

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

École doctorale MEGA

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

par

Yohann Duguet

**Simulation numérique de l'instabilité
dans un cylindre de gaz tournant
soumis à une compression périodique**

Soutenue le 22.10.2004 devant la Commission d'Examen

Jury : MM. J. Scott - *Directeur de Thèse*
O. Daube - *Rapporteur*
D. Jeandel - *Président*
R.R. Kerswell
S. Le Dizès
L. Le Penven
J. Sommeria - *Rapporteur*

Simulation numérique de l'instabilité dans un cylindre de gaz tournant soumis à une compression périodique

Ce travail de thèse porte sur la simulation numérique directe d'une nouvelle instabilité hydrodynamique dans les écoulements de gaz tournants confinés. Il confirme les résultats analytiques proposés par J.F. Scott et J.P. Racz (2001) et sur le travail expérimental de L. Graftieaux (2003). Le mécanisme de résonance paramétrique proposé prédit la croissance conditionnelle de certaines paires de modes inertiels couplées aux oscillations harmoniques d'un piston.

La méthode numérique est basée sur l'hypothèse d'axisymétrie de l'écoulement, s'appuie sur une méthode spectrale de type Galerkin. Le caractère singulier des conditions aux limites de la vitesse dans les coins du cylindre impose un traitement spécial et nécessite la réécriture complète d'un code de calcul. Ce traitement repose sur la soustraction d'un champ singulier déterminé de façon analytique.

Les calculs réalisés ont permis de caractériser la structure spatiale des modes inertiels mis en jeu par la résonance, une attention particulière étant portée sur le mode inertiel déjà identifié expérimentalement par Graftieaux. Une étude numérique de l'état de base du système a mis en évidence deux types de régimes qui se distinguent par la pulsation du forçage. Un diagramme de stabilité marginale a été établi autour de la fréquence d'excitation du mode instable, en bon accord avec les travaux précités. Enfin, une exploration du régime non linéaire de l'instabilité a mis en évidence deux dynamiques possibles : un régime de saturation ou un régime avec modulation de l'amplitude expliqué par un scénario de désaccordage fréquentiel. Le rôle des différents modes inertiels impliqués a été quantifié, ainsi que le couplage avec les modes géostrophiques du cylindre en rotation.

mots clés : Instabilité, Rotation, Méthodes spectrales, Résonance paramétrique.

Numerical simulation of the instability inside a rotating gas cylinder subject to periodic compression

This work concerns the direct numerical simulation of a new instability phenomenon occurring in confined rotating gas flows. It confirms the analytical results of J.F. Scott and J.P. Racz (2001) and the experimental work of L. Graftieaux (2003). A parametric resonance mechanism leads to conditional growth of inertial mode pairs coupled by harmonic oscillations of a piston.

A numerical code was developed under the assumption of axisymmetry of the flow, based on a Galerkin-type spectral method. Special treatment of the velocity singularities in the cylinder corners is based on the subtraction of an analytically specified flow that mimics the corner singularity. The numerical results allow complete characterization of inertial mode pairs coupled by resonance, with particular attention focused on the primary axisymmetric mode studied experimentally by Graftieaux. A numerical study of the basic flow showed two regimes depending on the forcing frequency. A marginal stability diagram was constructed and agreed well with earlier works. Two types of modal dynamics were found in the nonlinear regime : saturated of the mode amplitude to a constant value or slow-time amplitude modulation resulting from detuning by spin-up of geostrophic modes. The role of different inertial modes was quantified, as was the nonlinear coupling with geostrophics modes.

keywords : Instability, Rotation, Spectral methods, Parametric resonance.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Historique des travaux sur les écoulements en rotation	5
1.2	Principales bases théoriques	6
1.2.1	Rôle des forces inertielles	6
1.2.2	Oscillations inertielles	6
1.2.3	Rôle de la viscosité	7
1.3	Manifestations des effets de rotation dans les écoulements	7
1.3.1	Circulation atmosphérique et océanique	7
1.3.2	Convection dans le noyau terrestre	8
1.3.3	Écoulements astrophysiques	10
1.3.4	Intérêt industriel	10
1.4	Instabilités dans les écoulements tournants	11
1.4.1	Phénomènes tourbillonnaires	11
1.4.2	Instabilité elliptique	12
1.4.3	Instabilité d'un écoulement tournant compressé	13
1.5	Instabilité dans un cylindre tournant compressé périodiquement	14
1.5.1	Description du système étudié	14
1.5.2	Un nouveau mécanisme de résonance paramétrique	16
1.5.2.1	Pendule de Matthieu	16
1.5.2.2	Autres exemples d'instabilité paramétrique	18
1.5.3	Identification des modes inertiels dans un cylindre en rotation	18
1.6	Problématique	19
1.7	Plan de la thèse	19
2	Approche analytique et expérimentale	22
2.1	Présentation du phénomène	22
2.1.1	Paramètres et notations	22
2.1.2	Dispositif expérimental	23
2.1.3	Equations du problème	24
2.1.3.1	Adimensionnalisation	25
2.1.3.2	Solution particulière non visqueuse et état de base	27
2.1.4	Changement de coordonnées adopté	27
2.1.5	Equations de la perturbation	28
2.2	Projection sur la base des modes inertiels	29
2.2.1	Présentation des modes inertiels d'un cylindre en rotation	29
2.2.2	Projection sur la base des modes de Kelvin	30
2.2.3	Couplage modal linéaire par le mouvement du piston	31
2.3	Analyse asymptotique pour $\epsilon \ll 1$	32
2.3.1	Simplification de l'état de base	32
2.3.2	Equations d'amplitude	33
2.3.3	Phase d'instabilité linéaire	34
2.3.4	Au-delà de la phase d'instabilité linéaire	35

2.3.4.1	Couplage avec les modes géostrophiques	35
2.3.5	Classification des différents comportements au-delà du seuil	37
3	Présentation de l'algorithme numérique	42
3.1	Formulation spectrale	42
3.1.1	Equations du problème	42
3.1.2	Choix d'une méthode spectrale	44
3.1.3	Projection spectrale des équations	45
3.1.4	Traitement des singularités	47
3.1.4.1	Mise en évidence des singularités du problème	47
3.1.4.2	Technique de soustraction proposée	47
3.1.5	Système d'équations projeté	52
3.1.6	Choix d'une base spectrale	54
3.1.7	Expression analytique des fonctions construites	56
3.2	Méthodes numériques	57
3.2.1	Troncature du système	57
3.2.2	Estimation a priori de la discrétisation spectrale nécessaire	58
3.2.3	Schéma d'intégration en temps	59
3.2.4	Algorithme d'inversion matricielle	60
3.2.5	Traitement du terme non-linéaire	61
3.2.6	Calcul des coefficients, intégration spatiale	64
3.2.6.1	Algorithme d'intégration de Romberg 1D	65
3.2.6.2	Généralisation 2D de l'algorithme de Romberg	65
3.2.6.3	Critère pratique de convergence	67
3.3	Application au calcul d'un écoulement en compression	67
3.4	Extension à des problèmes plus généraux	72
4	Dynamique des modes inertiels dans un cylindre tournant	74
4.1	Modes de Kelvin visqueux	74
4.2	Caractère conservatif du schéma spectral	75
4.3	Spectre de l'opérateur linéarisé	76
4.3.1	Détermination numérique du spectre	76
4.3.2	Allure graphique des spectres	78
4.3.3	Problème de la classification en familles de modes axisymétriques	82
4.3.3.1	Modes géostrophiques	82
4.3.3.2	Modes verticaux	85
4.4	Pulsations des modes inertiels	86
4.5	Taux de déclin des modes inertiels	87
4.6	Profils de vitesse	90
4.7	Caractérisation de l'écoulement dans les couches d'Ekman	94
4.7.1	Modes géostrophiques	95
4.7.2	Mode axisymétrique primaire	98
4.8	Dynamique non-linéaire	100
4.9	Conclusion	102
5	Etude numérique de l'état de base	104
5.1	Complémentarité de l'étude numérique	104
5.1.1	Etat de base en l'absence de viscosité	104
5.1.2	Ordre de grandeur de l'écoulement de base visqueux	104
5.1.3	Champ résolu par le schéma	105
5.2	Périodicité de l'écoulement	105
5.3	Caractérisation fréquentielle de l'écoulement de base	106
5.3.1	Périodicité du champ des vitesses à partir de son spectre	106

5.3.2	Rôle des harmoniques supérieures	106
5.4	Topologie de l'écoulement secondaire dans le cas $0 < \omega_0 < 1$	108
5.4.1	Singularité du cas $0 < \omega_0 < 1$	108
5.4.2	Mécanisme de propagation des paquets d'ondes inertielles	108
5.4.3	Mise en évidence numérique des zones de cisaillement	111
5.4.4	Effets de grande course	112
5.4.5	Conclusion	113
5.5	Topologie de l'écoulement secondaire dans le cas $\omega_0 > 1$	113
5.5.1	Profils de vitesse	114
5.5.2	Influence de la course	116
5.5.3	Conclusion	118
6	Déstabilisation du système par une compression périodique	120
6.1	Instabilité linéaire du mode axisymétrique primaire	120
6.1.1	Mise en évidence d'une réponse sous-harmonique	121
6.1.2	Mesure des taux de croissance linéaire	123
6.1.2.1	Algorithme de filtrage fréquentiel	123
6.1.2.2	Algorithme de Prony	124
6.1.2.3	Comparaison des résultats obtenus	125
6.1.2.4	Influence sur la détermination du nombre de Reynolds critique	126
6.1.3	Seuil d'instabilité marginale dans le plan $(\omega_0 - Re)$	127
6.1.3.1	Origine des écarts avec la théorie	128
6.1.3.2	Comparaison avec les résultats expérimentaux	129
6.2	Comportement non linéaire du mode axisymétrique primaire	130
6.2.1	A la recherche d'un état saturé	130
6.2.2	Saturation avec oscillations basse fréquence	133
6.2.3	Structure spatiale du mode axisymétrique primaire	133
6.3	Présence d'un écoulement géostrophique	144
6.3.1	Couplage géostrophique	144
6.3.2	Comparaison des profils de vitesse azimuthale	145
6.3.3	Désaccordage fréquentiel	147
6.4	Répartition modale de l'énergie	149
6.5	A propos du seuil théorique de divergence	152
7	Conclusion	154
	Appendices	156
A	Variations du nombre de Reynolds	156
B	Résolution du problème de Stokes plan	158

Chapitre 1

Introduction

1.1 Historique des travaux sur les écoulements en rotation

La dynamique des écoulements fluides, dans le cas où le référentiel d'étude est en rotation uniforme, a donné lieu, depuis les débuts historiques de la discipline, à un grand nombre de travaux. A l'origine, les premiers résultats marquants sont dus aux travaux théoriques de Lord Kelvin [1] puis H. Poincaré, à la fin du *XIX^{ème}* siècle, qui ont étudié et mis en équation les oscillations (dites "ondes inertielles" et parfois "ondes de Kelvin") au sein d'un écoulement en rotation uniforme, la force de Coriolis agissant mécaniquement comme une force de rappel. La motivation première de Kelvin, qui peut sembler déplacée aujourd'hui compte tenu des avancées en physique de la matière et de la validation de l'hypothèse atomique, était de classer les différentes structures tourbillonnaires de l'éther et de relier cette classification aux différentes propriétés des éléments chimiques [2]. Néanmoins ces résultats de Kelvin se sont révélés par la suite fondamentaux par leur apport en dynamique des fluides, même si la mise en évidence expérimentale de ces structures oscillantes a attendu les travaux de Bjerknes, Solberg et Bergeron [3] dans la première moitié du *XX^{ème}* siècle. Les météorologistes et océanographes de l'école norvégienne de Bergen ont mis en évidence, et quantifié l'importance des effets de la rotation de la terre sur les courants atmosphériques et marins tout en précisant le rôle des oscillations inertielles dans les processus de circulation générale. On peut évoquer par exemple la contribution du suédois V. W. Ekman, qui a le premier postulé que c'est la rotation de la terre qui est responsable de la déviation des mouvements de la banquise, et qui a caractérisé le rôle de la viscosité dans les écoulements tournants à proximité d'une paroi solide. A la même époque, en Angleterre, G. I. Taylor [4] a fait progresser la compréhension générale des écoulements tournants, par un nombre d'expériences souvent simples. En particulier il a mis en évidence, pour les écoulements incompressibles, l'équilibre stationnaire entre les efforts de pression et la force de Coriolis, caractérisé par la bidimensionnalité de l'écoulement (théorème de Taylor-Proudman) et l'existence des colonnes qui portent son nom de part et d'autre d'un obstacle. Citons au passage la monographie de H. P. Greenspan [5], datant de 1969, qui fait le bilan des connaissances théoriques et expérimentales de l'époque sur la dynamique des écoulements tournants. Dans la seconde partie du siècle, l'essor des modèles de fermeture dans le cadre des théories sur les écoulements turbulents a naturellement conduit la communauté à s'intéresser aux écoulements turbulents en rotation. Là encore, l'effet de la rotation est essentiellement de rompre l'isotropie de l'écoulement puisqu'il donne naissance à des structures cohérentes allongées selon la direction de l'axe de rotation, baptisées "cigares" [6] [7]. Une analogie frappante existe entre la bidimensionnalisation d'un écoulement laminaire expliqué par le théorème de Taylor-Proudman, et la structuration bidimensionnelle des écoulements turbulents soumis à la rotation. Cependant les deux phénomènes sont par nature différents : le premier résulte d'un équilibre entre des effets linéaires et prédit que pour une rotation dominante, au bout d'un certain temps, seuls les modes géostrophiques interviennent dans l'écoulement. En revanche, dans le cas turbulent où toutes les directions de propagation sont initialement présentes, ce sont les phénomènes non linéaires qui permettent

la sélection préférentielle des modes géostrophiques bidimensionnels [8]. De nombreuses études récentes sur la turbulence géophysique cherchent à caractériser les effets du couplage entre les ondes inertielles dues à la rotation et les ondes internes dues à la stratification du milieu. Une analogie frappante existe en effet entre les modes de propagation associés à ces deux effets, et le couplage des deux phénomènes apparaît pertinent dans l'étude de la turbulence atmosphérique et océanique.

1.2 Principales bases théoriques

1.2.1 Rôle des forces inertielles

Tous les écoulements en rotation présentent des caractéristiques originales et leur interprétation à partir du référentiel tournant échappe parfois à l'intuition directe. En effet, le bilan des forces en jeu, vu du référentiel tournant à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$, fait intervenir deux forces supplémentaires par rapport à la dynamique vue du référentiel fixe. La première, qui est la plus intuitive, est la force centrifuge. Il s'agit, lorsque la masse volumique est constante, d'une force dérivant d'un potentiel. Son effet est d'éloigner les particules fluides de l'axe de rotation. Elle est équilibrée par une variation de la pression au sein du fluide, si bien qu'elle ne participe pas directement à la dynamique de l'écoulement. La seconde, dite de Coriolis, est une force qui ne produit pas de travail, et dévie les particules de leur mouvement relatif. Ces forces sont simplement l'analogue en milieu continu des forces centrifuges et de la force de Coriolis qui s'appliquent sur un point matériel dans un référentiel tournant. Si l'écoulement est décrit en variables eulériennes par un champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, un champ de pression $p(\mathbf{x}, t)$ et un tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$, alors l'équation de conservation de la quantité de mouvement du fluide, dite de Navier-Stokes en repère tournant, s'écrit :

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right)}_{\text{acceleration}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{forces de pression}} + \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}_{\text{contraintes visqueuses}} - \underbrace{2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}}_{\text{force de Coriolis}} - \underbrace{\rho \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})}_{\text{force centrifuge}} \quad (1.1)$$

La mise sous forme sans dimension des différentes grandeurs fait intervenir plusieurs nombres qui mesurent l'importance relative des différentes forces en jeu. En particulier, on définit à partir de grandeurs caractéristiques comme la vitesse par rapport au repère tournant U , la longueur caractéristique L et le taux de rotation Ω le nombre de Rossby $Ro = \frac{U}{2\Omega L}$ mesurant l'importance des effets non linéaires sur la dynamique de l'écoulement, relativement aux effets de la rotation. De la même façon, si le fluide, supposé newtonien, possède une viscosité cinématique ν , le nombre d'Ekman $E = \frac{\nu}{2\Omega L^2}$ mesure l'importance des effets visqueux par rapport aux effets de rotation. Dans cette thèse, on choisit plutôt le nombre sans dimension $Re = E^{-1} = \frac{2\Omega L^2}{\nu}$, analogue à un nombre de Reynolds basé sur la vitesse de rotation du fluide.

Le cas limite d'un écoulement stationnaire faiblement visqueux ($E \ll 1$) et où la non-linéarité n'est pas dominante ($Ro \ll 1$) constitue le cadre d'application strict du théorème de Taylor-Proudman. Un tel écoulement est bidimensionnel, ne présente pas de variations selon l'axe de rotation, et est qualifié de "géostrophique".

1.2.2 Oscillations inertielles

Les écoulements tournants peuvent être le siège d'oscillations de petite amplitude, appelées ondes inertielles. Celles-ci sont représentées par les solutions du système de Navier-Stokes linéarisé dans le cas incompressible et non visqueux, recherchées sous la forme d'ondes planes progressives avec une dépendance en $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$. Le vecteur d'onde \mathbf{k} est relié à la pulsation ω par la relation

$\omega = 2\Omega \cos(\mathbf{\Omega}, \mathbf{k})$, indiquant un comportement dispersif et fortement anisotrope [9]. La fréquence des ondes inertielles est bornée par le double du taux de rotation. Leur dynamique temporelle est déterminée uniquement par la direction de propagation et non par la valeur du nombre d'onde. La vitesse de propagation de l'énergie d'une onde, donnée par la vitesse de groupe, est orthogonale à la vitesse de phase. Cette propriété permet d'associer une fréquence d'oscillation donnée à une direction de propagation donnée. Les ondes dont la vitesse de phase est parallèle à l'axe de rotation sont les plus rapides. Inversement, lorsque la géométrie permet l'existence de contours fermés sur une hauteur de fluide constante (comme dans le cas particulier du cylindre droit tournant autour de son axe), les ondes dont le vecteur d'onde est perpendiculaire à ce même axe de rotation sont stationnaires. Elles correspondent à des modes bidimensionnels de circulation non nulle, dits "géostrophiques", qui forment l'écoulement décrit par le théorème de Taylor-Proudman.

Notons l'analogie qui peut être faite entre les ondes inertielles et les ondes dites internes dues à la stratification du milieu, dont la relation de dispersion est $\omega = N \sin(\mathbf{\Omega}, \mathbf{k})$, où N est la fréquence de Brünt-Vaisälä, lorsque la stratification principale se fait selon la même direction que la rotation [9].

1.2.3 Rôle de la viscosité

La viscosité agit sur les écoulements tournants comme un phénomène dissipatif. Les structures se dissipent d'autant plus rapidement que leur échelle caractéristique est petite. Lorsque le nombre d'Ekman est asymptotiquement petit, l'écoulement peut être décomposé en un écoulement externe et un écoulement dit de couche d'Ekman, confiné dans une zone d'épaisseur $O(E^{\frac{1}{2}})$ [5]. L'écoulement à l'intérieur de la couche d'Ekman subit une déviation due à la compétition entre effets visqueux et effets de la rotation, l'hodographe des vitesses ayant la forme d'une spirale. A cet écoulement est associé un échange de matière et de quantité de mouvement de part et d'autre de la couche d'Ekman, qui a pour effet d'accélérer le déclin des ondes inertielles. On retrouve également ce type d'écoulement de recirculation dans les configurations de type spin-down où un fluide en rotation uniforme est subitement freiné.

1.3 Manifestations des effets de rotation dans les écoulements

1.3.1 Circulation atmosphérique et océanique

Les manifestations les plus spectaculaires des effets de la force de Coriolis sur les écoulements fluides sont les phénomènes de circulation atmosphérique ou océanique dans les couches superficielles des planètes. Leur rotation propre induit à grande échelle des mouvements localement bidimensionnels. La rotation de la Terre agit de la même façon sur la circulation océanique, la prise en compte du couplage entre atmosphère et océan étant fondamentale pour la prévision climatique. C'est la force de Coriolis, associée à l'évaporation de l'eau, qui permet la persistance des phénomènes cycloniques au-dessus des océans lorsque leur échelle caractéristique est suffisamment grande (de l'ordre de la centaine de kilomètres sur la Terre). En revanche, à plus petite échelle, le nombre de Rossby lié à l'écoulement devient grand et les effets non linéaires sont fortement dominants : par exemple, contrairement à certaines idées reçues, la force de Coriolis n'agit pas de façon significative sur le sens de rotation d'un tourbillon de vidange d'une baignoire.

Il semble que les ondes inertielles dans l'océan, identifiables à leur basse fréquence et à leur mode de propagation, jouent un rôle dans les "anomalies" climatiques comme le violent phénomène El Niño (voir figure 1.2). Remarquons que, dans les applications aux couches superficielles des planètes, seule la composante de $\mathbf{\Omega}$ orthogonale au champ de vitesses est à l'origine de sa déviation, c'est pourquoi le paramètre 2Ω est remplacé par $f = 2\Omega \sin \phi$, où ϕ représente

la latitude, définie comme étant nulle à l'équateur et positive au pôle Nord [10]. Les effets de la rotation sont généralement plus complexes que dans les cas d'école purement bidimensionnels, puisque les variations de latitude à la surface de la terre font que la rotation agit de façon maximale aux pôles et n'agit pas à l'équateur, favorisant ainsi des courants ondulatoires comme les ondes de Rossby. Certaines planètes du système solaire, y compris le soleil, possèdent un taux de rotation qui n'est de plus pas uniforme, dépendant de la latitude et de la profondeur, ce qui induit des complications supplémentaires. L'exemple de la persistance apparente de la fameuse "tache rouge" dans l'atmosphère de Jupiter est à ce niveau emblématique des difficultés théoriques de l'étude de tels écoulements.



FIG. 1.1 – Photographie satellite d'un cyclone au large de l'Inde et du Pakistan en Mai 1999 (image NOAA). La persistance de telles structures tourbillonnaires dans l'atmosphère aux latitudes des zones tempérées ou polaires, ainsi que leur sens de rotation, s'expliquent par l'action de la force de Coriolis. Il n'en est plus de même aux latitudes proches de l'équateur où la force de Coriolis est faible et où le sens de rotation des cyclones peut varier.

