t,n)^T &= (u(t-1), y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n)) \\ a(n)^T &= (a_1, a_2, \dots, a_{2n}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

En général,  $n$  est inconnu et le vecteur  $h(t,m)$  est considéré pour plusieurs valeurs de  $m$ . Le test à développer est basé sur une matrice mesurée de produit - moment  $Q(h,m)$  de dimension  $(2m \times 2m)$ .

$$Q(h,m) \approx 1/N \sum_{t=1}^N h(t,m) h(t,m)^T \quad (2.43)$$

$Q(h,m)$  est singulière si  $m > n$  :

$$\text{On a } \text{rank } Q(h,m) = m + n \quad (2.44)$$

si l'entrée  $u(t)$  est suffisamment indépendante, c'est-à-dire, si  $u(t)$  est linéairement indépendante de  $u(t-1)$ ,  $u(t-2)$ , ...,  $u(t-m)$ . Comme  $Q(h,m)$  est une matrice semi définitive positive ;

$$\det Q(h,m) = \begin{cases} > 0 & m \leq n \\ = 0 & m \geq n \end{cases} \quad (2.45)$$

$n + m$  valeurs propres de  $Q(h,m)$  sont positives et les autres nulles.

Comme le vecteur  $h(t,m)$  mesuré contient le bruit aléatoire  $v$ , on a donc :

$$z(t,m) = h(t,m) + v(t,m) \quad (2.46)$$

et

$$E\{v(t,m)v(t,m)^T\} = \sigma^2 R(v,m) \quad (2.47)$$

et la matrice mesurée de produit-moment devient :

$$Q(z,m) = 1/N \sum_{t=1}^N z(t,m) z(t,m)^T \quad (2.48)$$

avec

$\text{rank } Q(z,m) = 2m$  et  $\det Q(z,m) > 0$  pour toutes les valeurs de  $m$ .

Le test d'ordre du système porte donc sur la singularité de  $Q(h,m)$  pour  $m > n$ .

### *Intensification d'une matrice mesurée de produit-moment Q*

Par indépendance des erreurs et de l'ergodicité des signaux, la matrice de covariance du bruit peut être décomposée en une partie attribuable au signal et une partie attribuable au bruit.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q(z,m) = \lim_{N \rightarrow \infty} Q(h,m) + \sigma^2 R(v,m) \quad (2.49)$$



On peut donc estimer  $Q_{es}(h, m)$  à partir de  $Q(h, m)$  pour  $N \rightarrow \infty$  :

$$Q_{es}(h, m) = Q(z, m) - \sigma_{es}^2 R(v, m) \quad (2.50)$$

où  $\sigma_{es}^2$  est à déterminer.

Par la relation (2.46), pour  $m > n$  ;

$$\det Q_{es}(h, m) = 0 \quad (2.51)$$

Il est donc naturel d'imposer  $\det Q_{es}(h, m) = 0$ ,

$$\det(Q(z, n) - \sigma_{es}^2 R(v, n)) = 0 \quad (2.52)$$

avec  $\sigma_{es}^2 =$  valeurs propres de  $Q(z, m)$ , si  $m > n$ .

On appelle  $Q_{es}(h, m)$  une intensification d'une matrice mesurée de produit-moment  $Q$  et  $Q(z, m)$  une matrice mesurée de produit-moment  $Q$  sans intensification.

La plus petite des valeurs propres, ou la valeur propre généralisée si  $R \neq I$ , est prise pour  $\sigma_{es}^2$ . On la trouve si la valeur de  $m$  est grande, et on la reporte dans l'équation (2.50) pour définir  $Q_{es}(h, m)$  pour tous les  $m$ .

### 2.2.2.2. ALGORITHME DE TEST DU FACTEUR DE DETERMINANT (FD).

Pour  $m > n$ , on a  $\det Q_{es}(h, m) \approx 0$ . Pour normaliser le test du facteur de déterminant, on forme la relation :

$$FD(m) = \det Q_{es}(h, m) / \det Q_{es}(h, m+1) \quad (2.53)$$

S'il n'y a pas de bruit,  $FD(m)$  prend une valeur importante pour  $m = n$ .

Il faudra donc construire l'algorithme de test suivant :

- Former  $FD(m)$  pour chaque  $m$  intéressant et chercher la valeur du saut .
- Si on a un saut important (  $FD(m) \geq FD(m-1)$  ), on prend  $n = m$ .

On peut aussi construire un test sur le facteur de déterminant en utilisant la matrice  $Q(z,m) |13|$  :

$$FD^*(m) = \det Q(z,m) / \det Q(z,m+1) \quad (2.54)$$

La figure 2.3 suivante représente la comparaison entre les deux formules (Eq.(2.53) et (2.54)) à partir des résultats du chapitre 4.1.1.1.

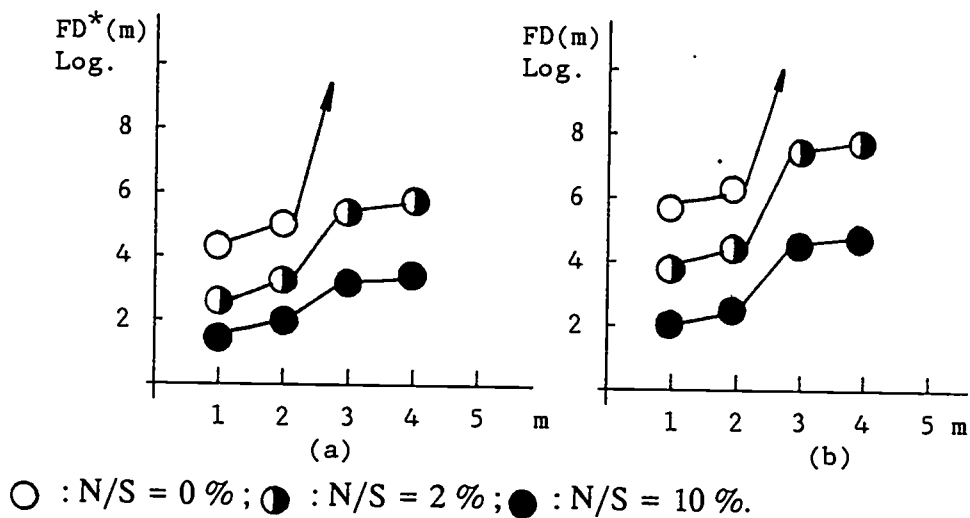


Figure.2.3. Facteur du déterminant  $FD^*$  et  $FD$  ( $n=3$ )

Figure 2.3.a. nous donne les résultats du saut de  $FD^*(m)$  en  $m = 3 = n$  pour plusieurs valeurs du facteur de bruit  $N/S = 0\%$ ,  $N/S = 2\%$  et  $10\%$ .

Figure 2.3.b. nous donne les résultats du saut de  $FD(m)$  en  $m = 3 = n$  pour plusieurs valeurs du facteur de bruit  $N/S = 0\%$ ,  $N/S = 2\%$  et  $N/S = 10\%$ .

On remarque que les valeurs du saut de  $FD(m)$  sont plus grandes que les valeurs du saut de  $FD^*(m)$ , ce qui montre l'efficacité de la formule  $FD(m)$  (équation 2.53).

## TECHNIQUES D'IDENTIFICATION

## CHAPITRE III.

### TECHNIQUES D'IDENTIFICATION

#### 3.1. IDENTIFICATION EN UTILISANT LA TRANSFORMÉE EN Z

##### 3.1.1. GENERALITES

On peut récrire l'équation (2.28) qui utilise la notion de transformée en z sous la forme suivante :

$$S_{k1}(z) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{A_i}{(\mu_i^{-1} - z^{-1})} \mu_i^{-1} \quad (3.1)$$

avec :

$$A_i = \frac{\psi_i^k \cdot \psi_i^1}{\alpha_i} \quad (3.2)$$

$A_i$  est une matrice modale constante d'ordre  $2n \times 2n$ .

On sait que les éléments de la matrice de transfert sont les fonctions de transfert reliant une composante de l'entrée et une composante de la sortie (fig.3.1) :

$$Y_k(z) = S_{k1}(z) \cdot U_1(z) \quad (3.3)$$

ou bien en forme abrégée :

$$Y(z) = S(z) \cdot U(z) \quad (3.3)$$

avec  $Y(z)$ ,  $U(z)$  transformée en Z des signaux d'excitation et de réponses.

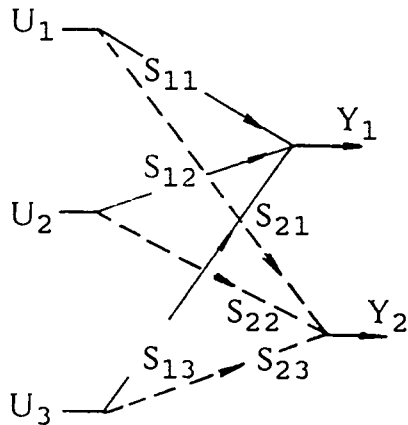


Fig.3.1 Eléments de la matrice de transfert  $\mathbf{S}(z)$  pour un système à trois entrées et deux sorties.

En écrivant  $\mathbf{S}(z)$  sous la forme de fraction rationnelle, on obtient :

$$\mathbf{S}(z) = \frac{\mathbf{P}(z^{-1})}{\mathbf{Q}(z^{-1})} \quad (3.4)$$

les polynômes  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  étant des polynômes en  $z^{-1}$ .

Comme dans le chapitre 2. on peut écrire l'équation (3.3) sous une forme abrégée :

$$\mathbf{Q}(z^{-1}) \cdot \mathbf{Y}(z) = \mathbf{P}(z^{-1}) \cdot \mathbf{U}(z) \quad (3.5)$$

Comme  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  sont des polynômes, on les écrit :

$$\mathbf{Q}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{2n} a_k z^{-k}$$

$$\mathbf{P}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{2n-1} B_k z^{-k} \quad (3.6)$$

On obtient donc:

$$Y(z)(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\dots+a_{2n}z^{-2n}) = (B_1z^{-1}+B_2z^{-2}+\dots+B_{2n}z^{-2n})U(z) \quad (3.7)$$

De ce fait, on peut maintenant écrire le problème dans le domaine temporel, ce qui donne :

$$Y(k)+a_1Y(k-1)+a_2Y(k-2)+\dots+a_{2n}Y(k-2n) = B_1U(k-1)+B_2U(k-2)+\dots+B_{2n}U(k-2n) \quad (3.8)$$

Si l'excitation choisie est un bruit blanc, alors le signal de réponse  $Y(k)$ , satisfaisant à (3.8), est appelé processus A.R.M.A

Nous allons utiliser deux méthodes pour déterminer les coefficients  $a_1$  et  $B_1$

:

- Identification à l'aide d'un filtre de Kalman
- Algorithmes des moindres carrés.

### *Modèle univariable*

Lorsqu'on utilise une seule composante de l'entrée et une seule de la sortie au cours des tests de vibration, l'équation (3.8) correspond à un modèle univariable A.R.M.A.

On peut donc obtenir pour  $k = 2n, 2n+1, 2n+2, \dots, N$  la relation :

$$Y = \theta \varphi \quad (3.9)$$

avec :

$$Y = [Y(2n) \ Y(2n+1) \ \dots \ Y(N)] \quad (3.10)$$

$$\theta = [-a_1 \ -a_2 \ \dots \ -a_{2n} \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{2n}] \quad (3.11)$$

où  $\varphi$  est une matrice d'ordre  $4n \times (N-2n+1)$

$$\varphi = \begin{bmatrix} Y(2n-1) & Y(2n) & \dots & Y(N-1) \\ Y(2n-2) & Y(2n-1) & \dots & Y(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(0) & Y(1) & \dots & Y(N-2n) \\ U(2n-1) & Y(2n) & \dots & U(N-1) \\ U(2n-2) & Y(2n-1) & \dots & U(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U(0) & U(1) & \dots & U(N-2n) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

L'estimation de  $\theta$  peut être obtenue par plusieurs méthodes, ici, on utilisera la méthode d'identification par le filtre de Kalman et l'algorithme des moindres carrés.

### Modèle multivariable

Si on peut expliciter la matrice modale constante  $\mathbf{A}_i$  sous la forme :

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Sachant que les matrices  $\mathbf{A}_i$  sont symétriques et que  $a_{ij}^1 = \psi_i^1 \psi_j^1 / \alpha_i$  on peut obtenir le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre  $\psi_i$  à partir d'une colonne ou d'une ligne de la  $i^{\text{ème}}$  matrice modale constante  $\mathbf{A}_i$ .

Dans le cas d'une seule excitation et de plusieurs réponses, une colonne de la matrice  $\mathbf{A}_i$  est estimée et l'équation (3.8) devient :

$$Y(k) + a_1 Y(k-1) + a_2 Y(k-2) + \dots + a_{2n} Y(k-2n) = b_1 U(k-1) + b_2 U(k-2) + \dots + b_{2n} U(k-2n) \quad (3.14)$$

On est donc ramené à l'étude de  $n$  modèles univariés ( $Y_i$ ).

$$Y_i(k) + a_1 Y_i(k-1) + a_2 Y_i(k-2) + \dots + a_{2n} Y_i(k-2n) = b_1^{(i)} U(k-1) + b_2^{(i)} U(k-2) + \dots + b_{2n}^{(i)} U(k-2n) \quad (3.15)$$

où  $b_k^{(i)}$  est la  $i$ ème composante du vecteur  $b_k$ . De la même manière que précédemment, on peut estimer les paramètres :

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{2n}^{(i)} \text{ et } b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \dots, b_{2n}^{(i)} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, 2n.$$

Pour l'estimation finale de  $a_i$ , on prend la moyenne des résultats de ses estimations individuelles, l'estimation de  $b_i$  est formée à l'aide des  $n$  estimations :

$$b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_{2n}^{(i)}.$$

Dans le cas d'une seule réponse et de plusieurs excitations, une seule ligne de  $A_i$  va être estimée. Ici le vecteur ligne de  $b_i^T$  remplace la matrice  $B_i$  et le vecteur réponse  $Y$  va être remplacé par l'élément  $Y$  pour obtenir :

$$Y(k) + a_1 Y(k-1) + a_2 Y(k-2) + \dots + a_{2n} Y(k-2n) = b_1^T U(k-1) + b_2^T U(k-2) + \dots + b_{2n}^T U(k-2n) \quad (3.16)$$

La procédure d'estimation de  $a_i$  et  $b_i^T$  est la même que le cas d'une seule excitation et de plusieurs réponses.

Dans le cas de plusieurs excitations et de plusieurs réponses le modèle univarié A.R.M.A peut être développé pour la  $i$ ème composante de la réponse  $Y$  comme :

$$Y_i(k) + a_1 Y_i(k-1) + a_2 Y_i(k-2) + \dots + a_{2n} Y_i(k-2n) = \begin{pmatrix} (i) \\ b_1 \end{pmatrix}^T U(k-1) + \begin{pmatrix} (i) \\ b_2 \end{pmatrix}^T U(k-2) + \dots + \begin{pmatrix} (i) \\ b_{2n} \end{pmatrix}^T U(k-2n) \quad (3.17)$$



où  $Y_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur réponse  $\mathbf{Y}$  et  $(b^{(i)})^T$  est la  $i^{\text{ème}}$  colonne du coefficient matrice  $\mathbf{B}$  dans l'équation (3.8).

La procédure permettant d'estimer le coefficient  $d_i$  et le vecteur  $(b^{(i)})^T$  peut être effectuée individuellement pour toutes les composantes de la réponse  $\mathbf{Y}$ , comme nous l'avons déjà montré précédemment. La moyenne de toutes les estimations individuelles de  $a_i$  sont utilisées pour obtenir la valeur moyenne de  $d_i$  et toutes les estimations de  $(b^{(i)})^T$  forment la matrice modale constante  $\mathbf{B}$ .

*Détermination des formes modales ou formes propres.*

Dans le cas du modèle multivariable A.R.M.A. on peut aussi déterminer les formes propres de ce système. Comme  $\mu_i = \exp(\lambda_i \Delta t)$ , les équations (3.1) et (3.4) deviennent :

$$S_{kl}(z) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\mathbf{A}_i}{(1 - z^{-1}\mu_i)} \quad (3.18)$$

On multiplie les deux côtés de l'équation ci dessus par  $(1 - z^{-1}\mu_j)$ , pour obtenir :

$$(1 - z^{-1}\mu_j) S_{kl}(z) = \mathbf{A}_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2n} \frac{\mathbf{A}_i}{(1 - z^{-1}\mu_i)} (1 - z^{-1}\mu_j) \quad (3.19)$$

Comme la relation doit être vraie pour toutes valeurs de  $z$ , on prend  $z = \mu_j$ , ce qui donne :

$$\mathbf{A}_j = (1 - z^{-1}\mu_j) S_{kl}(z) \Big|_{z=\mu_j} \quad (3.20)$$

Il est clair que cette procédure peut être utilisée pour obtenir la matrice modale constante  $\mathbf{A}_i$  :

$$\mathbf{A}_i = (1 - z^{-1}\mu_i) S_{kl}(z) \Big|_{z=\mu_i} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.21)$$

A une constante près, n'importe quelle colonne ou ligne de la matrice  $\mathbf{A}_i$  représentera le  $i^{\text{ème}}$  mode dynamique de la structure. De la même façon, dans le cas d'un seul point d'excitation, la colonne des formes propres peut être déterminée par :

$$\mathbf{a}_i = (1 - z^{-1}\mu_i) S_{k1}(z)|_{z=\mu_i} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.22)$$

Dans le cas de plusieurs excitations et d'une seule réponse la relation (3.21) devient :

$$\mathbf{a}_i^T = (1 - z^{-1}\mu_i) S_{k1}^T(z)|_{z=\mu_i} \text{ pour } i=1, 2, \dots, n \quad (3.23)$$

### 3.1.2. IDENTIFICATION A L'AIDE D'UN FILTRE DE KALMAN [10,11].

#### 3.1.2.1. Généralités.

Nous reprendrons le système représenté dans l'espace d'état par les équations :

$$\underline{\Theta}(k+1) = \Phi(k+1) \underline{\Theta}(k) + B(k) \underline{f}(k) \quad (3.24)$$

$$\underline{y}(k) = C(k) \underline{\Theta}(k) + \underline{v}(k) \quad (3.25)$$

$\underline{f}(k)$ , processus excitateur, et  $\underline{v}(k)$ , bruit de mesure, sont supposés indépendants, blancs et de moyenne nulle :

$$E[\underline{f}(k)] = 0 \quad (3.26)$$

$$E[\underline{v}(k)] = 0 \quad (3.27)$$

$$E[\underline{f}(k)\underline{v}^T(1)] = 0 \quad \forall k, 1 \quad (3.28)$$

$$E[\underline{f}(k)\underline{f}^T(1)] = Q(k)\delta(k, 1) \text{ et } E[\underline{\Theta}(0)\underline{f}^T(k)] = 0 \quad \forall k \quad (3.29)$$

$$E[\underline{v}(k)\underline{v}^T(1)] = R(k)\delta(k, 1) \quad E[\underline{\Theta}(0)\underline{v}^T(k)] = 0 \quad \forall k \quad (3.30)$$

$Q(k)$  et  $R(k)$  étant respectivement les matrices de covariance du processus excitateur et du bruit de mesure.

Le problème consiste ici à estimer le vecteur d'état  $\underline{\theta}(k)$  compte tenu des informations disponibles à l'instant  $n$ , postérieur, antérieur ou identique à l'instant  $k$ .

Nous aurons en principe à considérer les trois cas suivants :

\*  $k = n$  : Il s'agit dans ce cas de donner une estimation de l'état, compte tenu de toutes les mesures disponibles à l'instant considéré  $n$ . C'est le cas du filtrage.

\*  $k < n$  : On ne tiendra compte que d'une partie des mesures disponibles. On fait alors un lissage ou une interpolation.

\*  $k > n$  : Il s'agit dans ce cas de prévoir le vecteur d'état. c'est ce qu'on appelle la prédiction ou extrapolation.

Nous noterons, pour ces différents cas, une telle estimation par :  $\underline{\theta}(k/n)$ , c'est-à-dire l'estimation à l'instant  $k$  compte tenu des informations disponibles à l'instant  $n$ .

On définit aussi une telle estimation par la valeur moyenne du vecteur d'état compte tenu des mesures  $\{ \underline{y}(1), \dots, \underline{y}(n) \}$ . Cette moyenne est exprimée par l'espérance mathématique conditionnelle notée comme suit :

$$\underline{\theta}(k/n) = E [ \underline{\theta}(k) | \underline{y}(1), \dots, \underline{y}(n) ] \quad (3.31)$$

Nous savons que l'évolution du vecteur d'état est caractérisée par la matrice de transition  $\Phi(k, k-1)$ . Intuitivement on peut admettre que l'évolution de l'estimation du vecteur d'état  $\underline{\theta}_{es}(k/n)$  sera également caractérisée par matrice de transition.

En d'autres termes nous aurons :

$$\underline{\theta}(k/k-1) = \Phi(k, k-1) \underline{\theta}(k-1/k-1) \quad (3.32)$$

Cette relation peut être obtenue de manière rigoureuse en appliquant la définition donnée par relation (3.31) à l'équation (3.24) soit :

$$E[\underline{\Theta}(k) | \underline{Y}(k), \dots, \underline{Y}(k-1)] = \Phi(k/k-1) E[\underline{\Theta}(k-1) | \underline{Y}(1), \dots, \underline{Y}(k-1)] + \mathbf{B}(k-1) E[\underline{f}(k) | \underline{Y}(1), \dots, \underline{Y}(k-1)] \quad (3.33)$$

Soit encore :

$$\underline{\Theta}_{es}(k/k-1) = \Phi(k, k-1) \underline{\Theta}_{es}(k-1/k-1)$$

Sachant que :

$$E[\underline{f}(k) | \underline{Y}(1), \dots, \underline{Y}(k-1)] = 0$$

Notre objectif est d'avoir une estimation récursive du vecteur d'état, qui, à partir d'une estimation à l'instant  $k$ , nous fournisse, une nouvelle estimation, en tenant compte d'une mesure disponible à l'instant  $k+1$ .

Nous adopterons une estimation linéaire de la forme :

$$\underline{\Theta}_{es}(k/k) = \underline{\Theta}_{es}(k/k-1) + K(k) [\underline{Y}(k) - \mathbf{C}(k) \underline{\Theta}_{es}(k/k-1)] \quad (3.34)$$

$K(k)$  est appelé gain du filtre de Kalman.

La relation (3.34) exprime le fait que la nouvelle estimation du vecteur d'état à l'instant  $k$ , est égale à l'estimation à l'instant  $k-1$ , mise à jour avec un certain poids. Cette mise à jour tient compte de l'écart entre la mesure effective et la mesure prédite.

Nous devons donc déterminer le poids  $K(k)$  à accorder à cette mise à jour de sorte que l'erreur, au sens des moindres carrés, entre l'état et son estimation soit minimale.

Soit  $e(k)$  l'erreur d'estimation :

$$\underline{e}(k) = \underline{\Theta}(k) - \underline{\Theta}_{es}(k/k) \quad (3.35)$$

Il faudra donc minimiser la matrice de covariance de l'erreur  $P(k/k)$  :

$$\begin{aligned} P(k/k) &= E [(\underline{\Theta}(k) - \underline{\Theta}_{eS}(k/k))(\underline{\Theta}(k) - \underline{\Theta}_{eS}(k/k))^T] \\ &= E (\underline{e}(k)\underline{e}^T(k)) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Pour cette raison, le filtre de Kalman est un filtre à minimum de variance.

### 3.1.2.2. EXPRESSION DE LA MATRICE DE COVARIANCE DE L'ERREUR $P(K/K)$ .

Nous allons, à partir des équations d'états et de la relation linéaire de l'estimateur, expliciter la matrice de covariance  $P(k/k)$  en fonction du gain  $K(k)$ .

Reprenons les relations (3.24) et (3.32).

$$\underline{\Theta}(k) = \Phi(k, k-1) \underline{\Theta}(k-1) + \mathbf{B}(k-1) \underline{f}(k-1)$$

$$\underline{\Theta}_{eS}(k/k-1) = \Phi(k, k-1) \underline{\Theta}_{eS}(k-1/k-1)$$

En les soustrayant il vient :

$$\begin{aligned} \underline{\Theta}(k) - \underline{\Theta}_{eS}(k/k-1) &= \Phi(k, k-1) [(\underline{\Theta}(k-1) - \underline{\Theta}_{eS}(k-1/k-1))] \\ &\quad + \mathbf{B}(k-1) \underline{f}(k-1) \end{aligned} \quad (3.37)$$

D'après la relation (3.36) définissant  $P(k/k)$  nous aurons :

$$P(k/k-1) = E [(\underline{\Theta}(k) - \underline{\Theta}_{eS}(k/k-1))(\underline{\Theta}(k) - \underline{\Theta}_{eS}(k/k-1))^T] \quad (3.38)$$

D'où, en prenant les espérances mathématiques des deux membres de l'équation (3.37).

$$\begin{aligned} P(k/k-1) &= \Phi(k, k-1) E [(\underline{\Theta}(k-1) - \underline{\Theta}_{eS}(k-1/k-1))(\underline{\Theta}(k-1) \\ &\quad - \underline{\Theta}_{eS}(k-1/k-1))^T] \Phi^T(k, k-1) \\ &\quad + \mathbf{B}(k-1) E [\underline{f}(k-1)\underline{f}^T(k-1)] \mathbf{B}^T(k-1) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Cette relation peut se simplifier en tenant compte de la relation (3.29) et du fait que :

$$\begin{aligned} E[(\underline{\theta}(k-1) - \underline{\theta}_{eS}(k-1/k-1))(\underline{\theta}(k-1) - \underline{\theta}_{eS}(k-1/k-1))^T] &\equiv P(k-1/k-1) \\ P(k/k-1) &= \Phi(k, k-1)P(k-1/k-1)\Phi^T(k, k-1) \\ &\quad + B(k-1)Q(k-1)B^T(k-1) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Nous devons à ce stade du calcul exprimer  $P(k/k)$  en fonction de  $P(k/k-1)$ .

Pour ce faire, reprenons l'expression (3.35) de l'erreur  $\underline{e}(k)$  et remplaçons l'estimation  $\underline{\theta}_{eS}(k/k)$  par son expression donnée par relation (3.34).

$$\begin{aligned} \underline{e}(k) &= \underline{\theta}(k) - \underline{\theta}_{eS}(k/k) \\ \underline{\theta}_{eS}(k/k) &= \underline{\theta}_{eS}(k/k-1) + K(k) [\underline{y}(k) - C(k)\underline{\theta}_{eS}(k/k-1)] \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \underline{e}(k/k) &= \underline{\theta}(k) - \underline{\theta}_{eS}(k/k-1) - K(k)C(k)\underline{\theta}(k) + \underline{y}(k) - \\ &\quad C(k)\underline{\theta}_{eS}(k/k-1) \\ &= (I - K(k)C(k))(\underline{\theta}(k) - \underline{\theta}_{eS}(k/k-1)) - K(k)\underline{y}(k) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ou bien

$$P(k/k) \equiv E[\underline{e}(k/k)\underline{e}^T(k/k)] \quad (3.42)$$

Si on substitue l'expression (3.41) dans la relation (3.42) il vient en tenant compte de la relation  $(XY)^T = Y^T X^T$

$$\begin{aligned} P(k/k) &= (I - K(k)C(k)) E[(\underline{\theta}(k) - \underline{\theta}_{eS}(k/k-1))(\underline{\theta}(k) - \\ &\quad \underline{\theta}_{eS}(k/k-1))^T] \\ &= (I - K.C)^T + K(k) E[\underline{y}(k) - \underline{y}^T(k)] K^T(k) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Soit encore :

$$P(k/k) = (I - K.C) . P(k/k-1) . (I - K.C)^T + K(k)R(k)K^T(k) \quad (3.44)$$

### 3.1.2.3. EXPRESSION DU GAIN DU FILTRE DE KALMAN.

Il faut chercher l'expression du gain  $K(k)$  en minimisant le critère :

$$J = E[(\underline{e}^T(k/k)\underline{e}(k/k))] = \text{Trace } P(k/k) \quad (3.45)$$

La relation (3.44) est une forme quadratique en  $K(k)$ . Nous obtiendrons la valeur du gain optimal en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{\partial J(k)}{\partial K(k)} = 0 \quad (3.46)$$

soit :

$$-(I-K(k)C(k))P(k/k-1)C^T(k) + K(k)R(k) = 0 \quad (3.47)$$

d'où :

$$\begin{aligned} K(k) &= P(k|k-1)C^T(k)[C(k)P(k|k-1)C^T(k)+R(k)]^{-1} \\ P(k/k) &= P(k/k-1) - P(k/k-1) \cdot C^T(k) C(k)P(k/k-1)C^T(k) \\ &\quad + R^{-1}(k)C(k)P(k/k-1) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dans le cas continu, cette dernière équation prend la forme d'une équation différentielle de Riccati. C'est pour cette raison, que la relation (3.48) est appelée équation de Riccati discrète.

Elle peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P(k/k) &= P(k/k-1) - K(k)C(k)P(k/k-1) \\ &= (I-K(k)C(k))P(k/k-1) \end{aligned} \quad (3.49)$$

La matrice  $K(k)C(k)P(k/k-1)$  est définie positive ou, à la rigueur, semi-définie positive. Il s'en suit que tous ses éléments diagonaux seront soit positifs soit nuls. Par conséquent on pourra affirmer que :

$$\text{Trace } P(k/k) < \text{Trace } P(k/k-1) \quad (3.50)$$

et donc le critère  $J(k)$  sera décroissant ce qui garantit la convergence du filtre.

#### 3.1.2.4. INITIALISATION ET MISE EN OEUVRE DU FILTRE DE KALMAN.

Pour pouvoir utiliser l'ensemble des équations récurrentes constituant le filtre de Kalman, on doit choisir les conditions initiales,  $\underline{\theta}_{es}(0)$  et  $P(0/0)$ .

$$\underline{\theta}_{es}(0) = [E \ \underline{\theta}(0)]$$

et

$$E[(\underline{\theta}(0) - \underline{\theta}_{es}(0))(\underline{\theta}(0) - \underline{\theta}_{es}(0))^T] = P(0/0) = P(0)$$

#### 3.1.3. L'ALGORITHME DES MOINDRES CARRES.

Regardons l'équation (3.9) comme un cas unidimensionnel A.R.M.A et appelons  $y_i$  les différentes mesures effectuées. Soit  $y(t)$  une combinaison linéaire de ces mesures pondérées par des paramètres  $a_i$  et  $b_i$  que nous cherchons à déterminer.

Adoptons les notations condensées suivantes :

$$\mathbf{H} = [y_1, \dots, y_p]^T$$

$$\Theta = [a_1, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_{2n}]^T$$

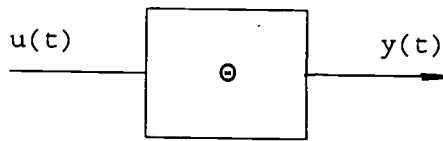
$\mathbf{H}$  et  $\Theta$  sont des vecteurs représentant respectivement les mesures et les paramètres à déterminer comme pour les équations (3.10) et (3.11).

