

**THESE DE DOCTORAT**

présentée

à l'ECOLE CENTRALE DE LYON

par I Wayan SUWECA  
pour obtenir le grade de DOCTEUR  
spécialité : Mécanique

*sujet de la thèse***CONTROLE VIBRATOIRE DES STRUCTURES**

soutenue le 21 décembre 1990  
devant le jury composé de :

Mr. GOBIN	Président
Mr. DUPERRAY	Examineur
Mr. JEZEQUEL	Directeur
Mr. MATHIA	Rapporteur
Mr. VAUTRIN	Rapporteur

l. de 2

N° d'ordre : E.C.L. 90-32

Année 1990

## **THESE DE DOCTORAT**

**présentée**

**à l'ECOLE CENTRALE DE LYON**

par I Wayan SUWECA  
pour obtenir le grade de DOCTEUR  
spécialité : Mécanique

*sujet de la thèse*

## **CONTROLE VIBRATOIRE DES STRUCTURES**

soutenue le 21 décembre 1990  
devant le jury composé de :

Mr. GOBIN	Président
Mr. DUPERRAY	Examineur
Mr. JEZEQUEL	Directeur
Mr. MATHIA	Rapporteur
Mr. VAUTRIN	Rapporteur

*à mon fils  
Putu Agung Sidhi Narendra  
et à ma femme  
D.A.P Eka Sucahyati WP*

# ECOLE CENTRALE DE LYON

Directeur : J. BORDET  
Directeur Adjoint : E. PASCAUD  
Directeur des Etudes : F. SIDOROFF

## LISTE DES PERSONNES HABILITEES A ENCADRER DES THESES A L'E.C.L.

(Doctorat d'Etat ou Habilitation au sens de l'Arrêté du 5 juillet 1984,  
modifié par l'Arrêté du 21 mars 1988)

### Mathématiques-Informatique-Systèmes

B. DAVID	Professeur
M. MARION (Mme)	Professeur
J.F. MAITRE	Professeur
J. ROZINOER	Maître de Conférences
G. THOMAS	Maître de Conférences
F. MUSY	Maître de Conférences

### Physicochimie des Interfaces

P. CLECHET	Professeur
J. JOSEPH	Professeur
J.R. MARTIN	Professeur
L. PORTE	Professeur
G. ESCHALIER	Maître de Conférences
A. GAGNAIRE	Maître de Conférences
Cl. MARTELET	Maître de Conférences
R. OLIER	Maître de Conférences
Y. ROBACH	Maître de Conférences
P. PICHAT	Directeur de Recherche au CNRS
J.M. HERR MANN	Directeur de Recherche au CNRS
N. JAFFREZIC (Mme)	Directeur de Recherche au CNRS

### Matériaux : Mécanique Physique

P. GUIRALDENQ	Professeur
D. TREHEUX	Professeur
B. VANNES	Professeur
L. VINCENT	Professeur
J. BLANC-BENON	Professeur - Lyon I
J. BRUGIRARD	Professeur - Lyon I
B. COQUILLET	Maître de Conférences
D. NGUYEN	Maître de Conférences
S. FAYEULLE	Chargé de Recherche au CNRS
D. JUVE (Mme)	Ingénieur d'Etudes

### Electronique

R. BLANCHET	Professeur
M. LE HELLEY	Professeur
Y. HELLOUIN	Maître de Conférences
P. VIKTOROVITCH	Directeur de Recherche au CNRS
G. HOLLINGER	Directeur de Recherche au CNRS
M. GENDRY	Chargé de Recherche au CNRS
S. KRAWCZYK	Chargé de Recherche au CNRS
J. TARDY	Chargé de Recherche au CNRS

## Electrotechnique

Ph. AURIOL	Professeur
A. NICOLAS	Professeur
G. ROJAT	Maître de Conférences

## Mécanique des Solides

B. CAMBOU	Professeur
F. SIDOROFF	Professeur
L. JEZEQUEL	Professeur
A. DOGUI	Maître de Conférences
Cl. SURRY	Professeur - E.N.I.S.E.

## Technologie des Surfaces

J. M. GEORGES	Professeur
J. SABOT	Professeur
J.M. MARTIN	Professeur
N. ALBEROLA (Mme)	Maître de Conférences
H. MONTES	Maître de Conférences
T. MATHIA	Directeur de Recherche au CNRS
Ph. KAPSA	Chargé de Recherche au CNRS
J.L. LOUBET	Chargé de Recherche au CNRS

## Mécanique des Fluides

J. MATHIEU	Professeur Classe Exceptionnelle
E. ALCARAZ	Professeur
D. JEANDEL	Professeur
D. JUVE	Professeur
F. LEBOEUF	Professeur
J. BATAILLE	Professeur Lyon I
B. GAY	Professeur Lyon I
J.N. GENCE	Professeur Lyon I
M. LANCE	Professeur Lyon I
R. MOREL	Professeur - INSA
Cl. CAMBON	Chargé de Recherche au CNRS
J.P. BERTOGLIO	Chargé de Recherche au CNRS
P. FERRAND	Chargé de Recherche au CNRS
D. HENRY	Chargé de Recherche au CNRS

## Acoustique

(Mlle)	G. COMTE-BELLOT	Professeur Classe Exceptionnelle
	M. ROGER	Maître de Conférences
	Ph. BLANC-BENON	Chargé de Recherche au CNRS
	M. SUNYACH	Professeur Lyon I (IUT)

## Machines Thermiques

M. BRUN	Professeur
Ph. ARQUES	Professeur
J. Cl. CHAMPOUSSIN	Professeur Lyon I

## *REMERCIEMENTS*

Monsieur JEZEQUEL, Directeur du Département de Mécanique des Solides de l'Ecole Centrale de Lyon, m'a accueilli dans son Laboratoire pour réaliser ce travail. Je lui suis reconnaissant quant à l'acquis personnel que j'en ai retiré. Je le remercie profondément de me faire l'honneur de participer à ce jury.

Je remercie très vivement Monsieur GOBIN, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon qui me fait l'honneur de présider le jury.

J'exprime ma grande reconnaissance à Monsieur MATHIA, Directeur de recherche au CNRS à l'Ecole Centrale de Lyon et à Monsieur VAUTRIN, Professeur à l'Ecole des Mines de Saint Etienne, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce travail.

Je remercie également Monsieur DUPPERAY, Responsable du Département Matériaux de la Société METRAVIB et son équipe, avec qui la collaboration a été essentielle au bon déroulement de mon étude.

Je dois beaucoup aux chercheurs et à tout le personnel du Département de Mécanique des Solides de l'Ecole Centrale de Lyon qui m'ont accompagné pendant mes études. Ils sont, hélas, trop nombreux pour être tous cités ici; qu'ils me pardonnent et veuillent bien se reconnaître à travers leurs responsables nommés précédemment. Je les assure tous ma profonde reconnaissance.

## TABLE DE MATIERES

	<i>N° de page</i>
<b>REMERCIEMENTS</b>	i
<b>TABLE DE MATIERES</b>	ii
<b>RESUME</b>	v
<b>INTRODUCTION</b>	1
I.1 Contrôle passif des structures	2
I.2 Contrôle actif des structures	4
I.3 Plan de l'étude	5
<b>CHAPITRE I</b>	
<b>GENERALITES SUR L'OPTIMISATION</b>	1
I.1 Formulation d'un problème d'optimisation	7
I.2 Classification des problèmes d'optimisation	8
I.3 Méthodes d'optimisation sans contraintes	10
I.3.1 Méthode du gradient	
I.3.2 Généralités sur les méthodes de directions conjuguées	
I.3.3 Méthode du gradient conjugué	
I.3.4 Méthode de Newton	
I.3.5 Méthodes à métrique variable	
I.3.6 Méthode de Davidon Fletcher Powell (DFP)	
I.3.7 Méthode de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno (BFGS)	
I.4 Méthodes d'optimisation avec contraintes (méthodes directes ou primales)	20
I.4.1 Condition nécessaire d'optimalité locale	
I.4.1.1 Qualification des contraintes	
I.4.1.2 Conditions nécessaires de Kühn-Tucker	

I.4.1.3	Extension aux problèmes avec contraintes d'égalité	
I.4.2	Conditions suffisantes d'optimalité	
I.4.3	Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité dans le cas convexe	
I.4.4	Quelques méthodes directes de minimisation avec contraintes	
I.4.4.1	Méthodes des directions admissibles	
I.4.4.2	Méthode du gradient projeté	
I.4.4.3	Méthode du gradient réduit (Wolfe, 1962)	
I.4.4.4	Méthode à métrique variable de Powell (1977)	
I.5	Méthodes d'optimisation avec contraintes	
	méthodes de pénalité et méthodes duales	45
I.5.1	Méthodes de pénalité	
I.5.1.1	Pénalité intérieure	
I.5.1.2	Pénalité extérieure	
I.5.1.3	Pénalité étendue	
I.5.2	Méthodes des multiplicateurs ou du lagrangien augmenté	
I.5.2.1	Contraintes d'égalité	
I.5.2.2	Contraintes d'inégalité	

## **CHAPITRE II**

<b>OPTIMISATION STRUCTURALE</b>		<b>59</b>
II.1	Introduction	59
II.2	Position du problème	59
II.3	Formulation du problème	60
II.4	Stratégie de résolution	62
II.4.1	Calculs des sensibilités	
A.	Problèmes statiques	
B.	Problèmes dynamiques	
II.4.2	Relations de récurrence	
A.	Récurrence sur les variables de Conception	
B.	Récurrence sur les multiplicateurs de Lagrange	
II.5	Exemples d'application	68
II.5.1	Cas d'une poutre console	
II.5.2	Cas d'un portique bi-encasté	
II.6	Résultats et discussion	72

<b>CHAPITRE III</b>	
<b>OPTIMISATION DES AMORTISSEMENTS</b>	<b>81</b>
III.1 Origine de l'amortissement	81
III.2 Caractéristiques équivalentes d'une poutre composite monocouche	82
III.3 Problème d'optimisation	85
III.4 Stratégie de résolution	87
III.4.1 Calculs des sensibilités	
III.4.2 Récurrence sur les variables de conception	
III.4.3 Récurrence sur les multiplicateurs de lagrange	
III.5 Exemples d'application	92
III.5.1 Cas d'une poutre console	
III.5.2 Cas d'un portique bi-encasté	
III.6 Résultats et discussion	98
<b>CHAPITRE IV</b>	
<b>CONTROLE ACTIF DES STRUCTURES</b>	<b>1</b>
IV.1 Analyse structurale	108
IV.2 Contrôle modal	108
IV.2.1 Equation modale du mouvement	
IV.2.2 Calcul des commandes	
IV.2.3 Implantation du contrôle	
IV.3 Matériaux piézo-électriques	115
IV.3.1 Modèles statiques de couplage piézo-électrique/structure	
A. Cas d'un collage non-parfait	
B. Cas d'un collage parfait	
IV.3.2 Modèle dynamique du couplage piézo-électrique/structure	
A. Cas d'un collage non-parfait	
B. Cas d'un collage parfait	
IV.4 Filtre modal	126
IV.5 Exemples numériques	129
IV.6 Résultats et discussion	132
<b>CONCLUSIONS</b>	<b>138</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>141</b>

## *RESUME*

Cette étude propose une stratégie de contrôle des vibrations de structures par voie passive et active. L'algorithme d'optimisation structurale développé est basé sur l'approche par critères d'optimalité de Kühn-Tucker. On considère le poids total de la structure comme fonction objectif. Les diverses équations de contrainte mixtes du type statique et dynamique sont envisagées, en particulier des limitations sur l'amortissement sont introduites afin d'obtenir des amortissements modaux élevés avec un minimum de matériaux viscoélastiques. Le contrôle actif étudié est basé sur la méthode de Contrôle Modal (I.M.S.C, Independent Modal-Space Control) qui utilise des actionneurs du type semi-reparti fabriqués à l'aide de matériaux piézo-électriques. Une analyse statique et dynamique du couplage structure/piézo-électrique est également développée. En particulier on introduit un filtre modal pour extraire les coordonnées modales à partir de mesures discrètes. Tout au long de cette étude de nombreux résultats numériques sont présentés pour illustrer les diverses stratégies proposées.

## *S U M M A R Y*

This study presents a strategy for controlling the vibrations in structures by passive and active means. The structural optimization algorithm that has been developed is based on the approach using Kühn-Tucker's optimality criterium in which the total weight of the structure is considered as objective function. The various equations for mixed constraints of the static and dynamic type have been considered. In particular, some restrictions on damping are introduced in order to obtain high modal damping using a minimum amount of viscoelastic materials. The active control that has been studied is based on the Independent Modal-Space Control (I.M.S.C) method by using the segmented piezoelectric actuators. A static and dynamic analysis of the piezoelectric/structure coupling has also been developed. In particular, a modal filter has been introduced to extract the modal coordinates from discrete measurements. This study also presents several numerical results which illustrate the various strategies that have previously been proposed.

## *RINGKASAN*

Studi ini menyajikan satu strategi untuk mengontrol getaran dari struktur dinamik secara pasif dan secara aktif. Algoritme optimasi struktur didasarkan atas metoda kriteria optimasi dari Kühn-Tucker (Kühn-Tucker's optimality criterium), dengan menggunakan berat total dari struktur sebagai fungsi yang dioptimalkan (objective function). Sebagai fungsi kendala, kita menyajikan baik yang bersifat statik maupun dinamik, khususnya kita perkenalkan kendala redaman (damping) untuk mendapatkan satu struktur yang mempunyai sifat redaman tinggi dengan menggunakan bahan viscoelastik seminimum mungkin. Strategi kontrol aktif yang dikembangkan didasarkan atas metoda kontrol modal (I M S C, Independent Modal-Space Control) dengan menggunakan bahan piezo-elektrik sebagai pembangkit gaya kontrol (actuator). Analisa statik dan dinamik dari pasangan struktur/piezo-elektrik juga disajikan. Teknik saringan modal (modal filter) dipergunakan untuk memperoleh besaran modal dari pengukuran besaran fisik. Dalam studi ini kita menyajikan sejumlah hasil dari aplikasi numerik untuk menguji strategi yang dikembangkan.



## INTRODUCTION

Les vibrations présentes dans la plupart des constructions mécaniques sont généralement indésirables, non seulement parce qu'elles peuvent produire des mouvements excessifs, des bruits et des contraintes dynamiques qui peuvent entraîner des fatigues et des endommagements dans les structures, mais aussi parce que ces vibrations peuvent diminuer les performances du système.

Il y a quelques années encore, les machines et les structures avaient, en général, une très grande masse et un amortissement assez important, car elles étaient souvent peu élancées et constituées de matériaux classiques possédant un fort coefficient d'amortissement. Tant que l'amplitude des forces d'excitations était faible, la réponse dynamique de ces machines l'était aussi. Cependant, le développement de nouveaux matériaux à hautes performances, la connaissance de plus en plus poussée des caractéristiques des matériaux et des charges exercées sur les structures, ainsi que l'amélioration des stratégies de conception et des techniques d'analyse structurales, permettent de diminuer la masse des structures et des machines, conçues pour assurer une certaine fonction. De plus, l'augmentation actuelle de la vitesse et du haut rendement des machines se traduit par des excitations de plus en plus importantes et par l'apparition de phénomènes d'instabilité susceptibles de générer des problèmes de vibrations intenses.

On peut facilement trouver de nombreux exemples où un système ne peut pas atteindre les performances souhaitées à cause de phénomènes induisant des amplifications dynamiques, de la fatigue, ou des vibrations excessives sur une partie ou l'autre du système. Vu les conséquences indésirables causées par les problèmes vibratoires, il est nécessaire que l'analyse dynamique soit considérée comme une partie intégrante de la conception d'une structure, étape durant laquelle on doit s'attacher à mettre en oeuvre des méthodes de contrôle passif et actif des structures.

Le contrôle de la réponse dynamique d'une structure est essentiel pour maintenir aussi bien les performances que la sécurité de cette structure. La réponse d'une structure est caractérisée fondamentalement par trois groupes de paramètres. Premièrement, *les paramètres structuraux* tels que la masse, l'amortissement et la

rigidité. Les paramètres de la deuxième catégorie sont *les perturbations* subies par la structure. Leur source est généralement externe à la structure. En supposant que la structure est contrôlée activement, les paramètres de la troisième catégorie sont associés aux *dispositifs de contrôle*. Le contrôle des structures par modification des paramètres structuraux est considéré comme un contrôle passif (*optimisation structurale*). En principe, des modifications sur la rigidité et sur la masse se traduisent par des changements sur les fréquences de résonances et les déformées de la structure, tandis que l'amortissement affecte la dissipation d'énergie du système. Les amortissements peuvent, d'une manière significative, être augmentés en recouvrant les structures de matériaux viscoélastiques ou en introduisant des amortissement discrets du type hydraulique (discret dashpot mechanisms). La mise en oeuvre d'un contrôle actif des vibrations passe par l'introduction d'un dispositif générant des forces permettant d'améliorer le comportement dynamique de la structure.

Le contrôle des structures peut être réalisé par différentes stratégies basées sur la théorie mathématique de l'optimisation. Dans le cadre de la conception, l'optimisation d'une structure consiste à rechercher une distribution des paramètres structuraux (masse, amortissement et rigidité) permettant d'améliorer, sous certaines conditions, les caractéristiques dynamiques en vue de diminuer la réponse dynamique de la structure. Par ailleurs, dans le cadre d'un problème de contrôle actif, l'optimisation consiste à fabriquer des systèmes de contrôle qui minimisent l'indice de performance. Une démarche moderne visant à rechercher des constructions mécaniques de plus en plus performantes doit intégrer ces deux aspects en recherchant des stratégies nouvelles.

### I.1 CONTROLE PASSIF DES STRUCTURES

C'est une lapalissade de dire qu'un ingénieur est toujours motivé par la recherche de la meilleure structure parmi toutes celles qu'il doit concevoir ou étudier. Mais que signifie le terme : *la meilleure possible* ? Supposons un instant qu'il s'agisse de la structure de prix minimum, alors il faut prendre en considération les coûts de l'étude du projet, des matériaux, de la fabrication, du montage, voire de l'exploitation. Il est, à l'évidence, pratiquement impossible d'associer convenablement tous ces paramètres de natures différentes dans un seul et même modèle mathématique; certains s'y essaient mais il s'agit encore de recherches peu avancées; d'autres plus nombreux cherchent à décomposer le problème global en problèmes particuliers et à traiter seulement l'un d'eux. Par exemple il est proposé de minimiser le prix du matériau en minimisant son volume ou son poids. Il s'agit là sans doute d'un des

## Introduction

problèmes d'optimisation qui a été le plus posé et donc le plus étudié pour une grande variété de structures. Cela ne veut pas dire qu'il soit aujourd'hui encore convenablement résolu même pour des structures relativement simples.

En effet, le concept d'optimisation structurale remonte au début des années soixante. C'est à cette époque en effet que le Professeur Schmit, de l'Université de Los Angeles, Californie, suggéra de combiner les techniques d'analyses structurales par éléments finis et les méthodes d'optimisation [A20]. Depuis quelques années, l'optimisation fait l'objet de nombreuses recherches au niveau international, les enjeux étant, en effet, très importants. Tout d'abord, d'un point de vue sécurité, le concepteur souhaite trouver la forme idéale pour qu'une structure remplisse sa fonction sans risques d'endommagement. D'un point de vue économique ensuite, car tout gain de matière première est intéressant, et ce particulièrement pour les pièces embarquées (dans l'industrie automobile, une économie de 5% sur la masse conduit à une économie d'énergie d'un pour-cent).

Un système structural idéalisé peut être décrit par un ensemble fini de grandeurs qui spécifient, par exemple, les matériaux employés, les dimensions des divers composants, leur disposition, etc ... Parmi ces grandeurs, certaines sont prédéterminées et invariables; ce sont les paramètres prescrits. Les autres seront modifiées par l'algorithme d'optimisation, on les appelle *variables de conception*. La situation la plus courante est celle où les variables de conception sont les dimensions transversales des éléments, comme les sections des barres ou des poutres, ou les épaisseurs des revêtements. Les dimensions d'ensemble et les propriétés des matériaux sont alors des paramètres prescrits. On pourrait aussi imaginer de modifier la géométrie de la structure, ou les matériaux, ou même la topologie ou les connexions entre éléments.

Le cas particulier que nous envisageons ici est le dimensionnement des éléments composant une structure élastique, avec pour l'objectif de minimiser une fonction des dimensions des éléments. Ce problème revêt une forme très concrète dans les domaines de construction aéronautique, spatiale, navale et automobile, où la fonction objectif est le plus souvent le *poids* de la structure.

En fait, deux grands groupes de méthodes d'optimisation structurale sont classiquement opposées depuis une vingtaine d'années : l'approche par programmation mathématiques et celle par critères d'optimalité. La première se fonde sur les techniques rigoureuses de la *programmation non linéaire* pour progresser dans l'espace de conception selon une trajectoire bien définie. Elle est tout-à-fait générale et conduit à coup sûr à une solution optimale. On peut en outre assurer une

convergence stable et monotone. Malheureusement, cette approche requiert un grand nombre d'itérations, croissant en outre avec le nombre de variables de conception. Vu le coût élevé de chaque itération, son application est restreinte aux problèmes de petites dimensions. La seconde classe de méthodes utilise la notion intuitive de *critère d'optimalité*. Vu sa convergence, rapide et indépendante du nombre de variables de conception, elle est bien adaptée au dimensionnement des grands systèmes structuraux. Elle manque en revanche de généralité, est sujette aux phénomènes d'instabilité de convergence, et ne garantit pas l'obtention d'un véritable optimum.

De manière générale, l'approche par *critères d'optimalité* de la minimisation du poids d'une structure consiste à établir a priori des conditions quant à la nature de la solution optimale. Ces conditions permettent alors la construction d'une relation récursive qui est appliquée itérativement jusqu'à l'obtention de la conception optimale. Par sa simplicité, sa souplesse d'emploi et sa grande rapidité de convergence, l'approche par critères d'optimalité devient un outils très fréquemment utilisé par les ingénieurs pour la conception de structures soumises à des limitations de contraintes (*Critère du Fully Stressed Design*) ou/et à des limitations de déplacements imposés sous une mise en charge spécifiée (*Méthode de Gellatly - Berke et Méthode de Taig - Kerr*), etc...

Dans ce travail, on étudie les possibilités d'approche par critères d'optimalité pour optimiser des structures en présence de limitations mixtes sur les déplacements et les fréquences de résonances et en présence de limitations du type amortissement.

## I.2 CONTROLE ACTIF DES STRUCTURES

Les procédures de contrôle actif de structures ont vu leur champ d'application s'élargir considérablement durant ces dernières années. Le principe de tels systèmes est d'appliquer, en différents points bien choisis de la structure, différents efforts, fonctions de l'état vibratoire de cette structure de façon à diminuer un certain critère de qualité. On peut en particulier noter l'introduction de dispositifs actifs dans le but d'améliorer le confort des véhicules, de diminuer les sources d'excitation des machines tournantes et d'atténuer la transmission des vibrations. Le développement de ces nouvelles stratégies de contrôle du comportement dynamique des structures est certainement dû aux récents progrès dans le domaine du traitement du signal et à l'apparition de nouveaux systèmes d'activation adaptés aux contraintes technologiques imposées par les diverses lois de commande.

Le contrôle actif des vibrations se présente généralement sous la forme d'un asservissement en position ou en vitesse. La première démarche consiste en un apport d'un effort proportionnel aux déplacements. Cette technique est appelée *déplacement des valeurs propres* (eigenspace assignment). La seconde consiste à injecter une action proportionnelle à la vitesse. Cette technique est appelée *amortissement actif* (Active damping).

Selon la manière dont les contrôles sont conçus, les méthodes de contrôle se scindent en deux groupes suivant qu'elles utilisent la base physique ou la base modale. La première méthode, dite méthode de Contrôle-Couplé (Coupled-Control, CC), utilise la base physique pour déterminer les commandes et la seconde dite de Contrôle Modal (Independent Modal-Space Control, IMSC), dans la quelle les commandes sont construites à l'aide de la base modale obtenue par une transformation de la base physique. Cette stratégie nous permet d'obtenir un problème découplé. Dans notre travail, nous étudions un exemple d'application de la méthode de contrôle modal en utilisant des matériaux du type piézo-électriques comme actionneurs. En première partie, on développe une étude purement numérique de cette méthode, puis on construit un modèle expérimental pour obtenir des résultats qu'on puisse comparer à ceux obtenus par l'étude numérique.

### **I.3 PLAN DE L'ETUDE**

Notre travail est divisé en quatre parties :

Le premier chapitre sera consacré à une étude bibliographique. Nous présentons d'abord l'énoncé d'un problème d'optimisation en général. Ensuite, nous citons brièvement quelques méthodes d'optimisation avec ou sans limitations en soulignant quelques applications de ces méthodes.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons un algorithme d'optimisation des structures non amorties en présence de contraintes mixtes du type déplacements et fréquences de résonances. Nous détaillerons les diverses étapes d'optimisation structurale. L'algorithme obtenu a été appliqué aux assemblage de poutres.

Le troisième chapitre portera sur l'optimisation des amortissements. Nous développerons un algorithme optimisant la distribution des matériaux amortissants sur une structure pour obtenir un système amorti optimal. Comme matériaux amortissant, nous utiliserons des matériaux du type viscoélastique.

## *Introduction*

Enfin le quatrième et dernier chapitre sera consacré à un problème de contrôle optimal (contrôle actif) des amortissement. Nous utiliserons la méthode de contrôle modale (IMSC, Independent Modal-Space Control). Les actionneurs utilisés sont du type piézo-électrique. Une analyse statique et dynamique du couplage structure/piézo-électriques sera également présentée.



# CHAPITRE I

## GENERALITES SUR L'OPTIMISATION

### I.1 FORMULATION D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION

Considérons une fonction scalaire de plusieurs variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , notée  $f(x)$ , et appelée fonction objectif ou fonction économique ou encore fonction coût. La variable  $x$  est appelée la variable de décision ou de conception.

En terme général et tout à fait mathématique, optimiser c'est rechercher parmi les variables de décision celles qui optimisent (minimisent ou maximisent) la fonction objectif. L'optimisation n'est pratiquement jamais conduite sans que l'on ait à satisfaire un certain nombre de conditions restrictives (ou limitations, ou contraintes) portant sur la variable de conception. On a donc l'énoncé du problème sous la forme suivante :

Minimiser la fonction coût

$$f(x) \text{ avec } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad (\text{I.1})$$

soumise à

$$g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{I.2})$$

Dans certains ouvrages, on distingue les limitations d'inégalité  $g_j(x)$  et celles d'égalité  $h_j(x)$ .

La variable  $x$  définit un point dans l'espace de décision, de dimension  $m$ . Un point qui satisfait toutes les limitations est dit admissible. L'ensemble des points admissibles définit le sous espace admissible noté  $R$ . Les surfaces de l'espace de décision satisfaisant

$$f(x) = \text{constante} \quad (\text{I.3})$$

sont appelées surface de réponse. Les surfaces de contraintes sont, elles, définies par :

$$g_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{I.4})$$

Si  $x$  n'est pas dans  $R$  cela signifie qu'un certain nombre de contraintes sont violées. Si  $x$  est sur la frontière  $F$  du domaine  $R$ , une ou plusieurs contraintes sont exactement satisfaites (qu'elles soient d'égalité ou d'inégalité) elles sont alors dites actives.

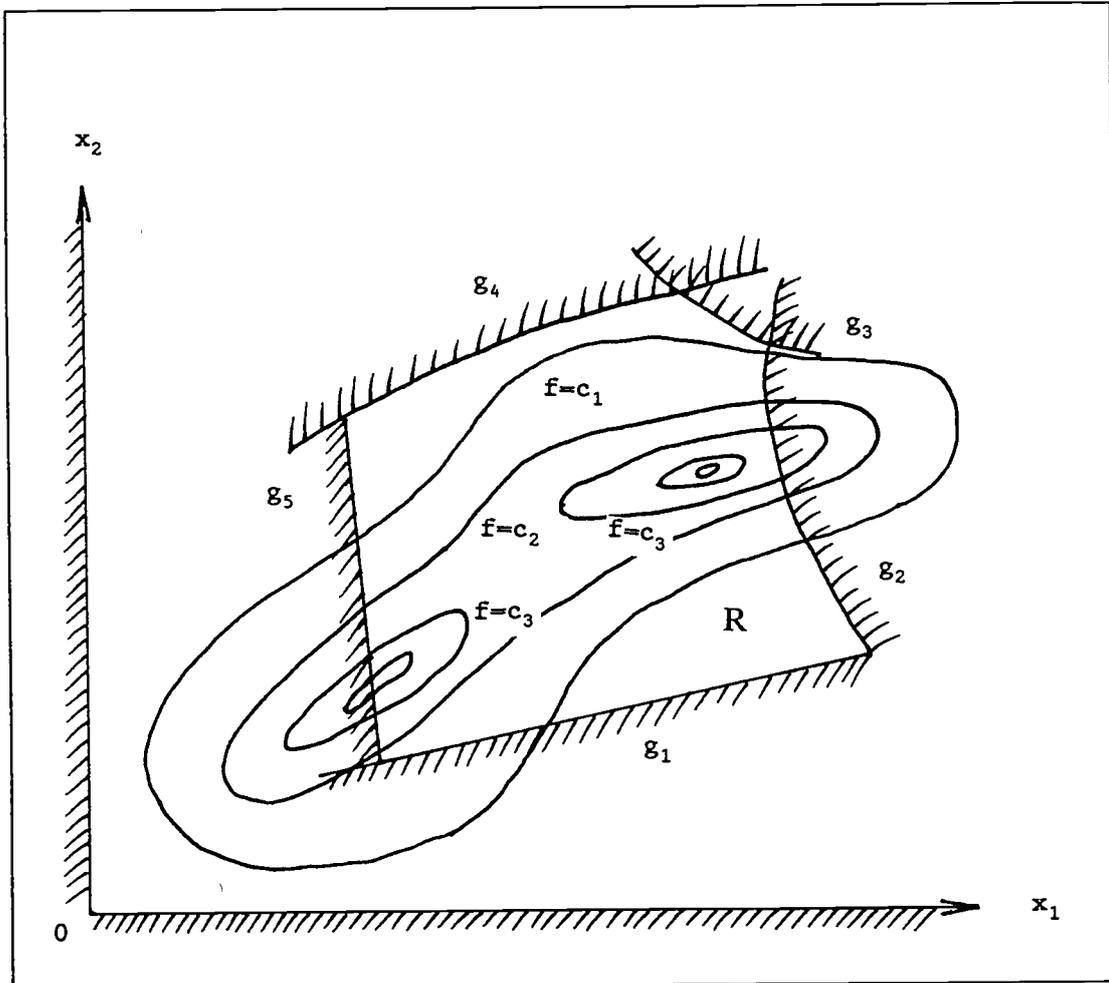


Figure 1.1 Schéma de recherche d'un point optimal

## I.2 CLASSIFICATION DES PROBLEMES D'OPTIMISATION

Elle s'établit (ou peut s'établir) selon divers critères :

- Existence ou non de limitations (ou contraintes)
- Nature des variables de décision
- Nature physique du problème

Par ce dernier critère, on distingue les problèmes dits de contrôle optimal et ceux de contrôle non optimal. Dans un problème de contrôle optimal, il y a deux types de variables, celles qui décrivent un état du système étudié (variables d'état) et celles qui décrivent le passage d'un état à un autre (variables de contrôle). Il faut alors trouver l'ensemble des variables d'état et de contrôle qui optimisent la fonction objectif sur  $N$  étapes décrivant  $N$  états.

Suivant la nature de  $f(X)$ , des limitations  $g_j(X)$  et des variables  $x_i$ , le problème d'optimisation correspondant porte des noms divers. On distingue plus particulièrement les cas suivants :

### 1) Les Problèmes de la Programmation Linéaire

Comme le nom l'indique la fonction objectif et les limitations sont toutes linéaires

$$f(X) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (I.5)$$

$$g_j(X) = \sum_{i=1}^n c_{ji} x_i \quad j = 1, \dots, m \quad (I.6)$$

### 2) Les Problèmes de la Programmation Quadratique

Dans ce cas, on a

$$f(X) = c + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (I.7)$$

et

$$g_j(X) = \sum_{i=1}^n c_{ji} x_i \quad j = 1, \dots, m \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (I.8)$$

C'est-à-dire  $f(X)$  quadratique et  $g_j(X)$  linéaire

### 3) Les Problèmes de la Programmation Convexe

La fonction objectif et les contraintes sont toutes convexes ( $f(X)$  et  $g_j(X)$  sont convexes).

**4) Les Problèmes de la Programmation Géométrique**

La fonction objectif  $f(x)$  est dite polynomiale, c'est à dire de la forme :

$$f(x) = c_1 x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_n^{a_{1n}} + c_2 x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots \quad (I.9)$$

Il en est de même des limitations  $g_j(x)$ .

**5) Les Problèmes de la Programmation Discrète  
où les variables prennent des valeurs entières.**

**6) Les Problèmes de la Programmation Non Linéaire**

Ce sont ceux où la fonction objectif et les limitations sont non linéaires. Pratiquement ils recouvrent toutes les catégories, ce qui fait apparaître les autres comme des cas particuliers.

Derrière toutes ces catégories, il y a bien entendu des méthodes mathématiques de résolution qui en général portent le même nom. Dans ce qui suit, nous nous limiterons aux méthodes de programmation non linéaire qui sont directement en relation avec l'optimisation des structures.

**I.3 METHODES D'OPTIMISATION SANS CONTRAINTES**

Nous considérons ici  $f(x)$  continue, à dérivées premières continue (il existe un gradient en tout point). Nous savons que la stationnarité de la fonction  $f(x)$  est une condition nécessaire d'optimalité. La plupart des méthodes d'optimisation sans contraintes ont pour but de trouver un point  $x^*$  stationnaire. Une méthode possible consiste à résoudre directement le système d'équations :

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad (I.10)$$

c'est à dire

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

c'est la méthode de Newton. Mais les méthodes les plus efficaces ont plutôt pour principe de générer une suite de points  $x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$  tels que  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ , qui converge vers un point stationnaire  $x^*$  de la fonction  $f$ .

On peut classer les méthodes d'optimisation en méthodes du premier ordre et méthodes du second ordre, suivant le type d'approximation de la fonction  $f$  sur laquelle elles sont basées : linéaire pour le premier ordre et quadratique pour le second.

### I.3.1 METHODE DU GRADIENT (OU DE LA PLUS FORTE PENTE)

Cette méthode utilise directement le fait que  $-\nabla f(\mathbf{x})$  est la direction de plus grande descente. A chaque itération  $k$ , on se déplace d'un pas  $\alpha^k$  dans la direction  $-\nabla f(\mathbf{x})$  :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha^k \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (\text{I.11})$$

avec  $\alpha^k > 0$ . Il s'agit donc d'une méthode du premier ordre.

La méthode la plus élémentaire consiste à prendre le pas constant au cours des itérations ( $\alpha^k = \alpha$  suffisamment petit), mais elle peut nécessiter un très grand nombre d'itérations pour arriver à l'optimum. Elle peut être améliorée en déterminant le pas optimal par une recherche unidirectionnelle en calculant  $\alpha^k$  qui minimise la fonction  $f(\mathbf{x}^k - \alpha \nabla f(\mathbf{x}^k))$ .

L'algorithme peut alors se résumer ainsi :

- 1) choix de  $\mathbf{x}^0$ ,  $k = 0$
- 2) calcul de  $\mathbf{s}^k = -\nabla f(\mathbf{x}^k)$
- 3) minimisation unidirectionnelle pour déterminer  $\alpha^k$
- 4)  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{s}^k$
- 5) Test d'arrêt : fin, ou bien  $k = k+1$  et aller en (2)

Le test d'arrêt peut être basé sur plusieurs critères, parmi lesquels :

- variation de la valeur de  $f$  :  $|f(\mathbf{x}^{k+1}) - f(\mathbf{x}^k)| < \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  donné
- variation des variables de conception :  $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| < \epsilon$
- norme du gradient de  $f$  :  $\|\nabla f^2(\mathbf{x}^{k+1})\| < \epsilon$

Dans le cas où  $\alpha^k$  est le pas optimal, on a la propriété suivante :

$$F(\alpha) = f(\mathbf{x}^k - \alpha \nabla f(\mathbf{x}^k)) \text{ est minimum en } \alpha^k, \text{ donc}$$

$$F'(\alpha) = 0, \text{ soit :}$$

$$\nabla f^T(\mathbf{x}^k) \nabla f(\mathbf{x}^k - \alpha \nabla f(\mathbf{x}^k)) = 0$$

ou encore

$$\nabla f^T(x^k) \nabla f(x^{k+1}) = 0 \quad (I.12)$$

ce qui signifie que les directions successives sont orthogonales, Fig. 1.2.

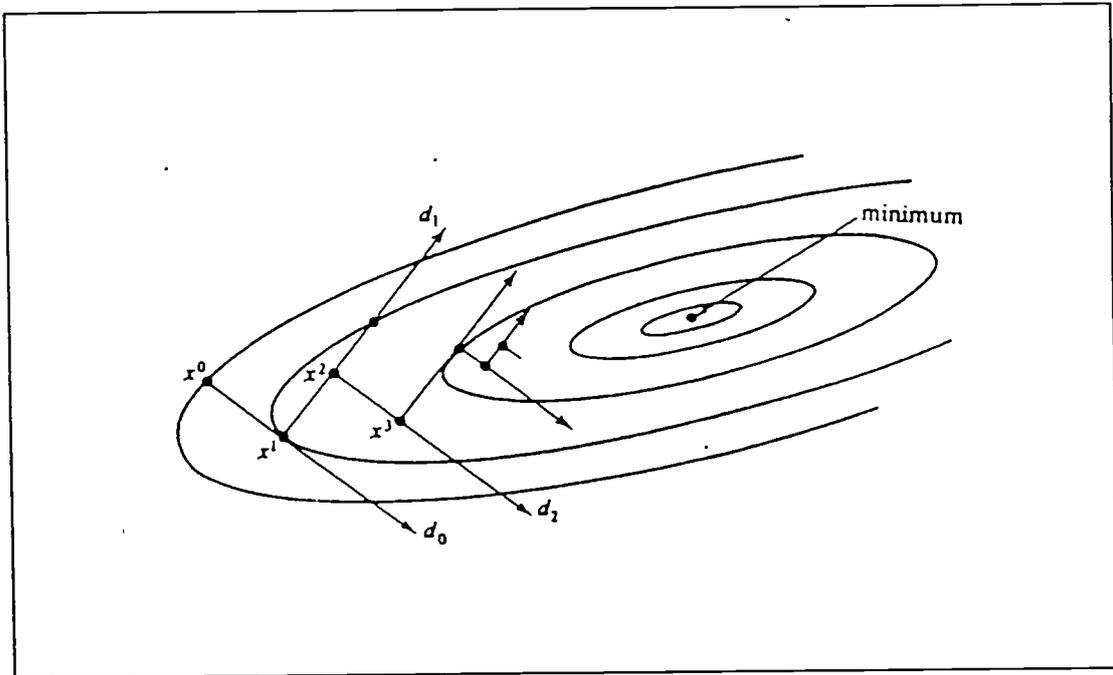


Figure 1.2 Directions de descente orthogonale

Il est alors facile de voir que la méthode risque de "zigzaguer" lorsque la fonction à minimiser est mal conditionnée, par exemple, lorsqu'elle présente une "vallée", Fig. 1.3.

Pour éviter ce risque, on peut, pour toutes les  $p$  itérations, prendre une direction différente de  $\nabla f(x)$ , calculée à partir des deux points précédents : le dernier et celui où l'on était  $p$  itérations auparavant (méthode de la plus forte pente accélérée).

Cet algorithme reste cependant assez coûteux en nombre de calculs de la fonction et de ses dérivées.

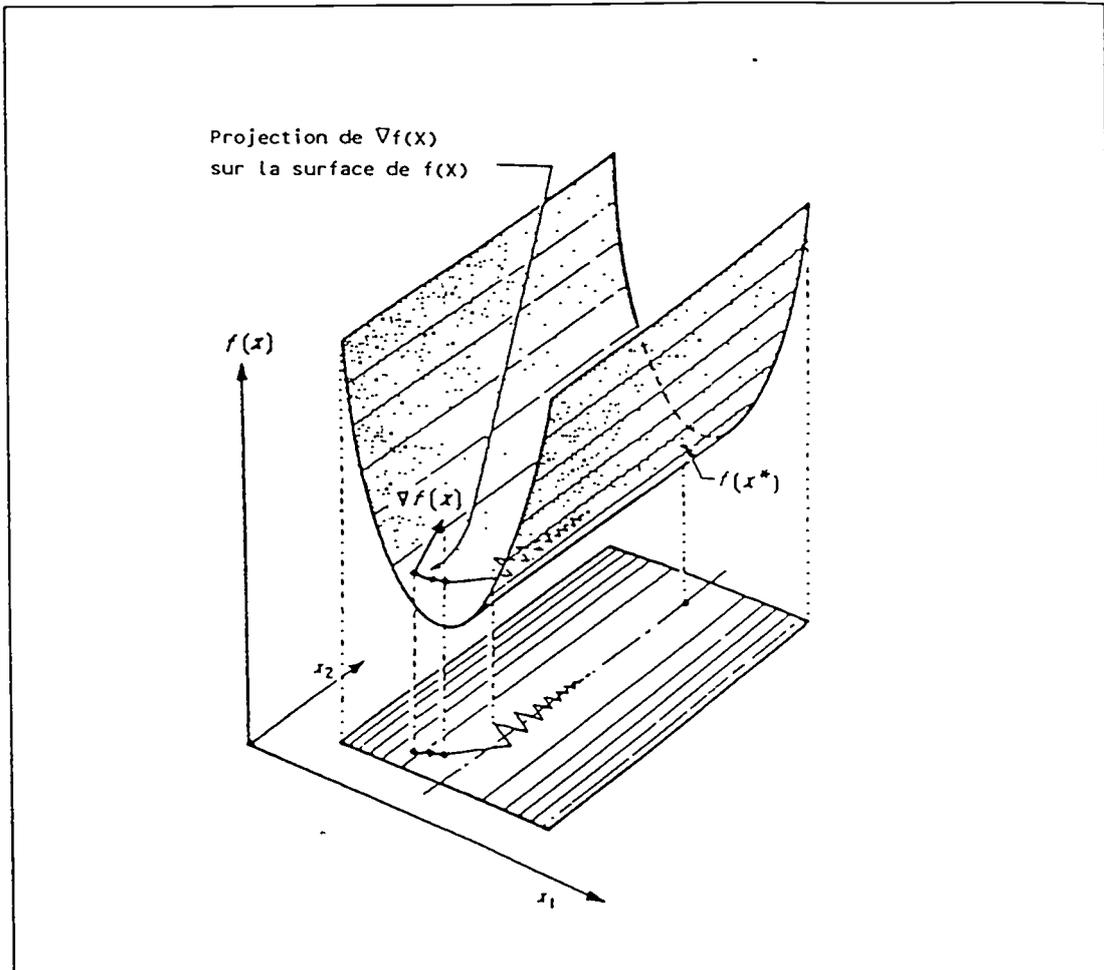


Figure 1.3 Une fonction présentant une vallée

### I.3.2 GENERALITES SUR LES METHODES DE DIRECTIONS CONJUGUEES

Au voisinage d'un minimum local, la fonction  $f$  peut être approchée par :

$$f(x) \approx f(x^*) + \frac{1}{2} (x-x^*)^T \nabla^2 f(x^*) (x-x^*) \quad (\text{I.13})$$

avec  $\nabla^2 f(x^*)$  défini positif.

La fonction  $f$  se comporte donc comme une fonction quadratique. Il est donc intéressant de mettre au point des méthodes qui convergent rapidement quand la fonction est quadratique. Les méthodes de directions conjuguées convergent en  $n$

itérations au plus lorsque la fonction à optimiser est une fonction quadratique de  $n$  variables.

**Définition**

soit :

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \quad (\text{I.14})$$

où :  $\mathbf{A}$  est une matrice symétrique définie positive

$$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

$$c \in \mathbb{R}$$

Les directions  $\mathbf{s}^0, \mathbf{s}^1, \dots, \mathbf{s}^{n-1}$  sont dites conjuguées par rapport à la forme quadratique  $q(\mathbf{x})$  ou  $\mathbf{A}$ -conjuguées, si l'on a :

$$(\mathbf{s}^i)^T \mathbf{A} \mathbf{s}^j = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \forall i, 0 \leq i \leq n-1 \\ \forall j, 0 \leq j \leq n-1 \\ i \neq j \end{array} \right. \quad (\text{I.15})$$

**Remarque :**

Si la matrice  $\mathbf{A}$  est égale à la matrice identité, conjugué = orthogonal. Dans le cas général, on considérera l'orthogonalité par rapport à  $\mathbf{A}$ .

**I.3.3 METHODE DU GRADIENT CONJUGUE**

**A. Cas des fonctions quadratiques**

On suppose ici la fonction  $f$  de la forme :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \quad (\text{I.16})$$

Dans cette méthode, on construit progressivement des directions  $\mathbf{s}^0, \mathbf{s}^1, \dots, \mathbf{s}^k$ , conjuguées par rapport à  $\mathbf{A}$  en utilisant à chaque itération le gradient au point actuel  $\mathbf{g}^k$  et la direction précédente  $\mathbf{s}^k$ .

L'algorithme est de la forme suivante :

- 1)  $\mathbf{x}^0$ , point initial,  $k = 0$ ,  $\mathbf{g}^0 = \nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{A} \mathbf{x}^0 + \mathbf{b}$ , on prend  $\mathbf{s}^0 = -\mathbf{g}^0$
- 2) calculer le pas dans la direction  $\mathbf{s}^k$

$$\alpha^k = - \frac{(\mathbf{s}^k)^T \mathbf{g}^k}{(\mathbf{s}^k)^T \mathbf{A} \mathbf{s}^k} \quad (\text{I.17})$$

- 3) calculer le point suivant  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{s}^k$
- 4) calculer le gradient au point  $\mathbf{x}^{k+1}$  et la direction suivante :

$$\mathbf{s}^{k+1} = -\mathbf{g}^{k+1} + \beta^k \mathbf{s}^k \quad (\text{I.18})$$

avec

$$\beta^k = \frac{(\mathbf{g}^{k+1})^T \mathbf{A} \mathbf{s}^k}{(\mathbf{s}^k)^T \mathbf{A} \mathbf{s}^k} \quad (\text{I.19})$$

- 5) Faire  $k = k+1$  et aller en 2) si  $k < N$  (nombre maximum d'itération), sinon fin

La valeur de  $\alpha^k$  donnée par (I.17) correspond au pas optimal. En effet,

$F(\alpha) = f(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{s}^k)$  est minimum en  $\alpha^k$  tel que :

$$F'(\alpha) = (\mathbf{s}^k)^T \nabla f(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{s}^k) = 0$$

Soit

$$(\mathbf{s}^k)^T \mathbf{A} (\mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{s}^k) + (\mathbf{s}^k)^T \mathbf{b} = 0$$

d'où

$$\alpha^k = - \frac{(\mathbf{s}^k)^T \mathbf{A} \mathbf{x}^k + (\mathbf{s}^k)^T \mathbf{b}}{(\mathbf{s}^k)^T \mathbf{A} \mathbf{s}^k} = - \frac{(\mathbf{s}^k)^T \mathbf{g}^k}{(\mathbf{s}^k)^T \mathbf{A} \mathbf{s}^k}$$

## B. Cas général

Dans le cas plus général où la fonction n'est pas quadratique, on peut utiliser la méthode de Fletcher-Reeves (1964), [A24]; les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1)  $\mathbf{x}^0$ , point initial

$$\mathbf{s}^0 = -\nabla f(\mathbf{x}^0)$$

2) Calculer  $\alpha^k$  minimisant :  $F(\alpha) = f(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{s}^k)$

3) Calculer le point suivant :  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{s}^k$

4) Calculer le gradient au point  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  et la direction suivante :

$$\mathbf{s}^{(k+1)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}) + \beta^k \mathbf{s}^k \quad (\text{I.20})$$

avec

$$\beta^k = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)})\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\|^2} \quad (\text{I.21})$$

5)  $k=k+1$ , et aller en 2) si test d'arrêt non satisfait.

**Remarques :**

- a) Si la fonction est quadratique, cette méthode est identique à celle du gradient conjugué.
- b) Pour assurer la convergence globale de la méthode, il faut reprendre périodiquement la direction du gradient comme direction de descente.