1.3.2 Convection dans le noyau terrestre

Un autre phénomène géophysique est également lié à la rotation de la terre, bien qu'il affecte cette fois-ci le noyau terrestre : le géomagnétisme. Lorsque le fluide est électriquement conducteur, les écoulements en rotation subissent la déviation associée à la force de Coriolis ainsi que celle due à la force de Laplace, induisant souvent des écoulements dont la topologie est complexe. Ils sont donc de bons candidats pour générer des champs magnétiques par l'effet dynamo. L'hypothèse actuelle permettant d'expliquer la présence d'un champ magnétique terrestre, ainsi que ses inversions, est basée sur un modèle magnétohydrodynamique appliqué aux lents mouvements internes du noyau. La convection thermique des roches métalliques en fusion dans le noyau, associée à la force de Coriolis, génère en effet des mouvements internes complexes à la base d'un effet dynamo, c'est-à-dire la bifurcation d'un état hydrodynamique à un état magnétohydrodynamique. De récentes hypothèses mettent en jeu l'influence gravitationnelle de la lune, qui exerce à distance un champ de déformation elliptique sur l'écoulement au sein du noyau terrestre [11]. L'instabilité mécanique résultant de cette interaction fait intervenir les modes inertiels d'une sphère en rotation et est à rapprocher de l'instabilité elliptique décrite plus loin dans le cadre d'une géométrie sphérique [12]. Elle semble en mesure d'éclairer la

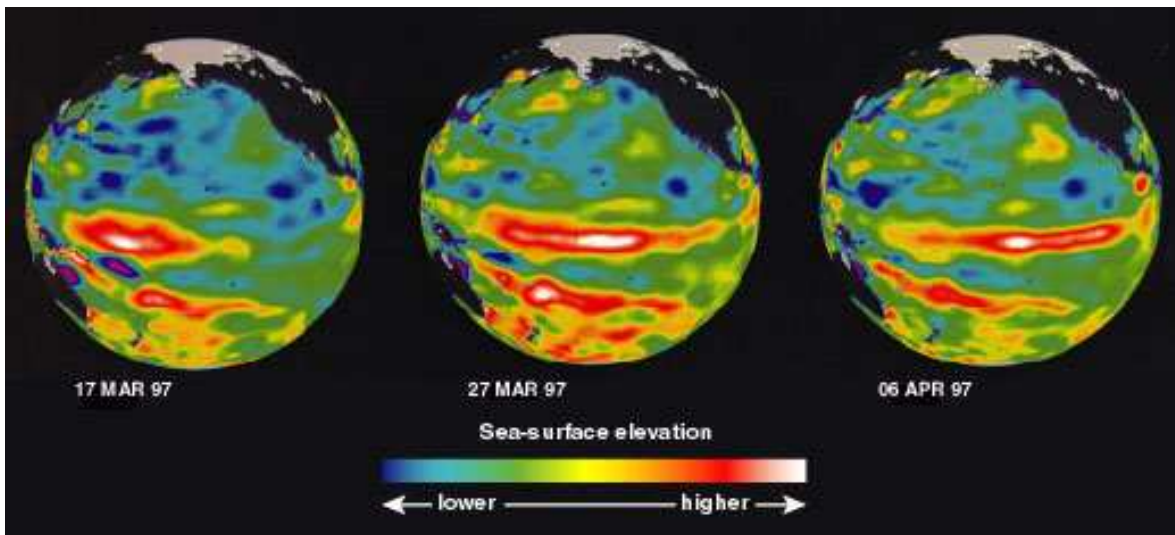


FIG. 1.2 – Visualisation satellite de la progression vers l'Est d'un paquet d'ondes inertielles dans l'Océan Pacifique lors du phénomène El Niño en 1997. L'élévation de quelques mètres du niveau de l'eau, due au passage de l'onde, accompagnée d'un brusque changement climatique, a causé de nombreux dégâts matériels et humains sur les côtes nord et sud-américaine (source California Institute of Technology, Jet Propulsion Laboratory).

compréhension de la dynamique et de la structuration des mouvements internes au noyau, même si aujourd'hui peu d'études envisagent le problème complet du couplage de cette instabilité avec les mécanismes de convection thermique et avec la présence d'un champ magnétique.



FIG. 1.3 – Photographie de la tache rouge à la surface de Jupiter (source Nasa). Cette structure cohérente encore mal expliquée est un exemple de la complexité de la dynamique des fluides en rotation dans le cas géophysique.

1.3.3 Écoulements astrophysiques

A plus grande échelle encore, les effets de rotation sont importants en astrophysique, lorsque l'on modélise les galaxies comme un gaz très peu dense et sans pression. La rotation permet d'expliquer dans la limite des modèles actuels certains processus d'agrégation de particules de très petite taille, qui ont vraisemblablement conduit à la formation localisée de matière solide. Les structures spiralées couramment observées sont caractéristiques des effets inertiels.



FIG. 1.4 – Photographie de la constellation spirale de la Grande Ourse (photo CEA). On distingue clairement les bras spiralés traduisant les effets de la rotation.

1.3.4 Interêt industriel

Aujourd'hui, en dehors du cadre des écoulements géophysiques, la compréhension des écoulements tournants est particulièrement importante dans le secteur industriel car beaucoup d'engins motorisés utilisent un mouvement de rotation, soit pour produire de l'énergie à l'aide d'un mouvement périodique, soit dans une optique de mélange. Parmi les engins fréquemment utilisés dans la vie courante, on peut citer les machines à laver, les ventilateurs, les éoliennes, les lecteurs de disques compacts ou les mixeurs alimentaires. Tous les appareils de type rotor-stator font également intervenir des effets rotationnels importants, c'est le cas général des turbines hydrauliques et des turbomachines dans les moteurs d'avions, dont l'optimisation reste un enjeu industriel phare.

Beaucoup d'engins spatiaux possèdent un mouvement de rotation destiné à assurer leur stabilité ou à mieux répartir l'ensoleillement durant le vol. Cette rotation, associée aux inévitables phénomènes de précession, peut provoquer des phénomènes de résonance [13] qui amplifient les oscillations du liquide dans le réservoir. Ce phénomène se manifeste par une déstabilisation a priori non souhaitable de l'engin.

Un autre exemple est celui des chambre de combustion, également appelées "brûleurs", dans lesquelles un mélange combustible, éventuellement prémélangé, est injecté sous forme de spray dans un volume de contrôle cylindrique. Expérimentalement, on a constaté que la rotation en bloc du dispositif possède un effet essentiellement stabilisant pour la dynamique de la flamme. L'enjeu est ici majoritairement de réduire les émissions polluantes, ainsi que d'éviter les régimes où la flamme se stabilise non pas dans la chambre de combustion, mais dans l'injecteur de prémélange, au risque d'une destruction du système. Si la concrétisation des dispositifs en question a généralement précédé le développement des théories en mesure de les expliquer, une compréhension accrue de ces phénomènes permet une optimisation importante des performances



FIG. 1.5 – Photographie du satellite de communication géostationnaire Intelsat 603 lors d'une mission de réparation en mai 1992 (tirée du site internet <http://satobs.org/>). Hormis les antennes et les panneaux censés garder une cap fixe par rapport à la terre, l'ensemble de ce satellite de type Hughes HS est mis en rotation autour de son axe principal à une vitesse angulaire de 55 rpm.

de ces appareils.

1.4 Instabilités dans les écoulements tournants

1.4.1 Phénomènes tourbillonnaires

La théorie des écoulements tournants a été utilisée pour tenter de décrire la dynamique des structures tourbillonnaires. Les résultats expérimentaux ainsi que numériques ont mis en évidence l'existence, dans les écoulements turbulents (non nécessairement soumis à une rotation uniforme) la présence de structures intenses de vorticités localisées dans l'espace [14], [15]). Ces filaments de vorticités sont sujets à de violentes instabilités et donnent lieu à des explosions tourbillonnaires. L'étude de l'instabilité de ces structures isolées peut être utile à la compréhension des phénomènes d'intermittence à petite échelle. Or ces structures en filaments peuvent être décrites en première approche, à l'image du modèle classique du tourbillon de Rankine, comme une région de cœur où le taux de rotation est uniforme, entourée d'une zone irrotationnelle. Les instabilités observées ne semblent pas être un caractère intrinsèque à l'écoulement tourbillonnaire d'origine. Les études les plus pertinentes concernent l'interaction d'un écoulement en rotation avec une perturbation extérieure à l'écoulement, comme par exemple l'interaction d'une zone localisée de vorticités avec un champ de déformation imposé. C'est la situation générique qui résulte de l'interaction entre plusieurs filaments de vorticités, chacun des filaments induisant sur l'autre un champ de déformation qui modifie les trajectoires des particules de l'écoulement. Différentes configurations peuvent être envisagées, en fonction de l'angle que fait le vecteur rotation avec les axes principaux du tenseur des taux de déformation, comme sur la figure 1.6 (on

rappelle que la symétrie de celui-ci implique l'orthogonalité des directions propres).

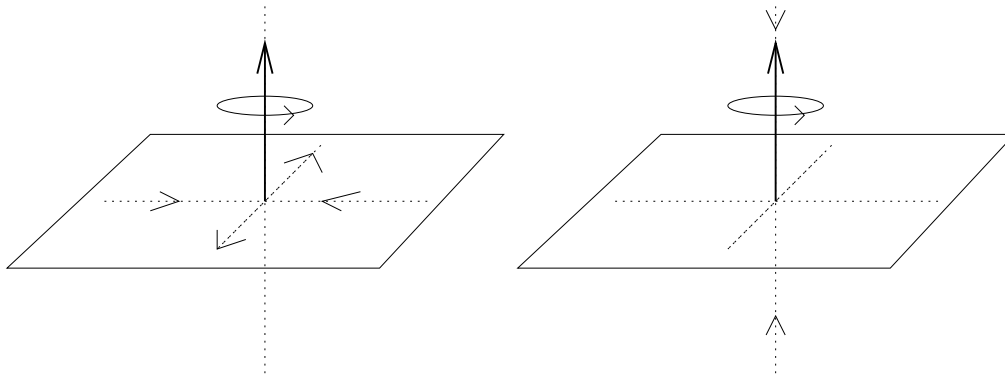


FIG. 1.6 – Schéma de deux configurations dans lesquelles les directions principales du tenseur des taux de déformation (en pointillés) sont soit orthogonales à la vorticité initiale (en gras), comme dans l'instabilité elliptique (à gauche), soit alignées avec la vorticité, comme dans l'instabilité du cylindre tournant compressé (à droite).

1.4.2 Instabilité elliptique

Le cas bidimensionnel où le taux de déformation est appliqu e dans des directions orthogonales à l'axe de rotation donne lieu à une instabilité tridimensionnelle connue sous le nom d'*instabilité elliptique*. Ce phénomène est à l'origine de nombreuses études théoriques et expérimentales, dès les années 70, dans les pays occidentaux comme dans les pays soviétiques. Du côté occidental, les premiers travaux concernent justement l'interaction entre deux filaments tourbillonnaires comme ceux rencontr es dans le sillage des ailes d'avion. Le mécanisme d'instabilité fait intervenir des ondes inertielles dans chacun des c oeurs des vortex, induisant une instabilité à grande [16] ou courte [17] longueur d'onde. Le mécanisme en question a servi ensuite à expliquer l'instabilité d'un écoulement en rotation simple soumis à un taux de déformation dans le plan de la rotation, selon un formalisme de Théorie de la Distorsion Rapide (RDT) [18], où une infinité non dénombrable de modes de Fourier dépendant du temps sont candidats à l'instabilité ([19] puis [20]).

Plus tard, les travaux théoriques de Pierrehumbert [21], puis Waleffe [22], se sont focalis es sur le cas plus générique d'un écoulement tourbillonnaire, localis e ou non, soumis à un étirement constant. L'instabilité elliptique est alors reconnue comme un mécanisme de résonance paramétrique entre différents modes propres asymétriques, qui génère de la vorticité dans une direction orthogonale à celle de l'écoulement de base. Ces modes propres, dits modes inertiels, croissent par paires si la différence entre leurs deux nombres d'onde azimuthaux est égale à 2 (pour un écoulement elliptique) ou plus généralement si elle est égale à n , pour le cas plus général de l'instabilité multipolaire  etudi e par Eloy [23], où n caractérise la déformation des lignes de courant de l'écoulement de base. Par une série finie de bifurcations, l'écoulement évolue d'un état satur e vers un état turbulent [24] avec des cycles d'explosion et de relaminarisation ([22], et expérimentalement [25] [23] (voir figure 1.7)).

Dans un contexte plus industriel, l'instabilité elliptique appar ait comme un des premiers stades de la compression d'un vortex dans une chambre de combustion. C'est la cas des moteurs où le processus d'admission génère un tourbillon de type *tumble* qui est soumis à un fort taux de compression [26] et évolue vers un désordre à petite échelle.

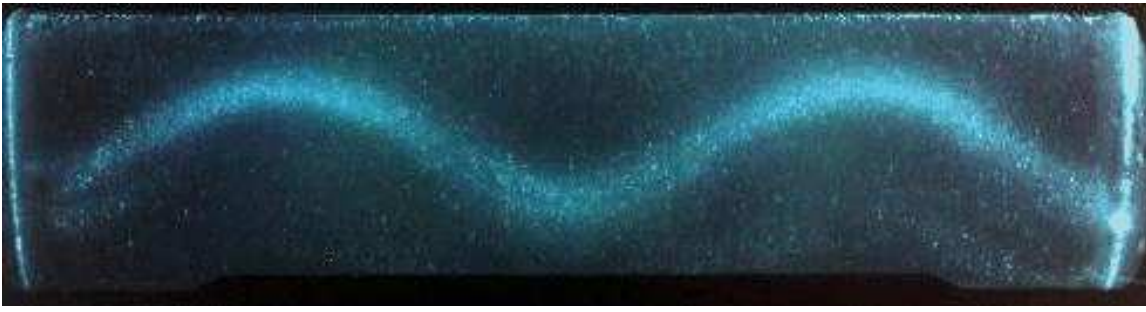


FIG. 1.7 – Visualisation expérimentale de la résonance couplée des modes inertiels avec nombre d’onde azimuthal $n = -1$ et $n = 1$ (non axisymétriques) saturés dans un cylindre (ici horizontal) soumis à une déformation elliptique plane (photographie de Eloy, Le Gal et Le Dizès [23]).

1.4.3 Instabilité d’un écoulement tournant compressé

Un autre cas, étudié en détail dans cette thèse, concerne la situation où un taux de déformation est appliqué seulement dans une direction alignée avec l’axe de rotation. Contrairement à l’instabilité elliptique, la fréquence de forçage et la fréquence de rotation sont ici deux paramètres *indépendants*. Ce problème a d’abord été abordé par Mansour et Lundgren [27]. Leur étude analytique porte sur un écoulement faiblement compressible : le nombre de Mach est supposé faible devant l’unité, ce qui implique l’homogénéité des grandeurs thermodynamiques et découple la dynamique de l’écoulement de tout phénomène de propagation acoustique. On est alors tenté de qualifier l’écoulement de “compressé” plutôt que de “compressible”. Le fluide est supposé non visqueux, est en rotation uniforme, et est soumis à un étirement périodique dans la direction de l’axe de rotation. Toutes les directions de propagation au sein de fluide étant initialement permises, cette étude est en fait une analyse linéaire de type RDT. Elle ne met donc pas directement en jeu les modes inertiels proprement dits, ce qui est à rattacher au caractère non confiné de la géométrie étudiée. Par souci de comparaison avec les cas réels rencontrés dans des études de motoristes, les taux de compression sont choisis proches de l’unité. Une instabilité linéaire tridimensionnelle est prédite sur une échelle de temps long par l’analyse de Floquet lorsque la fréquence de forçage est proche de certaines fréquences résonantes discrètes, liées à l’angle que fait le vecteur d’onde de la perturbation amplifiée avec l’axe de rotation. La langue d’instabilité la plus large, qui est la plus susceptible de déclencher l’instabilité étudiée est centrée sur la plus basse des fréquences résonantes. Les fréquences supérieures sont, jusqu’à une certaine fréquence limite liée au taux de rotation, à l’origine de bandes d’instabilité de plus en plus fines et de plus en plus resserrées.

Dans le cadre d’un moteur diesel à injection, sans considération des phénomènes thermiques caractéristiques d’un écoulement en moteur, ce modèle simple décrit l’évolution d’un tourbillon de type *swirl* qui est généré par l’excentricité de la soupape d’admission, induisant un trajectoire circulaire aux particules du mélange (voir figure 1.8). L’étude pratique d’une telle instabilité est importante puisqu’un écoulement instable possède une dynamique plus complexe, susceptible d’améliorer le mélange avant combustion. L’amélioration d’un tel dispositif réduit le taux de gaz non brûlés, entraînant une réduction des effets polluants tout en améliorant le rendement général. Cependant, un mélange efficace doit être réalisé sur un seul demi-cycle de compression, après lequel l’écoulement est régénéré par l’admission au niveau des soupapes. Au contraire, les instabilités paramétriques présentées dans cette thèse sont des phénomènes agissant essentiellement sur des temps longs de l’ordre de plusieurs cycles de compression. Leur intérêt du point de vue du motoriste semble donc limité



FIG. 1.8 – Schéma des trajectoires des particules dans une chambre de combustion avec injection de type *swirl*, tirée du site internet www.cyclone.nl.

1.5 Instabilité dans un cylindre tournant compressé périodiquement

1.5.1 Description du système étudié

Racz et Scott [28] ont particularisé, par la voie analytique, le problème étudié par Mansour et Lundgren [27] au cas confiné d'un cylindre de gaz tournant autour de son axe principal, dont l'extrémité supérieure est animée d'un mouvement axial sinusoïdal. Le nombre de Mach est également supposé faible devant l'unité. La hauteur instantanée $h(t)$ du cylindre est supposée varier selon une loi sinusoïdale donnée en $h(t) = h_0(1 + \epsilon \cos(\omega_0 t))$. Ce comportement harmonique du forçage peut être vu comme un cas particulier parmi divers types de dynamiques possibles du piston, cependant il est bien adapté à une analyse modale fréquentielle de l'écoulement induit.

Contrairement au cadre de l'étude de Mansour et Lundgren, la course ϵ du piston a été choisie petite car cette hypothèse s'avère simplifier la dynamique déjà complexe de l'instabilité étudiée. L'état de base dont on cherche à étudier la stabilité n'est en fait connu que dans son approximation non visqueuse, selon laquelle il consiste dans le repère inertiel en une oscillation axiale du fluide en phase avec le mouvement périodique du piston (voir figure 2.1). Lorsque la viscosité du fluide est prise en compte, seule une approximation de l'état de base basée sur la double hypothèse d'une faible viscosité et d'un forçage de faible amplitude est disponible. Le champ de vitesses associé à l'état de base est alors supposé être d'ordre $O(\epsilon)$.

L'analyse repose principalement sur une décomposition du champ de vitesses sur la base des modes inertiels non visqueux du cylindre en rotation. L'emploi de cette base nécessite une

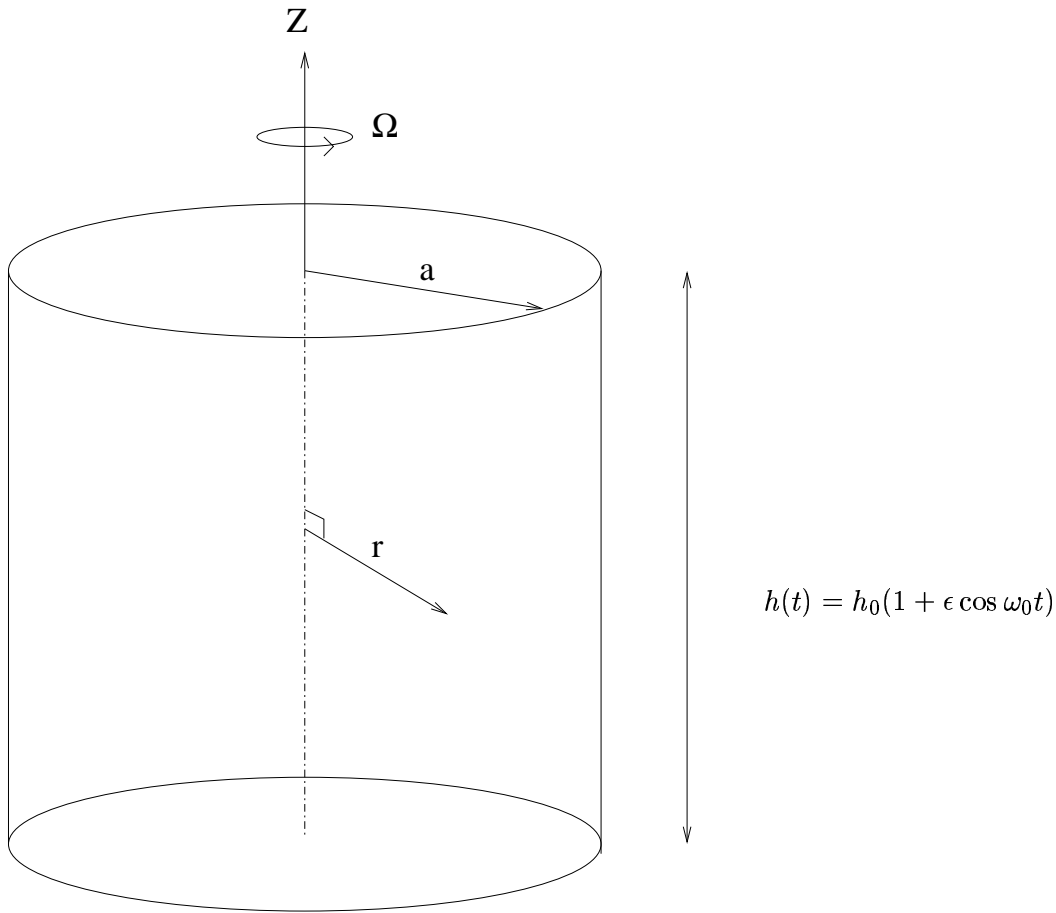


FIG. 1.9 – Configuration du cylindre tournant compressé étudiée par Racz et Scott

modélisation de nature asymptotique, basée sur l'hypothèse d'une faible course du piston $\epsilon \ll 1$. Le mécanisme d'instabilité proposé est, comme pour l'instabilité elliptique, un mécanisme de *résonance paramétrique*. Dans la limite des faibles taux de compression, ces modes inertiels sont susceptibles de croître par paires et de se surperposer à l'état de base, à condition que la fréquence de forçage soit proche de la différence des deux fréquences caractérisant la paire modale :

$$|\omega^{(\mu)} - \omega^{(\nu)}| = \omega_0 + O(\epsilon)$$

C'est donc le mouvement harmonique du piston qui permet un couplage entre ces modes inertiels qui, sans forçage, oscilleraient indépendamment les uns des autres. Cette condition nécessaire est à rapprocher de la condition de résonance de l'instabilité elliptique ou multipolaire, sauf qu'ici ce sont les pulsations des modes propres qui rentrent en jeu, et non les nombres d'onde azimuthaux. L'effet de l'inclusion de la viscosité dans le modèle a été étudié en détail dans la thèse de Racz. D'une part les effets visqueux au sein du fluide simplifient le processus de sélection modale en éliminant les perturbations dont la longueur caractéristique est trop petite. D'autre part, alors que sans prise en compte de la viscosité, le système peut se déstabiliser quelque soit l'amplitude du forçage, le frottement visqueux rend l'écoulement inconditionnellement stable pour des taux de compression inférieurs à une certaine valeur limite -ou de façon équivalente, en-dessous d'un certain nombre de Reynolds critique basé sur la vitesse de rotation du cylindre-. Le régime non linéaire de l'instabilité a été étudié via une analyse faiblement non linéaire basée sur un développement des équations d'amplitude selon les puissances croissantes du paramètre $\epsilon^{\frac{1}{2}}$. Cette analyse met en évidence des comportements complexes, détaillés dans le chapitre 2, allant de la saturation de l'amplitude des modes instables à l'ordre $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ jusqu'à des

comportements chaotiques. Dans tous les cas les modes inertiels instables dominent quantitativement l'écoulement. La dynamique des perturbations non axisymétriques semble plus complexe que celle des perturbations axisymétriques, mais il ressort de l'étude théorique qu'il est possible de sélectionner des points de fonctionnement pour lesquels la dynamique du fluide est, dans la limite des hypothèses réalisées, complètement axisymétrique.

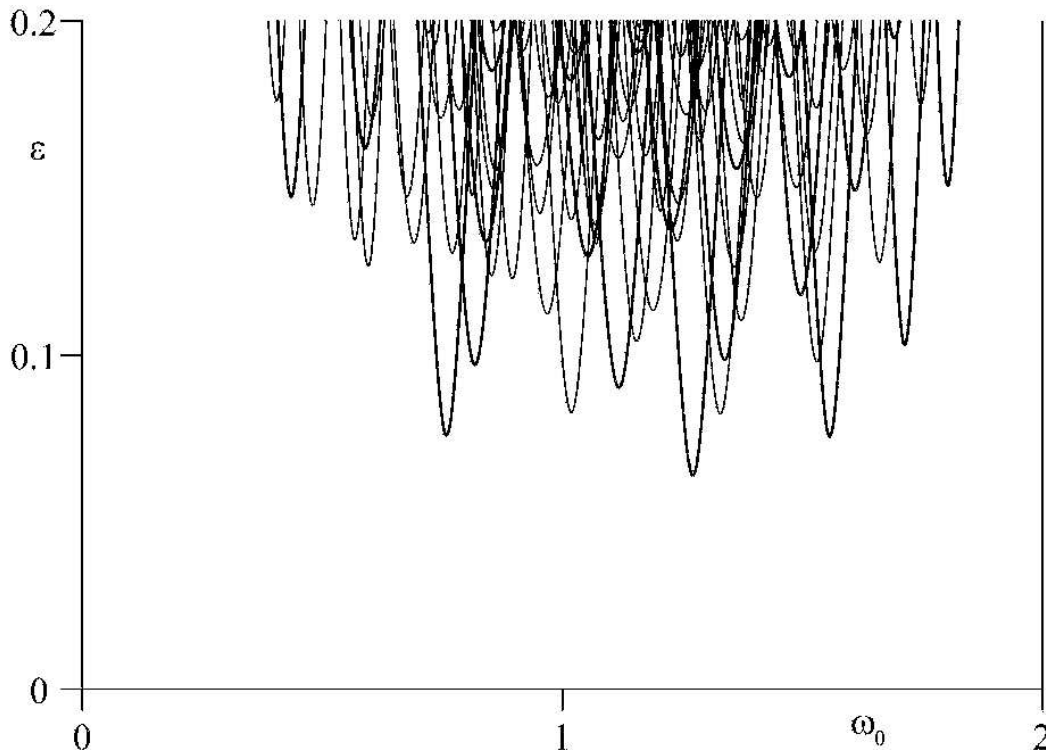


FIG. 1.10 – Allure générique du diagramme de stabilité marginale théorique dans le plan $(\omega_0 - \epsilon)$, où ω_0 représente la pulsation adimensionnelle du forçage et ϵ représente l'amplitude adimensionnelle du forçage. Chaque langue correspond à la courbe marginale associée à une seule paire de modes instables.