La relation (3.51) peut alors s'écrire :

$$y(t) = \mathbf{H}^T(t) \cdot \Theta \quad (3.51)$$



Il faut remarquer que la quantité  $y(t)$  est une quantité scalaire non entachée de bruit.



On peut aussi écrire :

$$y(t) = f(\Theta, u(t)) \quad (3.52)$$

Le problème est de déterminer  $\Theta$ , connaissant l'entrée  $u(t)$  et la sortie  $y(t)$ .

Dans le cas général  $y(t)$  est entachée d'un bruit  $v(t)$

$$y(t) = \mathbf{H}^T(t) \cdot \Theta + v(t) \quad (3.53)$$

Si nous supposons que nos signaux sont échantillonnés à la période  $T$ , les divers échantillons seront :

$$y(T), y(2T), \dots, y(kT), u(T), u(2T), \dots, u(kT)$$

que nous noterons plus simplement  $y(k)$  et  $u(k)$ . Ainsi l'équation 2.36 sera désormais écrite sous la forme

$$y(k) = \mathbf{H}^T(k) \cdot \Theta + v(k) \quad (3.54)$$

Intuitivement si on augmente le nombre d'observations, le problème se ramènera à la résolution d'un système d'équations linéaires sans bruit.

Dans le cas d'un système bruité, si nous effectuons  $N+1$  mesures, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathbf{H}^T(k) \cdot \Theta + v(k) \\ y(k-1) &= \mathbf{H}^T(k-1) \cdot \Theta + v(k-1) \\ &\vdots \\ y(k-N) &= \mathbf{H}^T(k-N) \cdot \Theta + v(k-N) \end{aligned}$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ \vdots \\ y(k-N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T(k) \\ \vdots \\ \mathbf{H}^T(k-N) \end{bmatrix} \cdot \Theta + \begin{bmatrix} v(k) \\ \vdots \\ v(k-N) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Posons :

$$\mathbf{Y}(k) = [ y(k), \dots, y(k-N) ]^T$$

$$\mathbf{V}(k) = [ v(k), \dots, v(k-N) ]^T$$

et

$$\phi(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T(k) \\ \vdots \\ \mathbf{H}^T(k-N) \end{bmatrix}$$

Le système de l'équation (3.55) peut s'écrire :

$$\mathbf{Y}(k) = \phi(k) \cdot \Theta + \mathbf{V}(k) \quad (3.56)$$

où  $\mathbf{Y}(k), \Theta, \mathbf{V}(k)$  sont des vecteurs et  $\phi(k)$  est une matrice.

### CAS NON BRUITE.

$v(k) = 0$ . La solution dans ce cas est triviale et le problème se réduit à une simple inversion de matrice à condition que la matrice  $\phi$  soit inversible.

$$\Theta = \phi^{-1}(k) \cdot \mathbf{Y}(k) \quad (3.57)$$

CAS D'UNE OBSERVATION BRUITEE.

On peut écrire la relation (3.55) sous la forme :

$$\Theta = \phi^{-1} \cdot Y(k) - \phi^{-1}(k) \cdot V(k) \quad (3.58)$$

qui montre que la détermination des paramètres est directement affectée par le bruit de mesure. Ainsi, le problème n'est plus de les déterminer, car on ne peut le faire de manière exacte, mais d'estimer le vecteur des paramètres  $\Theta$ .

On a la relation :

$$\Theta_{er} = \Theta - \Theta_{es} \quad (3.59)$$

où  $\Theta_{es}$  est le vecteur des paramètres estimés.

$\Theta_{er}$  est l'erreur commise sur cette estimation.

L'erreur sur l'observation, est quant à elle :

$$Y_{er}(k) = Y(k) - Y_{es} \quad (3.60)$$

L'erreur sur l'estimation de l'observation exprime l'écart avec lequel on peut prédire cette observation.

On minimise la fonction suivante :

$$J(\Theta) = \Sigma (\text{erreurs élémentaires})^2 \quad (3.61)$$

Si  $y_{er}(k+i)$  est l'erreur commise sur l'observation  $y(k+i)$ , et si l'on considère N mesures, le critère  $J(\Theta)$  peut s'écrire :

$$J(\Theta) = \sum_{i=1}^N y_{er}^2(k+i) = y_{er}^2(k+1) + y_{er}^2(k+2) + \dots + y_{er}^2(k+N)$$

o

En prenant l'erreur sur les N mesures on peut écrire :

$$\mathbf{Y}_{er}(k) = [ y_{er}(k+1), y_{er}(k+2), \dots, y_{er}(k+N) ]^T$$

soit

$$J(\Theta) = [y_{er}(k+1) + \dots + y_{er}(k+N)] [y_{er}(k+1) + \dots + y_{er}(k+N)]^T$$

où encore :

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \mathbf{Y}_{er}^T(k) \cdot \mathbf{Y}_{er}(k) \\ &= (\mathbf{Y}(k) - \mathbf{Y}_{es}(k))^T (\mathbf{Y}(k) - \mathbf{Y}_{es}(k)) \end{aligned} \quad (3.62)$$

La condition d'optimalité qui est :

$$\frac{\partial J(\Theta)}{\partial \Theta_{es}} \bigg|_{\Theta = \Theta_{es}} = 0$$

nous donnera les paramètres  $\Theta$  recherchés

$$\mathbf{Y}_{es}(k) = \phi(k) \cdot \Theta_{es}$$

$$J(\Theta_{es}) = (\mathbf{Y}(k) - \phi(k) \cdot \Theta_{es})^T (\mathbf{Y}(k) - \phi(k) \cdot \Theta_{es})$$

$$\frac{\partial J(\Theta)}{\partial \Theta_{es}} = -2 \cdot \phi^T(k) (\mathbf{Y}(k) - \phi(k) \cdot \Theta_{es}) = 0$$

ou, en omettant les indices k :

$$\phi^T \cdot \mathbf{Y} - \phi^T \cdot \phi \cdot \Theta_{es} = 0$$

soit

$$\Theta_{es} = (\phi^T \cdot \phi)^{-1} \cdot \phi^T \cdot \mathbf{Y} \quad (3.63)$$

### 3.2. IDENTIFICATION PAR LA METHODE D'IBRAHIM (ITD) [2,3,15].

#### 3.2.1. GENERALITES.

Le mouvement de la structure à un degré de liberté en réponse libre est régi par l'équation dynamique :

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0 \quad (3.64)$$

avec      m : masse du systeme  
             c : amortissement  
             k : raideur

La solution de cette équation différentielle linéaire à coefficients constants est de la forme

$$x(\tau) = \psi_1 \exp.(\lambda_1 \tau) + \psi_2 \exp.(\lambda_2 \tau)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réels lorsque l'amortissement est important et complexes lorsque l'amortissement est plus faible, ce qui est le cas le plus fréquent.

on a :

$$\lambda_1 = \sigma + i \omega_d$$

$$\lambda_2 = \sigma - i \omega_d$$

$\omega_d$  est la pulsation d'amortissement.

Définissons  $\omega_n$  et  $\xi$  tels que :

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$$

$$\xi = c/c_C = \sigma/\omega_n$$

où  $\xi$  est le facteur d'amortissement visqueux  
 $c_C$  est le coefficient d'amortissement critique.

La réponse libre de la structure linéaire à  $m$  degrés de liberté est une combinaison linéaire de modes du type précédent, soit :

$$X_{ij} = X_i(t_j) = \sum_{k=1}^{2m} \psi_k^i \exp(\lambda_k t_j) \quad (3.65)$$

$X_i(t_j)$  étant le déplacement du point de mesure  $i$  à l'instant  $t_j$ .

En forme matricielle :

$$\emptyset = \Psi \Lambda \quad (3.66)$$

Avec :

$$\emptyset = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1s} \\ x_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{2m1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2ms} \end{bmatrix}$$

$s$  étant le nombre d'instants de mesure,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_{12m} \\ \psi_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{2m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_{2ms} \end{bmatrix}$$

et

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \exp.(\lambda_1 t_1) & \cdot & \cdot & \exp.(\lambda_1 t_s) \\ \exp.(\lambda_2 t_1) & \cdot & \cdot & \exp.(\lambda_2 t_s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \exp.(\lambda_{2m} t_1) & \cdot & \cdot & \exp.(\lambda_{2m} t_s) \end{bmatrix}$$

Si on décale les instants de mesure de  $\Delta t_1$  on obtient :

$$\begin{aligned}
 x_i(t_j + \Delta t_1) &= \sum_{k=1}^{2m} \psi_{ik} \exp.\lambda_k(t_j + \Delta t_1) \\
 &= \sum_{k=1}^{2m} (\psi_{ik} \exp.\lambda_k \Delta t_1) \exp.\lambda_k t_j \\
 &= \sum_{k=1}^{2m} \hat{\psi}_{ik} \exp.(\lambda_k t_j)
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

d'où la forme matricielle, pour  $2m$  points de mesures et  $s$  instants  $t_j$  :

$$\begin{matrix} \hat{\varnothing} \\ (2m \times s) \end{matrix} = \begin{matrix} \hat{\psi} \\ (2m \times 2m) \end{matrix} \begin{matrix} \Lambda \\ (2m \times s) \end{matrix} \tag{3.68}$$

on a donc le système :

$$\varnothing = \Psi \Lambda$$

$$\hat{\varnothing} = \hat{\psi} \Lambda$$

on obtient alors :

$$\Lambda = \Psi^{-1} \varnothing$$

$$\hat{\varnothing} = \hat{\psi} \Psi^{-1} \varnothing$$

$$\hat{\varnothing} = A \varnothing \quad \text{où bien } \hat{\psi} \Lambda = A \Psi \Lambda$$

$$\hat{\psi} = A \Psi$$

On peut donc écrire la relation suivante :

$$A \psi_k = \exp.(\lambda_k \Delta t_1) \psi_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2m \tag{3.69}$$

où  $\exp.(\lambda_k \Delta t_1)$  est la valeur propre de la matrice  $A$  et  $\psi_k$  est le vecteur propre associé.

La matrice  $A$  est un système matrice qui contient tous les paramètres du système vibrant.

On obtient donc les  $\exp.(\lambda_k \Delta t_1)$  sous la forme :

$$\exp.(\lambda_k \Delta t_1) = a_k + ib_k$$

d'où on tire :

$$\left. \begin{aligned} * (\omega_d)_k &= 2\pi f_k = (1/\Delta t_1) \arctan (b_k/a_k) \\ * \sigma_k &= (1/2\Delta t_1) \ln((a_k)^2 + (b_k)^2) \\ * (c/c_c)_k &= \left( \sigma_k / \sqrt{(\sigma_k)^2 + (\omega_d)_k^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

La détermination des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice A sera effectuée par deux méthodes différentes.

### 3.2.1.1. EVALUATION DE LA PRECISION DE L'IDENTIFICATION.

La précision de toute identification des modes dans le cadre de cette étude a été quantifiée en déterminant une " Constante de corrélation des formes modales " (MSCC) entre les modes identifiés.

Sa forme fonctionnelle est celle du carré du coefficient de corrélation défini en statistique de base, et est déterminée entre 2 séquences de nombres complexes.

Mathématiquement, si  $\{\psi_1\}$  est un mode " d'entrée " connu (complexe), et  $\{\psi_2\}$  est un mode identifié, on a la relation :

$$MSCC = \frac{|(\psi_1)^T (\psi_2)^*|^2}{[(\psi_1)^T (\psi_1)^*][(\psi_2)^T (\psi_2)^*]} \times 100 \% \quad (3.71)$$

où T représente la transposée et \* le complexe conjugué.

Le MSCC entre 2 modes variera toujours de zéro ( correspondant à la non ressemblance des 2 shapes ) à 100 % pour la correspondance parfaite.



Les valeurs intermédiaires entre 0 et 100 peuvent être interprétées comme la somme d'informations cohérentes obtenues en comparant les 2 modes.

La précision portant sur les paramètres de fréquence et d'amortissement, a été seulement jugée par observation directe.

### 3.2.2 METHODE DES MOINDRES CARRES SIMPLE( SINGLE LEAST SQUARE )

Le calcul des valeurs et vecteurs propres de la matrice A peut se ramener au calcul des valeurs et vecteurs propres classiques.

$$A (\psi) = \alpha (\psi) \quad (3.72)$$

ou

$$B (\psi) = (1/\alpha) (\psi) \quad (3.73)$$

Les matrices A et B doivent satisfaire à l'équation

$$A \varnothing = \varnothing \quad (3.74)$$

et à l'équation

$$B \varnothing = \varnothing \quad (3.75)$$

Dans le cas où on obtient la matrice  $\varnothing$  en mesurant  $X_i(t_j)$  sans erreurs et sans l'influence du bruit, on a alors la matrice B égale à l'inverse de la matrice A.

Les valeurs et vecteurs propres de la matrice A contiennent les informations des paramètres modaux et les modes du bruit représentant le bruit de la mesure.

L'existence de bruit cause une dispersion de la matrice A, mais les paramètres modaux de la structure correspondante peuvent être identifiés de manière unique.

Le but de l'algorithme est alors d'identifier les valeurs et vecteurs propres de la matrice A.

Pour cela, on utilise la méthode des moindres carrés et on obtient finalement à partir de l'équation (3.74) et de l'équation (3.75) :

$$\mathbf{A} = [\hat{\phi} \phi^T][\phi \phi^T]^{-1} \quad (3.76)$$

soit

$$\mathbf{B} = [\phi \hat{\phi}^T][\hat{\phi} \hat{\phi}^T]^{-1} \quad (3.77)$$

La solution en utilisant l'équation (3.77) et l'équation (3.78) peut être appelée méthode des moindres carrés simple (single least square).

### 3.2.3. METHODE DES MOINDRES CARRES DOUBLE (DOUBLE LEAST SQUARE).

On suppose que la matrice  $\mathbf{A}$  dans l'équation (3.72), (3.74) et (3.76) est égale à la matrice  $\mathbf{A}_1$ , on peut donc écrire :

$$\mathbf{A}_1 = [\hat{\phi} \phi^T][\phi \phi^T]^{-1} \quad (3.78)$$

et

$$\mathbf{A}_1 (\psi_1) = \alpha_1 (\psi_1) \quad (3.79)$$

tandis que  $\mathbf{B}$  peut être exprimée de la façon suivante :

$$\mathbf{B} = [\phi \hat{\phi}^T][\hat{\phi} \hat{\phi}^T] \quad (3.80)$$

et

$$\mathbf{B} (\psi_1) = \beta_2 (\psi_2) \quad (3.81)$$

où

$$\beta_2 = 1/\alpha_2$$

Pour analyser les deux matrices exprimées par les équations (3.78) et (3.70), il est nécessaire de poser les hypothèses suivantes :

1. Les ordres de magnitude d'erreur des valeurs propres de la matrice  $A_1$  et de la matrices B sont les mêmes.
2. Les tendances des erreurs des valeurs propres de la matrice  $A_1$  et de la matrice B sont les mêmes.

Ces deux hypothèses sont justifiées puisque les deux matrices  $A_1$  et B sont obtenues à partir des matrices  $\emptyset$  et  $\hat{\emptyset}$ , construites à partir des mêmes données expérimentales.

La seconde hypothèse est basée sur le fait que les deux matrices  $A_1$  et B sont calculées en utilisant les mêmes procédés mathématiques d'analyse (méthode des moindres carrés simples) avec les matrices  $\emptyset$  et  $\hat{\emptyset}$  interchangées, qui donnent les mêmes tendances d'erreur.

Utilisant ces hypothèses, si le pourcentage d'erreur pour  $\alpha_1$  et pour  $\beta_1$  est  $\epsilon$  et si les quantités sans indices représentent les valeurs théoriques, alors :

$$\beta_2 = \beta ( 1 + \epsilon ) = ( 1 + \epsilon ) / \alpha = 1 / \alpha_2 \quad (3.82)$$

ce qui implique :

$$\alpha_2 = \alpha / ( 1 + \epsilon ) \quad (3.83)$$

et

$$\alpha_1 = \alpha ( 1 + \epsilon ) \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= \alpha ( 1 + \epsilon ) + \alpha / ( 1 + \epsilon ) \\ &= \alpha ( ( 2 + 2\epsilon + \epsilon^2 ) / ( 1 + \epsilon ) ) \end{aligned} \quad (3.85)$$

si  $\alpha_a$  est la valeur moyenne de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , on a :

$$\alpha_a = \alpha ( \alpha_1 + ( \epsilon^2 / 2 ) - ( \epsilon^3 / 2 ) + ( \epsilon^4 / 2 ) - ( \epsilon^5 / 2 ) + \dots ) \quad (3.86)$$

On peut ainsi noter à partir de l'équation (3.86), que si  $\epsilon < 1$  les termes d'ordre supérieur sont négligeables et les valeurs propres moyennes se rapprochent des valeurs théoriques.

En analysant les équations (3.85) et (3.86), on peut remarquer que la valeur propre moyenne sera de tendance positive mais l'erreur qui est proportionnelle à  $\epsilon^2$ , est aussi plus petite que les erreurs en  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$ , car ces dernières sont proportionnelles à  $\epsilon$ .

Pour simplifier le calcul des paramètres modaux, si l'inverse de  $\mathbf{B}$  est notée  $\mathbf{A}_2$ , on a donc :

$$\mathbf{A}_2 = [ \hat{\phi} \hat{\phi}^T ] [ \phi \phi^T ]^{-1} \quad (3.87)$$

$$\mathbf{A}_2 ( \psi ) = \alpha_2 ( \psi ) \quad (3.88)$$

Les valeurs propres de  $1/2 [ \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 ]$  sont  $1/2 ( \alpha_1 + \alpha_2 )$ , qui sont plus précises que  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$ , et, dans ce cas, la matrice des valeurs propres et vecteurs propres est :

$$\mathbf{A} = 1/2 [ [ \hat{\phi} \hat{\phi}^T ] [ \phi \phi^T ]^{-1} + [ \hat{\phi} \hat{\phi}^T ] \quad (3.89)$$

La solution en utilisant l'équation (3.89) peut être appelée méthode des moindres carrés double (double least square)

### 3.3. IDENTIFICATION PAR UNE SEULE STATION DE MESURE (SSTD) [1]

L'idée de cette méthode est de déterminer les paramètres modaux du système vibrant à partir de la réponse libre.

La procédure d'analyse est basée sur la construction du modèle mathématique du système vibrant à partir de la réponse expérimentale. Le nombre de degrés de liberté du modèle est supposé égal au nombre des modes excités.

#### 3.3.1. THEORIE GENERALE.

On peut récrire l'équation dynamique (2.19) sous la forme :

$$M \ddot{Y} + C \dot{Y} + K Y = F \quad (3.90)$$

Etant donné que les caractéristiques vibrantes recherchées sont régies par le membre de gauche de l'équation (3.90), nous ne considérons ici que la réponse libre. Nous avons, l'équation du mouvement :

$$M \ddot{Y} + C \dot{Y} + K Y = 0 \quad (3.91)$$

La solution de cette équation est :

$$\{ Y \} = \Psi \exp ( \lambda \tau ) \quad (3.92)$$

En reportant cette solution dans l'équation (3.91), nous obtenons l'équation caractéristique du système sous la forme :

$$[\lambda^2 M + \lambda C + K ] \{ \psi \} = \{ 0 \} \quad (3.93)$$

Cette équation quadratique en  $(\lambda)$  a  $2n$  racines. Pour chaque racine il existe un vecteur mode  $\psi$  associé. Ces racines peuvent être réelles ou complexes suivant que le mouvement est aperiodique avec amortissement critique, très amorti, ou non amorti.

Normalement la réponse qui contient tous les modes peut être observée à n'importe quel point arbitraire sur la structure examinée, à moins que le point soit sur un noeud d'un ou de plusieurs modes.

Pour obtenir la réponse des  $n$  premiers modes, on excite tous les modes et on filtre le signal de réponse pour ne garder que les  $n$  premiers modes. Théoriquement, on obtient la même réponse que si on excitait seulement les  $n$  premiers modes.

La réponse en déplacement en n'importe quel point de mesure s'obtient en sommant la contribution des modes :

$$y(\tau) = \sum_{i=1}^{2n} \psi_i \exp.(\lambda_i \tau) \quad (3.94)$$

Cette réponse à l'instant  $\tau_1$  peut être mise sur la forme :

$$y(\tau) = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{2n}] \begin{bmatrix} \exp.(\lambda_1 \tau_1) \\ \exp.(\lambda_2 \tau_2) \\ \vdots \\ \exp.(\lambda_{2n} \tau_{2n}) \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Les réponses mesurées à  $2n$  instants arbitraires peuvent donc être écrites sous forme matricielle :

$$[y_1, \dots, y_{2n}] = [\psi_1, \dots, \psi_{2n}] \begin{bmatrix} \exp.(\lambda_1 \tau_1) & \dots & \exp.(\lambda_1 \tau_{2n}) \\ \exp.(\lambda_2 \tau_1) & \dots & \exp.(\lambda_2 \tau_{2n}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \exp.(\lambda_{2n} \tau_1) & \dots & \exp.(\lambda_{2n} \tau_{2n}) \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

ou

$$[Y] = [\psi] [\Omega] \quad (3.97)$$

Supposons maintenant qu'on mesure les réponses en  $2n$  instants arbitraires au même point et qu'à chaque instant on fasse  $n$  mesures décalées l'une par rapport à l'autre de  $T$  ( $T$  arbitraire), ceci conduit à  $n$  équations comme en (3.97) ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$[ Y ] = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_{2n} \\ \psi_1 \exp.(\lambda_1 T) & \psi_2 \exp.(\lambda_2 T) & \dots & \psi_{2n} \exp.(\lambda_{2n} T) \\ \psi_1 \exp.(2\lambda_1 T) & \psi_2 \exp.(2\lambda_2 T) & \dots & \psi_{2n} \exp.(2\lambda_{2n} T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1 \exp.(n\lambda_1 T) & \psi_2 \exp.(n\lambda_2 T) & \dots & \psi_{2n} \exp.(n\lambda_{2n} T) \end{bmatrix} [ \Omega ]$$

(3.98)

ou

$$[ Y ] = [ \Psi ] [ \Omega ]$$

(3.99)

Pour les réponses  $[ \bar{Y} ]$  définies au même point mais à un instant décalé de  $\Delta t$  par rapport à la réponse  $[ Y ]$ , on a :

$$\bar{y}(t_1) = y(t_1 + \Delta t)$$

(3.100)

$$[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{2n}] = [\psi_1, \dots, \psi_{2n}] \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1(t_1 + \Delta t)) \dots \exp(\lambda_1(t_{2n} + \Delta t)) \\ \exp(\lambda_2(t_1 + \Delta t)) \dots \exp(\lambda_2(t_{2n} + \Delta t)) \\ \vdots \\ \exp(\lambda_{2n}(t_1 + \Delta t)) \dots \exp(\lambda_{2n}(t_{2n} + \Delta t)) \end{bmatrix}$$

(3.101)

En définissant :

$$\bar{\psi}_i = \psi_i \exp.(\lambda_i \Delta t) , i = 1, 2, \dots, 2n$$

(3.102)

on a donc :

$$[ \bar{Y} ] = [ \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{2n} ] [ \Omega ]$$

(3.103)

ou

$$[ \bar{Y} ] = [ \bar{\psi} ] [ \Omega ]$$

(3.104)

Si on répète les mesures de réponse  $n$  fois avec un décalage temporel  $T$  comme précédemment, on obtient :

$$[ \bar{Y} ] = [ \bar{\Psi} ] [ \Omega ] \quad (3.105)$$

De la même façon, les réponses  $[ \bar{\bar{Y}} ]$  qui sont obtenues avec un décalage supplémentaire  $\Delta t$  sont données par :

$$\bar{\bar{y}}(t_1) = \bar{y}(t_1 + \Delta t) = y(t_1 + 2\Delta t) \quad (3.106)$$

$$\bar{\bar{\psi}}_i = \psi_i \exp.(2\lambda_i \Delta t) \quad (3.107)$$

$$[ \bar{\bar{Y}} ] = [ \bar{\bar{\Psi}} ] [ \Omega ] \quad (3.108)$$

En combinant les équations (3.99) et (105) on obtient :

$$\begin{bmatrix} [ Y ] \\ [ \bar{Y} ] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [ \Psi ] \\ [ \bar{\Psi} ] \end{bmatrix} [ \Omega ] \quad (3.109)$$

ou

$$[ \emptyset ] = [ \psi ] [ \emptyset ] \quad (3.110)$$

Aussi, l'équation (105) et (108) nous donne :

$$\begin{bmatrix} [ \bar{Y} ] \\ [ \bar{\bar{Y}} ] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [ \bar{\Psi} ] \\ [ \bar{\bar{\Psi}} ] \end{bmatrix} [ \Omega ] \quad (3.111)$$

où

$$[ \bar{\emptyset} ] = [ \bar{\psi} ] [ \Omega ] \quad (3.112)$$

Il est clair que la matrice  $[ \Omega ]$  peut être écrite comme la matrice de Van der Monde [1], qui est non-singulière sauf s'il y a deux fréquences naturelles identiques.



Si on augmente le degré du modèle mathématique pour considérer chacun des modes dégénérés comme un mode séparés, chaque famille des modes dégénérés apparait comme un seul mode car  $[\Omega]$  devient singulière.

Les équations (3.98),(101),(3.109) et (3.111) montrent que les colonnes des matrices  $[\psi]$  et  $[\bar{\psi}]$  sont proportionnelles aux vecteurs modaux, et sont linéairement indépendantes, donc  $[\psi]^{-1}$  et  $[\bar{\psi}]^{-1}$  existent.

Si l'équation (3.110) est prémultipliée par  $[\psi]^{-1}$ , l'équation (3.112) postmultipliée par  $[\varnothing]^{-1}$  et la matrice  $[\Omega]$  éliminée entre l'équation (3.110) et l'équation (3.112), on peut obtenir :

$$[\bar{\varnothing}] [\varnothing]^{-1} [\psi] = [\bar{\psi}] \quad (3.113)$$

On peut donc proposer maintenant le système matriciel suivant:

$$[Z] = [\bar{\varnothing}] [\varnothing]^{-1} \quad (3.114)$$

En considérant chaque colonne de la relation matricielle (3.113), on obtient :

$$[Z] (\psi)_i = (\bar{\psi}_i)_i \quad (3.115)$$

Enfin, les équations (3.102) et (3.106) donnent une relation entre  $\{\psi\}_i$  et  $\{\bar{\psi}\}_i$  sous la forme :

$$(\bar{\psi})_i = \exp.(\lambda_i \Delta t) (\psi)_i \quad (3.116)$$

et avec la définition :

$$\beta_i = \exp.(\lambda_i \Delta t) \quad (3.117)$$

l'équation (3.112) peut être écrite sous la forme :

$$[ Z ] \{ \psi \} = \beta_i \{ \psi \} \quad (3.118)$$

L'équation(3.118) représente 2n équations linéaires non homogènes à 2n valeurs propres inconnues.

Par conséquent cet ensemble d'équations est solvable et permet de déterminer les 2n valeurs propres correspondantes aux 2n vecteurs propres. Il faut noter, ici, que les résultats des vecteurs propres étudiés sont les valeurs au point de mesure et non pas celles du domaine spatial entier. De toute manière, les modes de la structure peuvent être obtenus en répétant l'expérimentation avec le même type d'excitation et en mesurant la réponse libre au différents points de la structure.

Ils peuvent être obtenus aussi par prédiction de leurs formes et en répétant l'expérimentation un nombre de fois suffisant pour définir le nombre de constantes incluses dans la forme prédite.

Il est clair que les matrices  $[ \emptyset ]$  et  $[ \bar{\emptyset} ]$  ne représentent que des réponses en déplacement mesurés en un seul point de la structure.

Il faut noter que la moitié inférieure de la matrice  $[ \emptyset ]$  est identique à la moitié supérieure de la matrice  $[ \bar{\emptyset} ]$  et que la matrice  $[ Z ]$  n'est donc pas symétrique, avec une moitié supérieure de la forme  $[[ 0 ] [ I ]]$ . Pour cette raison les valeurs propres  $\beta$  et les vecteurs propres  $\{ q \}$  peuvent être soit réels soit complexes.

Aussi, comme le polynôme caractéristique de  $[ Z ]$  est d'ordre 2n à coefficients réels, les valeurs propres complexes et les vecteurs propres associés sont produits par paires conjuguées. Chaque paire conjuguée se combine pour produire le mode réel correspondant à une seule fréquence naturelle et un seul facteur d'amortissement, qui représente le mode "under damped".

Si l'on écrit  $\beta_i = A_i \pm j B_i$  pour représenter l'une des paires propres conjuguées de la matrice  $[ Z ]$  et pour sa racine caractéristique correspondante du système vibrant par  $\lambda_i = a_i \pm j b_i$ , la fréquence naturelle amortie est donc donnée par la partie imaginaire de  $\lambda_i$ ,

$$\omega_{di} = b_i \quad (3.119)$$

et la fréquence naturelle non amortie est donnée dans les termes des deux composants de  $\lambda_i$  :

$$\omega_{ni} = (a_i^2 + b_i^2)^{1/2} \quad (3.120)$$

Le facteur d'amortissement correspondant est donné par :

$$\xi_i = a_i / (a_i^2 + b_i^2)^{1/2} \quad (3.121)$$

Chaque paire de valeurs propres réelles,  $A_i$  et  $\bar{A}_i$ , et par conséquent,  $a_i$  et  $\bar{a}_i$ , peut être manipulée pour obtenir  $\omega_{ni}$  et  $\xi_i$ .

$$\omega_{ni}^2 = ((a_i + \bar{a}_i)/2)^2 - ((a_i - \bar{a}_i)/2)^2 \quad (3.122)$$

$$\xi_i = - ((a_i + \bar{a}_i)/2) (1/\omega_{ni}) \quad (3.123)$$

Si chaque paire complexe conjuguée de valeurs propres et de vecteurs propres correspondants représente un seul mode non amorti, chaque valeur propre réelle représente un mode critique ou sur amorti.

On peut conclure qu'en utilisant cette méthode, on identifie le système en déterminant les fréquences naturelles non amorties, les fréquences naturelles amorties, les facteurs d'amortissements et l'amplitude au point de mesure des vecteurs propres des modes principaux, lorsque ces modes sont sous amortis ou sur amortis.

### 3.4. IDENTIFICATION RECURSIVE AUX VARIABLES INSTRUMENTALES | 5, 7, 8, 12, 16, 37 | .

On peut écrire la représentation des équations du système sous la forme discrète suivante :

$$y(k+1) = \varphi \cdot y(k) + B \cdot u(k) \quad (3.124)$$

où :

$y(k)$  est le vecteur à  $n$  composantes des variations des réponses du système.

$u(k)$  est le vecteur à  $m$  composantes des variations des grandeurs d'entrée du système.