### I.3.4 METHODE DE NEWTON

On suppose ici que la fonction  $f$  est deux fois différentiable et que l'on sait calculer toutes ses dérivées secondes. Au voisinage du point courant  $\mathbf{x}^k$ , on utilise l'approximation quadratique de  $f$  :

$$q(\mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^T \nabla f(\mathbf{x}^k) + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{s} \quad (\text{I.22})$$

On construit une suite  $\mathbf{x}^k$  telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^k + \mathbf{s}^k \\ \mathbf{s}^k &\text{ minimise } q(\mathbf{s}) \text{ en } \mathbf{x}^k \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

Si on suppose  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)$  définie positive,  $\mathbf{s}^k$  est unique et vérifie :

$$\nabla_S q(\mathbf{S}) = 0$$

c'est à dire

$$\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{S}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) = 0 \quad (\text{I.24})$$

soit

$$\mathbf{s}^k = - [\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (\text{I.25})$$

Cette méthode évite le calcul du pas optimal et converge en un seul pas si la fonction  $f$  est réellement quadratique; elle présente l'inconvénient d'obliger soit à résoudre l'équation (I.24), soit à inverser la matrice  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)$ , ce qui est fort gênant si celle-ci est mal conditionnée. C'est pourquoi on a mis au point des méthodes pour approximer  $[\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1}$ .

### I.3.5 METHODES QUASI-NEWTONIENNES OU METHODES A METRIQUE VARIABLE

Ces méthodes consistent à généraliser la formule de Newton :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^k - \alpha^k [\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (\text{I.26})$$

en utilisant une matrice  $\mathbf{B}^k$  définie positive au lieu de  $[\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1}$  :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^k - \alpha^k \mathbf{B}^k \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (\text{I.27})$$

La direction de descente  $\alpha^k$  est choisie de façon à minimiser

$$F(\alpha) = f(\mathbf{x}^k - \alpha^k \mathbf{B}^k \nabla f(\mathbf{x}^k)) \text{ ou au moins } F(\alpha) < F(0)$$

et la matrice  $\mathbf{B}^k$  doit être choisie de manière à converger vers l'inverse du hessien si la fonction est quadratique. D'une manière général,  $\mathbf{B}^k$  peut être considérée comme une approximation de l'inverse du hessien. Diverses méthodes ont été développées sur ce principe. Généralement, on impose la relation :

$$\mathbf{B}^k (\nabla f(\mathbf{x}^k) - \nabla f(\mathbf{x}^{k-1})) = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1} \quad (\text{I.28})$$

et on réactualise la matrice  $B^k$  par une formule du type

$$B^{k+1} = B^k + \Delta^k \quad (I.29)$$

On parle de formule de correction de rang 1 ou 2 suivant que  $\Delta^k$  est de rang un ou deux. Broyden a montré que pour avoir  $\Delta^k$  symétrique de rang 1 telle que la relation (I.28) soit vérifiée, il faut prendre :

$$\Delta^k = \frac{(\delta^k - B^k \Gamma^k) (\delta^k - B^k \Gamma^k)^T}{(\Gamma^k)^T (\delta^k - B^k \Gamma^k)} \quad (I.30)$$

avec

$$\delta^k = x^{k+1} - x^k \quad (I.31)$$

et

$$\Gamma^k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k) \quad (I.32)$$

l'équation (I.28) s'écrit alors :

$$B^{k+1} \Gamma^k = \delta^k \quad (I.33)$$

Avec cette formule,  $x^{k+1}$  n'a pas besoin d'être le minimum de  $f$  dans la direction  $\delta^k$ . Un inconvénient de la méthode vient du fait que les matrices  $B^k$  ainsi générées ne sont pas nécessairement définies positives, il faut prévoir des cas particuliers de réactualisation.

La méthode suivante ne présente pas cet inconvénient, mais nécessite une minimisation unidirectionnelle exacte.

### I.3.6 METHODE DE DAVIDON FLETCHER POWELL (DFP)

Cette méthode utilise une correction de rang 2. Nous donnons directement l'algorithme correspondant :

- 1)  $x^0$ , point initial
- $B^0$  définie positive quelconque, par exemple  $B^0 = I$ ,  $k = 0$

2) calculer la direction de déplacement,  $s^k$

$$s^k = -B^k \nabla f(x^k)$$

3) calculer  $x^{k+1}$  minimisant  $f(x^k + \alpha s^k)$ ,  $\alpha > 0$

4) soit  $\delta^k = (x^{k+1} - x^k)$ , on calcule:

$$r^k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k) \text{ et}$$

$$B^{k+1} = B^k + \frac{\delta^k (\delta^k)^T}{(\delta^k)^T r^k} - \frac{B^k r^k (r^k)^T B^k}{(r^k)^T B^k r^k} \quad (I.34)$$

5) Faire  $k = k + 1$  et aller en 2) si test d'arrêt non satisfait.

### Remarques :

Dans le cas quadratique, les directions engendrées par l'algorithme sont conjuguées par rapport à la matrice de la forme quadratique, donc l'algorithme converge en  $n$  itérations au plus.

Dans le cas général, la convergence globale n'est garantie que si on réinitialise la matrice  $B$  périodiquement. On a ainsi un pas dans la direction du gradient, donc la convergence globale est la même que celle obtenue par la méthode du gradient.

Comparée à la Méthode Fletcher-Reeves (qui génère aussi des directions conjuguées), la méthode de DFP est généralement plus rapide, mais elle nécessite un nombre important d'informations à stocker (matrice  $n \times n$ ).

On peut démontrer que si  $B^k$  est définie positive et si  $(\delta^k)^T r^k$  est positif, la formule (I.34) donne une matrice  $B^{k+1}$  définie positive. Une condition pour que  $(\delta^k)^T r^k > 0$  est que le point  $x^{k+1}$  soit obtenu par une minimisation unidirectionnelle. Il faut donc une bonne précision de la recherche unidirectionnelle.

### I.3.7 METHODE DE BROYDEN, FLETCHER, GOLDFARB ET SHANNO (BFGS)

Si on intervertit les rôles de  $\delta^k$  et de  $r^k$  dans la méthode DFP développée précédemment, soit :

$$B^{k+1} = B^k + \frac{\delta^k (\delta^k)^T}{(\delta^k)^T r^k} - \frac{B^k r^k (r^k)^T B^k}{(r^k)^T B^k r^k} \quad (I.35)$$

et qu'on considère donc :

$$G^{k+1} = G^k + \frac{\Gamma^k (\Gamma^k)^T}{(\Gamma^k)^T \delta^k} - \frac{G^k \delta^k (\delta^k)^T G^k}{(\delta^k)^T G^k \delta^k} \quad (I.36)$$

on remarque que les matrices  $G^k$  vérifient  $G^{k+1} \delta^k = \Gamma^k$  et l'équation (I.36) permet de construire une approximation du hessien lui même et non de son inverse. On prend donc l'inverse de (I.36) pour avoir une approximation de l'inverse du hessien. Le calcul montre qu'on peut ainsi exprimer directement  $[G^{k+1}]^{-1}$  en fonction de  $[G^k]^{-1}$ , ce qui donne la formule de correction :

$$B^{k+1} = B^k + \left[ 1 + \frac{\Gamma^k B^k (\Gamma^k)^T}{(\delta^k)^T \Gamma^k} \right] \left\{ \frac{\delta^k (\delta^k)^T}{(\delta^k)^T \Gamma^k} \right\} - \left[ \frac{\delta^k (\Gamma^k)^T B^k + B^k \Gamma^k (\delta^k)^T}{(\delta^k)^T \Gamma^k} \right] \quad (I.37)$$

L'algorithme de BFGS est obtenu à partir de celui de DFP en remplaçant l'équation (I.34) par (I.37).

**Remarques :**

- a) Il faut procéder à des réinitialisations périodiques pour assurer la convergence.
- b) La méthode BFGS est moins sensible que la méthode DFP aux imprécisions dans la recherche unidirectionnelle.

**I.4 METHODES D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES  
METHODES DIRECTES OU PRIMALES**

Rappelons l'énoncé général du problème auquel nous nous intéressons maintenant :

**Problème P**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser la fonction coût } f(x) \\ \text{sous les contraintes} \\ g_i(x) \leq 0 \quad i \in I = \{1, 2, \dots, m\} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

On suppose ici que  $f$  et  $g_i$ ,  $i \in I$  sont continues et différentiables. On notera  $R$  l'ensemble des points admissibles :

$$R = \{ x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, \quad \forall i \in I \}$$

Comme dans le cas sans contraintes, nous allons d'abord donner des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'optimalité locale ou globale :

- Une condition nécessaire, CN, sous l'hypothèse de qualification des contraintes (conditions de Kuhn-Tucker).
- Une condition suffisante, CS (condition de point-col).
- Une condition nécessaire et suffisante, CNS dans le cas convexe.

#### I.4.1 CONDITION NECESSAIRE D'OPTIMALITE LOCALE

##### I.4.1.1 Qualification des contraintes

Pour établir cette CN, nous devons nous placer dans le cas où les contraintes vérifient une propriété appelée *qualification des contraintes du premier ordre* (QC1). C'est à dire que pour tout point situé sur la frontière de l'ensemble des contraintes d'égalité et des contraintes d'inégalité actives, il doit exister une courbe régulière se terminant sur le point frontière et contenue entièrement à l'intérieur de l'ensemble admissible.

Pour définir cette propriété (QC1) plus précisément, il faut introduire la notion de direction admissible :

- Un arc de courbe  $\Gamma$  est dit admissible en  $x^0$  s'il est défini par une fonction  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  continûment différentiable pour  $\theta \geq 0$  :

$$\varphi(\theta) = (\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta), \dots, \varphi_n(\theta))$$

telle que

- $\varphi(0) = x^0$
- pour  $\theta$  suffisamment petit,  $\varphi(\theta) \in R$

- On appelle direction admissible en  $\mathbf{x}^0$  tout vecteur  $\mathbf{y}$  tangent à un arc de courbe  $\varphi(\theta)$  admissible en  $\mathbf{x}^0$ , fig. 1.4.

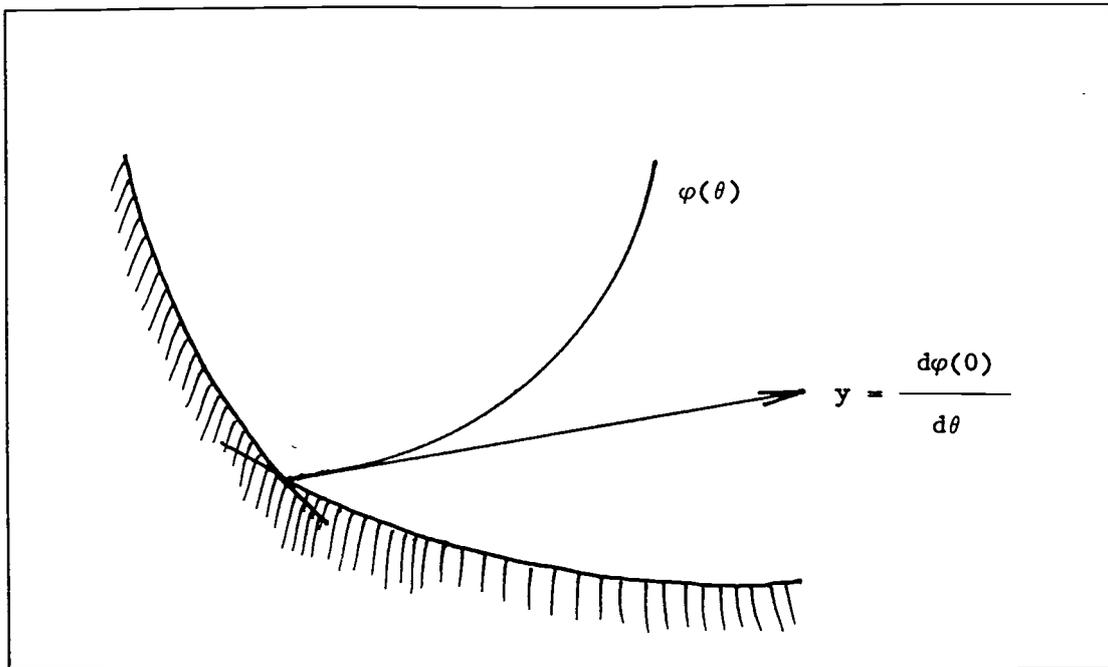


Figure 1.4 Direction admissible

On peut démontrer le résultat suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Toute direction admissible } \mathbf{y} \text{ vérifie :} \\ \nabla \mathbf{g}_i^T(\mathbf{x}^0) \mathbf{y} \leq 0 \quad \forall i \in I^0 \quad (\text{I.38}) \\ \text{où } I^0 \text{ est l'ensemble des indices des contraintes saturées en } \mathbf{x}^0. \end{array} \right.$$

La réciproque de cette propriété n'est pas vraie dans le cas général, comme on peut le voir sur l'exemple suivant :

**Exemple 1 :**

Soit  $R$  l'ensemble défini par :

$$g_1(\mathbf{x}) = -x_1 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_2 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = -(1 - x_1)^3 + x_2 \leq 0$$

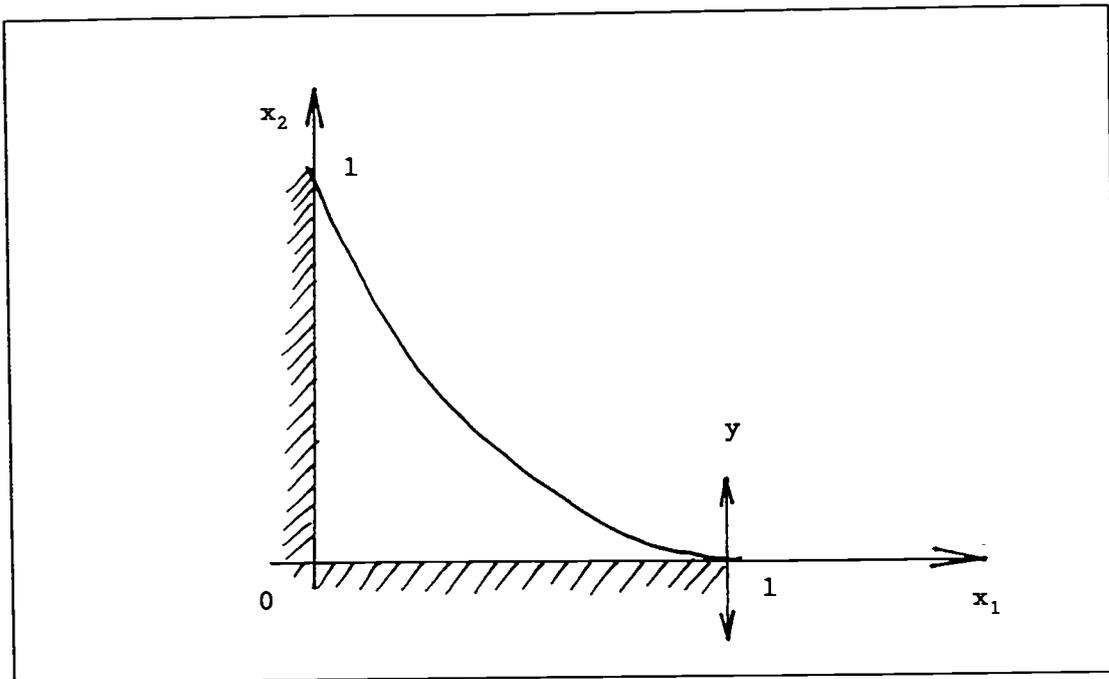


Figure 1.5 Ensemble admissible d'exemple 1

Au point  $(1, 0)$ , les contraintes  $g_2$  et  $g_3$  sont saturées, donc  $I^0 = \{2, 3\}$ . On a :

$$\nabla g_2(x^0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \nabla g_3(x^0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

et donc la direction :

$$y = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ satisfait bien l'équation (I.38) .}$$

Pourtant  $y$  n'est pas une direction admissible, puisque  $\forall \theta > 0$ ,  $x^0 + \theta y$  n'appartient pas à  $R$ , fig. 1.5.

Supposer que  $x$  vérifie l'hypothèse (QC1) revient à éliminer les situations analogues à celle de cet exemple. On dira que l'hypothèse de qualification des contraintes est vérifiée si l'équation (I.38) est une CNS pour que  $y$  soit direction admissible :  $R$  vérifie (QC1)  $\Leftrightarrow$  l'équation (I.38) est une CNS pour que  $y$  soit direction admissible.

Dans la pratique, on ne cherchera pas à démontrer que (QC1) est vérifiée en utilisant directement cette définition, mais plutôt en faisant appel à des conditions suffisantes pour la qualification des contraintes. Nous en citerons trois :

Une condition suffisante pour que l'hypothèse de qualification de contraintes soit vérifiée est que l'une des propriétés suivantes soit vraie :

- 1) Toutes les contraintes sont linéaires.
- 2) Les gradients des contraintes actives (d'inégalité) sont linéairement indépendants.
- 3) Toutes les fonctions  $g_i$  sont convexes et  $R$  a un intérieur non vide.

#### I.4.1.2 Conditions nécessaires de Kuhn-Tucker

On suppose que les fonctions  $f$  et  $g_i (i \in I)$  sont continûment différentiables et que l'hypothèse de qualification des contraintes est vérifiée en  $x^0 \in R$ , avec :

$$R = \{ x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, \quad \forall i \in I \}$$

Alors une condition nécessaire pour que  $x^0$  soit un optimum local du problème  $P$ , est qu'il existe des nombres  $\lambda_i \geq 0 (i \in I)$  appelés multiplicateurs de Kuhn-Tucker, tels que :

$$\nabla f(x^0) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^0) = 0 \quad (I.39)$$

$$\lambda_i g_i(x^0) = 0, \quad \forall i \in I \quad (I.40)$$

**Remarque :**  $\lambda_i = 0$  si  $i$  est une contrainte non saturée.

#### Interprétation géométrique de conditions de Kuhn-Tucker

La figure 1.6 illustre l'interprétation géométrique de conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker.

Cad = cône des directions admissibles = intersection des demi espaces d'équation  $\nabla g_i^T(x^0) y \leq 0$ . Pour que  $x^0$  soit un optimum local, il faut que le vecteur  $-\nabla f(x^0)$  fasse un angle obtus avec chaque direction admissible  $y$ . On vérifie géométriquement que  $-\nabla f(x^0)$  doit s'exprimer comme combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des  $\nabla g_i(x^0), i \in I^0$ .

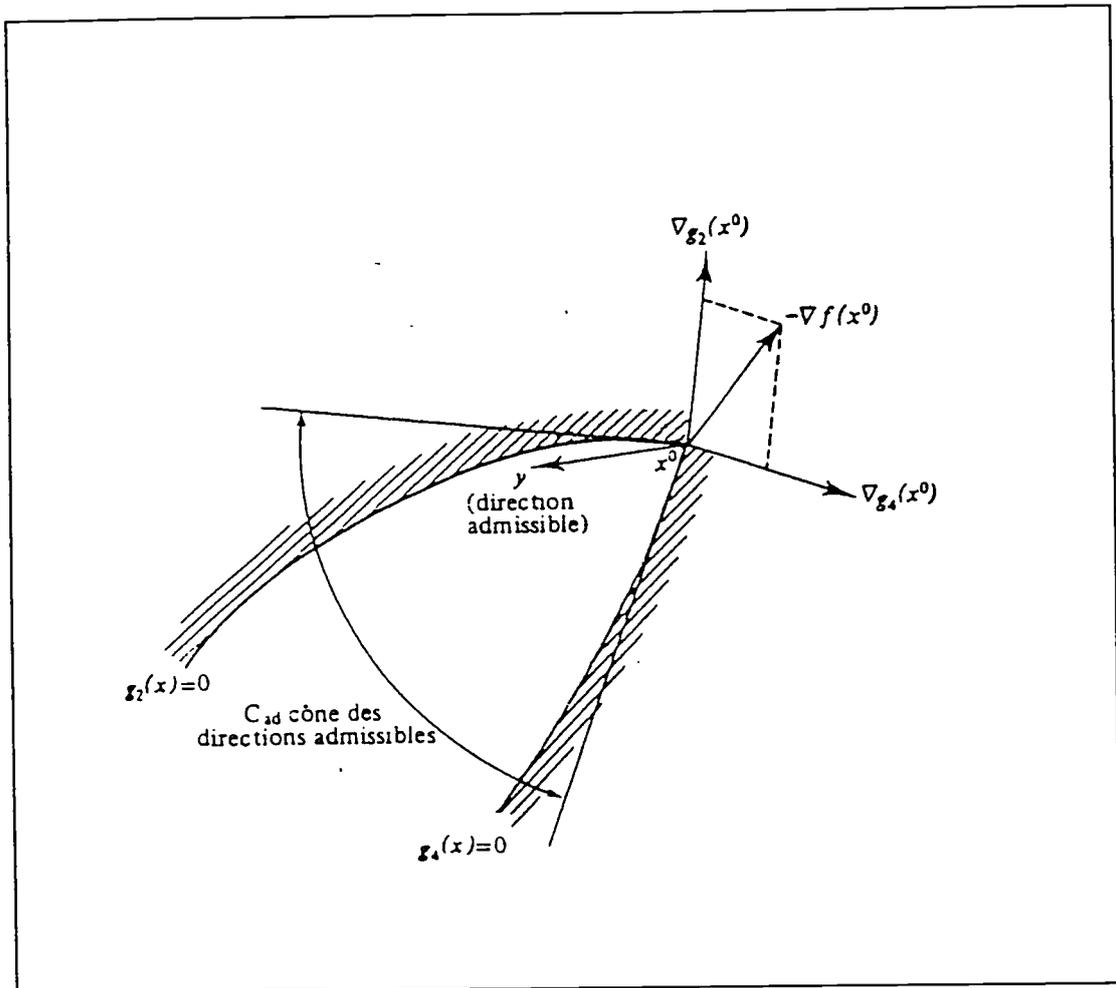


Figure 1.6 Interprétation géométrique des conditions de Karush-Kuhn-Tucker

### I.4.1.3 Extension aux problèmes avec contraintes d'égalité

Nous allons énoncer les conditions nécessaires d'optimalité dans le cas d'un problème posé sous la forme :

#### Problème $P_e$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser la fonction coût } f(x) \\ \text{sous les contraintes :} \\ g_i(x) \leq 0 \quad i \in I = \{1, 2, \dots, m\} \\ h_j(x) = 0 \quad j \in J = \{1, 2, \dots, p\} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

$f, g_i, h_j$  sont supposées continûment différentiables.

Soit :  $R = \{x / g_i(x) \leq 0, \forall i \in I, \text{ et } h_j(x) = 0, \forall j \in J\}$ . On introduit comme précédemment les notions d'arc de courbe admissible et de direction admissible et on suppose que l'hypothèse de qualification des contraintes est vérifiée en  $x^0$ , solution du problème  $P_e$ .

Une condition nécessaire pour que  $x^0$  soit un optimum local du problème  $P_e$  est qu'il existe des nombres  $\lambda_i > 0$  et  $\mu_j$  ( $\mu_j$  non contraints en signe) tels que :

$$\nabla f(x^0) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^0) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(x^0) = 0 \quad (I.41)$$

et

$$\lambda_i g_i(x^0) = 0, \forall i \in I \quad (I.42)$$

Des conditions suffisantes pour que l'hypothèse de qualification des contraintes soit vérifiée sont :

- a) Les fonctions  $g_i$  sont convexes, les fonctions  $h_j$  sont linéaires, et il existe  $\bar{x} \in R$  tel que  $g_i(\bar{x}) < 0, \forall i \in I$  et  $h_j(\bar{x}) = 0, \forall j \in J$ .
- b) En  $x^0 \in R$ , les gradients  $\nabla g_i(x^0), \forall i \in I$  et  $\nabla h_j(x^0), \forall j \in J$  sont linéairement indépendants.

#### I.4.2 CONDITIONS SUFFISANTES D'OPTIMALITE

On considère à nouveau le problème avec contraintes d'inégalités seulement :

**Problème Q :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{sous les contraintes :} \\ g_i(x) \leq 0 \quad i \in I = \{1, 2, \dots, m\} \\ x \in \mathfrak{R}^n \end{array} \right.$$

On définit la fonction de Lagrange associée au problème Q, par :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \quad (I.43)$$

où  $\lambda_i \in \mathfrak{R}, \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in I$

Soit  $\bar{x} \in \mathfrak{X}^n$  et  $\bar{\lambda} \geq 0$ . On dit que  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$  est un point-col (point-selle) de  $L(x, \lambda)$  si :

$$L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}) \quad \forall \lambda \geq 0, \forall x \in \mathfrak{X}^n \quad (\text{I.44})$$

Nous allons donner une propriété caractéristique des points-cols qui sera utilisée ensuite pour démontrer la condition suffisante d'optimalité.

Soit  $\bar{x} \in \mathfrak{X}^n$  et  $\bar{\lambda} \geq 0$ , un point  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$  est un point-col pour  $L(x, \lambda)$  si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- (a)  $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \text{Min}_{x \in \mathfrak{X}^n} L(x, \bar{\lambda})$
- (b)  $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall i \in I$
- (c)  $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i \in I$

**Démonstration :**

Soit  $(x, \lambda)$  un point-col.

- (a) est vraie par définition (l'équation (I.44) du point-col).
- Toujours à partir de l'équation (I.44), on a :

$$L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \quad \forall \lambda \geq 0$$

soit :

$$f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x})$$

et donc :

$$\sum_{i \in I} (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall \lambda \geq 0 \quad (\text{I.45})$$

Si  $g_i(\bar{x})$  était strictement positif pour un indice  $i$ , on pourrait choisir  $\lambda_i$  strictement positif suffisamment grand pour que l'équation (I.45) ne soit pas vraie, donc (b) est vérifiée.

- Pour  $\lambda_i = 0$ , l'équation (I.45) implique :

$$\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \geq 0$$

Comme  $\bar{\lambda}_i \geq 0$  et  $g_i(\bar{x}) \leq 0$ , on a aussi :

$$\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \leq 0$$

donc

$$\sum_{i \in I} (\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x})) = 0$$

ce qui implique bien  $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i \in I$ , c'est à dire (c).

Réciproquement, supposons que  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$  vérifie (a), (b) et (c)

• (a) implique  $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}), \forall x \in \mathcal{X}^n$

• (c) implique  $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x})$

• La relation :

$$L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} (\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x})), \quad \lambda_i \geq 0$$

et la condition (b) implique :

$$L(\bar{x}, \lambda) \leq f(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}), \quad \forall \lambda \geq 0$$

Donc on a bien :

$$L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}) \quad \forall \lambda \geq 0, \forall x \in \mathcal{X}^n$$

**Remarque :**

La condition (c) signifie que l'on a :

- soit  $g_i(\bar{x}) = 0$ , si la contrainte est active,
- soit  $\bar{\lambda}_i = 0$ , si la contrainte est vérifiée mais non saturée.

**Condition suffisante d'optimalité :**

Si  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$  est un point-col de  $L(x, \lambda)$ , alors  $\bar{x}$  est un optimum global du problème Q.

**Démonstration :**

D'après (a) de la propriété caractéristique, on a :

$$f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} (\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x})) \leq f(x) + \sum_{i \in I} (\bar{\lambda}_i g_i(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

d'après (c) :

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad \forall i \in I,$$

on obtient :

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \sum_{i \in I} (\bar{\lambda}_i g_i(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\bar{\lambda} \geq 0$ , donc pour tout point  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $g_i(x) \leq 0$ , on a  $f(\bar{x}) \leq f(x)$ , ce qui signifie bien que  $\bar{x}$  est un optimum du problème Q.

**Remarque :**

Pour établir cette condition suffisante d'optimalité, on n'a pas besoin de faire d'hypothèses particulières sur les fonctions  $f$  et  $g$ , telles que convexité ou différentiabilité. Nous devons par contre en faire pour obtenir une condition nécessaire et suffisante d'optimalité.

### I.4.3 CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES D'OPTIMALITE DANS LE CAS CONVEXE

Pour schématiser, nous avons obtenu les résultats suivants :

**Condition Nécessaire (CN) :**

- $f$  et  $g_i$  sont continûment différentiables
- hypothèse de QC
- Alors optimum  $\Rightarrow$  conditions de Kuhn-Tucker

**Condition Suffisante (CS) :**

- Point-col de la fonction de Lagrange  $\Rightarrow$  optimum

## Chapitre I

Nous allons donner maintenant un résultat montrant que dans le cas où  $f$  et  $g_i$  sont convexes, on a :

- optimum  $\Leftrightarrow$  point-col

Enfin nous montrerons que si, en plus de ces mêmes conditions,  $f$  et  $g_i$  sont différentiables, alors

- optimum  $\Leftrightarrow$  condition de Kuhn-Tucker

On admettra le résultat suivant :

Soient  $f$  et  $g_i$  convexes. On suppose qu'il existe  $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^n$  tel que :

$$g_i(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall i \in I$$

Alors si le problème Q a une solution optimale  $\mathbf{x}^*$ , il existe un vecteur de multiplicateurs  $\lambda^* \geq 0$  tel que  $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$  soit un point-col de la fonction de Lagrange  $L(\mathbf{x}, \lambda)$ .

Dans le cas convexe, l'existence d'un point-col est donc une CNS d'optimalité. On peut, en outre, faire la relation avec les conditions de Kuhn-Tucker suivantes :

Si  $f$  et  $g_i$  sont convexes et différentiables, les conditions de Kuhn-Tucker en  $\mathbf{x}^*$  sont une condition nécessaire et suffisante d'optimalité, c'est à dire que pour que  $\mathbf{x}^*$  soit un optimum global du problème Q, il faut et il suffit qu'il existe  $\lambda^* \geq 0$  tel que :

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = 0$$

$$\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \forall i \in I$$

### Démonstration

D'après le résultat précédent,  $\mathbf{x}^*$  est un optimum global si et seulement s'il existe  $\lambda^* \geq 0$  tel que  $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$  soit un point-col, c'est à dire (propriétés du point-col) :

- $\mathbf{x}^*$  minimise  $L(\mathbf{x}, \lambda^*)$  sur  $\mathfrak{X}^n$
- $g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad \forall i \in I$
- $\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i \in I$

## Chapitre I

$f$  et  $g_i$  étant convexes différentiables,  $L(x, \lambda^*)$  est convexe et différentiable en  $x$ , et donc (a) est équivalent à :

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$$

soit :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$$

ce qui, avec b) et c) donne les conditions de Kuhn-Tucker en  $x^*$ .

### Remarque :

Si on fait seulement une hypothèse de convexité locale, on aura une condition suffisante d'optimalité locale :

Si on suppose :

- $f(x)$  et  $g_i(x)$  différentiables
- $f(x)$  et  $g_i(x)$  convexes dans un voisinage de  $x^*$
- les conditions de Kuhn-Tucker sont vérifiées en  $x^*$

Alors  $x^*$  est un optimum local du problème Q.

### Exemple 2 :

Nous donnons ici un exemple simple où les conditions de Kuhn-Tucker peuvent être résolues directement, permettant ainsi obtenir immédiatement les valeurs des multiplicateurs et de l'optimum :

Soit le problème :

$$\text{Minimiser : } f(x) = x_1^2 + x_2$$

sous les contraintes :

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0$$

$$g_2(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$$

Ce problème est représenté sur la figure 1.7

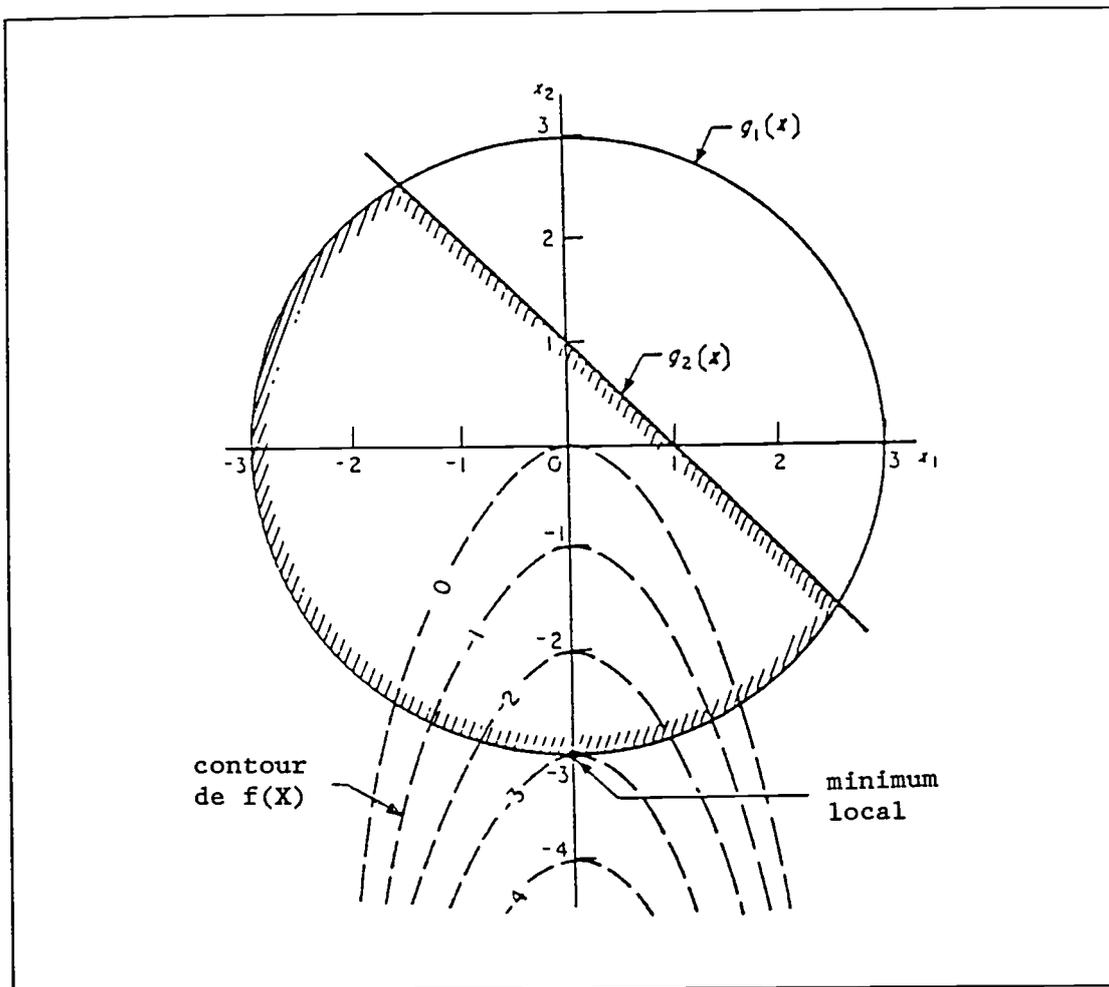


Figure 1.7 Un exemple de problème d'optimisation avec contraintes

On peut vérifier que les fonctions  $f(x)$  et  $g_1(x)$  sont convexes et différentiables :

$$v^2_{f(x)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$v^2_{g_1(x)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ sont définies positives}$$

$g_2(x)$  est linéaire.

On obtient donc :

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} 2x_1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \lambda_1 \begin{Bmatrix} 2x_1 \\ 2x_1 \end{Bmatrix} + \lambda_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

et les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent donc ici :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_1\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 1 + 2x_2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.46})$$

$$\begin{cases} \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) = \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 9) = 0 \\ \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) = \lambda_2 (x_1 + x_2 - 1) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.47})$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Une solution possible de l'équation (I.47) est  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , mais on a alors, avec l'équation (I.46) :  $1 = 0$ . Supposons donc  $\lambda_1 \neq 0$  et  $\lambda_2 = 0$ , l'équation (I.46) implique :  $2x_1(1 + \lambda_1) = 0$ .  $\lambda_1 = -1$ , ne satisfait pas l'équation (I.48) et donc  $x_1 = 0$  et l'équation (I.47) devient :  $\lambda_1(x_2^2 - 9) = 0$ . Comme on a supposé que  $\lambda_1 \neq 0$ , on a  $x_2 = \pm 3$ .

Si  $x_2 = 3$ , l'équation (I.46) devient  $1 + 6\lambda_1 = 0$ , ce qui n'est pas possible puisqu'il faut  $\lambda_1 \geq 0$  et donc  $x_2 = -3$  et l'équation (I.46) donne  $1 - 6\lambda_1 = 0$ , soit  $\lambda_1 = 1/6$ .

On peut vérifier sur la figure 1.7 que le point  $\mathbf{x}^* = (0, -3)$  est bien l'optimum cherché. La contrainte  $g_2$  n'est pas active ( $\lambda_2 = 0$ ) et  $-\nabla f(\mathbf{x}^*)$  est bien parallèle à  $\nabla g_1(\mathbf{x}^*)$ .

#### I.4.4 QUELQUES METHODES DIRECTES DE MINIMISATION AVEC CONTRAINTES

Nous présentons maintenant quelques algorithmes appartenant aux méthodes dites directes ou primales, c'est à dire qui travaillent directement sur le problème posé, alors que les méthodes duales le transforment en général en une suite de problèmes sans contraintes, en utilisant les propriétés de la fonction de Lagrange  $L(\mathbf{x}, \lambda)$  introduite en sous-chapitre I.4.2. Les méthodes duales seront présentées dans le sous-chapitre I.4.5.

## Changement de variables

Un changement de variables approprié peut permettre de transformer un problème avec contraintes en un problème non contraint. Cependant, il n'y a pas de règle générale pour évaluer l'intérêt d'un changement de variables. Il faut considérer chaque cas particulier, en sachant que certaines transformations peuvent conduire à des difficultés telles que :

- l'augmentation importante du degré de non linéarité (changement de variables  $x_i = y_i^2$ )
- le problème transformé peut avoir d'autres minimums ou d'autres points stationnaires,
- l'ordre de grandeur des variables peut devenir très différent,
- la matrice hessienne peut devenir singulière ou mal conditionnée.

### I.4.4.1 Méthodes des directions admissibles

Comme pour la minimisation du problème sans contraintes, la plupart des algorithmes avec contraintes se caractérisent par le choix d'une direction et d'un pas dans cette direction. Dans la méthode des directions admissibles, on va rechercher une direction de déplacement telle que :

- un petit déplacement dans cette direction ne fait pas sortir de l'ensemble  $R$  des solutions.
- la fonction  $f(x)$  diminue strictement dans cette direction.

Une telle direction est dite *admissible*.

Considérons le problème P1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser : } f(x) \\ \text{avec des contraintes :} \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Soit  $R$  le domaine des solutions :  $R = \{ x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \}$

Soit  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}$  le point de départ,  $I^0 = \{ i \in I / g_i(\mathbf{x}^0) = 0 \}$  indices des contraintes saturées en  $\mathbf{x}^0$ . Soit  $\mathbf{y}$  la direction cherchée.

Si on se place en un point voisin de  $\mathbf{x}^0$  dans la direction  $\mathbf{y}$ , la valeur des contraintes saturées ne doit pas augmenter, donc il faut :

$$\left. \frac{d}{d\theta} g_i(\mathbf{x}^0 + \theta\mathbf{y}) \right|_{\theta=0} \leq 0, \quad \forall i \in I^0$$

c'est à dire :

$$\nabla g_i^T(\mathbf{x}^0) \mathbf{y} \leq 0$$

et la fonction  $f(\mathbf{x})$  doit décroître, donc il faut :

$$\nabla f^T(\mathbf{x}^0) \mathbf{y} < 0, \quad \forall i \in I^0$$

Le principe de la méthode des directions admissibles de Zoutendijk, [A24] est de chercher le vecteur  $\mathbf{y}$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser : } \nabla f^T(\mathbf{x}^0) \mathbf{y} \\ \text{sous les contraintes :} \\ \nabla g_i^T(\mathbf{x}^0) \mathbf{y} \leq 0 \quad \forall i \in I^0 \end{array} \right. \quad (\text{I.49})$$

ce qui est un problème de programmation linéaire.

Ceci donne l'algorithme suivant :

- (a)  $\mathbf{x}^0$  est le point initial,  $k = 0$
- (b) Calculer la direction de déplacement  $\mathbf{y}^k$  en résolvant le problème de programmation linéaire (I.49)
- (c) Si  $\nabla f^T(\mathbf{x}^k) \mathbf{y}^k < 0$ , déterminer par une recherche unidirectionnelle :
  - le pas maximal  $\bar{\alpha}^k$  possible dans la direction  $\mathbf{y}^k$ , c'est à dire tel que  $\mathbf{x}^k + \bar{\alpha}^k \mathbf{y}^k$  soit encore dans le domaine admissible.
  - le pas optimal  $\alpha^k$ ,  $0 \leq \alpha^k \leq \bar{\alpha}^k$ , c'est à dire tel que  $f(\mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{y}^k)$  soit minimum. Faire  $k = k + 1$  et aller en (b).
- (d) si  $\nabla f^T(\mathbf{x}^k) \mathbf{y}^k = 0$ , arrêt (il n'est plus possible de réduire  $f$ )

**Remarque :**

Des difficultés peuvent apparaître; par exemple, dans les cas suivants :

- la direction déterminée par l'équation (I.49) se trouve dans le plan tangent à la contrainte en  $x^0$ , tout déplacement dans la direction  $y^0$  fait sortir du domaine; il faut une procédure spéciale pour revenir dans le domaine, et ceci peut entraîner la non-convergence de la méthode.
- la ou des contraintes saturées changent, il y a alors discontinuité brusque de la direction de déplacement, ce qui risque également de perturber la convergence.

Il existe des variantes de cette méthode, qui font intervenir toutes les contraintes du problème (et pas seulement les contraintes saturées), et qui imposent en outre à la direction de descente de s'écartier de la frontière du domaine (Topkis et Veinott 1967), [A24].

**I.4.4.2 Méthode du gradient projeté**

Un moyen d'adapter les méthodes d'optimisation sans contraintes au cas avec contraintes consiste à projeter les déplacements sur la frontière du domaine admissible, fig. 1.8.

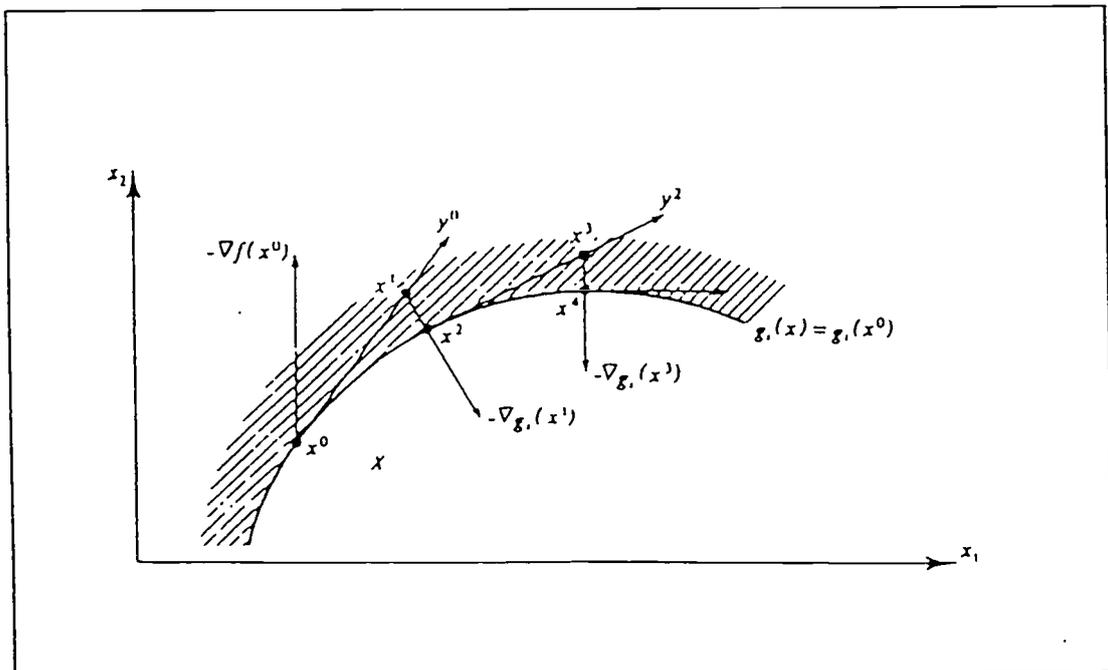


Figure 1.8 Principe de la méthode du gradient projeté

La méthode du gradient projeté de Rosen (1960) est particulièrement intéressante dans le cas où les contraintes sont linéaires, cas où la projection peut être facilement calculée.

Soit le problème P2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser : } f(\mathbf{x}) \\ \text{sous les contraintes :} \\ \mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_i, \quad \forall i \in I \end{array} \right.$$

Soit  $\mathbf{x}$  un point admissible,  $I^0(\mathbf{x})$  l'ensemble des indices des contraintes saturées en  $\mathbf{x}$ .

On cherche une direction de déplacement  $\mathbf{s}$  qui permette de diminuer la fonction  $f$  le plus possible (qui rend  $(\nabla f^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{s})$  minimal), tout en restant dans l'ensemble des solutions, c'est à dire telle que :  $\mathbf{a}_i \mathbf{s} = 0 \quad \forall i \in I^0(\mathbf{x})$ .

Notons  $\mathbf{A}$  la matrice dont les lignes sont  $\mathbf{a}_i, \forall i \in I$ , et  $\mathbf{A}^0$  la sous matrice de  $\mathbf{A}$  constituée des lignes  $i \in I^0(\mathbf{x})$ , correspondant aux contraintes saturées. On peut démontrer que  $\mathbf{s}$  est obtenue en projetant l'opposé du gradient  $-\nabla f(\mathbf{x})$  sur le sous espace  $\mathbf{s}^0 = \{ \mathbf{y} / \mathbf{A}^0 \mathbf{y} = 0 \}$ , et que  $\mathbf{s}$  se calcule explicitement :

$$\mathbf{s} = -\mathbf{P}^0 \nabla f(\mathbf{x}) = -(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{0T} [\mathbf{A}^0 \mathbf{A}^{0T}]^{-1} \mathbf{A}^0) \nabla f(\mathbf{x})$$

$\mathbf{P}^0$  est appelée la matrice de projection sur  $\mathbf{s}^0$ .

- Si  $\mathbf{s} \neq 0$ , on déterminera ensuite le pas optimal dans la direction  $\mathbf{s}$ .
- Si  $\mathbf{s} = 0$ , on a :

$$\mathbf{P}^0 \nabla f(\mathbf{x}) = 0 = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{0T} [\mathbf{A}^0 \mathbf{A}^{0T}]^{-1} \mathbf{A}^0) \nabla f(\mathbf{x}) \quad (I.50)$$

Or  $\mathbf{A}^{0T}$  est la matrice dont les colonnes sont les gradients des contraintes saturées au point  $\mathbf{x}$ . En posant :

$$\boldsymbol{\mu} = -[\mathbf{A}^0 \mathbf{A}^{0T}]^{-1} \mathbf{A}^0 \nabla f(\mathbf{x})$$

on voit que si  $\boldsymbol{\mu} \geq 0$ , la condition  $\mathbf{s} = 0$  s'écrit  $\nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^{0T} \boldsymbol{\mu} = 0$ , ce qui exprime les conditions de Kuhn-Tucker au point  $\mathbf{x}^k$ , qui est donc un optimum local du problème (si la fonction  $f$  est convexe localement). Si  $\boldsymbol{\mu}$  a des composantes strictement

négatives, la recherche peut se poursuivre en enlevant de  $A^0$  une des contraintes correspondant à  $\mu_i < 0$ .

Ceci mène à l'algorithme suivant :

(a)  $x^0$  point initial,  $k = 0$

(b) Déterminer l'ensemble  $L^0 = I^0(x^k)$  des indices des contraintes saturées

(c) Soit  $A^0$  la matrice dont les lignes correspondent aux contraintes  $i \in L^0$ . Calculer la matrice de projection :

$$P^0 = I - A^{0T} [A^0 A^{0T}]^{-1} A^0 \quad (I.51)$$

et la direction de déplacement :

$$s^k = - P^0 \nabla f(x^k) \quad (I.52)$$

(d) Si  $s^k \neq 0$ , on détermine le pas maximal  $\bar{\alpha}^k$  et

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k s^k$$

$k = k + 1$  et aller en (b)

(e) Si  $s^k = 0$ , calculer :

$$\mu = - [A^0 A^{0T}]^{-1} A^0 \nabla f(x) \quad (I.53)$$

si  $\mu \geq 0$ , fin :  $x^k$  satisfait les conditions de Kuhn-Tucker. Sinon, soit  $\mu_i$  la composante la plus négative de  $\mu$ . Faire  $L^0 = L^0 - \{i\}$  et aller en (c).