1.5.2 Un nouveau mécanisme de résonance paramétrique

Le mécanisme d'amplification de certains modes propres par un scénario de résonance paramétrique proposé par Racz et Scott se retrouve dans un grand nombre de systèmes dynamiques. L'analogie la plus pertinente est l'instabilité elliptique puisqu'elle permet, à partir d'un forçage exercé selon une autre direction, l'amplification du même type d'ondes (les modes de Kelvin d'un cylindre en rotation autour de son axe).

1.5.2.1 Pendule de Matthieu

L'exemple modèle, qui est également le plus simple à traiter analytiquement, est celui du pendule de Matthieu. Il s'agit d'un pendule pesant amorti, oscillant autour d'un socle lui-même sujet à des oscillations selon la direction de la pesanteur (voir figure 1.11). L'angle x que fait le pendule avec la direction verticale est régi par une équation différentielle en temps de la forme $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + (\omega_0^2 + a \cos 2\pi ft)x = 0$, dite équation de Matthieu, dont la généralisation est l'équation de Hill, qui prend la forme plus générique $\ddot{x} + P(t)x = 0$, avec P une fonction périodique du temps.

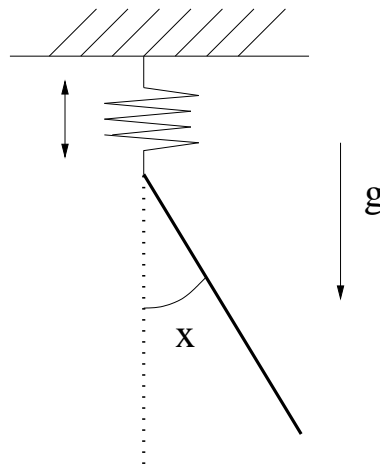


FIG. 1.11 – Schéma générique du pendule de Matthieu, exemple modèle d’instabilité paramétrique provoqué par l’oscillation périodique du socle qui résulte en une oscillation de la force de gravité apparente autour de sa valeur moyenne.

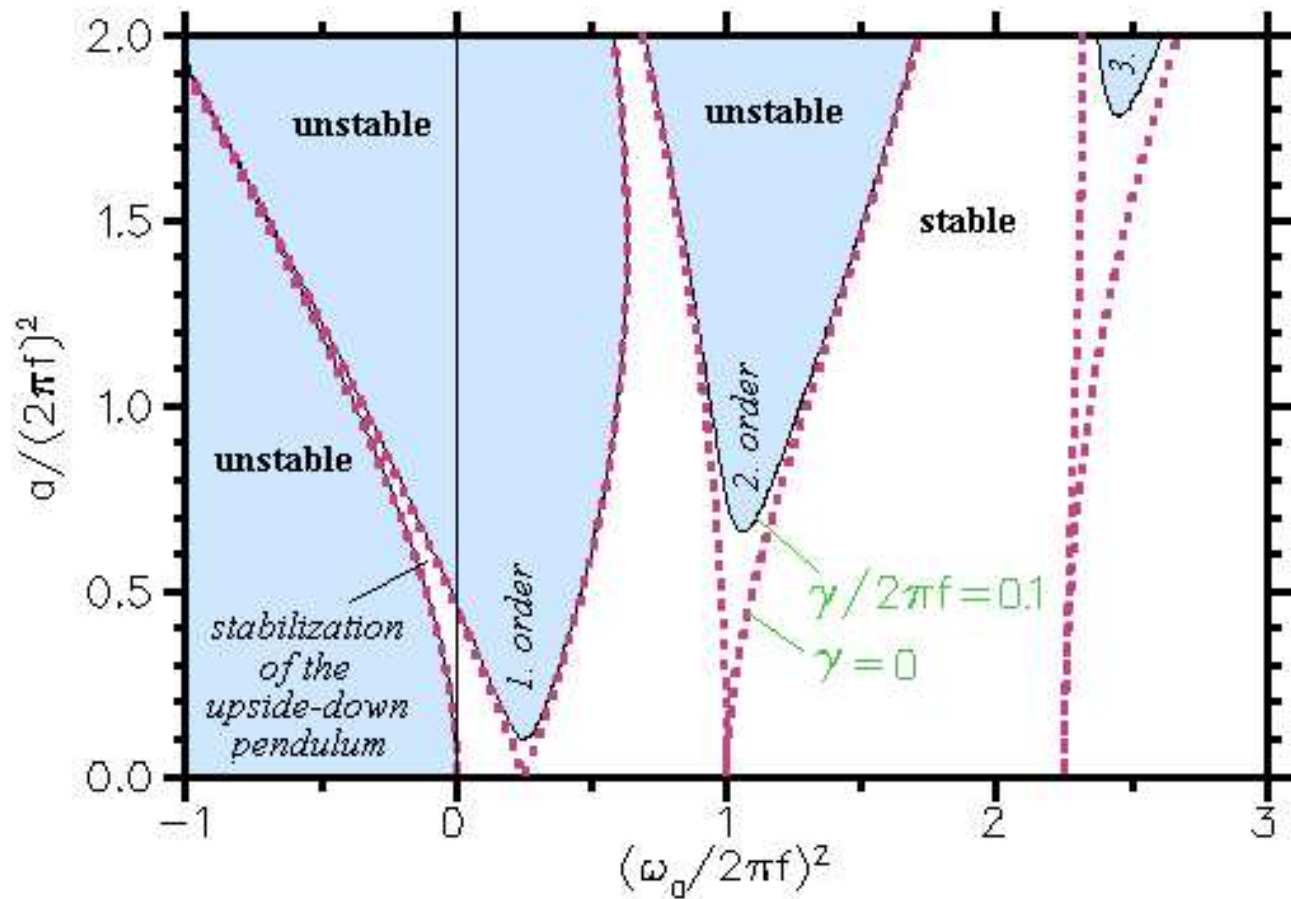


FIG. 1.12 – Diagramme de stabilité marginale associé à l’oscillateur de Matthieu amorti (source : F. Z. Elmer, Université de Bâle, Suisse).

L’effet du forçage périodique est de faire fluctuer les caractéristiques intrinsèques du système (en particulier ses valeurs propres instantanées) autour du point de fonctionnement qui caractérise l’état sans forçage. Si $x = 0$ représente toujours une solution d’équilibre de ce système, cette même solution peut devenir instable si la fréquence de forçage est proche d’une des fréquences centrales des différentes “langues d’instabilité” du système (voir figure 1.12). L’étroitesse

de ces bandes d’instabilité lorsque l’ordre de la résonance augmente, ainsi que les valeurs croissantes du seuil critique en dessous duquel la solution triviale $x = 0$ est stable, font qu’en pratique, seule la résonance paramétrique principale à la pulsation $\frac{\omega_0}{2}$ est suffisamment efficace pour destablisser le pendule.

1.5.2.2 Autres exemples d’instabilité paramétrique

L’expérience la plus ancienne mettant en jeu ce type de mécanisme paramétrique dans un contexte fluide est celle de Faraday au début du XIX^{eme} siècle : l’oscillation verticale à une pulsation ω_0 d’un bassin rempli d’un liquide au repos induit des oscillations de la surface libre à une pulsation sous-harmonique $\frac{\omega_0}{2}$. Un grand nombre de travaux analytiques (voir par exemple [?]) ont permis de mettre en évidence, pour des points de fonctionnement s’éloignant des seuils de stabilité marginale, des scénarios d’instabilité complexes menant à des comportements chaotiques.

La thèse de Racz porte une attention particulière aux analogies de comportement qui existent entre le système qu’il étudie et les ondes de surface de Faraday. Dans d’autres contextes que l’hydrodynamique, des mécanismes de résonance paramétrique existent ; on peut citer brièvement l’exemple de circuits électriques RLC dont les caractéristiques des composants (inductance, résistance, capacité électrique) sont soumises à des variations périodiques, ou les mouvements oscillatoires des engrenages induits par les défauts d’usinage des dents.

1.5.3 Identification des modes inertiels dans un cylindre en rotation

Notons que cette thèse numérique s’inscrit dans la continuité des travaux permettant de mettre en évidence ces structures privilégiées des écoulements en rotation que sont les modes de Kelvin. La majorité des études réalisées sont focalisées sur la mise en évidence des modes inertiels au sein de géométries simples, que ce soit le cas d’une sphère (Rieutord [29], Le Gal et Lacaze [12]) où celui d’un cylindre en rotation autour de son axe principal. Depuis le calcul théorique des modes propres de vibration de l’écoulement dans un cylindre tournant par Kelvin en 1880, un certain nombre de travaux ont cherché à mieux caractériser ces protagonistes des mécanismes d’instabilités des écoulements vorticaux. Certains auteurs ont réussi à exciter les modes de Kelvin d’un cylindre en rotation par un mécanisme de résonance directe, où le forçage périodique provoque une réponse du système à la même fréquence. On citera notamment la fameuse expérience de McEwan[30] qui a mis en évidence expérimentalement qu’une fréquence de forçage donnée induit dans l’écoulement une réponse à un angle fixé, conformément à la relation de dispersion non visqueuse des modes inertiels. Il a également rendu compte des explosions tourbillonnaires (baptisées à l’époque “resonant collapses”) qui semblent être liées à la présence d’un écoulement azimuthal moyen non nul, ouvrant la voie à un grand nombre d’études, en particulier les travaux de Manasseh [13][31][32] et de Kobine [33] sur la déstabilisation d’un écoulement tournant par un forçage *direct* des modes inertiels dans un cas de faible précession. L’instabilité elliptique, ainsi que celle du cylindre tournant compressé étudiée par Racz et Scott, sont au contraire des mécanismes de *résonance paramétrique*, où le forçage périodique provoque une réponse linéaire du système à une fréquence sous-harmonique de la fréquence de forçage. Toutes ces études mentionnent, lors de l’excitation des modes inertiels, la présence d’un écoulement azimuthal de recirculation, qui signale une interaction avec les modes géostrophiques du cylindre en rotation.

1.6 Problématique

La théorie de Racz et Scott dresse un bilan complet de l'instabilité sous l'hypothèse d'un faible déplacement du piston. Elle repose sur une caractérisation asymptotique de l'état de base à grand nombre de Reynolds. Leur étude s'appuie également sur d'autres hypothèses *a priori* comme la modélisation asymptotique des frottements pariétaux ou l'hypothèse simplificatrice qu'au stade linéaire de l'instabilité le couplage modal ne fait intervenir que les deux modes formant la paire de modes instables. Afin de vérifier des assertions, et dans l'optique de comprendre l'effet d'un forçage de plus grande amplitude (correspondant à une plus grande course du piston), deux projets de recherche doctoraux ont été simultanément envisagés au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'École Centrale de Lyon. Chronologiquement, le premier est la thèse expérimentale de Laurent Graftieux [34], qui a consisté en la construction complète d'un banc de mesures et d'une exploitation méticuleuse des signaux de vitesse enregistrés à l'aide de méthodes LDA et PIV. Parallèlement à ce travail expérimental, cette thèse à dominante numérique a été envisagée, avec l'idée que la Simulation Numérique Directe (DNS) permet une résolution précise des équations hydrodynamiques en s'affranchissant à la fois des hypothèses analytiques et des difficultés expérimentales, en particulier celles liées aux phénomènes thermiques.

Afin de prendre en compte les phénomènes visqueux confinés aux fines couches d'Ekman dont l'épaisseur varie comme $O(Re^{-\frac{1}{2}})$, la simulation numérique a été effectuée à l'aide d'une méthode spectrale de type Galerkin. Cette classe de méthodes est connue pour sa grande précision spatiale et est fréquemment utilisée dans les études numériques des phénomènes d'instabilité hydrodynamiques. La principale difficulté réside dans le caractère singulier des conditions aux limites visqueuses dans les coins du cylindre. La présence de ces discontinuités du champ de vitesse est un obstacle connu à l'utilisation de méthodes spectrales car elle induit des oscillations non physiques dans le domaine de calcul [35]. Une technique originale de traitement numérique de ces singularités a été appliquée. Elle est basée sur la soustraction d'un champ singulier respectant les conditions aux limites singulières du problème. Ce champ singulier a été préalablement construit à partir des solutions du problème linéaire de Stokes dans les coins du cylindre. Cette technique a nécessité la réécriture complète d'un code de calcul sans support préexistant. Une méthode de construction des fonctions de base du développement spectral a été testée, pour que ces fonctions respectent les conditions aux limites du problème régularisé. On s'est focalisé sur la dynamique de l'écoulement sur le temps long, dans le cas où les modes inertiels excités sont axisymétriques, ce qui permet de réduire le coût déjà important des calculs (de l'ordre de la semaine pour l'étude du régime non linéaire). Le code a donc été écrit sous l'hypothèse d'axisymétrie dite $2D\frac{1}{2}$, avec 2 composantes pour le vecteur position et 3 pour le vecteur vitesse. La comparaison simultanée des trois études, après une analyse critique des points de convergence et de divergence, conduit à une validation méthodique du mécanisme de résonance paramétrique proposé pour le phénomène d'instabilité observé.

1.7 Plan de la thèse

Le chapitre 2 de cette thèse passe en revue les principaux résultats analytiques de Racz et Scott sur l'instabilité du cylindre tournant soumis à une compression périodique, systématiquement comparés aux résultats de la thèse expérimentale de Laurent Graftieux sur le même sujet. Ce chapitre résume l'état des connaissances sur le phénomène (restreint au cas de perturbations axisymétriques) qui ont servi de point de départ à cette thèse.

Le chapitre 3 est une présentation des algorithmes et des validations utilisés pour la conception du code numérique axisymétrique réalisé pendant le travail de thèse. Une attention particulière

est accordée à la construction originale des fonctions de base utilisées dans le schéma spectral, ainsi qu'au traitement difficile des singularités du champ de vitesse dans les coins du cylindre. Ce dernier point est résolu par une technique de soustraction d'un champ singulier instationnaire préalablement construit par résolution du problème de Stokes dans chaque coin du cylindre.

Le chapitre 4 est une exploration numérique de la dynamique des modes inertiels axisymétriques dans le cas d'une rotation pure. La description faite vise à compléter le manque de littérature existant sur ces structures pourtant essentielles dans l'étude des fluides en rotation. Une attention particulière est portée sur l'influence du nombre de Reynolds (basé sur la vitesse de rotation) sur la structure pariétale de l'écoulement associé à ces modes inertiels, ainsi que sur leurs pulsations et leur taux de déclin, en très bon accord avec les modèles existant.

Le chapitre 5 traite enfin de l'étude numérique de l'état de base du système lorsque le piston est mis en mouvement. La caractérisation visqueuse de cet écoulement est inaccessible de façon précise par la théorie ou par l'expérience. Un régime nouveau, caractérisé par des couches de cisaillement internes, est ainsi mis en évidence lorsque la pulsation adimensionnelle du forçage vérifie $\omega_0 < 1$. Pour $\omega_0 > 1$, l'écoulement étudié vérifie les estimations asymptotiques proposées dans les travaux de Racz et Scott.

Dans le chapitre 6, on s'intéresse plus particulièrement à l'instabilité de l'écoulement de base étudié dans le chapitre précédent. Une analyse des taux de croissance dans la phase d'instabilité linéaire, basée sur deux algorithmes différents, aboutit à un diagramme de stabilité dans un sous-espace des paramètres à deux dimensions (fréquence de forçage-nombre de Reynolds). la courbe marginale de stabilité prend la forme d'une fine langue d'instabilité centrée sur la fréquence du mode de Kelvin excité, en bon accord avec les prévisions analytiques et les résultats expérimentaux. Une exploration des propriétés du régime non linéaire de l'instabilité, en comparaison avec les études précédentes, est centrée autour de l'exemple du mode inertiel baptisé (1,1,0) mis en évidence dans la thèse de Graftieaux pour la même géométrie. Le couplage géostrophique associé à la phase non linéaire de saturation du mode Primaire est finalement mis en évidence par la simulation numérique. Une quantification de la répartition spectrale de l'énergie parmi les différents modes inertiels non visqueux permet de conclure quant à la pertinence du développement théorique selon la base des modes non visqueux. Dans le cadre des comparaisons avec les prévisions analytiques, seul le régime de divergence à haut nombre de Reynolds n'a pas pu être retrouvé par la simulation. L'ensemble du travail réalisé aboutit à une validation satisfaisante de la théorie proposée initialement par Racz et Scott.

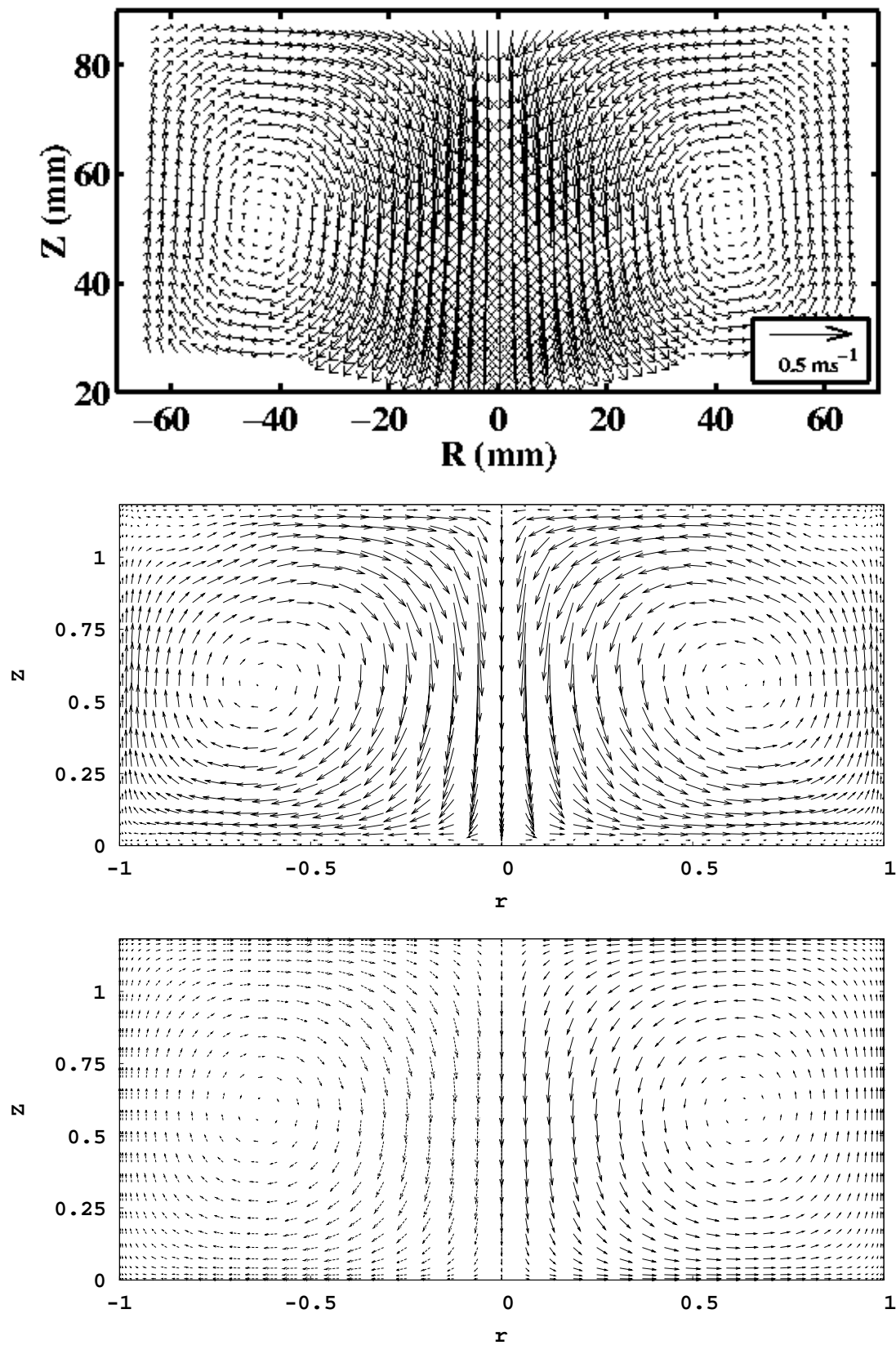


FIG. 1.13 – Champ méridien des vitesses du mode inertiel identifié expérimentalement par Gratteaux (en haut) et par la simulation numérique effectuée dans cette thèse (au milieu), identifié comme correspondant au mode inertiel axisymétrique $(1,1,0)$. Le champ de vitesse correspondant au mode de Kelvin théorique (non visqueux) a également été représenté (en bas)

Chapitre 2

Approche analytique et expérimentale

2.1 Présentation du phénomène

2.1.1 Paramètres et notations

Le domaine dans lequel prend place l'écoulement de gaz considéré est un cylindre droit (voir figure 2.1), axisymétrique par révolution autour de son axe principal. L'ensemble du dispositif est mis en rotation autour de l'axe du cylindre à vitesse angulaire constante $\Omega = \Omega e_z$, si bien que le problème est complètement axisymétrique. Un point du domaine est repéré, dans le référentiel tournant, par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) , défini par la distance à l'axe $r \in [0 : a]$, où a représente le rayon du cylindre, où l'angle azimuthal $\theta \in [0 : 2\pi]$ (qui évolue dans le même sens que la rotation) est repéré à partir d'une origine arbitraire, et où $z \in [0 : h]$ est la coordonnée axiale le long de l'axe, où h représente la hauteur du cylindre.