Commençons par récrire l'équation (3.124) sous la forme :

$$y(k+1) = \theta \cdot Z(k) \quad (3.125)$$

où :

$$Z(k) = | y^T(k), u^T(k) |^T$$

et

$$\theta = | \varphi, B |$$

L'estimation des paramètres du système, donnés par la matrice  $\theta$ , peut être réalisée par l'intermédiaire d'une méthode récursive d'identification.

Afin de déterminer l'estimation des paramètres du système, une fonction d'erreur peut être définie par :

$$e(k) = y(k) - \theta_{es}(N) \cdot Z(k-1) \quad (3.126)$$

où  $\theta_{es}(N)$  est la matrice des paramètres identifiés, calculée sur  $N$  ensembles de mesure.

Pour générer un processus d'identification suffisamment précis, un critère de performance "J" est défini pour minimiser l'erreur d'identification, :

$$J = \left( \sum_{k=1}^N e_T(k) \cdot e(k) \right) / N \quad (3.127)$$

En minimisant J, nous obtiendrons les équations récursives de l'algorithme d'estimation aux variables instrumentales.

Les équations récursives de l'identification aux variables instrumentales sont : | 7, 8, 16, 37 |

$$\theta_{es}(k) = \theta_{es}(k+1) + \left[ \frac{y(k) - \theta_{es}^T(k-1) \cdot Z(k-1)}{P(k-1) - P(k-1) \cdot Z(k-1) \cdot S^T(k-1) \cdot P(k-1) \cdot Z(k-1) + 1} \cdot S^T(k-1) \cdot P(k-1) \right] \cdot P(k-1) \cdot Z(k-1) \cdot S^T(k-1) \cdot P(k-1) \cdot Z(k-1) + 1 \quad (3.128)$$

où

P est la matrice de co-variance de l'erreur d'estimation paramétrique d'ordre  $(n+m) \times (n+m)$ .

s étant le vecteur augmenté des variables instrumentales "h" et des entrées du système "u", s est d'ordre  $(n+m) \times 1$

Alors

$$s(k) = \begin{bmatrix} h^T(k) \\ u^T(k) \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

Il existe plusieurs méthodes pour générer h. | 7, 8, 16, 37 |

La méthode choisie dans notre étude utilise l'estimation actuelle des paramètres comme modèle auxiliaire, c'est-à-dire :

$$h(k) = \theta_{es}(k) \cdot S(k-1) \quad (3.130)$$

Cette relation produit une forte corrélation entre les variables instrumentales " h " et les variables mesurées du système y , ce qui peut assurer une bonne précision du modèle identifié.

Initialisation de la matrice de covariance.

L'influence du choix de la valeur initiale de la matrice de covariance, P(0), sur le comportement du modèle identifié est très importante.

Deux méthodes d'initialisation sont proposées.

Méthode I. La matrice initiale est diagonale avec des éléments identiques, donc :

$$P(0) = \mu \cdot I_{n+m} \quad (3.131)$$

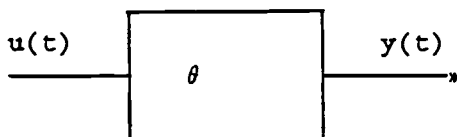
où  $\mu$  est le coefficient de pondération.

Méthode II. La matrice initiale est toujours diagonale mais le  $i^{\text{eme}}$  élément diagonal est :

$$P_{i,i}(0) = \mu / \left( \sum_{k=1}^N z_i^2(k) / N \right) \quad (3.132)$$

**3.5. IDENTIFICATION EN UTILISANT UNE MATRICE D'AUTOCORRELATION [4].**

*MULTI REPOSSES.*



On récrit l'équation (2.35) sous la forme :

$$y(t) = f(\theta, u(t))$$

Le problème dans ce cas, est de déterminer  $\theta$ , en connaissant la sortie  $y(\tau)$ .

On peut récrire l'équation (2.2) sous forme d'état :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{F} \quad (3.133)$$

avec :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}$$

Dans le cas général  $\mathbf{x}(t)$  est entachée d'un bruit  $\mathbf{v}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (3.134)$$

où  $\mathbf{y}(t)$  est un vecteur de sortie de dimension  $n$  et  $\mathbf{v}(t)$  est un vecteur de bruit de même dimension et supposé blanc.

La solution générale de l'équation (3.133) est donnée sous la forme :

$$\mathbf{X}(n \cdot \Delta t + \Delta t) = (\exp(\mathbf{A} \cdot \Delta t)) \cdot (\mathbf{X}(n \cdot \Delta t)) + \int_0^{\Delta t} \exp(\mathbf{A} \cdot (\Delta t - \tau)) \cdot (\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{f}(n \cdot \Delta t + \tau)) \cdot d\tau \quad (3.135)$$

Pour faciliter l'écriture nous adopterons les notations condensées suivantes :

$$\mathbf{X}(n+1) = \varphi \cdot \mathbf{X}(n) + \mathbf{v}(n) \quad (3.136)$$

où

$\varphi = \exp(A \cdot \Delta t)$  est appelée matrice de transition

$$v(n) = \int_0^{\Delta t} \exp(A \cdot (\Delta t - \tau)) \cdot (B) \cdot (f(n \cdot \Delta t + \tau)) \cdot d\tau$$

Si on prend  $t = n \cdot \Delta t$ , l'équation (3.134) nous donne :

$$y(n) = X(n) + v(n) \quad (3.137)$$

A partir des équations (3.136) et (3.137), on peut donc obtenir la relation :

$$y(n+1) = \varphi \cdot y(n) + v(n) - \varphi \cdot v(n) + v(n+1) \quad (3.138)$$

#### *METHODE DES MOINDRES CARRES.*

Puisque les trois derniers termes de la partie droite de l'équation (3.138) contiennent les bruits inconnus, on peut estimer la matrice  $\varphi$ , qui est obtenue à partir de la matrice  $\varphi_a$  par la méthode de moindres carrés en minimisant :

$$J(\varphi_a) = \text{tr} \left( (1/N) \cdot \sum_{n=1}^N (y(n+1) - \varphi_a \cdot y(n)) (y(n+1) - \varphi_a \cdot y(n))^T \right) \quad (3.139)$$

Ce qui nous donne l'équation normale

$$(1/N) \cdot \sum_{n=1}^N y(n+1) \cdot y^T(n) = \varphi_{es} \cdot (1/N) \cdot \sum_{n=1}^N y(n) \cdot y^T(n) \quad (3.140)$$



Maintenant, nous allons étudier la consistance de l'estimation par moindres carrés.

A partir de l'équation (3.140) on a :

$$\varphi_{es} = \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(n+1) \cdot y^t(n) \right) \cdot \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(n) \cdot y^t(n) \right)^{-1} \quad (3.141)$$

On substitue l'équation (3.140) dans l'équation (3.141) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \varphi_{es} = & \varphi + \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \{v(n) - \varphi \cdot v(n) + v(n+1)\} \cdot y^t(n) \right] \\ & \cdot \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(n) \cdot y^t(n) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.142)$$

Quand N tend vers l'infini, l'équation (3.142) devient :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{es} = & \varphi \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v(n) \cdot y^t(n) \right] \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(n) \cdot y^t(n) \right]^{-1} \\ = & \varphi \cdot \{ I - R_w(0) (R_y(0) + R_w(0))^{-1} \} \end{aligned} \quad (3.143)$$

où R est une matrice d'autocorrélation.

On dit que la méthode des moindres carrés n'est pas consistante sauf si les mesures de bruit sont nulles.

Puisque dans notre problème les séquences d'entrées (u(n)) sont inconnues, on choisit le décalage de sortie y(n-1) comme variable instrumentale.

En multipliant l'équation (3.138) par  $y^t(n-1)$  et en faisant une sommation et une division par  $N$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 (1/N) \cdot \sum_{n=1}^N y(n+1) \cdot y^t(n-1) &= \varphi \cdot ((1/N) \cdot \sum_{n=1}^N y(n) \cdot y^t(n-1)) \\
 &- \varphi \cdot ((1/N) \cdot \sum_{n=1}^N v(n) \cdot y^t(n-1)) \\
 &+ ((1/N) \cdot \sum_{n=1}^N v(n+1) \cdot y^t(n-1)) \\
 &+ ((1/N) \cdot \sum_{n=1}^N v(n) \cdot y^t(n-1)) \quad (3.144)
 \end{aligned}$$

Pour  $N \rightarrow \infty$ , les trois derniers termes du second membre de cette égalité sont négligeables, on a donc :

$$R_y(2) = \varphi \cdot R_y(1) \quad (3.145)$$

avec

$$R_y(2) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \cdot \sum_{n=1}^N y(n+1) \cdot y^t(n-1)$$

et

$$R_y(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \cdot \sum_{n=1}^N y(n) \cdot y^t(n-1)$$

On peut identifier les paramètres modaux à partir des valeurs de  $\varphi$ .

### 3.6. PRESENTATION DE DEUX NOUVELLES TECHNIQUES D'IDENTIFICATION.

En accord avec la methode SSTD, on propose deux nouvelles techniques d'identification à partir d'une seule réponse basées sur :

- l'utilisation d'une matrice d'autocorrélation
- l'introduction de variables instrumentales.

Si on répète  $n_1$  fois les mesures avec un décalage temporel  $T$  entre deux séquence de mesure [16] on peut écrire :

$$y_{n1}(n) = \begin{bmatrix} X_{dst}(n) + W(n) \\ X_{dst}(n+T) + W(n+T) \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{dst}(n+iT) + W(n+iT) \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

où  $st$  est arbitraire et  $i = 0, 1, 2, \dots, n_1$

On peut obtenir par similitude avec le cas précédent deux techniques d'identification.

#### 3.6.1. IDENTIFICATION A PARTIR D'UNE SEULE REPONSE EN UTILISANT UNE MATRICE D'AUTOCORRELATION.

Comme l'équation (3.146) est proportionnelle à l'équation (3.134) on peut obtenir par similitude avec l'équation (3.145) donnée par l'équation suivante :

$$R_{n1y}(2) = \varphi_{n1} \cdot R_{n1y}(1) \quad (3.147)$$

avec :

$$R_{n1y}(2) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \cdot \sum_{n=1}^N y_{n1}(n+1) \cdot y_{n1}^t(n-1) \quad (3.148)$$

$$R_{n1y}(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \cdot \sum_{n=1}^N y_{n1}(n) \cdot y_{n1}^t(n-1) \quad (3.149)$$

Il est à noter que l'on obtient des vecteurs modaux constitués uniquement de l'amplitude des modes à l'unique point de mesure.

### 3.6.2. IDENTIFICATION A PARTIR D'UNE SEULE REPOSE A L'AIDE DE VARIABLES INSTRUMENTALES.

On peut construire à partir de l'équation (3.146), proportionnelle à l'équation (3.125), la relation suivante :

$$y_{n1}(k+1) = \varphi_{n1} \cdot y_{n1}(k) + B \cdot u(k) \quad (3.150)$$

On écrit l'équation ci-dessus sous la forme :

$$y_{n1}(k+1) = \theta_{n1} \cdot z_{n1}(k) \quad (3.151)$$

A l'aide du processus déjà utilisé dans le cadre de la méthode instrumentale variable, on peut extraire les fréquences et les facteurs d'amortissements du système à partir de la matrice  $\theta_{n1}$ .

## **RESULTATS**

## CHAPITRE IV.

### RESULTATS

Nous allons présenter dans ce paragraphe les tests qui ont permis de comparer l'efficacité des méthodes d'identification.

Le modèle numérique utilisé correspond au système discret à trois degrés de liberté montré en figure 4.1. Pour ne pas se limiter à des simulations numériques, nous avons effectué des tests expérimentaux dans le cas de la plaque rectangulaire montrée en figure 4.6. Nous avons exploité des tests en régime libre et en régime forcé pour les diverses méthodes d'identification exposées au chapitre III.

#### 4.1. SIMULATION NUMERIQUE.

Au cours des simulations numériques nous avons testé l'efficacité des méthodes dans deux cas. Le premier correspond à un système avec des fréquences de résonance bien écartées et la seconde à un système possédant deux fréquences propres rapprochées.

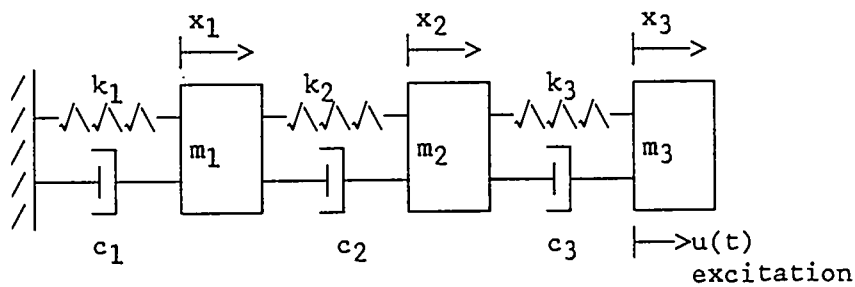


Figure 4.1.

#### 4.1.1. CAS DE FREQUENCES ECARTEES.

Nous avons choisit les valeurs de m, c et k suivantes :

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.92 \times 10^5 \text{ (N/m)}; k_2 = 1.84 \times 10^5 \text{ (N/m)}; k_3 = 0.92 \times 10^5 \text{ (N/m)}. \\ m_1 &= 2.0 \text{ (kg)}; m_2 = 1.0 \text{ (kg)}; m_3 = 3.0 \text{ (kg)}. \\ c_1 &= 0.13 \times 10^2 \text{ (Ns/m)}; c_2 = 0.26 \times 10^2 \text{ (Ns/m)}; c_3 = 0.13 \times 10^2 \text{ (Ns/m)}. \end{aligned}$$

Les fréquences, les modes et les facteurs d'amortissements de ce système sont :

$$\begin{aligned} \omega_{d1} &= 0.15655 \cdot 10^2 \text{ (Hz)} \\ \zeta_1 &= 0.00695 \\ \varphi_1 &= (0.24691; 0.34439; 0.50315) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{d2} &= 0.43402 \cdot 10^2 \text{ (Hz)} \\ \zeta_2 &= 0.01930 \\ \varphi_2 &= (-0.56047; -0.38750; 0.27177) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{d3} &= 0.95487 \cdot 10^2 \text{ (Hz)} \\ \zeta_3 &= 0.04240 \\ \varphi_3 &= (0.35342; -0.85512; 0.79482 \cdot 10^{-1}) \end{aligned}$$

Les tableaux 4.1 jusqu'à 4.9 comparent les paramètres modaux identifiés à l'aide de plusieurs méthodes d'identification et pour plusieurs valeurs du facteur de bruit ("noise to signal ratio" =  $N/S$  = RMS du bruit/RMS de la réponse)  $N/S$  = 0 %,  $N/S$  = 2 % et  $N/S$  = 10 %.

On remarque que, comme pour le cas non-bruité, l'erreur sur les fréquences (pour  $N/S = 10 \%$ ) est nettement admissible pour toutes les fréquences. L'erreur sur le facteur d'amortissement atteint les  $37 \%$  pour la fréquence la plus haute, tandis que pour la fréquence la plus basse le facteur d'amortissement est erroné dans le cas des deux méthodes utilisant des réponses libres, par contre les erreurs des deux nouvelles méthodes sont moins importantes c'est à dire  $97 \%$  et  $98 \%$  par rapport  $130 \%$  et  $141 \%$ .

Les tableaux 4.10 et 4.11 comparent les paramètres modaux identifiés à l'aide de trois méthodes d'identification pour trois valeurs différentes de l'écart de temps  $\Delta t$  et pour une valeur de  $N/S = 2 \%$ .

Les fréquences et les facteurs d'amortissement reportés dans les tableaux 4.10 et 4.11 sont satisfaisants.

Les figures 4.2 à 4.5 donnent l'influence du nombre de degrés de liberté choisis sur la précision des résultats de la méthode SSTD et des deux nouvelles méthodes.



Tableau 4.1. Résultats numériques des fréquences N/S = 0 %.

Méthode	Point	Fréquences (Hz)				erreur(%) max. (no.mode)
		Mode				
		1	2	3		
Exact	1					
	2	15.655	43.402	95.487		
	3					
I	1					
	2	15.651	43.399	95.389	0.100	
	3				(3)	
II	1	15.655	43.331	93.254		
	2	15.655	43.331	93.254	2.338	
	3	15.655	43.331	93.254	(3)	
III	1	15.653	43.396	95.507		
	2	15.653	43.396	95.507	0.020	
	3	15.653	43.396	95.507	(3)	
IV	1					
	2	15.653	43.408	95.469	0.0138	
	3				(2)	
V	1					
	2	15.650	43.396	95.469	0.031	
	3				(1)	
VI	1	15.651	43.397	95.486		
	2	15.651	43.397	95.486	0.025	
	3	15.651	43.397	95.486	(1)	
VII	1					
	2	15.653	43.408	95.469	0.0138	
	3				(2)	
VIII	1					
	2	15.650	43.396	95.469	0.031	
	3				(1)	
IX	1	15.651	43.397	95.486		
	2	15.651	43.397	95.486	0.025	
	3	15.651	43.397	95.486		

I - ITD ; VI - S.O recursive.  
 II - SSTD ; VII - Kalman  
 III - S.O.autocorrel. ; VIII - Kalman non forcé  
 IV - M.O.autocorrel. ; IX - ARMA moindres carres.  
 V - M.O.recursive I.V

Tableau 4.2. Résultats numériques des facteurs d'amortissements N/S = 0 %.

Méthode	Point	Facteurs d'amortissements			
		Mode			Erreur(%) max. (no.mode)
		1	2	3	
Exact	1				
	2	0.00695	0.01930	0.04240	
	3				
I	1				
	2	0.00683	0.01930	0.04260	1.726 (1)
	3				
II	1	0.00695	0.02010	0.04260	
	2	0.00695	0.02010	0.04260	4.145
	3	0.00695	0.02010	0.04260	(2)
III	1	0.00688	0.02000	0.04430	
	2	0.00688	0.02000	0.04430	4.481
	3	0.00688	0.02000	0.04430	(3)
IV	1				
	2	0.00682	0.01920	0.04250	1.870 (1)
	3				
V	1				
	2	0.00700	0.01930	0.04250	0.719 (1)
	3				
VI	1	0.00683	0.01940	0.04250	
	2	0.00683	0.01940	0.04250	1.726
	3	0.00683	0.01940	0.04250	(1)
VII	1	0.00683	0.01940	0.04250	
	2	0.00683	0.01940	0.04250	1.726
	3	0.00683	0.01940	0.04250	(1)
VIII	1	0.00683	0.01940	0.04250	
	2	0.00683	0.01940	0.04250	1.726
	3	0.00683	0.01940	0.04250	(1)
IX	1	0.00683	0.01940	0.04250	
	2	0.00683	0.01940	0.04250	1.726
	3	0.00683	0.01940	0.04250	(1)

I - ITD ; VI - S.O recursive I.V  
 II - SSTD ; VII - Kalman  
 III- S.O.autocorrel. ; VIII- Kalman non forcé  
 IV - M.O.autocorrel. ; IX - ARMA moindres carres  
 V - M.O.recursive I.V

Tableau 4.3. Résultats numériques des modes normalisées N/S=0%

M é t h o d e	Modes normalisées			
	Mode			
	1	2	4	
Ex.	1	0.24691	-0.56047	0.35342
	2	0.34439	-0.38750	-0.85512
	3	0.50315	0.27177	0.79482.10 <sup>-1</sup>
I	1	0.24665	-0.56041	0.35349
	2	0.34410	-0.38740	-0.85511
	3	0.50329	0.27164	0.79464.10 <sup>-1</sup>
IV	1	0.24671	-0.56043	0.35346
	2	0.34418	-0.38767	-0.85509
	3	0.50326	0.27176	0.79459.10 <sup>-1</sup>
V	1	0.24670	-0.56046	0.35359
	2	0.34412	-0.38760	-0.85502
	3	0.50328	0.27175	0.79362.10 <sup>-1</sup>
VII	1	0.24674	-0.56046	0.35345
	2	0.34420	-0.38770	-0.85507
	3	0.50326	0.27169	0.79357.10 <sup>-1</sup>

Ex. - Exact ; V - M.O.recursive I.V  
 I - ITD ; VII- Kalman  
 IV - M.O.autocorrel.

Tableau 4.4. Résultats numériques des fréquences N/S = 2 %.

Méthode	Point	Fréquences (Hz)				erreur(%) max. (no.mode)
		Mode				
		1	2	3		
Exact	1					
	2	15.655	43.402	95.487		
	3					
I	1					
	2	15.651	43.399	95.389	0.100	
	3				(3)	
II	1	15.655	43.331	93.254		
	2	15.655	43.331	93.254	2.338	
	3	15.655	43.331	93.254	(3)	
III	1	15.653	43.396	95.507		
	2	15.651	43.401	95.767	0.754	
	3	15.653	43.396	95.507	(3)	
IV	1					
	2	15.655	43.400	95.385	1.002	
	3				(3)	
V	1					
	2	15.659	43.395	95.333	0.027	
	3				(3)	
VI	1	15.651	43.397	95.486		
	2	15.658	43.397	95.234	0.264	
	3	15.651	43.397	95.486	(3)	
VII	1	15.658	43.396	95.260		
	2	15.658	43.396	95.260	0.002	
	3	15.658	43.396	95.260	(3)	
VIII	1	15.650	43.396	94.469		
	2	15.650	43.396	94.469	1.066	
	3	15.650	43.396	94.469	(3)	
IX	1	15.651	43.397	93.486		
	2	15.651	43.397	93.486	2.090	
	3	15.651	43.397	93.486	(3)	

I - ITD ; VI -S.O recursive.  
 II - SSTD ; VII -Kalman  
 III- S.O.autocorrel. ; VIII-Kalman non forcé  
 IV - M.O.autocorrel. ; IX -ARMA moindres carres.  
 V - M.O.recursive I.V

Tableau 4.5. Résultats numériques des facteurs d'amortissements N/S = 2 %.

Méthode	Point	Facteurs d'amortissements			
		Mode			Erreur(%) max. (no. mode)
		1	2	3	
Exact	1				
	2	0.00695	0.01930	0.04240	
	3				
I	1				
	2	0.00683	0.01930	0.04260	1.726 (1)
	3				
II	1	0.00695	0.02010	0.04260	4.145 (2)
	2	0.00695	0.02010	0.04260	
	3	0.00695	0.02010	0.04260	
III	1	0.00688	0.02000	0.04430	23.301 (3)
	2	0.00782	0.01909	0.04662	
	3	0.00688	0.02000	0.04430	
IV	1				
	2	0.00693	0.01930	0.04278	0.8 (3)
	3				
V	1				
	2	0.00710	0.01960	0.04271	0.7 (3)
	3				
VI	1	0.00683	0.01940	0.04250	12.517 (1)
	2	0.00735	0.02092	0.03252	
	3	0.00683	0.01940	0.04250	
VII	1	0.00683	0.01940	0.04250	1.726 (1)
	2	0.00683	0.01940	0.04250	
	3	0.00683	0.01940	0.04250	
VIII	1	0.00683	0.01940	0.04250	1.726 (1)
	2	0.00683	0.01940	0.04250	
	3	0.00683	0.01940	0.04250	
IX	1	0.00683	0.01940	0.04250	1.726 (1)
	2	0.00683	0.01940	0.04250	
	3	0.00683	0.01940	0.04250	

I - ITD ; VI - S.O recursive I.V  
 II - SSTD ; VII - Kalman  
 III- S.O.autocorrel. ; VIII- Kalman non forcé  
 IV - M.O.autocorrel. ; IX = ARMA moindres carres  
 V - M.O.recursive I.V

Tableau 4.6. Résultats numériques des modes normalisés N/S=2%

M é t h o d e		Modes normalisées		
		Mode		
		1	2	4
Ex.	1	0.24691	-0.56047	0.35342
	2	0.34439	-0.38750	-0.85512
	3	0.50315	0.27177	0.79482.10 <sup>-1</sup>
I	1	0.24766	-0.56040	0.35410
	2	0.34310	-0.38770	-0.85500
	3	0.50435	0.27161	0.79451.10 <sup>-1</sup>
IV	1	0.24558	-0.56071	0.35370
	2	0.34501	-0.38770	-0.85532
	3	0.50284	0.27164	0.79449.10 <sup>-1</sup>
V	1	0.24560	-0.56040	0.35381
	2	0.34499	-0.38768	-0.85498
	3	0.50290	0.27166	0.79458.10 <sup>-1</sup>
VII	1	0.24670	-0.56042	0.35412
	2	0.34501	-0.38771	-0.85534
	3	0.50300	0.27167	0.79360.10 <sup>-1</sup>

Ex. - Exact ; V - M.O.recursive I.V  
 I - ITD ; VII- Kalman  
 IV - M.O.autocorrel.

Tableau 4.7. Résultats numériques des fréquences N/S = 10 %.

Méthode	Point	Fréquences (Hz)				erreur(%) max. (no.mode)
		Mode				
		1	2	3		
Exact	1					
	2	15.655	43.402	95.487		
	3					
I	1					
	2	15.772	43.230	95.908	0.440	
	3				(3)	
II	1	15.811	43.204	93.158		
	2	15.811	43.204	93.158	2.430	
	3	15.811	43.204	93.158	(3)	
III	1	15.819	43.204	93.561		
	2	15.820	43.205	93.561	2.020	
	3	15.819	43.206	93.569	(3)	
IV	1					
	2	15.770	43.230	96.111	0.650	
	3				(3)	
V	1					
	2	15.768	43.239	95.995	0.530	
	3				(3)	
VI	1	15.814	43.210	93.158		
	2	15.814	43.216	93.255	2.430	
	3	15.812	43.210	93.220	(3)	
VII	1	15.778	43.223	93.561		
	2	15.778	43.221	93.561	2.020	
	3	15.778	43.221	93.561	(3)	
VIII	1	15.774	43.219	93.211		
	2	15.774	43.219	93.211	2.380	
	3	15.771	43.219	93.211	(3)	
IX	1	15.814	43.205	92.151		
	2	15.812	43.205	92.151	3.490	
	3	15.812	43.204	95.155	(3)	

I - ITD ; VI - S.O recursive.  
 II - SSTD ; VII - Kalman  
 III- S.O.autocorrel. ; VIII- Kalman non forcé  
 IV - M.O.autocorrel. ; IX - ARMA moindres carres.  
 V - M.O.recursive I.V

Tableau 4.8. Résultats numériques des facteurs d'amortissements N/S = 10 %.

Méthode	Point	Facteurs d'amortissement		
		Mode		
		1 (erreur %)	2 (erreur %)	3 (erreur%)
Exact	1			
	2	0.00695	0.01930	0.04240
	3			
I	1			
	2	0.01200	0.03100	0.05650
	3	(73)	(61)	(33)
II	1	0.01601	0.03811	0.05711
	2	0.01578	0.03809	0.05701
	3	0.01589 (130)	0.03810 (97)	0.05707 (35)
III	1	0.01380	0.03511	0.05763
	2	0.01380	0.03510	0.05760
	3	0.01378 (98)	0.03511 (82)	0.05761 (36)
IV	1			
	2	0.01052	0.02862	0.0570
	3	(51)	(48)	(34)
V	1			
	2	0.01080	0.02790	0.0565
	3	(55)	(44)	(33)
VI	1	0.01370	0.03413	0.05796
	2	0.01373	0.03410	0.05790
	3	0.01367 (97)	0.03410 (77)	0.05791 (37)
VII	1	0.01153	0.03100	0.05723
	2	0.01151	0.03123	0.05728
	3	0.01152 (65)	0.03115 (60)	0.05722 (35)
VIII	1	0.01685	0.03811	0.05709
	2	0.01682	0.03811	0.05710
	3	0.01680 (141)	0.03815 (97)	0.05702 (35)
IX	1	0.01473	0.03910	0.05790
	2	0.01464	0.03917	0.05785
	3	0.01467 (112)	0.04002 (103)	0.05793 (37)

I - ITD  
 II - SSTD  
 III- S.O.autocorrel.  
 IV - M.O.autocorrel.  
 V - M.O.recursive I.V

VI - S.O recursive I.V  
 VII - Kalman  
 VIII- Kalman non forcé  
 IX - ARMA moindres carres



Tableau 4.9. Résultats numériques des modes normalisés N/S = 10%

M é t h o d e	Modes normalisées			
	Mode			
	1	2	4	
Ex.	1	0.24691	-0.56047	0.35342
	2	0.34439	-0.38750	-0.85512
	3	0.50315	0.27177	0.79482.10 <sup>-1</sup>
I	1	0.24802	-0.56124	0.35502
	2	0.34672	-0.38700	-0.85577
	3	0.50511	0.27202	0.78358.10 <sup>-1</sup>
IV	1	0.24786	-0.56119	0.35489
	2	0.34681	-0.38715	-0.85567
	3	0.50514	0.27195	0.78410.10 <sup>-1</sup>
V	1	0.24797	-0.56122	0.35496
	2	0.34678	-0.38714	-0.85578
	3	0.50507	0.27198	0.78391.10 <sup>-1</sup>
VII	1	0.24800	-0.56128	0.35503
	2	0.34686	-0.38711	-0.85569
	3	0.50520	0.27205	0.78430.10 <sup>-1</sup>

Ex. = Exact ; V = M.O.recursive I.V  
 I = ITD ; VII= Kalman  
 IV = M.O.autocorrel.

Tableau 4.10 Résultats numériques des fréquences N/S = 2 %

METHODES	$\Delta t=0.0010$ (erreur %)	$\Delta t=0.0015$ (erreur %)	$\Delta t=0.0020$ (erreur %)
IV	15.655 43.400 95.385	15.655 43.392 95.024	15.655 43.373 94.267
V	15.659 43.395 95.333	15.653 43.410 94.964	15.656 43.335 94.475 (1.1)
VII	15.658 43.396 95.260	15.655 43.372 94.269 (1.2)	15.655 43.332 93.254 (1.2)

IV. - M.O AUTOCOREL. ; V - M.O. RECURSIVE IV

VII - KALMAN

Tableau 4.11 Résultats numériques du facteur d'amortissement  $N/S = 2\%$ .