**Remarque :**

Dans le cas de contraintes non linéaires, on peut utiliser la méthode du gradient projeté en projetant sur le sous espace tangent à la surface définie par les contraintes saturées. La matrice  $A^0$  du cas précédent est alors remplacée par une matrice constituée des gradients des contraintes saturées. Mais l'application de cette méthode est délicate car la direction de déplacement ainsi calculée fait en général sortir rapidement du domaine admissible.

**I.4.4.3 Méthode du gradient réduit (Wolfe, 1962)**

Comme la méthode du gradient projeté, cette méthode concerne le cas de contraintes linéaires. On suppose, en plus, que le problème est posé sous la forme :

Problème P3

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser : } f(\mathbf{X}) \\ \text{sous les contraintes :} \\ \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq 0, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \quad n \geq m \end{array} \right.$$

En effet, on peut toujours ramener une contrainte d'inégalité à une contrainte d'égalité en introduisant une variable supplémentaire, qu'on appelle variable d'écart :

$$g_i(\mathbf{X}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g_i(\mathbf{X}) + z_i = 0 \\ z_i \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.54})$$

D'autre part, si le problème initial comporte des variables de signe quelconque, on peut les remplacer par la différence de deux variables positives :

$$x_j = x_j^1 - x_j^2, \quad x_j^1 \geq 0, \quad x_j^2 \geq 0 \quad (\text{I.55})$$

On suppose  $n > m$  et  $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$ . On peut alors écrire la matrice  $\mathbf{A}$  de dimensions  $m \times n$  sous la forme :

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} m & \boxed{\begin{matrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{matrix}} \\ & \begin{matrix} m & n-m \end{matrix} \end{matrix} \quad (\text{I.56})$$

où  $\mathbf{B}$  est une sous matrice carrée  $m \times m$  régulière composée de  $m$  colonnes extraites de  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{B}$  est une base).

On écrit également  $\mathbf{x}$  sous la forme :

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^{\mathbf{B}} \\ \mathbf{x}^{\mathbf{N}} \end{array} \right\} \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix} \quad (\text{I.57})$$

et les contraintes deviennent :

$$\mathbf{B} \mathbf{x}^{\mathbf{B}} + \mathbf{N} \mathbf{x}^{\mathbf{N}} = \mathbf{b}$$

Le choix de B permet d'écrire :

$$\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{x}^N = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^N) \quad (\text{I.58})$$

ce qui signifie qu'on exprime une partie des variables,  $\mathbf{x}^B$  ( dites variables de base ou dépendantes) en fonction des autres,  $\mathbf{x}^N$  (dites variables hors base ou indépendantes). On peut alors définir la fonction  $f$ , qui n'est autre que le critère considéré, comme fonction de  $\mathbf{x}^N$  seulement :

$$\hat{f}(\mathbf{x}^N) = f(\mathbf{x}^N, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^N)) = f(\mathbf{x}^N, \varphi_1(\mathbf{x}^N), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}^N))$$

$\hat{f}$  est donc une fonction de  $(n - m)$  variables.

On appelle gradient réduit de  $f$ , le gradient de  $\hat{f}$ , dont les composantes sont :

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i^N} = \frac{\partial f}{\partial x_i^N} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^N}$$

soit :

$$\mathbf{g}^N = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^N} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^B} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \quad (\text{I.59})$$

On peut alors travailler dans l'espace des variables  $\mathbf{x}^N$  seulement, la direction de déplacement étant opposée à celle du gradient réduit. On calcule comme d'habitude un pas maximal correspondant aux contraintes  $x_i \geq 0$ , puis un pas optimal. Lorsqu'une variable de base s'annule, on définit une nouvelle base en remplaçant la colonne correspondante de B par une colonne de N.

Cette méthode a été étendue au cas de contraintes non linéaires :

Problème P4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser : } f(\mathbf{x}) \\ \text{sous les contraintes :} \\ g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right.$$

il s'agit de la méthode du gradient réduit généralisé. En utilisant une linéarisation des contraintes, on définit une base comme un ensemble de variables  $(x_j, j = 1, \dots, m)$  telles que la matrice  $m \times m$  suivante :

$$\frac{\partial g(\hat{x})}{\partial x^B} = \left[ \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right] \quad \text{où } g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$$

soit régulière. De manière analogue au cas linéaire, on définit le gradient réduit généralisé :

$$g^N = \frac{\partial f}{\partial x^N} - \left[ \frac{\partial f}{\partial x^B} \right] \left[ \frac{\partial g}{\partial x^B} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial g}{\partial x^N} \right] \quad (\text{I.60})$$

Pour les variables indépendantes, on prendra comme direction de déplacement  $d^N = (d_j)$  avec :

$$\begin{cases} d_j = 0 & \text{si } g_j^N > 0 \text{ et } x_j = 0 \text{ (sinon } x_j \text{ deviendrait } < 0) \\ d_j = -g_j^N & \text{si } g_j^N \leq 0 \end{cases}$$

Pour les variables de base, la direction sera :

$$d^B = - \left[ \frac{\partial g}{\partial x^B} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial g}{\partial x^N} \right] d^N \quad (\text{I.61})$$

Si  $d^N = 0$ , on peut démontrer que les conditions de Kuhn-Tucker sont satisfaites. Si  $d^N \neq 0$ , on effectue une minimisation unidirectionnelle avec un pas maximum de manière à toujours vérifier  $x \geq 0$ . On obtient ainsi  $\hat{x} = (\hat{x}^B, \hat{x}^N)$ . Il faut encore une étape supplémentaire pour modifier  $\hat{x}^B$  de manière à satisfaire les contraintes  $g(x) = 0$ , puisqu'on a utilisé une linéarisation de  $g$  pour calculer la direction  $d^B$ . On va donc résoudre ( $x^N$  étant fixé) :

$$g(x^B, \hat{x}^N) = 0$$

en partant du point  $\hat{x}^B$ .

La méthode de Newton appliquée à ce problème donne à l'itération  $k$  :

$$x^{Bk+1} = x^{Bk} - \left[ \frac{\partial g(x^{Bk})}{\partial x^B} \right]^{-1} g(x^{Bk}, \hat{x}^N)$$

Dans la pratique, on peut la simplifier (et surtout gagner du temps) en ne calculant la matrice :

$$\left[ \frac{\partial g(X)}{\partial x^B} \right]^{-1}$$

qu'au point initial, au lieu de la mettre à jour à chaque itération.

Soit donc  $(\hat{x}^{*B}, x^N)$  le point ainsi obtenu. Comme la méthode de Newton ne prend pas en compte les contraintes  $x \geq 0$ , il est possible qu'une des variables de base,  $\hat{x}^{*B}$  soit nulle ou négative. Il faut alors, comme dans le cas linéaire, effectuer un changement de base avant de continuer les itérations.

#### I.4.4.4 Méthode à métrique variable de Powell (1977)

Nous revenons au cas général du problème d'optimisation posé sous la forme du problème P1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser : } f(x) \\ \text{avec des contraintes :} \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

On suppose que les dérivées premières et secondes de  $f$  et  $g_i$  existent. Comme dans les méthodes à métrique variable du cas sans contraintes, le calcul de la direction de descente  $s^k$  sera de la forme :

$$s^k = -B^k \nabla f(x^k) \tag{I.62}$$

où  $B^k$  est une matrice symétrique définie positive.

Cette valeur de  $s^k$  est celle qui minimise la fonction quadratique :

$$q(s) = f(x^k) + s^T \nabla f(x^k) + \frac{1}{2} s^T B^k s \tag{I.63}$$

Dans la méthode de Powell, la direction  $s$  est calculée comme la direction qui minimise l'équation (I.63) sous les contraintes linéaires :

$$g_i(x^k) + s^T \nabla g_i(x^k) \leq 0 \tag{I.64}$$

qui représentent une approximation de  $g_i$  au point  $x^k + s$ . Le calcul de  $s$  est donc lui-même un problème de minimisation d'une fonction quadratique sous contraintes linéaires.

Nous donnons ici les grandes lignes de la méthode, qui est décrite précisément dans [A19]. Son originalité est d'utiliser, pour une méthode directe, une caractéristique des méthodes duales, en faisant intervenir dans les calculs de mise à jour de  $B^k$ , la valeur des multiplicateurs de Lagrange du problème quadratique de recherche de  $s$ .

En effet, dans le cas où il y a uniquement des contraintes d'égalité, la solution cherchée doit vérifier les contraintes et les conditions de Kuhn-Tucker :

$$\begin{cases} g_i(x) = 0 & i = 1, \dots, m \\ \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \end{cases} \quad (I.65)$$

où les  $\lambda_i$  sont les multiplicateurs de Lagrange. Si on suppose  $m < n$ , les relations (I.65) donnent  $(m+n)$  équations à  $(m+n)$  inconnues ( $m$  multiplicateurs de Lagrange et  $n$  variables de conception). On peut alors remarquer que résoudre ce système par la méthode de Newton (qui est à l'origine des méthodes à métrique variable) ferait intervenir la dérivée seconde, par rapport à  $x$ , de la fonction :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) \quad (I.66)$$

et non pas les dérivées secondes de la fonction  $f$  seulement. C'est donc à cette fonction  $L(x, \lambda)$  qu'on va appliquer la méthode à métrique variable.

Les formules de mise à jour de  $B^k$  dans le cas sans contraintes (DEP, DFGS) font intervenir les quantités  $\delta^k$  et  $\Gamma^k$  qui sont ici :

$$\delta^k = x^{k+1} - x^k \quad (I.67)$$

et

$$\Gamma^k = \nabla_x L(x^{k+1}, \lambda) - \nabla_x L(x^k, \lambda) \quad (I.68)$$

Comme il y a des contraintes, il peut arriver que la quantité  $\delta^{kT} \Gamma^k$  soit négative pour toute valeur du pas  $\alpha^k$  non nulle.

Or c'est une condition pour assurer que  $B^{k+1}$  soit définie positive (voir sous-chapitre I.3.6, remarque). Pour cette raison, Powell remplace le vecteur  $r^k$  par un vecteur  $\eta^k$  de la forme :

$$\eta^k = \theta r^k + (1 - \theta) B^k \delta^k \quad (I.69)$$

où  $\theta$  est calculé de manière à ce que  $\eta^k$  soit le vecteur le plus "proche" de  $r^k$  vérifiant l'inégalité suivante :

$$\delta^{kT} \eta^k \geq 0.2 \delta^{kT} B^k \delta^k$$

ce qui assure bien  $\delta^{kT} \eta^k > 0$ .

En utilisant la formule de BFGS, on obtient pour  $B^{k+1}$  l'expression :

$$B^{k+1} = B^k + \frac{\eta^k (\eta^k)^T}{(\delta^k)^T \eta^k} - \frac{B^k \delta^k (\delta^k)^T B^k}{(\delta^k)^T B^k \delta^k} \quad (I.70)$$

Pour calculer le pas  $\alpha^k$ , on introduit la fonction :

$$\psi(x^k, \mu) = f(x^k) + \sum_{i=1}^m \mu_i^k |\text{Max}(0, g_i(x^k))|$$

où à la première itération :

$$\mu_i^1 = \lambda_i^1, \quad i = 1, \dots, m$$

et ensuite :

$$\mu_i^k = \text{Max}(\lambda_i^k, 0.5(\mu_i^{k-1} + \lambda_i^k)), \quad i = 1, \dots, m$$

soit:

$$\varphi(\alpha) = \psi(x^k + \alpha s^k, \mu^k)$$

Le pas  $\alpha^k$  est alors calculé par approximation quadratique de  $\varphi(\alpha)$ .

Cette méthode converge très rapidement et est donc très intéressante pour les problèmes d'optimisation de structures, où le coût d'une itération est généralement élevé.

## I.5 METHODES D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES METHODES DE PENALITE ET METHODES DUALES

L'idée est de substituer à la fonction à minimiser une autre fonction incluant les limitations (les fonctions des contraintes). On obtient alors l'optimum en cherchant les minima d'une suite de fonctions sans limitations. Cette idée extrêmement séduisante a surtout été développée durant les années 1975-1980, [A24] essentiellement par Carroll, Fiacco et McCormick, R. Haftka.... Elle est aujourd'hui encore appliquée sous diverses formes qui sont :

- la pénalité intérieure, extérieure ou étendue
- la méthode des multiplicateurs ou du Lagrangien étendu

Un des algorithmes assez populaire utilisant ce principe est SUMT (Sequential Unconstrained Minimisation Techniques).

### I.5.1 METHODES DE PENALITE

Au problème initial :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(\mathbf{x}) \\ \text{soumis à : } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (\text{I.71})$$

on substitue donc le problème

Minimiser:

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + r^k \sum_{j=1}^m G_j(g_j(\mathbf{x})) \quad (\text{I.72})$$

où  $r^k$  est un coefficient positif connu sous le nom de paramètre (ou facteur) de pénalité.

Selon que les fonctions  $\Phi(f, G_j, r^k)$  prennent leurs valeurs minimales dans le domaine admissible ou inadmissible on distingue la pénalisation intérieure ou extérieure. Quand on ne fait pas cette distinction, on a affaire à la pénalité étendue.

#### I.5.1.1 Pénalité Intérieure

Les fonctions  $G_j(\mathbf{x})$  les plus connues sont :

$$G_j(\mathbf{x}) = \frac{-1}{g_j(\mathbf{x})} \quad (\text{I.73})$$

ou

$$G_j(\mathbf{x}) = \log(-g_j(\mathbf{x})) \quad (\text{I.74})$$

**Remarque :**  $G_j(\mathbf{x})$  donc  $\Phi(\mathbf{x})$  est non définie si la limitation est active.

Pourquoi ces deux fonctions ? On voit que la réponse est assez simple : en effet, plus  $g_j(\mathbf{x})$  devient une contrainte active, c'est à dire plus  $g_j(\mathbf{x})$  tend vers zéro plus  $G_j(\mathbf{x})$  croit et donc moins :

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + r^k \sum_{j=1}^m \left[ \frac{-1}{g_j(\mathbf{x})} \right] \quad (\text{I.75})$$

ou

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + r^k \sum_{j=1}^m \log(-g_j(\mathbf{x})) \quad (\text{I.76})$$

a des chances d'être minimum pour un  $r^k > 0$  donné. Ainsi, la fonction de pénalisation a pour but effet d'empêcher dans une recherche de minimum que l'on sorte facilement du domaine admissible. Il suffit alors de diminuer de plus en plus le poids de cette pénalisation ( $r^k \rightarrow 0$ ) pour que les minima successifs de  $\Phi$  tendent vers  $\min(f(\mathbf{x}))$  tout en restant (en théorie du moins) à l'intérieur du domaine admissible.

Ceci mène au processus itératif ci-dessous :

- 1) Partir avec un point  $\mathbf{x}^0$  admissible et une valeur initiale; poser  $k = 0$ .
- 2) Minimiser  $\Phi(\mathbf{x}, r^k)$  en utilisant un algorithme de minimisation sans contraintes, ce qui donne  $\bar{\mathbf{x}}^k$
- 3) Tester si  $\bar{\mathbf{x}}^k$  est le minimum recherché; si oui stop, sinon aller au pas suivant
- 4) Poser  $r^{k+1} = c r^k$  avec  $c < 1$

5) Faire  $k = k + 1$  et redémarrer en 1) avec  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}^k$

Les questions posées par cet algorithme sont :

- Le choix d'un point de départ dans le domaine admissible
- Le choix d'un facteur de pénalité initial  $r^0$  et la loi d'évolution
- Le critère d'arrêt

### Point de départ

Le plus souvent en mécanique des structures, il est préexistant et constitué d'une structure répondant aux limitations, mais de façon peu satisfaisante. Cependant, il peut arriver qu'on ait besoin de le définir, c'est à dire qu'un certain nombre de limitations  $g_j(\mathbf{x}^0)$  soient violées. Soit  $k$  l'indice de la limitation la plus violée, telle que :

$$g_k = \text{Max} (g_{j_v}(\mathbf{x}^0)) \quad \forall j_v \in J_v \quad (J_v \text{ est l'ensemble des limitations violées})$$

On cherche alors à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Min } g_k(\mathbf{x}) \quad (I.77)$$

soumis à :

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j \notin J_v$$

et (I.78)

$$g_j(\mathbf{x}) - g_k(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j \in J_v$$

Pour ce nouveau problème,  $\mathbf{x}^0$  est un point de départ admissible. Par conséquence, la pénalisation intérieure peut lui être appliqué. Si à l'issue du processus  $g_k(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  alors l'optimum est évidemment un point admissible satisfaisant toutes les limitations. Sinon, il faut recommencer le processus précédent en repartant du nouveau point trouvé et en identifiant la nouvelle limitation la plus violée.

La pire des situations que l'on puisse rencontrer est celle où il faut changer de point de départ, le processus précédent pouvant échouer si l'on s'est placé trop "loin" dans le domaine irréalisable.

**Initialisation et évolution du facteur de pénalisation**

Puisque l'on doit minimiser la fonction  $\Phi(\mathbf{x})$  pour une suite de valeurs décroissantes de  $r^k$ , il peut sembler intéressant de ne pas démarrer avec un facteur initial  $r^0$  trop grand afin d'éviter un processus trop long. Par ailleurs, il est plus facile "numériquement" de trouver le minimum de  $\Phi$  quand  $r^k$  est grand sans violer les limitations, mais, dans ce cas, le poids de la pénalisation fait que l'on minimise d'avantage  $G_j$  que  $f(\mathbf{x})$ . Il faut donc pénaliser, mais modérément. On s'accorde, selon les problèmes, à choisir une pénalité initiale de l'ordre de 20 à 100 pour-cent de la valeur  $f(\mathbf{x}^0)$ , c'est à dire que l'on pose :

$$0,2 \left\{ \frac{f(\mathbf{x}^0)}{\left[ \sum_{j=1}^m G_j(\mathbf{x}^0) \right]} \right\} \leq r^0 \leq \left\{ \frac{f(\mathbf{x}^0)}{\left[ \sum_{j=1}^m G_j(\mathbf{x}^0) \right]} \right\} \quad (I.79)$$

Pour l'évolution de  $r^k$ , il est nécessaire de se forger une philosophie : on prend  $c = 0,2$  ou  $0,3$  ou  $0,5$ .

**Critère de convergence**

Il s'établit en jugeant à la fois de l'évolution de  $f(\mathbf{x})$  et de celle de  $\mathbf{x}$  à l'aide des normes suivantes :

$$\frac{|f(\mathbf{x}^{k+1}) - f(\mathbf{x}^k)|}{f(\mathbf{x}^{k+1})} < \epsilon_1 \quad (I.80)$$

et

$$\| \Delta \mathbf{x} \| < \epsilon_2 \quad (I.81)$$

où  $\| \Delta \mathbf{x} \|$  est une norme du vecteur  $\{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\}$ . Les  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont des valeurs limites de précisions

**Normalisation des limitations**

Dans beaucoup de calculs des structures où l'on doit résoudre un problème d'optimisation, les limitations se posent en termes de déplacements, de contraintes et de fréquences de résonance. On écrit par exemple que  $u$ , le déplacement est inférieur à  $\bar{u}$  mm, que  $\sigma$ , la contrainte est inférieure à  $\bar{\sigma}$  N/m<sup>2</sup> et que  $\omega$ , la fréquence est

supérieure à  $\bar{\omega}$  Hz. Ces trois limitations n'ont évidemment pas le même "poids" numériquement bien qu'elles aient la même importance mécanique; or elles sont simplement "additionnées" dans  $g_j(\mathbf{x})$ . Il est donc nécessaire de les normaliser :

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{(u(\mathbf{x}) - \bar{u})}{\bar{u}} = \frac{u}{\bar{u}} - 1 \leq 0 \quad (\text{I.82})$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{(\sigma(\mathbf{x}) - \bar{\sigma})}{\bar{\sigma}} = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} - 1 \leq 0 \quad (\text{I.83})$$

$$g_3(\mathbf{x}) = \frac{(\bar{\omega} - \omega(\mathbf{x}))}{\bar{\omega}} = 1 - \frac{\omega}{\bar{\omega}} \leq 0 \quad (\text{I.84})$$

Il est également possible de travailler avec des facteurs de pénalisation différents pour chaque  $g_j$ , par exemple :

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{r}^k) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{r}^k \sum_{j=1}^m \frac{R_j}{g_j(\mathbf{x})} \quad (\text{I.85})$$

Les  $R_j$  sont choisis pour que le poids de chaque limitation dans le général soit à peu près le même (au point de départ).

### Les aspects mathématiques

Il n'est pas dans notre intention de faire des mathématiques; cependant il n'est non plus inutile de connaître les limites d'utilisation des méthodes auxquelles on peut faire appel, c'est pourquoi nous donnons ici les théorèmes mathématiques de base dont les démonstrations peuvent être trouvées dans les ouvrages spécialisés.

#### Théorème 1

Si la fonction :

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{r}^k) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{r}^k \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(\mathbf{x})}$$

est minimisée pour une suite de valeur décroissantes de  $\mathbf{r}^k$  alors les minima trouvés  $\bar{\mathbf{x}}^k$  convergent vers le point  $\bar{\mathbf{x}}$  où la fonction  $f(\mathbf{x})$  soumise aux limitations  $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  est minimum quand  $\mathbf{r}^k \rightarrow 0$ .

**Théorème 2**

Si  $f(x)$  et les  $g_j(x)$  sont convexes et si  $f(x)$  ou au moins une des limitations est strictement convexe alors la fonction  $\Phi(x, r^k)$  est strictement convexe.

**Théorème 3 (rappel)**

- $f(x)$  convexe  $\Rightarrow f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2), \lambda \in (0,1)$
- $f(x)$  convexe  $\Rightarrow f(x^2) \geq f(x^1) + \nabla f^T(x^1) (x^2 - x^1)$
- $f(x)$  convexe  $\Rightarrow \nabla f^2 = H$  matrice définie positive
- $f(x)$  convexe  $\Rightarrow$  tout minimum local est un minimum absolu.

**I.5.1.2 Pénalité extérieure**

Dans cette méthode on pose :

$$\Phi(x, r^k) = f(x) + r^k \sum_{j=1}^m [ \langle g_j(x) \rangle ]^q \tag{I.86}$$

où  $r^k$  est le facteur de pénalité strictement positif,  $q$  est un exposant non négatif et  $\langle g_j(x) \rangle$  est défini par :

$$\langle g_j(x) \rangle = \text{Max } \langle g_j(x), 0 \rangle \quad \begin{cases} = g_j & \text{si la limitation est violée} \\ = 0 & \text{si } g_j(x) \leq 0 \end{cases}$$

Cette définition montre que l'effet de la pénalité est d'augmenter la valeur de  $f(x)$  dans une proportion liée à la valeur de la limitation non satisfaite. Si  $q > 1$ ,  $\Phi$  augmente plus vite que  $g_j$ ; c'est d'ailleurs pourquoi on parle de pénalité puisque  $|\Phi| > |f|$  et que l'on cherche à minimiser la fonction  $f$ .

Généralement,  $\Phi$  possède un minimum  $\bar{x}^k$  dans le domaine non réalisable; ce minimum  $\bar{x}^k$  converge vers le minimum  $\bar{x}$  du problème original quand  $k$  et  $r^k \rightarrow \infty$ ; la suite  $\bar{x}^k$  se rapproche de  $\bar{x}$  et les  $\bar{x}^k$  peuvent alors éventuellement appartenir au domaine réalisable.

Pour des raisons de continuité de la fonction  $\Phi$  et de ses dérivées premières, on prend en général  $q > 1$ , soit le plus souvent  $q = 2$ .

L'algorithme est le suivant :

- 1) Donner un point initial  $\mathbf{x}^0$  et une valeur convenable  $r^0$ . Poser,  $k = 0$ .
- 2) Minimiser  $\Phi(\mathbf{x}, r^k)$  pour trouver  $\bar{\mathbf{x}}^k$
- 3) Tester si  $\bar{\mathbf{x}}^k$  satisfait toutes les contraintes, il en est ainsi de l'optimum. Arrêter le processus sinon aller en 4).
- 4) Choisir une valeur  $r^{k+1}$
- 5) Poser  $k = k + 1$  et aller en 2)

La convergence de cet algorithme a été démontrée mathématiquement.

### I.5.1.3 Pénalité étendue

Le principal avantage de la pénalité intérieure est qu'elle permet de trouver des configurations admissibles, au contraire de la pénalité extérieure. Le principal inconvénient est la nécessité de trouver un point initial admissible.

La pénalité étendue permet de sortir du domaine admissible au cours de la phase de minimisation séquentielle; elle combine les deux pénalités. On écrit :

$$\Phi(\mathbf{x}, r^k) = f(\mathbf{x}) + r^k \sum_{j=1}^m p(g_j(\mathbf{x})) \quad (\text{I.87})$$

Kavlie et Moe ont proposé

$$p(g_j) = \begin{cases} \frac{-1}{g_j} & , \quad g_j \leq g_0 & (\text{I.88a}) \\ \frac{1}{g_0} \left[ \frac{g_j}{g_0} - 2 \right] & , \quad g_j \geq g_0 & (\text{I.88b}) \end{cases}$$

où  $g_0$  est un petit paramètre, dit paramètre de transition. On souhaite que, lorsque la contrainte est violée la fonction croisse rapidement. Pour  $g_0$  et  $r^k$  petits l'équation (I.88b) montre que

$$r^k p(g_j) = \frac{g_j r^k}{g_0^2} \quad (\text{I.89})$$

Kavlie propose de prendre  $g_0 = c r^k$ .

L'ennui de cette fonction est que ses dérivées premières ne sont pas continues au point  $g_0$ , c'est pourquoi Haftka a proposé :

$$p(g_j) = \begin{cases} \frac{-1}{g_j} & , \quad g_j \leq g_0 & (\text{I.90a}) \\ \frac{1}{g_0} \left[ - \left\{ \frac{g_j}{g_0} \right\}^2 + 3 \left\{ \frac{g_j}{g_0} \right\} - 3 \right] & , \quad g_j \geq g_0 & (\text{I.90b}) \end{cases}$$

pour  $r^k$  et  $g_0 \rightarrow 0$ , l'équivalent de  $r^k p(g_j)$  est cette fois :

$$r^k p(g_j) = - \frac{g_j r^k}{g_0^3} \quad (\text{I.91})$$

ce qui donne  $g_0 = c (r^k)^{0.5}$

**Remarque :** L'avantage d'avoir des dérivées continues se manifeste au cours de la minimisation sans contraintes où l'on peut alors utiliser des méthodes du 2-ième ordre.

Les méthodes de pénalité sont très puissantes et faciles à mettre en oeuvre d'un point de vue programmation. Leurs principaux inconvénients sont :

- Un mauvais conditionnement numérique au voisinage des limitations, particulièrement quand  $r^k$  devient petit. Or, souvent, le minimum est au voisinage d'une frontière ou sur la frontière, du domaine réalisable.
- Le choix de  $r^0$  et l'évolution de  $r^k$ .

En général, la "stratégie" de pénalisation n'est jamais valable une fois pour toutes, elle doit varier avec les exemples.

## 1.5.2 METHODES DES MULTIPLICATEURS OU DU LAGRANGIEN AUGMENTE

Ces méthodes ont été développées dans la littérature pour éviter quelques uns des inconvénients signalés précédemment, à savoir ceux liés à l'évolution du

paramètre  $r^k$ . Il s'ensuit que la fonction  $\Phi$  regroupant les limitations n'est plus mal conditionnée. Par ailleurs, les mathématiciens ont démontré que la convergence de ces méthodes est généralement bonne et supérieure à celle de la SUMT. Les auteurs de référence sont Bertsekas, Hestenes et Rockafellar.

### I.5.2.1 Contraintes d'égalité

La méthode des multiplicateurs peut être considérée comme une combinaison des méthodes primales-duales, mais elle a un comportement bien spécifique :

On sait que le problème initial :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser la fonction } f(\mathbf{X}) \\ \text{soumise aux contraintes d'égalité :} \\ h_j(\mathbf{X}) = 0 \quad j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (\text{I.92})$$

est équivalent à la minimisation du Lagrangien

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{X}) \quad (\text{I.93})$$

tel que

$$\nabla L(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\lambda}) = \nabla f(\bar{\mathbf{X}}) + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j \nabla h_j(\bar{\mathbf{X}}) = 0 \quad (\text{I.94})$$

et

$$\nabla^2 L(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\lambda}) = \frac{\partial^2 L(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\lambda})}{\partial^2 \mathbf{X}_i} > 0 \quad (\text{I.95})$$

Le problème (I.93) est encore un problème avec contraintes. Il peut donc être résolu par une méthode de pénalisation extérieure, c'est à dire que l'on se propose de minimiser :

$$\Phi(\mathbf{X}, \lambda, r) = L(\mathbf{X}, \lambda) + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^m h_j^2(\mathbf{X})$$

$$= f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{x}) + \frac{r}{2} h_j^2(\mathbf{x}) \quad (I.96)$$

La pénalisation extérieure fait que  $r$  croit indéfiniment. La fonction  $\Phi(\mathbf{x}, \lambda, r)$ , dans cette évolution, ressemble de plus en plus à une fonction de pénalité extérieure, donc avec une formule de réactualisation convenable des  $\lambda_j$ , l'équation (I.96) peut conduire à la solution du problème.

Le choix des  $\lambda_j$  est primordial, cela peut facilement s'illustrer par les deux cas extrêmes suivants :

- Si l'on prend  $\lambda_j = 0$ , on trouve bien la pénalité extérieure usuelle,
- Si l'on a  $\lambda_j = \bar{\lambda}_j$ , c'est à dire si les  $\lambda_j$  ont les valeurs convenables, la différentiation de  $\Phi$  conduit, au point  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ , à :

$$\nabla \Phi = \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) + r h_j(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \nabla h(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad (I.97)$$

d'où

$$r h_j(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \nabla h = 0$$

c'est à dire que l'équation (I.97) est indépendante de  $r$ .

Cette indépendance a deux conséquences :

- Tout d'abord si le vecteur  $\bar{\lambda}$  est connu alors la solution peut s'obtenir en une seule minimisation sans limitations.
- Ensuite, puisque  $\Phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}, r)$  ne dépend pas de  $r$ , on n'a pas besoin de faire varier ce paramètre. Ce qui signifie donc l'absence d'un mauvais conditionnement numérique.

La question qui reste à résoudre est celle du choix des valeurs initiales de  $r$  et  $\lambda$  et leurs réactualisations pour que le processus converge convenablement.

L'équation (I.97) peut encore s'écrire :

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^m (\bar{\lambda}_j + r h_j(\bar{\mathbf{x}})) \nabla h(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad (I.98)$$

d'après le critère de Kuhn-Tucker à l'optimum, on a :

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \quad (\text{I.99})$$

l'équation (I.99) apparait comme la formulation limite de l'équation (I.97), ce qui conduit à la formule itérative :

$$\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k + r h_j(x^k) \quad (\text{I.100})$$

Cette formule de réactualisation des multiplicateurs de Lagrange a été proposée par Hestenes, c'est la plus connue.

Il y a eu peu d'essais pour savoir quels multiplicateurs prendre au premier pas, c'est à dire  $\lambda^0$ . Il est sûr que le choix a de l'importance puisque si  $\lambda^0 = \bar{\lambda}$  il n'y a pas d'itérations (un seul pas suffit). Jusqu'à présent, on n'a guère trouvé mieux que  $\lambda_j^0 = 0$  (facile à programmer et qui permet une identification rapide des limitations actives).

Un problème assez délicat à traiter dans cette méthode des multiplicateurs est celui de la convergence car celle-ci est directement liée aux choix de  $r$ . Les théorèmes mathématiques relatifs à cette convergence sont difficiles et ne peuvent pas être présentés ici; ils sont dus à Rockafellar et Bertsekas. En résumant leurs travaux et en les simplifiant, on peut dire :

Si les fonctions  $\phi$ ,  $f$  et  $h_j$  et leurs dérivées sont suffisamment continûment différentiables jusqu'à l'ordre 2, alors il existe un scalaire  $r^*$  et un nombre  $M > 0$  tel que pour chaque  $r^k > r^*$  la fonction  $\phi(x, \lambda, r)$  a un minimum unique,  $x^k$ . De plus on a les relations suivantes :

$$\| x^k - x^* \| \leq \frac{M}{r} \| \lambda^k - \lambda^* \| \quad (\text{I.101})$$

et

$$\| \lambda^{k+1} - \lambda^* \| \leq \frac{M}{r} \| \lambda^k - \lambda^* \| \quad (\text{I.102})$$

avec

$$\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k + r h_j(x^k)$$

On en déduit que pour suite non décroissante de paramètres  $r^k$  tels que  $M/r^k \rightarrow 1$  la convergence de  $\lambda^k$  vers  $\lambda^*$  est linéaire si  $r \rightarrow \infty$ , et, si  $r/r^k \rightarrow 0$ , la convergence est

superlinéaire. De même, pour un  $r$  assez grand, la convergence de  $x^k$  vers  $x^*$  est assurée.

Il faut souligner dans ces conclusions que les hypothèses de continuité et de différentiabilité ont beaucoup d'importance et qu'il y a pas d'hypothèses de convexité. Bien entendu la fonction  $\phi$  peut posséder des minima locaux.

### I.5.2.2 Contraintes d'inégalité

On doit résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser la fonction } f(x) \\ \text{soumise aux limitations :} \\ g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (\text{I.103})$$

Par l'addition de variables supplémentaires, les inégalités sont transformées en :

$$g_j(x) + y_j^2 = 0 \quad (\text{I.104})$$

La lagrangien augmenté s'écrit :

$$\Phi(x, y, \lambda, r) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (g_j + y_j^2) + \frac{r}{2} (g_j + y_j^2)^2 \quad (\text{I.105})$$

La fonction  $\Phi$  est tout d'abord minimisée par rapport au variables  $y_j$  et nous donne :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_j} = 2\lambda_j y_j + r(g_j + y_j^2)(2y_j) = 0$$

où

$$2y_j(\lambda_j + r(g_j + y_j^2)) = 0$$

Deux solutions sont possibles :

$$y_j = 0 \quad \text{ou} \quad y_j^2 = -\lambda_j/r - g_j(x) = 0$$

La solution  $y_j^2 < 0$  est évidemment impossible, ce qui permet d'écrire :

$$y_j^2 = \text{Max} (0, -(\lambda_j/r + g_j))$$

L'équation (I.105) conduit à deux conclusions :

- Tout d'abord, les fonctions  $y_j$  ne sont plus des variables indépendantes,
- Ensuite, si  $g_j(x)$  n'est pas active, alors  $y_j$  est positif et

$$g_j(x) + y_j^2 = \text{Max} (g_j, -\lambda_j/r) = \psi_j \quad (\text{I.106})$$

L'élimination de  $y_j$  entraîne :

$$\Phi(x, \lambda, r) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \psi_j + \frac{r}{2} \psi_j^2 \quad (\text{I.107})$$

La fonction  $\Phi$  a des dérivées partielles continues au 1er ordre, mais discontinues au deuxième ordre. Cette fonction est connue sous le nom de fonction de Rockafellar.

L'équation de réactualisation des multiplicateurs s'écrit, quant à elle :

$$\lambda_j^{k+1} = \text{Max} (0, \lambda_j^k + r g_j(x^k)) \quad (\text{I.108})$$

L'essentiel de l'algorithme de la méthode des multiplicateurs est alors résumé dans l'organigramme suivant :

- 1) Choisir un vecteur de multiplicateurs de Lagrange (ici  $\lambda^0 = 0$  et un facteur de pénalité  $r^0$ )
- 2) Minimiser sans contraintes:

$$\Phi(x, \lambda, r) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \psi_i + \frac{r}{2} \psi_j^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j h_j + \frac{r}{2} h_j^2$$

avec  $\psi_i = \text{Max} (g_i, -\lambda_i/r)$  (on utilise la méthode DFP),  $m$  et  $n$  sont le nombre des contraintes inégalités et égalités respectivement.

- 3) Réactualiser les multiplicateurs de Lagrange par les formules

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + r \text{Max} (g_i(x^k), -\lambda_i/r)$$

$$\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k + r h_j(x^k)$$

- 4) Si  $\lambda^{k+1} = \lambda^k$ , arrêt, sinon aller en 5)

5) Poser  $\lambda^k = \lambda^{k+1}$ ,  $r^{k+1} = c r^k$ ,  $k = k + 1$  et aller en 2).

**Remarque :**

Il peut arriver que l'on trouve des configurations optimales légèrement irréalisables; dans ce cas, une solution peut être substituée à la limitation  $g_j(\mathbf{x}) \leq \epsilon$ , où  $\epsilon$  est une valeur limite de précision.

Tel qu'il a été proposé ci-dessus l'algorithme a été trouvé assez performant pour tous types de problèmes. Il est cependant souvent nécessaire de normer les contraintes imposées.



## **CHAPITRE II**

### **OPTIMISATION STRUCTURALE**

#### **II.1 INTRODUCTION**

La recherche sur l'optimisation des structures fait actuellement beaucoup de progrès, surtout pour obtenir les meilleures stratégies algorithmiques qui pourraient être introduites dans les codes existants de calcul de structure. Un grand nombre d'études a été effectué sur le problème d'optimisation avec des contraintes statiques et avec des contraintes dynamiques séparément, mais il n'y a que très peu d'études concernant le problème d'optimisation avec des contraintes des deux types à la fois. La difficulté majeure des problèmes d'optimisation avec des contraintes statiques est la description des structures dans le cas de géométries très complexes. L'introduction de contraintes dynamiques rajoute à cette complexité des sources importantes d'instabilité lorsqu'on utilise les algorithmes classiques d'optimisation.

L'utilisation du principe de stationnarité de Kühn-Tucker pour construire un algorithme d'optimisation est de plus en plus répandue. En fait, la méthode de critère d'optimalité se décompose en deux étapes essentielles. En premier lieu, on établit le critère d'optimalité de la fonction de Lagrange, et ensuite on recherche des formules de récurrence qui permettent d'obtenir les solutions désirées d'une façon itérative. Cette méthode a été présentée sous la forme analytique en 1968 par Prager et ses collaborateurs et sous forme numérique par Venkayya, Khot, et Reddy, [A25].

Bien que cette méthode soit largement intuitive, elle est rapidement apparue comme un outil puissant dans le développement de l'optimisation structurale.

L'algorithme d'optimisation proposé dans cette étude est testé dans le cas d'un assemblage de poutres en flexion. Les contraintes statiques imposées correspondent à des déplacements et les contraintes dynamiques à des fréquences de résonance.

#### **II.2 POSITION DU PROBLEME**

De façon générale, un problème d'optimisation structurale a pour but de minimiser le poids total d'une structure, en jouant sur répartition des masses afin que la structure satisfasse à un certain nombre de contraintes. Cette démarche consiste à

## Chapitre II

trouver un vecteur  $D$  de variables de conception,  $D_i$ ,  $i=1, \dots, m$  qui minimise une fonction de plusieurs variables (fonction coût),  $W(D_i)$  qui doit satisfaire un certain nombre de fonctions de contraintes, soit :

Minimiser la fonction coût

$$W(D_i) = \sum_{i=1}^m W_i(D_i) \quad (\text{II.1})$$

en présence de contraintes

$$h_j(D_i) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (\text{II.2})$$

où  $p$  est le nombre total des contraintes imposées.

Le vecteur  $D$  contrôle les dimensions des éléments finis de la structure, les fonctions  $h_j(D_i)$  peuvent être des déplacements, des contraintes, des fréquences de résonance, des vitesses critiques de flutter, des taux d'amortissement de certains modes, ...,  $W(D_i)$  représente la masse totale (le poids total) de la structure.

### II.3 FORMULATION DU PROBLEME

Considérons une structure de matériau élastique de densité  $\rho$  et de module d'Young  $E$ , discrétisée en  $m$  éléments finis du type poutre (Euler-Bernoulli). On suppose de plus que, pour chaque élément, le moment d'inertie  $I_i$  est fonction de la section  $S_i$  sous la forme :

$$I_i = c S_i^n, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{II.3})$$

où  $i$  est le numéro de l'élément,  $c$  et  $n$  sont les constantes caractérisant la forme de la section.

Dans notre étude, on choisit les sections  $S_i$  comme variables de conception. La fonction coût correspondant au poids total de la structure s'exprime alors sous la forme :

$$W(S_i) = \sum_{i=1}^m \rho L_i S_i$$

où  $L_i$  est la longueur de l'élément numéro  $i$ .

## Chapitre II

Notre problème d'optimisation se formule alors de la façon suivante :  
Minimiser la fonction coût

$$W(S_i) = \sum_{i=1}^m W_i(S_i) = \sum_{i=1}^m \rho L_i S_i \quad (\text{II.4})$$

tout en satisfaisant les contraintes statiques :

$$f_j(S_i) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (\text{II.5})$$

les contraintes dynamiques :

$$g_k(S_i) \leq 0, \quad k = 1, \dots, q \quad (\text{II.6})$$

et les contraintes sur les variables de conception :

$$s_i^L \leq s_i \leq s_i^U, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{II.7})$$

où  $p$  et  $q$  sont les nombres de contraintes statiques et dynamiques respectivement,  $s_i^L$  et  $s_i^U$  sont les valeurs limites des variables de conception. Les inégalités (II.5) et (II.6) définissent les restrictions à la conception. Les relations (II.7) fixent des bornes inférieures et supérieures aux valeurs des variables de conception.

Dans le cas où les contraintes statiques correspondent à une limitation des déplacements et les contraintes dynamiques à des conditions sur les fréquences de résonance, les fonctions de contraintes statiques deviennent :

$$f_j(S_i) = d_j(S_i) - \hat{d}_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (\text{II.8})$$

et les contraintes dynamiques deviennent :

$$g_k(S_i) = \hat{\omega}_k^2 - \omega_k^2(S_i) \leq 0, \quad k = 1, \dots, q \quad (\text{II.9})$$

avec  $d_j(S_i)$  valeur actuelle du  $j$ -ième déplacement et  $\hat{d}_j$  la valeur limite désirée;  $\omega_k(S_i)$  est la valeur de la  $k$ -ième fréquence de résonance et  $\hat{\omega}_k$  sa valeur limite.

En utilisant la fonction coût (II.4), les fonctions des contraintes (II.5) et (II.6), on introduit la fonction de Lagrange suivante :

$$\Phi(S_i, \lambda_j, \mu_k) = \sum_{i=1}^m \rho L_i S_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j f_j(S_i) + \sum_{k=1}^q \mu_k g_k(S_i) \quad (\text{II.10})$$

## Chapitre II

où  $\lambda_j$  et  $\mu_k$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés.

La condition nécessaire d'optimalité s'obtient en dérivant l'équation (II.10) par rapport à  $s_i$ , ce qui donne

$$\rho L_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j F_{ij} + \sum_{k=1}^q \mu_k G_{ik} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{II.11})$$

et  $\lambda_j \geq 0$ ,  $\mu_k \geq 0$  et  $\lambda_j f_j(s_i) = 0$ ,  $\mu_k g_k(s_i) = 0$

avec

$$F_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial s_i} \quad \text{et} \quad G_{ik} = \frac{\partial g_k}{\partial s_i}$$

L'équation (II.11) correspond au critère d'optimalité de Kuhn-Tucker (critère d'optimalité).

La structure optimale doit donc satisfaire l'équation (II.11), les contraintes (II.8), (II.9) et les relations (II.7). On obtient ainsi  $(m+p+q)$  équations non-linéaires qui doivent être vérifiées par les  $m$  variables de conception  $s_i$  et par les  $(p+q)$  multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_j$  et  $\mu_k$ .

### II.4 STRATEGIE DE RESOLUTION

#### II.4.1 CALCULS DES SENSIBILITES

##### A. Problèmes Statiques

Dans le cas de contraintes en déplacements, ceux-ci sont la solution de l'équation statique :

$$[K(s_i)]\{d(s_i)\} = \{P\} \quad (\text{II.12})$$

où  $[K]$  est la matrice de raideur,  $\{d\}$  est le vecteur des déplacements nodaux et  $\{P\}$  est le vecteur des charges. En dérivant l'équation d'équilibre statique (II.12) par rapport aux variables de conception  $s_i$ , on a

$$K \frac{\partial d}{\partial S_i} + \frac{\partial K}{\partial S_i} d = \frac{\partial P}{\partial S_i} \quad (\text{II.13})$$

soit pour le j-ième déplacement

$$\frac{\partial d_j}{\partial S_i} = [K]^{-1} \left\{ \frac{\partial P}{\partial S_i} - \left[ \frac{\partial K}{\partial S_i} \right] d \right\}_j \quad (\text{II.14})$$

## B. Problèmes Dynamiques

Dans le cas d'un problème avec des contraintes en fréquence de résonance, on a directement en dérivant l'équation d'équilibre dynamique par rapport aux variables de conception  $S_i$  :

$$([K] - \lambda [M]) (Q) = 0 \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial S_i} = \frac{(Q)^T \left[ \frac{\partial K}{\partial S_i} - \lambda \frac{\partial M}{\partial S_i} \right] (Q)}{(Q)^T [M] (Q)} \quad (\text{II.16})$$

soit pour le k-ième mode

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial S_i} = \frac{(Q)_k^T \left[ \frac{\partial K}{\partial S_i} - \lambda_k \frac{\partial M}{\partial S_i} \right] (Q)_k}{(Q)_k^T [M] (Q)_k} \quad (\text{II.17})$$

où  $[K]$  et  $[M]$  sont les matrices de raideur et de masse totales,  $(Q)$  est le vecteur de mode de la structure;  $\lambda$  la valeur propre,  $\lambda = \omega^2$ .

### II.4.2 RELATIONS DE RECURRENCE

Le problème d'optimisation défini précédemment est un problème d'optimisation non-linéaire non-explicite. Non-explicite signifie qu'il n'existe pas de formule donnant directement la valeur de la fonction objectif et des restrictions. Pour résoudre ce problème, dans ce sous-chapitre, on propose une méthode du type itérative basée sur l'utilisation d'équations de récurrence. On utilise le critère

d'optimalité (II.11) pour établir la relation qui modifiera les variables de conception  $s_i$ . Les fonctions des contraintes (II.6) et (II.7) sont utilisées pour obtenir la relation qui donnera les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_j$  et  $\mu_k$ .

### A. Récurrence sur les variables de conception

Le critère d'optimalité (II.11) peut se mettre sous la forme :

$$\left[ \frac{p}{\sum_{j=1}^p} \frac{-\lambda_j F_{ij}}{v_i} + \frac{q}{\sum_{k=1}^q} \frac{-\mu_k G_{ik}}{v_i} \right] = 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{II.18})$$

avec  $v_i = \rho L_i$ , et en multipliant cette dernière par  $(1-\alpha)s_i$ , on obtient :

$$(1-\alpha) s_i \left[ \frac{p}{\sum_{j=1}^p} \frac{-\lambda_j F_{ij}}{v_i} + \frac{q}{\sum_{k=1}^q} \frac{-\mu_k G_{ik}}{v_i} \right] = (1-\alpha)s_i \quad (\text{II.19})$$

d'où

$$s_i = s_i \left\{ \alpha + (1-\alpha) \left[ \frac{p}{\sum_{j=1}^p} \frac{-\lambda_j F_{ij}}{v_i} + \frac{q}{\sum_{k=1}^q} \frac{-\mu_k G_{ik}}{v_i} \right] \right\} \quad (\text{II.20})$$

L'équation (II.20) suggère la relation de récurrence suivante sur les variables de conception  $s_i$  :

$$s_i^{(r+1)} = s_i^{(r)} \{ \alpha + (1-\alpha) \text{CTR}_i \} \quad (\text{II.21})$$

avec

$$\text{CTR}_i = \left[ \frac{p}{\sum_{j=1}^p} \frac{-\lambda_j F_i}{v_i} + \frac{q}{\sum_{k=1}^q} \frac{-\mu_k G_{ik}}{v_i} \right] \quad (\text{II.22})$$

$(r+1)$  et  $r$  sont les numéros de l'itération.  $\alpha$  est un coefficient de relaxation appartient à l'intervalle  $(0,1)$ .

En utilisant les équation (II.21) et (II.22), on doit connaître tout d'abord les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_j$  et  $\mu_k$ . Ensuite, la structure est réanalysée après avoir modifié les variables de conception  $s_i$ .