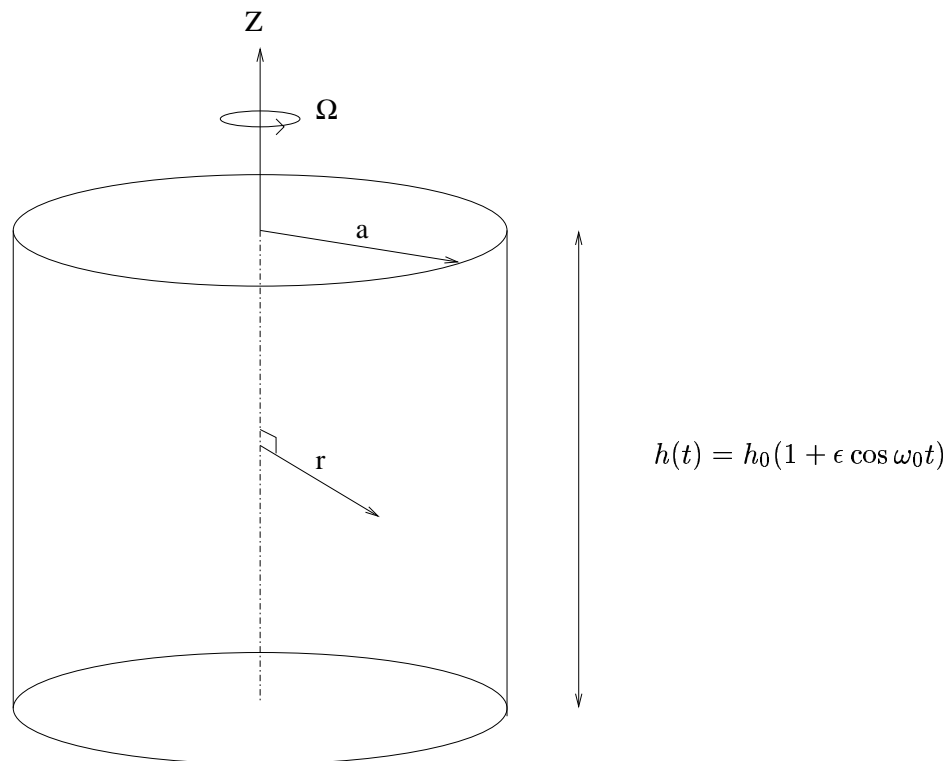


FIG. 2.1 – Configuration étudiée

La partie plane supérieure du cylindre est supposée être animée, en plus de son mouvement de rotation, d'un mouvement de translation périodique, si bien que la hauteur h du cylindre devient une fonction dépendante du temps $h(t)$. L'amplitude des mouvements du piston engendrant cette variation de hauteur étant notée ϵ , h est régi par une loi du type $h(t) = h_0(1 + \epsilon \bar{h})$, où h_0 représente la hauteur moyenne du piston et $\bar{h}(t)$ est une fonction périodique. Dans la suite de l'étude, on supposera une loi harmonique $\bar{h} = \cos \omega_0 t$, où ω_0 est la pulsation du piston. Le paramètre ϵ est supposé en première approche petit, si bien qu'il définit par ses différentes puissances $O(1)$, $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$, $O(\epsilon)$, $O(\epsilon^2)$, ... une hiérarchie d'ordres de grandeurs.

2.1.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental mis au point par Graftieaux au LMFA [34] [36], complémentaire des travaux analytiques de Racz et Scott [28], retient toutes les caractéristiques précédentes. Les dimensions adoptées pour la réalisabilité de l'appareil sont les suivantes : $a = 70 \text{ mm}$, $h_0 = 82.75 \text{ mm}$, $\epsilon h_0 = 10.84 \text{ mm}$.

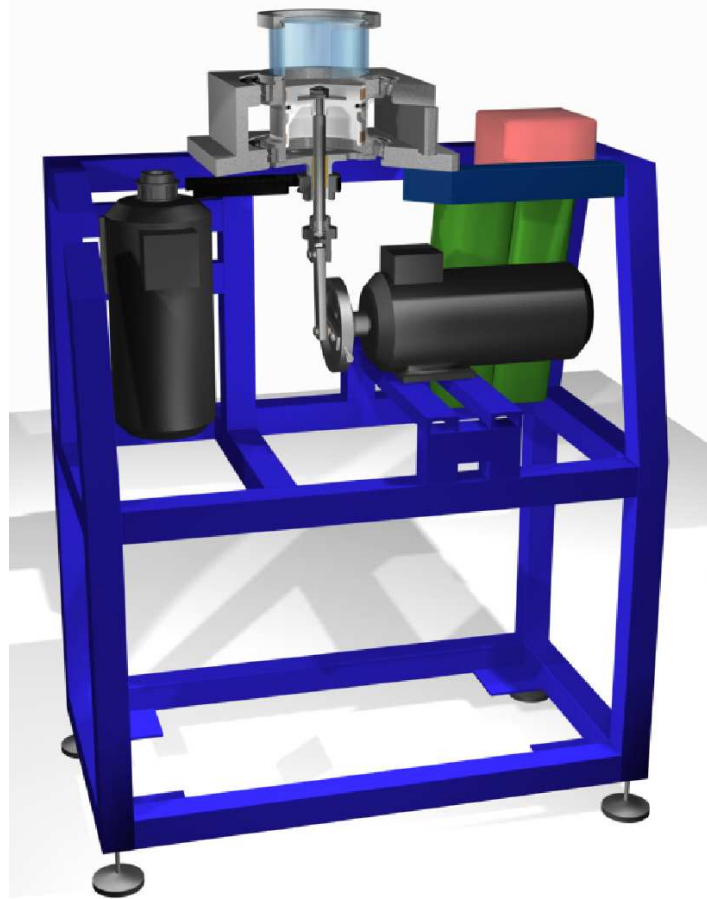


FIG. 2.2 – Schéma du dispositif expérimental conçu par L. Graftieaux au LMFA.

L'écoulement d'air est engendré par deux systèmes de motorisation, gouvernant de manière totalement dé耦ée la rotation du cylindre et les oscillations du piston, ces dernières étant réalisées par un système de bielle-manivelle d'amplitude variable. Les gammes de fréquences pour la rotation de l'ensemble et le forçage sont respectivement [1.5 :4.5 Hz] et [3 :11 Hz]. Le système de mesures est basé sur deux techniques optiques : l'Anémométrie Laser à effet Doppler (LDA) et la Vélométrie à Images de Particules (PIV), qui exigent pour le cylindre des parois en verre transparent. Les mesures par LDA permettent une bonne résolution en temps ou en fréquence pour les signaux de vitesse en un point, alors qu'au contraire le système de PIV

donne accès à la topologie spatiale du champ de vitesse dans un plan donné. Cependant, les problèmes d'accès optique dus à la courbure de la géométrie cylindrique ne permettent pas une caractérisation de l'écoulement dans les zones de coin et de proche paroi. Les paramètres physiques choisis par Graftieaux pour le point de fonctionnement du système ont servi de point de départ pour l'étude numérique présentée dans cette thèse. On peut noter également que, par la valeur choisie de $\epsilon \sim 13\%$, le dispositif expérimental ne se situe pas de façon certaine dans le cadre de l'hypothèse de petits déplacements du piston ($\epsilon \ll 1$).

2.1.3 Equations du problème

On s'intéresse dans cette étude à la dynamique du gaz, vue à partir du repère en rotation à la vitesse $\boldsymbol{\Omega}$. Le domaine est rempli d'un gaz qui est modélisé comme un fluide newtonien compressible, et régi par la loi des gaz parfaits. On note ρ sa masse volumique, et p sa pression statique, que l'on décompose en une partie spatialement homogène \bar{p} , correspondant à sa moyenne spatiale, et une partie fluctuante $p'(\mathbf{x}, t)$, selon la formule :

$$p = \bar{p}(t) + p' \quad (2.1)$$

Le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, vu du repère tournant, est régi par les équations de Navier-Stokes compressibles :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (2.2)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\text{acceleration}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \nabla p'}_{\text{forces de pression}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}_{\text{effets visqueux}} - \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}}_{\text{force de Coriolis}} - \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})}_{\text{force centrifuge}} \quad (2.3)$$

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} \quad (2.4)$$

Ici, T représente la température du fluide, s son entropie massique, $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}$ représente la dissipation visqueuse, où \mathbf{D} représente le tenseur des taux de déformation dont les composantes sont données par $D_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, et où $\boldsymbol{\tau}$ représente le tenseur des contraintes visqueuses modélisé par la loi de comportement newtonienne :

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.5)$$

Les quantités λ , μ sont les coefficients de viscosité respectivement volumique et dynamique. k représente le coefficient de conductibilité thermique.

Racz a montré que si le nombre de Mach $M = \frac{\Omega a}{c_{son}}$ (exprimant l'ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement par rapport à la vitesse de propagation des ondes acoustiques) est faible, hypothèse qui sera toujours vérifiée dans cette étude, les non-uniformités de la pression sont faibles devant la pression moyenne à l'ordre $O(M^2)$. Ainsi, bien que les gradients de pression agissent sur la dynamique de l'écoulement via leur importance quantitative dans le bilan de quantité de mouvement, on peut évaluer toutes les variables thermodynamiques, comme la masse volumique $\rho(p, s)$, la température $T(p, s)$, les coefficients de viscosité $\mu(p, s)$ et $\lambda(p, s)$ et le coefficient de diffusion thermique $k(p, s)$, en fonction de la valeur de la pression uniforme $\bar{p}(t)$ au lieu de la pression statique $p(\mathbf{x}, t)$. De même, l'hypothèse d'un bas nombre de Mach permet

de négliger le terme de dissipation visqueuse dans (2.4).

Afin d'isoler les phénomènes dynamiques recherchés sans les coupler à des considérations thermiques, le problème est simplifié par l'hypothèse d'adiabaticité des parois, ainsi que par celle d'une entropie s_0 uniforme à l'instant initial $t = 0$. Ceci implique, à partir de l'équation (2.4) sans le terme de dissipation visqueuse, un écoulement isentropique caractérisé par $s = s_0$. L'isentropie de l'écoulement implique que la masse volumique $\rho(\bar{p}, s_0)$, la température $T(\bar{p}, s_0)$, les coefficients de diffusion $\nu(\bar{p}, s_0)$ et $k(\bar{p}, s_0)$, ainsi que toutes les variables thermodynamiques, sont spatialement uniformes, bien qu'ils dépendent du temps. En particulier, l'uniformité spatiale de la densité permet de ramener l'équation de conservation de la masse locale, grâce à la relation intégrale $\int \rho d^3 X = \rho(t)h(t) = cste$, à la loi de continuité suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \quad (2.6)$$

Le choix du repère tournant permet d'assimiler les effets de la rotation sur l'écoulement à des forces dites inertielles. Celles-ci sont de deux natures, d'une part la force de Coriolis, qui est la force de rappel à l'origine des phénomènes oscillatoires observés. D'autre part, la force centrifuge, qui ne participe pas directement à la dynamique de l'écoulement puisqu'elle dérive d'un potentiel et peut être interprétée comme une force de pression modifiée π , via la définition suivante :

$$\pi = \frac{p'}{\rho} - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \quad (2.7)$$

Ainsi, l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\text{acceleration}} = \underbrace{-\nabla \pi}_{\text{forces derivant d'un potentiel}} + \underbrace{\nu(t) \Delta \mathbf{v}}_{\text{effets visqueux}} - \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}}_{\text{force de Coriolis}} \quad (2.8)$$

Ici, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est le coefficient de viscosité cinématique $\nu(\bar{p}, s_0)$. Le mouvement du fluide est donc régi par les équations (2.6) et (2.8).

2.1.3.1 Adimensionnalisation

Il est possible d'adimensionner le système d'équation précédent en utilisant respectivement pour unités de longueur et de temps le rayon du cylindre a et le temps caractéristique de rotation du cylindre $(2\Omega)^{-1}$.

$$t \leftarrow 2\Omega t \quad (2.9)$$

$$\mathbf{x} \leftarrow \frac{\mathbf{x}}{a} \quad (2.10)$$

ce qui amène à redéfinir une à une les coordonnées à l'intérieur du cylindre par :

$$r \leftarrow \frac{r}{a}$$

$$z \leftarrow \frac{z}{a}$$

$$h \leftarrow \frac{h}{a}$$

$$h_0 \leftarrow \frac{h_0}{a}$$

Ainsi le système différentiel adimensionnel retenu pour décrire la dynamique de l'écoulement dans le domaine mobile $\{(r, \theta, z) \in [0 : 1] \times [0 : 2\pi] \times [0 : h(t)]\}$ est le suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \pi + \frac{1}{Re(t)} \Delta \mathbf{v} - \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \quad (2.12)$$

Ce système est associé aux conditions limites exprimant l'adhérence du fluide aux parois fixes et mobiles du domaine :

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (r = 1) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (z = 0) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{v} = \frac{dh}{dt} \mathbf{e}_z \quad (z = h(t)) \quad (2.15)$$

Dans le cas où $h(t) = h_0(1 + \epsilon \cos \omega_0 t)$, le problème précédent fait intervenir 4 paramètres :

- le rapport d'aspect du cylindre h_0
- la course adimensionnelle du piston ϵ
- la pulsation du piston adimensionnelle ω_0
- le nombre de Reynolds instationnaire, $Re(t) = \frac{2\Omega a^2}{\nu(t)}$, basé sur la vitesse de rotation du cylindre. Le paramètre indépendant du temps à considérer sous l'hypothèse d'une petite course est le nombre de Reynolds moyen $Re_0 = \langle \frac{2\Omega a^2}{\nu(t)} \rangle$. Comme nous allons le voir, à cette limite de petite course, Re_0 doit être grand devant l'unité pour que l'instabilité ne soit pas inhibée par la viscosité. C'est pour cette raison que, par la suite, on se focalisera principalement sur le cas $Re_0 \gg 1$.

Remarque

Les conditions aux limites (2.13), (2.14) induisent une discontinuité du champ de vitesse dans la zone de coin. Cette singularité induit, par référence aux lois de comportement des fluides newtoniens, une contrainte inversement proportionnelle à la distance au coin, ce qui induit par intégration spatiale une force totale logarithmiquement divergente. Or cette pression infinie devrait empêcher tout mouvement du piston ! Un tel écoulement existe pourtant en pratique, puisqu'il existe forcément un interstice entre le piston et la paroi [37], de très petite taille, dans lequel un écoulement secondaire très localisé est possible. La prise en compte de ce type d'écoulement secondaire dépend des caractéristiques d'usinage de l'appareil et est hors de notre propos.

2.1.3.2 Solution particulière non visqueuse et état de base

La solution générale du problème précédent est hors de portée analytiquement. Cela rend en première approche assez délicate la question de la stabilité des éventuelles solutions! Il est cependant intéressant de constater qu'une solution particulière existe si le phénomène de viscosité est négligé :

$$v_x = v_y = 0 \quad (2.16)$$

$$v_z = \frac{dh}{dt} \frac{z}{h} \quad (2.17)$$

$$\pi = -\frac{d^2h}{dt^2} \frac{z^2}{2h} \quad (2.18)$$

En l'absence de viscosité, le fluide peut donc subir un mouvement d'oscillation axial à la pulsation ω_0 , tout en tournant en bloc autour de l'axe \mathbf{e}_z . Lorsque le nombre de Reynolds est grand et que la course du piston ϵ est petite devant l'unité, l'écoulement réel peut être approché par celui présenté ci-dessus hors des zones de proche paroi.

Il est naturel de supposer qu'en présence de viscosité, il existe un écoulement périodique avec la pulsation ω_0 du forçage. Cet état peut être vu comme une généralisation visqueuse, de la solution particulière (2.16),(2.17),(2.18). C'est cet écoulement qui représente l'état de base dont on étudie la stabilité.

Expérimentalement, Graftieux a observé au centre du cylindre, pour $1 < \omega_0 < 2$, un tel écoulement. A cause de la courbure du container cylindrique, le dispositif optique ne permet pas une mesure fiable dans la zone de proche paroi où sont attendus de forts gradients de vitesse. Ses résultats ne suffisent donc pas à quantifier l'importance globale des effets visqueux dans l'écoulement de base. On verra que l'étude numérique permet de mettre en évidence, pour $\omega_0 < 1$, des champs de vitesse qui diffèrent qualitativement de ceux observés expérimentalement pour $\omega_0 > 1$.

2.1.4 Changement de coordonnées adopté

L'analyse du système différentiel est plus aisée si l'on se ramène à un domaine spatial fixe dans le temps. Le changement de variables spatiales choisi est une simple homothétie suivant la direction de compression :

$$X = x, Y = y, Z = \frac{h_0}{h(t)} z \quad (2.19)$$

De plus, la divergence du champ de vitesse par rapport aux coordonnées initiales étant spatialement homogène, il est avantageux de se ramener, via un changement de variables, à un écoulement à divergence nulle, afin de se rallier au cadre des écoulements incompressibles, sur laquelle la littérature est plus abondante. Pour ceci, on retranche au champ initial la vitesse induite par le piston :

$$V_X = v_x, V_Y = v_y, V_Z = \frac{h_0}{h(t)} \left(v_z - \frac{z}{h} \frac{dh}{dt} \right) \quad (2.20)$$

Pour conserver la forme en gradient des efforts de pression dans l'équation de quantité de mouvement, il convient de redéfinir à partir de π une pression modifiée Π par la formule suivante :

$$\Pi = \pi + \frac{1}{2h} \frac{d^2 h}{dt^2} z^2 \quad (2.21)$$

Le système différentiel portant sur (\mathbf{V}, Π) dans les nouvelles variables $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$ s'écrit ainsi :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \Pi - \mathbf{e}_Z \times \mathbf{V} + \frac{1}{Re} \mathcal{D} \mathbf{V} + \mathbf{e}_z \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla - \frac{1}{Re} \mathcal{D} \right] \left(1 - \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 \right) \mathbf{V}_Z \quad (2.23)$$

Il est associé aux nouvelles conditions aux limites :

$$\mathbf{V} = -\frac{Z}{h} \frac{dh}{dt} \mathbf{e}_z \quad (r = 1) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{V} = 0 \quad (Z = 0, h_0) \quad (2.25)$$

où l'on constate que le forçage s'applique sur la paroi latérale et non plus sur la face du piston. L'opérateur \mathcal{D} représentant les effets de diffusion est défini par :

$$\mathcal{D} = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \left(\frac{h_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad (2.26)$$

2.1.5 Equations de la perturbation

On procède à la décomposition classique sur le champ de vitesse et le champ de pression :

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \underbrace{\mathcal{U}(\mathbf{X}, t)}_{\text{etat de base}} + \underbrace{\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}_{\text{perturbation}} \quad (2.27)$$

$$\Pi(\mathbf{X}, t) = \underbrace{\Lambda(\mathbf{X}, t)}_{\text{etat de base}} + \underbrace{\lambda(\mathbf{X}, t)}_{\text{perturbation}} \quad (2.28)$$

Puisque le champ de base (\mathcal{U}, Λ) est également solution du problème, les équations du champ perturbatif (\mathbf{u}, λ) s'écrivent, par soustraction :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{e}_Z \times \mathbf{u} + \nabla \lambda = \mathbf{e}_Z \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 - \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 \right) u_Z \right] + \frac{1}{Re} \mathcal{D} (\mathbf{u}_\perp + \mathbf{e}_Z \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 u_Z)$$

$$-\mathbf{u} \cdot \nabla (\mathcal{U}_\perp + \mathbf{e}_Z \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 \mathcal{U}_Z) - \mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{u}_\perp + \mathbf{e}_Z \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 u_Z) \quad (2.30)$$

L'indice \perp dénote ici la projection d'une grandeur vectorielle sur le plan orthogonal à \mathbf{e}_Z . Les conditions aux limites associées à ces équations sont :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (r = 1, Z = 0, h_0) \quad (2.31)$$

2.2 Projection sur la base des modes inertiels

2.2.1 Présentation des modes inertiels d'un cylindre en rotation

On s'intéresse dans cette sous-section aux solutions du problème précédent lorsque le piston n'est pas mis en mouvement. Par des considérations énergétiques, on peut montrer [28] qu'un écoulement de rotation solide confiné est inconditionnellement stable en l'absence de forçage. Le mécanisme principal de retour à l'équilibre n'est pas dû qu'à la seule diffusion visqueuse, mais également à la présence d'un écoulement secondaire de recirculation, induit par le pompage de fluide de part et d'autre des couches d'Ekman. Cependant, l'écoulement peut être le siège d'oscillations transitoires dues également à l'action de la force de Coriolis. Outre leur intérêt dans le cadre général de la théorie des fluides tournants, certaines solutions harmoniques du problème sans mouvement du piston peuvent se révéler utiles pour caractériser efficacement le comportement du fluide en présence d'un forçage de faible amplitude.

Dans le cas d'un cylindre fermé en rotation solide autour de son axe, le problème perturbatif a été résolu tôt par Kelvin (1880) [1] sous l'hypothèse d'un fluide non visqueux. Le problème se ramène alors à la recherche de solutions harmoniques de la forme $(\mathbf{u}^{(\mu)} e^{-i\omega^{(\mu)} t}, \lambda^{(\mu)} e^{-i\omega^{(\mu)} t})$, où $\omega^{(\mu)}$ représente une pulsation propre qui est réelle puisque le problème est anti-adjoint. Mathématiquement, la linéarisation de l'écoulement perturbé autour de l'écoulement de rotation solide se ramène au problème aux valeurs propres suivant :

$$-i\omega^{(\mu)} \mathbf{u}^{(\mu)} + \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^{(\mu)} + \nabla \lambda^{(\mu)} = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

qui reste associé à la condition d'incompressibilité pour chaque vecteur propre $\nabla \cdot \mathbf{u}^{(\mu)} = 0$ et aux conditions aux limites non visqueuses exprimant le glissement à la paroi et l'imperméabilité des parois $\mathbf{u}^{(\mu)} \cdot \mathbf{n}_{ext} = 0$

Après résolution, on trouve, en utilisant des fonctions de Bessel J_n :

$$u_r^{(\mu)}(\mathbf{X}) = N^{(\mu)} i \left\{ \omega^{(\mu)} k^{(\mu)} J_n'(k^{(\mu)} r) - \frac{n}{r} J_n(k^{(\mu)} r) \right\} \cos\left(\frac{m\pi Z}{h_0}\right) e^{in\theta} \quad (2.33)$$

$$u_\theta^{(\mu)}(\mathbf{X}) = N^{(\mu)} \left\{ k^{(\mu)} J_n'(k^{(\mu)} r) - \frac{n\omega^{(\mu)}}{r} J_n(k^{(\mu)} r) \right\} \cos\left(\frac{m\pi Z}{h_0}\right) e^{in\theta} \quad (2.34)$$

$$u_Z^{(\mu)}(\mathbf{X}) = N^{(\mu)} i \frac{\omega^{(\mu)} k^{(\mu)^2} h_0}{m\pi} J_n'(k^{(\mu)} r) \sin\left(\frac{m\pi Z}{h_0}\right) e^{in\theta} \quad (2.35)$$

$$\lambda^{(\mu)}(\mathbf{X}) = N^{(\mu)} (1 - \omega^{(\mu)^2}) J_n(k^{(\mu)} r) \cos\left(\frac{m\pi Z}{h_0}\right) e^{in\theta} \quad (2.36)$$

Le coefficient de normalisation $N^{(\mu)}$ est choisi de telle façon que $\|\mathbf{u}^{(\mu)}\|_{L^2} = 1$ pour chaque indice (μ) .

Les pulsations $\omega^{(\mu)}$ de ces modes propres forment un ensemble dense dans l'intervalle adimensionnel $[-1 : 1]$ (et dense dans l'intervalle $[-2\Omega : 2\Omega]$ en variables dimensionnelles). Les modes inertiels de Kelvin ainsi déterminés peuvent être classés selon une hiérarchie organisée autour de l'indice multiple $\mu = (\alpha, m, n)$, où $k^{(\mu)} = k_\alpha$ est assimilable à un nombre d'onde radial (les noeuds radiaux d'un mode étant déterminés par les zéros de la fonction de Bessel associée), et m

représente le nombre d'onde axial. L'indice n représente le nombre d'onde azimuthal, qui est nul dans le cas axisymétrique. Les indices $m \geq 0$ et n sont des entiers tandis que $0 < k_{\alpha=1} < k_{\alpha=2}, \dots$ sont des valeurs discrètes donnés par la condition aux limites $u_r = 0$ en $r = 1$ et par la condition de dispersion

$$\omega^{(\mu)} = \pm \left(1 + \left(\frac{k^{(\mu)} h_0}{m\pi}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.37)$$

Dans le cas $n = 0$ des modes inertiels axisymétriques étudiés dans cette étude, la structure du champ de vitesse est, pour $m \neq 0$, celle d'un réseau de tourbillons toriques dont l'axe principal du tore est confondu avec celui du cylindre.

Le cas $m = 0$ est particulier, puisque les formules (2.33) et (2.35) incluent des divisions par zéro, qu'il faut interpréter de la façon suivante : on remplace (2.35) par $u_Z^\mu = 0$ et (2.37) par $\omega^\mu = 0$. On peut isoler le cas des modes $(m, n) = (0, 0)$, qui forment la famille dégénérée des *modes axisymétriques géostrophiques*, notée M . Ces modes correspondent à un mouvement axisymétrique, stationnaire, purement azimuthal, et indépendant de la coordonnée axiale.