METHODES	$\Delta t=0.0010$ (erreur %)	$\Delta t=0.0015$ (erreur %)	$\Delta t=0.0020$ (erreur %)
IV	0.00693 0.01930 0.04278	0.00694 0.01934 0.04552 (7.2)	0.00694 0.05578 (31.5) 0.05578 (31.5)
V	0.00710 0.01960 0.04271	0.00696 0.01950 0.04409 (39)	0.00696 0.01970 0.054931 (29.5)
VII	0.00683 0.01940 0.04250	0.00704 0.01956 0.05577 (25)	0.00697 0.02012 (4.4) 0.08254 (94)

IV - M.O. AUTOCORREL.    V - M.O. RECURSIVE IV.  
VII - KALMAN

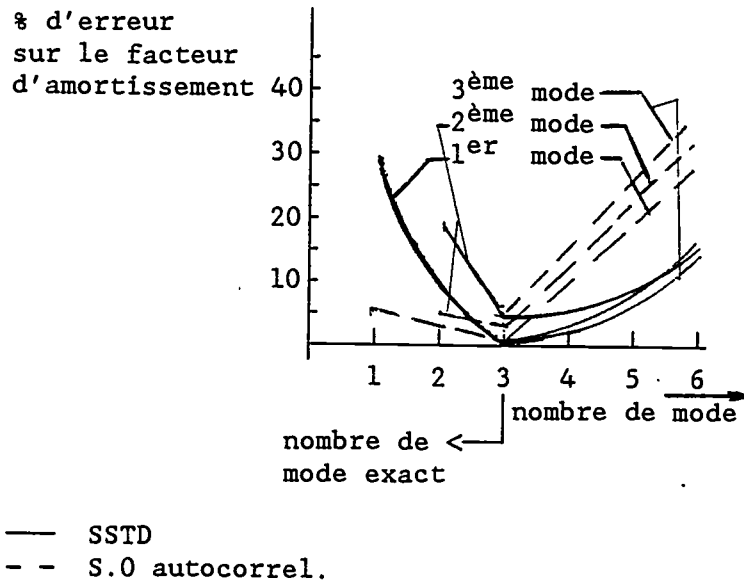


Figure 4.2.

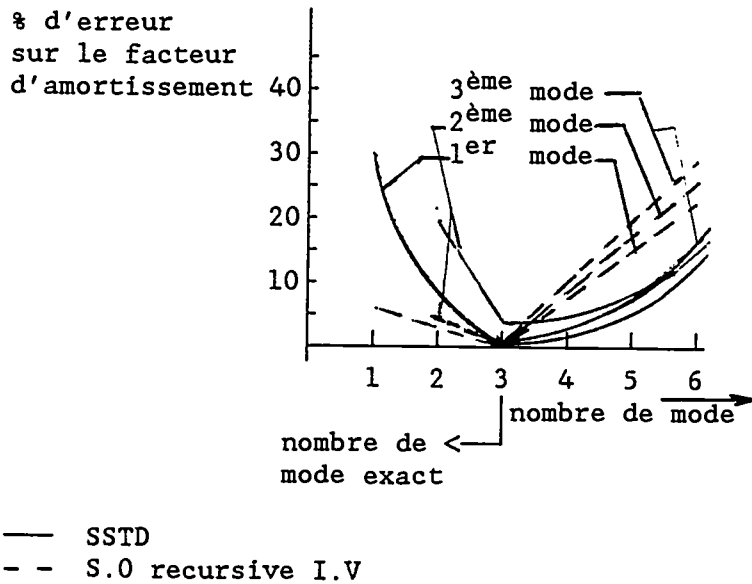


Figure 4.3.

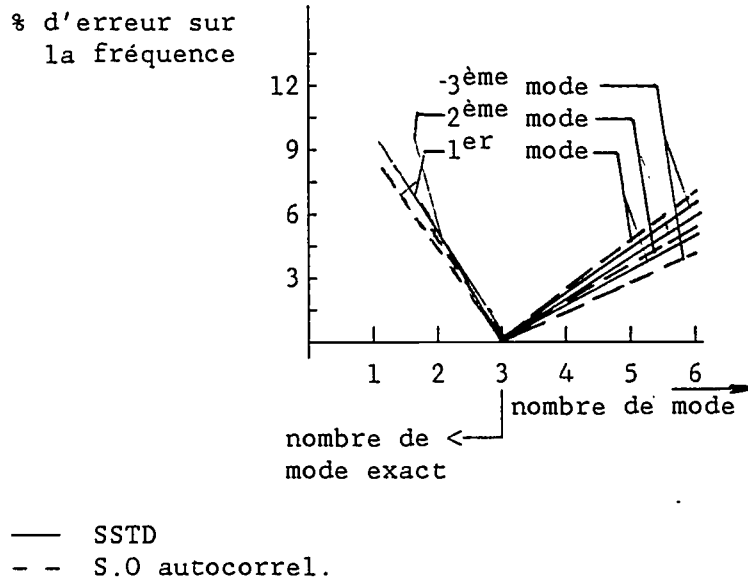


Figure 4.4.

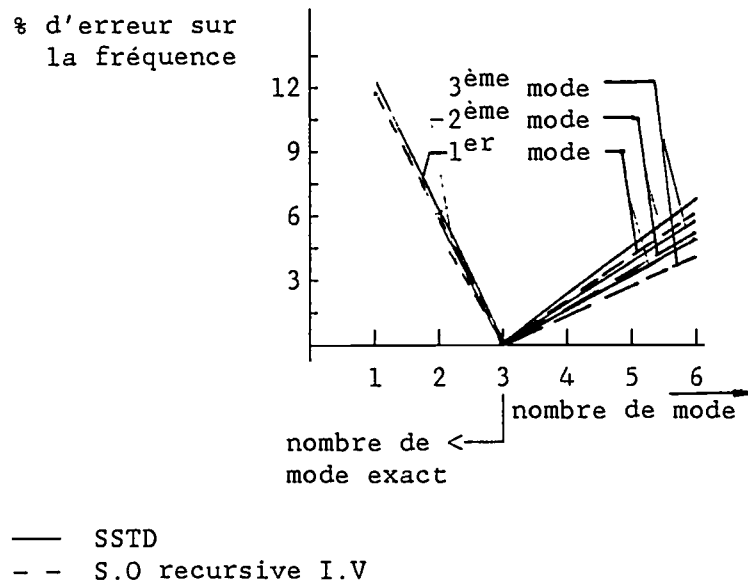


Figure 4.5.

#### 4.1.2. CAS DE DEUX FREQUENCES RAPROCHEES.

Nous avons choisit les valeurs de  $m$ ,  $c$  et  $k$  suivantes :

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.0 \times 10^4 \text{ (N/m)}; k_2 = 1.84 \times 10^2 \text{ (N/m)}; k_3 = 0.92 \times 10^3 \text{ (N/m)}. \\ m_1 &= 2.0 \text{ (kg)}; m_2 = 0.2 \text{ (kg)}; m_3 = 2.0 \text{ (kg)}. \\ c_1 &= 0.13 \times 10^2 \text{ (Ns/m)}; c_2 = 0.26 \times 10^2 \text{ (Ns/m)}; c_3 = 0.13 \times 10^2 \text{ (Ns/m)}. \end{aligned}$$

Théoriquement les fréquences, les modes et les facteurs d'amortissement de ce système sont :

$$\omega_{d1} = 1.3924 \text{ (Hz)}$$

$$\zeta_1 = 0.10653$$

$$\varphi_1 = (-103.6; 812.4; -74.165)$$

$$\omega_{d2} = 11.6160 \text{ (Hz)}$$

$$\zeta_2 = 0.14263$$

$$\varphi_2 = (-0.39641; 1.77450; -0.167240)$$

$$\omega_{d3} = 11.8040 \text{ (Hz)}$$

$$\zeta_3 = 0.04959$$

$$\varphi_3 = (-0.25546; -2.00320; 0.18288)$$

Les tableaux 4.12 à 4.17 comparent les paramètres modaux identifiés avec plusieurs méthodes d'identification et pour des variations du facteur du bruit  $N/S = 0 \%$ ,  $N/S = 2 \%$  et  $N/S = 10 \%$ .

Il est nécessaire de souligner qu'on ne peut identifier que les deux premiers modes à l'aide des méthodes IV et V et ceci pour plusieurs réponses, la troisième ne permet d'identifier que le deuxième mode à partir d'une seule réponse.

L'erreur d'identification du facteur d'amortissement modal atteint facilement 400 % sur le premier mode.

Tableau 4.12. Résultats numériques des fréquences N/S = 0 %.

Méthode	Point	Fréquences (Hz)			
		Mode			erreur(%) max. (no.mode)
		1	2	3	
Exact	1 2 3	1.3294	11.616	11.804	
IV	1 2 3	1.2701	11.216	-	4.46 (1)
V	1 2 3	1.3093	11.216	-	3.40 (2)
VII	1 2 3	-	11.216	-	3.40 (2)

IV = M.O.autocorrel. V = M.O.recursive I.V  
VII= KALMAN

Tableau 4.13. Résultats numériques des fréquences N/S = 2 %.

Méthode	Point	Fréquences (Hz)			
		Mode			erreur(%) max. (no.mode)
		1	2	3	
Exact	1 2 3	1.3294	11.616	11.804	
IV	1 2 3	1.2701	11.216	-	4.46 (1)
V	1 2 3	1.2299	11.216	-	2.20 (1)
VII	1 2 3	-	11.216	-	3.40 (2)

IV = M.O.autocorrel. V = M.O.recursive I.V  
VII= KALMAN

Tableau 4.14. Résultats numériques des fréquences N/S = 2 %.

Méthode	Point	Fréquences (Hz)				erreur(%) max. (no.mode)
		Mode				
		1	2	3		
Exact	1 2 3	1.3294	11.616	11.804		
IV	1 2 3	1.2695	11.216	-	4.5 (1)	
V	1 2 3	1.2299	11.216	-	2.2 (1)	
VII	1 2 3	-	11.053	-	4.8 (2)	

IV - M.O.autocorrel. V - M.O.recursive I.V  
VII- KALMAN



Tableau 4.15. Résultats numériques des facteurs d'amortissements N/S = 0 %.

Méthode	Point	Facteurs d'amortissements		
		Mode		
		1 (erreur %)	2 (erreur %)	3 (erreur%)
Exact	1			
	2	0.10653	0.14263	0.04959
	3			
IV	1			
	2	0.53039	0.07725	-
	3	(397)	(45.8)	
V	1			
	2	0.53673	0.07700	-
	3	(403)	(46.0)	
VII	1	-	0.07745	-
	2	-	0.07745	-
	3	-	0.07745 (45.7)	-

IV = M.O.autocorrel. ; V = M.O.recursive I.V; VII= KALMAN

Tableau 4.16. Résultats numériques des facteurs d'amortissements N/S = 2 %.

Méthode	Point	Facteurs d'amortissements		
		Mode		
		1 (erreur %)	2 (erreur %)	3 (erreur%)
Exact	1			
	2	0.10653	0.14263	0.04959
	3			
IV	1			
	2	0.53025	0.07732	-
	3	(397)	(72.9)	
V	1			
	2	0.54899	0.06040	-
	3	(415)	(78.8)	
VII	1	-	0.07844	-
	2	-	0.07844	-
	3	-	0.07844 (72.5)	-

IV = M.O.autocorrel. ; V = M.O.recursive I.V; VII= KALMAN

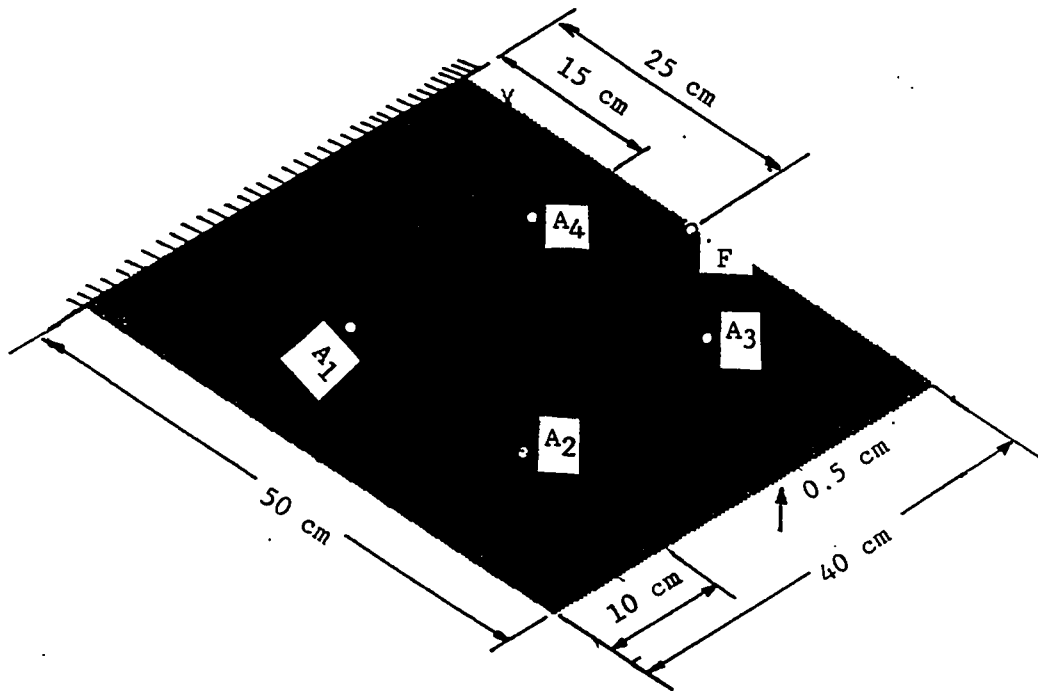
Tableau 4.17. Résultats numériques des facteurs d'amortissements N/S = 10 %.

Méthode	Point	Facteurs d'amortissements		
		Mode		
		1 (erreur %)	2 (erreur %)	3 (erreur%)
Exact	1			
	2	0.10653	0.14263	0.04959
	3			
IV	1			
	2	0.52943	0.07815	-
	3	(396)	(45.2)	
V	1			
	2	0.54899	0.06040	-
	3	(415)	(78.8)	
VII	1	-	0.09022	-
	2	-	0.09022	-
	3	-	0.09022 (37.0)	-

IV - M.O.autocorrel. ; V - M.O.recursive I.V  
VII- KALMAN

#### 4.2. TEST DE VALIDATION.

Pour tester l'efficacité des méthodes décrites précédemment, nous utilisons comme problème de base la plaque rectangulaire encastrée montrée en figure 4.6.



F - Excitateur dynamique  
A - Accéléromètres

Module d'Young  $E = 2.05 \cdot 10^{11}$  Pa

Masse volumique  $\rho = 7350$  Kg/m<sup>3</sup>

Coefficient de poisson  $\mu = 0.33$

Figure 4.6.

#### 4.2.1. BANC D'ESSAI [24].

Un banc d'essai de structures comprend des éléments essentiels assurant l'excitation et la mesure et des éléments de traitement numérique comme l'illustre la figure 4.7.

#### EXCITATION.

L'excitation est une entrée mesurable de la force mécanique induisant le mouvement vibratoire. Elle peut être fournie par un exciteur de vibrations électrodynamiques ou un marteau d'impact. Le signal d'entrée en fonction du temps est mesuré à l'aide d'un capteur de force.

##### *- Marteau d'impact*

La méthode la plus commode pour exciter une structure est certainement le marteau d'impact avec un capteur de force incorporé dans la tête qui enregistre la forme de la force d'entrée. Un coup de marteau appliqué à la structure sous essai donne une impulsion de gamme de fréquence étendue. Le mouvement vibratoire résultant est enregistré par le ou les accéléromètres montés sur la structure. La méthode d'excitation par marteau demande beaucoup moins de matériel que toute autre méthode. Le signal provenant du capteur de force dans la tête du marteau passe d'abord par un préamplificateur puis est dirigé vers l'appareil de mesure et d'analyse.

##### *- Excitateur électrodynamique.*

Les marteaux d'impact ne produisent que des impulsions, mais on peut utiliser des excitateurs de vibration pour appliquer à la structure une grande variété de signaux périodiques, transitoires ou aléatoires. L'excitateur fonctionne comme un haut parleur dont la bobine d'entraînement serait montée sur un élément mobile très rigide. Cet élément rigide constitue la tête d'excitation qui est reliée à la structure par une tige de poussée et un capteur de force. Le signal recherché est délivré par un générateur et un amplificateur de puissance.

**REPONSE.**

Le mouvement résultant de la structure est généralement mesuré par un ou plusieurs accéléromètres.

*-Accéléromètres.*

La réponse dynamique d'une structure excitée est en général détectée par un ou plusieurs accéléromètres piézoélectriques. Trois facteurs interviennent normalement dans le choix des accéléromètres pour des essais de structures :

1. Masse : les éléments de structure légers ne doivent pas être chargés par des accéléromètres lourds.

2. Sensibilité : les niveaux de réponse très faibles de bâtiments ou d'autres grandes structures peuvent nécessiter des accéléromètres très sensibles.

3. Gamme de fréquence : normalement elle ne pose pas de problème, la limite supérieure de la plupart des accéléromètres dépassant largement la gamme des fréquences mécanique explorée en analyse modale.

**MESURE**

Le traitement des mesures est exécuté par un analyseur FFT 8 canaux du type HP 35650A. Il transforme les signaux d'excitation et de réponse en fonction du temps en un spectre de fréquence et calcule le rapport de ces deux fonctions.

**ANALYSE MODALE**

Ici, le traitement des données mesurées est poursuivi jusqu'à l'extraction des paramètres modaux de la structure. L'analyse modale est ensuite effectuée par un programme approprié.

#### 4.2.2. RESULTATS EXPERIMENTAUX.

En ce qui concerne l'aspect experimental, on a placé sur notre structure quatre accéléromètres et un excitateur, leurs positions sont précisées par la figure 4.8 , schématisés en figure 4.6, les résultats sont donnés par les courbes 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13.

Dans les tableaux 4.19. et 4.20, on compare les résultats d'une telle simulation à ceux obtenus par les logiciels LMS (méthode "peak picking" dans le domaine fréquentiel) et ceux obtenus en utilisant les méthodes d'identification présentées précédemment. Lors de cette analyse comparative il nous est apparu intéressant de calculer les fréquences de resonance de la plaque à l'aide d'un code d'éléments finis (ANSYS).

Le tableau 4.18 et la figure 4.14 nous donnent les résultats du test de facteur de déterminant FD (équation 2.53). On peut indiquer que le système contient sept modes dominants sur ses réponses.

Il est intéressant de noter que le septième mode a été déterminé à une fréquence supérieure à 400 Hz, bien que nous filtrions les réponses de fréquence supérieure à 400 Hz. On remarque que les fréquences identifiées sont admissibles.

#### 4.3. CONCLUSIONS.

Les techniques d'identification de paramètres modaux d'une structure dynamique dans le domaine temporel ont été présentées. En général, elles sont faciles à programmer, à implanter et nécessite une expérimentation simple. Chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients.

Pour des structures mécaniques possédant des fréquences propres écartées on peut tirer les conclusions suivantes :

En absence de bruit les résultats sont acceptables. Dans le cas bruité, l'erreur sur les fréquences est nettement inférieure à l'erreur sur les amortissements réduits. Si l'erreur sur les fréquences ne dépasse pas 5 % pour toutes les fréquences, l'erreur sur le facteur d'amortissement atteint 37 % pour la fréquence la plus haute, et est erroné pour la fréquence la plus basse.

Les trois méthodes (Identification recursive aux variables instrumentales multi réponses, identification en utilisant une matrice d'autocorrélation multi réponses et identification en utilisant la transformée en  $z$  à l'aide d'un filtre de Kalman) que nous avons utilisées pour identifier le système avec deux fréquences de résonance rapprochées ne permettent pas de séparer tous les modes du système.

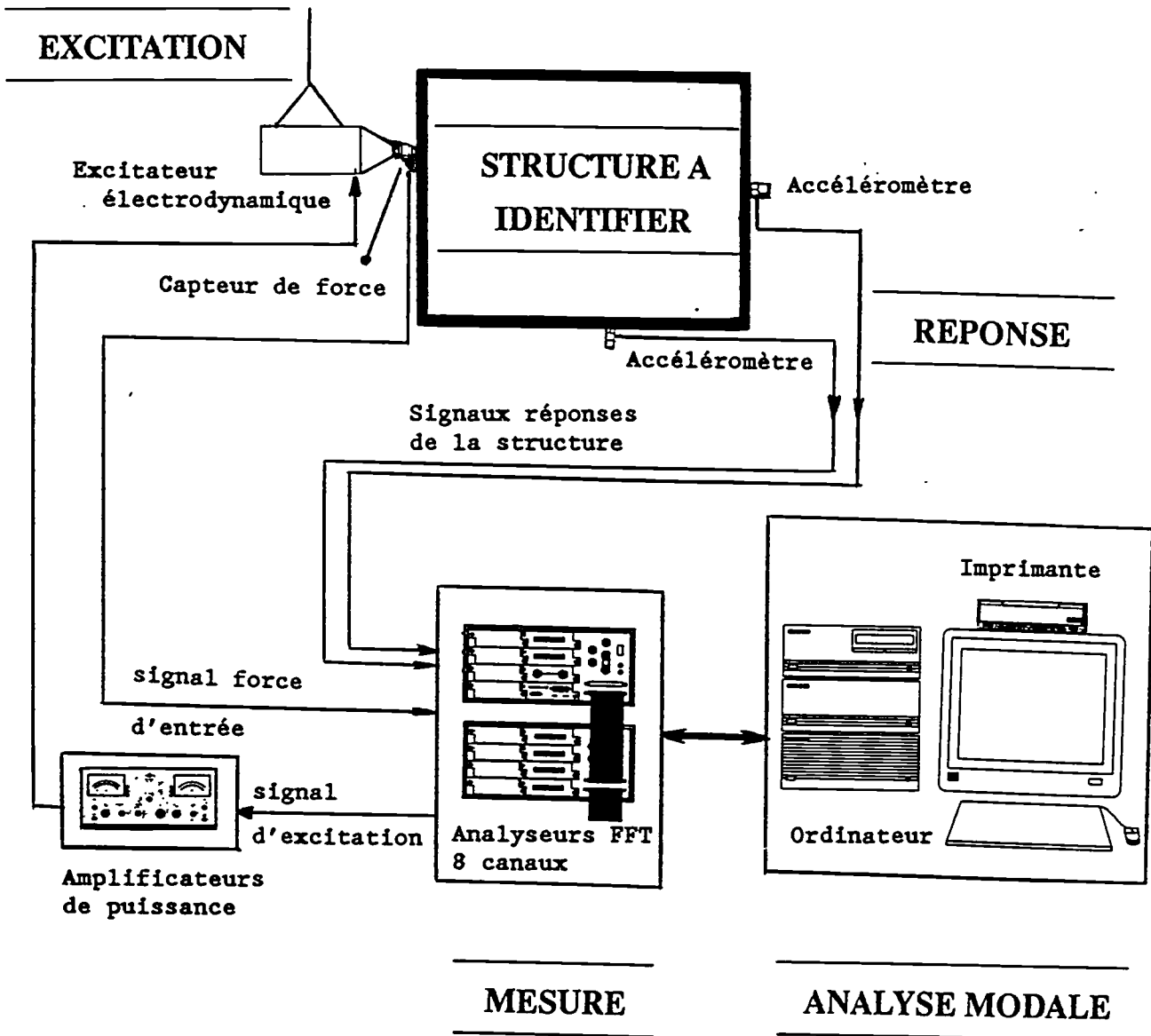


Figure 4.7 Un banc d'essai de structures



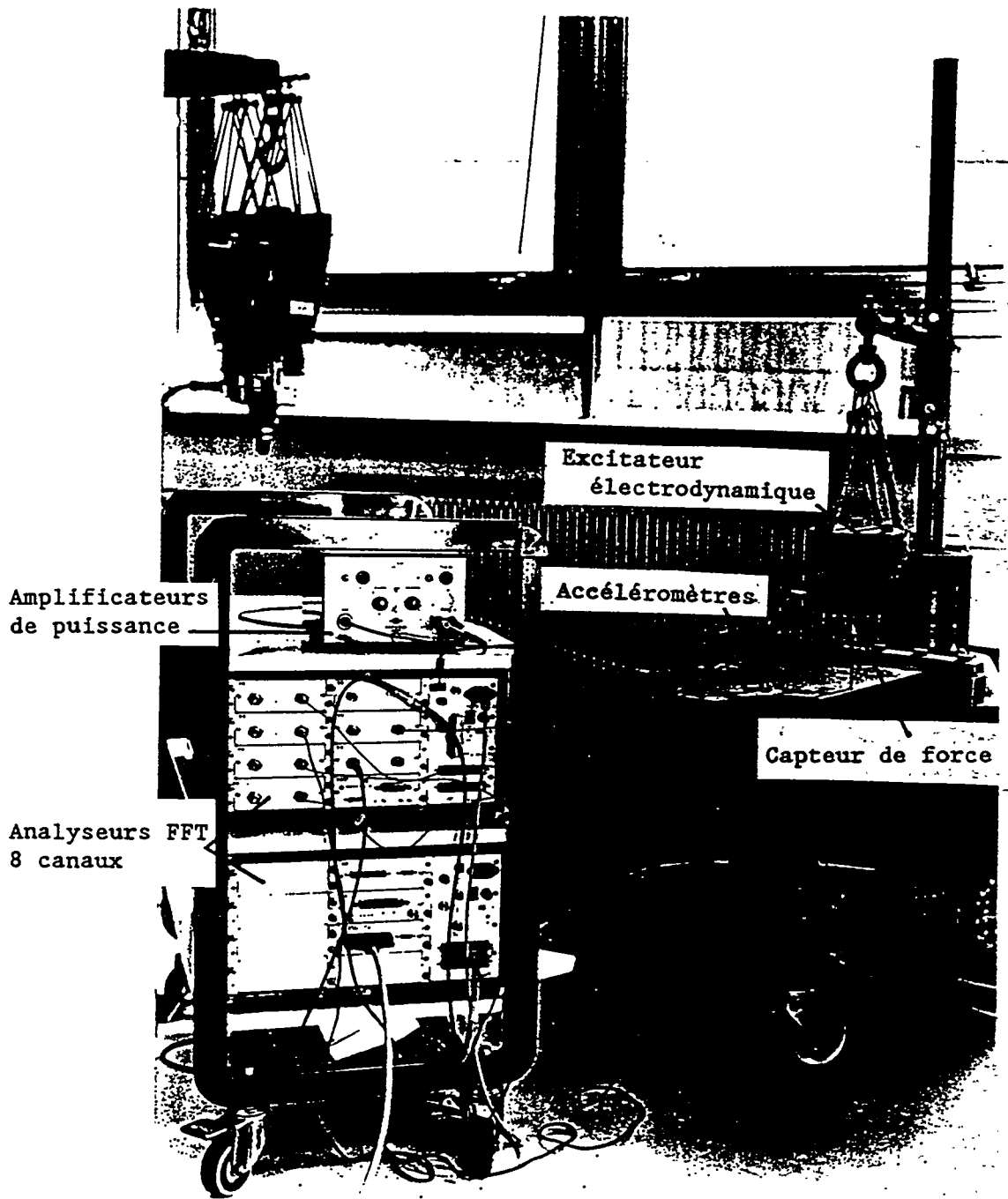
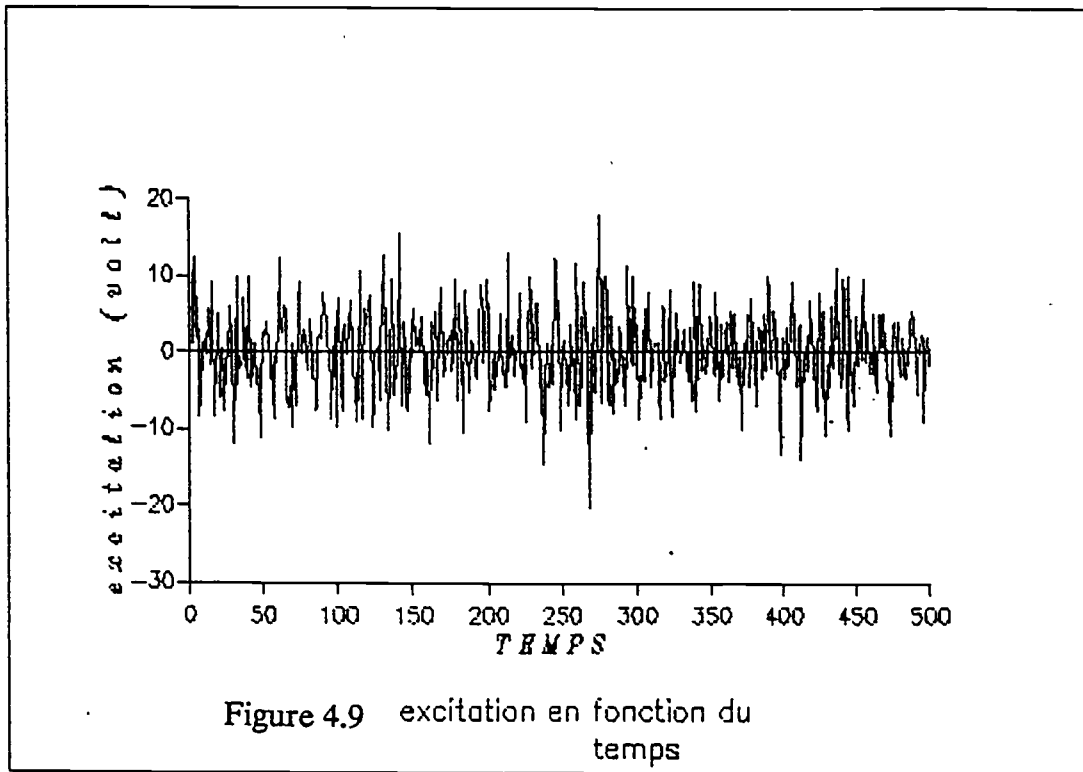
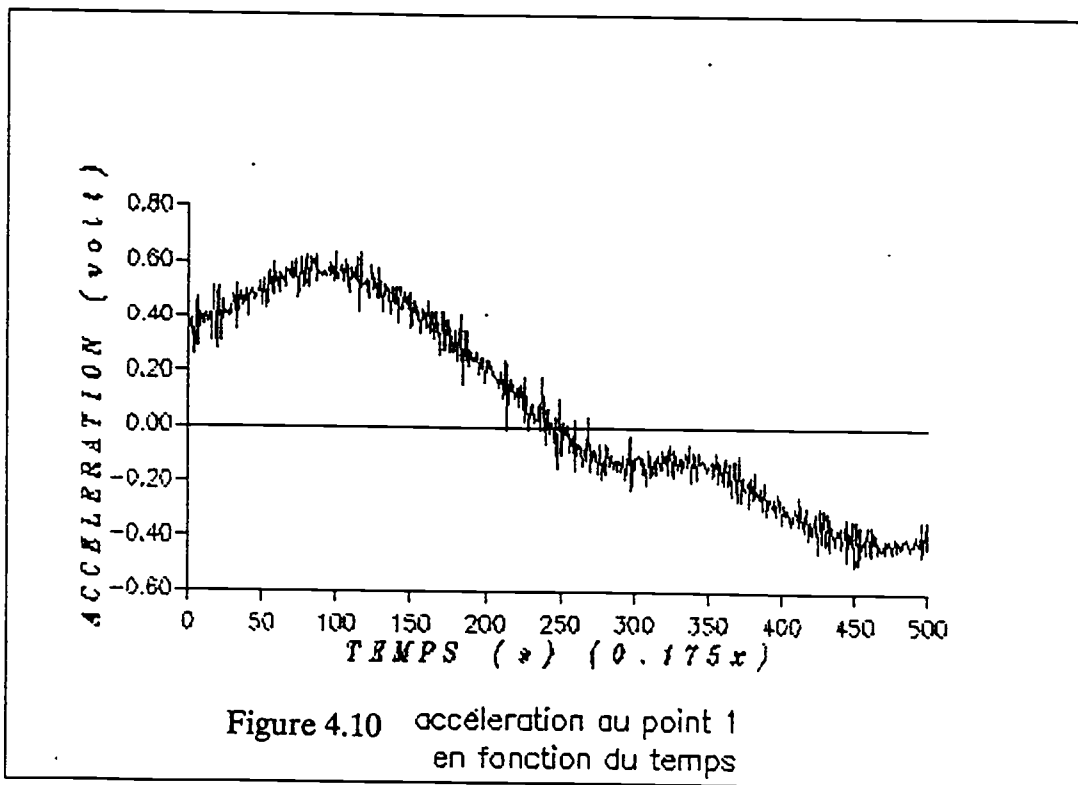
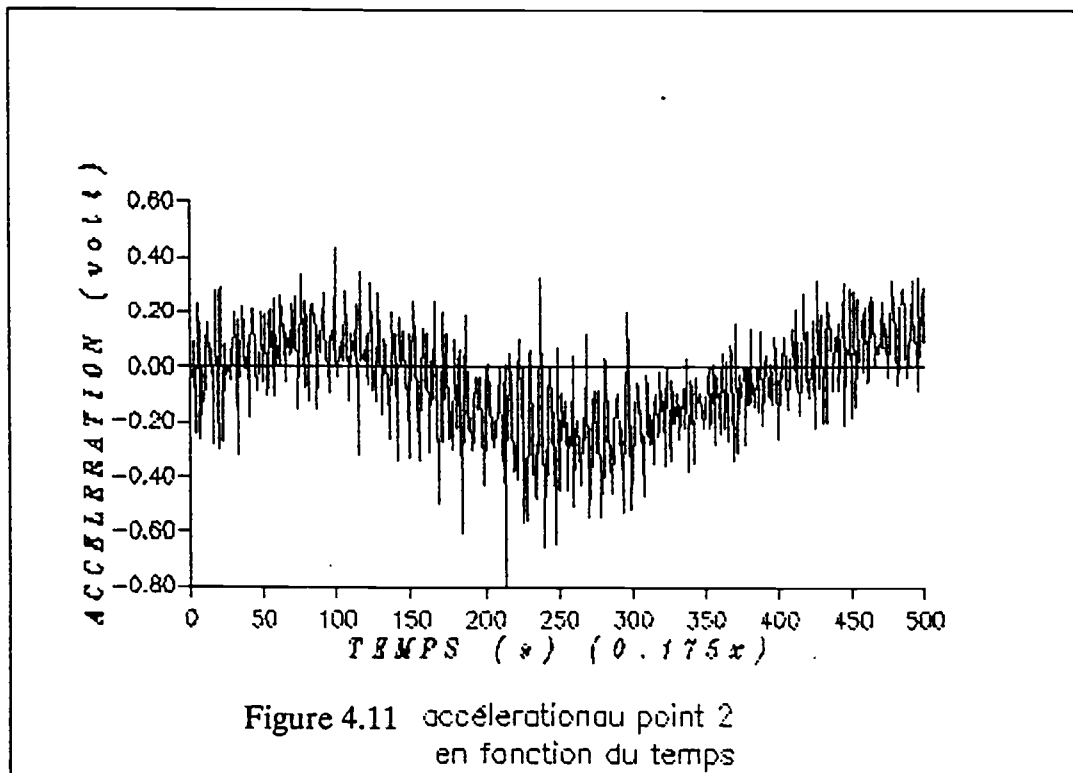
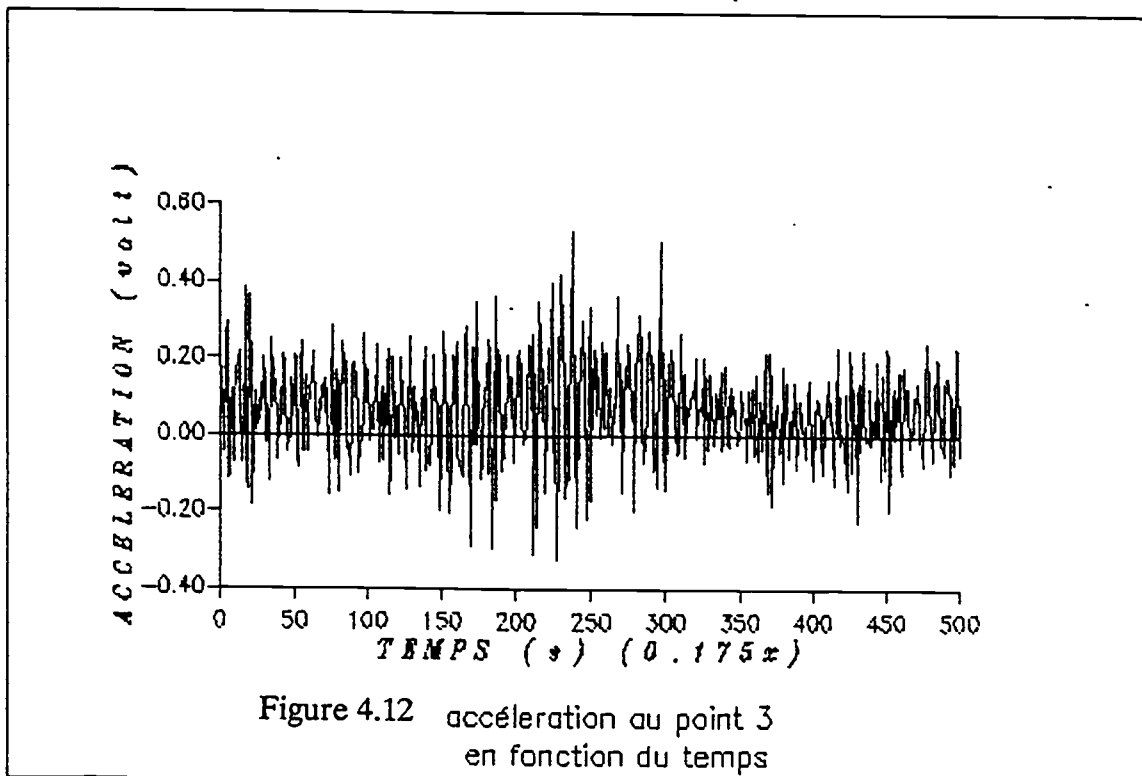