**B. Récurrence sur les multiplicateurs de Lagrange**

Les récurrences pour sur multiplicateurs de Lagrange s'obtiennent à partir de relations de contraintes associées. Si toutes les contraintes statiques sont supposées être des égalités, l'équation (II.8) peut s'écrire :

$$d_j(s_i) = \hat{d}_j, \quad j = 1, \dots, p \quad (\text{II.23})$$

En multipliant cette dernière par  $(\lambda_j)^b$ , puis en extrayant sa racine b-ième, on obtient :

$$\lambda_j = \lambda_j \left[ \frac{d_j(s_i)}{\hat{d}_j} \right]^{(1/b)}, \quad j = 1, \dots, p \quad (\text{II.24})$$

L'équation (II.24) nous donne la récurrence pour *sur*  $\lambda_j$  sous la forme :

$$\lambda_j^{(r+1)} = \lambda_j^r \left[ \frac{d_j(s_i)}{\hat{d}_j} \right]^{(1/b)}, \quad j = 1, \dots, p \quad (\text{II.25})$$

$(r+1)$  et  $r$  sont les numéros de l'itération et  $b$  est un paramètre de relaxation.

L'équation (II.25) est la récurrence la plus simple, elle ne peut malheureusement pas être utilisée pour tous les types de contraintes et, de plus, elle nécessite des valeurs initiales pour les multiplicateurs de Lagrange.

Dans le cas d'un problème possédant des contraintes sur les fréquences de résonance, il est difficile de trouver correctement les valeurs initiales afin d'obtenir une stabilité satisfaisante au cours des itérations . On doit donc trouver une autre stratégie pour obtenir la récurrence sur les multiplicateurs de Lagrange.

Un système d'équations linéaires avec les  $\mu_k$  comme inconnues peut être obtenu en considérant la variation des contraintes dynamiques  $g_k(s_i)$  causée par une modification des variables de conception  $s_i$ , [A11]. La variation de la k-ième contrainte  $\Delta g_k$  peut s'écrire :

$$\Delta g_k = \{g_k(s+\Delta s) - g_k(s)\} = \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_k(s_i)}{\partial s_i} \Delta s_i \right\} \quad (\text{II.26})$$

où  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  et  $\Delta s = \{\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_m\}$ .

L'incrément  $\Delta s$  est choisi tel que  $g_k(s+\Delta s) = 0$  et en utilisant l'équation (II.9), l'équation (II.26) peut s'écrire :

$$\omega_k^2 - \hat{\omega}_k^2 = \sum_{i=1}^m G_{ik} \{s_i^{(r+1)} - s_i^r\} \quad (\text{II.27})$$

En utilisant l'équation (II.20), l'incrément de  $s_i$  s'écrit :

$$\Delta s_i^r = (s_i^{(r+1)} - s_i^r) = (\alpha - 1) s_i^r (1 - \text{CTR}_i^r) \quad (\text{II.28})$$

En injectant l'équation (II.28) dans l'équation (II.27), et en supposant que tous les éléments sont actifs, on obtient finalement :

$$\hat{\omega}_k^2 - \omega_k^2 = \sum_{i=1}^m [G_{ik}(\alpha - 1)s_i^r(1 - \text{CTR}_i^r)] \quad (\text{II.29})$$

d'où

$$\sum_{n=1}^q \mu_n \sum_{i=1}^m \left[ \frac{s_i G_{in} G_{ik}}{v_i} \right] = \frac{(\hat{\omega}_k^2 - \omega_k^2)}{(\alpha - 1)} + \sum_{i=1}^m s_i G_{ik} - \sum_{j=1}^p \lambda_j \sum_{i=1}^m \left[ \frac{s_i G_{ik} F_{ij}}{v_i} \right] \quad (\text{II.30})$$

L'équation (II.30) constitue un système d'équations linéaires avec les  $\mu_n$  comme inconnues. L'intérêt principal de l'utilisation de l'équation (II.30) est d'éviter le choix délicat des valeurs initiales des multiplicateurs de Lagrange  $\mu_n$ , ce qui est surtout intéressant dans le cas de problèmes d'optimisation avec des contraintes dynamiques (fréquences de résonance).

Enfin, la convergence de la solution est caractérisée par la vérification du critère d'optimalité de Kuhn-Tucker, correspondant à l'équation (II.18) :

$$\text{Max}_i \left[ \left\{ \sum_{j=1}^p -\lambda_j \frac{F_{ij}}{v_i} + \sum_{k=1}^q -\mu_k \frac{G_{ik}}{v_i} \right\} - 1 \right] \leq \epsilon \quad (\text{II.31})$$

où  $\epsilon$  est une valeur limite de précision.

L'algorithme complet d'optimisation structurale développé précédemment est illustré en figure 2.1.

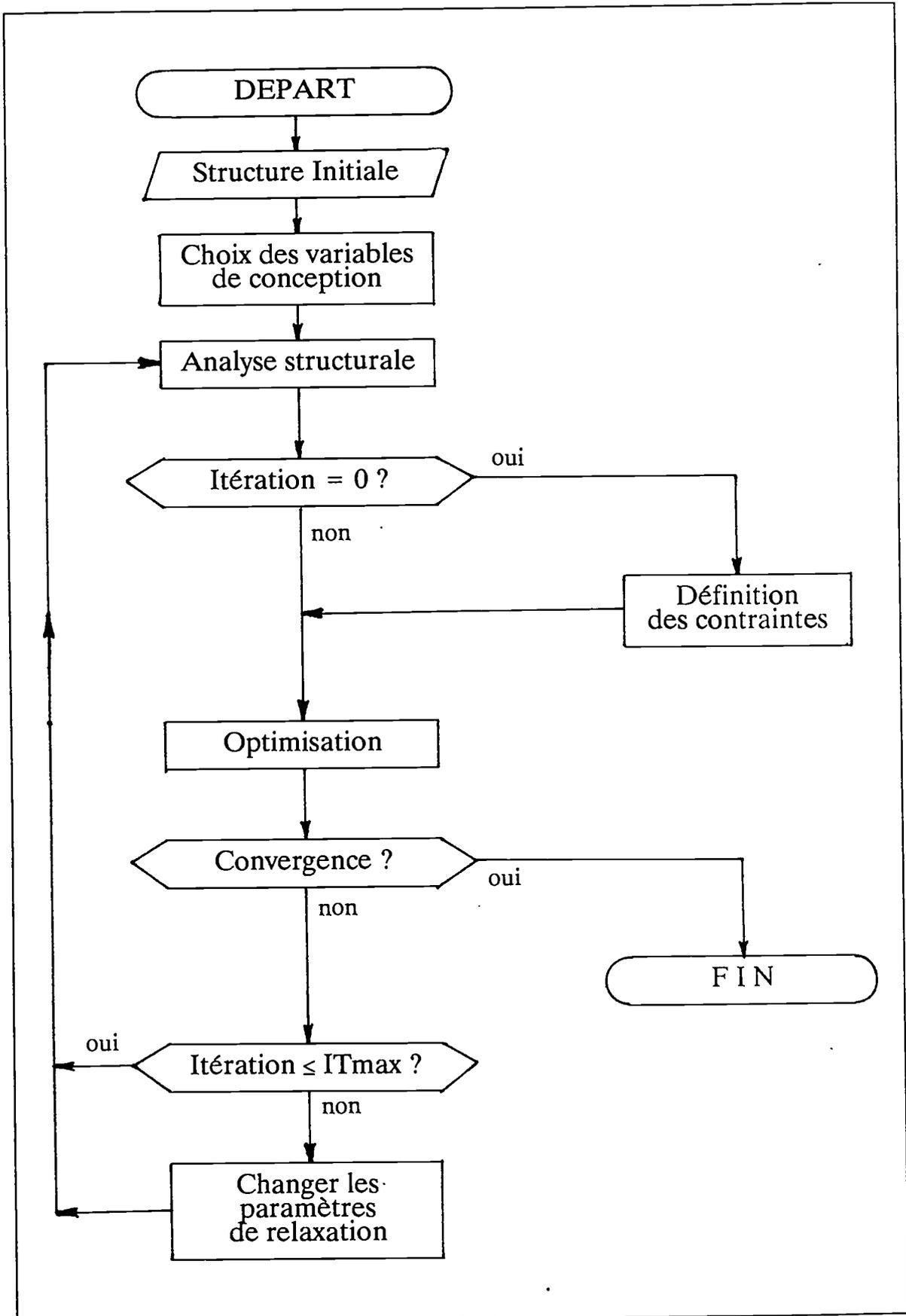


Figure 2.1 Organigramme de l'algorithme développé au chapitre II

**II.5 EXEMPLES D'APPLICATION**

Pour illustrer l'application de l'algorithme développé précédemment, on a pris deux structures simples, une poutre console avec un chargement statique de 2,5 N au point A, voir figure 2.2 et un portique bi-encasté avec un chargement statique de 500 N au point A et de 50 N au point B, voir figure 2.3. On utilise un matériau élastique de densité  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$  et de module d'Young  $E = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$  pour les deux exemples.

Pour expliciter le moment d'inertie  $I_i$  en fonction de section  $s_i$ , on a pris dans l'équation (II.3),  $n = 3$  et  $c = 1/b^2$  où  $b$  est la largeur des sections supposée constante. On prend pour les deux exemples, la valeur de  $b = 2,4 \text{ cm}$  et les valeurs initiales d'épaisseur de la section,  $h = 3 \text{ mm}$ .

Les caractéristiques statiques et dynamiques des structures étudiées sont présentés au tableau 2.1 et tableau 2.2.

Tableau 2.1 Caractéristiques initiales de la poutre console

Caractéristique	Valeur
Déplacement vertical au point A (mm)	-4,84
Première fréquence (Hz)	31.48
Deuxième fréquence (Hz)	197.25
Troisième fréquence (Hz)	552.13

Tableau 2.2 Caractéristiques initiales du portique

Caractéristique	Valeur
Déplacement vertical au point A (mm)	-1.64
Déplacement horizontal au point B (mm)	6.55
Première fréquence (Hz)	54.78
Deuxième fréquence (Hz)	174.78
Troisième fréquence (Hz)	423.21

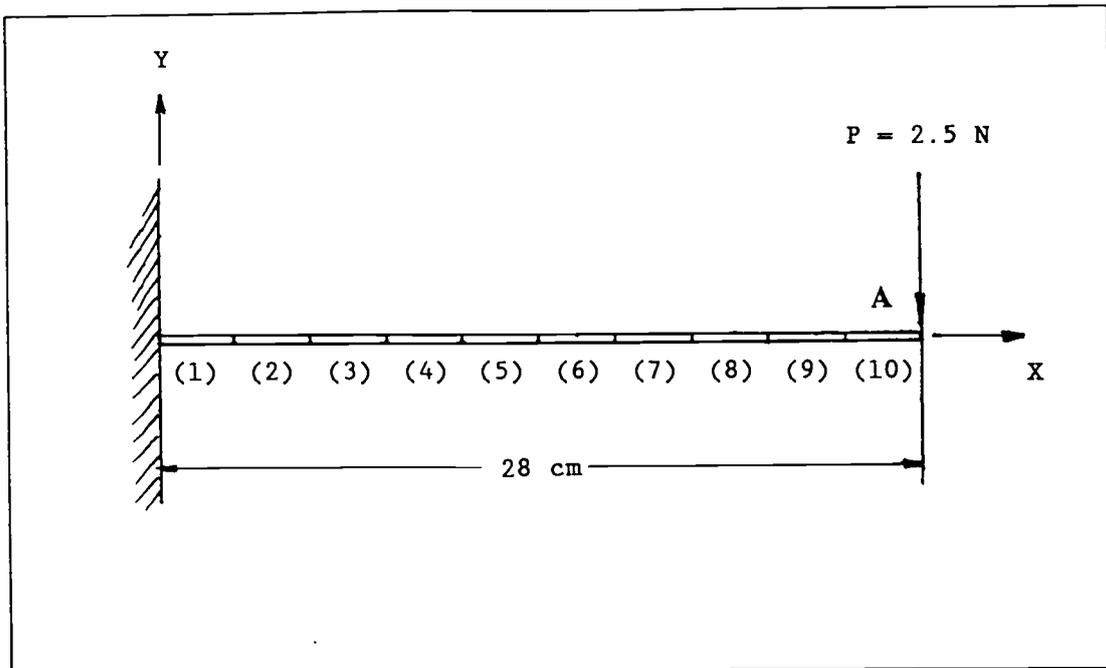


Figure 2.2 Poutre console

### II.5.1 CAS D'UNE POUTRE CONSOLE

Afin de tester la méthode proposée, nous définissons quatre problèmes d'optimisation :

#### Problème A1

On se limite au problème d'optimisation avec une contrainte statique sur un seul déplacement. Ainsi on impose le déplacement vertical au point A qu'on désire ramener à la moitié de la valeur obtenue avec la structure d'origine.

#### Problème A2

On se limite au problème d'optimisation avec une contrainte dynamique sur une seule fréquence de résonance. La contrainte imposée est sur la première fréquence de résonance pour laquelle on désire avoir une valeur de 50 Hz.

#### Problème A3

On reprend le problème A2 en présence de deux contraintes. La contrainte supplémentaire est sur la deuxième fréquence de résonance que l'on désire augmenter jusqu'à 250 Hz.

Problème A4

On traite le problème d'optimisation en présence de contraintes statiques et dynamiques à la fois. Ainsi, on impose les contraintes statiques définies dans le problème A1, et les contraintes dynamiques sont celles du problème A3.

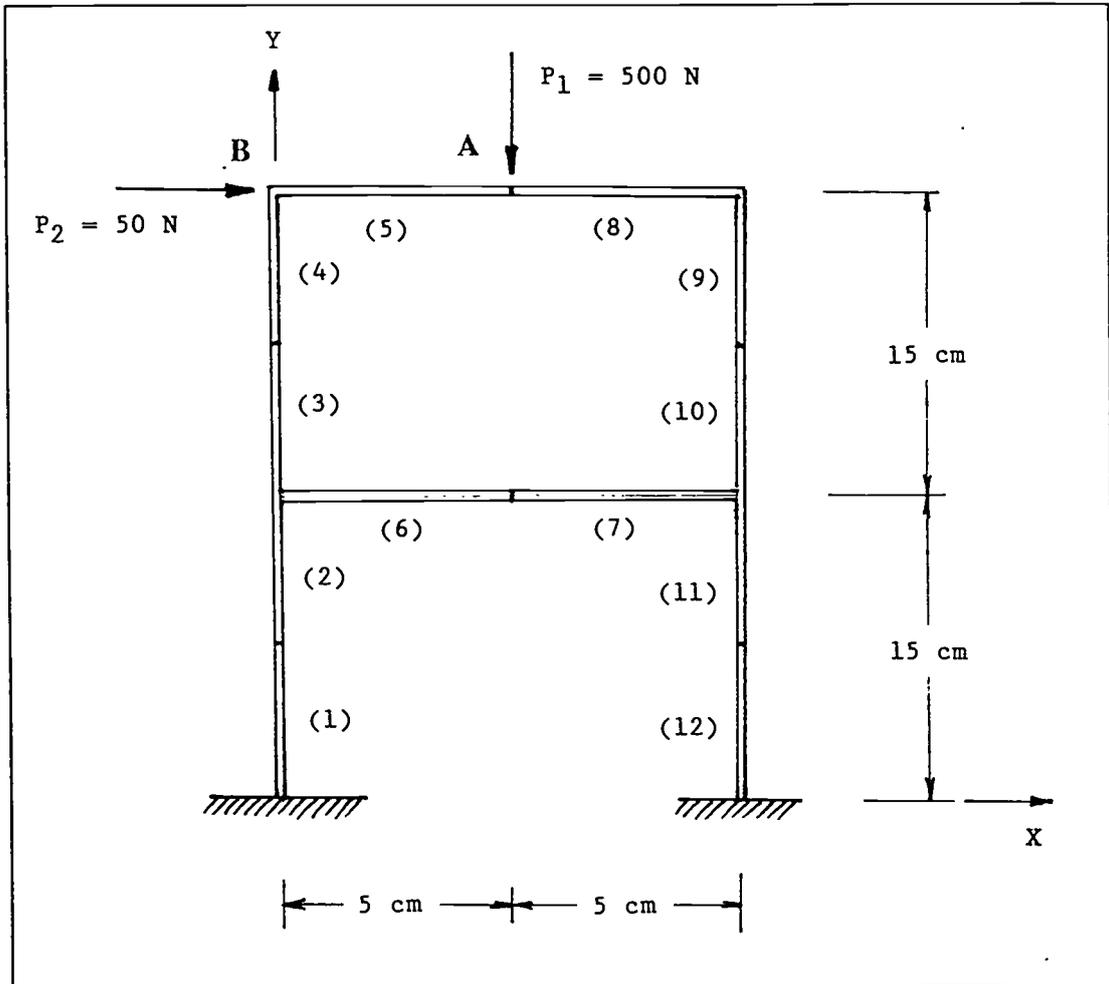


Figure 2.3 Portique bi-encasté

## II.5.2 CAS D'UN PORTIQUE BI-ENCASTRE

Dans le cas portique, nous proposons six problèmes d'optimisation définis comme suivants :

### Problème B1

On se limite au problème d'optimisation avec une contrainte statique sur un seul déplacement. Ainsi on impose le déplacement vertical au point A qu'on désire ramener à la moitié de la valeur obtenue avec la structure d'origine.

### Problème B2

On reprend le problème B1 en présence de deux contraintes. La contrainte supplémentaire consiste à obtenir pour le déplacement horizontal au point B la moitié de la valeur initiale.

### Problème B3

On se limite au problème d'optimisation avec une contrainte dynamique sur une seule fréquence de résonance. La contrainte imposée est sur la première fréquence de résonance pour laquelle on désire avoir une valeur de 75 Hz.

### Problème B4

On reprend le problème B3 en présence de deux contraintes. La contrainte supplémentaire est sur la deuxième fréquence de résonance que l'on désire augmenter jusqu'à la valeur de 250 Hz.

### Problème B5

On traite le problème d'optimisation en présence d'une contrainte statique et d'une contrainte dynamique à la fois. Ainsi, on impose la contrainte statique définie dans le problème B1 et la contrainte dynamique est celle du problème B3.

### Problème B6

On traite le problème d'optimisation en présence de plusieurs contraintes statiques et dynamiques à la fois. Ainsi on impose les contraintes statiques définies dans le problème B2 et les contraintes dynamiques sont celles du problème B4.

## II.6 RESULTATS ET DISCUSSION

Les caractéristiques statiques et dynamiques des structures initiales et optimales sont présentées aux tableaux 2.3 et 2.4. La distribution de matière pour la poutre d'origine est donnée en Fig. 2.4 et pour le portique est illustrée en Fig. 2.9.

Les distributions optimales de matière de la poutre console pour chaque cas étudié sont présentées en Figs. 2.5 à 2.8. Pour le portique, elles sont illustrées en Figs. 2.10 à 2.15. La détermination du coefficient de relaxation  $\alpha$  est indépendante du problème à traiter. La valeur de  $\alpha$  que nous avons prise varie entre 0.70 et 0.90.

L'évolution du poids de la structure au cours des itérations est donnée, pour chaque cas étudié, en Fig. 2.16 pour la poutre en Fig. 2.17 pour le portique. On constate que l'algorithme développé donne, en général une vitesse de convergence assez rapide.

L'utilisation de l'équation (II.30) comme récurrence sur les multiplicateurs de Lagrange est surtout avantageuse lorsque le nombre de ces multiplicateurs n'est pas très grand.

Dès que le nombre de contraintes devient important (cas de l'optimisation avec des contraintes statiques), cette stratégie nécessite un plus grand temps de calcul. C'est pour pallier à cette difficulté que l'on utilise l'équation (II.24) comme récurrence dans le cas d'une optimisation avec contraintes statiques.

Dans le cas de l'optimisation avec contraintes dynamiques, où le nombre de contraintes est en général très faible, il est préférable d'utiliser l'équation (II.30) car cette stratégie permet à la fois d'éliminer le calcul des valeurs initiales et d'éviter le problème d'instabilité pendant les itérations.

## Chapitre II

Tableau 2.3 Caractéristiques initiales et optimales de la poutre

Caractéristiques	Initiales	Pr. A1	Pr. A2	Pr. A3	Pr. A4
Dépl. au point A (mm)	-4,48	-2,42	-8,18	-2,42	-2,42
1ère fréquence (Hz)	31,48	63,73	50,00	50,00	49,99
2e fréquence (Hz)	197,25	259,21	154,85	250,84	250,00
3e fréquence (Hz)	552,43	600,07	373,80	640,12	638,26

Tableau 2.4a Caractéristiques initiales et optimales du portique

Caractéristiques	Initiales	Pr. B1	Pr. B2	Pr. B3
Dépl. au point A (mm)	-1,64	-0,82	-0,66	-17,02
Dépl. au point B (mm)	6,55	122,28	3,28	10,53
1ère fréquence (Hz)	54,73	13,36	67,29	75,00
2e fréquence (Hz)	174,78	54,18	215,75	149,98
3e fréquence (Hz)	423,21	169,59	461,33	277,46

Tableau 2.4b Caractéristiques initiales et optimales du portique

Caractéristiques	Initiales	Pr. B4	Pr. B5	Pr. B6
Dépl. au point A (mm)	-1,64	-1,57	-0,82	-0,79
Dépl. au point B (mm)	6,55	3,62	3,15	2,98
1ère fréquence (Hz)	54,73	75,01	77,35	75,00
2e fréquence (Hz)	174,78	250,02	210,74	250,00
3e fréquence (Hz)	423,21	470,75	499,27	538,10

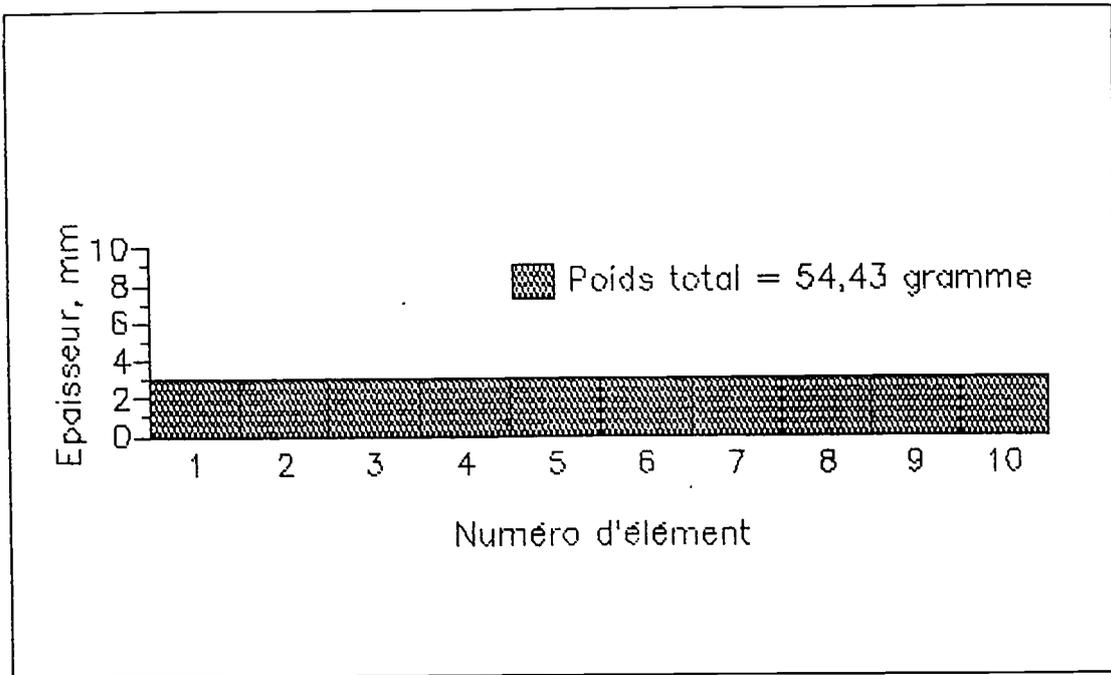


Figure 2.4 Distribution de matière de la poutre initiale

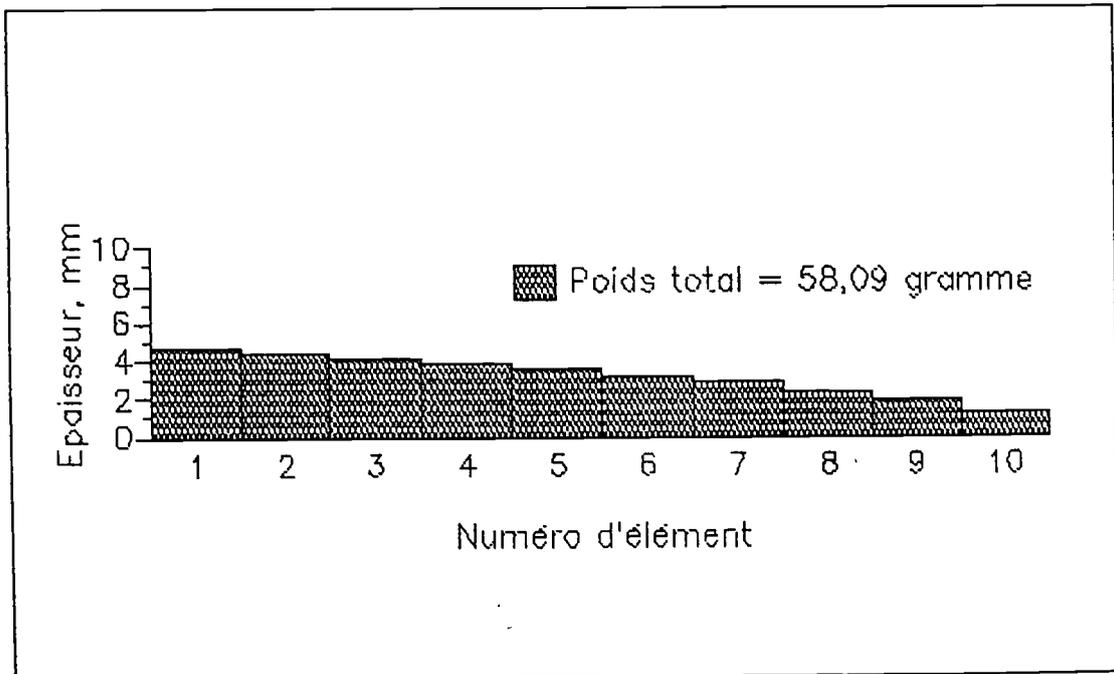


Figure 2.5 Distribution de matière du problème A1

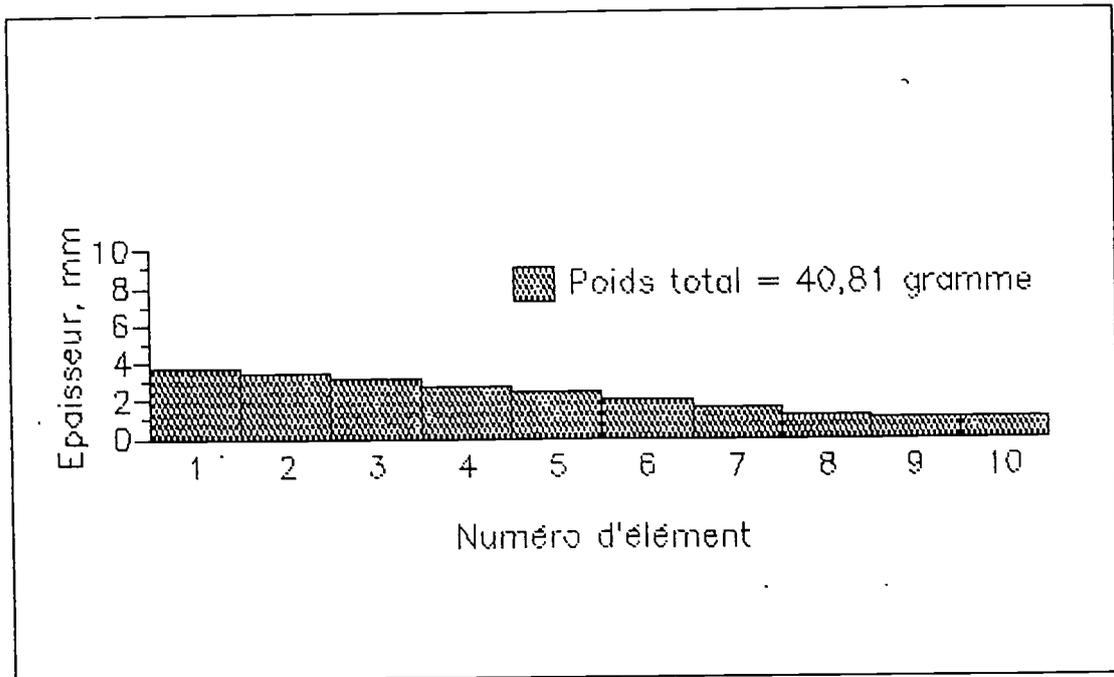


Figure 2.6 Distribution de matière du problème A2

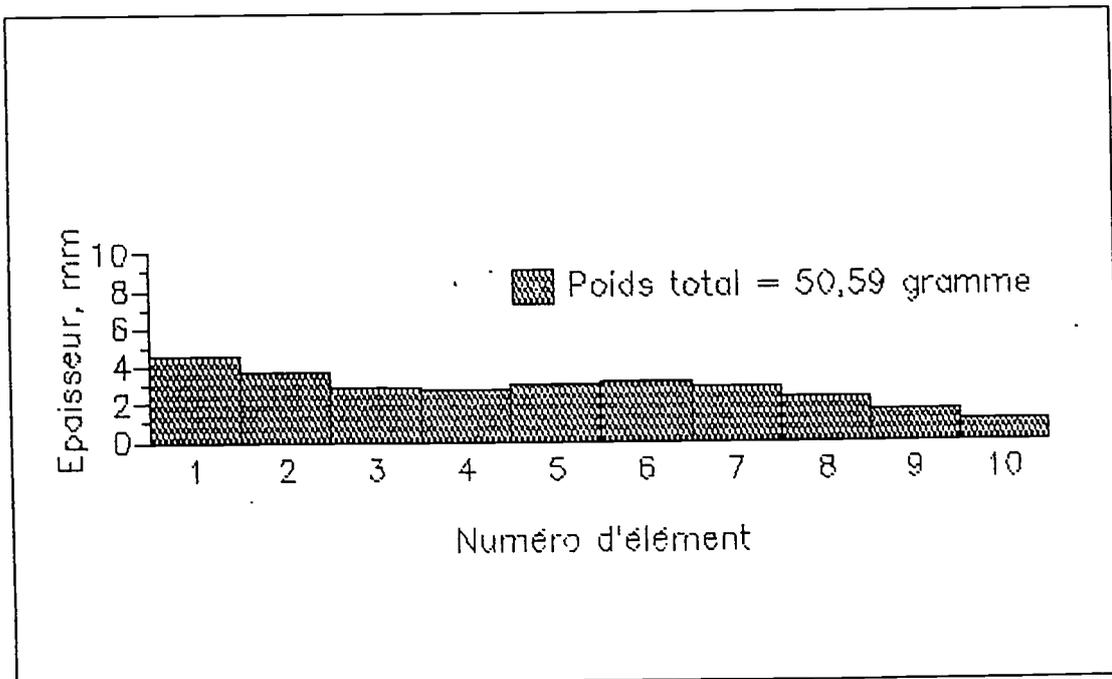


Figure 2.7 Distribution de matière du problème A3

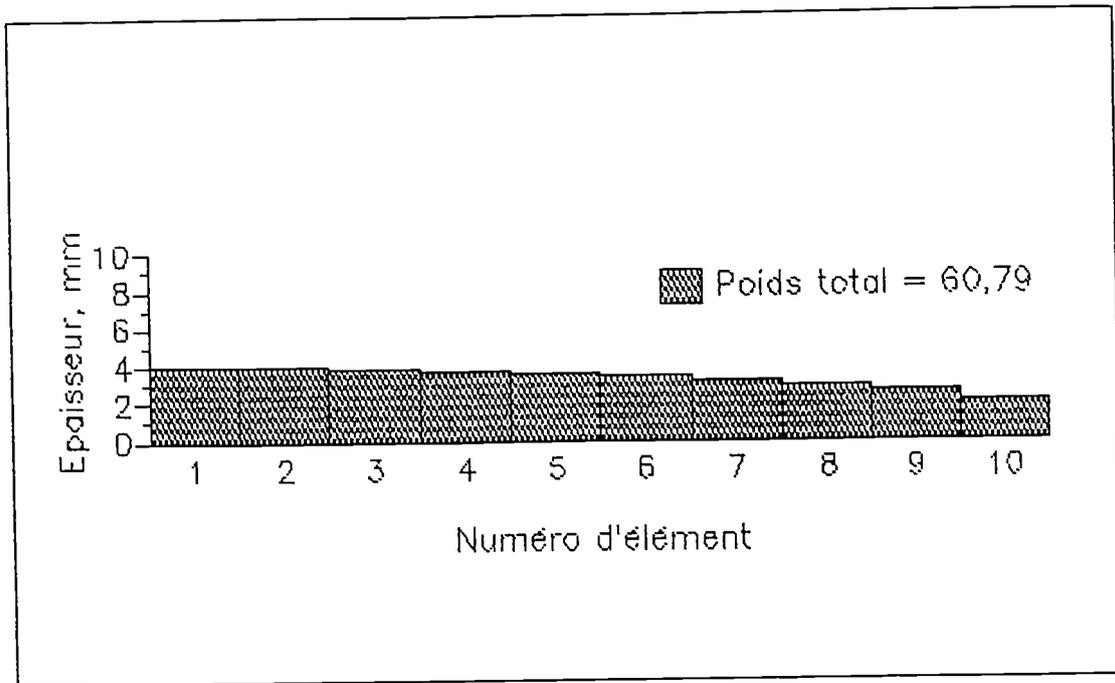


Figure 2.8 Distribution de matière du problème A4

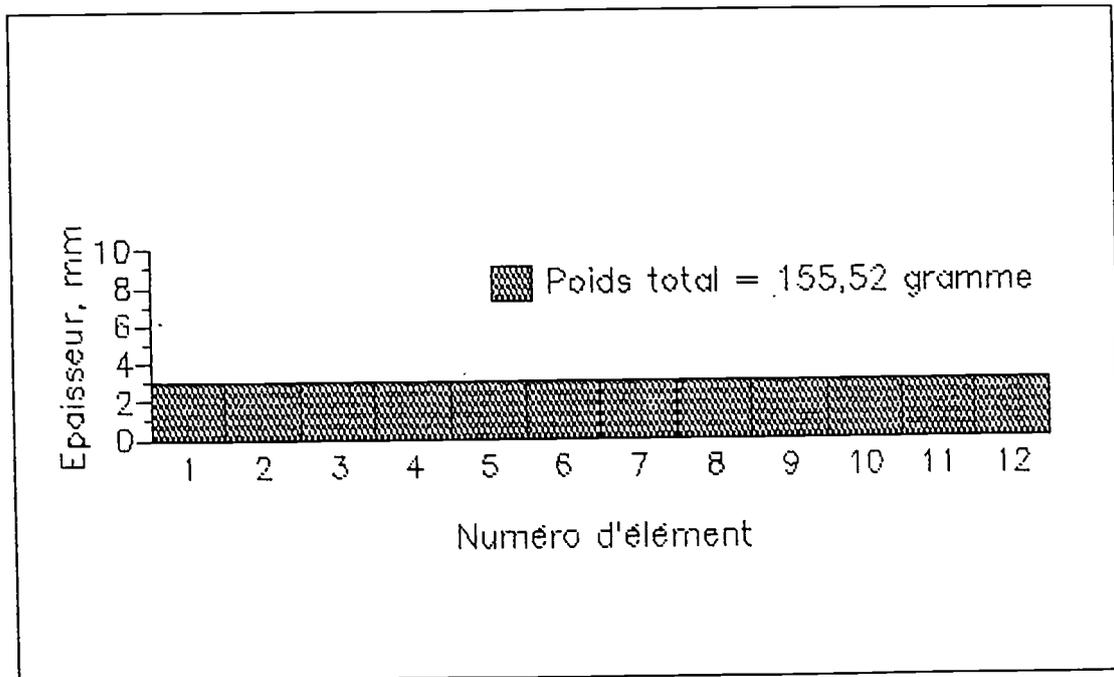


Figure 2.9 Distribution de matière du portique initial

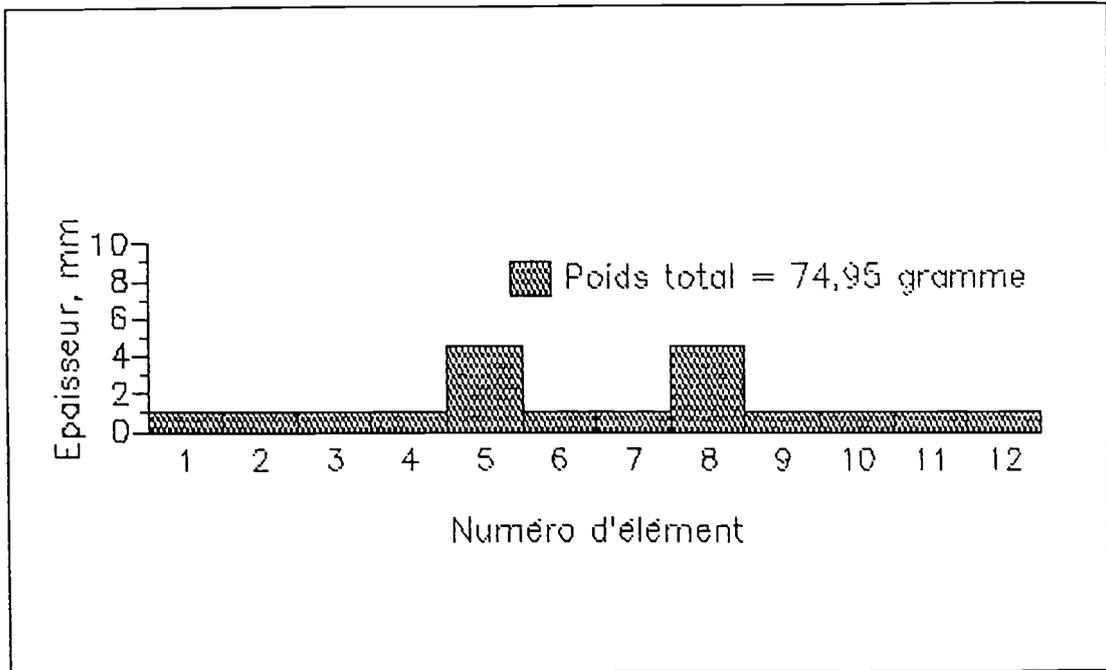


Figure 2.10 Distribution de matière du problème B1

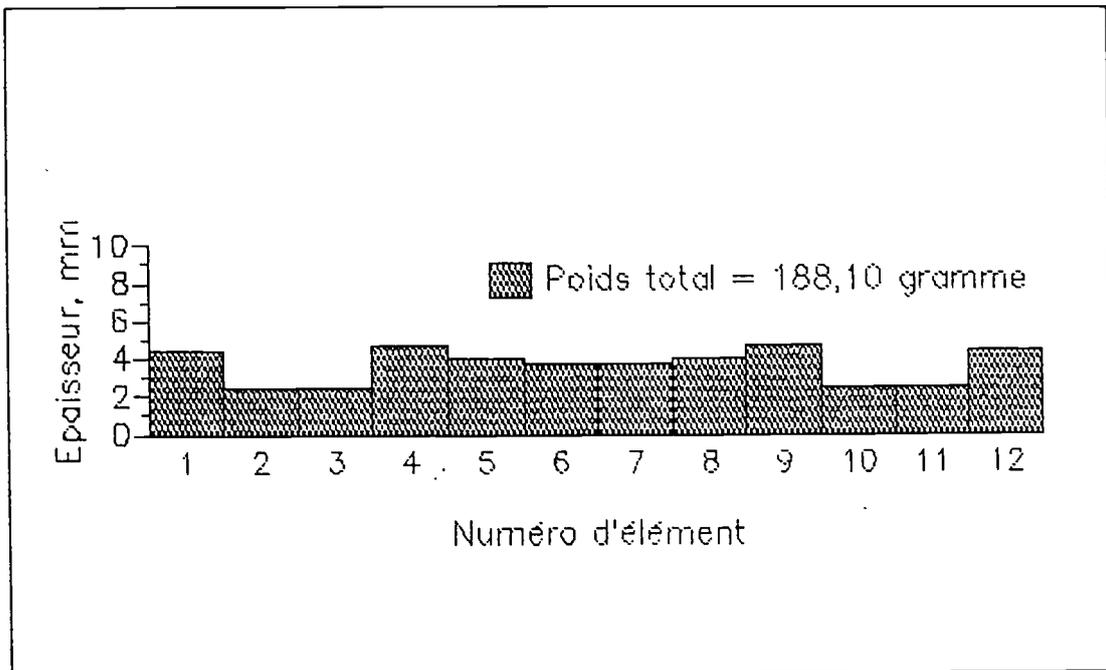


Figure 2.11 Distribution de matière du problème B2

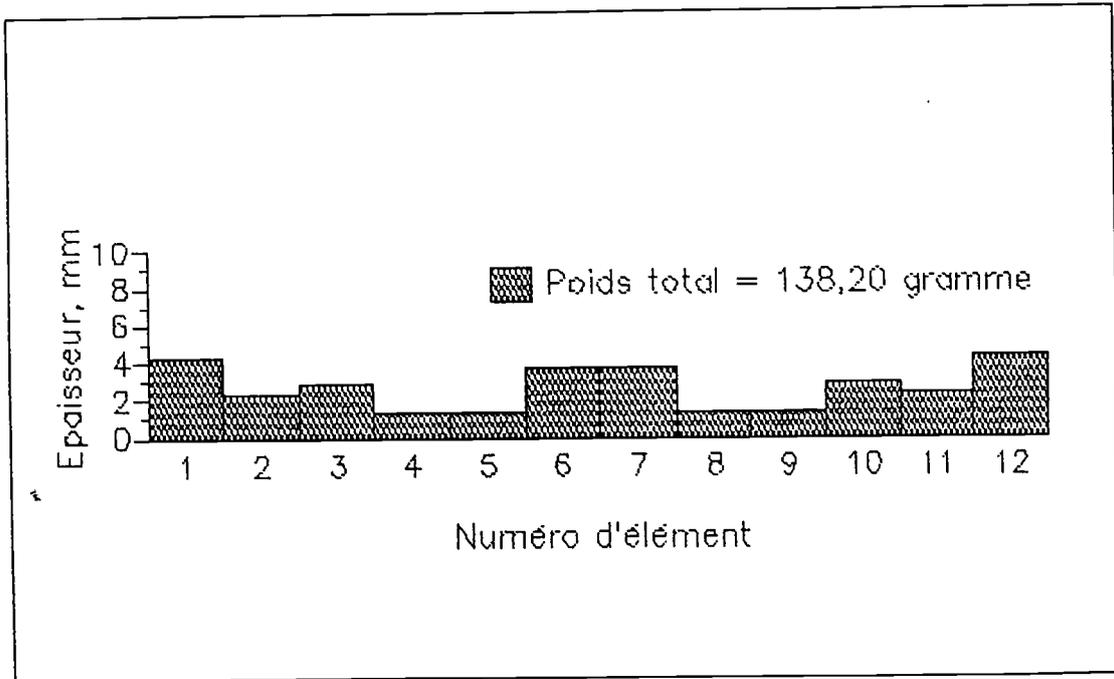


Figure 2.12 Distribution de matière du problème B3

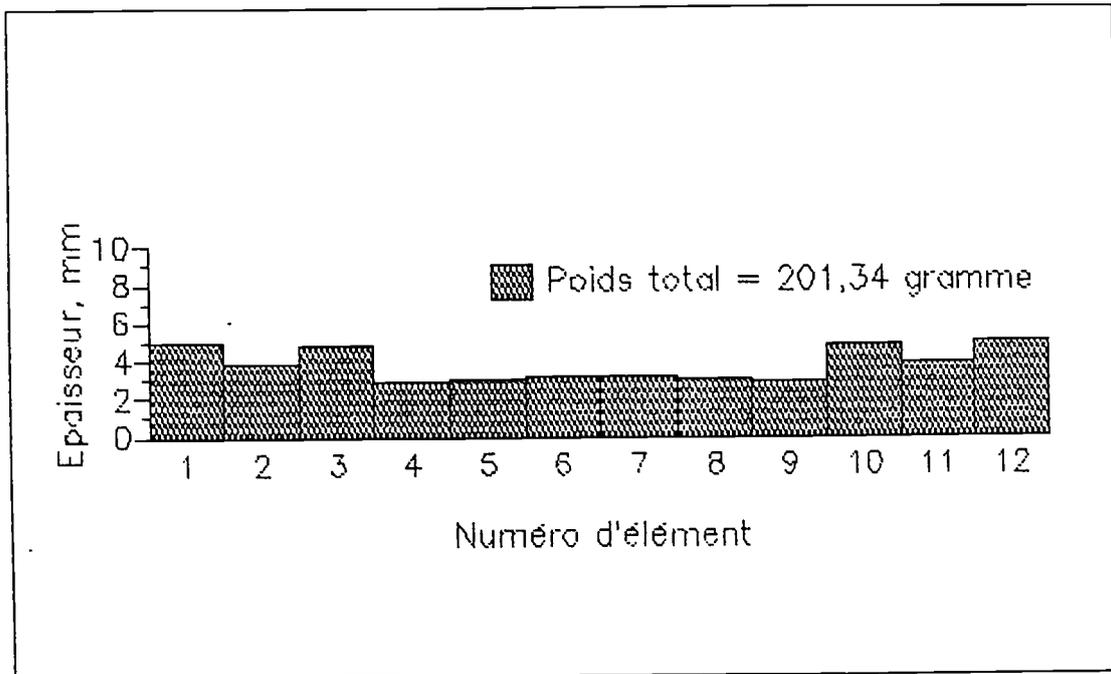


Figure 2.13 Distribution de matière du problème B4

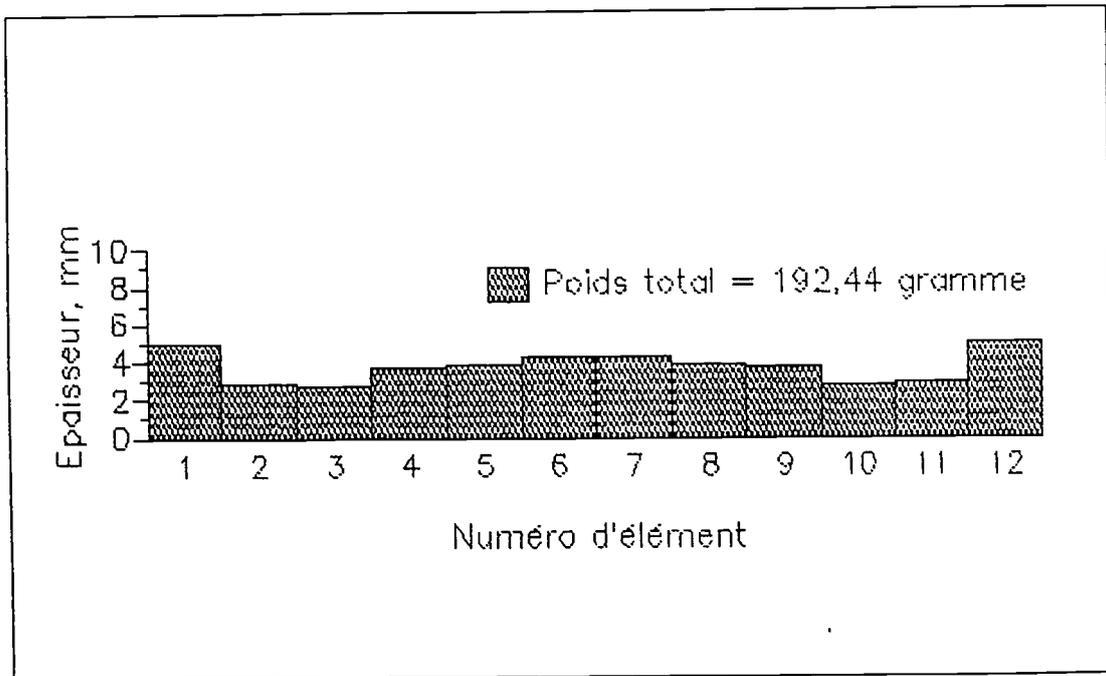


Figure 2.14 Distribution de matière du problème B5

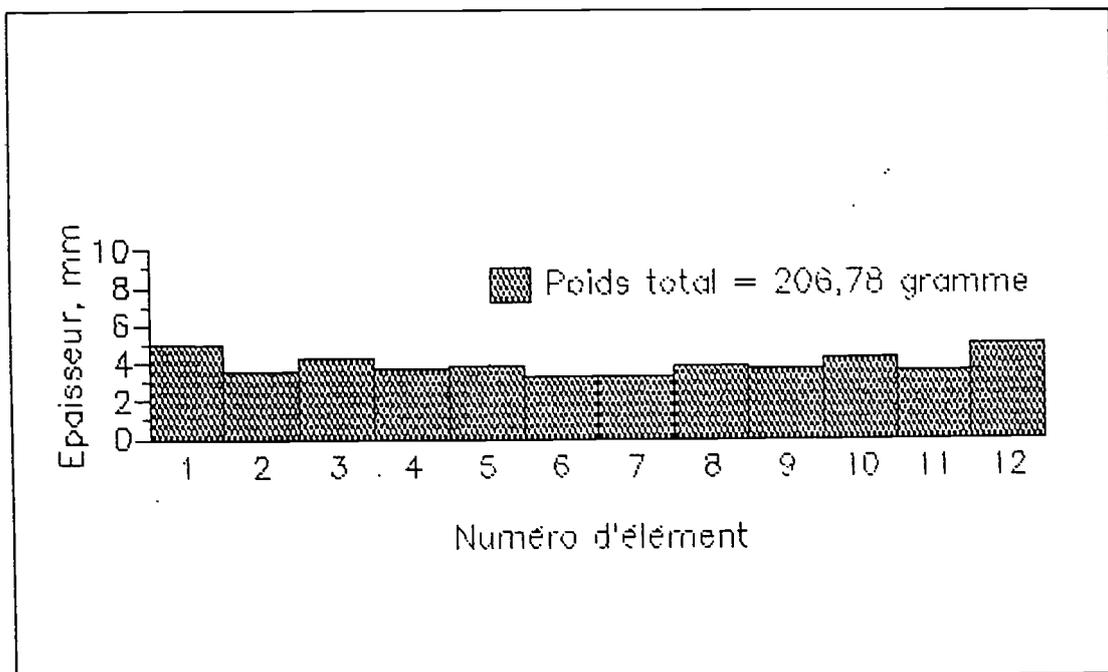


Figure 2.15 Distribution de matière du problème B6

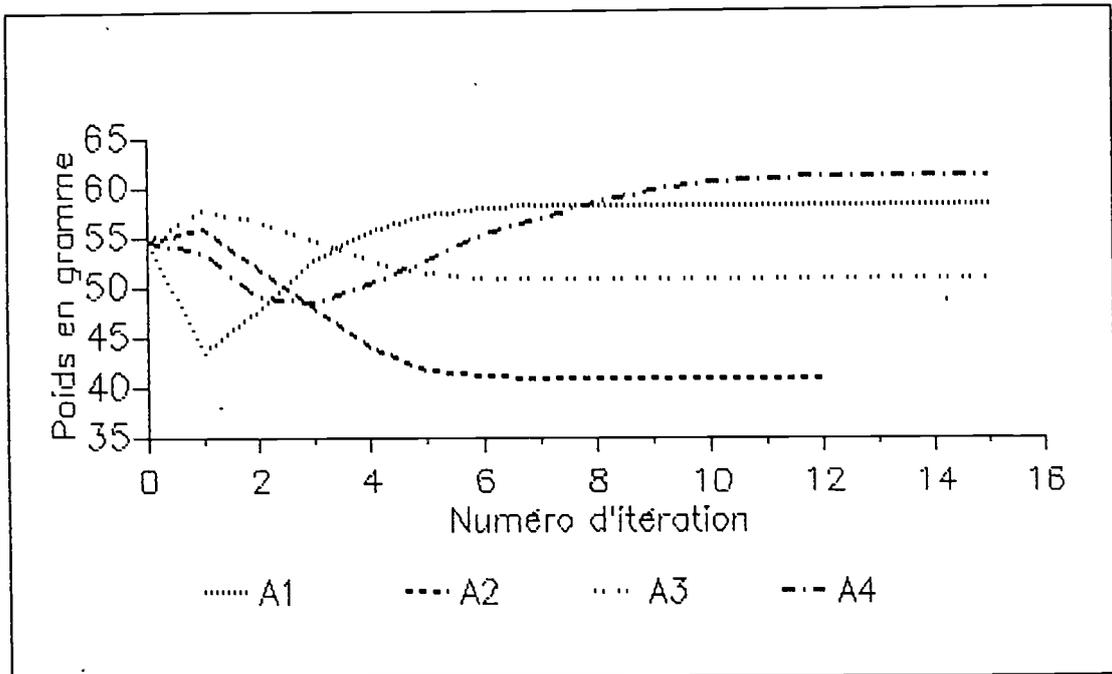


Figure 2.16 Evolution du poids de la poutre au cours des itérations

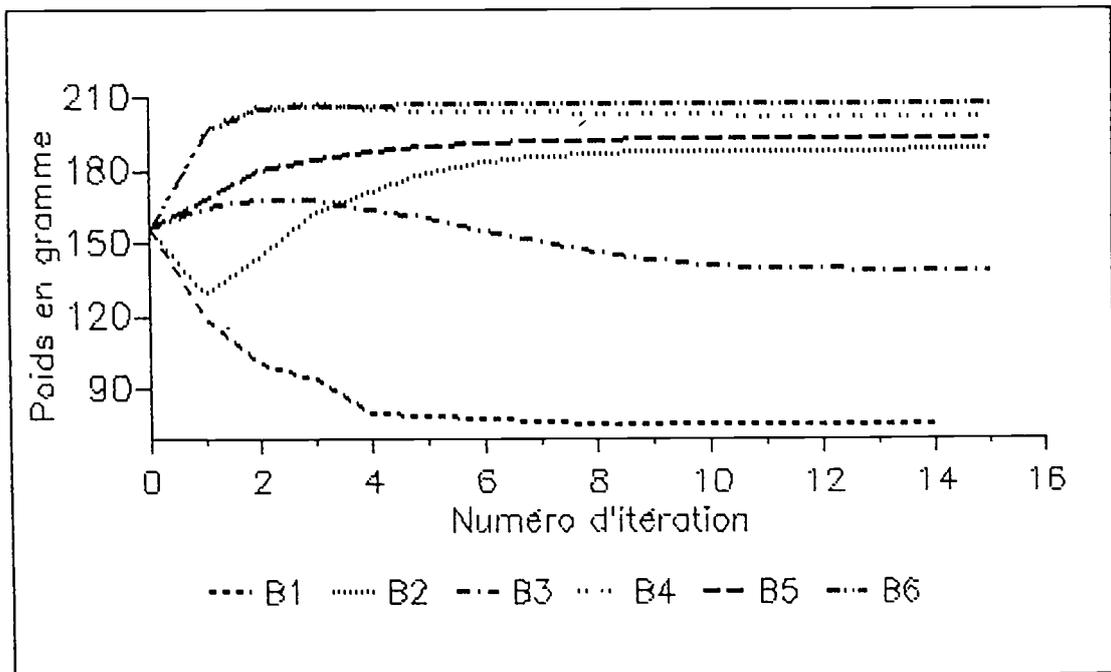


Figure 2.17 Evolution du poids du portique au cours des itérations



## CHAPITRE III OPTIMISATION DES AMORTISSEMENTS

Après avoir étudié l'utilisation du critère d'optimalité dans le but de minimiser le poids d'une structure en absence de dissipation, nous allons, dans ce chapitre, étudier l'approche par critère d'optimalité à la minimisation du poids d'une structure en présence de limitations du type amortissement.