2.2.2 Projection sur la base des modes de Kelvin

L'idée générale des méthodes d'analyse spectrale est de décomposer le champ de vitesses, solution de l'équation à résoudre, sur une base fonctionnelle adaptée. Par projection de cette équation sur chaque élément de la base fonctionnelle choisie (qui peut au besoin se démarquer de la première base sur laquelle est effectuée la décomposition spectrale), on remplace de façon équivalente le système d'équations aux dérivées partielles initial par un système d'équations aux dérivées ordinaires en temps sur les amplitudes. Ceci est à la fois le point de vue adopté pour l'analyse de stabilité théorique (avec l'espoir que les fonctions utilisées permettent une description simple de l'écoulement résultant) et pour la simulation numérique (où la base est plutôt choisie en fonction de ses propriétés de convergence vers la solution du problème continu).

Pour l'analyse de stabilité, la base de projection choisie par Racz et Scott est celle des modes de Kelvin non visqueux. Celle-ci ne respectant pas les conditions aux limites visqueuses du problème complet, il est évident que la convergence simple n'est pas assurée et qu'une infinité de modes est nécessaire pour décrire correctement le comportement pariétal des solutions. Il paraît clair que la base constituée des modes propres du problème avec viscosité serait plus indiquée, puisqu'elle éviterait le problème du couplage modal par la viscosité, et assurerait une convergence plus rapide vers la solution, en terme de nombres de modes. Cependant la base non visqueuse présente l'avantage d'être complètement explicitable analytiquement (alors que l'expression analytique des modes non visqueux n'est pas explicite), et ainsi de rendre le calcul analytique des coefficients spectraux envisageable.

Une autre avantage de la base de projection choisie est la propriété de divergence nulle de chacun de ses éléments. Contrairement à d'autres bases classiquement utilisées dans la littérature (par exemple une base de fonctions trigonométriques de Fourier dans le cas de domaines périodiques), ici tous les termes de l'équation vectorielle de départ dérivant d'un gradient s'annulent par projection, grâce à la propriété :

$$\int \nabla \pi \cdot \mathbf{u}^{(\mu)*} d^3 X = \oint \pi(\mathbf{u}^{(\mu)*} \cdot \mathbf{n}) d^2 X - \int \pi(\nabla \cdot \mathbf{u}^{(\mu)*}) d^3 X = 0 \quad (2.38)$$

où l'étoile "*" dénote le conjugué complexe. Cette propriété permet de se dispenser de la résolution du champ de pression, alors que la donnée du champ de vitesse est suffisante

pour décrire la cinématique de l'écoulement. Cette propriété sera également exploitée au niveau numérique lors de la construction d'une base spectrale de projection.

L'expansion spectrale repose sur la décomposition suivante :

$$\mathbf{u} = \sum_{\mu} B_{\mu}(t) \mathbf{u}^{(\mu)}(\mathbf{X}) \quad (2.39)$$

qui peut s'inverser, en exploitant la normalisation des modes de Kelvin, par la relation :

$$B^{(\mu)} = \int \mathbf{u}^{(\mu)*} \cdot \mathbf{u} d^3 \mathbf{X} \quad (2.40)$$

En effectuant le produit scalaire de (2.30) par $\mathbf{u}^{(\mu)}$, pour tout indice μ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dB_{\mu}}{dt} + i\omega^{(\mu)} B_{\mu} &= \underbrace{\frac{d}{dt} \left\{ \left(1 - \left(\frac{h}{h_0}\right)^2\right) \int u_Z^{(\mu)*} u_Z d^3 \mathbf{X} \right\}}_{\text{terme de couplage}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{Re} \left\{ \int_{r=1} (\mathbf{u}_{\perp}^{(\mu)*} + \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 \mathbf{e}_Z u_Z^{(\mu)*}) (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}) d^2 \mathbf{X} \right\}}_{\text{frottement pariétal latéral}} \\ &+ \underbrace{\int_{Z=0, h_0} \left(\left(\frac{h_0}{h}\right)^2 \mathbf{u}_{\perp}^{(\mu)*} + \mathbf{e}_Z u_Z^{(\mu)*} \right) \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}) d^2 \mathbf{X}}_{\text{frottement pariétal aux extrémités}} \\ &+ \underbrace{\int \mathbf{u} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{u}_{\perp}^{(\mu)*} + \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 \mathbf{e}_Z u_Z^{(\mu)*}) d^3 \mathbf{X}}_{\text{dissipation volumique}} \\ &+ \int \left[\underbrace{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla)}_{\text{non linéarité}} + \underbrace{\mathcal{U} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) + \mathbf{u} \cdot (\mathcal{U} \cdot \nabla)}_{\text{interaction état de base / perturbation}} \right] (\mathbf{u}_{\perp}^{(\mu)*} + \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 u_Z^{(\mu)*} \mathbf{e}_Z) d^3 \mathbf{X} \quad (2.41) \end{aligned}$$

2.2.3 Couplage modal linéaire par le mouvement du piston

Le système d'équations de taille infinie (2.41) régit l'évolution des amplitudes modales $B_{\mu}(t)$. A l'aide de (2.39), le premier terme du membre de droite s'exprime en fonction des B_{μ} . Ceci fait apparaître la matrice $C_{\mu\nu} = \int u_Z^{(\mu)*} u_Z^{(\nu)} d^3 \mathbf{X}$, qui ne dépend que du rapport d'aspect du cylindre, et représente le couplage linéaire des différents modes inertiels par le mouvement du piston. C'est ce terme de couplage qui est responsable de l'instabilité de l'écoulement, qui autrement serait stable sans mouvement du piston. La matrice C ne couple les différentes amplitudes modales que par familles partageant les mêmes nombres d'onde axial et azimuthal. Ainsi un mode axisymétrique ne sera couplé qu'avec lui-même et avec son conjugué, qui possède la même pulsation en valeur absolue. Les modes formant la paire sont complexes, c'est donc la somme algébrique des deux contributions complexes qui possède un sens physique en tant que quantité réelle. Pour un mode axisymétrique non géostrophique ($m > 0$), ceci s'exprime par la relation suivante :

$$C_{\mu\mu} = -C_{\mu\bar{\mu}} = \frac{1}{2}(1 - \omega^{(\mu)^2}) \quad (2.42)$$

Les modes géostrophiques ($m = 0$) forment une famille à part puisqu'ils n'interviennent pas dans le couplage linéaire, leur coefficient de couplage étant toujours nul. En revanche, ceux-ci jouent un rôle important dans la dynamique non-linéaire du système puisqu'ils sont par contre couplés de manière non-linéaire avec les éventuels modes instables.

De même, un mode non-axisymétrique ne peut être couplé par le mouvement du piston qu'à un mode d'une même famille; cependant, à la différence du cas axisymétrique, les différentes quantités couplées linéairement les unes aux autres n'ont pas nécessairement des fréquences égales. La dynamique d'un tel système est donc plus délicate à analyser dans le temps.

2.3 Analyse asymptotique pour $\epsilon \ll 1$

2.3.1 Simplification de l'état de base

Un des problèmes fondamentaux est que, contrairement à beaucoup de situations académiques, la forme analytique de l'état de base n'est pas connue lorsque les effets visqueux sont inclus dans le bilan global. En revanche, l'état de base est connu en l'absence de viscosité, ce qui peut permettre une estimation asymptotique de l'état de base quand le nombre de Reynolds est très grand, à défaut d'être infini. L'expression analytique du champ de vitesse associé est, en fonction des nouvelles variables :

$$V_x = V_y = V_z = 0 \quad (2.43)$$

L'écoulement associé est donc nul dans le repère mobile choisi. Ainsi, dans ce même repère, l'écoulement dénoté \mathcal{U} correspond exactement à l'écoulement secondaire, induit par la viscosité, qui se superpose à l'écoulement précédent. Racz et Scott ont supposé que le champ de vitesse associé à cet écoulement secondaire est dû à deux contributions qui seront toutes les deux négligées :

- un écoulement de couche limite, au plus d'ordre $O(\epsilon)$, qui représente l'amplitude du forçage, et est de plus concentré dans une couche d'épaisseur $Re^{-\frac{1}{2}}$. Cet écoulement permet de raccorder la zone centrale de l'écoulement à la condition visqueuse d'adhérence non nulle à la paroi ($r = 1$) (dans le repère modifié). Près du seuil d'instabilité, les effets de frottement pariétal en $O(Re^{-\frac{1}{2}})$ compensent les effets déstabilisateurs du piston d'ordre $O(\epsilon)$. Ainsi une condition d'instabilité portant sur les ordres de grandeur est donnée par :

$$Re = O(\epsilon^{-2}) \quad (2.44)$$

Cette relation permet d'évaluer la contribution de cet écoulement de couche limite, intégrée sur le domaine, à au plus $O(\epsilon^2)$.

- un flux oscillant dû au pompage d'Ekman de part et d'autre de cette même couche limite. Celui-ci est également d'amplitude $O(\epsilon^2)$.

Sous l'hypothèse d'une petite course, les contributions de l'écoulement secondaire à l'évolution temporelle des amplitudes modales sont donc négligées.

2.3.2 Equations d'amplitude

Les amplitudes modales de la perturbation à l'état de base peuvent être développées en fonction des puissances de ϵ selon :

$$B_\mu = \delta(B_\mu^{[1]} + \epsilon B_\mu^{[2]} + \dots) \quad (2.45)$$

où δ représente un paramètre qui détermine l'amplitude de la perturbation, et où les coefficients $B_\mu^{[1]}, B_\mu^{[2]}, \dots$, tous d'ordre $O(1)$, sont des fonctions du temps rapide t et d'une variable de temps lent $T = \epsilon t$.

A l'ordre principal, le système (2.41) s'écrit :

$$\frac{dB_\mu^{[1]}}{dt} + i\omega^{(\mu)} B_\mu^{[1]} = 0 \quad (2.46)$$

ce qui permet de définir, pour chaque mode, le coefficient d'amplitude modal A_μ , qui est uniquement fonction de T , par :

$$B_\mu^{[1]} = A_\mu(T) e^{-i\omega^{(\mu)} t} \quad (2.47)$$

L'équation d'évolution des A_μ sur le temps lent peut être dérivée à partir des conditions de non-sécularité dans les ordres suivants en $O(\epsilon)$ du développement de (2.41).

L'hypothèse $\epsilon \ll 1$ permet de procéder dans (2.41), aux simplifications suivantes, en respectant les notations utilisées dans [28] :

– sur le terme de couplage linéaire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \left(1 - \left(\frac{\hbar}{\hbar_0}\right)^2\right) \int \mathbf{u}_Z^{(\mu)*} \mathbf{u}_Z d^3 \mathbf{X} \right\} &\sim i\delta\epsilon \sum_\nu C_{\mu\nu} A_\nu \{ (\omega^{(\nu)} - \omega_0) e^{-i(\omega^{(\nu)} - \omega_0)t} \\ &+ (\omega^{(\nu)} + \omega_0) e^{-i(\omega^{(\nu)} + \omega_0)t} \} \end{aligned} \quad (2.48)$$

– sur le terme surfacique de viscosité :

$$Re^{-1} \int \mathbf{u}^{(\mu)\mu} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}) d^2 \mathbf{X} \sim -\delta Re^{-\frac{1}{2}} \sum_\nu D_{\mu\nu} A_\nu e^{-i\omega^{(\nu)} t} \quad (2.49)$$

– sur le terme volumique de viscosité :

$$Re^{-1} \int \mathbf{u} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{u}_\perp^{(\mu)*} + \left(\frac{\hbar}{\hbar_0}\right)^2 \mathbf{e}_Z u_Z^{(\mu)*}) d^3 \mathbf{X} \sim -Re^{-1} K^{(\mu)^2} A_\mu e^{-i\omega^{(\mu)} t} \quad (2.50)$$

A l'ordre $O(\delta\epsilon)$, le problème (2.41) se réécrit sous la forme générique :

$$\frac{dB_\mu^{[2]}}{dt} + i\omega^{(\mu)}B_\mu^{[2]} = \Psi_\mu - \frac{dA_\mu}{dT}e^{-i\omega^{(\nu)}t} \quad (2.51)$$

où le terme Ψ_μ contient les contributions de (2.48), (2.49) et (2.50), sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes $e^{-i\omega^{(\nu)}t}$. Les termes séculaires en $B_\mu^{[2]}$ apparaissent si certaines de ces pulsations coïncident avec $\omega^{(\mu)}$ à l'ordre $O(\epsilon)$. Pour qu'il y ait instabilité, les termes de couplage linéaire par le mouvement du piston doivent également être résonants, ce qui, d'après (2.48), ne se produit pour un mode μ donné que si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Il existe au moins un mode inertiel (ν) vérifiant $|\omega^{(\mu)} - \omega^{(\nu)}| = \omega_0 + O(\epsilon)$
- Le coefficient de couplage $C_{\mu\nu}$ associé à cette paire de modes est non nul.

Dans la suite de l'étude, on ne considèrera que le couplage effectif entre 2 modes μ et ν . On rappelle que cette hypothèse dite "de la paire de modes" est basée sur une analyse asymptotique pour $\epsilon \ll 1$. Dans le cas où les modes considérés sont axisymétriques, la structure de la matrice de couplage C implique que les deux modes couplés par le mouvement du piston sont nécessairement conjugués l'un de l'autre. La condition de résonance sur les fréquences s'écrit alors :

$$2\omega^{(\mu)} = \omega_0 + O(\epsilon) \quad (2.52)$$

Cette condition, qui n'est cependant pas une condition suffisante d'instabilité linéaire, exprime dans le cas de modes axisymétriques l'idée suivante : si le forçage opère à une pulsation ω_0 , alors les seuls modes de Kelvin concernés par le phénomène d'instabilité possèdent une pulsation moitié de la pulsation du forçage. Il s'agit donc potentiellement d'un mécanisme d'excitation sous-harmonique, que l'on peut d'ores et déjà rapprocher du cas du pendule de Mathieu, et opposer aux mécanisme de forçage direct pour lequel le mode instable oscille à la pulsation du mécanisme de forçage. Inversement, cette relation établit que si l'on souhaite sélectionner un mode précis, de pulsation connue, par le moyen d'une instabilité, alors nécessairement on doit forcer le système à une pulsation double, la tolérance requise étant de l'ordre de l'amplitude même du forçage.

2.3.3 Phase d'instabilité linéaire

Lorsque une paire de modes axisymétriques, conjugués l'un de l'autre, vérifie la condition de résonance (2.52), l'équation d'évolution de l'amplitude $A(T)$ de chacun des modes sur le temps lent, défini par $T = \epsilon t$, s'écrit, en régime linéaire :

$$\frac{dA}{dT} = i\omega^{(\mu)}C e^{-i\Delta T}A^* - \epsilon\zeta A \quad (2.53)$$

où $C = -C_{\mu\mu}$ est le coefficient de couplage caractéristique de la paire de modes axisymétriques conjugués choisie, $\Delta = \epsilon^{-1}(\omega_0 - 2\omega^{(\mu)})$ est un paramètre de *detuning* quantifiant l'écart par rapport à la condition exacte de résonance, et ζ représente l'amortissement visqueux complexe du mode.

L'équation linéaire (2.53) admet des solutions exponentielles croissantes en module à la condition nécessaire suivante :

$$\epsilon > \epsilon_c \left[1 + \left(\frac{\omega_0 - \omega_c}{2\zeta_r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.54)$$

où ζ_r (la partie réelle de ζ) représente le facteur d'amortissement visqueux du mode, et où ϵ_c est, pour un nombre de Reynolds donné, la course critique du piston, en-deça de laquelle l'écoulement de base est toujours stable :

$$\epsilon_c = \frac{\zeta_r}{|\omega^{(\mu)} C|} \quad (2.55)$$

ω_c est la fréquence centrale de la bande d'instabilité. Dans le cas axisymétrique, ω_c vaut le double de la fréquence modale sélectionnée, avec une correction en fréquence dû à la viscosité :

$$\omega_c = 2(\omega_\mu + \zeta_i) \quad (2.56)$$

Racz a soigneusement montré dans sa thèse que la prise en compte des effets visqueux, aussi bien pariétaux que volumiques, en plus de réduire la densité modale en introduisant un nombre d'onde de coupure, est cruciale lors de l'évaluation des seuils d'instabilité. Négliger l'amortissement modal amène à la conclusion que le système est inconditionnellement instable dès que $\omega_0 \leq 2$ puisqu'alors la densité modale dans l'intervalle $[-1 : 1]$ implique qu'il existe toujours un mode inertiel, quelque soit son nombre d'onde, dont la pulsation vérifie la condition de résonance.

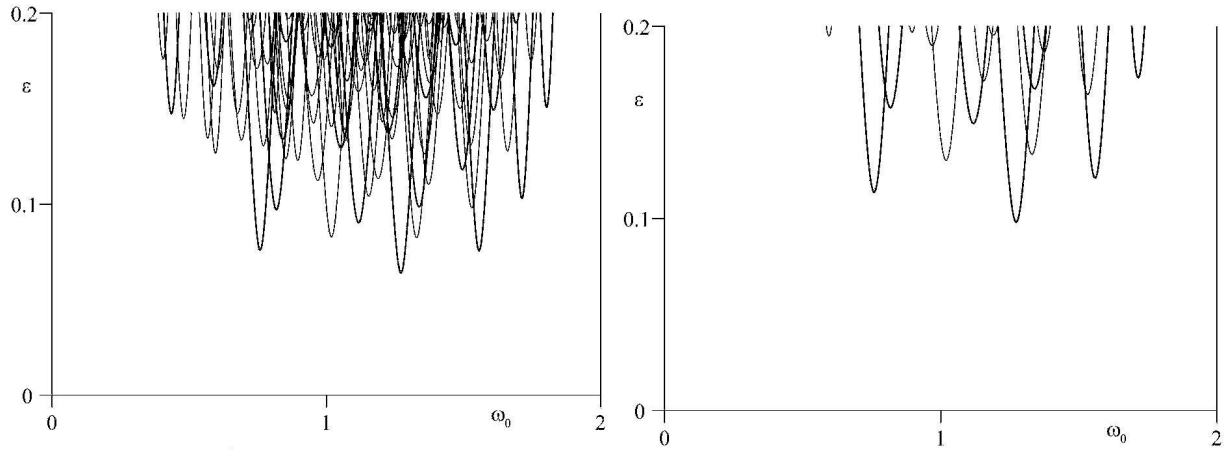


FIG. 2.3 – Diagramme de stabilité marginale théorique dans le plan $(\omega_0 - \epsilon)$. Chaque langue correspond à la courbe marginale associée à une seule paire de modes instables, $h_0 = 2$, $Re = 10^4$ (à gauche) et $Re = 5.10^3$ (à droite). La comparaison des deux valeurs du nombre de Reynolds illustre l'effet stabilisateur de la viscosité.

Le critère de stabilité a été bien vérifié par l'expérience de Graftieux (voir figure 2.4). Le décalage de la courbe marginale de stabilité pour le mode axisymétrique primaire dans le plan (ω_0, Re) est de l'ordre de 0.37% en fréquence (avec une erreur par excès sur la fréquence centrale de la langue d'instabilité) et de 17% par excès sur la valeur du nombre de Reynolds critique Re_c .

2.3.4 Au-delà de la phase d'instabilité linéaire

2.3.4.1 Couplage avec les modes géostrophiques

Lorsqu'un mode inertiel vérifie l'ensemble des conditions nécessaires à sa croissance sur le temps long (condition de résonance (2.52) vérifiée, course supérieure à la course critique (2.54)), il croît jusqu'à ce que les effets non linéaires ne soient plus négligeables. A la différence du couplage linéaire qui ne couple directement que les modes d'une même sous-famille, ici le couplage par la non-linéarité peut coupler un mode axisymétrique avec lui-même et son conjugué,

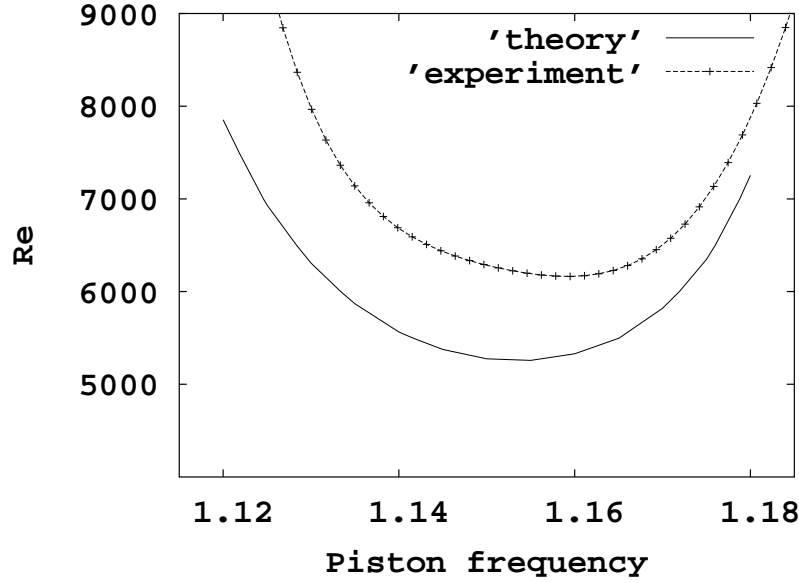


FIG. 2.4 – Comparaison des courbes de stabilité marginale théorique/expérimental dans le plan $(\omega_0 - Re)$, pour le mode axisymétrique primaire $(1,1,0)$, $h_0 = 1.18$, $\epsilon = 13.1\%$.

ainsi qu'avec tous les modes d'une autre famille de modes inertiels : celle des modes *axisymétriques géostrophiques*, notée M . Le système d'équation voit sa taille augmenter puisque les équations d'évolution des amplitudes de ces modes géostrophiques doivent également être couplées à celle régissant l'amplitude du mode instable.

On redéfinit les amplitudes respectives A et A_σ du mode (μ) instable et des modes géostrophiques $\sigma \in M$ par :

$$a = Ae^{i\frac{\Delta T}{2}} \quad (2.57)$$

$$\mathcal{A}_\sigma = \epsilon^{-1} A_\sigma \quad (2.58)$$

Le système complet à considérer prend la forme suivante :

$$\frac{da}{dT} = \underbrace{i\omega_+ C a^*}_{\text{couplage par le piston}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}i\hat{\Delta}\right)}_{\text{detuning}} - \underbrace{\epsilon^{-1} Re^{-\frac{1}{2}} d_+^r}_{\text{amortissement visqueux}} + \underbrace{2i \sum_{\sigma \in M} \Lambda_{\mu+\mu+\sigma} \mathcal{A}_\sigma}_{\text{couplage géostrophique}} a + \underbrace{iG|a|^2 a}_{\text{interaction cubique}} \quad (2.59)$$

$$\frac{d\mathcal{A}_\sigma}{dT} = \underbrace{-\epsilon^{-1} Re^{-\frac{1}{2}} d_\sigma}_{\text{amortissement visqueux}} \mathcal{A}_\sigma + \underbrace{iC \Lambda_{\sigma\mu+\mu+} (a^2 - a^{*2}) + \epsilon^{-1} Re^{-\frac{1}{2}} \Gamma_\sigma |a|^2}_{\text{forçage par le mode primaire}} \quad (2.60)$$

L'introduction de ces composantes géostrophiques de pulsation nulle a pour effet une modification sur le temps long de l'écoulement moyen à l'ordre $O(\epsilon)$, via une modification de la circulation moyenne et donc du taux de rotation local de l'écoulement en rotation. Cette modification de l'écoulement azimuthal a déjà été mise en évidence par les expériences de Mac Ewan [30], Manasseh [13], Kobine [33] ainsi que par la série d'articles concernant l'instabilité elliptique (voir [38]). Il semble qu'on a affaire ici à un phénomène générique dans les problèmes

non linéaires de résonance d'ondes inertielles dans les écoulements tournants. C'est également l'introduction de ces nouveaux degrés de liberté dans le système dynamique associé qui permet la richesse des comportements prédits, puisqu'en l'absence de couplage géostrophique, le système ne tend que vers un point fixe dans l'espace des phases.