Figure 4.8









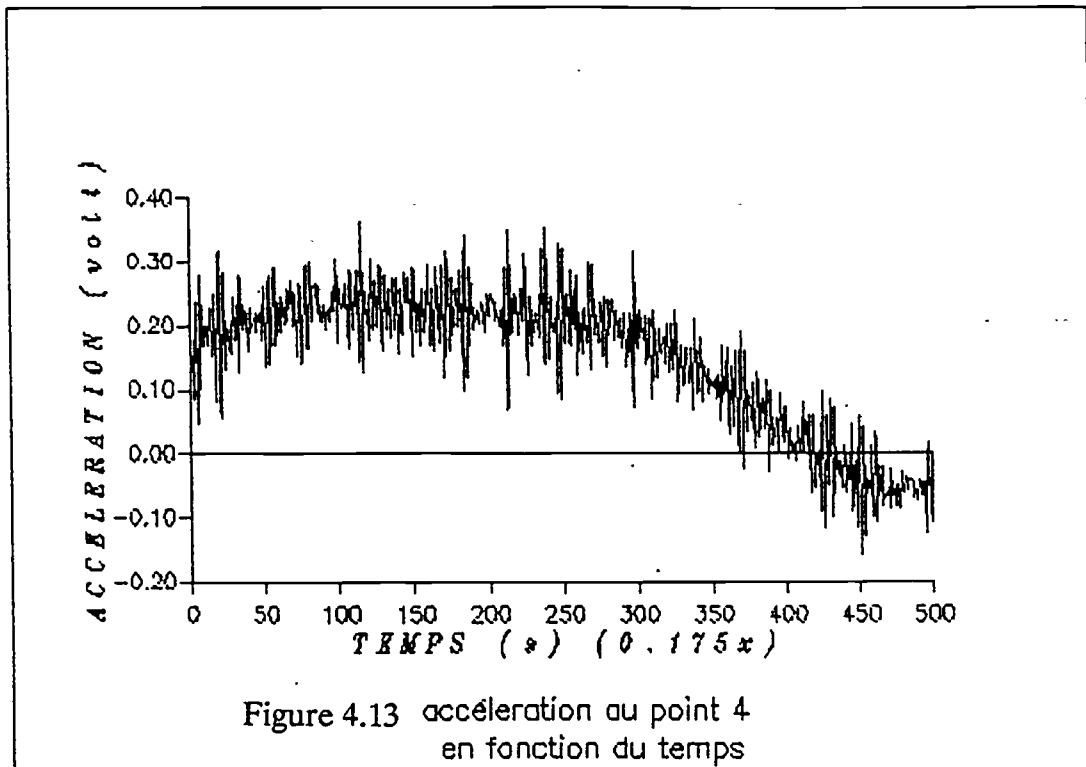


Tableau 4.18. Résultats du test de facteur de déterminant (FD).

Nombre de mode supposé (n)	Dét. Q(h, n)	FD(n) = Dét. Q(h, n) / Dét. Q(h, n+1)
1	0.34 10 <sup>-02</sup>	0.80 10 <sup>+03</sup>
2	0.43 10 <sup>-05</sup>	0.18 10 <sup>+04</sup>
3	0.24 10 <sup>-08</sup>	0.75 10 <sup>+02</sup>
4	0.32 10 <sup>-10</sup>	0.10 10 <sup>+04</sup>
5	0.32 10 <sup>-13</sup>	0.26 10 <sup>+03</sup>
6	0.12 10 <sup>-15</sup>	0.16 10 <sup>+03</sup>
7	0.74 10 <sup>-18</sup>	0.21 10 <sup>+07</sup>
8	0.36 10 <sup>-24</sup>	0.11 10 <sup>+07</sup>
9	0.34 10 <sup>-29</sup>	

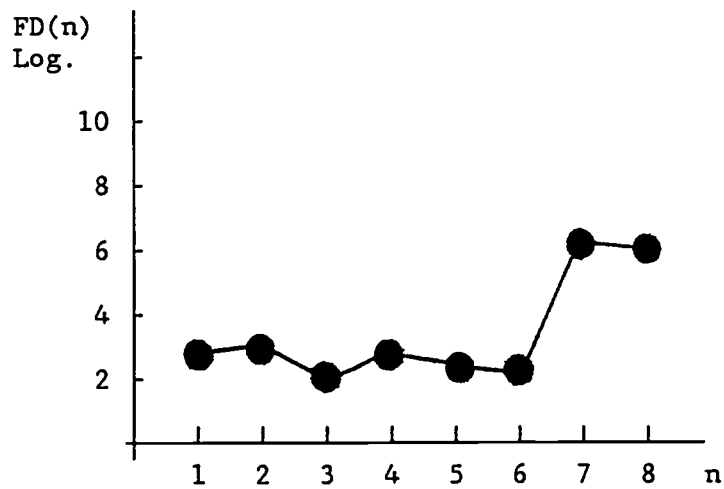


Fig 4.14 Résultats du test de facteur de déterminant FD(n)

Tableau 4.19. Résultats des fréquences de la plaque.

M é t h o d s	Fréquences (Hz)						
	Modes						
	1	2	3	4	5	6	7
A	17.78	51.81	112.95	190.21	214.62	356.75	425.03
B	19.65	62.12	109.53	198.39	234.12	368.70	394.67
C	20.77	64.61	128.84	186.91	246.32	374.84	434.89
D	16.10	57.88	97.97	195.21	240.60	367.78	397.47
E	16.62	57.67	105.05	200.81	235.92	339.55	407.25
F	19.05	66.49	131.90	182.33	240.54	367.79	442.85
G	22.21	46.68	88.76	183.46	244.76	295.69	413.98

A = ANSYS ; F = S.O recursive.  
 B = LMS ; G = Kalman  
 C = S.O.autocorrel.  
 D = M.O.autocorrel.  
 E = M.O.recursive I.V



Tableau 4.20. Résultats des facteurs d'amortissements de la plaque

M é t h o d s	Facteur d'amortissement						
	Modes						
	1	2	3	4	5	6	7
B	0.032	0.021	0.0170	0.0090	0.1110	0.1080	0.0500
C	0.132	0.110	0.0520	0.0150	0.1210	0.0200	0.2720
D	0.103	0.072	0.0890	0.0230	0.0210	0.0960	0.0670
E	0.069	0.059	0.0631	0.0010	0.0520	0.1090	0.0710
F	0.103	0.069	0.0910	0.0030	0.0230	0.0520	0.0530
G	0.139	0.109	0.0690	0.0110	0.0430	0.0190	0.2110

A = ANSYS ; F = S.O recursive.  
 B = LMS ; G = Kalman  
 C = S.O.autocorrel.  
 D = M.O.autocorrel.  
 E = M.O.recursive I.V

# STRUCTURES NON LINEAIRES

## DEUXIEME PARTIE

### CHAPITRE V. STRUCTURES NON LINEAIRES.

#### 5.1. COMPORTEMENT NON LINEAIRE EN MECANIQUE

La plupart des études mécaniques sont basées sur une approche linéaire des systèmes. Dans ce type d'étude, les méthodes d'identification sont multiples et sont relativement efficaces. Malheureusement dans les cas concrets, les systèmes mécaniques font apparaître des non linéarités. Ceci peut provenir d'un grand nombre de raisons, par exemple : grandes déformations, grands déplacements, loi de comportement plastique, etc. Tous ces types de non linéarité ont en général une influence prépondérante dans la détermination et la caractérisation du comportement de la structure. De plus, les méthodes d'approche devant caractériser des non linéarités sont très diverses et adaptées à la nature de la non linéarité. En effet, certaines procédures seront plus à même de mettre en valeur un effet de résonance interne, alors que d'autres (par exemple : basées sur une excitation aléatoire) le gommeront totalement. On peut en général cataloguer les non linéarités en deux grandes classes : celles dites, "localisées" (par exemple les joints, les encastremets, les jeux, etc) et celles dites, " réparties" (par exemple, celles dues à une loi de comportement, etc). On s'apercevra par la suite qu'il est nécessaire de subdiviser ce catalogue en sous paragraphes relatant le comportement caractéristique des non linéarités.

#### 5.2. LES CAUSES ET LES EFFETS DES NON LINEARITES.

On va s'attacher dans ce paragraphe à exhiber les principales causes de phénomènes non linéaires. Cette liste ne peut pas être exhaustive du fait de la grande diversité des effets non linéaires. Ainsi , on peut rencontrer des non linéarités du type : couplage fluide-structure, excitation paramétrique, autant de problèmes dont les effets et les causes sont souvent très différentes.

Afin de pouvoir faire une analyse rapide des comportements non linéaires, on se restreindra aux classes des systèmes non linéaires pouvant se mettre sous la forme :

$$M \cdot \ddot{X} + K(X, \dot{X}, t)X + C(X, \dot{X}, t)\dot{X} + U = F(t) \quad (5.1)$$

avec :

$$\dot{U} = G(U, X, \dot{X}, t)$$

où :

$X$  = vecteur déplacement

$U$  = vecteur force d'hystérésis

$\kappa(X, \dot{X}, t)$  = matrice de raideur généralisée

$c(X, \dot{X}, t)$  = matrice d'amortissement généralisée

$M$  = matrice de masse

$F$  = vecteur force d'excitation

$G$  = vecteur loi d'hystérésis

Cette classe de comportement fournit déjà un éventail important de non linéarités auxquelles est confronté l'ingénieur mécanicien.

### 5.2.1. ANALYSE UNIDIMENSIONNELLE.

Afin de simplifier l'étude des systèmes non linéaires, on se restreindra dans un premier temps aux cas des structures à un degré de liberté. Pour bien comprendre l'influence de chaque terme de l'équation de la dynamique, une courte analyse sera faite sur leurs influences respectives et leurs causes.

#### 5.2.1.1. L'AMORTISSEMENT $C(X, \dot{X}, T)$ .

La modélisation de l'amortissement par  $c \cdot \dot{x}$  est une approximation grossière des processus d'amortissements qui sont souvent liés à des phénomènes complexes. Ils restent pourtant essentiels à modéliser, car ils assurent en partie la dissipation du système, et donc, son bon fonctionnement. L'amortissement peut apparaître de manières très diverses par exemple :

- Interne : Il caractérise le matériau, et est dû à des réorganisations irréversibles au sein de celui-ci.
- Structural : Se situe au lieu des interfaces et provient en partie de microglissements et de frottement sec.
- Par rayonnement : L'amortissement est fourni par le couplage fluide-structure ou sol-structure.

De manière générale l'amortissement est fonction de l'amplitude vibratoire, de la fréquence, de la viscosité du fluide environnant, de la géométrie de la structure. On comprend alors aisément que sa modélisation soit difficile et qu'elle dépasse le cadre de l'approximation linéaire.

Afin de mieux comprendre l'amortissement non linéaire, on va regarder au travers de l'équation de Van der Pol son influence. Cet exemple est un cas particulier relatant assez bien ce type de phénomène.

Equation de Van der Pol :

$$\ddot{y} + \alpha.y - \beta.(1 - y^2).\dot{Y} = F(\tau) \quad (5.2)$$

où  $\alpha, \beta$  sont des constantes et  $F(\tau)$  l'excitation.

Cette équation permet de modéliser entre autre l'oscillation d'une aile en régime subsonique sous un fort angle d'attaque.

On remarque tout d'abord que si le déplacement  $y$  est faible, l'amortissement est négatif, et positif dans le cas contraire. Le fait que l'amortissement puisse être négatif correspond à un phénomène d'autoexcitation qui se caractérise en régime libre par l'existence d'un amortissement tant que le déplacement est assez élevé et dès que celui-ci devient faible, on voit apparaître une oscillation qui ne s'amortit pas.

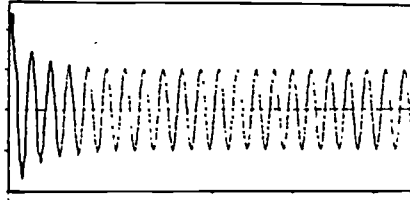


Fig.5.1

Pour conclure, on peut citer que la solution de cette équation en régime forcé peut posséder une synchronisation sous harmonique stable qui est encore un comportement typiquement non linéaire.

### 5.2.1.2. LA RAIDEUR : $K(X, \dot{X}, T)$ .

Ce sont les termes les plus influents dans le comportement non linéaire des systèmes mécaniques. Ils traduisent en partie les phénomènes de grandes déformations et de grands déplacements.

Afin de mieux comprendre les effets d'une telle non linéarité, on s'intéressera tout particulièrement à l'équation de Duffing qui se caractérise par la présence d'une non linéarité en raideur.

Equation de Duffing :

$$\ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta \cdot (1 + b \cdot y^2) \cdot y = F(\tau) \quad (5.3)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $b$  sont des constantes et  $F(t)$  l'excitation.

Ce type d'équation comporte donc une non linéarité en raideur dont la caractéristique est :

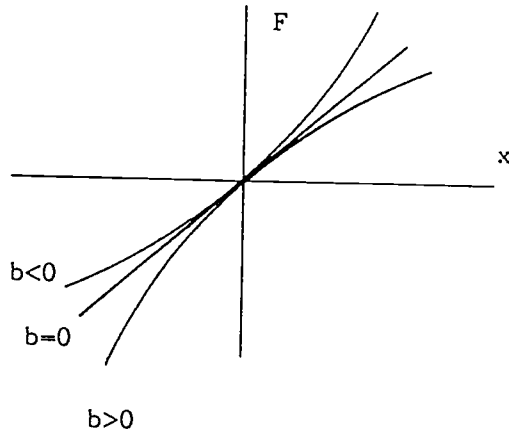


Fig.5.3

où

- $b > 0$  traduit le comportement d'un ressort dur
- $b = 0$  traduit le comportement d'un ressort linéaire
- $b < 0$  traduit le comportement d'un ressort mou

Ce type d'équation que l'on rencontre fréquemment en mécanique se caractérise dans le domaine fréquentiel par des phénomènes de sauts.

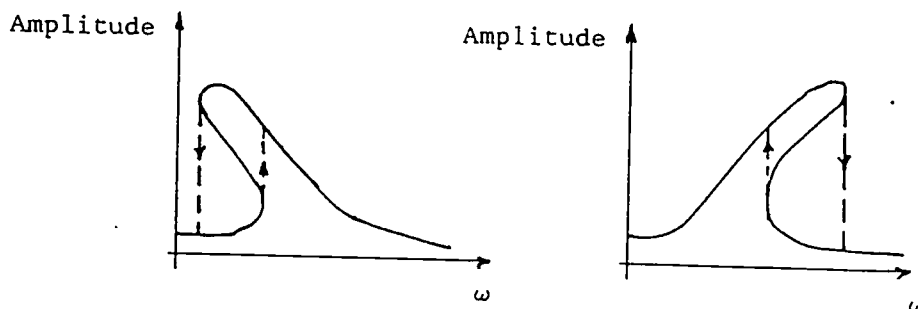


Fig.5.4

On peut aussi montrer que selon les coefficients de l'équation de Duffing, on peut avoir un phénomène de sous synchronisation harmonique (au niveau de l'harmonique de rang trois) stable. Et comme pour la plupart des équations non linéaires, on constate que les fréquences propres dépendent des conditions initiales.

### 5.2.1.3. HYSTERESIS : $U = G(U, X, \dot{X}, t)$ .

L'hystérésis est un phénomène à mémoire qui est pour cette raison difficile à appréhender. On schématise souvent ces effets par une boucle d'hystérésis qui rend compte du changement de raideur de la structure ainsi que de l'absorption d'énergie par cette dernière.

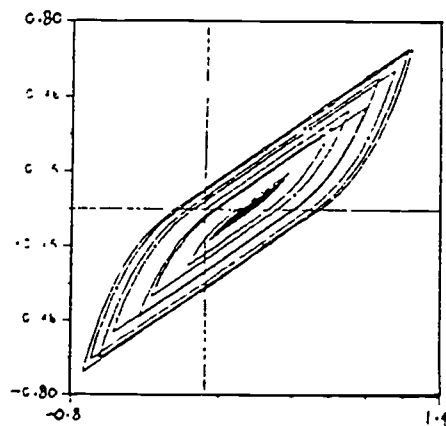


Fig.5.5

Cette boucle est issue de la loi d'hystérésis :

$$\dot{U} = A.\dot{X} - \alpha|\dot{X}||U||U|^{n-1} - \beta.\dot{X}|U|^h, \text{ pour } \alpha = \beta \quad (5.4)$$



Ce sont en général des phénomènes difficiles à identifier et d'importance assez faible, mais dont l'influence sur le comportement est primordiale, et est pour cette raison essentielle à mettre en évidence.

Le fait que  $U$  (variable d'état du système) dépende du passé de  $x$ , oblige à effectuer plusieurs essais afin d'être sûr que la non linéarité soit du type hystérisique. Comme dans les cas précédents, il peut apparaître une synchronisation sous harmonique.

#### 5.2.1.4. NON LINEARITE DE TYPE PARAMETRIQUE.

Ce type particulier de non linéarité peut se rencontrer aussi bien sur les termes de raideur que sur ceux d'amortissement. Il est caractérisé par une variation lente au cours du temps de ces termes, et a souvent pour effet l'oscillation spontanée du système. Le prototype de ce genre de phénomène est régi par l'équation de Mathieu qui caractérise le comportement transversal d'une poutre sollicitée par une charge verticale périodique.

Equation de Mathieu :

$$\ddot{y} + \Omega^2 (1 - 2h \cos(\omega t)) \cdot y = F(t) \quad (5.5)$$

où  $h$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  sont des constantes et  $F(t)$  l'excitation.

Une telle équation est caractérisée par la présence d'instabilité de caractère sous harmonique.

Diagramme de stabilité :

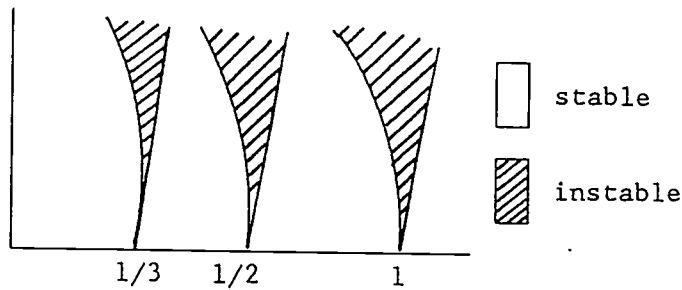


Fig.5.6

Remarque : l'équation de Mathieu est un cas particulier de l'équation de Hill où le terme variant dans le temps n'est pas du type sinusoïdal.

### 5.2.1.5. COMPORTEMENT CHAOTIQUE.

Le phénomène de chaos se caractérise par le comportement aléatoire d'une structure excitée par un champ de force déterministe. En général, l'étude de ces comportements se fait, à l'aide de la théorie de Floquet sur la stabilité linéaire et s'intéresse aux effets non linéaires susceptibles de limiter la croissance des instabilités. L'apparition d'un processus chaotique est due en général, à la présence de bifurcation (bifurcation de Hopf) ou de sous harmoniques.

#### Bifurcation de Hopf

Le phénomène de bifurcation se retrouve en particulier dans les oscillateurs auto-entretenus et paramétriques. Le point de bifurcation est une caractéristique du système, il est à l'intersection des frontières de stabilité et d'instabilité.

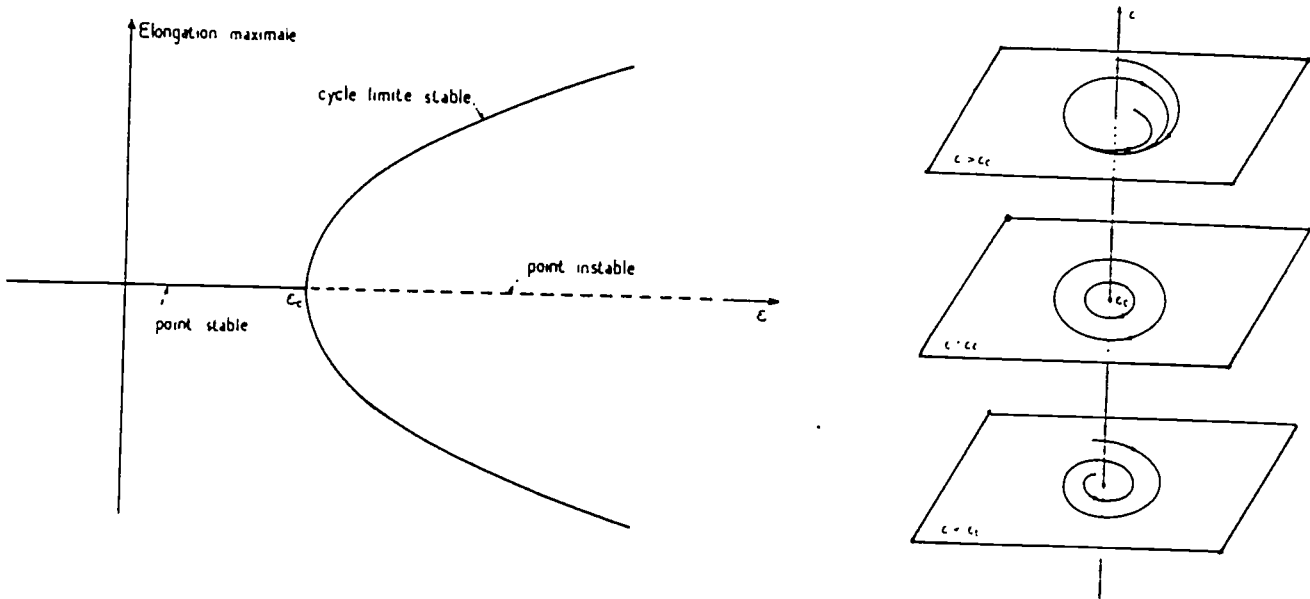


Fig.5.7

La bifurcation de Hopf est un point tel que par son franchissement, apparait un cycle limite. On peut observer de tel phénomènes dans les problèmes de flotteur. Il peut s'identifier par le fait que l'amplitude du cycle est proportionnelle à  $|\epsilon - \epsilon_c|^{1/2}$  et qu'en revanche, la période d'oscillation en est indépendante.

En général, on observe rarement le passage successif d'un attracteur ponctuel à un cycle limite. Une succession de bifurcations peut donner naissance à un comportement chaotique. Il n'est pas nécessaire que les points de bifurcations soient en nombre infini, seul un nombre borné peut donner naissance au chaos (cf : Théorie de Ruelle-Takens). Un phénomène de ce type se caractérise par un régime "quasi périodique" de la structure.

### 5.2.2. LES SYSTEMES NON LINEAIRES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE.

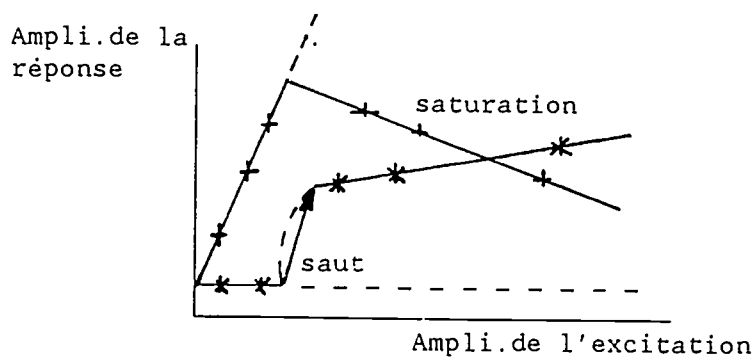
Les non linéarités introduites dans les systèmes à plusieurs degrés de liberté ont évidemment la même origine que celles apparaissant dans les problèmes monodimensionnels.

Mais elles peuvent alors donner naissance à des comportements typiques. Ainsi, on peut citer les phénomènes de combinaisons d'harmoniques, de résonance interne, de disparition de mode, de saturation, etc.

### 5.2.2.1. RESONANCE INTERNE.

Ce phénomène se caractérise par la disparition d'un mode au profit d'un autre. Ainsi, un système à deux degrés de liberté contenant une non linéarité quadratique et dont les modes linéaires sont voisins,  $\omega_2 = 2.\omega_1$  présentera ce genre de phénomène si elle est excitée avec une fréquence  $\omega = \omega_2$ . Le comportement d'une telle structure se fera dans un premier temps en se synchronisant sur le deuxième mode, puis par saturation, basculera sur le premier mode de vibration.

Diagramme du phénomène :



où \* : Premier mode  
+ : deuxième mode

Fig.5.8

Ce phénomène peut s'interpréter physiquement comme un processus de saturation, le deuxième mode ne pouvant plus accumuler l'énergie fournie par l'excitateur sinusoïdal, celle-ci va se reporter sur le premier mode. Un tel effet ne peut pas être mis en évidence avec des essais du type impact ou encore aléatoire, seule une excitation à fréquence pure peut le mettre en évidence.