L'amortissement des structures vibrantes par voie passive en utilisant des matériaux amortissants se développe de plus en plus, on cherche surtout à développer des stratégies qui permettent d'optimiser l'introduction et la distribution de ces matériaux dans les structures qui atteignent ainsi les caractéristiques fixées.

### III.1 ORIGINE DE L'AMORTISSEMENT

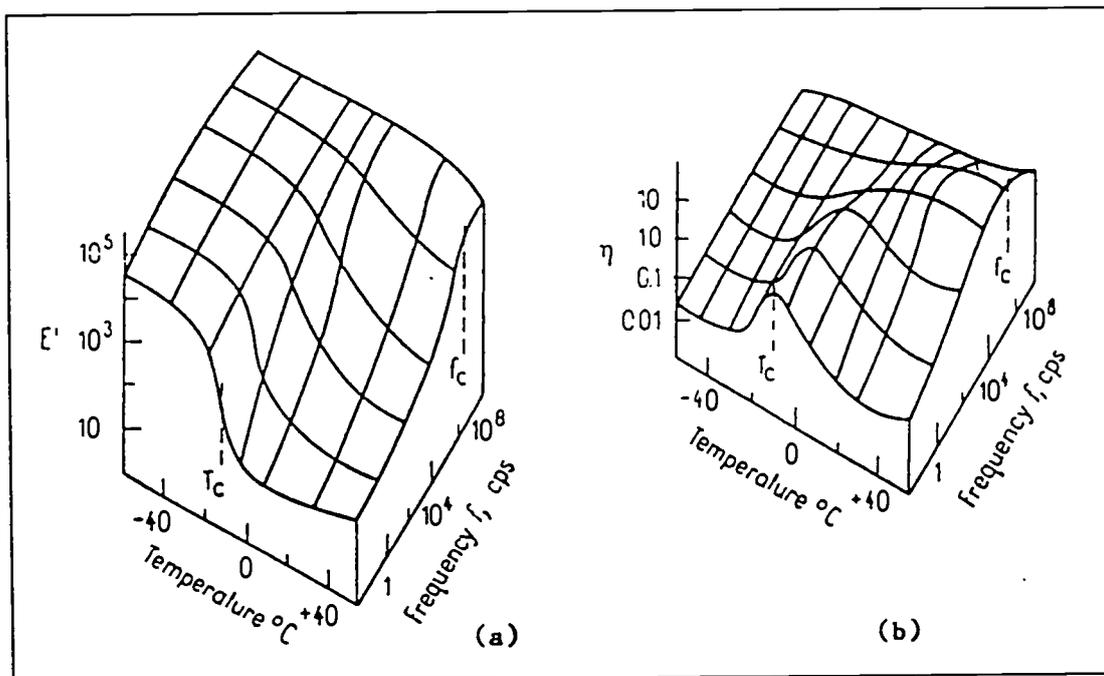


Figure 3.1 Comportement d'un matériau viscoélastique

Parmi les matériaux amortissants, les matériaux viscoélastiques sont beaucoup utilisés pour dissiper l'énergie vibratoire qui se propage dans les structures. Contrairement aux matériaux usuels utilisés dans leur domaine élastique, et qui restituent la quasi totalité de l'énergie de déformation qu'ils emmagasinent lors des cycles de déformation, ces matériaux viscoélastiques en dissipent une partie importante sous forme de chaleur, du fait des propriétés particulières de leurs chaînes macromoléculaires. La figure 3.1 illustre un exemple de comportement d'un matériau viscoélastique. La mise en oeuvre de ces matériaux viscoélastiques sous la forme de revêtements simples ou contraints, contribue à l'étouffement des vibrations par dégradation d'énergie sous forme de chaleur dans la couche viscoélastique sollicitée en traction-compression, en flexion ou en cisaillement.

D'une manière générale, ces techniques d'amortissement par introduction de matériaux viscoélastiques, devraient continuer à se développer et tout particulièrement dans le domaine des transports (automobile, ferroviaire, aéronautique, structures spatiales, etc...). On voit ainsi de plus en plus souvent des concepteurs de structures intégrer de tels dispositifs, afin d'obtenir de meilleures performances à un moindre coût.

### III.2 CARACTERISTIQUES EQUIVALENTES D'UNE POUTRE COMPOSITE MONOCOUCHE

Considérons un élément de poutre composé d'un matériau de base du type purement élastique et d'une couche d'un matériau viscoélastique, voir figure 3.2. Si on applique une force  $P(x)\exp(i\omega t)$  dans la direction transversale, l'équation du mouvement pour le déplacement dans cette direction,  $v(x)\exp(i\omega t)$ , s'écrit :

$$[E_2(1 + i \eta_2)I_2 + E_1I_1] \frac{d^4v(x)}{dx^4} - b(\rho_1h_1 + \rho_2h_2)\omega^2v(x) = P(x) \quad (\text{III.1})$$

où  $I_1$  est le moment d'inertie du matériau élastique par rapport à l'axe neutre de la poutre composite,  $I_2$  est celui du matériau viscoélastique par rapport au même axe,  $E_1$  est le module d'Young du matériau élastique.  $E_2$  est la partie réelle du module d'Young-complexe du matériau viscoélastique, et  $\eta_2$  est son facteur de perte. Le facteur de perte du matériau élastique  $\eta_1$  est très petit par rapport à  $\eta_2$  et on supposera qu'il peut être négligé.  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et  $h_1$ ,  $h_2$  sont les densités et les épaisseurs des matériaux élastique et viscoélastique respectivement et  $b$  est la largeur des sections.  $i$  est le nombre complexe,  $i^2 = -1$ .

L'équation (III.1) peut s'écrire sous la forme :

$$(E_1 I_1 + E_2 I_2) \left[ 1 + i \eta_2 \frac{E_2 I_2}{(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \right] \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - b(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \omega^2 v(x) = P(x) \quad (\text{III.2})$$

Ce modèle structural suppose que les sections droites de la poutre restent droites et perpendiculaires à la fibre moyenne.

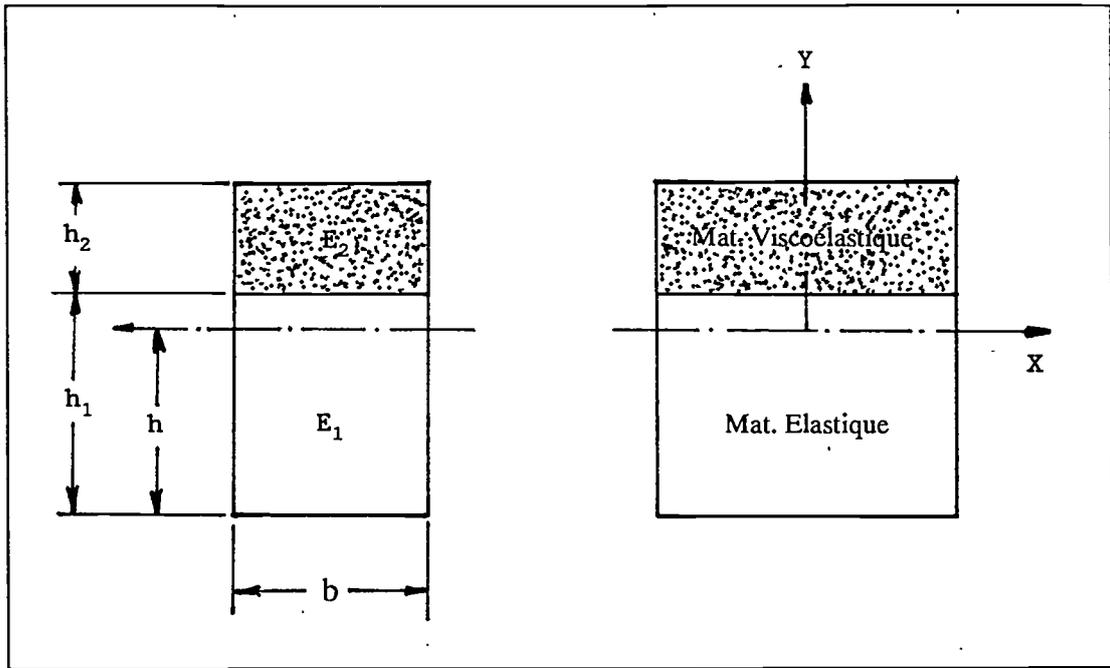


Figure 3.2 Un élément d'un matériau composite

Si on définit la rigidité équivalente  $EI$ , le facteur de perte  $\eta$  et la densité  $\rho$  de la poutre composite [A18], l'équation (III.2) peut encore s'écrire :

$$EI(1 + i \eta) \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - b\rho(h_1 + h_2)\omega^2 v(x) = P(x) \quad (\text{III.3})$$

La comparaison entre l'équation (III.2) et l'équation (III.3) nous donne les identités suivantes :

$$EI = E_1 I_1 + E_2 I_2 \quad (\text{III.4a})$$

$$\eta = \eta_2 \frac{E_2 I_2}{EI} \quad (\text{III.4b})$$

$$\rho = \frac{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{(h_1 + h_2)} \quad (\text{III.4c})$$

C'est par l'intermédiaire de ces trois caractéristiques équivalentes que nous allons décrire les comportements statiques et dynamiques de la structure en fonction des variables de conception  $h_1$  et  $h_2$ . Pour qu'on puisse exprimer les moments d'inertie  $I_1$  et  $I_2$  en fonction de variables  $h_1$  et  $h_2$ , on a besoin de connaître l'expression de l'axe neutre de la poutre composite en fonction de ces variables.

Si on suppose, en accord avec la théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli, que les sections droites restent droites et perpendiculaires à la fibre moyenne et qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre le matériau de base et la couche de viscoélastique, l'axe neutre de la poutre composite s'exprime sous la forme :

$$h(h_1, h_2) = \frac{1}{2} \frac{(E_1 h_1^2 + E_2 h_2^2 + 2E_2 h_1 h_2)}{(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \quad (\text{III.5})$$

On obtient alors l'expression suivante des moments d'inertie  $I_1$  et  $I_2$  en fonction de  $h_1$  et  $h_2$  :

$$I_1 = \frac{bh_1^3}{12} + bh_1 [h - 0,5h_1]^2 \quad (\text{III.6a})$$

$$I_2 = \frac{bh_2^3}{12} + bh_2 [h_1 + 0,5h_2 - h]^2 \quad (\text{III.6b})$$

Dans notre étude, nous ne développons pas l'optimisation à partir des équations d'équilibre continues, mais nous allons étudier un problème d'optimisation discrète. Ainsi, nous utilisons la méthode des éléments finis en formulation déplacements pour faire une analyse structurale, et on suppose que la géométrie de la structure est déjà prédéfinie.

La matrice de rigidité complexe élémentaire (du type poutre) en fonction des variables  $h_1$  et  $h_2$  peut s'exprimer sous la forme :

$$[Kc]_e = [K]_e(1 + i\eta_e) \quad (\text{III.7})$$

avec

$$[K]_e = \sum_{r=0}^3 \{ [k1_e(r)] h_{1e}(r) + [k2_e(r)] h_{2e}(r) \} \quad (\text{III.8})$$

où les matrices de rigidité spécifique  $[k1_e]$  et  $[k2_e]$  sont indépendantes des variables  $h_1$  et  $h_2$ . Les matrices de masse élémentaire sont aussi supposées avoir la forme :

$$[M]_e = \sum_{r=0}^1 \{ [m1_e(r)] h_{1e}(r) + [m2_e(r)] h_{2e}(r) \} \quad (\text{III.9})$$

où les matrices de masse spécifique  $[m1_e]$  et  $[m2_e]$  sont indépendantes des variables  $h_1$  et  $h_2$ . Les matrices de masse et de rigidité spécifiques ne sont calculées qu'une fois pour une structure de géométrie donnée. A chaque analyse ces matrices sont récupérées par l'intermédiaire des équations [(III.7) - (III.9)].

### III.3 PROBLEME D'OPTIMISATION

Comme dans le cas de l'optimisation d'une structure non amortie, nous allons prendre le poids total de la structure comme fonction objectif. Les contraintes imposées sont les facteurs d'amortissement et les fréquences propres. Notre problème d'optimisation se formule alors :

Minimiser la fonction objectif :

$$W(h_1, h_2) = \sum_{i=1}^m b L_i (\rho_1 h_{1i} + \nu \rho_2 h_{2i}) \quad (\text{III.10})$$

avec  $L_i$  longueur du  $i$ -ième élément, et  $\nu$  un coefficient de pondération. L'optimisation de la fonction objectif (III.10) se fait sous des contraintes portant sur certaines fréquences de résonance complexes de la structure, soit :

$$f_j(h_{1i}, h_{2i}) = a_j(h_{1i}, h_{2i}) - \hat{a}_j \leq 0, \quad j=1, \dots, p \quad (\text{III.11a})$$

$$g_j(h_{1i}, h_{2i}) = \hat{c}_j - c_j(h_{1i}, h_{2i}) \leq 0, \quad j=1, \dots, p \quad (\text{III.11b})$$

où  $a_j$  et  $c_j$  sont la partie réelle et la partie imaginaire de la  $j$ -ième fréquence complexe,  $\hat{a}_j$  et  $\hat{c}_j$  sont leurs valeurs limites désirées. Ainsi, le contrôle structural

### Chapitre III

proposé permettra d'imposer les valeurs des fréquences et des taux d'amortissement d'un ensemble de modes.

En utilisant la fonction objectif, définie en équation (III.10) et les fonctions de contrainte écrite en équation (III.11), on définit la fonction de Lagrange suivante :

$$\Phi(h_{1i}, h_{2i}, \lambda_j, \mu_j) = W(h_{1i}, h_{2i}) + \sum_{j=1}^p [\lambda_j f_j + \mu_j g_j] \quad (\text{III.12})$$

où  $\lambda_j$  et  $\mu_j$  sont des multiplicateurs de Lagrange associés. La condition nécessaire d'optimalité s'obtient en dérivant l'équation (III.12) par rapport à  $h_{1i}$  et  $h_{2i}$ , ce qui nous donne :

$$bL_i \rho_1 + \sum_{j=1}^p [\lambda_j F1_{ij} + \mu_j G1_{ij}] = 0 \quad (\text{III.13})$$

$$\nu bL_i \rho_2 + \sum_{j=1}^p [\lambda_j F2_{ij} + \mu_j G2_{ij}] = 0 \quad (\text{III.14})$$

$$\text{et } \lambda_j \geq 0, \lambda_j f_j = 0; \mu_j \geq 0, \mu_j g_j = 0$$

où

$$\begin{aligned} F1_{ij} &= \frac{\partial f_j}{\partial h_{1i}} = + \frac{\partial a_j}{\partial h_{1i}} & \text{et} & & F2_{ij} &= \frac{\partial f_j}{\partial h_{2i}} = + \frac{\partial a_j}{\partial h_{2i}} \\ G1_{ij} &= \frac{\partial g_j}{\partial h_{1i}} = - \frac{\partial c_j}{\partial h_{1i}} & \text{et} & & G2_{ij} &= \frac{\partial g_j}{\partial h_{2i}} = - \frac{\partial c_j}{\partial h_{2i}} \end{aligned}$$

Les équations (III.13) et (III.14) représentent les critères d'optimalité. La structure optimale doit donc satisfaire ces conditions et les équations de contrainte, l'équation (III.11). On obtient ainsi  $2(m+p)$  équations non-linéaires qui doivent être vérifiées par les  $2m$  variables de conception  $h_{1i}$  et  $h_{2i}$  et par les  $2p$  multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_j$  et  $\mu_j$ .

### III.4 STRATEGIE DE RESOLUTION

Cette section est consacrée à la résolution des équations (III.11), (III.13) et (III.14) et nous proposons une résolution itérative basée sur l'utilisation des équations de récurrence. Nous utilisons les conditions d'optimalité (III.13) et (III.14), pour établir la relation qui modifiera les variables de conception  $h_{1i}$  et  $h_{2i}$ . Les fonctions de contrainte, (III.11) sont utilisées pour obtenir la relation qui donnera les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_j$  et  $\mu_j$ .

#### III.4.1 CALCULS DES SENSIBILITES

Il s'agit de la partie la plus complexe; elle est spécifique de l'optimisation, conditionne les algorithmes d'optimisation et beaucoup d'efforts ont été faits pour en améliorer l'efficacité tant sur le plan numérique (temps de calcul) que sur celui de la précision. En fait, il existe plusieurs manières de calculer les sensibilités selon le type de problème traité. Dans notre cas, la résolution des équations (III.13) et (III.14) nécessite un calcul des sensibilités des équations des contraintes par rapport aux variables de conception  $h_{1i}$  et  $h_{2i}$  en utilisant les modes complexes.

En accord avec l'utilisation des modules complexes pour décrire les dissipations dans les matériaux viscoélastiques, l'équation du mouvement d'un système dynamique discrétisé avec un amortissement de type purement hystérétique et en absence de force d'excitation s'écrit :

$$M \ddot{U} + (K + j H) U = 0 \quad (\text{III.15})$$

où  $M$  est la matrice de masse totale,  $K$  la matrice de rigidité totale (la partie réelle de la matrice de rigidité complexe),  $H$  la matrice d'amortissement hystérétique (la partie imaginaire de la matrice de rigidité complexe) et  $j$  le nombre complexe,  $j^2 = -1$ . L'équation (III.15) équivaut au problème aux valeurs propres suivant :

$$K_c Y = \gamma M Y \quad (\text{III.16})$$

où  $K_c = (K + jH)$ ,  $\gamma$  est la valeur propre complexe et  $Y$  est le vecteur propre complexe associé. Notons que  $\gamma = -s^2$ , où  $s$  est la fréquence complexe. Pour une petite perturbation dans l'équation (III.16), on a :

$$[K_c + \epsilon R](Y + \epsilon Z) = (\gamma + \epsilon \beta)[M + \epsilon Q](Y + \epsilon Z) \quad (\text{III.17})$$

En développant l'équation (III.17) au premier ordre, on obtient :

$$\epsilon^0 : K_c Y = \gamma M Y \quad (\text{III.18})$$

$$\epsilon^1 : R Y = (\gamma Q + \beta M) Y \quad (\text{III.19})$$

en multipliant cette dernière par  $Y^T$  à gauche, on a, pour le  $k$ -ième mode, la relation suivante :

$$\beta_k = \frac{Y_k^T [R - \gamma_k Q] Y_k}{Y_k^T M Y_k} \quad (\text{III.20})$$

Si on prend  $\epsilon = dh_{1i}$ ,  $h_{1i}$  est la  $i$ -ième variable de conception; on déduit les relations suivantes :

$$\beta_k = \frac{\partial \gamma_k}{\partial h_{1i}} \quad ; \quad R = \frac{\partial K_c}{\partial h_{1i}} \quad ; \quad Q = \frac{\partial M}{\partial h_{1i}}$$

d'où pour le  $k$ -ième mode :

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial h_{1i}} = \frac{Y_k^T \left[ \frac{\partial K_c}{\partial h_{1i}} - \gamma_k \frac{\partial M}{\partial h_{1i}} \right] Y_k}{Y_k^T M Y_k} \quad (\text{III.21})$$

La  $k$ -ième fréquence propre complexe,  $s_k$  du système (III.16) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$s_k = - a_k \pm j b_k \quad (\text{III.22})$$

La dérivée de l'équation (III.22) par rapport à la variables  $h_{1i}$ , pour la partie imaginaire positive, nous donne :

$$\frac{\partial s_k}{\partial h_{1i}} = - \frac{\partial a_k}{\partial h_{1i}} + j \frac{\partial b_k}{\partial h_{1i}} \quad (\text{III.23})$$

Une simple comparaison entre l'équation (III.21) et l'équation (III.23) et en tenant compte de l'expression :

$$\frac{\partial s_k}{\partial h_{1i}} = - \frac{1}{2s_k} \frac{\partial g_k}{\partial h_{1i}} \quad (\text{III.24})$$

donne :

$$\frac{\partial a_k}{\partial h_{1i}} = - \operatorname{Re} \left[ \frac{Y_k^T \left[ \frac{\partial Kc}{\partial h_{1i}} + S_k^2 \frac{\partial M}{\partial h_{1i}} \right] Y_k}{-2S_k(Y_k^T M Y_k)} \right] \quad (\text{III.25})$$

$$\frac{\partial b_k}{\partial h_{1i}} = + \operatorname{Im} \left[ \frac{Y_k^T \left[ \frac{\partial Kc}{\partial h_{1i}} + S_k^2 \frac{\partial M}{\partial h_{1i}} \right] Y_k}{-2S_k(Y_k^T M Y_k)} \right] \quad (\text{III.26})$$

En adoptant la même démarche pour la deuxième variable de conception  $h_{2i}$ , on obtient :

$$\frac{\partial a_k}{\partial h_{2i}} = - \operatorname{Re} \left[ \frac{Y_k^T \left[ \frac{\partial Kc}{\partial h_{2i}} + S_k^2 \frac{\partial M}{\partial h_{2i}} \right] Y_k}{-2S_k(Y_k^T M Y_k)} \right] \quad (\text{III.25})$$

$$\frac{\partial b_k}{\partial h_{2i}} = + \operatorname{Im} \left[ \frac{Y_k^T \left[ \frac{\partial Kc}{\partial h_{2i}} + S_k^2 \frac{\partial M}{\partial h_{2i}} \right] Y_k}{-2S_k(Y_k^T M Y_k)} \right] \quad (\text{III.26})$$

Les quatre dernières équations représentent les sensibilités des parties réelles et parties imaginaires de la fréquence complexe par rapport aux variables de conception  $h_{1i}$  et  $h_{2i}$ .

### III.4.2 RECURRENCE SUR LES VARIABLES DE CONCEPTION

Nous proposons ici des relations récursives de type linéaire pour modifier les variables de conception au fil des itérations. Les critères d'optimalité des équations (III.13) et (III.14) peuvent se mettre sous la forme

$$\sum_{j=1}^p \left[ \frac{-\lambda_j F_{1ij} - \mu_j G_{1ij}}{v_{1i}} \right] = 1, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{III.27})$$

$$\sum_{j=1}^p \left[ \frac{-\lambda_j F_{2ij} - \mu_j G_{2ij}}{v_{2i}} \right] = 1, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{III.28})$$

avec  $v_{1i} = b_{L_i} \rho_1$  et  $v_{2i} = \nu b_{L_i} \rho_2$ . En multipliant l'équation (III.27) par  $(1 - \alpha_1)$  et l'équation (III.28) par  $(1 - \alpha_2)$ , on obtient :

$$h_{1i} = h_{1i} \left\{ \alpha_1 + (1 - \alpha_1) \sum_{j=1}^p \left[ \frac{-\lambda_j F_{1ij} - \mu_j G_{1ij}}{v_{1i}} \right] \right\} \quad (\text{III.29})$$

$$h_{2i} = h_{2i} \left\{ \alpha_2 + (1 - \alpha_2) \sum_{j=1}^p \left[ \frac{-\lambda_j F_{2ij} - \mu_j G_{2ij}}{v_{2i}} \right] \right\} \quad (\text{III.30})$$

Ces dernières nous suggèrent les récurrences sur les variables de conception  $h_{1i}$  et  $h_{2i}$  suivantes :

$$h_{1i}^{(r+1)} = h_{1i}^{(r)} \left\{ \alpha_1 + (\alpha_1 - 1) \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\lambda_j F_{1ij} + \mu_j G_{1ij}}{v_{1i}} \right] \right\}^{(r)} \quad (\text{III.31})$$

$$h_{2i}^{(r+1)} = h_{2i}^{(r)} \left\{ \alpha_2 + (\alpha_2 - 1) \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\lambda_j F_{2ij} + \mu_j G_{2ij}}{v_{2i}} \right] \right\}^{(r)} \quad (\text{III.32})$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des paramètres de relaxation caractérisant la vitesse pour atteindre le point optimal.  $(r+1)$  et  $(r)$  sont les numéros d'itération.

### III.4.3 RECURRENCE SUR LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

Les récurrences sur les multiplicateurs de Lagrange se déterminent à partir des fonctions de contraintes. Un système d'équations linéaires avec  $\lambda_k$  et  $\mu_k$  comme inconnues peut être obtenu en considérant la variation des contraintes, dans l'équation (III.11), causée par une modification des variables de conception  $h_{1i}$  et  $h_{2i}$ , [A11]. Soit, une variation de la  $k$ -ième contrainte,  $\Delta f_k$  et  $\Delta g_k$  peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta f_k &= f_k(\bar{h}_1 + \Delta \bar{h}_1, \bar{h}_2 + \Delta \bar{h}_2) - f_k(\bar{h}_1, \bar{h}_2) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial f_k}{\partial h_{1i}} \Delta h_{1i} + \frac{\partial f_k}{\partial h_{2i}} \Delta h_{2i} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

$$\begin{aligned} \Delta g_k &= g_k(\bar{h}_1 + \Delta \bar{h}_1, \bar{h}_2 + \Delta \bar{h}_2) - g_k(\bar{h}_1, \bar{h}_2) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial g_k}{\partial h_{1i}} \Delta h_{1i} + \frac{\partial g_k}{\partial h_{2i}} \Delta h_{2i} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

où

$$\bar{h}_1 = (h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1m})^T \quad \text{et} \quad \Delta\bar{h}_1 = (\Delta h_{11}, \Delta h_{12}, \dots, \Delta h_{1m})^T$$

$$\bar{h}_2 = (h_{21}, h_{22}, \dots, h_{2m})^T \quad \text{et} \quad \Delta\bar{h}_2 = (\Delta h_{21}, \Delta h_{22}, \dots, \Delta h_{2m})^T$$

En choisissant  $\Delta\bar{h}_1$  et  $\Delta\bar{h}_2$  tels que

$$f_k(\bar{h}_1 + \Delta\bar{h}_1, \bar{h}_2 + \Delta\bar{h}_2) = 0 \quad \text{et} \quad g_k(\bar{h}_1 + \Delta\bar{h}_1, \bar{h}_2 + \Delta\bar{h}_2) = 0$$

Les équations (III.33) et (III.34) deviennent

$$-f_k = \sum_{i=1}^m [F1_{ik} \Delta h_{1i} + F2_{ik} \Delta h_{2i}] \quad (\text{III.35})$$

$$-g_k = \sum_{i=1}^m [G1_{ik} \Delta h_{1i} + G2_{ik} \Delta h_{2i}] \quad (\text{III.36})$$

En utilisant les équations (III.31) et (III.32), on peut calculer les variations de  $h_{1i}$  et  $h_{2i}$  :

$$\begin{aligned} \Delta h_{1i} &= h_{1i}^{(r+1)} - h_{1i}^{(r)} \\ &= (\alpha_1 - 1) h_{1i}^{(r)} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\lambda_j F1_{ij} + \mu_j G1_{ij}}{v1_i} \right] \right\}^{(r)} \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

$$\begin{aligned} \Delta h_{2i} &= h_{2i}^{(r+1)} - h_{2i}^{(r)} \\ &= (\alpha_2 - 1) h_{2i}^{(r)} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\lambda_j F2_{ij} + \mu_j G2_{ij}}{v2_i} \right] \right\}^{(r)} \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

En injectant ces dernières dans les équations (III.33) et (III.34) et en tenant compte des fonctions des contraintes, on obtient finalement un système d'équations linéaires avec comme inconnues les multiplicateurs de Lagrange :

$$\begin{bmatrix} A1 & A2 \\ A3 & A4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B1 \\ B2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

avec

$$A1_{jk} = \sum_{i=1}^m \left\{ h_{1i} \frac{F1_{ij} F1_{ik}}{v1_i} + h_{2i} \frac{(\alpha_2 - 1)}{(\alpha_1 - 1)} \frac{F2_{ij} F2_{ik}}{v2_i} \right\}$$

$$A2_{jk} = \sum_{i=1}^m \left\{ h_{1i} \frac{F1_{ij} G1_{ik}}{v1_i} + h_{2i} \frac{(\alpha_2 - 1)}{(\alpha_1 - 1)} \frac{F2_{ij} G2_{ik}}{v2_i} \right\}$$

$$A3_{jk} = \sum_{i=1}^m \left\{ h_{2i} \frac{G2_{ij} F2_{ik}}{v2_i} + h_{1i} \frac{(\alpha_1 - 1)}{(\alpha_2 - 1)} \frac{G1_{ij} F1_{ik}}{v1_i} \right\}$$

$$A4_{jk} = \sum_{i=1}^m \left\{ h_{2i} \frac{G2_{ij} G2_{ik}}{v2_i} + h_{1i} \frac{(\alpha_1 - 1)}{(\alpha_2 - 1)} \frac{G1_{ij} G1_{ik}}{v1_i} \right\}$$

$$B1_k = - \sum_{i=1}^m \left\{ h_{1i} F1_{ik} + h_{2i} \frac{(\alpha_2 - 1) F2_{ik}}{(\alpha_1 - 1)} \right\} + \frac{(\hat{a}_k - a_k)}{(\alpha_1 - 1)}$$

$$B2_k = - \sum_{i=1}^m \left\{ h_{2i} G2_{ik} + h_{1i} \frac{(\alpha_1 - 1) G1_{ik}}{(\alpha_2 - 1)} \right\} + \frac{(c_k - \hat{c}_k)}{(\alpha_2 - 1)}$$

L'équation (III.39) constitue un système d'équations linéaires avec  $\lambda_k$  et  $\mu_k$  comme inconnues. L'intérêt principal de l'utilisation de cette stratégie est d'éviter le choix délicat des valeurs initiales des multiplicateurs de Lagrange. Nous utilisons une méthode du type Gauss-Seidel pour résoudre l'équation (III.39).

Enfin, l'algorithme complet d'optimisation développé dans ce chapitre, est donnée en figure 3.3.

### III.5 EXEMPLES D'APPLICATION

Pour illustrer l'application de l'algorithme développé précédemment, on a considéré deux structures simples, une poutre console et un portique bi-encasté, voir figure 3.4 et figure 3.5. Les caractéristiques des matériaux utilisés sont données dans le tableau 3.1. Un coefficient de pondération,  $\nu$  (équation (III.10)) égal deux est pris pour tous les problèmes traités. On prend pour les deux exemples la valeur de  $b = 2,4$  cm (supposée constante) et la valeur initiale de  $h_1 = 3$  mm et celle de  $h_2 = 1,5$  mm.

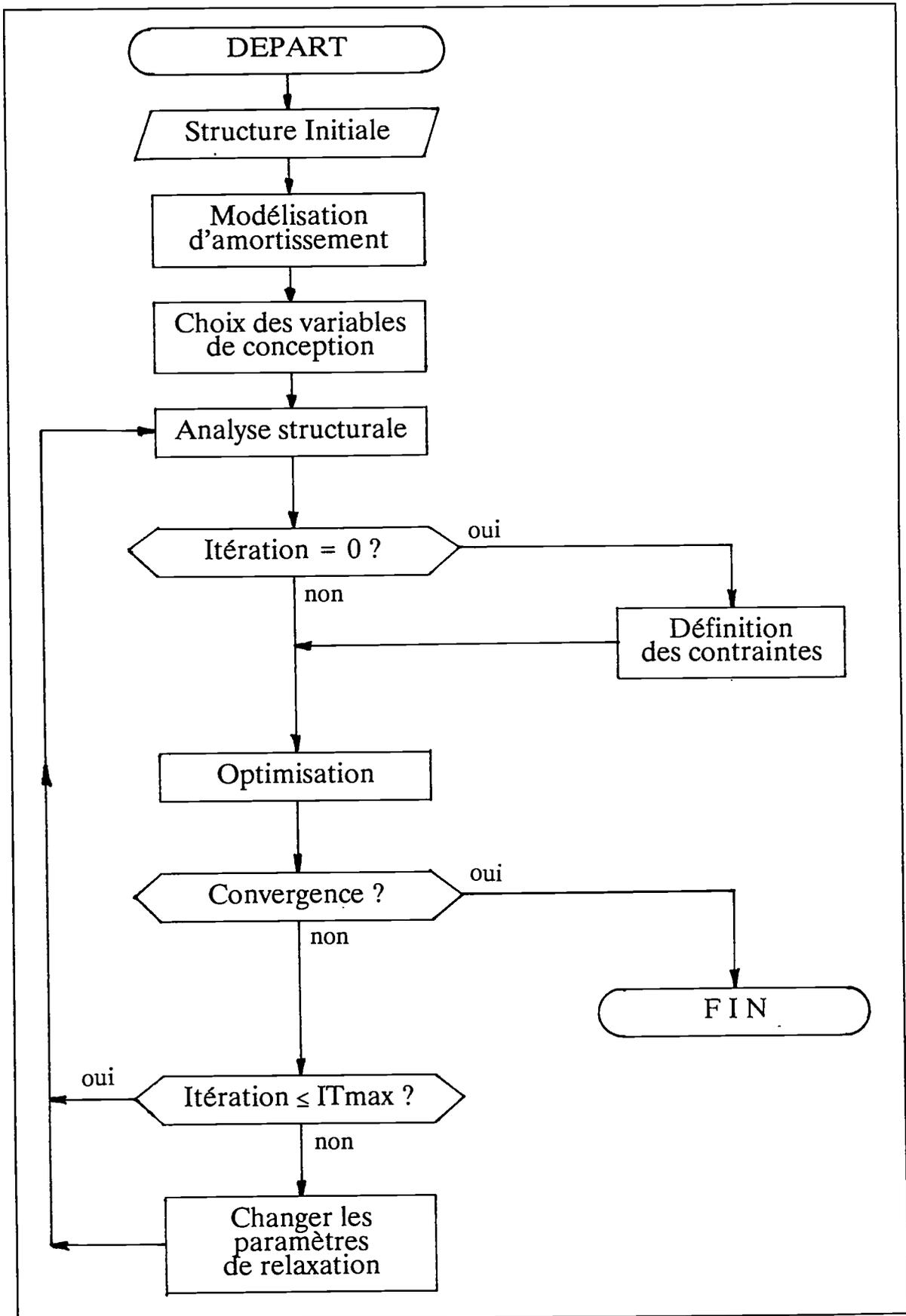


Figure 3.3 Organigramme de l'algorithme développé au chapitre III

### Chapitre III

Tableau 3.1 Caractéristiques des matériaux utilisés

Caractéristiques	Elastique	Viscoélastique
Module d'élasticité (N/m <sup>2</sup> )	7.0 E+10	2.0 E+09
Densité (kg/m <sup>3</sup> )	2700.00	1750.00
Facteur de perte	0.00	0.50

Les trois premières fréquences des structures étudiées sont présentées au tableau 3.2 et tableau 3.3.

Tableau 3.2 Trois premières fréquences de la poutre initiale

Mode	Partie réelle	Partie imaginaire
Premier	-3,998	0,180E+03
Deuxième	-24,990	0,113E+04
Troisième	-69,989	0,316E+04

Tableau 3.3 Trois premières fréquences du portique initial

Mode	Partie réelle	Partie imaginaire
Premier	-6,932	0,313E+03
Deuxième	-22,152	0,100E+04
Troisième	-53,641	0,242E+4

#### III.5.1 CAS D'UNE POUTRE CONSOLE

Afin de tester la méthode proposée, nous définissons cinq problèmes d'optimisation :

Problème A1

On se limite au problème d'optimisation avec une seule contrainte. Ainsi on impose à la partie réelle de la première fréquence d'être multipliée par deux en conservant la valeur initiale de sa partie imaginaire.

Problème A2

On impose à la partie réelle de la deuxième fréquence d'être multipliée par deux en conservant la valeur initiale de sa partie imaginaire.

Problème A3

On impose comme contrainte que la partie réelle de la troisième fréquence soit multipliée par deux en conservant la valeur initiale de sa partie imaginaire.

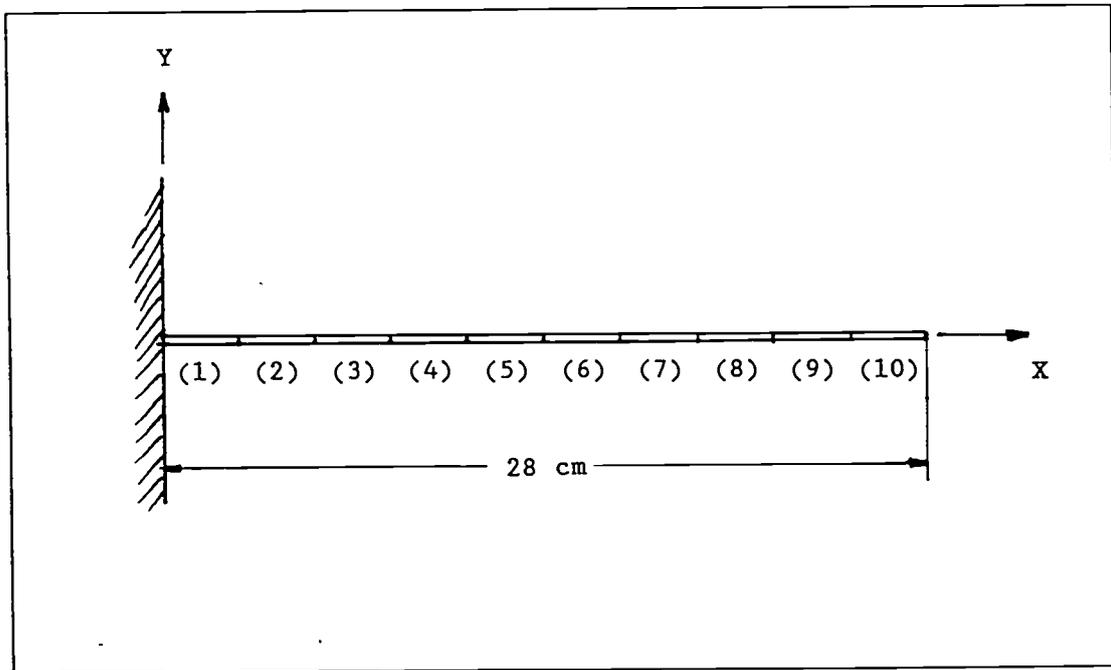


Figure 3.4 Poutre console

Problème A4

On traite le problème d'optimisation en présence de contraintes sur les deux premiers modes. On impose en même temps les contraintes des problèmes A1 et A2.

**Problème A5**

On traite le problème d'optimisation en présence de contraintes sur les trois premiers modes. Ainsi on impose à la fois les contraintes des problèmes A1, A2 et A3.

**III.5.2 CAS D'UN PORTIQUE BI-ENCASTRE**

Dans le cas du portique bi-encastré, nous définissons également cinq problèmes d'optimisation.

**Problème B1**

On se limite au problème d'optimisation avec une seule contrainte. Ainsi on impose que la partie réelle de la première fréquence soit augmentée de 50 pour cent en conservant la valeur initiale de sa partie imaginaire.

**Problème B2**

On impose que la partie réelle de la deuxième fréquence soit augmentée de 50 pour cent en conservant la valeur initiale de sa partie imaginaire.

**Problème B3**

On impose comme contrainte que la partie réelle de la troisième fréquence soit augmentée de 50 pour cent en conservant la valeur initiale de sa partie imaginaire.

**Problème B4**

On traite le problème d'optimisation en présence de contraintes sur les deux premiers modes. Ainsi, on impose à la fois les contraintes des problèmes B1 et B2.

**Problème B5**

Dans le cinquième problème, on traite le problème d'optimisation en présence de contraintes sur les trois premiers modes. Ainsi, on impose à la fois les contraintes des problèmes B1, B2 et B3.