2.3.5 Classification des différents comportements au-delà du seuil

Physiquement, le champ de vitesse résultant du système précédent possède une amplitude d'ordre $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$, ainsi l'écoulement associé à la paire de modes conjugués instables domine l'écoulement. L'état de base ainsi que la contribution géostrophique sont tous deux d'ordre $O(\epsilon)$. La structure spatiale de l'écoulement est donc celle du mode instable, qui consiste dans le cas axisymétrique en un réseau de tourbillons toriques concentriques oscillant à la fréquence moitié de celle du piston sur le temps court. En revanche la dynamique sur l'échelle de temps long reste à déterminer par la simulation numérique. A l'ordre dominant en $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$, on peut écrire cet écoulement sous la forme condensée :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t, T) = 2\epsilon^{\frac{1}{2}}|a|(T)\Re\{\mathbf{u}^{(\mu_+)}(\mathbf{X})\exp[-\frac{i}{2}(\omega_0 t + \psi(T) + \frac{\pi}{2})]\} \quad (2.61)$$

où le comportement à temps long du module $|a|$, de la phase ψ , ainsi que des amplitudes moyennes des modes géostrophiques impliqués dans le couplage, sont régies par le système différentiel autonome suivant [28] :

$$\frac{d|a|}{dT} = -(\epsilon^{-1}Re^{-\frac{1}{2}}d_+^r + \omega_+ C \cos \psi)|a| \quad (2.62)$$

$$\frac{d\psi}{dT} = 2\omega_+ C \sin \psi - \hat{\Delta} - 2G|a|^2 - 4 \sum_{\sigma \in M} \Lambda_{\mu_+ \mu_+ \sigma} \mathcal{A}_\sigma \quad (2.63)$$

$$\frac{d\mathcal{A}_\sigma}{dT} = -\epsilon^{-1}Re^{-\frac{1}{2}}d_\sigma \mathcal{A}_\sigma + (2C\Lambda_{\sigma \mu_+ \mu_+} \cos \psi + \epsilon^{-1}Re^{-\frac{1}{2}}\Gamma_\sigma)|a|^2 \quad (2.64)$$

Les simulations numériques menées par Racz [28] dans le cas $h_0 = 2$, $Re = 10^4$, $\hat{\Delta} = 0$ à partir du régime linéaire, en faisant varier ϵ , et en ne considérant que les contributions des 10 premiers modes géostrophiques de M , permettent de mener une classification des différents scénarios possibles dans l'espace des phases à deux dimensions $(|a|, \psi)$. Les simulations concernent l'instabilité du mode axisymétrique dit "primaire", noté aussi $(1,1,0)$, dans les conditions requises pour la résonance paramétrique du mode. Ce mode inertiel est celui qui présente la topologie la plus simple : un vortex toroidal enroulé autour de l'axe du cylindre, associé à une double recirculation azimuthale proche des parois inférieure et supérieure. Il possède, pour les rapports d'aspect proches de l'unité, l'un des taux de déclin les plus faibles ainsi qu'un des coefficients de couplage linéaire les plus forts ; ainsi c'est l'un des premiers modes de Kelvin à être déstabilisés par le mouvement du piston si la pulsation de forçage est convenablement choisie.

- Pour $\epsilon < \epsilon_c$, le système évolue, à partir de n'importe quelle condition initiale, vers le point fixe stable $(0,0)$, et les modes géostrophiques ne sont pas affectés. Ce cas correspond à la stabilité inconditionnelle de l'état de base visqueux.
- Lorsque ϵ se trouve légèrement au-dessus du seuil critique ϵ_c , et que le point de fonctionnement se situe dans la zone d'instabilité définie par la théorie linéaire, le système tend pour $T \rightarrow \infty$ vers un point fixe non nul et stable, ce qui correspond à un état de saturation pour le mode inertiel instable, qui domine l'écoulement total, en phase ψ_0 avec le mouvement du piston (voir figure 2.5). Les caractéristiques de l'écoulement saturé sont données par :

$$\cos \psi_0 = \frac{\epsilon_c}{\epsilon} \quad (2.65)$$

$$|a| = \left(-\frac{\hat{\Delta} \pm 2\omega_+ C(1 - (\frac{\epsilon_c}{\epsilon})^2)^{\frac{1}{2}}}{2(G + 2 \sum_{\sigma \in M} \frac{\Lambda_{\mu_+ \mu_+ \sigma}}{d_\sigma} (\Gamma_\sigma - \frac{2d_\sigma^*}{\omega_+} \Lambda_{\sigma \mu_+ \mu_+}))} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.66)$$

$$(2.67)$$

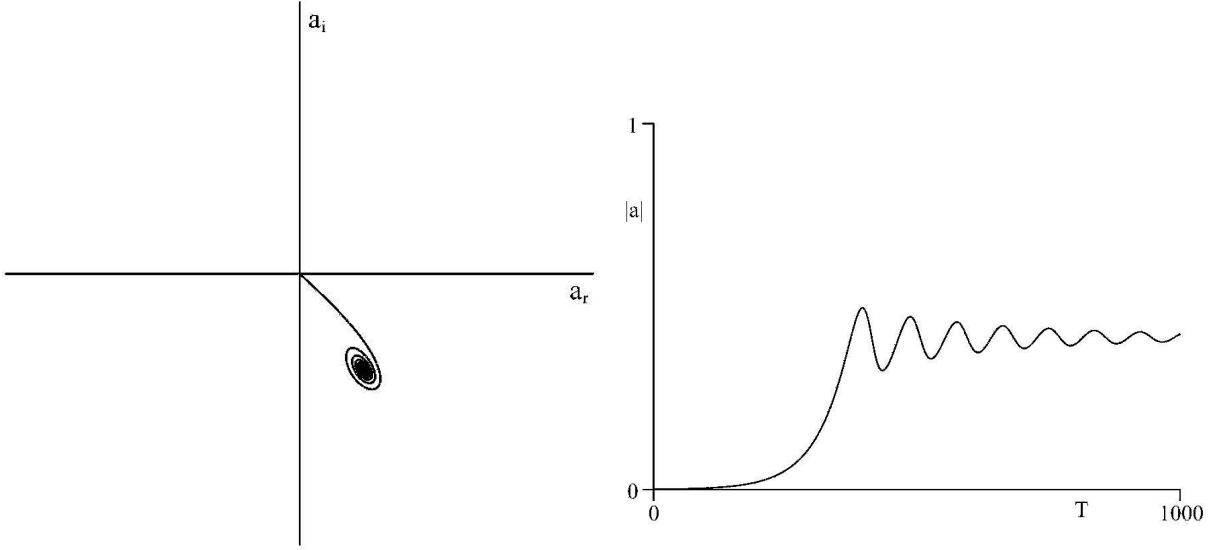


FIG. 2.5 – Signal d'amplitude théorique dans le plan de phase (à gauche) et en fonction du temps (à droite) dans un cas d'une instabilité suivie de saturation. Point de fonctionnement : $h_0 = 2$, $Re = 10^4$, $\hat{\Delta} = 0$, $\epsilon = 0.085$

Expérimentalement, le mode axisymétrique primaire a bien été identifié dans un état saturé, oscillant à la fréquence attendue. La structure spatiale identifiée expérimentalement possède cependant par rapport au mode de Kelvin théorique un faible excédent de vitesse près de l'axe du cylindre.

- Lorsque ϵ continue à augmenter, le point fixe précédent perd sa stabilité, via un scénario de bifurcation de Hopf vers un cycle limite périodique, dont l'amplitude augmente avec la valeur de ϵ (voir figure 2.6) . Ce cycle limite, correspondant à un échange périodique d'énergie entre les composantes géostrophiques et le mode instable lui-même, se traduit physiquement par une modulation périodique à basse fréquence de l'amplitude du mode instable autour de sa valeur à saturation. Ce comportement a été repéré d'abord expérimentalement par Graftieaux [34].

En revanche, aucune valeur des paramètres correspondant à une bifurcation n'a été identifiée. La présence de modulations basse-fréquence étant attestée par les fluctuations RMS des mesures LDA, aucune augmentation brusque de ces fluctuations n'a été repérée, comme si ce comportement oscillatoire existait dans tout le domaine instable.

- Pour des valeurs croissantes de ϵ , le système subit une série de bifurcations. La dynamique temporelle du mode instable, ainsi que des composantes géostrophiques impliquées dans le couplage, prend une allure de cycle limite, constitué de 2 phases alternées : une phase lente de divergence de l'amplitude, suivie d'un brusque retour oscillatoire vers la situation

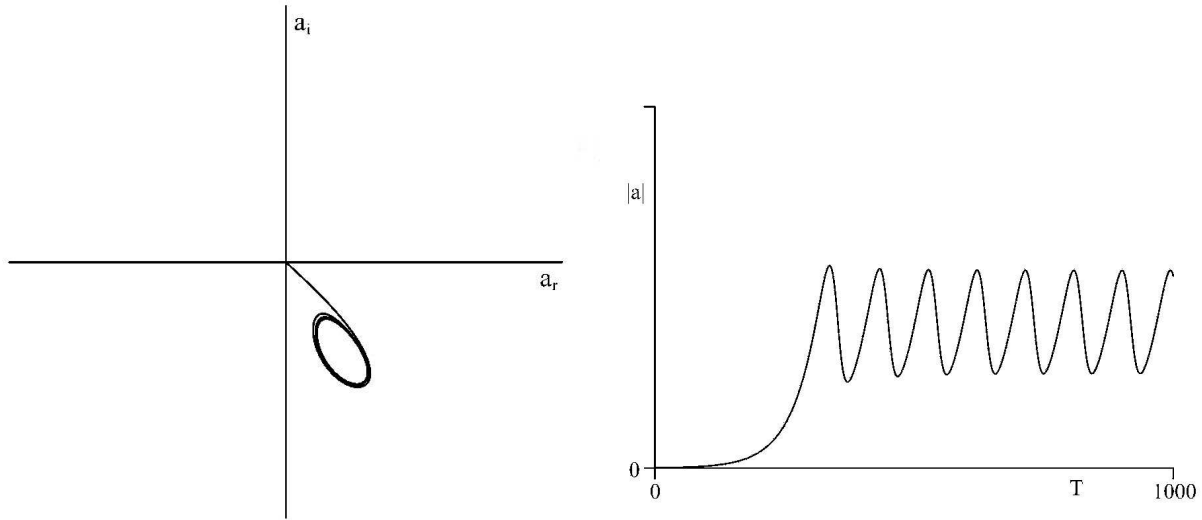


FIG. 2.6 – Signal d’amplitude théorique dans le plan de phase (à gauche) et en fonction du temps (à droite) dans un cas d’une instabilité suivie d’un cycle limite. Point de fonctionnement : $h_0 = 2$, $Re = 10^4$, $\hat{\Delta} = 0$, $\epsilon = 0.087$

d’équilibre instable (voir figure 2.7).

Expérimentalement, l’augmentation des paramètres au-delà des seuils critiques nécessaires à l’instabilité a montré l’évolution vers une dynamique apériodique.

- Au-delà d’une valeur critique ϵ_d (finie ou non), la phase tend dans la majorité des conditions initiales envisagées vers une valeur constante ψ_∞ . L’amplitude des modes instable comme géostrophiques diverge alors de façon exponentielle comme $|a|^2 \sim \exp\left(\frac{sT}{\epsilon Re^{\frac{1}{2}}}\right)$ où $s = -2(d_+^r + \epsilon Re^{\frac{1}{2}} \omega_+ C \cos \psi_\infty)$ (qui doit être positif). Ce cas, représenté sur la figure 2.8 est interprété comme une limite de validité de l’analyse faiblement non linéaire à l’ordre retenu. La marge de manoeuvre expérimentale vis-à-vis du taux de rotation n’a pas permis d’observer ni une dynamique plus complexe, ni une transition vers la turbulence.

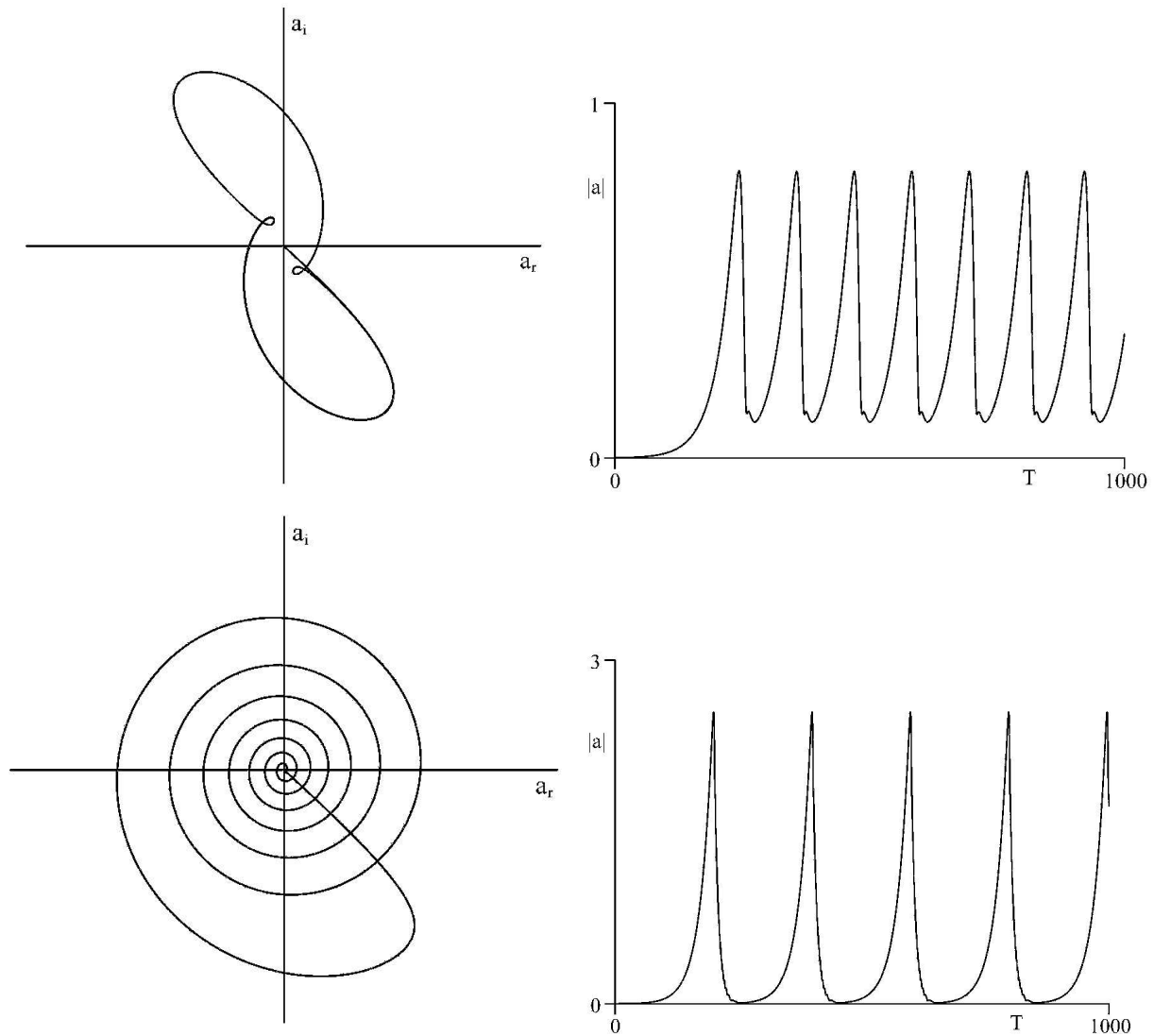


FIG. 2.7 – Signal d’amplitude théorique dans le plan de phase (à gauche) et en fonction du temps (à droite) dans un cas d’instabilité suivie d’un cycle limite. Points de fonctionnement : $h_0 = 2$, $Re = 10^4$, $\hat{\Delta} = 0$, $\epsilon = 0.0093$ (en haut) et $\epsilon = 0.102$ (en bas)

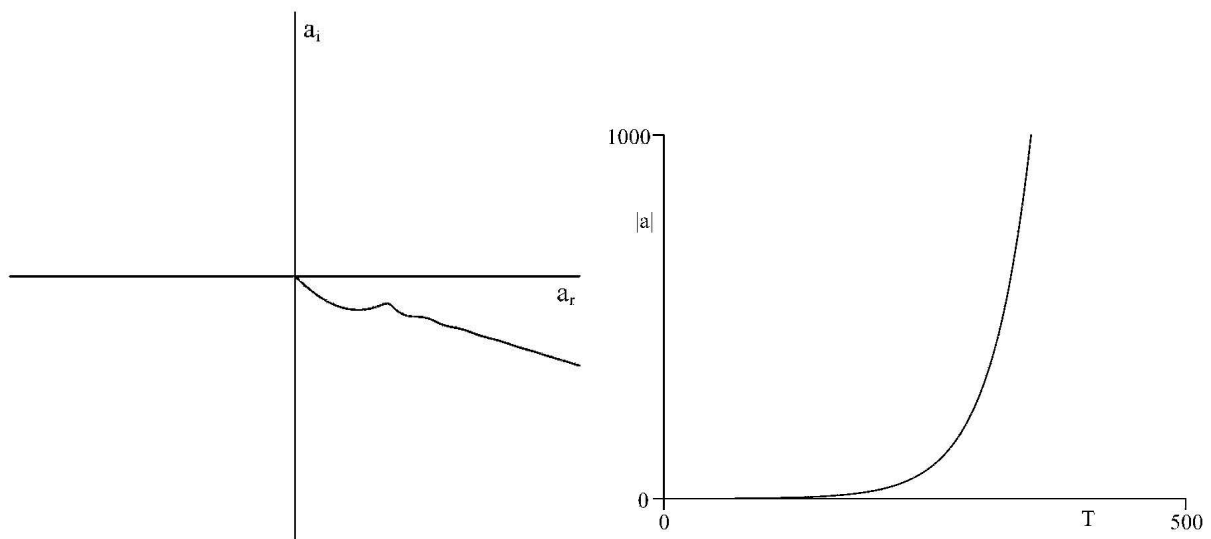


FIG. 2.8 – Signal d’amplitude théorique dans le plan de phase (à gauche) et en fonction du temps (à droite) dans un cas d’une instabilité suivie de divergence. Point de fonctionnement : $h_0 = 2$, $Re = 10^4$, $\hat{\Delta} = 0$, $\epsilon = 0.17$

Chapitre 3

Présentation de l'algorithme numérique

3.1 Formulation spectrale

3.1.1 Equations du problème

Le volume dans lequel est étudié l'écoulement de gaz est périodiquement déformé par la compression. Lors de l'analyse théorique de Racz et Scott [28], un changement de variables 2.19 a été utilisé dans les équations du mouvement, dont le but est de ramener le domaine mobile à un domaine Ω_0 , indépendant du temps. Cette transformation sur les variables spatiales a été associée à une transformation sur le champ des vitesses, afin que celui-ci possède une divergence nulle par rapport aux *nouvelles* variables spatiales X, Y, Z . Cette double transformation du champ à résoudre s'est révélée idéale dans le travail analytique puisqu'elle permet de développer le champ recherché sur une base de fonctions (les modes de Kelvin, définis à l'origine dans le cadre de l'écoulement sans compression), tout en utilisant les simplifications analytiques propres aux champs à divergence nulle. De la même façon, il est intéressant de partir des mêmes équations dans le domaine modifié avant d'envisager une résolution numérique. En effet, l'essentiel de la littérature concernant la simulation des équations aux dérivées partielles est écrit dans le cadre d'un domaine indépendant du temps. Beaucoup de méthodes de discrétisation spatiale basées sur un maillage mobile ont également été développées, et ont prouvé leur utilité dans des contextes industriels avec des géométries parfois complexes. Cependant, la simplicité du changement de variables dans le cas présent (une simple dilatation suivant une direction), associée au fait que les méthodes numériques les plus performantes ne sont utilisées qu'en domaine fixe, n'a pas rendu nécessaire le recours à de telles techniques. De plus, un vaste choix de méthodes efficaces existe dans le cas des écoulements incompressibles, qui possèdent par hypothèse une divergence nulle. Il ne peut donc être que plus commode de se ramener analytiquement à une telle configuration, notamment pour contourner le calcul numérique du champ de pression, difficile et non nécessaire à notre étude.

Les équations qui régissent le comportement du fluide dans le repère tournant, et qui représentent le point de départ de la méthode numérique utilisée, sont donc, dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\Omega_0 = \{r \in [0, 1]; \theta \in [0, 2\pi]; Z \in [0, h_0]\} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{W} = -\nabla \Pi - \mathbf{e}_Z \times \mathbf{V} + \frac{1}{Re(t)} \mathcal{D} \mathbf{W} \quad (3.2)$$

où \mathbf{W} est le champ auxiliaire défini simplement à partir du champ \mathbf{V} par :

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} + \left(\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 - 1\right)V_Z \mathbf{e}_Z \quad (3.3)$$

La condition d'incompressibilité du champ s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.4)$$

On rappelle la définition de l'opérateur de diffusion modifié, défini par rapport aux variables fixes X, Y, Z :

$$\mathcal{D} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{h_0}{h}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad (3.5)$$

Il faut associer au système (3.2)(3.4) les nouvelles conditions aux limites introduites par la transformation du champ de vitesse :

$$\mathbf{V} = -\frac{Z}{h} \frac{dh}{dt} \mathbf{e}_Z, \quad (r = 1) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{V} = 0, \quad (Z = 0, h_0) \quad (3.7)$$

Cette étude se restreint au cas d'un écoulement axisymétrique, c'est-à-dire que toutes les grandeurs étudiées sont supposées indépendantes de la variable azimuthale θ . Le champ méridien $\mathbf{V}_\perp = V_r \mathbf{e}_r + V_Z \mathbf{e}_Z$ dérive ainsi d'une fonction de courant méridienne $\psi(r, Z, t)$ par l'intermédiaire de la formule :

$$\mathbf{V}_\perp = -\nabla \times \left(\frac{\psi}{r} \mathbf{e}_\theta\right) \quad (3.8)$$

De telle façon que les composantes méridiennes s'écrivent chacune :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad (3.9)$$

$$V_Z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.10)$$

Comme il a été écrit dans le chapitre 2, la loi utilisée dans toute cette thèse pour le déplacement du piston est donnée, en variables adimensionnelles, par :

$$h(t) = h_0(1 + \epsilon \cos \omega_0 t) \quad (3.11)$$

Cependant, l'algorithme est ici présenté, dans un souci de généralité, ainsi que pour des extensions ultérieures de ce travail, sans expression explicite pour $h(t)$.

Le nombre de Reynolds suit une loi en fonction de la hauteur du cylindre qui est une approximation de la loi de Sutherland pour l'air (voir Annexe A) :

$$Re(t) \sim Re_{moyen} \left(\frac{h(t)}{h_0}\right)^{-0.7} \quad (3.12)$$

3.1.2 Choix d'une méthode spectrale

Les effets de rotation induisent près des parois des couches d'Ekman d'épaisseur variant, pour des nombres de Reynolds asymptotiquement grands, comme $Re^{-\frac{1}{2}}$, et qui sont donc fines par rapport aux dimensions caractéristiques du cylindre [5]. La connaissance du comportement du fluide dans ces zones de couche limite est nécessaire dans le cadre d'une simulation précise. En effet, pour les grands nombres de Reynolds, c'est majoritairement dans ces zones qu'agit la dissipation visqueuse. Dans le contexte d'une étude de stabilité, il est donc crucial de ne pas sous-estimer quantitativement ces phénomènes dissipatifs, qui sont supposés être les seuls mécanismes stabilisants de l'écoulement. Une couche d'Ekman insuffisamment discrétisée introduit a priori une erreur sur l'énergie totale dissipée par la viscosité, ce qui peut complètement fausser les résultats. En particulier, l'algorithme peut par exemple prévoir à tort une instabilité de l'écoulement alors que le régime effectif est stable. Ceci impose donc pour la résolution numérique du champ de vitesse une méthode spatiale d'ordre élevé, afin de ne pas rendre le coût du calcul prohibitif.

Cette exigence est renforcée par le fait que le calcul est instationnaire, et doit être itéré sur des temps caractéristiques longs. Ainsi il est primordial de réduire autant que possible le coût d'une itération simple en temps, puisqu'un grand nombre d'itérations du schéma doit être effectué, ceci dans un temps limité par les moyens de calcul disponibles.