#### **5.2.2.2. COMBINAISON ET EXTINCTION DE MODE**

Ces deux phénomènes s'observent fréquemment dans les systèmes non linéaires et s'étudient en général par la méthode des bispectres.

On peut alors constater la présence d'harmoniques supplémentaires de résonance qui sont des combinaisons entières des pulsations de résonance de la structure. Et on peut aussi observer des extinctions de mode sous certaines conditions.

**TECHNIQUES DE RESOLUTION NUMERIQUE ET  
D'IDENTIFICATION**

## CHAPITRE VI.

### TECHNIQUE DE RESOLUTION NUMERIQUE ET D'IDENTIFICATION

#### 6.1. QUELQUES METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS NON LINEAIRES

Il s'avère souvent nécessaire lors de l'étude des problèmes non linéaires d'intégrer numériquement les équations d'équilibre. Cette nécessité est dictée par le fait qu'il faut souvent simuler le comportement non linéaire des modèles proposés afin de le comparer à celui réellement mesuré au cours d'essais vibratoires adaptés.

On présentera donc deux méthodes de calcul : celle de Krilov-Bogoliubov-Mitropolsky et celle de Baret.

##### 6.1.1. METHODE DE KRILOV-BOGOLIUBOV-MITROPOLSKY.

C'est une méthode de linéarisation très performante très souvent utilisée dans l'industrie.

###### 6.1.1.1. CAS D'UN SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE EXCITE PAR UNE FORCE SINUSOIDALE.

L'équation s'écrit sous la forme :

$$m\ddot{x} + kx = E( f(x, \dot{x}) + A \sin(\omega t) ) \quad (6.1)$$

où :

- $x$  = Déplacement
- $A \sin(\omega t)$  = excitation à fréquence  $\omega$  et amplitude  $A$
- $f(x, \dot{x})$  = Fonction non linéaire en  $x$  et  $\dot{x}$
- $E$  = Valeur constante petite devant 1
- $m$  = Masse du système
- $k$  = Raideur du système

On cherche dès lors une solution sous la forme :

$$x = a \cos(y) + E^1 u_1(a, y, \omega t) + E^2 u_2(a, y, \omega t) + \dots + E^n u_n(a, y, \omega t) \quad (6.2)$$

avec :

$$a = E^1 A_1(a) + E^2 A_2(a) + \dots + E^n A_n(a) \quad (6.3)$$

$$y = (k/m)^{1/2} + E B_1(y) + E^2 B_2(y) + \dots + E^n B_n(y) \quad (6.4)$$

Où les fonctions  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$  sont inconnues et à déterminer. La solution  $x$  sera définie comme une approximation de la réponse d'ordre  $n$ .

En remplaçant les équations 6.2, 6.3 et 6.4 et leurs dérivées dans l'équation 6.1, on obtient un problème fonction des  $A_i$  et  $B_i$ , puis en identifiant les termes en  $E$  de même ordre, on peut déterminer les  $A_i, B_i$  ainsi que les  $u_i$  permettant ainsi de trouver la solution du problème.

Une telle méthode peut très bien être étendue au cas de systèmes à plusieurs degrés de liberté.

### 6.1.1.2. CAS D'UN SYSTEME A N DEGRES DE LIBERTE.

#### EQUATIONS GENERALES.

Considérons un système vibrant à  $n$  degrés de liberté régi par les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} 0 = \epsilon_i = m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=0}^n K_{ik}(x_i - x_k) + \\ f_i(x_1, \dots, x_n) + \varphi_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \\ - P_i \cos \Omega t. \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \right\} (6.5)$$



Dans ces équations les  $m_i$  représentent des masses, les  $x_i$  l'écartement des masses  $m_i$  par rapport à leur position d'équilibre.  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$  représente la force d'amortissement agissant sur la masse  $m_i$ .  $P_i \cdot \cos \Omega t$  n'est autre que l'excitation harmonique éventuellement appliquée au système.

Les termes :

$\sum_{k=0}^n K_{ik}(x_i - x_k) + f_i(x_1, \dots, x_n)$  correspondent à une force de rappel s'exerçant sur les masses  $m_i$ .

Supposons les fonctions  $f_i$  impaires, analytiques en leurs arguments. Le système possède une énergie potentielle  $U$  vérifiant :  $U(0, \dots, 0) = 0$  ;  $U > 0$  si  $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ .

#### VIBRATION LIBRE DU SYSTEME LINEARISE ET DU SYSTEME NON LINEAIRE.

Nous considérons ici un système conservatif : les équations du mouvement sont celles de 6.5 avec  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

a. Systeme linéarisé :

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=0}^n K_{ik}(x_i - x_k) = 0 ; \quad i = 1, \dots, n \quad (6.6)$$

Si nous supposons de plus :  $f_i = 0$  ;  $i = 1, \dots, n$ , le système possède  $n$  modes normaux que l'on peut exprimer sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} x_i &= a_{0ij} \cdot \cos \omega_{0j} t ; & i &= 1, 2, \dots, n \\ & & j &= 1, 2, \dots, n \\ & \text{et } b_{0lj} &= 1 , \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

où  $\omega_{oj}$ , et  $b_{oij}$  sont les fréquences naturelles et les formes des modes normaux du système linéarisé.

b. Système non linéaire :

Par analogie avec le résultat ci-dessus, nous supposons les vibrations de la forme harmonique suivante :

$$\left. \begin{aligned} x_i &= a_i \cdot \cos \omega t & ; & \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{ou} \\ x_i &= a_i \cdot b_i \cdot \cos \omega t, & \quad b_i &= a_i/a_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Les coefficients inconnus  $\omega$ ,  $b_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) sont alors déterminés par la méthode de W.Ritz, c'est à dire par les équations :

$$\int_0^{2\pi} \epsilon_{ic}(\tau) \cdot \cos \omega \tau \cdot d(\omega \tau) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (6.9)$$

où les  $\epsilon_{ic}(\tau)$  désignent la valeur des résidus de  $\epsilon_{ic}$  après substitution dans les équations du mouvement des expressions précédentes des  $x_i$ , nous pouvons récrire plus explicitement :

$$\begin{aligned} & - m_i \omega^2 b_i + \sum_{k=0}^n K_{ik} (b_i - b_k) \\ & + 1/\pi \int_0^{2\pi} f_i(a b_1 \cos \omega t, \dots, a b_n \cos \omega t) \cos \omega t \, d\omega t = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

avec  $i = 1, \dots, n$

Ces équations constituent un ensemble de  $n$  équations algébriques non linéaires en  $b_2, \dots, b_n, \omega$ . Ainsi nous pouvons obtenir numériquement, en fonction de l'amplitude  $\omega_j = \omega_j(a)$  et  $b_{ij} = b_{ij}(a)$  ( $i$  et  $j = 1, \dots, n$ )

Supposons que le système non linéaire ait  $n$  fréquences naturelles, qui se réduisent pour une amplitude nulle aux fréquences naturelles du système linéarisé :

$$\omega_j(0) = \omega_{0j} \quad j = 1, \dots, n \quad (6.11)$$

Supposons de plus que toutes les fréquences  $\omega_j(a)$  sont différentes.

La solution générale du système non linéaire décrivant les vibrations libres avec les conditions initiales  $x_i(0)$  et  $\dot{x}_i$  quelconque est recherchée sous la forme d'une somme de composantes harmoniques :

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_j b_{ij} \cos \omega_j t, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.12)$$

avec des coefficients inconnus  $b_{ij}$  et  $\omega_j$  de la méthode de W.Ritz généralisée :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon_{ic}(t) \cos \omega_j t \, dt = 0, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (6.13)$$

où les  $\epsilon_{ic}(t)$  sont obtenus par substitution de l'expression précédente des  $x_i$  dans les équations du mouvement.

Les équations 6.13 permettent de déterminer les  $\omega_j$  et les  $b_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) en fonction des amplitudes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \omega_j &= \omega_j(a_1, \dots, a_n) \quad (i = 1, \dots, n) \\ b_{ij} &= b_{ij}(a_1, \dots, a_n) \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ces termes seront respectivement appelés fréquences propres couplées et formes propres couplées. En effet, les  $\omega_j$  et les  $b_{ij}$  dépendent des amplitudes ce qui traduit le fait que les modes normaux non-linéaires sont couplés, dans le cas de conditions initiales arbitraires.

Ainsi, la solution approchée 6.12 dont nous avons supposé qu'elle était somme de termes harmoniques, ne permet pas d'appliquer le principe de superposition.

Il y a donc une différence, à priori, entre le mouvement du système dans "la direction" d'un mode normal non-linéaire et le mouvement de ce système dans "les directions" des modes non-linéaires normaux couplés.

#### 6.1.2. METHODE DE BARETT.

Cette méthode s'applique à la classe des équations pouvant se mettre sous la forme :

$$\dot{X} = A X + CU + f_r(X, U) \quad (6.15)$$

où :

$X$  : Vecteur déplacement de dimension  $n$

$U$  : Vecteur excitation de dimension  $n$

$f_r$  : Fonction résiduelle non linéaire

La technique employée consiste à écrire :

$$\dot{X}_0(0) = X(0) = \text{conditions initiales}$$

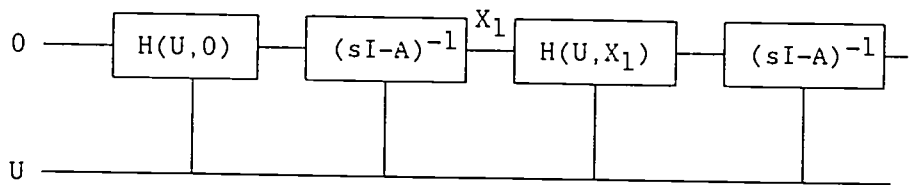
$$\begin{array}{ll} \dot{X}_0 = A X_0 + CU & \text{avec } X_0(0) = X(0) \\ \dot{X}_1 = A X_1 + CU + f_r(X_0, U) & \text{avec } X_1(0) = X(0) \\ \vdots & \vdots \\ \dot{X}_n = A X_n + CU + f_r(X_{n-1}, U) & \text{avec } X_n(0) = X(0) \end{array}$$

(6.16)

Dans l'équation n, on peut considérer  $x_{n-1}$  comme une excitation et ainsi établir une séquence itérative.

Ce qui donnerait en transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} X_n(s) &= (sI-A)^{-1}(C U(s) + \bar{F}_r(X_{n-1}(s), U(s))) \\ H(U, X_n^{-1}) &= C U(s) + \bar{F}_r(X_{n-1}(s), U(s)) \end{aligned} \quad (6.17)$$



Cette méthode permet de résoudre un grand nombre d'équations non linéaires par itération qui nous fournit le comportement de la structure à chaque pas temporel  $\Delta t$ .

## 6.2. TECHNIQUE D'IDENTIFICATION

### 6.2.1. INTRODUCTION

La technique d'identification des systèmes dynamiques non linéaires a intéressé beaucoup de chercheurs durant ces dernières années du fait de l'importance des problèmes mécaniques qu'ils sont sensés représenter.

Lorsque les non linéarités sont importantes, on distingue deux types de méthodes d'identification : les méthodes paramétriques qui cherchent à déterminer la valeur des paramètres d'un modèle pré-supposé du comportement de la structure pour que la réponse du modèle corresponde à celle de la structure réelle, et les méthodes non paramétriques, qui recherchent directement la meilleure représentation fonctionnelle du comportement du système sans hypothèses sur la forme d'un modèle de comportement.

Parmi celles-ci, les méthodes d'identification non paramétrique sont basées sur la technique de regression récemment développée pour l'identification des systèmes vibrants non linéaires discrétisés [27, 28, 29, 33, 34, 35].

#### IDENTIFICATION PARAMETRIQUE.

De nombreux modèles analytiques pour le comportement non linéaire des structures ont été proposés, fondés sur des considérations théoriques et/ou sur des essais de laboratoire. Les modèles sont de plus en plus sophistiqués et l'efficacité des méthodes d'identification paramétriques réside alors dans la mise au point d'algorithmes performants capables d'estimer le plus grand nombre de paramètres du modèle mathématique représentant au mieux le système étudié. Le choix d'un modèle est délicat et si le modèle retenu ne reflète pas correctement les caractéristiques du système réel, la prédiction du comportement futur sera erronée.

IDENTIFICATION NON PARAMETRIQUE.

Les techniques d'identification non paramétrique utilisent la connaissance des réponses et des entrées du système sans faire d'hypothèses à priori sur un modèle mécanique susceptible de représenter le comportement. Une telle technique permet entre autre l'identification des non linéarités, mais aussi de détecter à partir du diagramme des phases  $(x, \dot{x})$  la nature de la non linéarité rencontrée. Par contre, elle ne peut pas de manière simple mettre en évidence des phénomènes à mémoire comme l'hystérésis. Hormis cette dernière classe de non linéarité, la méthode non paramétrique autorise l'identification de non linéarités très fortes comme les frotteurs, ressorts à zone morte.

Cette méthode, par principe, est applicable aux systèmes à plusieurs degrés de liberté. On peut écrire l'équation de la dynamique sous la forme discrète suivante :

$$F(x, \dot{x}) = P(\tau) - M \ddot{x} \quad (6.18)$$

où :

$M$  : Matrice de masse ( $n \times n$ )

$x$  : Vecteur déplacement ( $n$ )

$\dot{x}$  : Vecteur vitesse ( $n$ )

$\ddot{x}$  : Vecteur accélération ( $n$ )

$F(x, \dot{x})$  : Vecteur force interne ( $n$ )

$P(\tau)$  : Vecteur force extérieure ( $n$ )

Avant toute chose, il faut effectuer un essai à bas niveau, afin de pouvoir identifier la matrice des modes linéaires pour pouvoir écrire :

$$X = \Phi U \quad (6.19)$$

où :

$\Phi$  : Matrice des modes ( $n \times n$ )

$X$  : Vecteur déplacement ( $n$ )

$U$  : Vecteur déplacement dans la base modale ( $n$ )

On posera :

$$h = \Phi^T f$$

$$P = \Phi^T p \quad (6.20)$$

$$U = \Phi^T X$$

On peut donc écrire l'équation (6.18) dans la base modale :

$$h(U, \dot{U}) = p(\tau) - U \quad (6.21)$$

Dès lors, il va falloir s'attacher à identifier  $h(U, \dot{U})$  mais dans certaines applications le changement de base (2) permettra d'estimer la "vraie" non linéarité.



## 6.2.2. PROCESSUS D'IDENTIFICATION.

### 6.2.2.1. GENERALITES.

Dans notre étude, nous nous limiterons aux modèles mathématiques de forme "complex branched system" avec  $n$  degrés de libertés et associés à des forces élastiques d'ordre  $n \times n$ .

Ainsi l'équation d'équilibre du système montré en figure 7.1 prend la forme

:

$$M_i \ddot{u}_i + \sum_{k=1}^n f_{ik}(y_{ik}, \dot{y}_{ik}) = F_i(\tau) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.22)$$

où la force de raideur  $f_{ij}$  est une fonction du déplacement relatif  $y_{ij}(\tau)$  et de la vitesse relative  $\dot{y}_{ij}(\tau)$ , avec :

$$\left. \begin{array}{l} y_{ij} = u_i - u_j \\ \dot{y}_{ij} = \dot{u}_i - \dot{u}_j \\ y_{ii} = u_i \\ \dot{y}_{ii} = \dot{u}_i \end{array} \right\} \quad (6.23)$$

et  $F_i(\tau)$  est une force extérieure [27], nous pouvons supposer que :

$$f_{ii}(y_{ii}, \dot{y}_{ii}) = \sum_{p=1}^{P_i} \sum_{q=1}^{Q_i(i,i)} C_{pq} y_{ii}^{p-1} \dot{y}_{ii}^{q-1} \quad (6.24a)$$

$$f_{ik}(y_{ik}, \dot{y}_{ik}) = \sum_{p=1}^{P_k} \sum_{q=1}^{Q_k(i,k)} C_{pq} y_{ik}^{p-1} \dot{y}_{ik}^{q-1} \quad (6.24b)$$

(p or q ≠ 1)

Le but de notre identification est de déterminer les fonctions  $f_{ik}$  qui minimisent des critères d'erreur.

### 6.2.2.2. METHODE DIRECTE.

Nous utilisons le critère des "moindres carrés" pour déterminer les paramètres  $c^{(i,k)}_{pq}$  en minimisant directement la fonction quadratique suivante :

$$J(c^{(i,k)}_{pq}) = \left[ \sum_{l=1}^T (\epsilon_l^{(i)})^2 = E_i \right] \quad (6.25)$$

où T est le nombre des points d'échantillons des mesures et des excitations, et :

$$\epsilon_l^{(i)} = M_i \ddot{u}_i(t_1) - F_i(t_1) + \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{P_k} \sum_{q=1}^{Q_k} c^{(i,k)}_{pq} y_{ik}^{p-1}(t_1) \dot{y}_{ik}^{q-1}(t_1) \quad (6.26)$$

$\epsilon^{(i)}_l$  est l'erreur à l'instant  $t = t_1$  pour la  $i^{\text{ème}}$  l'équation (6.22) quand les mesures sont perturbées par le bruit.

Pour chaque valeur de k ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), l'équation (6.25) doit satisfaire :

$$\frac{\partial E_i}{\partial c^{(i,k)}_{pq}} = 0 \quad (6.27)$$

### 6.2.2.3. APPROCHE GENERALE.

Pour suivre une approche générale du problème [28], nous pouvons introduire la vitesse  $v_i$  comme une variable supplémentaire. Nous pouvons récrire l'équation(6.22) sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_i &= v_i \\ v_i &= (1/M_i) \left( -\sum_{k=1}^n f_{ik} + F_i \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Ici, nous introduisons le vecteur constant inconnu  $c$  comme une nouvelle variable du système, qui satisfait aux équations différentielles et au vecteur d'état augmenté  $U_i$  suivant :

$$\frac{d}{dt} c_{pq}^{(i,k)} = 0 \quad (6.29)$$

$$U_i = (u_i, v_i, c_{pq}^{(i,k)}) \quad (6.30)$$

Nous pouvons récrire l'équation (6.30) :

$$\dot{U}_i = g_i(U_i) \quad (6.31)$$

Nous aurons la forme suivante :

$$Y_i = h_i(u) + (\text{erreur d'observation}) \quad (6.32)$$

où  $h_i = G_i U_i$  et  $G_i$  est une matrice rectangulaire.

Le problème d'estimation est basé sur les mesures  $Y_i(\tau)$  dans l'intervalle  $0 < \tau < T$ , le critère des moindres carrés sera utilisé pour estimer  $U_i(\tau)$ . Nous définissons d'abord l'erreur résiduelle suivante :

$$e_1 = Y_i - h_i \quad (6.33)$$

$$e_2 = U_i(0) - U_{i0} \quad (6.34)$$

où  $U_{i0}$  est à priori la meilleure estimation de  $U_i(0)$ .

Le problème d'estimation de  $U_i(\tau)$  dans le sens des moindres carrés est équivalent à  $U_{ies}(\tau)$   $0 < t < T$ , avec la fonction habituelle :

$$J(U_i) = \int_0^T (Y_i - h_i, Y_i - h_i) dt + (U_i(0) - U_{i0}, w(U_i(0) - U_{i0})) \quad (6.35)$$

où  $w$  est une matrice de pondération positive et  $(A, B)$  dénote des produits internes  $\sum_i A_i B_i$  des vecteurs  $A$  et  $B$ .

La minimisation de l'équation (6.35) nous permet de trouver le vecteur fonction  $U_i(\tau)$  pour  $\tau$  compris entre 0 et T à condition que la contrainte donnée par l'équation (6.31) constitue un problème d'optimisation régulier. Ce problème peut être résolu par plusieurs méthodes.

#### 6.2.2.4. APPROCHE PAR FILTRAGE.

Dans cette approche [28, 29] nous déterminons  $U_i(\tau)$  à l'instant  $\tau = T$  où  $U_i(T) = C_i$  qui satisfait pour tout  $\tau < T$  l'équation différentielle (6.31) et nous minimisons la fonction d'erreur :

$$f^{(i)}(U_i(T), T) = \int_0^T (Y_i - h_i, Y_i - h_i) dt + (U_i(0) - U_{i0}, w(U_i(0) - U_{i0})) \quad (6.36)$$

Nous pouvons construire l'équation différentielle partielle pour  $f^{(i)}(U_i(T), T)$  et nous pouvons prendre comme filtre optimal,

$$U_{ies}(T) = \arg \min_{C_i} f^{(i)}(C_i, T) \quad (6.37)$$

alors

$$f_{C_i}^{(i)}(U_{ies}, T) = 0 \quad (6.38)$$

Si nous prenons la dérivée totale de (6.38), nous allons obtenir :

$$f_{C_i C_i}^{(i)}(U_{ies}, T) dU_{ies} + f_{C_i T}^{(i)}(U_{ies}, T) dT = 0 \quad (16.39)$$

ou

$$\frac{dU_{ies}}{dT} = - f_{C_i C_i}^{(i)}(U_{ies}, T) f_{C_i T}^{(i)}(U_{ies}, T) \quad (6.40)$$

qui est une équation différentielle pour l'estimation optimale de  $U_{ies}(T)$  avec

$$f_T^{(i)}(C_i, T) = (Y_i - h_i(C_i), Y_i - h_i(C_i)) - (f_{C_i}^{(i)}(C_i, T), g_i(C_i)) \quad (6.41)$$

et

$$\dot{f}_{C_i}^{(i)}(C_i, T) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial C_1}^{(i)}, \frac{\partial f}{\partial C_2}^{(i)}, \dots, \frac{\partial f}{\partial C_{p+2}}^{(i)} \right\} \quad (6.42)$$

avec la condition initiale :

$$\dot{f}_{C_i}^{(i)}(C_i, 0) = (C_i - U_{i0}, w(C_i - U_{i0})) \quad (6.43)$$

Pour obtenir la forme la plus simple de l'équation (6.40), en utilisant l'équation (6.41), nous calculons  $f_{TC_i} = f_{C_i T}$  :

$$\begin{aligned} \dot{f}_{TC_i}^{(i)}(C_i, T) = & - 2 G_i^t (Y_i - G_i C_i) - \dot{f}_{C_i C_i}^{(i)}(C_i, T) g_i(C_i) \\ & - g_i(C_i) \dot{f}_{C_i}^{(i)}(C_i, T) \end{aligned} \quad (6.44)$$

évaluée en  $C_i = U_{ies}$ , cette expression peut être simplifiée

$$\dot{f}_{TC_i}^{(i)}(U_{ies}, T) = - 2 G_i^t (Y_i - G_i U_{ies}) - \dot{f}_{C_i C_i}^{(i)}(U_{ies}, T) g_i(U_{ies}) \quad (6.45)$$

Substituons (6.45) dans (6.38), nous obtenons l'équation de filtre optimal non linéaire :

$$\frac{dU_{ies}}{dT} = g_i(U_{ies}) + Q_i(T) G_i^t (Y_i - G_i U_{ies}) \quad (6.46)$$

où  $Q_i$  est une matrice donnée par :

$$Q_i(T) = 2 \dot{f}_{C_i C_i}^{(i)-1}(U_{ies}, T) \quad (6.47)$$

Pour intégrer l'équation (6.47) nous utilisons la meilleure estimation  $U_i(0)$  comme condition initiale :

$$U_{ies}(0) = U_{i0} \quad (6.48)$$

pour calculer et pour intégrer  $f^{(i)}(C_i, T)$  nous n'assumons [28] que dans le voisinage de l'estimation optimale  $U_{ies}$ , la fonction  $g_i(C_i)$  est linéaire en  $C_i$  :

$$g_i(C_i) = g_i(U_{ies}) + g_{iC_i}(U_{ies})(C_i - U_{ies}) \quad (6.49)$$

en utilisant (6.49) dans l'équation (6.41)-(6.43),  $f^{(i)}(C_i, T)$  peut être représentée comme :

$$f^{(i)}(C_i, T) = (R_i C_i, C_i) (r_i, C_i) + s_i \quad (6.50)$$

où  $R_i = Q_i^{-1}$  est une matrice,  $r_i$  est un vecteur et  $s_i$  est un scalaire.

Pour obtenir l'équation différentielle en  $Q_i$ , nous substituons l'équation(6.50) dans (6.41)-(6.43) et nous regroupons le terme quadratique en  $C_i$  :

$$\frac{dQ_i}{dT} = g_{iC_i}(U_{ies})Q_i + Q_i g_{iC_i}(U_{ies}) - Q_i G_i^t G_i Q_i, \quad Q_i(0) = q_{i0} \quad (6.51)$$

Pour obtenir le filtre optimal de  $U_{ies}(T)$ , nous intégrons simultanément les équations (6.46), (6.48) et (6.51).

#### 6.2.2.5. METHODE QUASI LINEAIRE .

Ici, nous essayons d'obtenir  $U_i$  pour  $t = 0$ ,  $U_i(0) = c_i$ . Le problème maintenant est de déterminer le vecteur  $C_i$  tel que  $J(U_i)$  soit minimum et que  $U_i$  satisfasse à l'équation de contrainte différentielle  $\dot{U}_i = g_i(U_i)$ .

Premièrement, nous remarquons la dépendance de la solution  $U_i$  par rapport à la condition initiale  $U_i(0) = c_i$  :

$$U_i(\tau) = U_i(c_i, \tau) \quad (6.52)$$

et nous considérons une expansion linéaire  $U_i(c_i, \tau)$  autour de l'estimation disponible  $c_i$ , donnée ici par  $c_i^0$ . Cela nous donne l'équation suivante :

$$U_i = U_i^0 + U_{iC_i} \Delta C_i \quad (6.53)$$

où  $U_i^0 = U_i^0(c_i, \tau)$  et  $U_{iC_i}$  est le Jacobien qui a des éléments de la forme  $dU_{ii}^0/dC_{ij}$  et  $\Delta C_i$  est l'écart de l'estimation  $c_i^0$  donné par :

$$\Delta C_i = c_i^1 - c_i^0 \quad (6.54)$$

où  $c_i^1$  est une valeur améliorée de  $c_i^0$ .

La substitution de l'équation (6.53) dans (6.35) nous donne :

$$J(\Delta C_i) = \int_0^T (G_i U_i^0 + G_i U_{iC_i} \Delta C_i - Y_i, G_i U_i^0 + U_{iC_i} \Delta C_i - Y_i) dt \\ + (U_i^0(0) + U_{iC_i}(c_i^0, 0) \Delta C_i - U_{i0}, w (U_i^0(0) + U_{iC_i}(c_i^0, 0) \Delta C_i - U_{i0})) \quad (6.55)$$

La minimisation de  $J(\Delta C_i)$  impose que :

$$0 = \int_0^T U_{iC_i} G_i (G_i U_i^0 + U_{iC_i} \Delta C_i - Y_i) dt \\ + U_{iC_i}(c_i^0, 0) w (U_i^0(0) + U_{iC_i}(c_i^0, 0) \Delta C_i - U_{i0}) \quad (6.56)$$

soit une équation linéaire en  $\Delta C_i$  qui peut être écrite sous la forme :

$$A_i \Delta C_i = b_i \quad (6.57)$$

où

$$A_i = \int_0^T U_{iCi}^{\tau} G_i^{\tau} G_i U_{iCi} dt + U_{iCi}^{\tau}(C_i, 0) w U_{iCi}(C_i, 0) \quad (6.58)$$

et

$$b_i = \int_0^T (U_{iCi}^{\tau} G_i^{\tau} G_i U_{i0} - U_{iCi}^{\tau} G_i^{\tau} Y_i) dt + U_{iCi}^{\tau}(C_i^0, 0) w (U_i^0(0) - U_{i0}) \quad (6.59)$$

La matrice Jacobienne de  $U_{iCi}$  est fournie par intégration de l'équation de sensibilité :

$$\frac{dU_{iCi}}{dt} = G_i U_i U_{iCi}, \quad U_{iCi}(C_i, 0) = \begin{bmatrix} I_{i2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

où  $I_{i2}$  est la matrice identité d'ordre deux.

Pour simplifier, nous pouvons réduire les équations (6.57) et (6.58) sous la forme différentielle suivante :

$$\frac{dA_i}{dt} = U_{iCi}^{\tau} G_i^{\tau} G_i U_{iCi}, \quad A_i(0) = U_{iCi}^{\tau}(C_i^0, 0) w U_{iCi}(C_i^0, 0) \quad (6.61)$$

$$\frac{db_i}{dt} = U_{iCi}^{\tau} G_i^{\tau} G_i U_i^0 - U_{iCi}^{\tau} G_i^{\tau} Y_i, \quad b_i(0) = U_{iCi}^{\tau}(C_i^0, 0) w (U_i^0(0) - U_{i0}^0) \quad (6.62)$$

La méthode est initialisée en utilisant l'estimation  $C_i^0$ , les itérations sont menées jusqu'à ce qu'on obtienne une bonne convergence.





Notre but ici est de calculer les coefficients ( $C_i$ ) des fonctions polynomiales  $F^1$  qui permettent d'identifier la réponse et de l'analyser. On utilisera une méthode de minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$J(C_i) = 1/N \text{Log}(\det(\sum_{k=1}^N e(k, C_i) e^T(k, C_i))) \quad (6.64)$$

Où :

$$\begin{aligned} e(k, C_i) &= y_i(k) - u_k C_i \\ C_i &= \text{Coefficients du modèle NARMAX} \\ y_i(k) &= \text{Réponse à l'instant } k \\ u_k &= \text{Contribution linéaire et non linéaire en } u \text{ à} \\ &\quad \text{l'instant } k \end{aligned}$$

#### 6.2.2.6.2. METHODE DU GRADIENT [8, 34, 39].

Soit  $F$  une fonction dérivable,  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

On appelle gradient de  $J$  au point  $C_i$  le vecteur :

$$\frac{\partial J}{\partial C_i} = 2/N \sum_{\tau=1}^N \hat{e}^T D(C_i)^{-1} \partial \hat{e}(\tau) / \partial C_i, \quad i = 1, \dots, n_C. \quad (6.65a)$$

où

$$D(C_i) = 1/N \sum_{\tau=1}^N \hat{e}(\tau) \hat{e}^T(\tau) \quad (6.65b)$$

et

( $\partial \hat{e}(\tau) / \partial C_i$ ) est calculé à l'aide de l'équation :

$$\partial \hat{e}(\tau) / \partial C_i = - \frac{\partial}{\partial C_i} f(y_i(k-1), u(\tau), C_i). \quad (6.65c)$$

Soit  $J$  une fonction admettant des dérivées partielles premières et secondes. On appelle matrice Hessien de  $J$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta^2 J}{\delta C_i \delta C_j} = & + 2/N \sum_{t=1}^N \frac{\partial \hat{e}(t)^T}{\partial C_i} D(C_i)^{-1} \frac{\partial \hat{e}(t)}{\partial C_j} \\
 & + 2/N \sum_{t=1}^N \hat{e}(t)^T D(C_i)^{-1} \frac{\partial^2 \hat{e}(t)}{\partial C_i \partial C_j} \\
 & - 2/N^2 \sum_{t=1}^N \sum_{k=1}^N \hat{e}(t)^T D(C_i)^{-1} \left[ \hat{e}(k) \frac{\partial \hat{e}(k)^T}{\partial C_i} + \frac{\partial \hat{e}(k)}{\partial C_i} \hat{e}(k) \right] \\
 & D(C_i)^{-1} \frac{\partial \hat{e}(t)}{\partial C_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_C
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 \hat{e}(t)}{\partial C_i \partial C_j} = \frac{\partial^2}{\partial C_i \partial C_j} f(y(t-1), u(t)), \quad i, j = 1, 2, \dots, n_C \tag{6.67}$$

Pour  $C_i$  approchant sa valeur exacte, le deuxième terme de l'équation (4) tend vers la valeur d'espérance zéro. De même le troisième terme de l'équation (4) tend vers zéro pour  $N$  tendant vers l'infini.