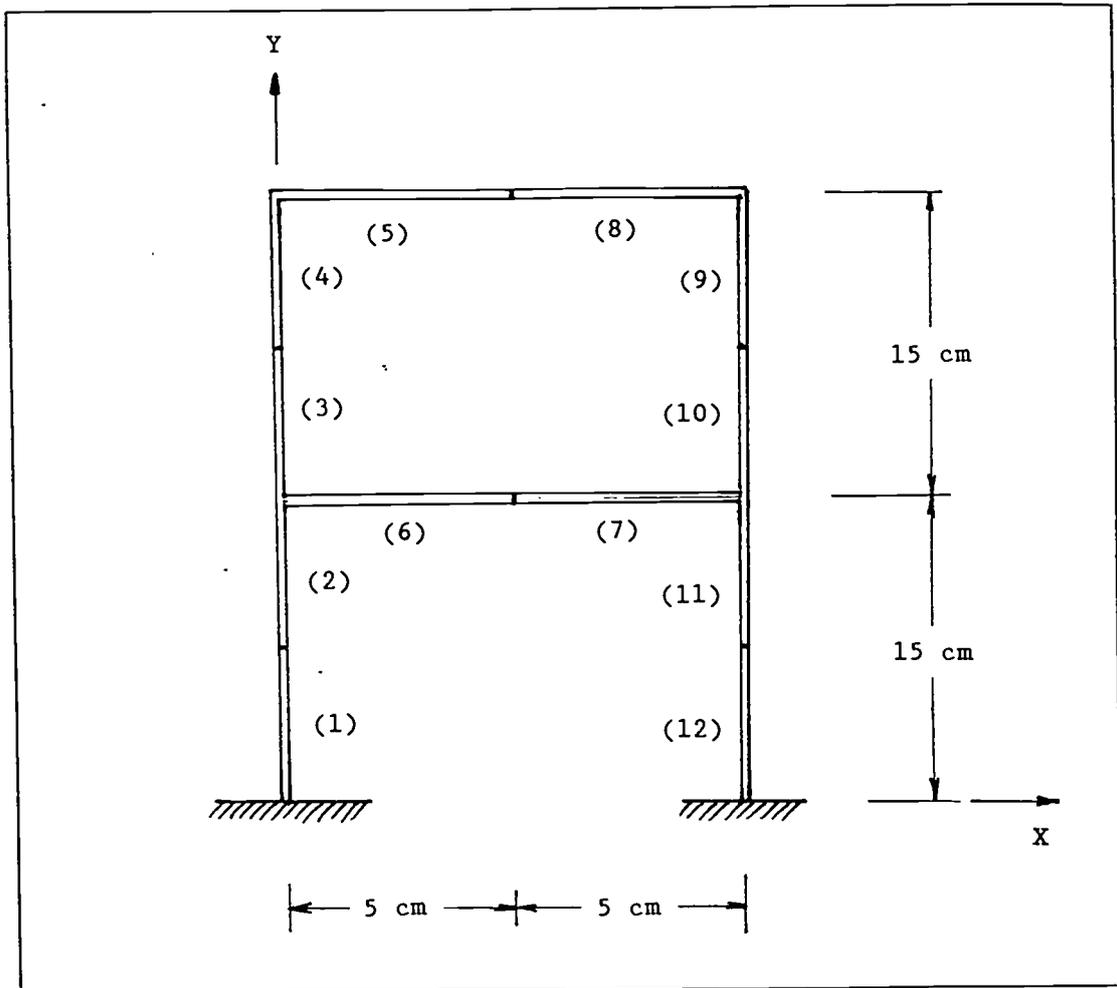


Figure 3.5 Portique bi-encasté

Tableau 3.4a Partie réelle des trois premières fréquences de la poutre

PROBLEME	MODE 1	MODE 2	MODE 3
Initial	-3,998	-24,990	-69,989
Problème A1	-7,984	-22,524	-48,313
Problème A2	-5,561	-50,025	-103,419
Problème A3	-5,142	-37,253	-140,243
Problème A4	-7,998	-50,032	-104,409
Problème A5	-7,953	-50,738	-142,204

Tableau 3.4b Partie imaginaire des trois premières fréquences de la poutre

PROBLEME	MODE 1	MODE 2	MODE 3
Initial	0,180E+03	0,113E+04	0,316E+04
Problème A1	0,180E+03	0,612E+03	0,159E+04
Problème A2	0,125E+03	0,113E+04	0,239E+04
Problème A3	0,116E+03	0,841E+04	0,316E+04
Problème A4	0,181E+03	0,113E+04	0,241E+04
Problème A5	0,182E+03	0,115E+04	0,319E+04

### III.6 RESULTATS ET DISCUSSION

Les fréquences initiales et la conception optimale des structures étudiées sont présentées au tableau 3.4 et 3.5. La distribution de matière pour la poutre d'origine est donnée en Fig. 3.6 et pour le portique en Fig. 3.12.

Les distributions de matière sont, pour chaque cas étudié, présentées en Figs. 3.7 à 3.11 pour la poutre console, et en Figs. 3.13 à 3.17 pour le portique. La valeur du paramètre de relaxation  $\alpha$  est prise entre 0.70 et 0.85. On a ainsi des meilleurs résultats en notion du nombre d'itérations avant la convergence.

L'évolution du poids de la structure étudiée est donnée pour chaque cas en Fig. 3.18 en ce qui concerne la poutre console et en Fig. 3.19 pour le portique bi-encasté. On constate que l'algorithme développé donne, en général, une vitesse de convergence assez rapide.

Chapitre III

Tableau 3.5a Partie réelle des trois premières fréquences du portique

PROBLEME	MODE 1	MODE 2	MODE 3
Initial	-6,932	-22,152	-53,641
Problème B1	-10,541	-21,307	-39,594
Problème B2	-4,998	-33,215	-60,643
Problème B3	-7,754	-26,301	-80,507
Problème B4	-10,401	-33,252	-56,741
Problème B5	-10,427	-33,539	-80,541

Tableau 3.5b Partie imaginaire des trois premières fréquences du portique

PROBLEME	MODE 1	MODE 2	MODE 3
Initial	0,313E+03	0,100E+04	0,242E+4
Problème B1	0,316E+03	0,640E+03	0,119E+4
Problème B2	0,176E+03	0,100E+04	0,185E+04
Problème B3	0,234E+03	0,795E+04	0,243E+4
Problème B4	0,314E+03	0,100E+04	0,170E+4
Problème B5	0,313E+03	0,101E+04	0,242E+4

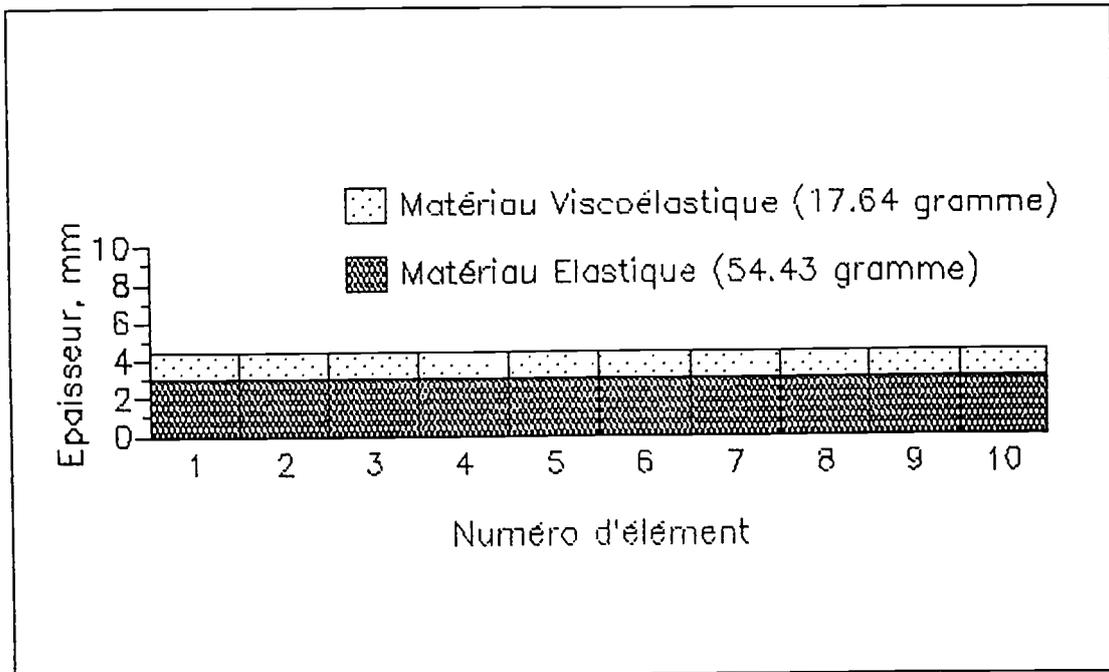


Figure 3.6 Distribution de matière de la poutre d'origine

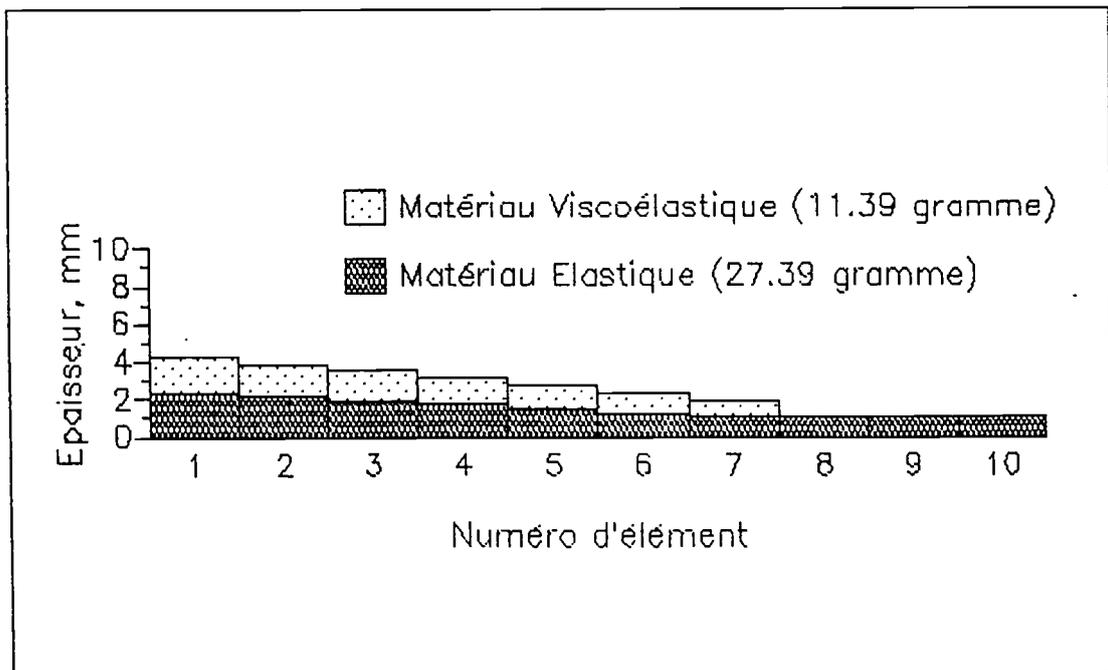


Figure 3.7 Distribution de matière du problème A1

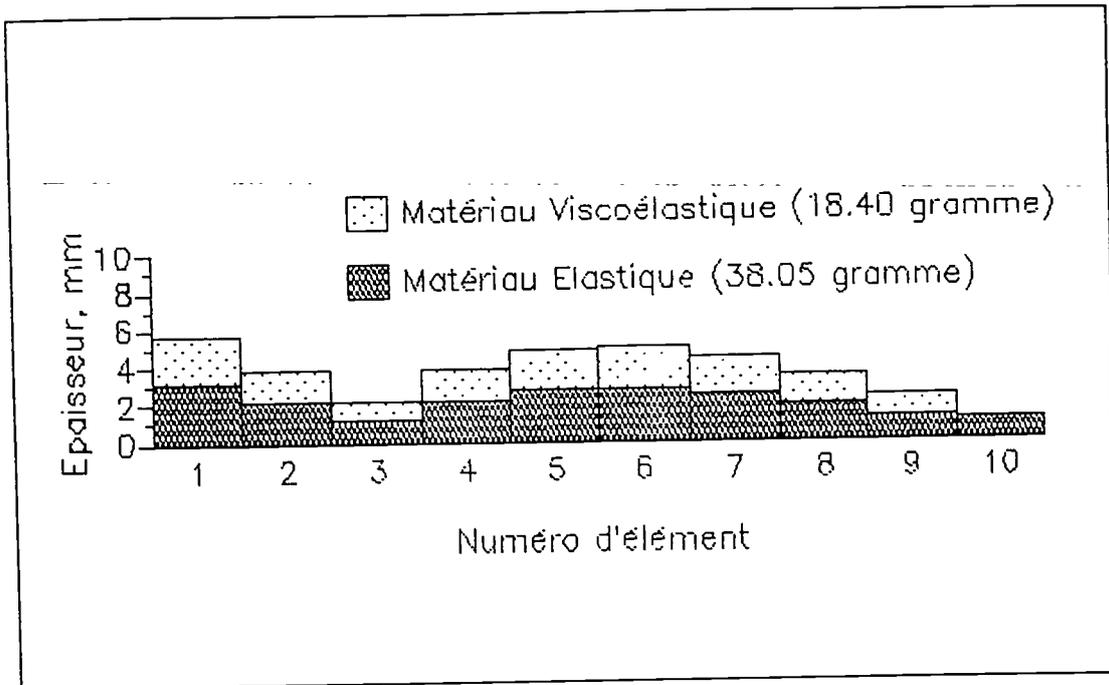


Figure 3.8 Distribution de matière du problème A2

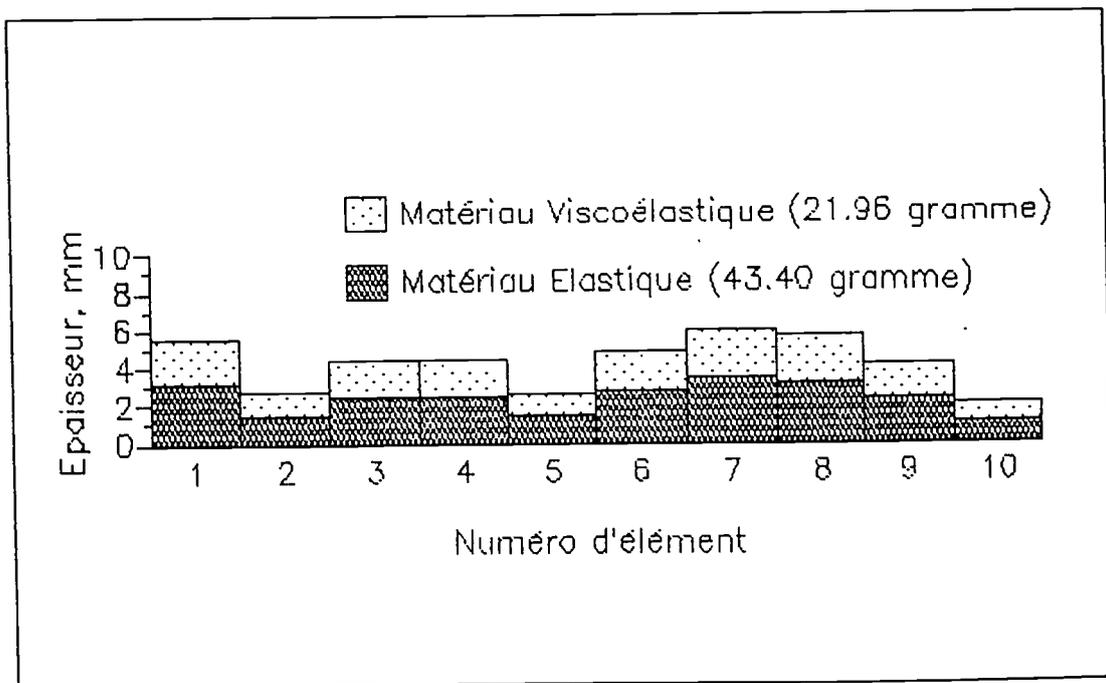


Figure 3.9 Distribution de matière du problème A3

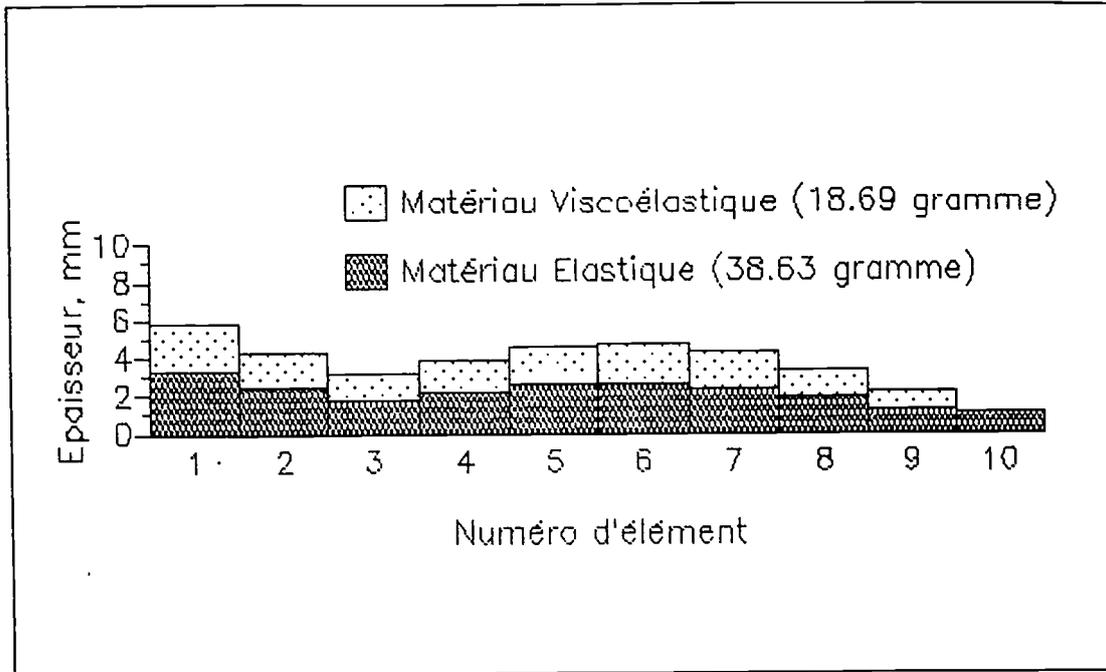


Figure 3.10 Distribution de matière du problème A4

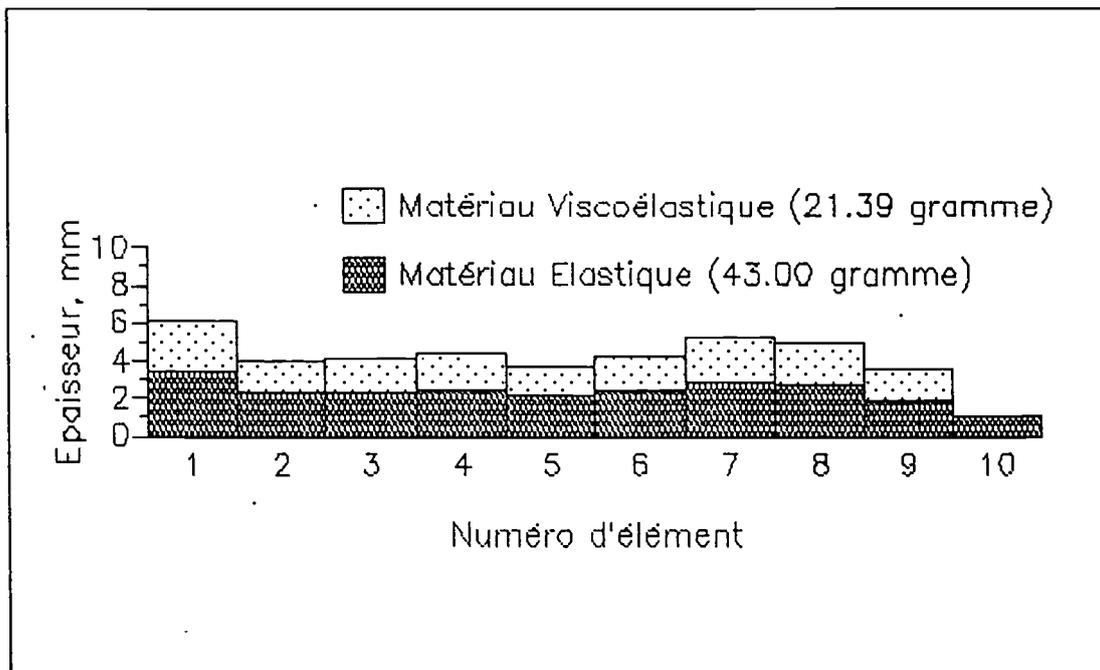


Figure 3.11 Distribution de matière du problème A5

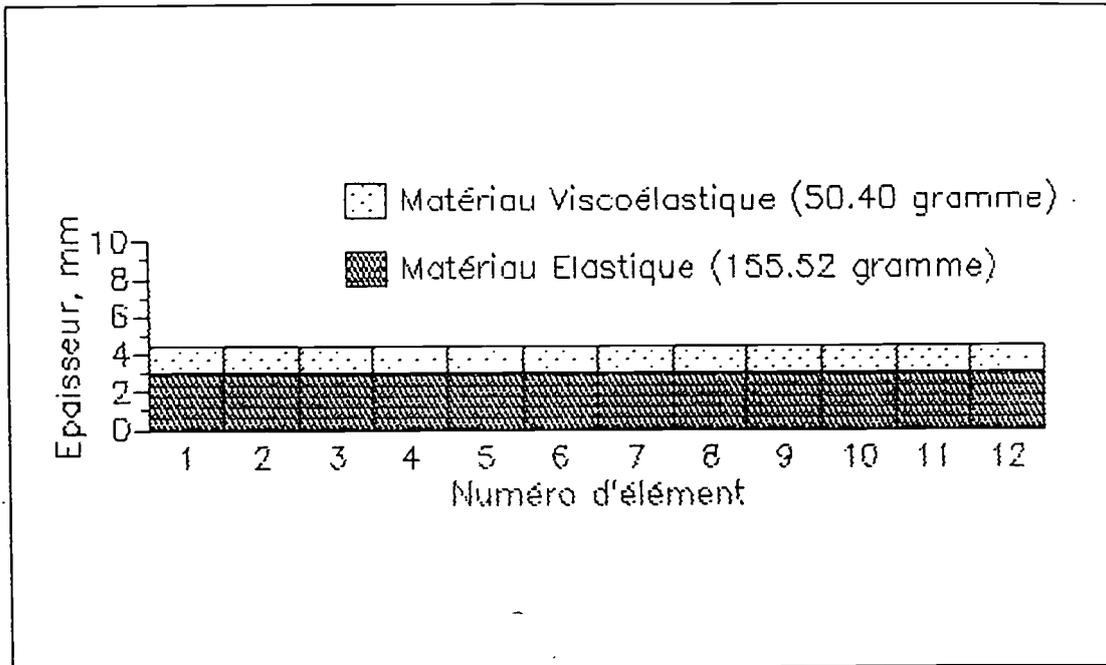


Figure 3.12 Distribution de matière du portique d'origine

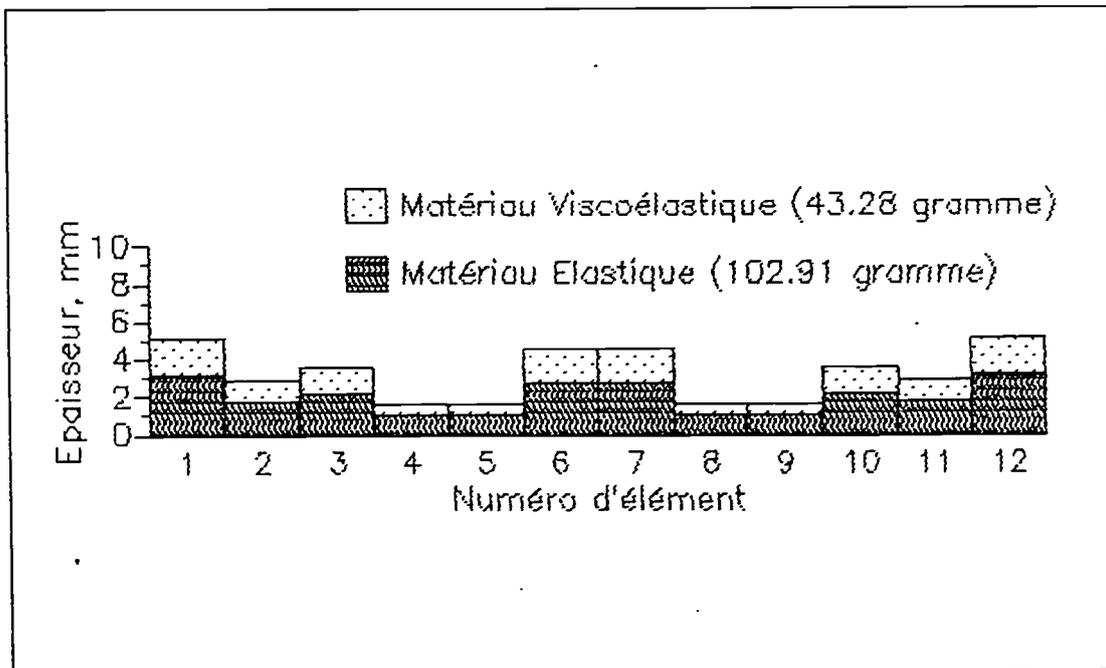


Figure 3.13 Distribution de matière du problème B1

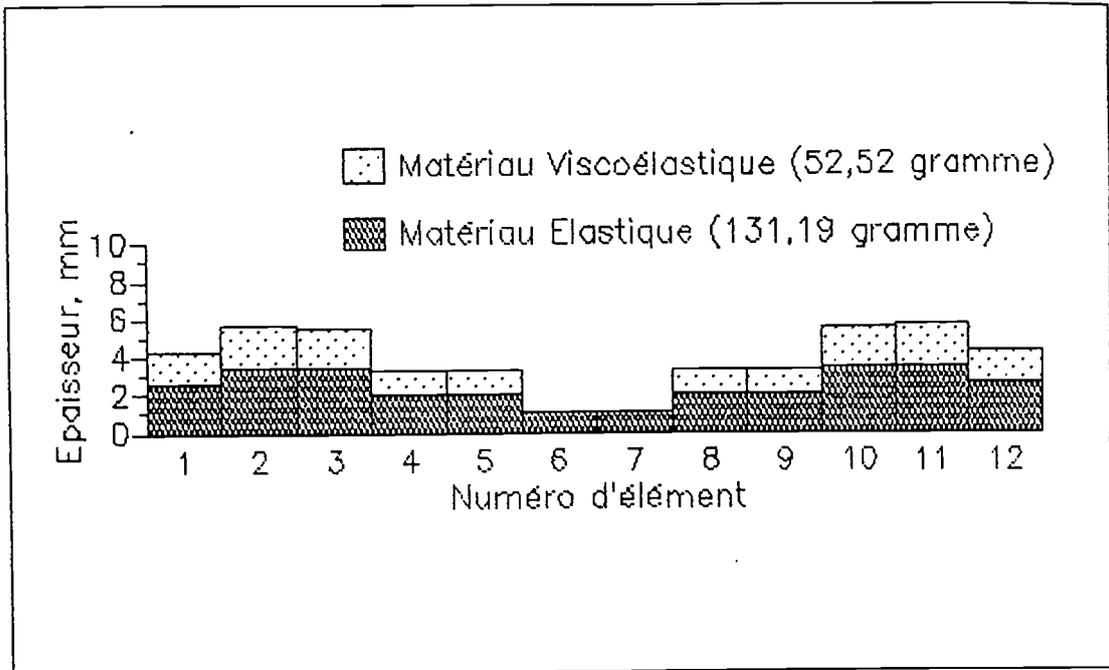


Figure 3.14 Distribution de matière du problème B2

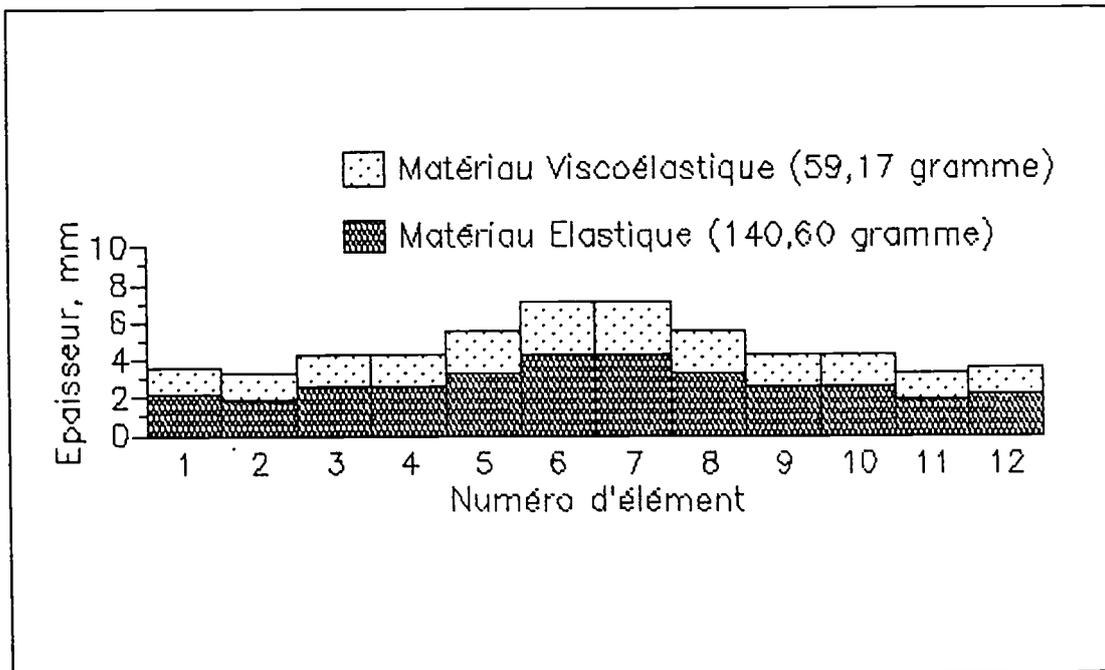


Figure 3.15 Distribution de matière du problème B3

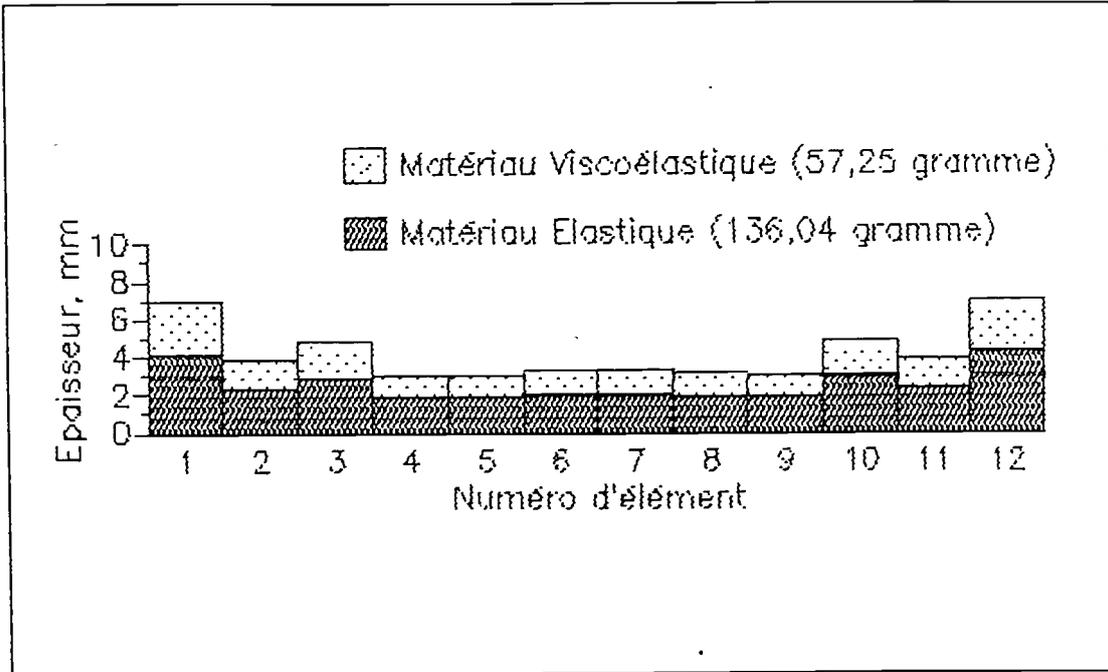


Figure 3.16 Distribution de matière du problème B4

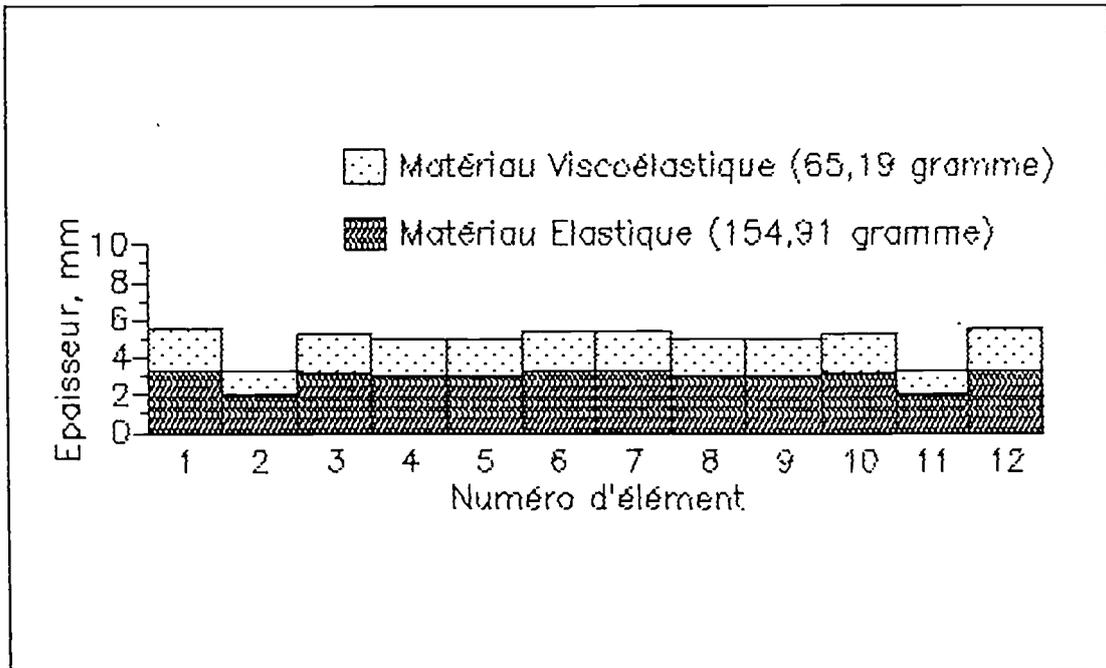


Figure 3.17 Distribution de matière du problème B5

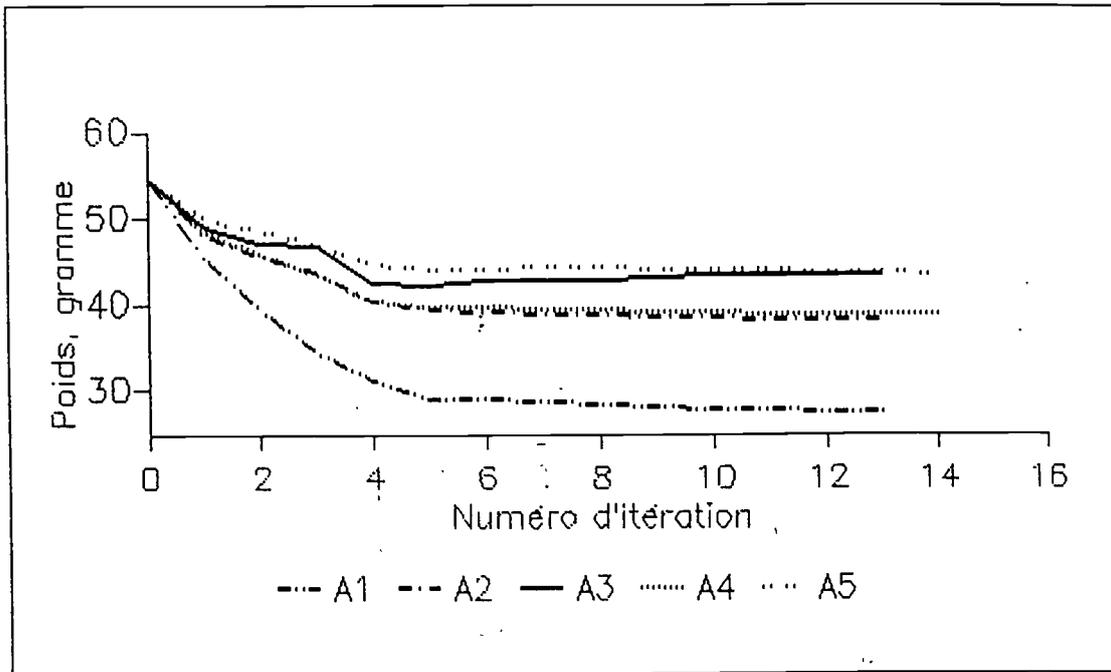


Figure 3.18a Evolution du poids élastique de la poutre au cours des itérations

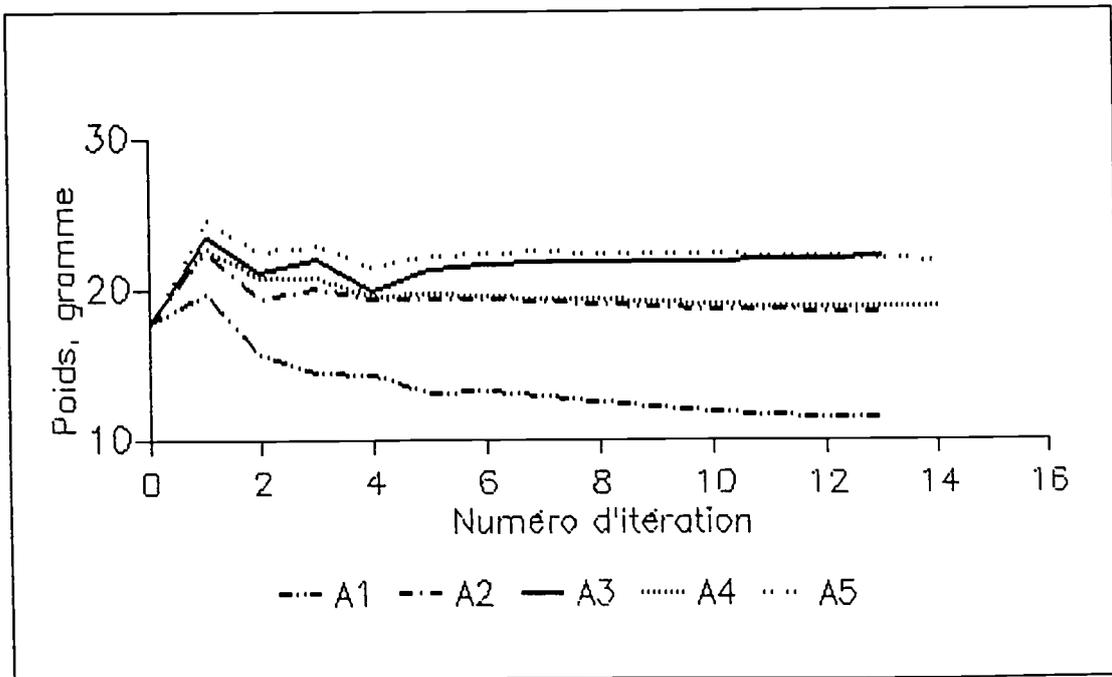


Figure 3.18b Evolution du poids viscoélastique de la poutre au cours des itérations

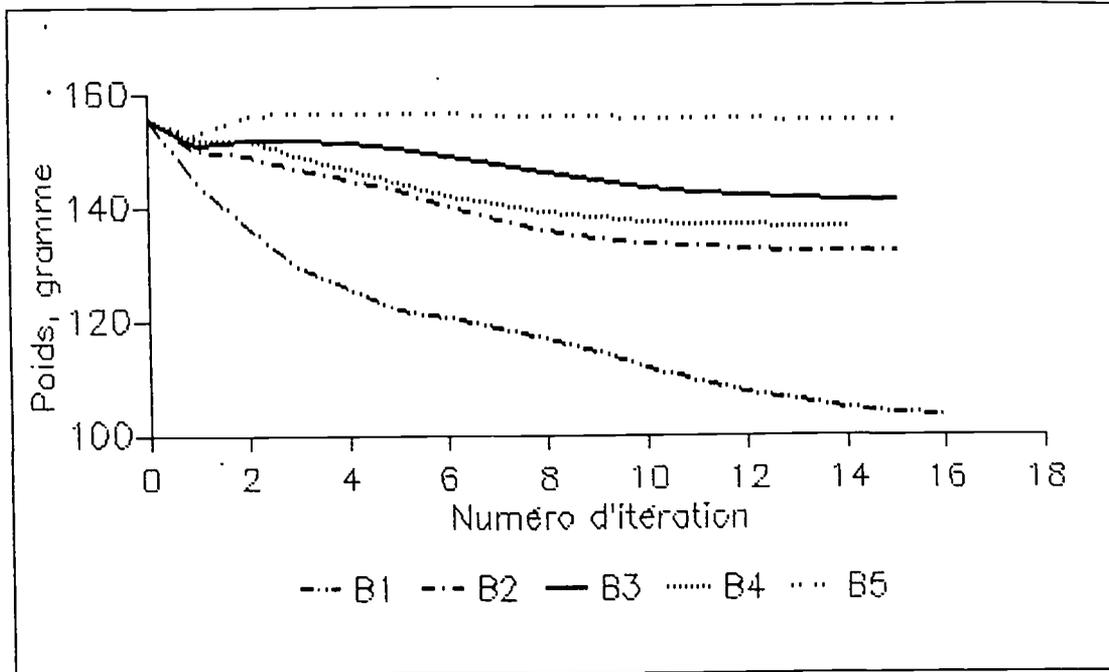


Figure 3.19a Evolution du poids élastique du portique au cours des itérations

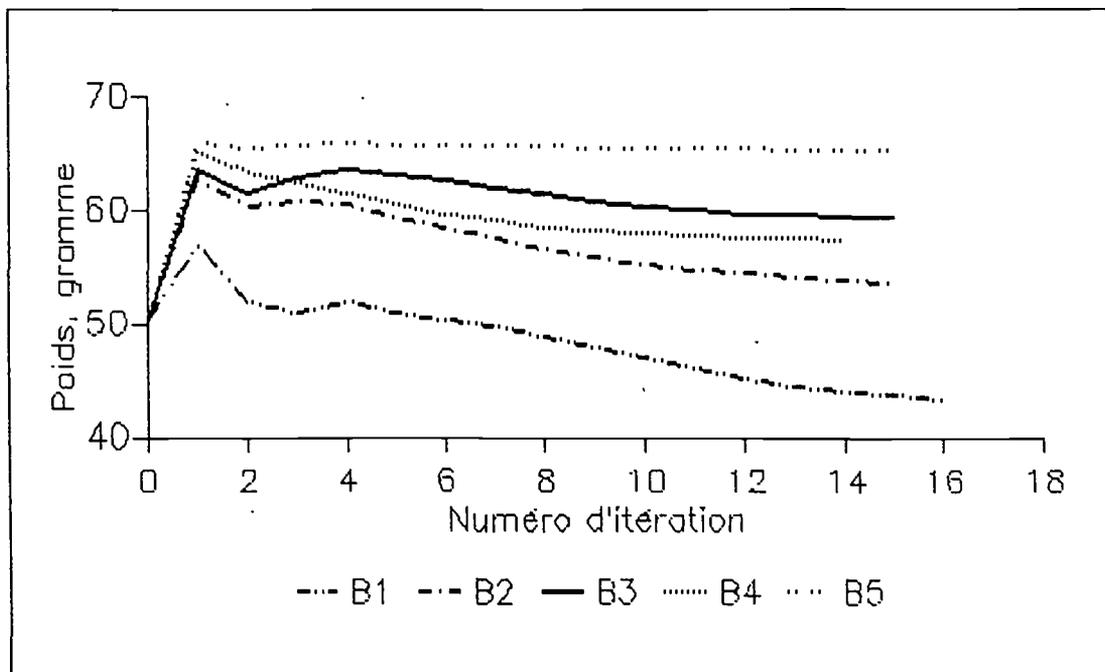


Figure 3.19b Evolution du poids viscoélastique du portique au cours des itérations



## CHAPITRE IV

### CONTROLE ACTIF DES STRUCTURES

#### IV.1 ANALYSE STRUCTURALE

Bien qu'il soit possible d'effectuer une analyse complète d'un système dynamique, celle-ci nous conduit souvent à une analyse très compliquée et nous donne beaucoup d'informations non désirées. On cherche alors un modèle mathématique simplifié du système et, quand on effectue l'analyse, on obtient les informations souhaitées le plus économiquement possible et avec une précision acceptable. Obtenir un modèle mathématique simple représentant les caractéristiques d'un système réel n'est pas facile, étant donné que le modèle doit donner des informations réalistes et utilisables.

Cependant, pour modéliser un système réel, on peut faire une ou plusieurs simplifications. Par exemple, une masse répartie peut être considérée comme une masse discrète, on peut négliger l'effet de l'amortissement du système en particulier si on s'intéresse uniquement aux fréquences de résonances ou si la réponse dynamique étudiée a une fréquence très différente des fréquences de résonance. Une raideur non-linéaire peut être considérée comme linéaire dans un certain domaine, quelques éléments ou forces peuvent être complètement négligés si leurs effets sont très petits et on peut considérer le mouvement d'une masse dans les directions qui nous intéressent. Ainsi, un modèle est généralement un compromis entre une représentation simple, facile à analyser mais qui donne peut-être des informations moins précises et un modèle réaliste, compliqué et difficile à analyser mais dont les informations sont plus précises.

L'analyse modale d'une structure correspond à une discrétisation du système continu à l'aide d'un nombre fini de modes. Dans le cadre du contrôle vibratoire des structures, on distingue deux types de modes, les modes contrôlés et les modes résiduels (modes non-contrôlés). La diminution du nombre de modes contrôlés peut produire des instabilités (spillover effect). La méthode de contrôle modal découplé (Independent Modal-Space Control, IMSC) permet d'éviter cette difficulté majeure. En effet, les différents modes sont contrôlés indépendamment, ainsi on contrôle un ensemble d'équations différentielles du second-ordre en parallèle. Cette stratégie

apparaît ainsi très aisée à mettre en oeuvre et est proposée pour la première fois par Meirovitch et Baruh, [B13]

## IV.2 CONTROLE MODAL

### IV.2.1 EQUATION DU MOUVEMENT MODAL

Dans l'hypothèse d'un amortissement purement visqueux, les équations du mouvement du système discret obtenues par la méthode de Rayleigh-Ritz s'écrivent :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{P(t)\} + \{E(t)\} \quad (IV.1)$$

où  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur. Le vecteur  $\{U\}$  rassemble les déplacements nodaux. Les vecteurs  $\{P(t)\}$  et  $\{E(t)\}$  sont respectivement les vecteurs forces de contrôle et d'excitation.

Exprimons le mouvement de la structure dans la base des modes propres réels, qui sont solutions du système homogène suivant :

$$\omega^2[M]\{X\} - [K]\{X\} \quad (IV.2)$$

Les valeurs propres et vecteurs propres associés sont notés :

$$\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$$

$$\{X\}_1, \{X\}_2, \dots, \{X\}_n$$

En utilisant la base modale, on introduit l'expression fondamentale suivante :

$$\{U\} = \sum_{r=1}^N \{X\}_r \{u(t)\}_r = [\Phi]\{u\} \quad (IV.3)$$

$\{u(t)\}$  est le vecteur des coordonnées modales et  $[\Phi]$  la matrice modale. En outre, on rappelle que la transformation (IV.3) diagonalise les matrices de masse et de raideur. On a, en effet, les relations d'orthogonalité suivantes :

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = \Gamma_m \quad \text{matrice diagonale (N \times N) des masses généralisées}$$

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = \Gamma_k \quad \text{matrice diagonale (N \times N) des raideurs généralisées}$$

## Chapitre IV

En général, la transformation (IV.3) ne diagonalise pas la matrice d'amortissement et la matrice d'amortissement modale  $[c]$  est pleine:

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = [c]$$

Après avoir utilisé la transformation (IV.3) dans l'équation (IV.1) et multiplié à gauche par  $[\Phi]^T$ , on obtient le système des équations modales du mouvement, soit :

$$[m_J](\ddot{u}) + [c](\dot{u}) + [k_J](u) = \{p\} + \{e\} \quad (\text{IV.4})$$

avec

$$\{p\} = [\Phi]^T \{P\} \quad \text{vecteur des forces généralisées de contrôle}$$

$$\{e\} = [\Phi]^T \{E\} \quad \text{vecteur des forces généralisées d'excitation}$$

Si les termes d'amortissement sont petits et si les fréquences propres sont suffisamment séparées, on peut, pour le calcul, de la réponse ne retenir que les termes diagonaux de la matrice d'amortissement. Le système des équations modales du mouvement (IV.4) se ramène alors à  $N$  équations différentielles découplées :

$$[m_J](\ddot{u}) + [c_J](\dot{u}) + [k_J](u) = \{p\} + \{e\} \quad (\text{IV.5})$$

soit pour le  $r$ -ième mode :

$$\ddot{u}_r + 2\zeta_r \omega_r \dot{u}_r + \omega_r^2 u_r = \{p_r\}/m_r + \{e_r\}/m_r \quad (\text{IV.6})$$

$p_r(t)$  est la force généralisée de contrôle du  $r$ -ième mode et  $e_r(t)$  est la force généralisée d'excitation du  $r$ -ième mode.