Les méthodes spectrales de type Galerkin, où le champ à résoudre est développé sur une base de fonctions adaptées, puis tronqué en pratique, ont montré jusqu'à aujourd'hui les meilleures performances en terme de vitesse de convergence. C'est d'ailleurs ce type même de schéma qui a permis l'essor des simulations numériques directes d'écoulements turbulents tridimensionnels, particulièrement gloutonnes en temps de calcul, à cause des différences d'échelles qui caractérisent les écoulements à grands nombres de Reynolds. Le revers de la médaille est que le coût de ce type de méthodes augmente plus rapidement avec la discrétisation spectrale que dans le cas des méthodes de discrétisation locales du type différences finies.

A défaut de posséder un plan d'attaque général, le choix optimal de la base de fonctions sur laquelle la solution est développée se fait en fonction du problème à résoudre, et en grande partie en fonction de ses conditions aux limites. Ainsi, si le problème présente des conditions aux limites périodiques dans une direction, comme par exemple dans le cas d'un problème modèle décrivant un champ dans un domaine infini, ou pour des géométries à périodicité cylindrique ou sphérique, la solution est souvent développée sur une base de fonctions trigonométriques analogue à des modes de Fourier. Ce choix permet d'utiliser les propriétés relativement simples de dérivation et de convolution relatives à l'espace de Fourier.

Dans le cas de problèmes plus généraux, limités à un domaine borné, le choix est plus vaste ; cependant les bases utilisées sont souvent formées de fonctions polynomiales, en partie pour leurs règles de dérivabilité relativement faciles d'emploi, mais également pour leurs propriétés d'orthogonalité. Boyd [39] donne un bon aperçu de l'ensemble des polynômes utilisés dans la littérature en fonction du problème à résoudre. Il apparaît que les bases les plus populaires, dans le cas de domaines bornés ne présentant pas de périodicité, sont formées, dans chaque direction spatiale, de polynômes de Chebyshev de première voire de seconde espèce, de polynômes de Legendre, ou plus rarement de polynômes de Gegenbauer. En particulier, les polynômes de Chebyshev de première espèce sont les plus employés, en raison des forts gradients qui caractérisent les polynômes d'ordre élevé aux bornes de leur domaine de définition. Ceci permet en pratique une description économique de champs physiques supposés présenter de forts gradients près des parois ; il en va ainsi de la plupart des phénomènes hydrodynamiques, thermiques ou électromagnétiques présentant des couches limites. En revanche, les conditions aux limites

naturelles de ces polynômes de Chebyshev ne présentent pas de zéros aux limites du domaine.

3.1.3 Projection spectrale des équations

L'idée générale des méthodes de projection spectrale de type Galerkin est de projeter les équations d'évolution du problème sur une base de fonctions qui ne dépendent que des variables spatiales, et de transformer ainsi une ou plusieurs équations aux dérivées partielles en un système dénombrable d'équations différentielles ordinaires en temps [35]. En pratique, ce système dénombrable est tronqué en vue d'une résolution numérique. Dans l'espace fonctionnel considéré ici, l'opération de projection se traduit par un produit scalaire entre fonctions, vis-à-vis de la norme L^2 spatiale, c'est-à-dire par le produit scalaire de l'équation avec les fonctions de base successives, suivi d'une intégration sur l'ensemble du domaine spatial de calcul.

L'efficacité de la méthode repose sur le choix des fonctions de base, notées ici $\mathbf{u}^\mu(\mathbf{X})$, sur lesquelles les équations se retrouvent projetées [39]. Cependant, il est utile (quoique non nécessaire) que ces fonctions possèdent certaines propriétés analogues aux propriétés élémentaires du champ de vitesse à résoudre. Pour commencer, on peut décider que la condition d'adhérence $\mathbf{u}^\mu = \mathbf{0}$ est vérifiée à la surface du domaine. De plus, il est utile de supposer la condition d'incompressibilité, correspondant à la condition mathématique de divergence nulle $\nabla \cdot \mathbf{u}^\mu = 0$.

L'avantage technique important de ces hypothèses se manifeste lors du traitement du terme relatif aux forces de pression, ou plus généralement relatifs aux forces dérivant d'un potentiel scalaire Π . On peut voir que toute fonction dérivant d'un potentiel s'annule, par projection sur une base possédant les deux propriétés précédentes. En effet, l'application du théorème de la divergence à la projection d'un terme dérivant d'un potentiel scalaire fournit deux nouveaux termes :

$$\int \nabla \Pi \cdot \mathbf{u}^\mu d^3 X = \oint \Pi(\mathbf{u}^\mu \cdot \mathbf{n}) d^2 X - \int \Pi(\nabla \cdot \mathbf{u}^\mu) d^3 X = 0 \quad (3.13)$$

Le premier, dit terme de bord, est une intégrale de surface qui s'annule à cause de la condition $\mathbf{u}^\mu = \mathbf{0}$ sur la surface. Le second est une intégrale sur le domaine entier contenant en facteur de l'intégrande la quantité scalaire $\nabla \cdot \mathbf{u}^\mu$, construite justement pour être nulle, quelque soit la forme du potentiel scalaire considérée.

Ainsi, après projection, les équations de Navier-Stokes ne contiennent plus explicitement de terme traduisant les effets de pression, mais uniquement des termes relatifs aux vecteurs vitesse. Cet avantage largement connu des méthodes spectrales pour la résolution d'écoulements incompressibles a été ici généralisé, à l'aide du changement de variables adopté, au cas d'un écoulement en compression homogène, et se révèle spécialement pratique dès lors que l'on s'intéresse seulement à d'autres grandeurs physiques que le champ de pression. Dans notre cas, la résolution précise du champ de vitesse permet une caractérisation suffisante des propriétés dynamiques de l'instabilité attendue. Cependant, il est toujours possible de récupérer numériquement les valeurs instantanées du champ de pression en inversant à chaque instant désiré une équation de Poisson portant sur Π . Toutefois, la résolution numérique de ce problème annexe peut s'avérer délicate ou au moins coûteuse en temps de convergence, à cause du mauvais préconditionnement intrinsèque des opérateurs en jeu [40]. Notons également qu'en terme de vitesses de convergence de l'algorithme, le choix d'éliminer la pression du problème permet de ne faire dépendre l'erreur commise que de l'ordre de troncature et de la norme fonctionnelle du champ de vitesses $\|u\|_{H_k(\Omega)}$, alors que dans d'autres cas, par exemple si la base utilisée est une base d'exponentielles de Fourier, à divergence non nulle, l'erreur totale sur le champ dépend également de la norme fonctionnelle $\|u\|_{H_k(\Omega)} + \|\Pi\|_{H_{k-1}(\Omega)}$ [35]. Ainsi la pression, ainsi que tous les effets potentiels, disparaissent totalement du problème posé.

La projection de l'équation (3.2) sur le type de base considéré ramène le système à la formulation intégrale suivante :

$$\int \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}^\mu d^3 X = - \int (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}^\mu d^3 X + \frac{1}{Re(t)} \int \mathcal{D} \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}^\mu d^3 X - \int (\mathbf{e}_Z \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{u}^\mu d^3 X \quad (3.14)$$

Une simplification de cette équation terme par terme permet, à l'aide du théorème de la divergence, de ramener tous les opérateurs de dérivation spatiale sur les fonctions de base, dont les dérivées sont en principe explicites. Le terme instationnaire peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\int \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}^\mu d^3 X = \frac{dB^\mu}{dt} \quad (3.15)$$

Ainsi il caractérise l'évolution de la quantité projetée $B^\mu(t)$, qui ne dépend que du temps, et qui est définie par :

$$B^\mu(t) = \int \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}^\mu d^3 X \quad (3.16)$$

De même, la projection du terme non linéaire $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{W}$ peut se simplifier. En effet, on a :

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}^\mu = \nabla \cdot (\mathbf{u}^\mu \cdot \mathbf{W} \mathbf{V}) - (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u}^\mu) \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{V})}_{=0} - \mathbf{W} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{u}^\mu) \quad (3.17)$$

ce qui donne par projection :

$$\int (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}^\mu d^3 X = \underbrace{\oint (\mathbf{u}^\mu \cdot \mathbf{W}) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d^2 X}_{=0} - \int \mathbf{W} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{u}^\mu) d^3 X \quad (3.18)$$

Après transformation, le terme convectif fournit donc la contribution $NL^\mu(t)$ définie par :

$$NL^\mu = \int \mathbf{W} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{u}^\mu) d^3 X \quad (3.19)$$

Les termes de rotation ne font pas intervenir d'opérateur différentiel et peuvent être laissés sous leur forme initiale. En revanche, les termes diffusifs deviennent, compte tenu des conditions aux limites :

$$\int \mathcal{D} \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}^\mu d^3 X = \int \mathbf{W} \cdot \mathcal{D} \mathbf{u}^\mu d^3 X + \frac{h}{h_0^2} \frac{dh}{dt} \int_{(r=1)} Z \frac{\partial u_Z^\mu}{\partial r} d^2 X \quad (3.20)$$

Ainsi les équations de Navier-Stokes, projetées sur une base vérifiant les propriétés d'adhérence et de divergence nulle, se ramènent à la formulation faible suivante :

$$\frac{dB^\mu}{dt} = \int \mathbf{W} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{u}^\mu) d^3 X - \int \mathbf{u}^\mu \cdot (\mathbf{e}_Z \times \mathbf{V}) d^3 X + \frac{1}{Re} \int \mathbf{W} \cdot \mathcal{D} \mathbf{u}^\mu d^3 X + \frac{1}{Re} \frac{h}{h_0^2} \frac{dh}{dt} \int_{(r=1)} Z \frac{\partial u_Z^\mu}{\partial r} d^2 X \quad (3.21)$$

On remarquera qu'à ce stade, en dehors des propriétés supposées, les fonctions \mathbf{u}^μ n'ont pas encore été explicitées. Il reste donc à les construire vis-à-vis de critères essentiellement numériques.

3.1.4 Traitement des singularités

3.1.4.1 Mise en évidence des singularités du problème

Les conditions aux limites (3.6) et (3.7) du problème mettent en évidence une double singularité du champ de vitesse. La première consiste en une discontinuité de ce champ au coin proche du piston. La prise en compte de la condition d'adhérence du fluide à la paroi induit ainsi ce comportement à priori contradictoire : le fluide proche du piston se déplace à la même vitesse que celui-ci, a priori non nulle et variable au cours du temps, alors que le fluide proche de la paroi fixe a une vitesse nulle. Il faut également mentionner une autre singularité dans le coin proche de la culasse du cylindre, qui résulte en une discontinuité, non pas de la vitesse, mais de ses dérivées. Cette singularité est donc d'ordre inférieure, mais on doit également en tenir compte au même titre que celle dans le coin piston.

Indépendamment du problème posé par la prise en compte de ces deux types de singularité, une précision élevée, de type spectral, est souhaitée pour la résolution numérique de ce problème, en partie à cause de la petite taille des couches limites induites par le fort taux de rotation auquel les instabilités hydrodynamiques sont attendues. Le traitement des singularités mathématiques (3.6) et (3.7) n'est pas forcément nécessaire dans le cas d'une résolution numérique par une méthode de différences finies ou de volumes finis : les gradients localement infinis étant régularisés par la discrétisation spatiale, les phénomènes d'oscillations parasites peuvent être évités à l'aide d'un raffinement local du maillage autour des zones de singularités (l'exemple académique le plus étudié est sans doute celui de la cavité entraînée). Or il n'en va pas de même pour une résolution non-locale dans l'espace physique, en particulier pour les méthodes spectrales de type Galerkin comme celle que nous souhaitons utiliser ici. Une simple discontinuité du champ solution, analogue à la discontinuité qui existe ici près du piston, donne également lieu à des oscillations dites de Gibbs, d'une longueur d'onde équivalente à celle de coupure du schéma, qui contaminent tout le domaine physique et qui affectent également fortement la précision de la solution. Dans le cas d'un calcul instationnaire, ces oscillations parasites, sans aucune signification physique, donnent lieu à des instabilités numériques qui font diverger le champ calculé. Ce phénomène est bien décrit par Canuto [35]. Outre le phénomène de Gibbs ici évoqué, le manque de régularité de la solution recherchée dégrade de toute façon le taux de convergence de la méthode spectrale employée, selon l'estimation d'erreur générale pour les champs à divergence nulle : Soit π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur le sous-espace fonctionnel engendré par N fonctions de base dans chaque direction. Alors pour tout s positif ou nul, il existe une constante C_s telle que, pour toute fonction scalaire U appartenant à $H^s(\Omega)$:

$$\|U - \pi_N U\|_{L^2(\Omega)} < C_s N^{-s} \|U\|_{H^s(\Omega)} \quad (3.22)$$

La méthode de projection possède une vitesse de convergence intéressante en pratique à la condition nécessaire que le champ recherché appartienne à des espaces de Sobolev d'ordre suffisamment élevé, c'est-à-dire que ce champ soit suffisamment régulier sur l'ensemble du domaine [41]. L'emploi d'une méthode de type spectral pour la simulation du phénomène se révèle donc *a priori* inutilement coûteuse sans un traitement préalable des singularités.

3.1.4.2 Technique de soustraction proposée

La méthode à adopter doit être basée sur deux priorités : d'une part faire en sorte que le champ à simuler par méthode spectrale soit aussi régulier que possible, et d'autre part que la convergence soit la plus rapide possible. Plusieurs techniques ont été utilisées avec succès dans la littérature, dans le cadre des méthodes spectrales, en particulier dans le cas de l'écoulement à l'intérieur d'un cylindre. Le cas le plus étudié est celui d'un cylindre dont les parois latérales sont fixes mais dont le socle est mis en rotation uniforme. Ce type de configuration donne

lieu a une discontinuité de la vitesse azimuthale, ce qui diffère de la singularité étudiée ici mais correspond à une singularité du même ordre sur le champ des vitesses. L'ensemble des méthodes testées jusqu'à présent selon une formulation vitesse-pression utilise une approximation de l'écoulement de coin regularisant la solution recherchée, en fonction de paramètres simulant la présence d'un interstice et dépendant de la discrétisation adoptée. Par exemple, Ku & al [42] ont proposé une technique de régularisation forcée, testée initialement dans le cas d'une cavité 3D parallélépipédique entraînée. Il s'agit d'approximer la vitesse u_θ près de la singularité par un polynôme v_M de degré M (où M représente l'ordre de l'expansion spectrale selon Z), avec les valeurs imposées $v_M(Z_0) = 1$, $v_M(Z_1) = 0.3$, $v_M(Z_i) = 0$, $i = 2, \dots, M$, où les Z_i représentent les points de collocation de Gauss-Lobatto selon la direction axiale. Cette méthode, en plus de ne pas respecter les vraies conditions aux limites du problème posé, présente dans le cas de la cavité cylindrique entraînée étudiée par Lopez & al [43], des erreurs importantes, même pour M grand, et peut de plus introduire dans l'écoulement des structures vorticales d'orientation non physique. Une alternative plus efficace proposée initialement par Lopez [43], puis réutilisée dans les travaux de Serre [44], considère une régularisation du champ de vitesses par une fonction de paroi de la forme $v_\epsilon(Z) = \exp(-\frac{2Z}{\epsilon h_0})$, où ϵ est un petit paramètre à choisir et v_ϵ est une fonction de Z qui doit être discrétisée par le schéma spectral. Si les résultats de cette procédure se révèlent précis, c'est cependant au prix d'une discrétisation relativement élevée (pour $\epsilon = 0.006$, 64 fonctions de base selon Z sont nécessaires pour éviter la présence d'oscillations dans le cas d'un régime de Stokes). De plus, là encore, un paramètre ϵ , simulant l'effet régularisant d'un interstice virtuel, doit être calé en fonction de la discrétisation envisagée, ce qui augmente le nombre de paramètres numériques de l'étude. L'alternative idéale serait au contraire d'utiliser une méthode qui n'utilise aucune approximation du champ dans les coins, et qui serait indépendante des autres paramètres numériques de l'étude. D'autres méthodes de décomposition de domaine, relativement coûteuses, peuvent encore être utilisées pour empêcher la propagation des oscillations parasites, sans toutefois éliminer totalement le problème de la perte de précision du schéma ([35]).

L'idée adoptée dans cette étude est de retrancher au champ de vitesses recherché un certain champ connu au préalable, dit *champ singulier*, dont les conditions aux limites sont celles du problème original, sachant que ces conditions aux limites sont à elles seules responsables du manque de régularité de la solution. L'algorithme spectral peut ensuite être employé pour résoudre le champ résultant de cette soustraction, qui possède par construction des conditions aux limites plus régulières, et est donc beaucoup plus facile à approcher en pratique à l'aide de la méthode employée. On peut ensuite reconstituer le champ total dans l'espace physique en superposant au champ singulier la projection du champ résultant sur l'espace de fonctions utilisé dans l'algorithme, via la formule :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{singulier} + \sum_{\mu} A_{\mu} \mathbf{u}^{\mu} \quad (3.23)$$

Cette même décomposition s'applique pour la fonction de courant :

$$\psi = \psi_{singulier} + \sum_{\mu} A_{\mu} \psi^{\mu} \quad (3.24)$$

Une telle décomposition a déjà été testée dans d'autres configurations, initialement par les travaux de Schultz, Lee et Boyd [45] dans le cadre de la cavité entraînée avec viscosité dominante. La décomposition est basée sur la connaissance *a priori* de la solution dans la zone de coin, issue des calculs analytiques de Moffatt sur le régime de Stokes dans des géométries angulaires [46]. La méthode s'est révélée beaucoup plus performante que les méthodes de raffinement classiques, et a permis de mettre en évidence la série de "Moffatt eddies" caractéristique de l'écoulement dans les coins (on peut noter que selon cette même analyse, aucune séquence de structures vorticales n'est attendues dans notre configuration). Une étude approfondie de

cette technique numérique a été réalisée par Botella et Peyret [47], dans le cadre de plusieurs configurations hydrodynamiques, avec une analyse exhaustive de la précision de la méthode. En particulier, ils proposent de généraliser cette méthode en effectuant une expansion asymptotique du champ singulier en fonction des puissances de la distance à la zone de coin, sous la forme polaire générique $\psi_{singulier} = \sum_{k \geq 1} r^{\alpha_k} f_k(\theta, t)$. Les exposants α_k peuvent être complexes et sont ordonnés par partie réelle croissante. Leur étude, dans le cas d'un écoulement soumis à la compression d'un piston dans une configuration plane bidimensionnelle, incluant les effets d'inertie, indique clairement qu'une expansion du champ singulier au premier ordre (baptisée *NS1*) accroît la précision de façon très satisfaisante. Leurs résultats montrent également que la prolongation de l'expansion jusqu'au deuxième ordre (baptisée *NS2*) améliore encore nettement la précision de la méthode, jusqu'à surpasser l'ordre de convergence des méthodes de différence finies d'ordre 6. Dans les deux cas, aucune oscillation numérique n'a été notée lors de l'incrémentation en temps, ce qui indique une amélioration qualitative nette par rapport à toutes les techniques de régularisation utilisées jusqu'à présent, quelque soit la méthode et le schéma employés. Nous n'avons pas jugé pertinent de prolonger la décomposition jusqu'au deuxième ordre *NS2* compte tenu de la complexité de la mise en oeuvre de la méthode dans le cas d'une géométrie cylindrique, et de l'efficacité de la méthode *NS1* qui s'est révélée suffisante face à la précision requise.

Dans le domaine fixe introduit par le champ de variables effectué, la condition aux limites responsable de la singularité s'écrit :

$$\mathbf{V} = -\frac{Z}{h} \frac{dh}{dt} \mathbf{e}_z, \quad (r = 1) \quad (3.25)$$

Il s'agit d'une condition aux limites instationnaire, or il est plus commode pour la construction de considérer un champ singulier stationnaire. C'est pourquoi il est utile d'introduire le champ intermédiaire \mathbf{V}_0 , défini à partir du champ singulier initial par la relation suivante :

$$\mathbf{V}_{singulier}(\mathbf{X}, t) = -\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \mathbf{V}_0(\mathbf{X}) \quad (3.26)$$

Le champ de vitesses total dans le cylindre se déduit donc de \mathbf{V}_0 , qui sera dorénavant rebaptisé lui-même champ singulier, par la relation

$$\mathbf{V} = -\frac{\dot{h}}{h} \mathbf{V}_0(\mathbf{X}) + \sum_{\mu} A_{\mu}(t) \mathbf{u}^{\mu}(\mathbf{X}) \quad (3.27)$$

où les $A_{\mu}(t)$ représentent les amplitudes calculées en pratique par le schéma numérique et où les $\mathbf{u}^{\mu}(\mathbf{X})$ sont les fonctions sur lesquelles repose l'expansion modale. Un des avantages intéressants de la factorisation sous une forme séparée de $\mathbf{V}_{singulier}$ vis-à-vis des variables \mathbf{X} et t est que le champ \mathbf{V}_0 construit est totalement indépendant de la loi choisie pour l'évolution temporelle de $h(t)$. Ceci permet de considérer des mouvements du piston autres que sinusoidaux, et éventuellement des mouvements apériodiques qui sortent du cadre de cette étude. Le cas où le piston n'est pas mis en mouvement, et où l'écoulement se réduit à un écoulement de rotation uniforme, est également un cas particulier de la méthode choisie, utile à l'analyse des modes propres naturels du système.

La difficulté réside dans le choix, puis dans la construction du champ singulier. Les contraintes à respecter sont :

1. $\nabla \cdot \mathbf{V}_0 = 0$
2. \mathbf{V}_0 doit respecter les conditions aux limites :
 - $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$ ($Z = 0, h_0$)
 - $\mathbf{V}_0 = Z \mathbf{e}_z$ ($r = 1$)

3. La limite asymptotique de \mathbf{V}_0 proche des coins correspond à celle du champ de vitesse réel, de façon à ce que $\mathbf{V} + \frac{h}{h_0}\mathbf{V}_0$ soit plus régulier que \mathbf{V} .

Les deux premières contraintes impliquent que \mathbf{V}_0 dérivent d'une fonction de courant $\psi_0(r, Z)$ qui satisfait aux conditions aux limites :

$$\psi_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial Z} = 0 \quad (Z = 0, h_0) \quad (3.28)$$

$$\psi_0 = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = -Z \quad (3.29)$$

$$(3.30)$$

De plus, pour éviter une singularité du champ \mathbf{V}_0 à l'axe, il faut que ψ_0 et toutes ses dérivées d'ordre impair soient nulles en ($r=0$).

Suffisamment proche des coins, l'écoulement est dominé par la viscosité car le nombre de Reynolds local (basé sur la distance au coin) tend vers zéro. Plus précisément, la viscosité domine si on se place à l'intérieur de la région visqueuse qui se trouve au coin. L'écoulement est alors régi localement par un problème de Stokes plan et la fonction de courant ψ satisfait asymptotiquement l'équation biharmonique :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right)^2 \psi = 0 \quad (3.31)$$

ainsi que les conditions aux limites sur les deux parois qui se rencontrent au coin considéré.

Dans l'annexe B, il est montré que la solution de (3.31) appropriée au coin piston est :

$$\psi_P = \frac{R_P h_0}{\left(\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{2}\right)} (\sin \phi_P - \phi_P \cos \phi_P - \frac{2}{\pi} \phi_P \sin \phi_P) \quad (3.32)$$

et qu'au coin culasse :

$$\psi_C = \frac{R_C^2}{4} (\sin 2\phi_C - 2\phi_C + \frac{\pi}{2}(1 - \cos 2\phi_C)) \quad (3.33)$$

où les coordonnées polaires (R_P, ϕ_P) et (R_C, ϕ_C) sont définies dans la figure 3.1.

La contrainte 3. sur le champ singulier implique que :

$$\psi_0 \sim \psi_P \quad (R_P \rightarrow 0) \quad (3.34)$$

$$\psi_0 \sim \psi_C \quad (R_C \rightarrow 0) \quad (3.35)$$

et nous avons besoin de construire une fonction $\psi_0(r, Z)$ dans tout le domaine, qui respecte (3.35), les conditions aux limites (3.30), et la non singularité du champ \mathbf{V}_0 à l'axe. On procède de la façon suivante.