On calcule donc une approximation de la matrice Hessien de  $J$  à l'aide de relation :

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial C_i \partial C_j} = 2/N \sum_{t=1}^N \frac{\partial \hat{e}(t)^T}{\partial C_i} D(C_i)^{-1} \frac{\partial \hat{e}(t)}{\partial C_j} \tag{6.68}$$

On propose une méthode qui utilise directement le fait que  $-\partial J/\partial C_i$  est la direction de plus grande descente. A chaque itération  $k$ , on se déplace d'un pas  $\alpha^k$  dans la direction  $-\partial J/\partial C_i$  :

$$\hat{C}_i(k+1) = \hat{C}_i(k) - \alpha^k \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial C_i \partial C_j} \right)^{-1} \frac{\partial J}{\partial C_i} \quad (6.69)$$

avec  $\alpha^k > 0$

La stratégie la plus élémentaire consiste à prendre le pas constant au cours des itérations :  $\alpha^k = \alpha$  suffisamment petit, mais elle peut nécessiter un très grand nombre d'itérations pour arriver à l'optimum. Elle peut être améliorée en calculant le pas optimal par une recherche unidirectionnelle :

$$\alpha^k \text{ minimisant } J \left( \hat{C}_i(k) - \alpha^k \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial C_i \partial C_j} \right)^{-1} \frac{\partial J}{\partial C_i} \right)$$

L'algorithme peut alors se résumer ainsi :

a. Choix de  $C_i^0$ ,  $k = 0$ , utilise la méthode de moindres carrés simple.

b. Calcul  $\left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial C_i \partial C_j} \right)$  et  $\frac{\partial J}{\partial C_i}$  au  $C_i(k)$  pour  $i, j=1, 2, \dots, n_C$ .

c. Minimisation unidirectionnelle pour calculer  $\alpha^k$ .

d.  $\hat{C}_i(k+1) = \hat{C}_i(k) - \alpha^k \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial C_i \partial C_j} \right)^{-1} \frac{\partial J}{\partial C_i}$

e. Test d'arrêt : variation de la valeur de  $J$ ,

$$J(C_i(k+1)) - J(C_i(k)) \leq \epsilon.$$

Fin, ou bien  $k = k + 1$  et aller en (b).

### 6.2.2.6.3. NOMBRE MAXIMUM DES COEFFICIENTS.

Pour simplifier l'étude de ce problème, on se restreindra au cas de structures à un degré de liberté plus, précisément au cas d'une seule entrée et d'une seule sortie qui donne une équation du modèle NARMAX de la forme :

$$y(t) = F^1[ y(t-1), \dots, y(t-n_y), u(t-d), \dots, u(t-d-n_u+1), e(t-1), \dots, e(t-n_e) ] + e(t) \quad (6.70)$$

Le nombre maximum de coefficients dans le modèle d'équation (6.70) est donné par :

$$n = \sum_{i=1}^n n_i$$

$$n_i = [ n_{i-1}(n_y + n_u + n_e + i-1) ]/i, \text{ avec } n_0=1 \quad (6.71)$$

On peut voir que l'estimation directe basée sur l'équation polynomiale (6.70) peut aboutir un à nombre excessif de termes ce qui nous amène inévitablement à un mauvais conditionnement numérique.

Une simulation par Billing et Fadzil nous montre qu'au plus dix coefficients sont significatifs dans le modèle NARMAX, les autres peuvent être abandonnés avec bien sûr une petite dégradation de la précision du modèle estimé.

Pour déterminer les coefficients qui sont significatifs, on utilisera le test de distribution,  $F$  [34], définit par :

$$F_i = \frac{\hat{c}_i^2}{D(C_i)P_{2,ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.72)$$

où  $D(C_i)$  est la covariance d'erreur d'estimation analogue à celui utilisé en équation (6.65a) et  $P_{2,ii}$  est le terme diagonal du  $i$  ème élément de la matrice de covariance d'erreur d'estimation.

#### 6.2.2.6.4. VALIDATION DU MODELE.

Quelque soit le modèle ou la procédure d'identification choisi, il sera important de tester si le modèle identifié décrit suffisamment bien les données [34]. Si le modèle et les coefficients estimés  $C_i$  sont exacts alors la suite d'estimation  $C_i$  sera imprévisibles à partir de toute combinaison linéaire ou non linéaire des entrées et des sorties.

Ce sera vrai à condition que les tests suivants soient satisfaits [34, 35] :

$$\begin{aligned} \Phi_{ee}(k) &= \frac{E[e(\tau, \hat{C})e(\tau-k, \hat{C})]}{E[e^2(\tau, \hat{C})]} = \delta(k) \\ \Phi_{u^2e}(k) &= \frac{E[u^2(\tau) - \bar{u}^2]e(\tau-k, \hat{C})]}{\sqrt{E[u^2(\tau) - \bar{u}^2]^2}E[e^2(\tau, \hat{C})]} = 0 \quad \forall k \\ \Phi_{ue}(k) &= \frac{E[u(\tau)e(\tau-k, \hat{C})]}{\sqrt{E[u^2(\tau)]E[e^2(\tau, \hat{C})]}} = 0 \quad \forall k \\ \Phi_{u^2e^2}(k) &= \frac{E[u^2(\tau) - \bar{u}^2]e^2(\tau-k, \hat{C})]}{\sqrt{E[u^2(\tau) - \bar{u}^2]^2}E[e^4(\tau, \hat{C})]} = 0 \quad \forall k \\ \Phi_{e(eu)}(k) &= \frac{E[e(\tau, \hat{C})e(\tau-1-k, \hat{C})u(\tau-1-k)]}{\sqrt{E[e^2(\tau, \hat{C})]E[e^2(\tau, \hat{C})u^2(\tau)]}} = 0 \quad \forall k \end{aligned}$$

(6.73)

## **RESULTATS**

## CHAPITRE VII.

### RESULTATS.

#### 7.1 RESULTATS NUMERIQUES.

Pour appliquer les méthodes du chapitre VI nous étudions le comportement dynamique du système discret à deux degrés de liberté montré en figure 7.1.

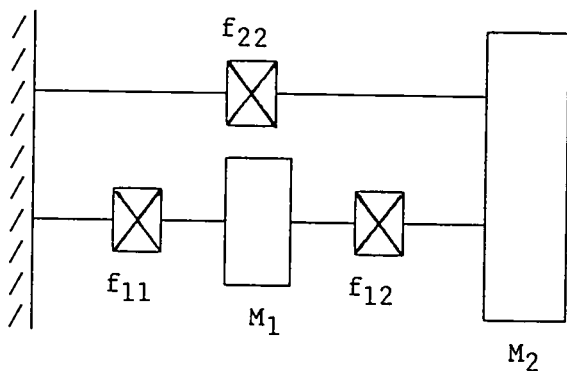


Figure 7.1.

Dans notre exemple les forces internes sont considérées de la forme :

$$f_{ik}(y_{ik}, \dot{y}_{ik}) = \sum_{p=1}^{P_k} \sum_{q=1}^{Q_k} C_{pq}^{(i,k)} y_{ik}^{p-1} \dot{y}_{ik}^{q-1} \quad (7.1)$$

(p or q ≠ 1) for i ≠ k

avec  $P_k = 2$  et  $Q_k = 3$ .

#### 7.1.1 COMPARAISON BASEE SUR LISSAGE DES FORCES DE RAIDEUR

Les tableaux 7.1, 7.2, et 7.3 comparent les paramètres identifiés par les trois premières méthodes et les variations du facteur de bruit (RMS to signal ratio) (N/S), 1 %, 2 % et 5 % avec une excitation bruit blanc sur la masse  $M_1$ .



Tableau 7.1. Comparaison entre les coefficients exacts et identifiés pour  $f_{11}$ .

$$f_{11} = c_{11}^{(1,1)} + c_{12}^{(1,1)} y_{11} + c_{13}^{(1,1)} y_{11}^2 + c_{21}^{(1,1)} y_{11} + c_{22}^{(1,1)} y_{11} \dot{y}_{11} + c_{23}^{(1,1)} y_{11}^2 \dot{y}_{11}$$

	$c_{11}^{(1,1)}$	$c_{12}^{(1,1)}$	$c_{13}^{(1,1)}$	$c_{21}^{(1,1)}$	$c_{22}^{(1,1)}$	$c_{23}^{(1,1)}$
N/S - 1 %						
Exact	0.000	-0.010	0.0001	10.00	0.0001	0.0000
Méth.direct.	2.143	-0.038	-0.0039	9.81	-0.0039	0.0000
Filtre Appr.	0.028	-0.002	0.0028	9.65	0.0007	0.0001
Quasi Lin.	0.046	-0.002	0.0009	10.43	0.0019	0.0000
N/S - 2 %						
Méth.Direct.	2.142	-0.039	-0.0039	9.80	-0.0040	0.0000
Filtre Appr.	0.109	-0.006	0.0031	9.65	0.0006	0.0001
Quasi Lin.	0.048	-0.004	0.0022	10.66	0.0023	0.0000
N/S - 5 %						
Méth.direct.	2.141	-0.040	-0.0040	9.82	-0.0040	0.0000
Filtre Appr.	1.566	-0.015	0.0052	9.42	0.0014	0.0001
Quasi Lin.	0.955	-0.018	0.0046	10.69	0.0028	0.0000

Tableau 7.2. Comparaison entre les coefficients exacts et identifiés pour  $f_{12}$ .

$$f_{12} = + c_{12}^{(1,2)} y_{12} + c_{13}^{(1,2)} y_{12} + c_{21}^{(1,2)} y_{12} + c_{22}^{(1,2)} y_{12} \dot{y}_{12} + c_{23}^{(1,2)} y_{12} \dot{y}_{12}$$

	$c_{12}^{(1,2)}$	$c_{13}^{(1,2)}$	$c_{21}^{(1,2)}$	$c_{22}^{(1,2)}$	$c_{23}^{(1,2)}$
N/S = 1%					
Exact	0.010	0.0000	-10.00	0.00000	0.00000
Méth.direct.	-0.012	0.0000	-10.06	-0.00001	0.00000
Filtre Appr.	0.008	0.0007	- 9.82	0.00011	0.00004
Quasi Lin.	0.016	0.0000	- 9.78	0.00000	0.00000
N/S = 2 %					
Méth.direct.	-0.013	0.0000	-10.07	-0.00001	0.00000
Filtre Appr.	0.008	0.0012	- 9.80	-0.00020	0.00004
Quasi Lin.	0.021	0.0000	- 9.78	-0.00000	0.00000
N/S = 5 %					
Méth.direct.	-0.013	0.0000	-10.07	-0.00001	0.00001
Filtre Appr.	0.014	0.0015	- 9.75	-0.00033	0.00012
Quasi Lin.	0.029	0.0001	- 9.77	-0.00018	0.00025

Tableau 7.3. Comparaison entre les coefficients exacts et identifiés pour  $f_{22}$ .

$$f_{22} = c_{11}^{(2,2)} + c_{12}^{(2,2)} y_{22} + c_{13}^{(2,2)} \dot{y}_{22} + c_{21}^{(2,2)} y_{22}^2 + c_{22}^{(2,2)} y_{22} \dot{y}_{22} + c_{23}^{(2,2)} \dot{y}_{22}^2$$

	$c_{11}^{(2,2)}$	$c_{12}^{(2,2)}$	$c_{13}^{(2,2)}$	$c_{21}^{(2,2)}$	$c_{22}^{(2,2)}$	$c_{23}^{(2,2)}$
N/S = 1 %						
Exact	0.00	-0.010	0.0001	10.00	0.0001	0.0000
Méth.direct.	-3.60	-0.026	0.0009	10.09	0.0011	0.0000
Filtre Appr.	-0.01	-0.008	0.0011	9.98	0.0051	0.0001
Quasi Lin.	-2.01	-0.011	0.0002	9.90	0.0001	0.0000
N/S = 2 %						
Méth.direct.	-3.70	-0.033	0.0012	10.16	0.0011	0.0000
Filtre Appr.	-0.05	-0.012	0.0025	9.98	0.0062	0.0001
Quasi Lin.	-2.56	-0.021	0.0002	9.90	0.0001	0.0000
N/S = 5 %						
Méth.direct.	-3.70	-0.035	0.0013	10.16	0.0022	0.0001
Filtre Appr.	-1.50	-0.046	0.0033	9.98	0.0063	0.0001
Quasi Lin.	-2.60	-0.022	0.0002	9.90	0.0066	0.0008

### 7.1.2 COMPARAISON ENTRE LA MODELISATION DE LA FORCE INTERNE ET LE MODELE NARMAX

Ici, nous allons comparer le lissage de force de interne basé sur la méthode directe et le modèle NARMAX basé sur la méthode du gradient pour N/S = 5 %. Le nombre maximum des coefficients à identifier est de 19 avec  $d = 1$ ,  $n_y = n_u = n_e = 1$ . et le degré de non linéarité  $l = 3$ .

Cela revient donc à identifier les coefficients de l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
y_i(t) = & c_{11}^i y_i(t-1) + c_{12}^i u_i(t-1) + c_{13}^i e_i(t-1) + c_{14}^i y_i^2(t-1) \\
& + c_{15}^i y_i(t-1) u_i(t-1) + c_{16}^i y_i(t-1) e_i(t-1) \\
& + c_{17}^i u_i^2(t-1) + c_{18}^i u_i(t-1) e_i(t-1) + c_{19}^i e_i^2(t-1) \\
& + c_{10}^i y_i^3(t-1) + c_{11}^i y_i^2(t-1) u_i(t-1) \\
& + c_{12}^i y_i^2(t-1) e_i(t-1) + c_{13}^i u_i^3(t-1) \\
& + c_{14}^i u_i^2(t-1) y_i(t-1) + c_{15}^i u_i^2(t-1) e_i(t-1) \\
& + c_{16}^i e_i^3(t-1) + c_{17}^i e_i^2(t-1) + c_{18}^i e_i^2(t-1) u_i(t-1) \\
& + e_i(t).
\end{aligned} \tag{7.2}$$

On estime les valeurs initiales des coefficients  $c_i$  par la méthode des moindres carrés simple et on identifie par la méthode du gradient les coefficients  $c_i$ . Les résultats dans le cas réduit sont obtenus en utilisant le test de distribution de F (équation 6.72). Le nombre de coefficients a été réduit de 18 à 12.

Les coefficients  $c_i$  sont exposés dans le tableau 7.4 suivant :

Tableau 7.4

COEFFI- CIENTS	MASSE 1		MASSE 2	
	SANS REDUCTION	REDUIT	SANS REDUCTION	REDUIT
C <sub>1</sub>	0.680719	0.680719	0.613443	0.613443
C <sub>2</sub>	4.233239	4.233239	-0.612565	-0.612565
C <sub>3</sub>	0.977940	0.977940	0.703985	0.703985
C <sub>4</sub>	-0.000421	0.000421	-0.000757	-0.000757
C <sub>5</sub>	-0.015716	-0.015716	0.018873	0.018873
C <sub>6</sub>	-0.000375	-0.000000	-0.001041	-0.000000
C <sub>7</sub>	2.090683	2.090683	-3.645465	-3.645465
C <sub>8</sub>	0.089976	0.089976	0.161904	0.161904
C <sub>9</sub>	-0.001860	-0.001860	-0.002411	-0.000000
C <sub>10</sub>	-0.000026	-0.000000	0.000008	0.000000
C <sub>11</sub>	0.000908	0.000908	-0.001188	-0.001188
C <sub>12</sub>	-0.000018	-0.000000	-0.000012	-0.000000
C <sub>13</sub>	-4.997095	-4.997095	2.597321	0.000000
C <sub>14</sub>	0.039659	0.039659	-0.022864	-0.022864
C <sub>15</sub>	-0.490190	-0.490190	-0.090865	-0.090865
C <sub>16</sub>	-0.000213	-0.000000	-0.000060	-0.000000
C <sub>17</sub>	0.000009	0.000000	0.000104	0.000000
C <sub>18</sub>	-0.002292	-0.000000	0.001413	0.000000

Les tests du modèle NARMAX relatif aux masses 1 et 2 sont illustrés respectivement dans les figures 7.2 et 7.3. Le modèle sera alors bien identifié si ces tests vérifient les conditions suivantes :

$$\Phi_{e_e}(k) = \delta(k) , \quad \Phi_{u^2_e}(k) = \Phi_{u_e}(k) = \Phi_{u^2_e2}(k) = \Phi_{e(eu)}(k) = 0 \quad \forall k$$

On peut dire que le modèle décrit suffisamment bien les données.

La figure 7.4 compare la réponse exacte de la masse 1 et la réponse identifiée par le lissage de la force interne basé sur la méthode directe. Quant à la figure 7.5 elle compare la réponse exacte de la masse 1 et la réponse identifiée par le modèle NARMAX basé sur la méthode du gradient. La figure 7.6 est similaire à la figure 7.5 excepté pour le cas des coefficients réduits.

Les figures 7.7, 7.8 et 7.9 remplacent successivement les figures 7.4, 7.5 et 7.6 dans le cas de la réponse de la masse 2.

## 7.2. CONCLUSIONS.

Plusieurs modèles permettant de décrire le comportement dynamique d'une structure dynamique non-linéaire ont été proposés et des méthodes d'identification adaptées ont été présentées. Chacune de ces dernières présente des avantages et des inconvénients. En comparant la méthode directe avec la méthode quasi linéaire et l'approche par filtre, on constate que ces deux dernières stratégies améliorent grandement les qualités des modèles non linéaires identifiés.

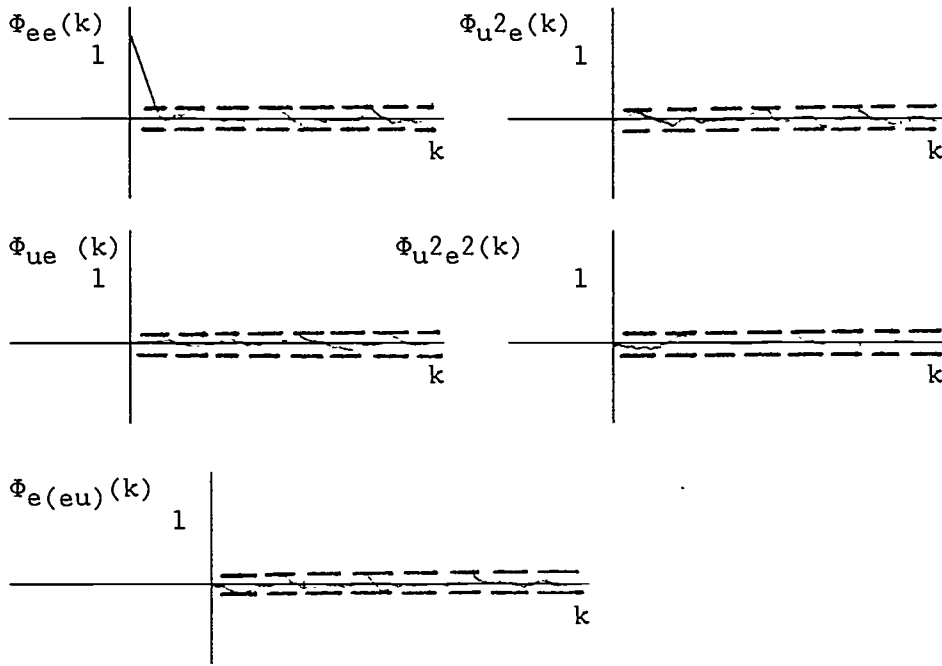


FIGURE 7.2.

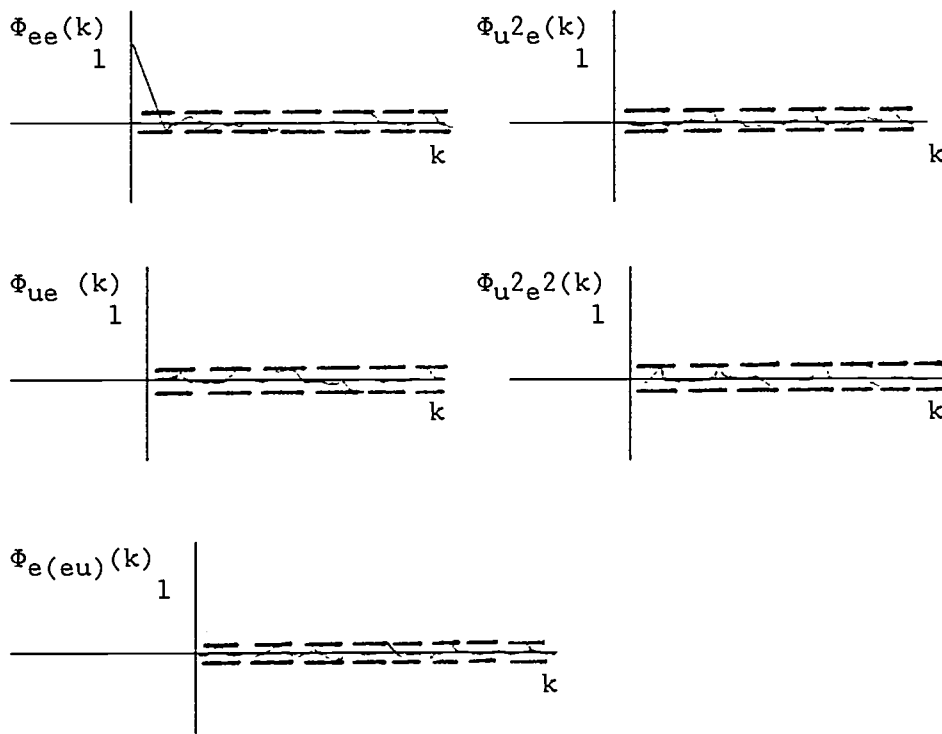


FIGURE 7.3.

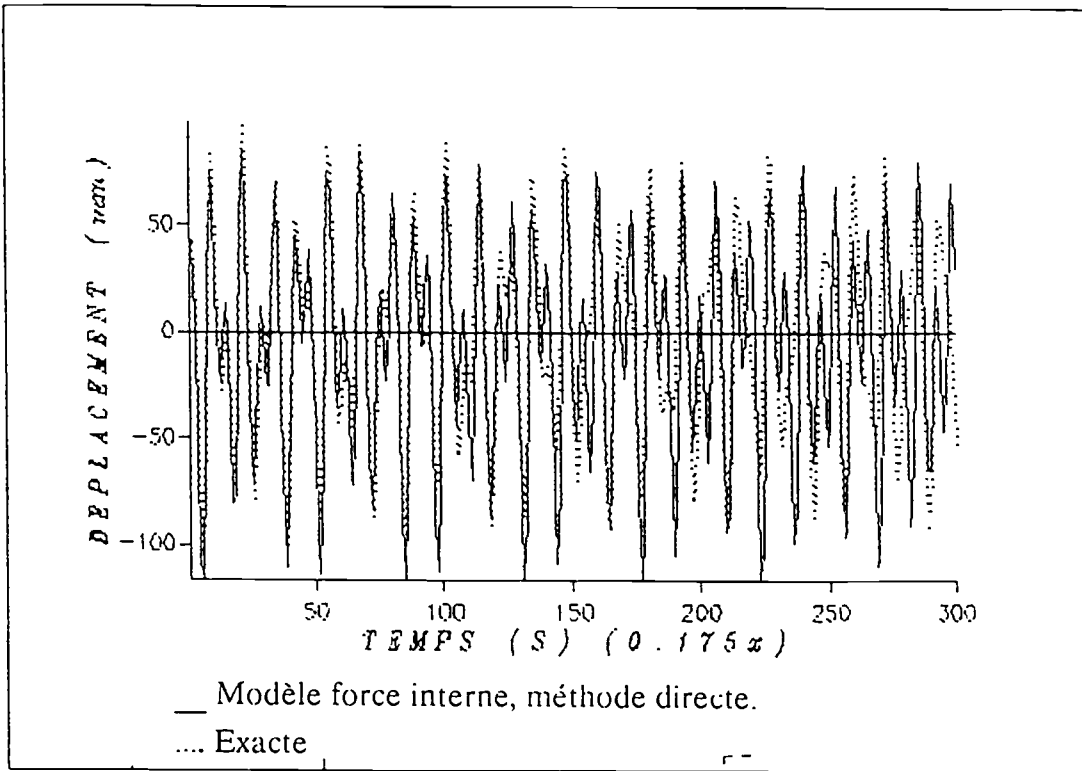


Figure 7.4. Déplacement de la masse 1 en fonction du temps

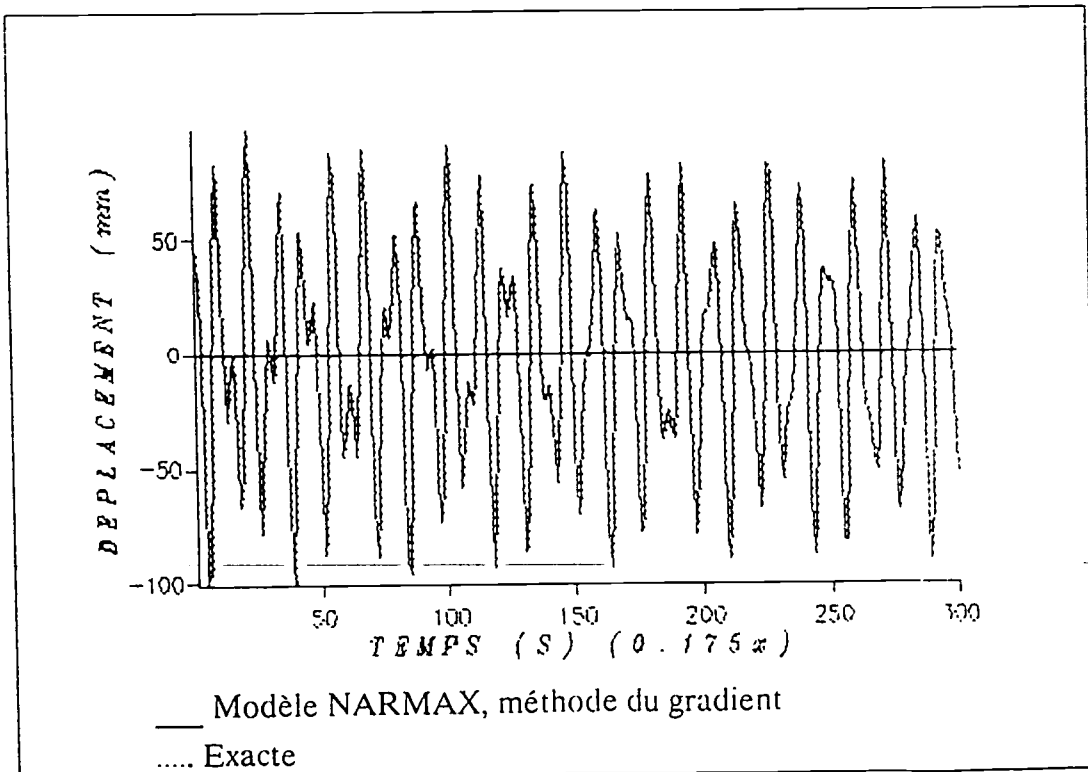


Figure 7.5. Déplacement de la masse 1 en fonction du temps



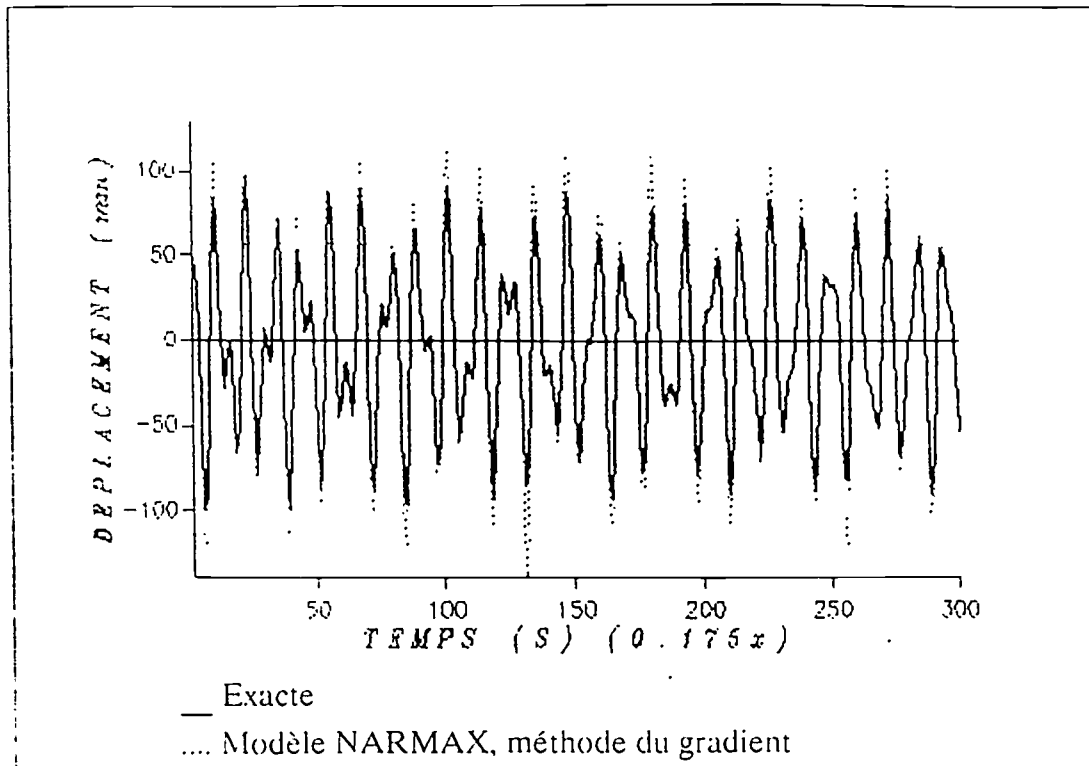


Figure 7.6. Déplacement de la masse 1 en fonction du temps calculé avec le modèle NARMAX réduit.