Dans l'absence de forces d'excitation, l'équation (IV.6) peut s'écrire sous la forme d'une équation d'état. Dans ce but, on définit une variable  $v_r(t)$  par :

$$\dot{u}_r(t) = \omega_r v_r(t) \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{IV.7})$$

En introduisant le vecteur d'état modal à deux dimension  $\{w_r(t)\}$  et le vecteur force de contrôle modale associé  $w_r(t)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \{w(t)\}_r &= \{u_r(t) \quad v_r(t)\}^T \\ \{W(t)\}_r &= \{0 \quad f_r(t)/\omega_r\}^T \end{aligned} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{IV.8})$$

avec :  $f_r(t) = p_r(t)/m_r$ , les équations (IV.6) et (IV.7) peuvent être combinées sous la forme d'une équation modale d'état :

$$\{\dot{w}(t)\}_r = [A]_r \{w(t)\}_r + \{W(t)\}_r \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (IV.9)$$

avec :

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 0 & \omega_r \\ -\omega_r & -2\zeta_r \omega_r \end{bmatrix} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (IV.10)$$

## IV.2.2 CALCUL DES COMMANDES

En l'absence de forces de contrôle, l'équation (IV.9) apparait comme une série infinie d'équations différentielles indépendantes du second ordre. L'équation (IV.9) est couplée par la force de contrôle,  $w_r(t)$  car celle-ci dépend de tous les vecteurs d'état modaux. Dans le cas spécial où on impose à  $w_r(t)$  de ne dépendre que de  $w_r(t)$ ,

$$W_r = W_r(w_r) \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (IV.11)$$

chaque équation (IV.9) devient à nouveau découplée. L'équation (IV.11) signifie que la force modale du r-ième mode est calculée simplement en fonction du vecteur d'état modal du mode associé. Cette simplification est le point essentiel de la méthode de Contrôle Modal (Independent Modal-Space Control Method). Cette méthode de Contrôle Modal peut être appliquée dans les cas linéaires et non-linéaires.

Dans un cas de contrôle linéaire, la commande optimale se calcule facilement. Considérons le cas du Contrôle Modal proportionnel suivant :

$$\{W(t)\}_r = [G]_r \{w(t)\}_r \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (IV.12)$$

avec

$$[G]_r = \begin{bmatrix} g_{r11} & g_{r12} \\ g_{r21} & g_{r22} \end{bmatrix} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (IV.13)$$

$[G]_r$  est la matrice de gain modale. En introduisant l'équation (IV.8) dans l'équation (IV.13), on obtient

### Chapitre IV

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{f}/\omega \end{array} \right\}_r = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{g}_{r11}\mathbf{u}_r + \mathbf{g}_{r12}\mathbf{v}_r \\ \mathbf{g}_{r21}\mathbf{u}_r + \mathbf{g}_{r22}\mathbf{v}_r \end{array} \right\} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{IV.14})$$

qui peut être satisfaite si et seulement si  $\mathbf{g}_{r11} = \mathbf{g}_{r12} = 0$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ), et la matrice de gain modale doit avoir la forme spéciale suivante :

$$[\mathbf{G}]_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{g}_{r21} & \mathbf{g}_{r22} \end{bmatrix} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{IV.15})$$

Cette relation est proposée par Meirovitch et Öz [B14]. Compte tenu de la relation (IV.7), l'équation (IV.14) nous donne

$$\mathbf{f}_r(t) = \omega_r[\mathbf{g}_{r21}\mathbf{u}_r(t) + \mathbf{g}_{r22}\mathbf{v}_r(t)] = \mathbf{g}_{r21}\omega_r\mathbf{u}_r(t) + \mathbf{g}_{r22}\dot{\mathbf{u}}_r(t) \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{IV.16})$$

On obtient ainsi la force modale de contrôle  $\mathbf{f}_r(t)$  en fonction du déplacement modal  $\mathbf{u}_r(t)$  et de la vitesse modale  $\dot{\mathbf{u}}_r(t)$ . Dans le cas d'un contrôle optimal, les gains  $\mathbf{g}_{r21}$  et  $\mathbf{g}_{r22}$  se déterminent en minimisant le critère quadratique suivant :

$$J = \sum_{r=1}^N J_r \quad (\text{IV.17})$$

avec

$$J_r = (\mathbf{w}_r(t_f) - \hat{\mathbf{w}}_r)^T [\mathbf{H}]_r (\mathbf{w}_r(t_f) - \hat{\mathbf{w}}_r) + \int_0^{t_f} [(\mathbf{w}_r)^T [\mathbf{Q}]_r (\mathbf{w}_r) + (\dot{\mathbf{w}}_r)^T [\mathbf{R}]_r (\dot{\mathbf{w}}_r)] dt \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{IV.18})$$

$J_r$  est l'indice de performance pour le  $r$ -ième mode,  $t_f$  est le temps final,  $\hat{\mathbf{w}}_r$  est l'état final désiré, les matrices  $[\mathbf{H}]_r$  et  $[\mathbf{Q}]_r$  sont des matrices de pondération semi-définies-positives et la matrice  $[\mathbf{R}]_r$  est une matrice de pondération définie-positive. Comme le vecteur  $\mathbf{w}_r(t)$  ne dépend que de  $\mathbf{w}_r(t)$ , les indices de performance modaux  $J_r$  sont indépendants et la minimisation de l'indice de performance total  $J$  se fait en minimisant les  $J_r$  indépendamment.

On considère un problème de régulation associé à la condition  $\hat{\mathbf{w}}_r = 0$ . On prend en plus  $\mathbf{H}_r = 0$  et  $\mathbf{Q}_r = \omega_r^2 \mathbf{I}$ . Ce choix nous permet d'interpréter la minimisation de l'indice de performance  $J_r$  comme étant un processus réduisant le

## Chapitre IV

vecteur d'état à l'aide d'efforts de contrôle modérés n'augmentant pas l'Hamiltonien du système en boucle-ouverte, [B14]. L'Hamiltonien du système peut s'écrire sous la forme :

$$\kappa = \sum_{r=1}^N \kappa_r \quad (\text{IV.19})$$

avec

$$\kappa_r = 1/2 \omega_r^2 w_r^T w_r \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{IV.20})$$

$\kappa_r$  est l'Hamiltonien du r-ième mode.

Öz et Meirovitch ont montré que la matrice de gain  $[G]_r$  donnée par l'équation (IV.15) impose une matrice de pondération  $[R]_r$  de la forme :

$$[R]_r = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & \mathfrak{R}_r \end{bmatrix} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{IV.21})$$

La minimisation de  $J_r$ , défini en équation (IV.18), sous la contrainte (IV.9) nous conduit au problème suivant :

$$\dot{w}(t)_r = - [R]_r^{-1} [S(t)]_r w(t)_r \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{IV.22})$$

où la matrice  $[S(t)]_r$  doit satisfaire l'équation matricielle de Riccati :

$$\dot{[S]}_r = - [S]_r [A]_r - [A]_r^T [S]_r - [Q]_r + [S]_r [R]_r^{-1} [S]_r \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{IV.23})$$

avec la condition aux limites  $[S(t_f)]_r = [H]_r = 0$ . En introduisant les valeurs de  $[A]_r$ ,  $[Q]_r$  et  $[R]_r$ , l'équation (IV.23) peut s'écrire explicitement sous la forme scalaire suivante :

$$\begin{aligned} \dot{s}_{11} &= \omega_r^{-2} \mathfrak{R}_r^{-1} s_{12}^2 + 2\omega_r s_{11} - \omega_r^2 \\ \dot{s}_{12} &= -\omega_r s_{11} + 2\zeta_r \omega_r s_{12} + \omega_r^{-2} \mathfrak{R}_r^{-1} s_{12} s_{22} + w_r s_{22} \\ \dot{s}_{21} &= -\omega_r s_{11} + 2\zeta_r \omega_r s_{12} + \omega_r^{-2} \mathfrak{R}_r^{-1} s_{12} s_{22} + w_r s_{22} \\ \dot{s}_{22} &= -2\omega_r s_{12} + 4\zeta_r \omega_r + \omega_r^{-2} \mathfrak{R}_r^{-1} s_{22}^2 - \omega_r^2 \end{aligned} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{IV.24})$$

où  $s_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) sont les éléments de la matrice  $[S]_r$ .

On s'intéresse à la solution stationnaire de l'équation de Riccati. On a donc  $\dot{s}_{11} = \dot{s}_{12} = \dot{s}_{21} = \dot{s}_{22} = 0$  dans l'équation (IV.24), et en introduisant la notation  $[R_r] = \omega_r^2 [\hat{R}_r]$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ), on obtient trois équations algébriques non-linéaires dont les solutions sont données par :

$$\begin{aligned} s_{12} &= s_{21} = \omega_r^2 \{-\omega_r \hat{x}_r + T_r\} \\ s_{22} &= \omega_r^2 \{-2\zeta_r \omega_r \hat{x}_r + [4\zeta_r^2 \omega_r^2 \hat{x}_r^2 + \hat{x}_r(1 + 2\omega_r(-\omega_r \hat{x}_r + T_r))]\}^{1/2} \\ s_{11} &= 2\zeta_r \omega_r^2 \{-\omega_r \hat{x}_r + T_r\} + s_{12}(\omega_r^{-1}(\omega_r^2 - \hat{x}_r^{-1})^{1/2}) \end{aligned} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (IV.25)$$

avec  $T_r = (\omega_r^2 \hat{x}_r^2 + \hat{x}_r)^{1/2}$ .

En considérant l'équation (IV.12), l'équation (IV.22) et l'équation (IV.25), on obtient :

$$\begin{aligned} [G]_r &= -[R]_r^{-1}[S]_r \\ g_{r11} &= g_{r12} = 0 \\ g_{r21} &= \omega_r - (\omega_r^2 + \hat{x}_r^{-1})^{1/2} \\ g_{r22} &= 2\zeta_r \omega_r - [4\zeta_r^2 \omega_r^2 + (2\omega_r(-\omega_r + (\omega_r^2 + \hat{x}_r^{-1})^{1/2})) + \hat{x}_r^{-1}]^{1/2} \end{aligned} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (IV.26)$$

Finalement, en injectant les éléments  $g_{r21}$  et  $g_{r22}$  de la matrice de gain  $[G]_r$  dans l'équation (IV.16), on obtient la force généralisée de contrôle :

$$\begin{aligned} f_r(t) &= \omega_r(\omega_r - (\omega_r^2 + \hat{x}_r^{-1})^{1/2})u_r(t) + \\ & (2\zeta_r \omega_r - [4\zeta_r^2 \omega_r^2 + (2\omega_r(-\omega_r + (\omega_r^2 + \hat{x}_r^{-1})^{1/2})) + \hat{x}_r^{-1}]^{1/2})\dot{u}_r(t) \end{aligned} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (IV.27)$$

Il est à noter que l'implantation de la méthode de Contrôle-Modal nécessite la connaissance du déplacement et de la vitesse généralisés,  $u_r(t)$  et  $\dot{u}_r(t)$  à chaque instant.

### IV.2.3 IMPLANTATION DU CONTROLE

La détermination de la force de contrôle réelle à partir de la force de contrôle généralisée  $f_r(t)$  donnée en (IV.27) dépend du type d'actionneurs utilisés. En

général, il y a trois grands types d'actionneurs. Le premier est du type réparti, le deuxième est du type discret et le troisième est du type semi-réparti. Les actionneurs du type réparti donnent des forces de contrôle distribuées sur la structure. C'est une situation idéale mais très difficile à réaliser dans la pratique. Par sa simplicité de mise en oeuvre, le deuxième type d'actionneur a beaucoup d'applications : hydraulique, vérins, câbles, etc. Le troisième type d'actionneurs est une application des matériaux piézo-électriques permettant de contrôler des structures légères, [B7].

### IV.3 MATERIAUX PIEZO-ELECTRIQUES

Les matériaux piézo-électriques sont des matériaux qui subissent des déformations quand on leur applique une tension électrique. Depuis l'implantation des techniques du contrôle actif, l'utilisation des matériaux piézo-électriques comme actionneurs semi-répartis est de plus en plus répandue, surtout pour les grandes structures légères. La taille de l'actionneur du type piézo-électrique est généralement petite et on peut les coller sur une structure sans l'alourdir. Dans ce sous-chapitre, on développe un modèle analytique des actionneurs piézo-électriques semi-répartis collés sur une partie de la structure.

#### IV.3.1 MODELES STATIQUES DE COUPLAGE PIEZO-ELECTRIQUE/STRUCTURE

Deux modèles de couplage seront présentés. Le premier modèle suppose qu'il existe une certaine épaisseur de couche de liant (couche de colle) élastique entre les actionneurs et la structure, voir fig. 4.1. Le deuxième modèle suppose que le couplage entre les actionneurs et la structure est parfait, c'est à dire qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre les actionneurs et la structure.

La figure 4.1 montre deux éléments piézo-électriques collés sur une structure élastique. Les flèches montrées sur la figure indiquent le signe des tensions électriques qui provoquent la dilatation des piézo-électriques. Si une tension électrique est appliquée avec le signe défini dans la figure, la structure se déforme en extension. Si les signes des tensions des deux piézo-électriques sont opposés, la structure se déforme en flexion.

Afin d'obtenir les équations qui gouvernent le couplage entre les piézo-électriques et la structure, on examine l'état d'équilibre d'un petit élément entouré par les traits en fig. 4.1. Sous l'hypothèse que l'on a, dans la couche de colle, un état de contrainte de cisaillement pur et mono-dimensionnel et que l'on a, dans les piézo-

électrique et la structure, un état de contrainte en traction-compression pur, les relations entre les déformations et les déplacements s'écrivent :

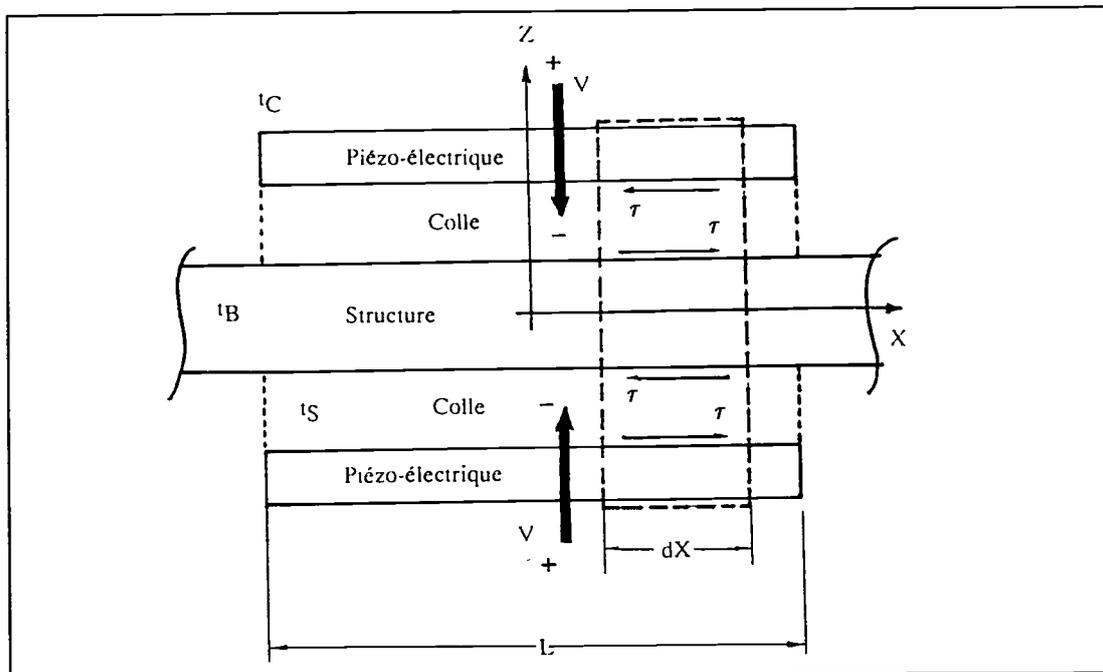


Figure 4.1 Géométrie d'un couplage piézo-électrique/structure

$$\epsilon_C = \frac{dU_C}{dx} = U_C' \quad (\text{IV.28})$$

$$\epsilon_B^S = \frac{dU_B^S}{dx} = U_B^{S'} \quad (\text{IV.29})$$

$$\gamma = \frac{U_C - U_B^S}{t_S} \quad (\text{IV.30})$$

$\epsilon$ ,  $U$  et  $t$  sont respectivement la déformation, le déplacement et l'épaisseur. Les indices B, C et S représentent respectivement la structure, le piézo-électrique et la couche de colle, tandis que l'exposant s indique la surface de la structure et  $x$  la coordonnée du centre des piézo-électriques.

Dans la cinématique associée à la flexion, on suppose une distribution linéaire des déformations (variation du type Euler-Bernoulli), (figure. 4.2b). Pour le mouvement en traction-compression, la distribution des déformations est supposée

uniforme, (figure. 4.2a). Sous ces hypothèses, l'équation d'équilibre de l'élément étudié s'écrit :

$$\frac{d\sigma_C}{dx} - \frac{\tau}{t_C} = 0 \quad (\text{IV.31})$$

$$\frac{d\sigma_B^S}{dx} + \frac{\alpha\tau}{t_B} = 0 \quad (\text{IV.32})$$

$\sigma$  et  $\tau$  sont respectivement les contraintes de traction-compression et de cisaillement, et  $\alpha$  est un paramètre caractérisant la distribution des contraintes. Pour la distribution du type Euler-Bernoulli,  $\alpha = 6$  (figure 4.2b), et pour la distribution du type uniforme,  $\alpha = 2$  (figure 4.2a).

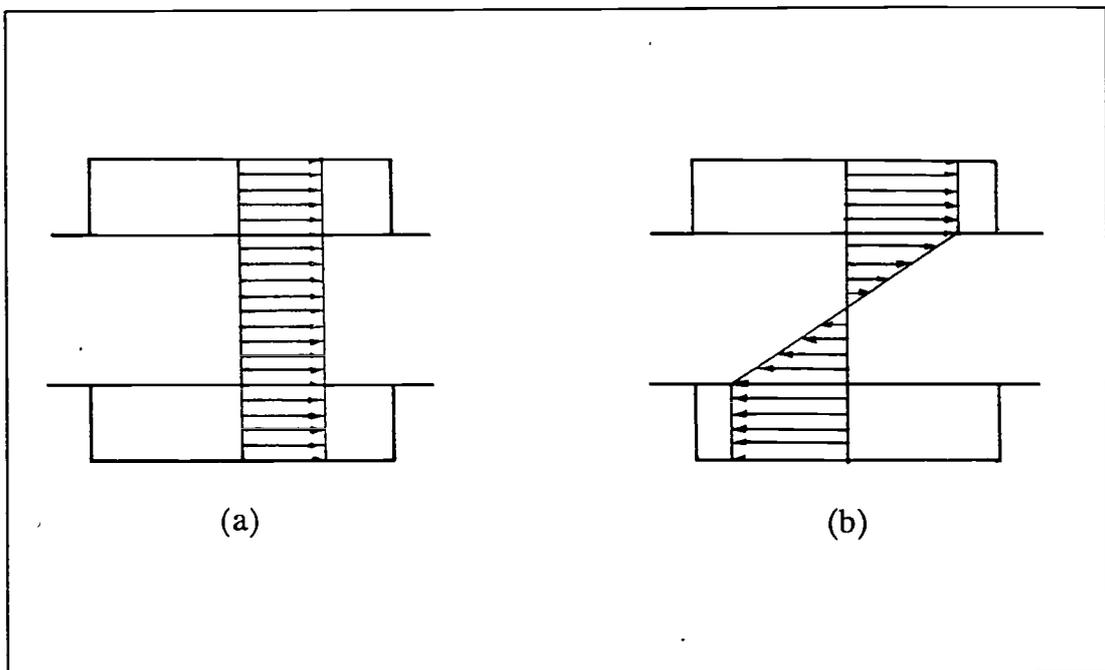


Figure 4.2 Hypothèse de distribution des déformations

Pour le matériau piézo-électrique, la relation de contrainte-déformation est semblable à celle d'un matériau thermoélastique [B7], le terme de dilatation thermique est remplacé par le terme de déformation piézo-électrique  $\Lambda$  et nous donne :

$$\sigma_C = E_C(\epsilon_C - \Lambda) \quad (\text{IV.33})$$

avec  $\Lambda = d_{31}v/t_C$

$v$  est la tension électrique appliquée sur le piézo-électrique et  $d_{31}$  est une constante piézo-électrique (module de piézo-électricité) reliant la tension électrique appliquée et la déformation. Pour la structure et la couche de colle, la loi de Hooke donne :

$$\sigma_B^S = E_B \epsilon_B^S \quad (\text{IV.34})$$

$$\tau = G\gamma \quad (\text{IV.35})$$

$E$  et  $G$  sont respectivement les modules d'élasticité et de cisaillement.

#### A. Cas d'un collage non-parfait

Les équations (IV.28 - IV.35) constituent un système de huit équations à huit inconnues : les contraintes et les déformations dans le piézo-électrique, dans la structure et dans la couche de colle ( $\sigma_C$ ,  $\sigma_B^S$ ,  $\tau$ ,  $\epsilon_C$ ,  $\epsilon_B^S$ ,  $\gamma$ ) et les déplacements dans le piézo-électrique et dans la structure ( $U_C$ ,  $U_B^S$ ). En substituant l'équation (IV.30) dans l'équation (IV.35) et en introduisant le résultat dans l'équation (IV.31) et (IV.32), on obtient :

$$\frac{d\sigma_C}{dx} - \frac{G(U_C - U_B^S)}{t_C t_S} = 0 \quad (\text{IV.36})$$

$$\frac{d\sigma_B^S}{dx} + \frac{\alpha G(U_C - U_B^S)}{t_B t_S} = 0 \quad (\text{IV.37})$$

En dérivant ces deux dernières équations et en utilisant les équations (IV.28), (IV.29), (IV.33) et (IV.34), on obtient :

$$E_C \left( \frac{d^2 \epsilon_C}{dx^2} - \Lambda \right) - \frac{G}{t_C t_S} (\epsilon_C - \epsilon_B^S) = 0 \quad (\text{IV.38})$$

$$E_B \left( \frac{d^2 \epsilon_B^S}{dx^2} - \Lambda \right) + \frac{\alpha G}{t_B t_S} (\epsilon_C - \epsilon_B^S) = 0 \quad (\text{IV.39})$$

Les équations (IV.38) et (IV.39) peuvent se réduire à deux équations différentielles découplées du quatrième-ordre :

$$\frac{d^4 \epsilon_B^S}{d^4 \bar{x}} - \Gamma^2 \frac{d^2 \epsilon_B^S}{d^2 \bar{x}} = 0 \quad (\text{IV.40})$$

$$\frac{d^4 \epsilon_C}{d^4 \bar{x}} - \Gamma^2 \frac{d^2 \epsilon_C^S}{d^2 \bar{x}} = 0 \quad (\text{IV.41})$$

avec

$$\Gamma^2 = \frac{\bar{\Gamma} \theta_S}{\bar{t}_S^2} \left[ \frac{\psi + \alpha}{\psi} \right] \quad (\text{IV.42})$$

$$\psi = \frac{E_B t_B}{E_C t_C} = \bar{E} \theta_B \quad (\text{IV.43})$$

où  $\bar{x} = 2x/L$ ,  $L$  est la longueur de piézo-électrique  $\bar{g} = g/E_C$  et  $\bar{t}_S = t_S/L$ .

Bien que les équations (IV.42) et (IV.43) apparaissent comme des équations découplées, leurs solutions sont couplées par les équations du second-ordre, (IV.38) et (IV.39). La solution des équations (IV.42) et (IV.43) donne les distributions des déformations dans le piézo-électrique et dans la structure :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_C \\ \epsilon_B^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} B_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} B_2 \bar{x} + \begin{bmatrix} \psi/\alpha \\ 1 \end{bmatrix} B_3 \sinh \Gamma \bar{x} + \begin{bmatrix} -\psi/\alpha \\ 1 \end{bmatrix} B_4 \cosh \Gamma \bar{x} \quad (\text{IV.44})$$

On doit imposer quatre conditions aux limites pour déterminer les quatre constantes  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  et  $B_4$ . Il faut noter que la déformation du piézo-électrique  $\Lambda$  n'apparaît pas explicitement dans l'équation (IV.44), mais elle va apparaître dans la solution de l'équation par l'intermédiaire des conditions aux limites. Les états de contraintes nulles aux extrémités libres du piézo-électrique impliquent qu'à ces points  $\epsilon_C$  est égal à la déformation du piézo-électrique  $\Lambda$  [équation (IV.33)]. Sous ces hypothèses, les conditions aux limites deviennent :

$$\text{au point } \bar{x} = +1 : \quad \epsilon_C = \Lambda, \quad \epsilon_B^S = \epsilon_B^{S+}$$

et

$$\text{au point } \bar{x} = -1 : \quad \epsilon_C = \Lambda, \quad \epsilon_B^S = \epsilon_B^{S-}$$

$\epsilon_B^{S+}$  et  $\epsilon_B^{S-}$  sont les déformations de la structure au coté gauche (-) et au coté droit (+) de l'élément piézo-électrique.

## Chapitre IV

En injectant les conditions limites ci-dessus dans l'équation (IV.44), on obtient les quatre constantes  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  et  $B_4$  :

$$B_1 = \frac{\psi}{\psi + \alpha} \left[ \frac{\epsilon_B^{S+} + \epsilon_B^{S-}}{2} + \frac{\alpha\Lambda}{\psi} \right] \quad (\text{IV.45a})$$

$$B_2 = \frac{\psi}{\psi + \alpha} \left[ \frac{\epsilon_B^{S+} - \epsilon_B^{S-}}{2} \right] \quad (\text{IV.45b})$$

$$B_3 = \frac{\alpha}{(\psi + \alpha)\sinh\Gamma} \left[ \frac{\epsilon_B^{S+} - \epsilon_B^{S-}}{2} \right] \quad (\text{IV.45c})$$

$$B_4 = \frac{\psi}{(\psi + \alpha)\cosh\Gamma} \left[ \frac{\epsilon_B^{S+} + \epsilon_B^{S-}}{2} - \Lambda \right] \quad (\text{IV.45d})$$

Pour faciliter l'intégration du modèle de couplage statique dans le modèle de couplage dynamique piézo-électrique/structure, il est nécessaire d'avoir l'expression des forces induites par le piézo-électrique sur la structure. Dans ce cas, la contrainte de cisaillement  $\tau$  se détermine en substituant les équations (IV.44) et (IV.45) dans les équations (IV.28) et (IV.29) pour obtenir les expressions de  $u_C'$  et  $u_B^S$ . Après intégration de ces dernières et substitution dans l'équation (IV.30), le résultat est injecté dans l'équation (IV.35) pour obtenir :

$$\frac{\tau}{E_B} = \frac{\bar{G}}{\bar{t}_S \bar{E} \Gamma} \left[ \frac{\epsilon_B^{S+} - \epsilon_B^{S-}}{2} \frac{\cosh\Gamma\bar{x}}{\sinh\Gamma} + \left\{ \frac{\epsilon_B^{S+} + \epsilon_B^{S-}}{2} - \Lambda \right\} \frac{\sinh\Gamma\bar{x}}{\cosh\Gamma} \right] \quad (\text{IV.46})$$

Les déformations [équations (IV.44) et (IV.45)] et la contrainte [équation (IV.46)] peuvent être considérées comme fonctions des déformations de la structure aux extrémités du piézo-électrique ( $\epsilon_B^{S+}$  et  $\epsilon_B^{S-}$ ) et de la tension appliquée dans le piézo-électrique  $\Lambda = d_{31}V/t_C$ . Les termes dépendants de  $\epsilon_B^{S+}$  et  $\epsilon_B^{S-}$  représentent la rigidité passive supplémentaire ajoutée par la colle. La capacité du piézo-électrique à générer une déformation dans la structure est associée aux termes dépendant de  $\Lambda$ . Pour illustrer ces termes, on suppose que les déformations limites ( $\epsilon_B^{S+}$  et  $\epsilon_B^{S-}$ ) sont nulles, et les équations (IV.44) et (IV.46) se réduisent à :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_C/\Lambda \\ \epsilon_B^S/\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\alpha}{\psi + \alpha} - \begin{bmatrix} -\psi/\alpha \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\alpha \cosh\Gamma\bar{x}}{(\psi + \alpha)\cosh\Gamma} \quad (\text{IV.47})$$

$$\frac{\tau}{E_B} = \frac{-G}{t_S E G} \left[ \frac{\sinh\Gamma\bar{x}}{\cosh\Gamma} \right] \quad (\text{IV.48})$$

L'équation (IV.47) est tracée en figure 4.3 pour plusieurs valeurs de  $\Gamma$  et pour  $\psi = 14.5$  et  $\alpha = 6$ , dans le cas typique d'un piézo-électrique du type céramique collé sur une poutre d'aluminium d'épaisseur égale à 10 fois l'épaisseur du piézo-électrique et excitée en flexion. Le paramètre non-dimensionnel  $\Gamma$  [équation (IV.42)] est un paramètre de décalage de cisaillement indiquant l'efficacité du transfert de cisaillement du piézo-électrique à la structure ou vice versa. Ce paramètre dépend principalement de la rigidité et de l'épaisseur de la couche de colle. L'augmentation du paramètre  $\Gamma$  (par une augmentation du module de cisaillement  $G$  ou une diminution d'épaisseur de la couche de colle  $t_S$ ) signifie que le décalage de cisaillement devient moins important et que le cisaillement est efficacement transféré à travers une petite zone près de l'extrémité du piézo-électrique.

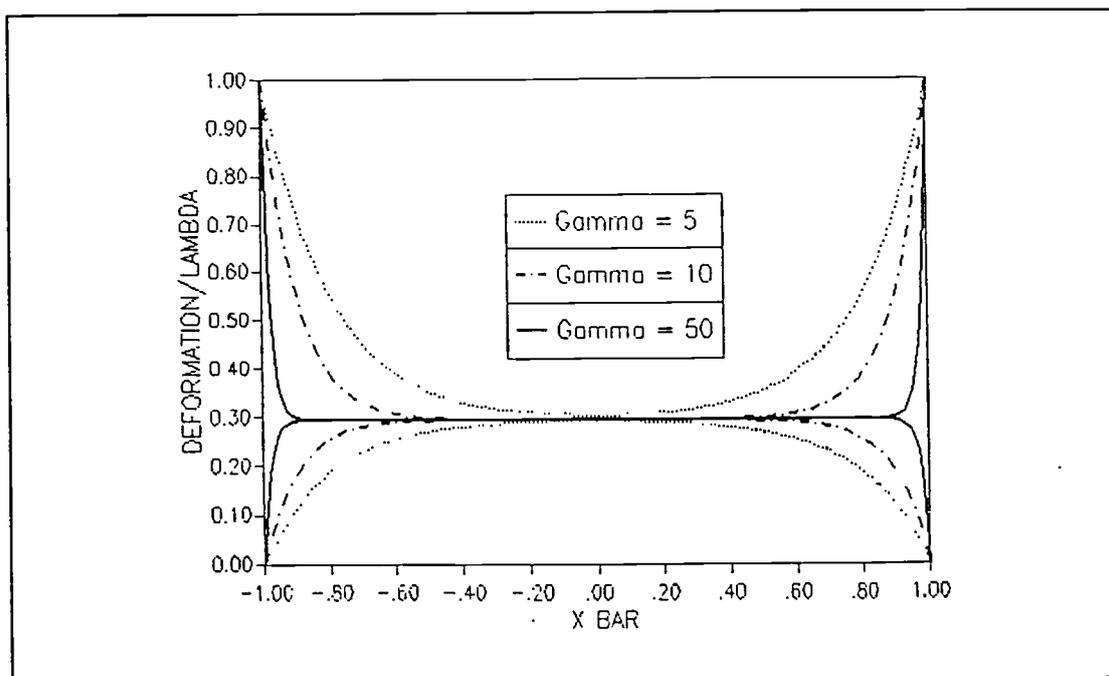


Figure 4.3 Déformation du piézo-électrique et de la structure pour plusieurs valeurs de  $\Gamma$

Le paramètre  $\psi$  défini en équation (IV.43) donne la fraction maximale de déformation du piézo-électrique transférée dans la structure. Pour une valeur de  $\psi$  proche de zéro, la déformation induite dans la structure est égale à la déformation du piézo-électrique  $\Lambda$  [équation (IV.47)]. C'est le cas pour une structure d'épaisseur très mince par rapport à l'épaisseur du piézo-électrique et dont le module d'élasticité,  $E_B$  est proche du module d'élasticité du piézo-électrique,  $E_C$ . A l'opposé, une grande valeur de  $\psi$ , qui correspond au cas d'un rapport d'épaisseur très grand ou à une structure de module d'élasticité très élevé, implique que la déformation induite dans la structure est petite. Ainsi, les paramètres souhaitables dans le couplage entre un actionneur du type piézo-électrique et la structure sont une grande valeur de  $\Gamma$  (ce qui nécessite une colle parfaite) et une petite valeur de  $\psi$ .

### B. Cas d'un collage parfait

Un matériau de colle parfait est associé à une valeur de  $\Gamma$  infinie. Dans ce cas, il existe une concentration importante de la contrainte de cisaillement aux deux extrémités du piézo-électrique, indiquant que la déformation se transfère du piézo-électrique à la structure à travers une petite zone proche des extrémités de l'actionneur. Sous cette hypothèse idéale, les équations (IV.44) et (IV.45) deviennent :

$$\epsilon_B = \epsilon_C = \frac{\psi}{\psi + \alpha} \left[ \frac{\epsilon_B^{S+} + \epsilon_B^{S-}}{2} + \frac{\epsilon_B^{S+} - \epsilon_B^{S-}}{2} \bar{x} \right] + \frac{\alpha}{\psi + \alpha} \Lambda \quad (\text{IV.49})$$

La force de cisaillement totale est alors transférée effectivement aux points d'extrémités du piézo-électrique. Cette force, appliquée aux points  $\bar{x} = \pm 1$ , est

$$\frac{F}{E_B t_B b} = \frac{1}{\psi + \alpha} \left[ \frac{\epsilon_B^{S+} + \epsilon_B^{S-}}{2} + \frac{\epsilon_B^{S+} - \epsilon_B^{S-}}{2} \bar{x} \right] - \frac{1}{\psi + \alpha} \Lambda \quad (\text{IV.50})$$

Le moment produit par cette force est égal à

$$M_0 = F t_B \quad (\text{IV.51})$$

Les équations (IV.49) - (IV.51) associées à un couplage parfait entre le piézo-électrique et la structure peuvent être obtenues par l'un des deux moyens suivants : soit en déterminant la valeur limite de l'équation (IV.44) lorsque  $\Gamma$  tend vers l'infini, ou en imposant l'égalité de la déformation dans le piézo-électrique et dans la structure [équations (IV.28) et (IV.29)] et en résolvant les équations

d'élasticité obtenues. Pour une valeur de  $r$  égale à 30 ou plus grande, l'énergie de déformation induite dans la structure par l'actionneur est égale à 95 pour cent de l'énergie de déformation induite dans le cas d'un couplage parfait. Par conséquent, pour une valeur de  $r$  plus grande que 30, le modèle de couplage parfait donnera des résultats suffisamment précis pour un modèle d'ingénierie. Pour cette raison, l'exemple traité dans cette étude, utilisera un modèle de couplage parfait. Dans le cas d'un matériau de colle moins rigide et/ou plus épais, on utilise la modélisation complète [équations (IV.44) et (IV.45)].

On vient de voir précédemment l'analyse complète du couplage d'un actionneur du type piézo-électrique et d'une structure élastique pour des excitations en flexion et en extension. Si les tensions électriques appliquées sur les actionneurs sont dans le sens indiqué sur la figure 4.1, une extension sera induite dans la structure et  $\alpha = 2$ . Si l'une des tensions est inversée, la structure est fléchie et  $\alpha = 6$ . Pour une grande valeur de  $\alpha$ , les piézo-électriques sont plus efficaces dans le cas de la flexion.

#### IV.3.2 MODELE DYNAMIQUE DU COUPLAGE PIEZO-ELECTRIQUE/STRUCTURE

Après avoir construit un modèle statique du couplage piézo-électrique/structure, on peut maintenant l'intégrer dans l'analyse dynamique de la structure. En supposant que la masse du piézo-électrique est relativement petite par rapport à la masse totale du système et que les résonances des actionneurs sont hautes par rapport aux fréquences étudiées, on peut considérer que les actionneurs agissent de façon quasi-statique. On peut ainsi négliger les caractéristiques dynamiques de l'actionneur et utiliser le modèle de couplage statique actionneur/structure.

##### A. Cas d'un collage non-parfait

Dans le cas d'un actionneur collé sur une poutre, la force généralisée est induite par la contrainte de cisaillement surfacique. La figure 4.4 montre une poutre cantilever activée en flexion par une paire de piézo-électriques. La force induite par l'actionneur piézo-électrique apparaît dans l'équation du mouvement de la poutre sous la forme d'une force généralisée,  $q$

$$q = \int_{(\bar{a} - \bar{n})}^{(\bar{a} + \bar{n})} [ \tau \ b \ t_B \ \Phi' \ ] d\bar{x} \quad (IV.52)$$

$a$  est la coordonnée du centre de piézo-électrique,  $n$  la demi-longueur du piézo-électrique,  $b$  la largeur de l'actionneur et  $\Phi$  la déformé modale de la poutre. Dans l'équation (IV.52), la seule inconnue est la contrainte de cisaillement  $\tau$  induite par le piézo-électrique donnée par l'équation (IV.46). Afin d'injecter  $\tau$  dans l'équation (IV.52), on doit déterminer les conditions aux limites  $\epsilon_S^{B+}$  et  $\epsilon_S^{B-}$  (i.e., les déformations qui sont présentes dans la structure en l'absence d'actionneurs. Ces déformations sont causées par le mouvement modal et s'expriment en fonction des coordonnées généralisées  $u$

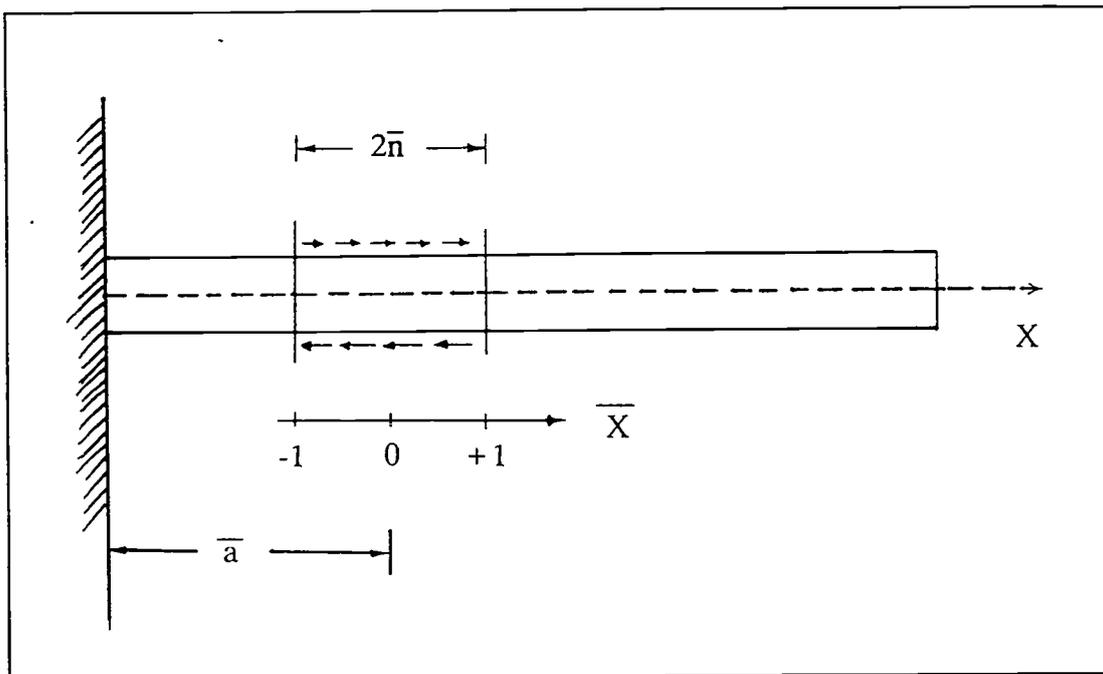


Figure 4.4 Poutre console soumise à des contraintes de cisaillement

$$\epsilon_S^B = - \frac{\tau_B}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{\tau_B}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} u \quad (\text{IV.53})$$

$w(x,t)$  est le déplacement transversal de la poutre. En injectant les équations (IV.53) et (IV.46) dans l'équation (IV.52) et après intégration, on obtient l'expression de la force généralisée du mode correspondant :

$$Q = \frac{- Gbt_B^2}{4\bar{t}_S GL_B^2} \left[ \frac{\Phi''(\bar{a} + \bar{n}) - \Phi''(\bar{a} - \bar{n})}{\sinh \Gamma} \right] I_c$$

$$+ \left[ \frac{\Phi''(\bar{a} + \bar{n}) + \Phi''(\bar{a} - \bar{n})}{\cosh\Gamma} I_s \right] u - \frac{GbtB}{tS\Gamma} \left[ \frac{I_s}{\cosh\Gamma} \right] \quad (\text{IV.54a})$$

$$Q = k_{\text{PIEZO}} u + Q_V \Lambda \quad (\text{IV.54b})$$

où

$$I_c = \int_{(\bar{a} - \bar{n})}^{(\bar{a} + \bar{n})} \cosh \left[ \frac{2\Gamma}{\bar{L}} (\bar{x} - \bar{a}) \right] \Phi'(\bar{x}) d\bar{x} \quad (\text{IV.55})$$

$$I_s = \int_{(\bar{a} - \bar{n})}^{(\bar{a} + \bar{n})} \sinh \left[ \frac{2\Gamma}{\bar{L}} (\bar{x} - \bar{a}) \right] \Phi'(\bar{x}) d\bar{x} \quad (\text{IV.56})$$

L'équation (IV.54) exprime la force modale induite par le piézo-électrique en fonction du mouvement de la poutre et de la tension appliquée sur le piézo-électrique. Le premier terme est proportionnel à  $u$  et exprime la rigidité passive modale ajoutée,  $k_{\text{PIEZO}}$ , due au piézo-électrique. Le deuxième terme dépend de la déformation du piézo-électrique  $\Lambda$ , et est proportionnel à la tension appliquée  $v$ .

L'équation du mouvement du système poutre/piézo-électrique pour le modèle à un seul mode s'écrit alors

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + (k + k_{\text{PIEZO}}) u = Q_V \Lambda = Q_V d_{31} V/t_C \quad (\text{IV.57})$$

$m$ ,  $c$  et  $k$  sont la masse modale, l'amortissement modal et la rigidité modale du système structure/piézo-électrique. Cette équation peut être utilisée pour déterminer la réponse dynamique de la structure.

## B. Cas d'un collage parfait

Dans le cas où l'épaisseur de la colle est faible ( $\Gamma > 30$ ), on peut utiliser le modèle de couplage statique parfait. L'expression de la force modale  $q$  dépend de  $M_0$ , moment de flexion appliqué aux extrémités gauche et droite du piézo-électrique, et de la pente  $q'$  en ces deux points,

$$Q = \left[ \left\{ \frac{M_0}{L_B} \Phi'(\mathbf{x}) \right\} \Big|_+ + \left\{ \frac{M_0}{L_B} \Phi'(\mathbf{x}) \right\} \Big|_- \right] \quad (\text{IV.58})$$

Il faut noter que pour un couplage parfait, la force généralisée est appliquée seulement aux extrémités du piézo-électrique.

En substituant l'équation (IV.51) dans l'équation (IV.58) et en tenant compte des équations (IV.50) et (IV.53), on obtient l'expression de la force modale  $Q$  :

$$Q = - \frac{E_B t_B^3 b}{2L_B^3 (6 + \psi)} [\bar{\Phi}''(\bar{a} + \bar{n}) \cdot \bar{\Phi}'(\bar{a} + \bar{n}) - \bar{\Phi}''(\bar{a} - \bar{n}) \cdot \bar{\Phi}'(\bar{a} - \bar{n})] u - \frac{E_B t_B^3 b}{L_B (6 + \psi)} [\bar{\Phi}'(\bar{a} + \bar{n}) - \bar{\Phi}'(\bar{a} - \bar{n})] \Lambda \quad (\text{IV.59a})$$

$$Q = - k_{\text{PIEZO}} u + Q_V \Lambda \quad (\text{IV.59b})$$

On utilise l'équation (IV.59) pour déterminer la tension à appliquer aux piézo-électriques pour générer la force de contrôle généralisée calculée précédemment dans le sous-chapitre IV.2, (équation (IV.27)).

#### IV.4 FILTRE MODAL

L'implantation de la méthode de contrôle modal nécessite la détermination des coordonnées modales. Pour extraire ces coordonnées à l'aide des mesures ponctuelles, nous utiliserons la méthode du filtre modal.

En utilisant le théorème d'expansion, [B13], [B14], pour déterminer les coordonnées modales, on a la relation :

$$q_r(t) = \int [q(\mathbf{x}, t) m(\mathbf{x}) \Phi_r(\mathbf{x})] d\mathbf{x}, \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (\text{IV.60})$$

où  $q_r(t)$  est la coordonnée modale,  $q(\mathbf{x}, t)$  le déplacement à l'instant  $t$  au point  $\mathbf{x}$ ,  $m(\mathbf{x})$  la masse de la structure et  $\Phi(\mathbf{x})$  la déformée modale. L'application de cette stratégie nécessite une infinité de points de mesure ce qui n'est pas envisageable. L'implantation du filtre modal à l'aide de mesures discrètes, nécessite de générer une approximation de la déformée par interpolation ou extrapolation des mesures effectuées. Cette approximation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^p q(\mathbf{x}_j, t) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \quad (\text{IV.61})$$

## Chapitre IV

où  $u(\mathbf{x}, t)$  est la déformée approchée,  $\mathbf{x}_j$  dénote la position de capteur ( $j = 1, 2, \dots, p$ ),  $p$  est le nombre du capteurs et  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$  la fonction d'interpolation ou d'extrapolation.

En introduisant l'équation (IV.61) dans l'équation (IV.60), on obtient l'expression pour les coordonnées modales approchées  $u_r(t)$  sous la forme :

$$u_r(t) = \int [u(\mathbf{x}, t) m(\mathbf{x}) \Phi_r(\mathbf{x})] d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^p g_{rj} q(\mathbf{x}_j, t), \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (\text{IV.62})$$

où

$$g_{rj} = \int [G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) m(\mathbf{x}) \Phi_r(\mathbf{x})] d\mathbf{x}, \quad (j = 1, 2, \dots, p; r = 1, 2, \dots) \quad (\text{IV.63})$$

La précision du filtre modal dépend du nombre et de la position des capteurs et du type de la fonction d'interpolation ou d'extrapolation utilisée. En notant  $m$  le nombre de modes qu'on veut extraire (modes retenus), on effectue une partition du vecteur de coordonnées modales  $q(t)$  :

$$q(t) = \{q_1(t), q_2(t), \dots\}^T = \{q_M(t) \mid q_R(t)\}^T \quad (\text{IV.64})$$

où  $q_M(t)$  est le vecteur des coordonnées modales correspondant aux modes retenus et  $q_R(t)$  celui correspondant aux modes résiduels. On introduit aussi le vecteur des coordonnées modales,  $u_M(t)$  sous la forme :

$$u_M(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}^T \quad (\text{IV.65})$$

et la mesure effectuée par le  $j$ -ième capteur :

$$y_j(t) = u(\mathbf{x}_j, t) + b_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (\text{IV.66})$$

où  $b_j(t)$  dénote le bruit de mesure.

En tenant compte des équations (IV.64), (IV.65) et (IV.66), on peut écrire la relation entre les modes retenus et les mesures discrètes effectuées, sous la forme :

$$u_M(t) = G y(t) \quad (\text{IV.67})$$

où  $y(t)$  est le vecteur regroupant les  $p$  mesures effectuées. Les composantes de  $G$  sont  $g_{rj}$  ( $r = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p$ ). L'équation (IV.67) peut encore s'écrire sous la forme :

$$u_M(t) = GH_M q_M(t) + GH_R q_R(t) + Gb(t) \quad (IV.68)$$

où  $H_M(i, j) = \Phi_j(X_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ) et  $H_R = \Phi_{m+j}(X_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $j = 1, 2, \dots$ ). L'objectif de la conception du filtre modal est de déterminer le nombre et la position des capteurs et la fonction d'interpolation, pour que la matrice  $GH_M$  soit proche de la matrice identité et la matrice  $GH_R$  soit proche de la matrice nulle, [B20].

Pour déterminer le nombre minimum nécessaire de capteurs, on constate, à partir des équations précédentes, que la matrice  $G$  est d'ordre  $(m \times p)$  et la matrice  $H_M$  est d'ordre  $(p \times m)$ . Pour que la matrice  $GH_M$  soit proche de la matrice identité d'ordre  $(m \times m)$ , la matrice  $GH_M$  doit avoir le rang  $m$ . On peut obtenir la matrice  $GH_M$  de rang  $m$  si les deux matrices  $G$  et  $H_M$  sont de rang  $m$ , ce qui implique que  $p \geq m$ . L'interprétation physique de cette remarque est que le nombre de capteurs doit être au moins égal au nombre de modes qu'on veut extraire. Il faut noter que ce nombre minimum nécessaire ne garantit pas la précision du filtre modal.

Dans le cas où on considère le filtre modal du type Rayleigh-Ritz, le profil approché de la déformée peut s'écrire sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{r=1}^p \varphi_r(x) \eta_r(t) \quad (IV.69)$$

où  $\varphi_r(x)$  est une fonction cinématiquement admissible. Pour déterminer l'amplitude de  $\eta_r(t)$ , on exprime le vecteur des mesures sous la forme :

$$y(t) = D\eta(t) \quad (IV.70)$$

où  $D_{ij} = \varphi_j(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $j = 1, 2, \dots$ ) et  $\eta(t) = (\eta_1, \eta_2, \dots)^T$ . Si on prend le nombre de modes retenus égal au nombre de capteurs,  $p = m$ , les coordonnées modales peuvent être obtenues par l'inversion de la matrice constituée des  $m$  premières colonnes de la matrice  $D$ , notée  $D_M$ , ce qui donne :

$$\eta_M(t) = D_M^{-1} y(t) \quad (IV.71)$$

où  $\eta_M(t)$  est un vecteur constitué des  $m$  premières composantes de  $\eta(t)$ . En injectant l'expression (IV.71) dans l'équation (IV.69), le profil approché de la déformée s'écrit :

$$u(x, t) = \sum_{s=1}^p \varphi_s(x) \sum_{j=1}^p [D_M^{-1}]_{sj} y_j(t) \quad (IV.72)$$

Les composantes de la matrice de gain du filtre modal,  $G_{rj}$  s'écrivent alors :

$$G_{rj} = \sum_{s=1}^P [D_M^{-1}]_{sj} \int [m(\mathbf{x})\Phi_r(\mathbf{x})\varphi_s(\mathbf{x})] dx \quad (\text{IV.73})$$

Dans le cas où on prend la déformée modale comme fonction cinématiquement admissible, la matrice  $D_M$  s'identifie à la matrice  $H_M$ , et le vecteur  $\eta_M(t)$  au vecteur  $u_M(t)$ , ce qui donne :

$$u_M(t) = H_M^{-1} y(t) \quad (\text{IV.74})$$

L'expression (IV.74), peut être considérée comme filtre modal le plus simple.

#### IV.5 EXEMPLES NUMERIQUES

Dans ce sous-chapitre, on propose deux applications de la stratégie de contrôle développée précédemment. Comme premier exemple, on prend comme structure de base une poutre console. Deux paires d'actionneurs du type piézo-électriques céramiques sont collés dans des positions choisies de façon à générer un contrôle le plus efficace possible sur les deux premiers modes du système (figure 4.5).

Dans le second exemple, on utilise un portique bi-encasté (fig. 4.6). Trois paires d'actionneurs sont collées dans des positions choisies de façon à générer un contrôle le plus efficace possible sur les trois premiers modes du portique. Les dimensions du piézo-électrique sont donnés en tableau 4.1. Les caractéristiques des matériaux utilisés sont données dans le tableau 4.2. Les cinq premières fréquences de la poutre et du portique sont données en tableau 4.3.

Les tensions électriques injectées dans les piézo-électriques sont générées à partir des vitesses et des déplacements modaux. Les expressions des tensions électriques en fonction des vitesses et des déplacements généralisés pour la poutre sont données par les équations (IV.75) et (IV.76).

$$\begin{aligned} V_1(t) = & + .32E+05 u_1(t) + .15E+04 \dot{u}_1(t) \\ & - .62E+05 u_2(t) - .52E+03 \dot{u}_2(t) \end{aligned} \quad (\text{IV.75})$$

$$\begin{aligned} V_2(t) = & + .27E+05 u_1(t) + .12E+04 \dot{u}_1(t) \\ & + .20E+06 u_2(t) + .17E+04 \dot{u}_2(t) \end{aligned} \quad (\text{IV.76})$$

## Chapitre IV

Les trois tensions électriques pour le portique sont données par les équations (IV.77), (IV.78) et (IV.79).

$$V_1(t) = + .53E+05 u_1(t) + .62E+04 \dot{u}_1(t) + .12E+06 u_2(t) + .45E+04 \dot{u}_2(t) + .51E+06 u_3(t) + .84E+04 \dot{u}_3(t) \quad (\text{IV.77})$$

$$V_2(t) = - .23E+05 u_1(t) - .28E+04 \dot{u}_1(t) - .16E+06 u_2(t) - .59E+04 \dot{u}_2(t) - .41E+06 u_3(t) - .67E+04 \dot{u}_3(t) \quad (\text{IV.78})$$

$$V_3(t) = - .29E+05 u_1(t) - .34E+04 \dot{u}_1(t) - .97E+05 u_2(t) - .36E+04 \dot{u}_2(t) - .45E+05 u_3(t) - .75E+03 \dot{u}_3(t) \quad (\text{IV.79})$$

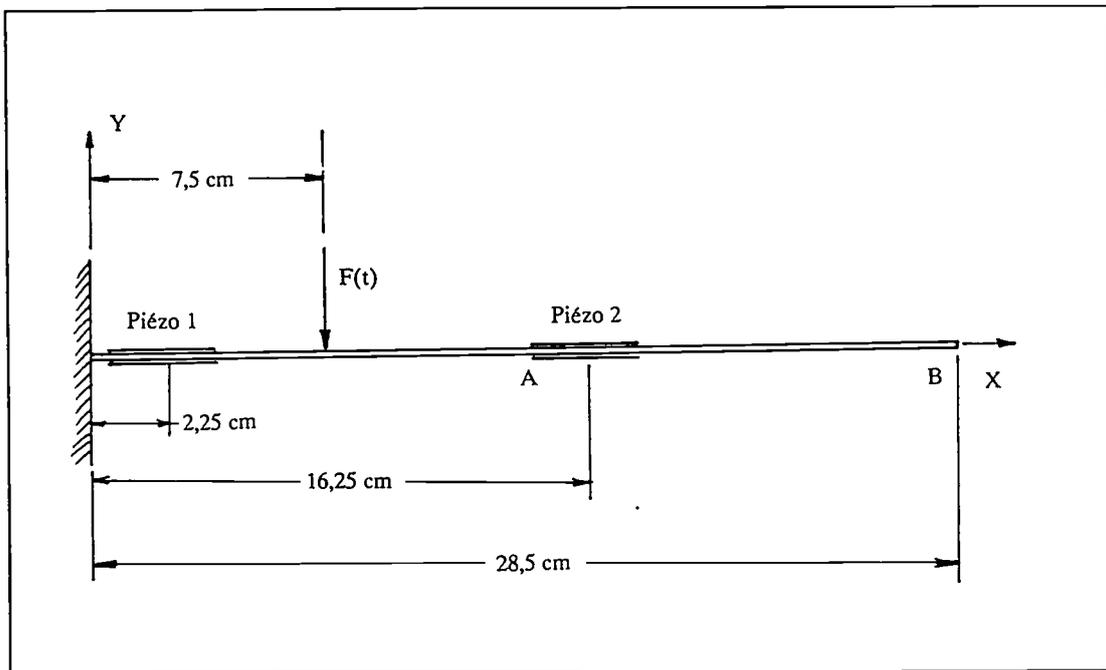


Figure 4.5 Poutre console avec deux paires de piézo-électriques

Tableau 4.1 Dimensions d'un élément piézo-électrique

Longueur, L (mm)	35,0
Largeur, b (mm)	12,5
Epaisseur, t (mm)	0,60

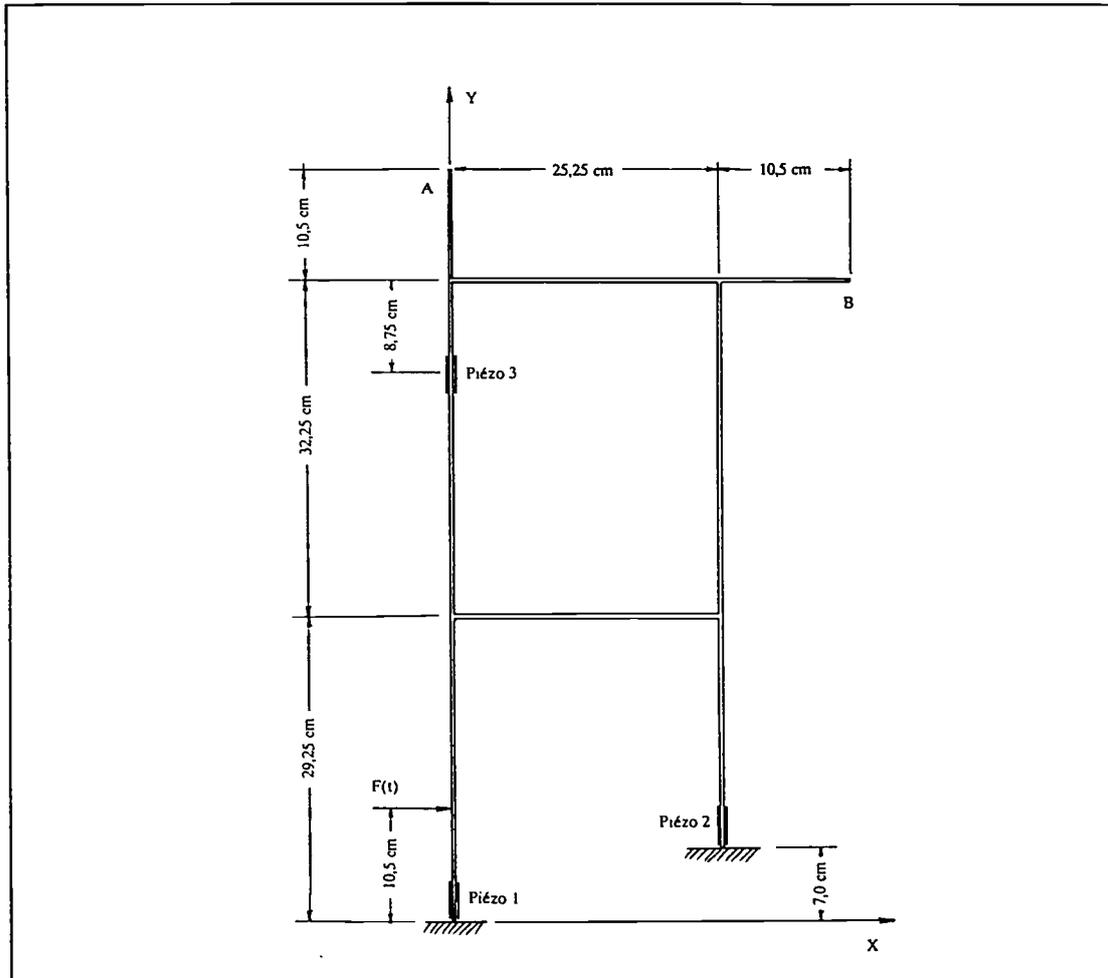


Figure 4.6 Portique bi-encasté avec trois paires de piézo-électriques

Tableau 4.2 Caractéristiques des matériaux utilisés

Caractéristique	Elastique	Piézo-électrique
Module d'Young (N/m <sup>2</sup> )	7.0 E+10	6.0 E+10
Densité (kg/m <sup>3</sup> )	2700.0	7000.0
Constante d <sub>31</sub> (mm/V)	---	270.0 E-09
Voltage limite (V/mm)	—	600.00

Tableau 4.3 Cinq premières fréquences des structures

Fréquences (Hz)	Poutre	Portique
Mode 1	25,2	11,4
Mode 2	149,1	35,4
Mode 3	475,3	85,7
Mode 4	868,5	141,1
Mode 5	1530,6	156,4

#### IV.6 RESULTATS ET DISCUSSION

Les réponses de la poutre obtenues sans et avec contrôle sont données en Figs. 4.7 et 4.8. Celles du portique sont présentées en Figs. 4.11 et 4.12. On constate que l'on n'a pas d'instabilités pour les modes non-contrôlés. L'utilisation des actionneurs du type semi reparti diminue considérablement les risques d'instabilités. Les amortissements actifs obtenus sont donnés dans le tableau 4.4. Les tensions injectées dans les piézo-électriques de la poutre en fonction de la fréquence d'excitation et de l'amplitude de la force d'excitation sont présentées en Figs. 4.9 et 4.10. Celles appliquées sur le portique sont données en Figs. 4.13, 4.14 et 4.15. Ces tensions sont limitées par les caractéristiques des piézo-électriques, en particulier, on ne doit pas dépasser la tension maximale de dépolarisation.

Tableau 4.4 Amortissements actifs obtenus

Amortissement (%)	Poutre	Portique
Mode 1	22,8	19,6
Mode 2	21,1	19,9
Mode 3	0,0	18,3
Mode 4	0,0	0,0
Mode 5	0,0	0,0

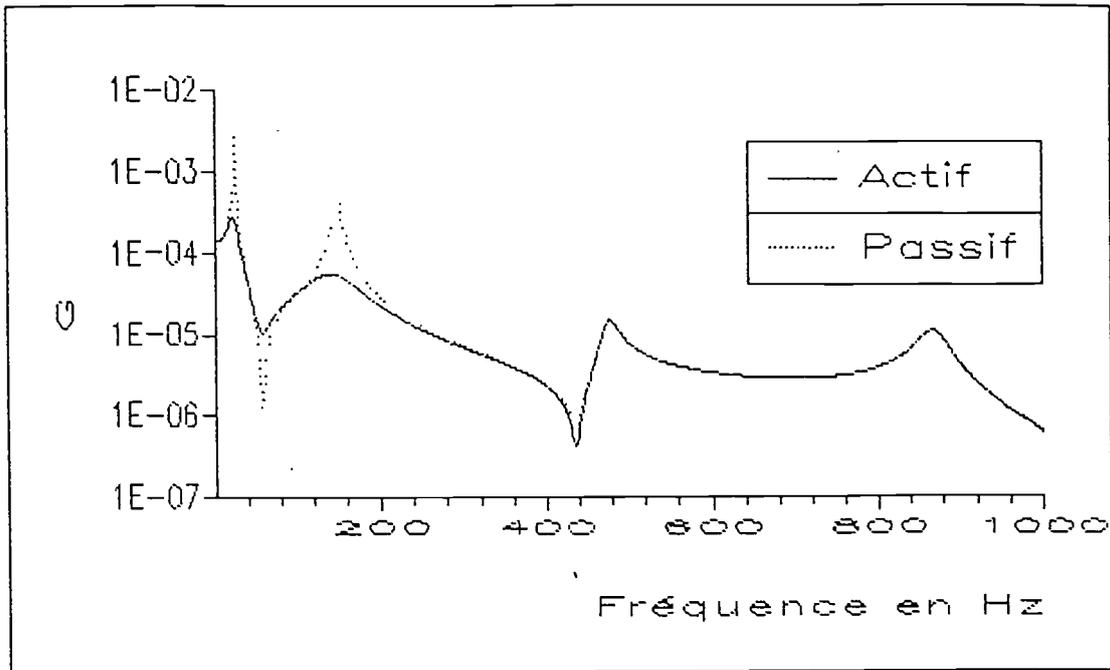


Figure 4.7 Réponse de la poutre au point A, direction Y

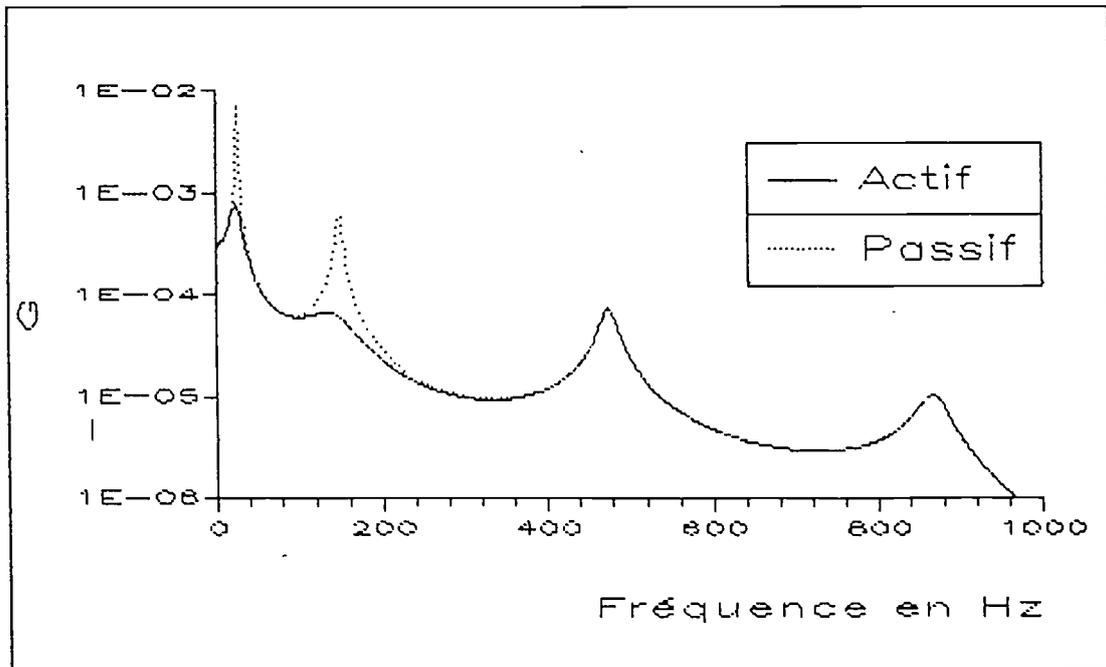


Figure 4.8 Réponse de la poutre au point B, direction Y

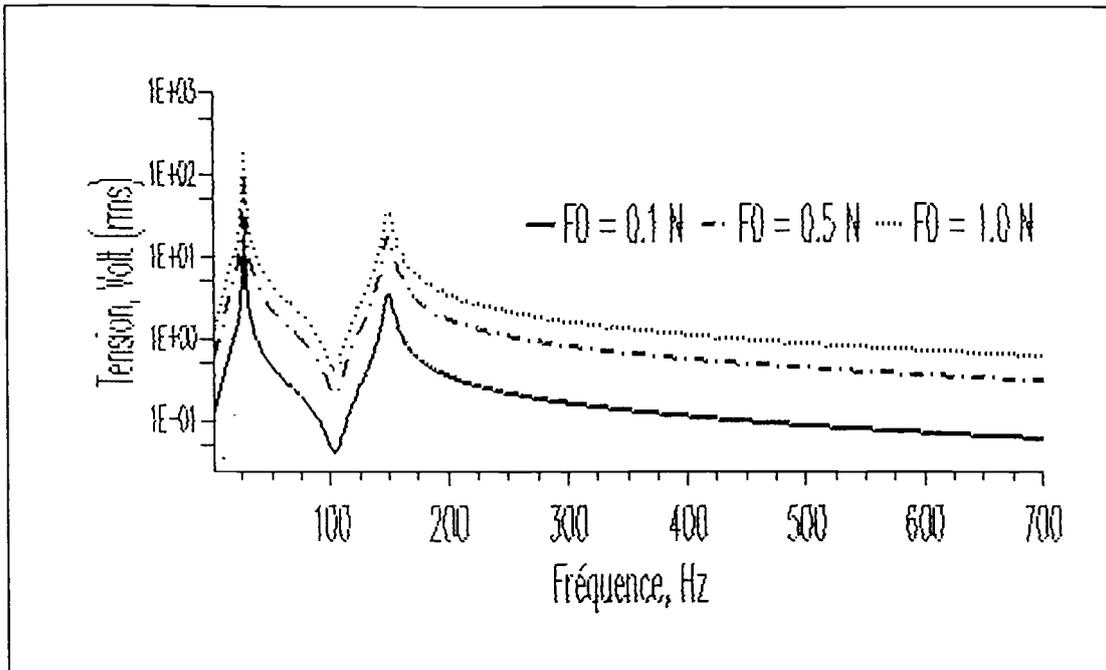


Figure 4.9 Tension du premier piézo-électrique de la poutre

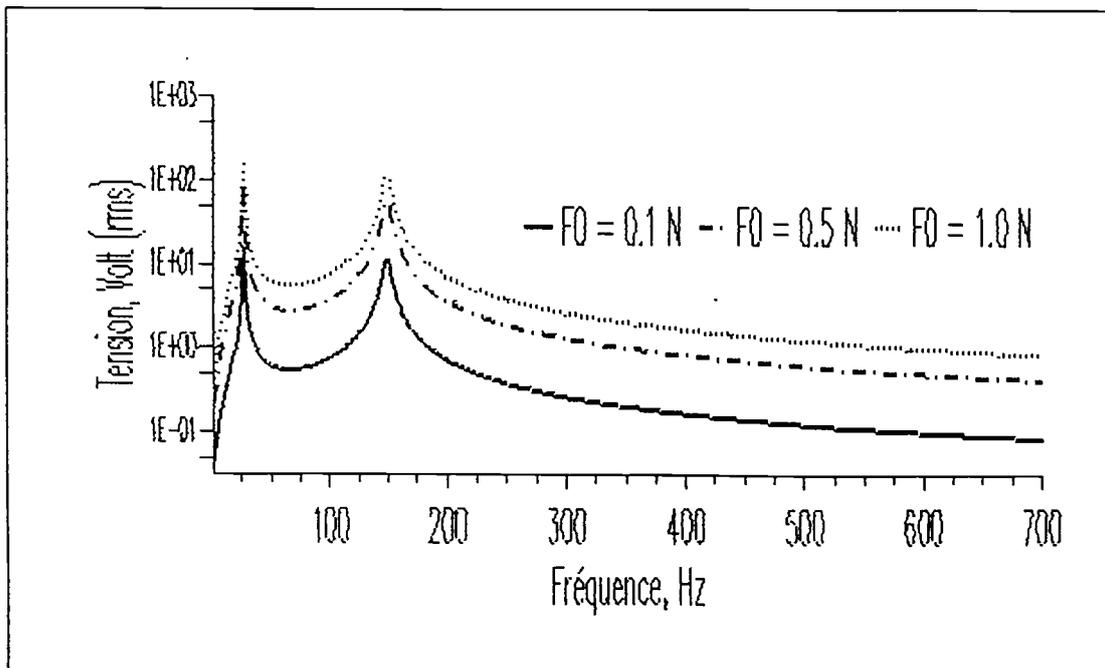


Figure 4.10 Tension du second piézo-électrique de la poutre

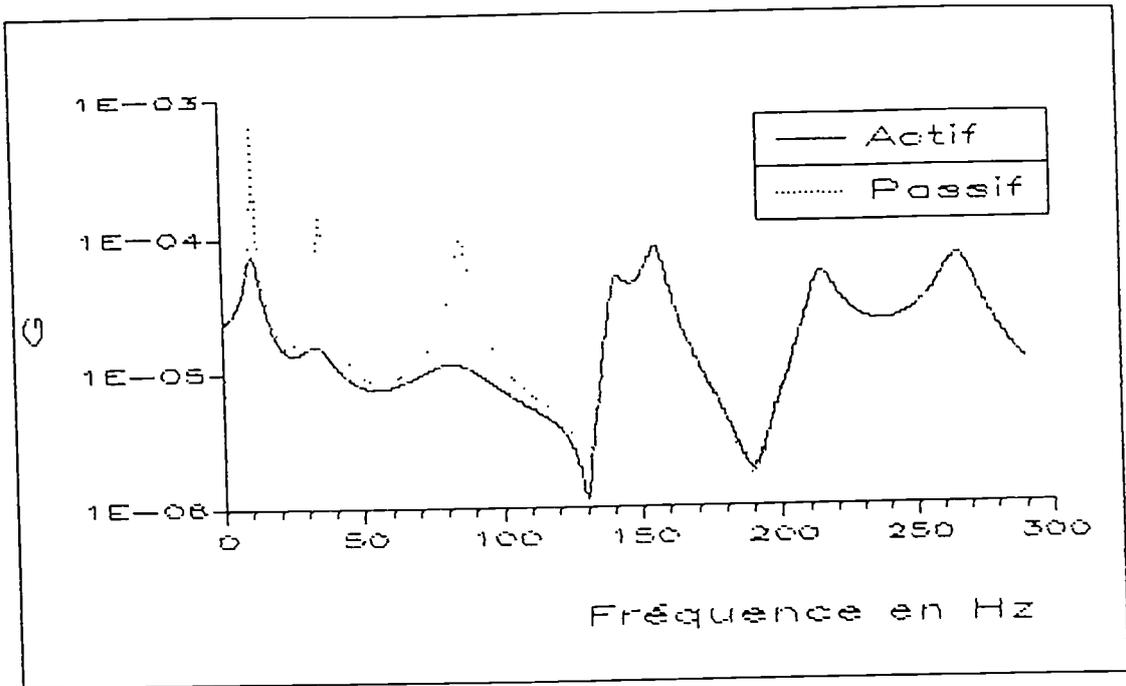


Figure 4.11 Réponse du portique au point A, direction X

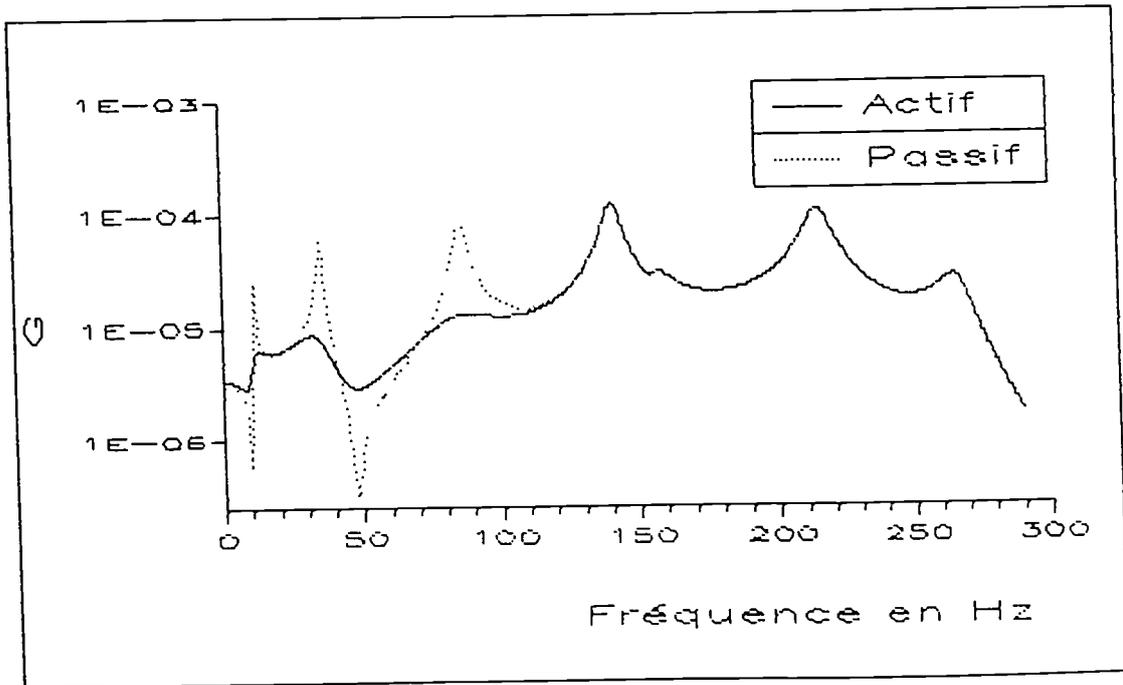


Figure 4.12 Réponse du portique au point B, direction Y

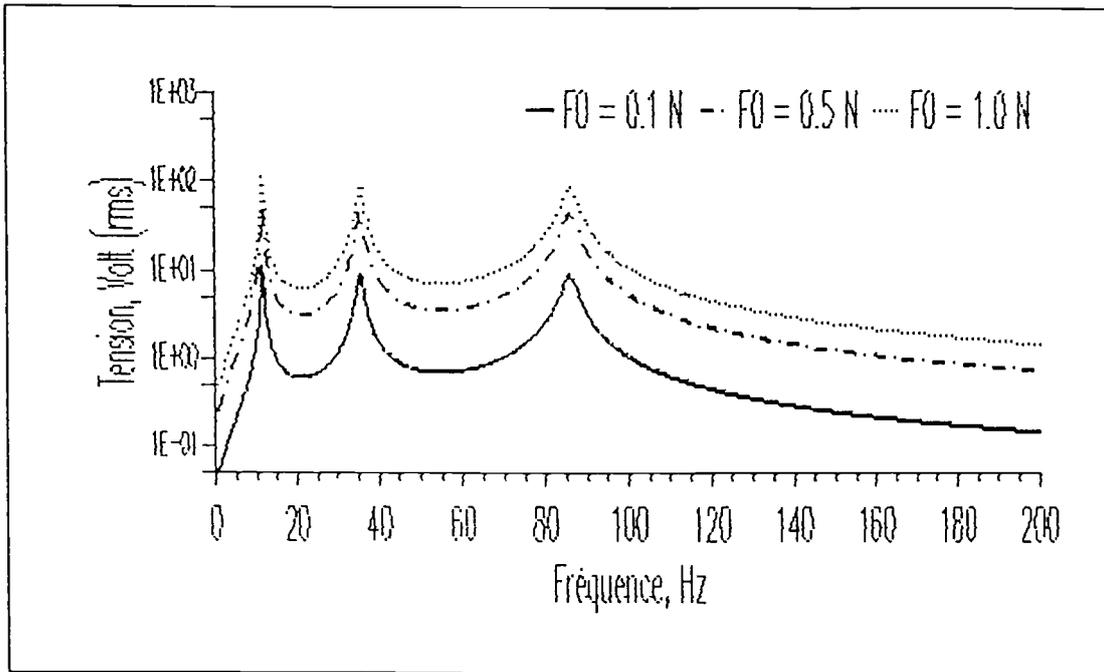


Figure 4.13 Tension du premier piézo-électrique du portique

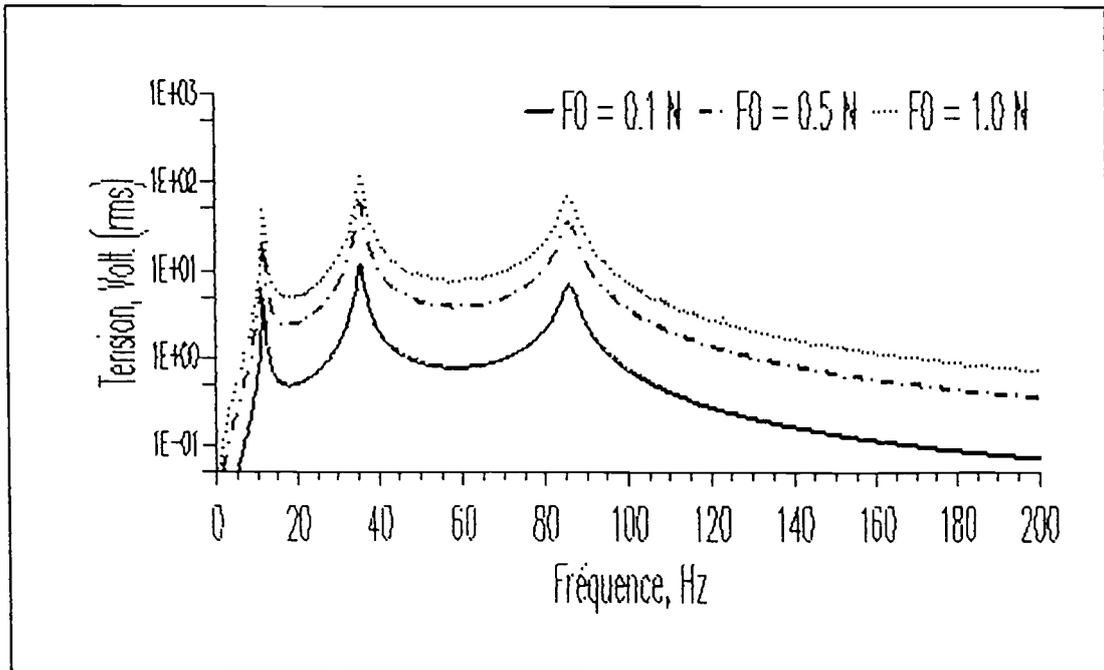


Figure 4.14 Tension du deuxième piézo-électrique du portique

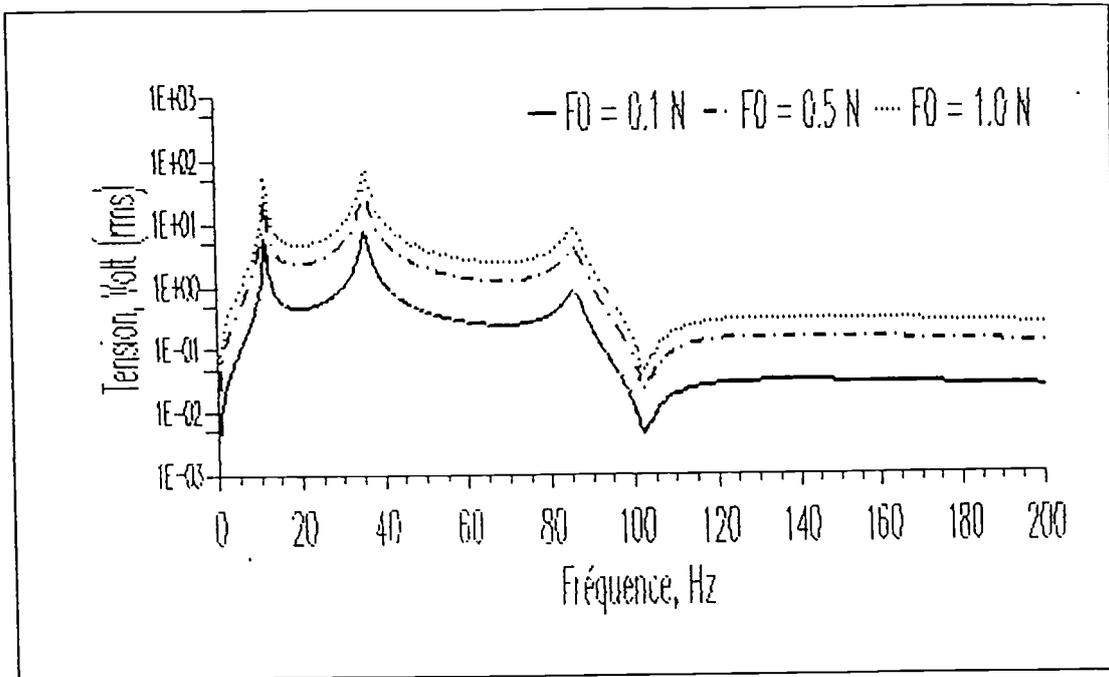


Figure 4.15 Tension du troisième piézo-électrique du portique



## CONCLUSIONS

Au terme de ce travail, il nous semble opportun de dégager quelques points importants, qui constituent l'aboutissement des concepts établis, et qui ouvrent la voie aux recherches futures.

L'approche par critères d'optimalité de la minimisation du poids des structures en présence de contraintes statiques (les déplacements) et dynamiques (les fréquences propres et les amortissements) a été envisagée ici sous l'angle de la résolution du problème du contrôle passif des structures. Cette approche devient surtout intéressante par sa simplicité quand le problème original est transformé en une séquence de problèmes simples et nous donne en général une vitesse de convergence très rapide sans qu'il existe cependant de garantie de convergence vers le point optimal.

Le calcul des sensibilités constitue à l'évidence une étape essentielle dans un algorithme d'optimisation. Cette étape conditionne les algorithmes et dépend du type de problème d'optimisation traité, surtout du type des contraintes (mélange de plusieurs contraintes de nature différente).

Les quelques applications présentées dans ce travail ont mis en évidence l'intérêt des méthodes proposées. Celles-ci, introduites dans un code de dimensionnement automatique, conduisent à un processus performant, plus général que les algorithmes classiques. A l'avenir, ce concept devrait être étendu à d'autres modèles structuraux et à d'autres contraintes des véritables problèmes industriels permettant d'aboutir dans le contexte de la méthode des éléments finis à un outil puissant de dimensionnement automatique des structures.

Dans le cadre des stratégies d'amortissements actifs, l'application de la méthode du contrôle modal en utilisant des actionneurs du type semi-reparti diminue les risques d'instabilité des modes non-contrôlés. Dans le cas des actionneurs du type piézo-électrique, la force de contrôle est générée par la déformation. Cette déformation est limitée par les caractéristiques du matériau piézo-électrique.

## Conclusions

Nous avons présenté également les analyses statiques et dynamiques de couplage piézo-électrique/structure. Par leur taille généralement petite, les actionneurs du type piézo-électrique peuvent être collés sur une grande partie de la structure sans beaucoup modifier les caractéristiques du couplage piézo-électrique/structure. Cette stratégie de contrôle est de plus en plus développée pour obtenir un système dynamique contrôlé activement de façon intégrale (développement des structures intelligente).

L'étude expérimentale sera effectuée en collaboration avec la société METRAVIB et le L.M.A de l'Université de Besançon dans le cadre d'une aide accordée par le ministère de la Recherche et de la Technologie.

## Remarques

La synthèse de la méthodologie de conception d'une structure dynamique et des systèmes de contrôles peut être formulée dans un problème plus général associant les contrôles passif et actif. Les dimensions des éléments de structure et les gains optimaux du contrôle sont considérés alors comme variables de conception indépendantes. Avec cette stratégie, la description du problème de contrôle des structures dynamiques se formule sous la forme suivante :

$$\text{Minimiser : } [c_1 W(X) + c_2 J(X)]$$

$$\text{sous contrainte : } G(X) \leq 0, \quad Y^L \leq Y \leq Y^U$$

où  $W$  est le poids de structure,  $J$  un indice de performance,  $c_1$  et  $c_2$  sont les coefficients de pondération pour  $W$  et  $J$ . Le vecteur  $G$  représente les limitations. Le vecteur des variables de conception comporte à la fois les dimensions des éléments de structure (sections de barres, épaisseurs de plaque, etc.) et les gains optimaux du contrôle actif. Les vecteurs  $Y^U$  et  $Y^L$  sont les valeurs limites supérieures et inférieures de  $Y$ .

La stratégie qui a été adoptée dans cette étude est de considérer les deux problèmes particuliers suivants : premier problème, on considère  $c_1 = 1$  et  $c_2 = 0$ , qui correspond au problème d'optimisation structurale développé aux chapitres II et III. Dans le second problème, on considère  $c_1 = 0$  et  $c_2 = 1$ , qui correspond au problème de contrôle actif développé au dernier chapitre.

### *Conclusions*

Conceptuellement, on n'aurait pas de difficultés pour résoudre le problème de contrôle général défini précédemment avec des valeurs  $c_1$  et  $c_2$  quelconques. Néanmoins, le choix de ces coefficients peut être difficile et nécessiter la résolution du problème plusieurs fois avec des valeurs de  $c_1$  et  $c_2$  différentes, afin d'obtenir la solution donnant des valeurs acceptables de  $M$  et  $J$ .

ffffffffffffffffffff



## BIBLIOGRAPHIE

### A. REFERENCES SUR L'OPTIMISATION STRUCTURALE

- [A1] Brandon J.A., *Derivation and Significance of Second Order Modal Design Sensitivities*, AIAA Journal, Vol. 22, May 1984, pp. 723 - 724.
- [A2] Boudarel, R., Delmas, J. et Guichet, P., *Commande Optimale des Processus - Tome 2*, Dunod, Paris, 1968.
- [A3] Canfield, R. A., Grandhi, R. V., and Venkayya, V. B., *Optimum Design of Structures With Multiple Constraints*, AIAA Journal, Vol. 26, January 1988, pp. 78 - 85.
- [A4] Dobbs, M. W., Thornron, W. A., and Wilmert, K. D., *Application of Optimality Criteria to Automated Structural Design*, AIAA Journal , Vol. 14, October 1976, PP. 1436 - 1443.
- [A5] Haftka, R. T., Gürdal, Z., and Kamat, M. P., *Elements of Structural Optimization*, Second Revised Edition, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [A6] Horta, L. G., Juang, J. N., and Junkins, J. L., *A Sequential Linear Optimization Approach for Controller Design*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 9, No. 6, 1986, pp. 699 - 703.
- [A7] Kamat, M. P., and Simitzes, G. J., *Optimal Beam Frequencies by the finite element Displacement Method*, International Journal Solids Structures, 1973, Vol. 9, pp. 415 - 429.
- [A8] Kamat, M. P., Venkayya, V. B., and Khot, N. S., *Optimization With Frequency Limitations*, Journal of Sound and Vibration 91(1), 1983, pp. 147 - 154.

## Bibliographie

- [A9] Khan, M. R., Thornron, W. A., and Wilmert, K. D., *Optimality Criterion Techniques Applied to Mechanical Design*, Journal of Mechanical Design, April 1978, Vol. 100, pp. 319 - 327.
- [A10] Khot, N. S., *Non linear Analysis Optimized Structure With Constraints on System Stability*, AIAA Journal, Vol. 21, August 1983, pp. 1181 - 1186.
- [A11] Khot, N. S., Benke, L., and Venkayya, V. B., *Comparison of Optimality Criteria Algorithms for Minimum Weight Design of Structures*, AIAA Journal, Vol. 17, February 1979, pp. 182 - 190.
- [A12] Kiusalaas, J. and Shaw, R. C. J., *An Algorithm For Optimal Structural Design With Frequency Constraints*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 13, 1978, pp. 283 - 295.
- [A13] Levy, R. and Chai, K., *Implementation of Natural Frequency Analysis and Optimality Criterion Design*, Computers & Structures, Vol. 10, 1978, pp. 277 - 282.
- [A14] Levy, R. and Rarzinski, W., *Optimality Criteria Solution Strategies in Multiple-Constraints Design Optimisation*, AIAA Journal, Vol. 20, May 1982, pp. 708 - 715.
- [A15] Lust, R. V. and Schmit, L. A., *Alternative Approximation Concepts for Space Frame Synthesis*, AIAA Journal, Vol. 24, October 1986, pp. 1676 - 1684.
- [A16] Miele, A., Mangiavacchi, A., Mohanty, B. P., and Wu, A. K., *Numerical Determination of Minimum Mass Structure With Specified Natural Frequencies*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 13, 1978, pp. 265 - 282.
- [A17] Murty, D. V. and Haftka, R. T., *Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors of a General Complex Matrix*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, 1988, pp. 293 - 311.
- [A18] Nashif, A. D., *New Methods for Determining Damping Properties of Viscoelastic Materials*, University of Dayton, Dayton, Ohio.
- [A19] Powell, M. J. D., *A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculation*, presented at the 1977 Dundee Conference on Numerical Analysis

## Bibliographie

- [A20] Schmit, L. A., *Structural Design by Systematic Synthesis*, Proceedings and Conference on Electronic Computation, ASCE, New York, 1960, pp. 105 - 122.
- [A21] Sharp, R. S. and Brooks, P. C., *Application of Eigenvalue Sensitivity Theory to the Improvement of the Design of a Linear Dynamic System*, Journal of Sound and Vibration, 114(1), 1987, pp. 19 - 32.
- [A22] Sobieszczanski-Sobieski, J., James, B. B., and Dovi, A. R., *Structural Optimization by Multilevel Decomposition*, AIAA Journal, Vol. 23, November 1985, pp. 1775 - 1782.
- [A23] Suweca, W. and Jezequel L., *Optimisation Structurale en Présence de Contraintes Mixtes*, Conference Proceeding of StruCoMe 89, November 1989 - Paris, France.
- [A24] Trompette, P., Fleury, C., et Knopf-L enoir, C., *Optimisation des Structures (Approche de l'ingénieur)*, présenté au Séminaire de l'institut pour la Promotion des Sciences de l'ingénieur, Paris, 9 - 11 Septembre 1987.
- [A25] Vanderplaats, G. N., *Structural Optimisation - Past, Present, and Future*, AIAA Journal, Vol. 20, July 1982, pp. 992 - 1000.

## B. REFERENCES SUR LE CONTROLE ACTIF

- [B1] Balas, M. J., *Direct Output Feedback Control of Large Space Structures*, Journal of the Astronautical Sciences, Vol. XXVII, No. 2, April-June 1979, pp. 157 - 180.
- [B2] Balas, M. J., *Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 2, No. 3, 1979, pp. 252 - 253.
- [B3] Baz, A. and Poh, S., *Performance of an Active Control System With Piezoelectric Actuators*, Journal of Sound and Vibration 126(2), 1988, pp. 327 - 343.

## *Bibliographie*

- [B4] Bailey, T. and Hubbard, Jr. J. E., *Distributed Piezoelectric-Polymer Active Vibration Control of a Cantilever Beam*, Massachusetts Institut of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139.
- [B5] Beards, C. F., *Vibrations and Control Systems*, Ellis Horwood Limited, John Wiley and Sons, 1988.
- [B6] Chung, L. L., Lin, R. C., Soong, T. T., and Reinborn, A. M., *Experimental Study of Active Control for MDOF Seismic Structures*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 115, No. 8, August 1989, pp. 1608 - 1626.
- [B7] Crawley, E. F. and Javier de Luis, *Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures*, AIAA Journal, Vol. 25, October 1987, pp. 1373 - 1385.
- [B8] Fanson, J., Caughey, T. and Chen, J., *Vibration Suppression by Stiffness Control*, Workshop on Structural Dynamics and Control Interaction of Flexible Structures, April 1986.
- [B9] Imbert, J. F., *Analyse des Structures par Eléments Finis*, Cépadus, Toulouse-France, 1984.
- [B10] Khot, N. S., Venkayya, V. B. and Eastep, F. E., *Optimal Structural Modifications to Enhance the Active Vibration Control of Flexible Structures*, AIAA Journal, Vol. 24, August 1986, pp. 1368 - 1374.
- [B11] Leipholz, H. H. E., editor, *Structural Control*, Proceedings of the Second International Symposium on Structural Control, University of Waterloo, Ontario, Canada, July 15 - 17, 1985.
- [B12] Lust, R. V. and Schmit, L. A., *Control-Augmented Structural Synthesis*, AIAA Journal, Vol. 26, January 1988, pp. 86 - 95.
- [B13] Meirovitch, L. and Baruh, H., *Control of Self-Adjoint Distributed-Parameters Systems*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 5, No. 1, 1982, pp. 60 - 66.
- [B14] Meirovitch, L., Baruh, H. and Öz, H., *A Comparison of Control Techniques for Large Flexible Systems*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6 No. 4, 1983, pp. 302 - 310.
- [B15] Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Co., New York, N. Y., 1967.

## *Bibliographie*

- [B16] Nagaya, K., Takeda, S., Tsukui, Y. and Kumaido, T., *Active Control Method for Passing Through Critical Speed of Rotating Shafts by Changing Stiffness of the Supports With Use of Memory Metals*, Journal of Sound and Vibration 113(2), 1987, pp. 307 - 315.
- [B17] ÖZ, H., *Fundamental Aspects of Structure Control, Proceeding of the second International Symposium on Structural Control*, University of Waterloo, Ontario, Canada, July 15 - 17, 1985.
- [B18] Venkayya, V. B. and Tischler, V. A., *Frequency Control and Its Effect on the Dynamic Response of Flexible Structures*, AIAA Journal, Vol. 23, November 1985, pp. 1768 - 1774.
- [B19] Zhang, Q., Liu, J. Y. H., Allemang, R. J. and Tsuei, Y. G., *Active Control of Flexible Structure by Eigenstructure Assignment Technique*, Structural Dynamics Research Laboratory, Departement of Mechanical & Industrial Engineering, University of Cincinnati.
- [B20] Baruh, H., Choe, K., *Sensor Placement in Structural Control*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 13 No. 3, 1990, pp. 524 - 533.
- [B21] Suweca, W. and Jezequel L., *Amortissement Actif des Structures à l'aide de Couche Piézo-électriques*, Conference Proceeding of StruCoMe 90, November 1990 - Paris, France.

ffffffffffffffffffff

dernière page de la thèse

## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 Juillet 1984, modifié par l'arrêté du 21 Mars 1988 et l'arrêté du 23 Novembre 1988,

Vu la demande du Directeur de Thèse

L. JEZEQUEL      Professeur - ECL - Ecully (69)

et les rapports de

T. MATHIA      Professeur - Ecole Centrale de Lyon (69),

M. VAUTRIN      Professeur - ENSME - St Etienne (42),

Monsieur **SUWECA I Wayan**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention  
du titre de DOCTEUR

Spécialité : MECANIQUE

Fait à Ecully, le 19 décembre 1990

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
Le Directeur  
de l'Administration de la  
Recherche