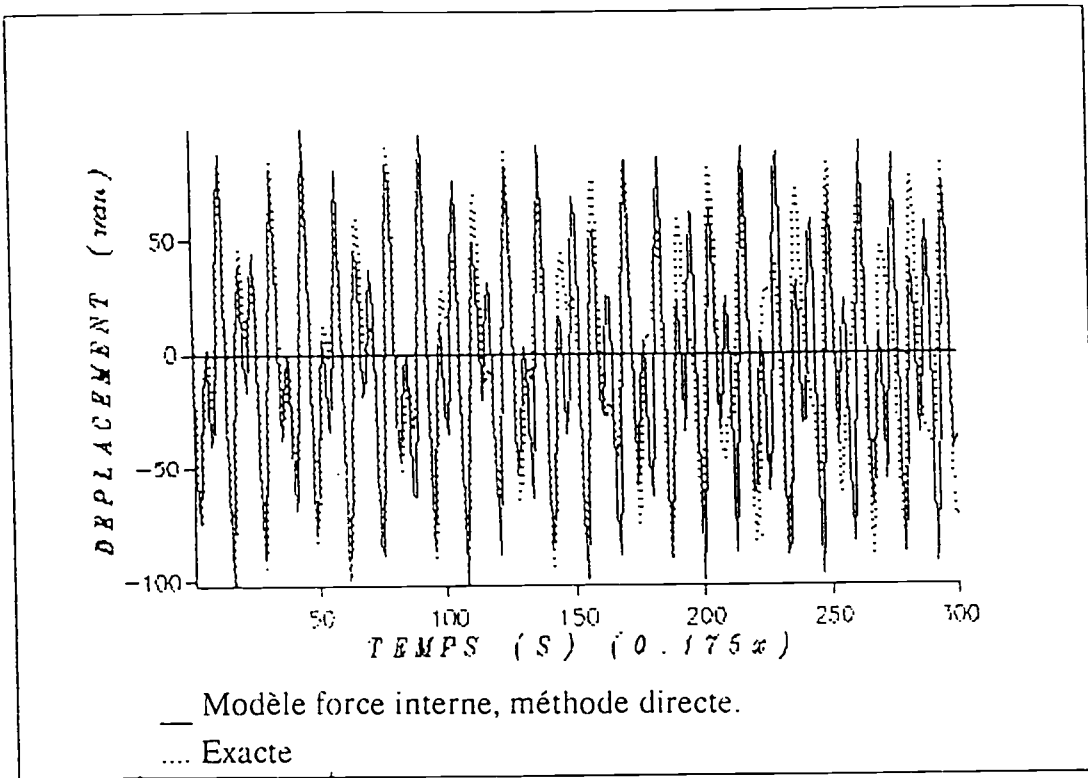


Figure 7.7. Déplacement de la masse 2 en fonction du temps

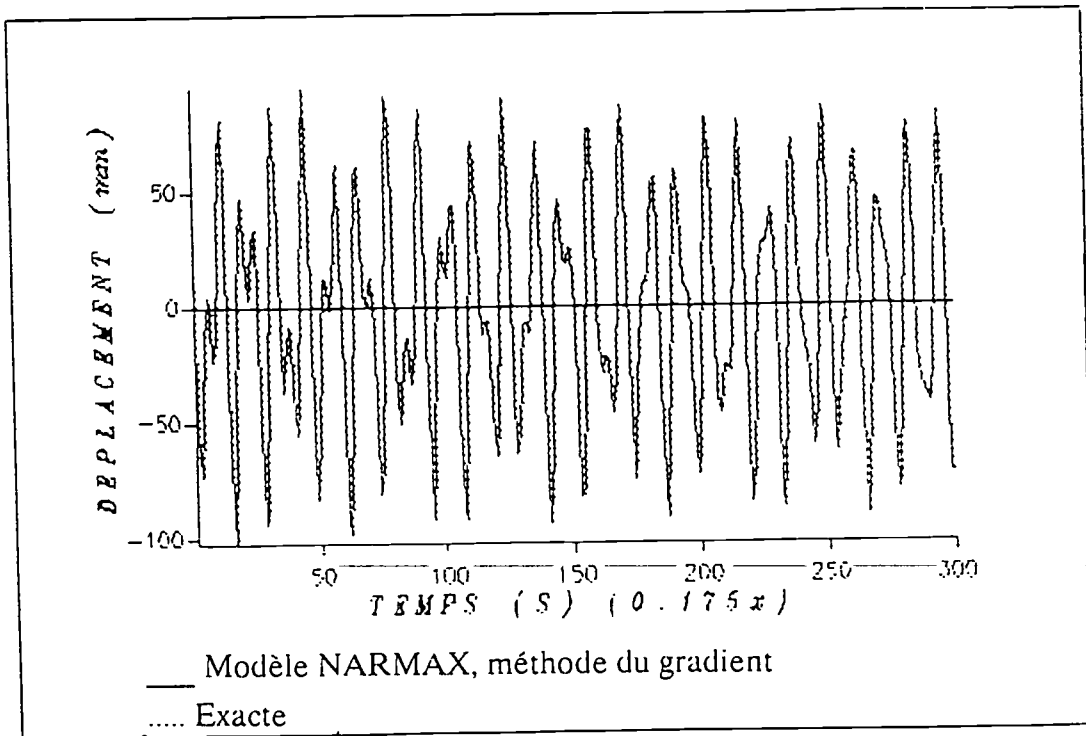


Figure 7.8. Déplacement de la masse 2 en fonction du temps

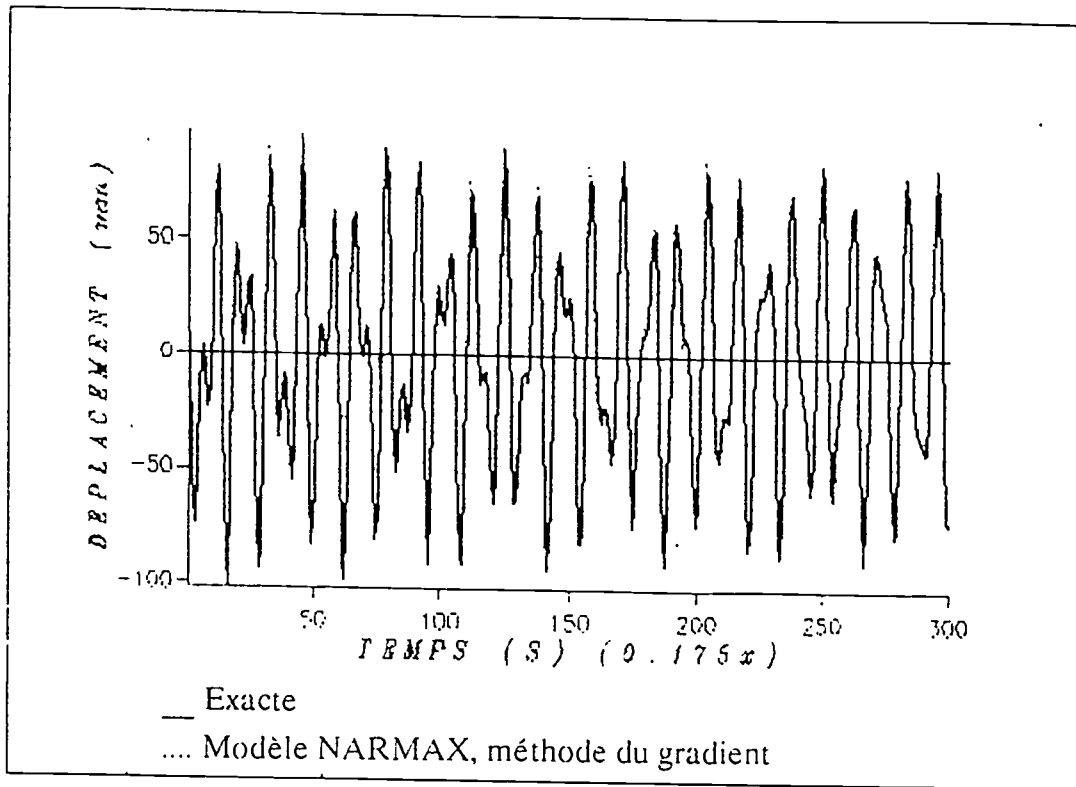


Figure 7.9. Déplacement de la masse 1 en fonction du temps calculé avec le modèle NARMAX réduit.

**CONCLUSION GENERALE ET DEVELOPPEMENTS  
FUTURS**

## CHAPITRE VIII.

### CONCLUSIONS GENERALE ET DEVELOPPEMENTS FUTURS

#### 8.1. CONCLUSIONS.

Les techniques d'identification des paramètres modaux d'une structure dynamique dans le domaine temporel ont été présentées. En général, elles sont faciles à programmer, à implanter et nécessite une expérimentation simple. Chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients.

Pour des structures mécaniques possédant deux fréquences propres écartées on peut tirer les conclusions suivantes :

En absence de bruit les résultats sont acceptables. Dans le cas bruité, l'erreur sur les fréquences est nettement inférieure à l'erreur sur les amortissements réduits. Si l'erreur sur les fréquences ne dépasse pas 5 % pour toutes les fréquences, l'erreur sur le facteur d'amortissement atteint 37 % pour la fréquence la plus haute, et est erroné pour la fréquence la plus basse.

Les erreurs importantes sur les résultats des facteurs d'amortissements viennent de la nature exponentielle des équations 2.34 et 2.35.

Les trois méthodes que nous avons utilisées pour identifier le système avec deux fréquences de résonance rapprochées ne permettent pas de séparer tous les modes du système.

Le filtre de Kalman offre la solution du problème du filtrage linéaire avec le critère d'écart quadratique. Sur le plan pratique, il offre un guide pour la recherche de filtres en permettant grâce à sa structure d'intégrer la connaissance a priori du système, et de faire la distinction entre les grandeurs déterministes et les grandeurs aléatoires et d'attacher des poids différents à ces connaissances. Cette structure récurrente qui fournit une estimation à partir de l'estimation précédente et d'une correction se retrouve autant dans le filtrage que dans le lissage. Elle s'avère très "robuste", peu sensible aux erreurs de calculs et de modèles.

Cette structure permet par des tests sur le signal de correction de détecter un mauvais fonctionnement du filtre dû à une mauvaise modélisation ou bien à l'apparition de pannes sur le système lui-même. Malgré les difficultés de mise en oeuvre qui peuvent apparaître dans certains cas, le filtre de Kalman reste un outil simple et fondamental.

Pour les réponses bruitées, l'identification en utilisant une matrice d'autocorrélation par la méthode de moindres carrés n'est pas consistante, pour améliorer cette méthode on choisit le décalage de sortie  $y(n-1)$  comme variable instrumentale.

L'utilisation de procédures itératives permettant d'estimer l'ordre du système possède les avantages suivants :

- meilleur résultat au niveau de l'identification
- économie du temps de calcul

Les deux nouvelles techniques d'identification proposées nous donnent la possibilité d'utiliser les techniques d'identification à partir de plusieurs réponses basées sur :

- l'utilisation d'une matrice d'autocorrélation
- l'introduction de variables instrumentales

dans le cas où le nombre des modes dominants sur les réponses est supérieur au nombre des accéléromètres placés sur la structure à identifier.

L'approximation linéaire du comportement des structures est souvent mise en défaut par la présence de non linéarités. Celles-ci peuvent devenir très importantes et sont alors essentielles à détecter et à identifier. Cette identification doit alors fournir un modèle susceptible de simuler le comportement non linéaire de la structure avec le plus d'exactitude possible.

Plusieurs modèles permettant de déduire le comportement dynamique d'une structure non linéaire ont été proposés et des méthodes d'identification adaptées ont été présentées. Chacune de ces dernières présentent des avantages et des inconvénients et une étude comparative utilisant un système à deux degrés de liberté a été menée.

---

## 8.2. DEVELOPPEMENTS FUTURS.

Il sera intéressant de développer les méthodes que nous avons présentées pour identifier :

- les fonctions de transfert linéaires et les coefficients non linéaires des systèmes dynamiques dans le cadre d'un prolongement du travail de Billing et Fakhouri |45|

- les fonctions de transfert linéaires et non linéaires introduites par Tomlinson |36|

- les non linéarités de frontière (structure possédant un joint non linéaire) apparaissant dans les modèles dynamiques proposés par Jezequel et Thouverez|46|.

## NOMENCLATURE



*1. PREMIERE PARTIE.*

- $A_i$  = Matrice modale constante.  
 $A$  = Système matrice  
 $A$  = Matrice d'état du système  
 $a$  = vecteur de coefficient de modèle ARMA  
 $B$  = Matrice de second membre  
 $B$  = Système matrice  
 $b$  = Vecteur de coefficient de modèle ARMA  
 $C$  = Matrice d'amortissement  
 $C(k)$  = Matrice d'observation  
 $c_c$  = Coefficient d'amortissement critique  
 $F, f$  = Force d'excitation  
 $f_i$  = Fréquence propre  
 $H$  = Matrice d'observation  
 $K$  = Matrice de raideur  
 $L$  = Transformée de Laplace.  
 $\lambda$  = valeur propre  
 $M$  = Matrice de masse  
 $m$  = coefficient du poisson  
 $\Omega$  = Matrice van der monde  
 $P(z^{-1})$  = Polynome en  $z$   
 $P(k/k-1)$  = Matrice de covariance  
 $p$  = Nombre de degré de modèle ARMA  
 $\Phi(k, k-1)$  = Matrice d'état  
 $\emptyset$  = Matrice de reponse  
 $\varphi$  = Matrice de transition

$Q(z^{-1})$  = Polynome en  $z$

$(\psi)$  = Vecteur propre

$S(z)$  = Matrice de transfert

$\theta$  = Vecteur de coefficient à identifier

$U$  = Force d'excitation

$w_d$  = Fréquence d'amortie

$X$  = Vecteur de déplacement

$Y$  = Vecteur de déplacement

$\zeta$  = facteur d'amortissement.

## 2. DEUXIEME PARTIE.

$A$  = Amplitude

$a$  = Constante

$b$  = Constante

$C_{ik}$  = Coefficient de la force raideur

$C_i$  = Coefficient du modèle NARMAX

$C$  = Matrice d'amortissement généralisée

$F, f$  = Force d'excitation

$f_{ik}$  = Force raideur

$K$  = Matrice de raideur généralisée

$G$  = Vecteur loi d'hystérésis

$M$  = Matrice de masse

$m$  = coefficient du poisson

$X$  = Vecteur de déplacement

$Y$  = Vecteur de déplacement

## ANNEXES

## 1. GENERALITES

### DEFINITION 1. :

Un système linéaire est une fonction linéaire homogène dans le temps transformant un signal d'entrée  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  en un signal de sortie  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . On peut le présenter par le produit de convolution [6, 11] :

$$y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k u_{n-k} \quad (1)$$

où  $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est la réponse impulsionnelle du système.

Pour éviter les problèmes de convergence de séries, nous supposons que les entrées  $(u_n)$ ,  $(y_n)$ , ..., sont nulles presque partout, ce qui signifie qu'elles sont nulles sauf pour un nombre fini d'instant (i.e un nombre fini de mesures).

### DEFINITION 2 :

Le système  $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  sera dit :

causal si  $s_k = 0$  pour  $k < 0$

strictement causal si  $s_k = 0$  pour  $k \leq 0$ .

### DEFINITION 3 :

Soit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . On définit la transformée en  $z$  de cette suite par la série formelle :

$$u(z) = \sum u_n z^{-n} \quad (2)$$

On définit l'opérateur  $Z$  par :

$$Z(u_n) = u(z) \quad (3)$$

opérateur linéaire, transformant la convolution en multiplication.

Puisque dans le cadre de l'étude les signaux sont presque nuls, l'écriture (2) est justifiée.

## DEFINITION 4 :

On appelle fonction de transfert en  $z$  de la réponse impulsionnelle  $(s_k)$  d'un système linéaire la transformée en  $z$  de cette même réponse. On la notera  $S(z)$ .

## LEMME 1.:

Soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  un signal de sortie d'un système  $s$  soumis à un signal d'excitation  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Supposons que la fonction de transfert soit rationnelle

$$S(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

où  $P, Q$  sont des polynomes en  $z^{-1}$  :

$$P(z^{-1}) = \sum_{i=0}^p a_i z^{-i}$$

$$Q(z^{-1}) = \sum_{j=0}^q b_j z^{-j}$$

alors  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  peut s'écrire sous une formulation de type ARMA :

$$\sum_{i=0}^p a_i y_{n-i} = \sum_{i=0}^q b_i u_{n-i} \quad (1.1)$$

preuve :

\* Par définition formelle, on a :

$$u(z) = \sum_{k \geq 0} u_k z^{-k}$$

$$y(z) = \sum_{k \geq 0} y_k z^{-k}$$

\* Puisque  $s(z)$  est la fonction de transfert du système, on a :

$$S(z) u(z) = y(z)$$

soit

$$\sum_{i=0}^p (a_i z^{-k} y(z)) = \sum_{j=0}^q (b_j z^{-j} u(z)) \quad (1.2)$$

\* D'après le théorème de Cauchy, on a pour un lacet  $C$  délimitant une portion du plan complexe contenant l'origine

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C z^k dz = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -1 \\ 1 & \text{si } k = -1 \end{cases}$$

\* Ceci permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-k-1} y(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^p y_l \oint_C z^{n-k-1} dz \\ &= y_{n-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-k-1} u(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^q u_l \oint_C z^{n-k-1} dz \\ &= u_{n-k} \end{aligned}$$

\* Ainsi, en multipliant (1.2) par  $z^{n-1}$  et en intégrant sur un lacet  $C$ , on obtient :

$$\sum_{k=0}^p a_k \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-k-1} y(z) dz = \sum_{l=0}^q b_l \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-l-1} u(z) dz$$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^p a_k y_{n-k} = \sum_{l=0}^q b_l u_{n-l}$$

*PROPRIETE :*

$$\text{Si } S(p) = \frac{1}{p-a} \quad (\text{en variable de Laplace})$$

Alors

$$S(z) = \frac{1}{1-\exp.(a\Delta\tau).z^{-1}} \quad (\text{en variable en } z)$$

pour  $|z| > 1$  si  $\text{Re}(a) > 0$

preuve :

$$\text{Si } S(p) = \frac{1}{p-a}, \text{ alors on a :}$$

$$L(S)^{-1}(\tau) = \exp.(a.\tau)$$

De façon formelle, on obtient la transformée en  $z$

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp.(a.n.\Delta\tau).z^{-n} = \frac{1}{1-\exp.(a.\Delta\tau).z^{-1}}$$

pour  $|z| > 1$  si  $\text{Re}(a) > 0$

**DEFINITION 5 :**

Parmi les systèmes causaux, on définit les systèmes à variables d'état par :

$$\begin{aligned} U_n &= A U_{n-1} + B u_n & U_{-\infty} &= 0 \\ y_n &= C U_{n-1} + D u_n \end{aligned} \quad (4)$$

où  $U_n \in \mathbb{R}^d$  est l'état, et  $A, B, C$  des matrices appropriées. La condition  $U_{-\infty} = 0$  signifie que l'état est nul en l'absence de toute entrée ( $u_n$ ) non nulle.

La réponse impulsionnelle  $(s_k)_{k>0}$  s'écrit :

$$s_0 = D ; s_k = C A^{k-1} B \text{ pour } k \geq 0 \quad (5)$$

D'après (2),(3) et (4),  $S(z)$  s'écrit :

$$S(z) = D + C (z \cdot I - A)^{-1} B \quad (6)$$

Parmi les fonctions de transfert  $S$ , nous allons nous intéresser aux fonction de transfert rationnelle :

$$S(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} \quad (7)$$

où  $P, Q$  sont des polynomes en  $z^{-1}$  :

$$P(z^{-1}) = \sum_{i=0}^p a_i z^{-i} \quad (8)$$

$$Q(z^{-1}) = \sum_{j=0}^q b_j z^{-j}$$

La relation d'entrée/sortie s'écrit alors dans le domaine temporel (lemme 1) :

$$y(z) = S(z) u(z) \quad (9)$$

$$\sum_{i=0}^p a_i y_{n-i} = \sum_{i=0}^q b_i u_{n-i} ; y_{-\infty} = 0$$

(9) montre qu'un filtre rationnel est causal.



## 2. MISE EN OEUVRE DU FILTRE DE KALMAN<sup>[44]</sup>

Les difficultés numériques du filtre de Kalman sont aussi une cause de divergence. Elles apparaissent en particulier lorsque les mesures sont très précises ou lorsque les matrices de covariance sont presque singulières. Dans ces conditions, du fait des erreurs de calcul, le caractère positif semi défini des matrices de covariance n'est pas préservé. Ces erreurs peuvent produire des divergences dues simplement au mauvais fonctionnement du filtre de Kalman celui-ci est mis en évidence par l'apparition de termes négatifs sur la diagonale principale ou par des tests tels que la permutation des variables d'états ou le calcul en simple et en double précision. Pour que ce dernier test soit significatif, il faut, bien sûr ne modifier que la précision des traitement, la précision des données restant identique. Pour améliorer la précision et pour maintenir les caractères symétrique et positifs des matrices de covariances différentes solution ont été proposées.

### *SYMETRISATION DES CALCULS*

Théoriquement les matrices de covariance qui interviennent dans le calcul du filtre sont symétriques. Du fait des imprécisions de calcul, cette symétrie peut être perdue, pour la maintenir . On peut :

- calculer simplement la partie supérieure ou inférieure et compléter par symétrie
- calculer toute la matrice et faire la moyenne des termes en dehors de la diagonale principale. Cette solution augmente les calculs, mais améliore bien la précision.
- utiliser la formule de mise à jour de la variance de Joseph.

Cette expression (1) correspond à la mise à jour de la matrice de covariance pour une correction linéaire de l'estimation qu'elle soit optimale ou non.

$$P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1|k} (I - K_{k+1} H_{k+1})^T + K_{k+1} R_{k+1} K_{k+1}^T \quad (10)$$

$$P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1|k} \quad (11)$$

Par rapport à l'expression de Kalman (11) qui apparaît intégralement dans l'expression (10) la formule de Joseph a une forme symétrique qui met en évidence le caractère positif défini de la covariance. Si la symétrie peut être préservée en effectuant globalement l'opération  $ABA^T$  avec B symétrique, il n'est pas de même pour le caractère positif. Outre le fait que cette formule donne la valeur de la covariance quel que soit le gain, elle s'avère peu sensible à une erreur de gain. Par contre elle présente le gros inconvénient d'augmenter beaucoup la taille des calculs.

### 3. LA FORME MATRICIELLE DE LA MATRICE MESUREE DE PRODUIT-MOMENT Q.

On peut écrire l'équation 2.43 sous la forme matricielle suivante :

$$Q(h, m) = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N u^2(\tau-1) & \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N y(\tau-1)u(\tau-1) & \dots \\ \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N u(\tau-1)y(\tau-1) & \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N y^2(\tau-1) & \dots \\ \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N u(\tau-1)u(\tau-2) & \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N y(\tau-1)u(\tau-2) & \dots \\ \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N u(\tau-1)y(\tau-2) & \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N y(\tau-1)y(\tau-2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

## BIBLIOGRAPHIE

## REFERENCES SUR LA PREMIER PARTIE

1. S.A. ZAGHLOOL." Single station time domain (SSTD) Vibrations testing technique theory and application".1980, Journal of Sound and Vibration, vol 72, pp. 205-234.
2. S.R. IBRAHIM and E.C. MIKULCIK." A time domain modal vibration testing technique". 1973, The Shock and Vibration Bulletin, vol.43, pp 21-37.
3. S.R. IBRAHIM and E.C. MIKULCIK." A method for the direc identification of vibration parameters from the free responses". 1977, The Shock and Vibration Bulletin, vol. 47 pp. 183- 198.
4. S.L HUAN. B.C. Mc INNIS and E.D.DENMAN, "Identification structural system using naturally induced vibration data in the presence of measurement noise". 1983, Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, vol. 41, pp. 123-128.
5. ABDALLAH and WALKER." Identification and optimal output control of a laboratory power system". 1980, Proc. IEE, vol.127, pp 237-244.
6. CREMONA.C, Identification temporelle utilisation des processus ARMA 1988, memoire DEA Ecole Centrale de Lyon.
7. TALAAT, Conception d'un regulateur adaptatif multivariable numerique implantation sur un modele dynamique du reseau construit autour d'un modele micro alterneateur, 1984, These, INPG (GRENOBLE).
8. G.C.GOODWIN and R.L.PAYNE, Dynamic system identification : Experiment design and data analysis, 1977, Academic Press, New York.
9. S.R. IBRAHIM, Computation of normal modes from identified complex modes, 1983, AIAA Journal, vol.21, pp.446-451.
10. M. NAJIM, Modelisation et identification en traitement du signal, 1988, Masson, Paris.

11. A. BENVENISTE, M. METIVIER, P. PRIOURET, Algorithmes adaptatifs et approximations stochastiques, Théorie et applications, 1987, Masson, Paris.
12. P.C. YOUNG, An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process., 1970, Automatica, vol.6, pp.271-287, Pergamon press, UK.
13. C.M. WOODSIDE, Estimation of the order of linear system, 1971, AUTOMATICA, vol.7, pp.727-733, Pergamon Press, UK.
14. JAMES A.CADZOW, OTIS M. SOLOMON, Algebraic approach to system identification, 1986, IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing, vol.assp.34.no.3, pp.462-469.
15. B. BUDIWANTORO, Identification des paramètres modaux par la méthode d'Ibrahim, 1987, Rapport de D.E.A. Ecole Centrale de Lyon.
16. B. BUDIWANTORO, L. JEZEQUEL, Comparison of time domain modal identification methods, 1990, Proceedings of the 8th international modal analysis conference, Kissimee, Florida, USA.
17. J.M. LEURIDAN, D.L. BROWN et R.J. ALLEMANG., 1986, Time domain parameter identification methods for linear modal analysis : A unifying approach, Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design, vol. 108/1-8.
18. L. JEZEQUEL, A new integral transform for linear systems identification, 1986, Journal of sound and vibration, vol.III(2), pp.261-278.
19. S.R. IBRAHIM, Dynamic modeling of structures from measured complex modes, 1983, AIAA journal, vol.21.no.6, pp. 898-901.
20. R.K. MEHRA, D.G. LAINIOTIS, 1976, System identification advance and case study, Academic press, N.Y.
21. G.L. GHIRINGHELLI, M. LANZ and P. MANTEGAZZA, 1987, A comparison of methods used for the identification of flutter from experimental data, Journal of sound and vibration, vol.119(1), pp. 39-51.

22. L. JEZEQUEL, 1985, Synthèse modale : Théorie et extensions, thèse de docteur d'état es sciences, L'universite Claude Bernard, Lyon.
23. J.N. JUANG, R.S. PAPPA, 1986, Effects of noise on modal parameters identified by the eigensystem realization algorithm., Journal Guidance, Control and dynamics, vol.9.no.3, pp. 294-303.
24. Essais structurels par analyse modale, Brochure de Bruel & Kjaer.
25. J. PENZIEN, R.W. CLOUGH, 1975, Dynamics of structures, Mc.Graw-Hill Kogakusha, Ltd, Tokyo.
26. N.O. MYKLESTAD, 1956, Fundamentals of vibration analysis, MC.Graw-Hill Book Company, INC, New-york, USA.

**REFERENCES SUR LA DEUXIEME PARTIE.**

27. Yongxin Yang, S.R.Ibrahim , 1985, "A nonparametric Identification technique for a variety of discrete nonlinear vibrating systems", Transactions of the ASME, Vol.107.

28. N.DISTEFANO, A.RATH, 1975, "System identification in nonlinear structural seismic dynamics", Computer methods in applied mechanics and engineering, vol.5.

29. D.M. DETCHMENDY, R.SRIDHAR, june 1966, "Sequential estimation of states and parameters in noisy nonlinear dynamical systems", Transactions of the ASME.

30. S.R. IBRAHIM, 1984, Time domain Quasilinear identification of non-linear dynamic system, AIAA journal, vol.22.no.6., pp 817-823.

31. F. THOUVEREZ , 1988, Analyse des systèmes dynamiques non linéaire, mémoire De D.E.A., Ecole Centrale de Lyon.

32. F.E. UDWADIA, C.P.KUO, 1981, Non-parametric identification of a class of non-linear close-coupled dynamic systems, earthquake engineering and structural dynamics, vol. 9, pp. 385-409.

33. S.A. BILLINGS, I.J. LEONTARITIS, 1985, Input output parametric model for non linear system, Part I and II, International Journal Control, vol. 41 no.2, pp. 303-344.

34. S.A. BILLINGS, W.S. VOON, 1986, A prediction error and stepwise regression estimation algorithm for non linear systems, International Journal Control, vol. 44 no.3, pp. 803-822.

35. S.A. BILLINGS, S. CHEN, 1988, Prediction error for non linear output-affine., International Journal Control, vol. 47 NO.1, pp. 309-332

36. S.J. GIFFORD , G.R. TOMLINSON, 1989, Recent advances in the application of functional series to non linear structures, Journal of sound and vibration vol. 135(2), pp. 289-317.
37. L. LJUNG, T. SODERSTROM, 1984, Theory and practice of recursive identification, MIT Press.
39. P. TROMPETTE, C. FLEURY, C. KNOPF LENOIR, 1987, Optimisation des structures approche de l'ingénieur, Institut pour la promotion des sciences de l'ingénieur, Paris.
40. B. BUDIWANTORO, L. JEZEQUEL, 1990, A non parametric identification technique for non linear systems, Proceedings of the 15th International seminar on modal analysis, Part I, pp.395-407, Leuven Belgium.
41. S.F. MASRI, T.K. CAUGHEY, 1979, A non parametric technique for non linear dynamic problems, Journal of applied mechanics, vol.46, PP. 433-447.
42. A.H. NAYFEH, D.T. MOOK, 1979, Non linear oscillations, John wiley & sons, New-york, USA.
43. M. Roseau, 1984, Vibration des systèmes mécaniques, méthodes analytiques et application, Masson, Paris.



**REFERENCES GENERALES.**

44. M.LABARRERE, T.P. KRIEF, B. GIMONET, 1988, Le fitrage et ses applications, Cepadues edition, Toulouse.

45. S.A. BILLINGS, FAKHOURI, 1978, Identification of a class non linear systems using correlation analysis, IEEE, vol.125, no.7, pp 1285-1295.

46. F. THOUVEREZ, L. JEZEQUEL, 1989, Identification d'une non linéarité localisée, STRUCOME, pp. 723-735.

## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 Juillet 1984, modifié par l'arrêté du 21 Mars 1988 et l'arrêté du 23 Novembre 1988,

Vu la demande du Directeur de Thèse

L. JEZEQUEL                      Professeur - ECL - Ecully (69)

et les rapports de

G. LALLEMENT                    Professeur - LMA - Université de Franche  
Comté - Besançon (25),

G. THOMAS                        Professeur - ECL - Ecully (69)

Monsieur **BUDIWANTORO Bagus**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention  
du titre de DOCTEUR

Spécialité : MECANIQUE

Fait à Ecully, le 18 décembre 1990

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
Le Directeur  
de l'Administration de la  
Recherche

  
F. LEBOEUF