La fonction ψ_0 est factorisée sous la forme :

$$\psi_0 = r^2(1 - r^2)Z\chi_0 \quad (3.36)$$

où $\chi_0 \sim \Gamma_P$ pour $R_P \rightarrow 0$ et $\chi_0 \sim \Gamma_C$ pour $R_C \rightarrow 0$, avec les notations suivantes :

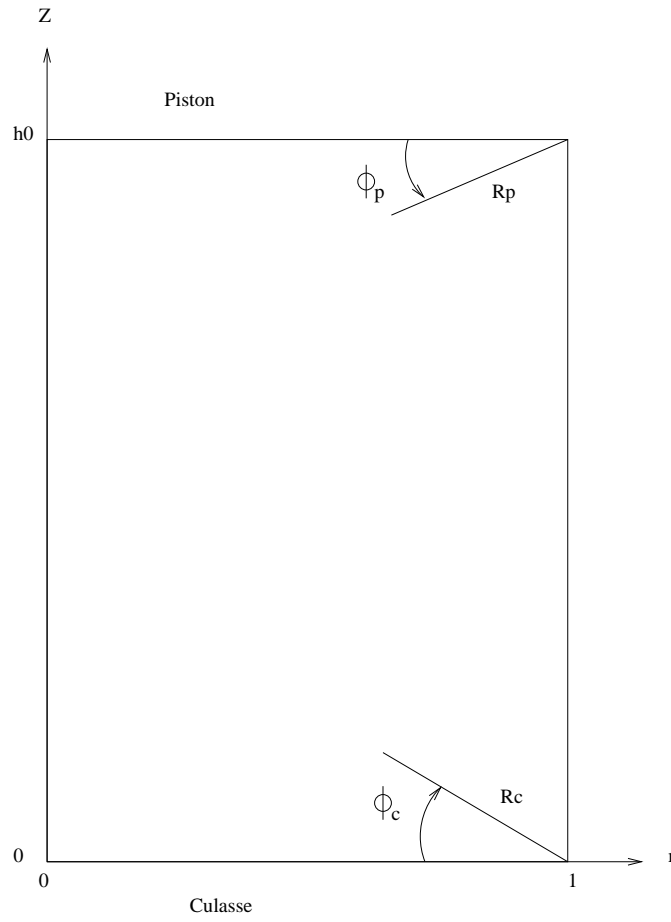


FIG. 3.1 – Définition des coordonnées polaires utilisées

$$\Gamma_P = \frac{\psi_P}{2h_0 R_P \cos \phi_P} \quad (3.37)$$

$$\Gamma_C = \frac{\psi_C}{R_C^2 \sin 2\phi_C} \quad (3.38)$$

La fonction $\chi_0(r, Z)$ est une interpolation en Z entre deux fonctions χ_P et χ_C , pondérée par la fonction interpolante $H(Z)$, telle que :

$$\chi_0 = H_Z \chi_P + (1 - H(Z)) \chi_C \quad (3.39)$$

où la fonction H (voir figure 3.2) a été choisie telle que :

$$H(Z) = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{Z - \frac{h_0}{2}}{Z(Z - h_0)} \right) \quad (3.40)$$

Les fonctions χ_P et χ_C sont reliées à Γ_P et Γ_C par les formules :

$$\chi_P = e^{\frac{r-1}{r}} \Gamma_P \quad (3.41)$$

$$\chi_C = e^{\frac{r-1}{r}} \Gamma_C \quad (3.42)$$

La fonction de courant ψ_0 qui résulte de cette construction satisfait toutes les conditions précédemment citées. Le champ singulier est ensuite calculé à partir des formules de dérivation :

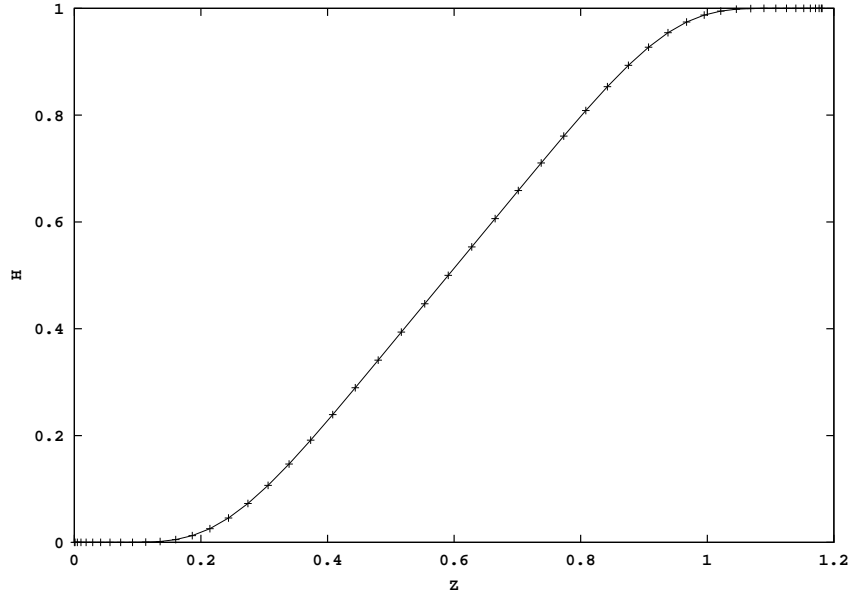


FIG. 3.2 – Fonction de pondération $H(Z)$ ($h_0 = 1.18$)

$$V_{0r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial Z} \quad (3.43)$$

$$V_{0z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \quad (3.44)$$

et vérifie également :

$$V_{0\theta} = 0 \quad (3.45)$$

3.1.5 Système d'équations projeté

La technique de soustraction du champ singulier détaillée auparavant permet de ramener la résolution du champ $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ à la détermination des coefficients $A_\mu(t)$ via la relation suivante :

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = -\frac{\dot{h}}{h} \mathbf{V}_0(\mathbf{X}) + \sum_{\mu} A_{\mu}(t) \mathbf{u}^{\mu}(\mathbf{X}) \quad (3.46)$$

Cette relation implique également pour le champ auxiliaire $\mathbf{W}(\mathbf{X}, t)$ la décomposition suivante :

$$W_i(\mathbf{X}, t) = -\frac{\dot{h}}{h} (1 + \delta_{iz} ((\frac{h}{h_0})^2 - 1)) V_{0i}(\mathbf{X}) + \sum_{\mu} A_{\mu}(t) (1 + \delta_{iz} ((\frac{h}{h_0})^2 - 1)) \mathbf{u}_i^{\mu}(\mathbf{X}) \quad (3.47)$$

La projection de ce champ sur la base choisie amène :

$$B^{\mu}(t) = \int \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}^{\mu} d^3 X = \alpha^{\mu}(t) + \sum_{\nu} \beta^{\mu\nu}(t) A^{\nu}(t) \quad (3.48)$$

où les notations utilisées sont les suivantes (on notera la dépendance en temps d'ue uniquement aux variations temporelles de $h(t)$) :

$$\alpha^\mu = -\frac{\dot{h}}{h} \int (\mathbf{u}_\perp^\nu + (\frac{h(t)}{h_0})^2 u_Z^{(\nu)} \mathbf{e}_Z) \cdot \mathbf{V}_0 d^3 X \quad (3.49)$$

$$\beta^{\mu\nu}(t) = \int (\mathbf{u}_\perp^\nu + (\frac{h(t)}{h_0})^2 u_Z^\nu \mathbf{e}_Z) \cdot \mathbf{u}^\mu d^3 X \quad (3.50)$$

On notera parfois par commodité :

$$\beta_Z^{\mu\nu}(t) = \int u_Z^\nu u_Z^\mu d^3 X \quad (3.51)$$

Ainsi la formulation intégrale du problème peut être ramenée à un système d'équations aux dérivées ordinaires dont les inconnues sont les coefficients $A(t)$ de l'expansion spectrale de \mathbf{V} :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\sum_\nu \beta^{\mu\nu}(t) A^\nu(t) \right)}_{\text{terme instationnaire}} = \underbrace{\sum_\nu \left(\frac{1}{Re(t)} D^{\mu\nu}(t) + C^{\mu\nu} \right) A^\nu(t)}_{\text{terme linéaire}} + \underbrace{NL^\mu(t)}_{\text{terme non linéaire}} + \underbrace{\left(Q_0^\mu(t) - \frac{d\alpha^\mu(t)}{dt} \right)}_{\text{termes de forçage}} \quad (3.52)$$

Cette formulation met en évidence le terme instationnaire et le terme linéaire qui fait intervenir le couplage entre fonctions de base par les effets de diffusion et de rotation. Le terme non linéaire nécessite un traitement numérique spécifique qui sera détaillé ultérieurement.

On doit noter également un terme qui correspond au forçage introduit par les conditions aux limites non nulles du champ \mathbf{V}_0 . C'est ce dernier terme, proportionnel à la vitesse du piston, qui représente l'apport d'énergie au système. Ce terme de forçage, noté $Q_0(t)$, représente les termes d'interaction du champ singulier V_0 avec, d'une part, les termes de diffusion, et, d'autre part, les termes de rotation :

$$Q_0^\mu(t) = \frac{1}{Re} D_0^{\mu(t)} - \frac{\dot{h}}{h} C_0^\mu \quad (3.53)$$

La partie concernant les effets de diffusion peut être décomposée en une somme d'intégrales indépendantes du temps, pondérées par des coefficients ne dépendant que du temps :

$$D_0^\mu = \left(-\frac{\dot{h}}{h}\right) \left\{ D_{0rr}^\mu + \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 D_{0zr}^\mu + \left(\frac{h_0}{h}\right)^2 D_{0rz}^\mu + D_{0zz}^\mu - \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 I^\mu \right\} \quad (3.54)$$

$$D_{0rr}^\mu = \int V_{0r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r^\mu) \right) d^3 X \quad (3.55)$$

$$D_{0rz}^\mu = \int V_{0r} \frac{\partial^2 u_r^\mu}{\partial Z^2} d^3 X \quad (3.56)$$

$$D_{0zr}^\mu = \int V_{0z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z^\mu}{\partial r} \right) d^3 X \quad (3.57)$$

$$D_{0zz}^\mu = \int V_{0z} \frac{\partial^2 u_z^\mu}{\partial Z^2} d^3 X \quad (3.58)$$

$$I^\mu = \int_{(r=1)} Z \frac{\partial u_z^\mu}{\partial r} d^2 X \quad (3.59)$$

Il en va de même pour le terme concernant les effets de rotation :

$$C_0^\mu = - \int (\mathbf{e}_Z \times \mathbf{V}_0) \cdot \mathbf{u}^\mu d^3 X = - \int u_\theta^\mu V_{0r} d^3 X \quad (3.60)$$

La matrice dont les éléments représentent le couplage entre un mode ν et les effets visqueux agissant sur un mode μ peut également se décomposer comme une somme de différents coefficients indépendants du temps, précédés d'un préfacteur ne dépendant que du temps.

$$D^{\mu\nu} = D_{rr}^{\mu\nu} + D_{\theta\theta}^{\mu\nu} + D_{zz}^{\mu\nu} + \left(\frac{h_0}{h}\right)^2(D_{rz}^{\mu\nu} + D_{\theta z}^{\mu\nu}) + \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 D_{zr}^{\mu\nu} \quad (3.61)$$

Les intégrales considérées ci-dessus peuvent être explicitées comme suit :

$$D_{rr}^{\mu\nu} = \int u_r^\nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r^\mu) \right) d^3 X \quad (3.62)$$

$$D_{\theta\theta}^{\mu\nu} = \int u_\theta^\nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta^\mu) \right) d^3 X \quad (3.63)$$

$$D_{zr}^{\mu\nu} = \int u_z^\nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z^\mu}{\partial r} \right) d^3 X \quad (3.64)$$

$$D_{zz}^{\mu\nu} = \int u_z^\nu \frac{\partial^2 u_z^\mu}{\partial Z^2} d^3 X \quad (3.65)$$

$$D_{rz}^{\mu\nu} = \int u_r^\nu \frac{\partial^2 u_r^\mu}{\partial Z^2} d^3 X \quad (3.66)$$

$$D_{\theta z}^{\mu\nu} = \int u_\theta^\nu \frac{\partial^2 u_\theta^\mu}{\partial Z^2} d^3 X \quad (3.67)$$

Il en va de même pour les coefficients de rotation :

$$C^{\mu\nu} = - \int (\mathbf{e}_Z \times \mathbf{u}^\nu) \cdot \mathbf{u}^\mu d^3 X = \int (u_\theta^\mu u_r^\nu - u_\theta^\nu u_r^\mu) d^3 X \quad (3.68)$$

Il est intéressant d'exposer la forme exacte du système à résoudre, en l'absence de compression, c'est-à-dire dans le cas $h = 0$, où $h = h_0$. Le schéma précédent a été développé avec l'idée que le cas sans compression n'est qu'un cas particulier du cas plus général avec compression. Le champ singulier \mathbf{V}_0 n'intervient alors plus dans le schéma de projection spectrale, et les opérateurs perdent tous leur dépendance temporelle, ainsi que le nombre de Reynolds. Enfin, il n'y a plus de différence entre le domaine de calcul et le domaine physique puisque la transformation du systèmes de coordonnées se réduit à l'identité. Il vient alors :

$$\sum_\nu \beta^{\mu\nu} \frac{d}{dt} A^\nu = \sum_\nu \left(\frac{1}{Re} D^{\mu\nu} + C^{\mu\nu} \right) A^\nu + NL^\mu(t) \quad (3.69)$$

Cette expression sera réutilisée dans le chapitre 4.

3.1.6 Choix d'une base spectrale

Dans le présent problème, la technique de soustraction de la singularité visqueuse induit, pour toutes les composantes du champ de vitesses modal résultant, des conditions aux limites de Dirichlet, donc nulles sur toute la frontière du domaine. Plus précisément, les conditions aux limites exactes du problème, *après* soustraction du champ singulier, s'écrivent :

$$\mathbf{u}(r = 1) = \mathbf{0} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{u}(Z = 0) = \mathbf{0} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{u}(Z = h_0) = \mathbf{0} \quad (3.72)$$

$$u_r(r = 0) = u_\theta(r = 0) = 0 \quad (3.73)$$

Les composantes du champ de vitesses, construit de façon à être incompressible, dérivent de la fonction de courant via les relations :

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad (3.74)$$

$$u_Z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.75)$$

L'idée majeure de la construction des fonctions de base adaptées a ce problème est qu'un développement sur une ensemble de fonctions vérifiant *chacune* les conditions aux limites du problème doit permettre *a priori* une convergence plus rapide. Notons au passage que d'autres alternatives permettant à la solution approchée de vérifier les conditions aux limites exactes du problème existent. Parmi les méthodes spectrales, l'alternative la plus populaire est la classe des méthodes dites *tau*, dans laquelle la solution est également développée sur une base fonctionnelle, mais où les conditions aux limites sont forcées par l'adjonction de relations linéaires supplémentaires dans le problème matriciel [35]. Ce type de méthode n'a pas été testé dans cette étude, mais reste cependant une alternative élégante à la méthode choisie. En plus des valeurs du champ à la paroi même, la propriété de gradients élevés dans les zones de proche-paroi, typique par exemple des polynômes de Chebyshev, reste prioritaire puisque c'est elle qui permet de distinguer les propriétés de convergence entre différents types d'expansion polynômiale.

Dans ce travail, la solution retenue [39] est de construire les fonctions de base de l'algorithme comme des polynômes de Chebyshev de première espèce dans les deux directions radiale et axiale, auxquels on adjoint des préfacteurs, eux aussi polynomiaux, choisis tels que les fonctions ainsi construites vérifient exactement les conditions aux limites du problème régularisé (3.73).

Pour des raisons pratiques, on construit chaque fonction de base comme le produit d'une fonction ne dépendant que de la coordonnée radiale r , annotée avec l'indice A , avec une fonction dépendant uniquement de la variable axiale réduite Z , annotée avec l'indice B . Cette construction a pour avantage de faciliter le calcul des coefficients spectraux associés. En effet ces coefficients se présentent sous la forme d'intégrales multiples qui doivent être calculés analytiquement ou numériquement, et la forme séparée des fonctions ainsi construites permet une intégration plus simple par factorisation des intégrales en s'appuyant sur le théorème de Fubini. Les champs physiques recherchés, dans le domaine Ω indépendant du temps, s'écrivent donc de la manière générique suivante :

$$V_i = -\frac{\dot{h}}{h} V_{0i} + \sum_{\mu=(n,m)} A_\mu(t) u_{Ai}^{(n)}(r) u_{Bi}^{(m)}(Z) \quad (3.76)$$

$$\psi = -\frac{\dot{h}}{h} \psi_0 + \sum_{\mu=(n,m)} A_\mu(t) \psi_A^{(n)}(r) \psi_B^{(m)}(Z) \quad (3.77)$$

Les composantes radiale et axiale du champ des vitesses dérivent par construction de la connaissance de la fonction de courant ψ . C'est pourquoi la base totale peut être construite à partir d'un choix sur $u_{A\theta}$, ψ_A , $u_{B\theta}$ et ψ_B . Les expressions choisies sont les suivantes :

Pour n pair

$$\psi_A^{(n)}(r) = r^2 (1 - r^2)^2 \Phi_{An}(r) \quad (3.78)$$

$$u_{\theta A}^{(n)}(r) = 0 \quad (3.79)$$

Pour n impair

$$u_{\theta A}^{(n)}(r) = (1 - r^2)\Phi_{An}(r) \quad (3.80)$$

$$\psi_A^{(n)}(r) = 0 \quad (3.81)$$

De plus, pour tout m , pair ou impair, on a :

$$u_{\theta B}^{(m)}(Z) = Z(Z - h_0)\Phi_{Bm}(Z) \quad (3.82)$$

$$\psi_B^{(m)}(Z) = Z^2(Z - h_0)^2\Phi_{Bm}(Z) \quad (3.83)$$

Les fonctions Φ_A et Φ_B , dont les conditions aux limites importent moins puisque c'est la correction par les préfacteurs polynomiaux qui assurent les propriétés recherchées, sont choisies ici comme des polynômes de Chebyshev pour leur comportement aux limites du domaine. Cependant, dans un souci de généralité, il est intéressant de constater qu'à priori toute autre fonction polynomiale, voire même toute fonction suffisamment lisse, aurait assuré la convergence du schéma spatial. Dans le reste de l'étude, on posera donc :

$$\Phi_{An}(r) = T_n(r) = \cos(n \cos^{-1} r) \quad (3.84)$$

$$\Phi_{Bm}(Z) = T_m\left(\frac{2Z - h_0}{h_0}\right) = \cos\left(m \cos^{-1}\left(\frac{2Z - h_0}{h_0}\right)\right) \quad (3.85)$$

3.1.7 Expression analytique des fonctions construites

Si l'on exprime les composantes des vitesses associées à ces fonctions de base en fonctions des variables réduites $\xi = \cos^{-1} r$ et $\eta = \cos^{-1}\left(\frac{2Z - h_0}{h_0}\right)$, alors la construction précédente fournit pour chacune des composantes les expressions analytiques suivantes :

Pour n pair

$$u_r^{(n,m)}(\xi, \eta) = \left(\frac{h_0}{2}\right)^3 \cos \xi (\sin \xi)^4 \cos n\xi (m \sin m\eta (\sin \eta)^3 - 4(\sin \eta)^2 \cos \eta \cos m\eta) \quad (3.86)$$

$$u_{\theta}^{(n,m)}(\xi, \eta) = 0 \quad (3.87)$$

$$u_Z^{(n,m)}(\xi, \eta) = \left(\frac{h_0}{2}\right)^4 ((\sin \xi)^2 (2 \cos n\xi (-1 + 3(\cos \xi)^2) - \frac{1}{2}n \sin 2\xi \sin n\xi) (\sin \eta)^4 \cos m\eta) \quad (3.88)$$

Pour n impair

$$u_r^{(n,m)}(\xi, \eta) = 0 \quad (3.89)$$

$$u_{\theta}^{(n,m)}(\xi, \eta) = -\left(\frac{h_0}{2}\right)^2 (\sin \xi)^2 \cos n\xi (\sin \eta)^2 \cos m\eta \quad (3.90)$$

$$u_Z^{(n,m)}(\xi, \eta) = 0 \quad (3.91)$$

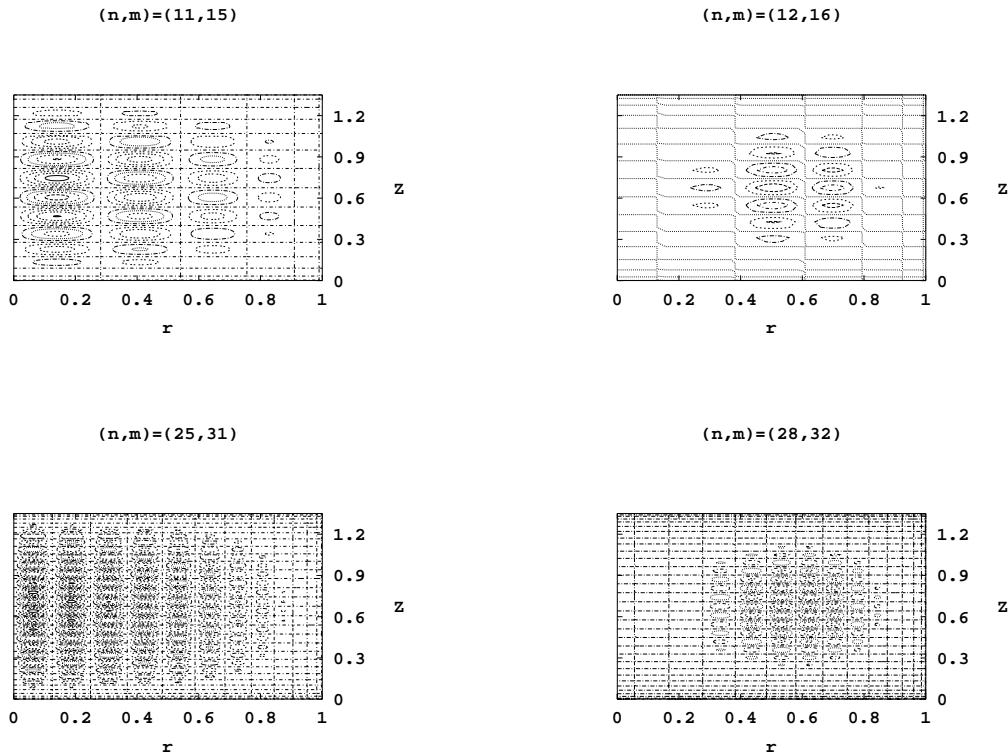


FIG. 3.3 – Coupe méridienne de la vitesse azimuthale $u_\theta^{(n,m)}$ associée aux modes (11,15) et (25,31) et de la fonction de courant $\psi^{(n,m)}$ associée aux modes (12,16) et (28,32).

Normalisation Au final, afin de ne pas dégrader le conditionnement du système linéaire associé, il est préférable de normaliser ces fonctions selon la procédure suivante :

$$n^\mu = \|u^\mu\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int (u_r^\mu)^2 + (u_\theta^\mu)^2 + (u_z^\mu)^2 d^3X \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.92)$$

$$u_r^\mu \leftarrow \frac{u_r^\mu}{n^\mu} \quad (3.93)$$

$$u_\theta^\mu \leftarrow \frac{u_\theta^\mu}{n^\mu} \quad (3.94)$$

$$u_z^\mu \leftarrow \frac{u_z^\mu}{n^\mu} \quad (3.95)$$

On a représenté sur la figure 3.3 la topologie des champs de vitesse associés à certaines fonctions de base utilisées dans l'expansion modale.

3.2 Méthodes numériques

3.2.1 Troncature du système

En pratique, le système infini d'équations (3.52) est tronqué pour être ramené à un système différentiel de taille finie. De l'expansion modale (3.76) (3.77), on ne retient que la somme des N premières fonctions et des M premières fonctions. L'expansion spectrale prend alors pour chaque composante du champ de vitesse la forme suivante :

$$V_i^{N,M} = -\frac{\dot{h}}{h} V_{0i} + \sum_{\mu=(n,m)=(0,0)}^{(N,M)} A_\mu(t) u_{Ai}^{(n)}(r) u_{Bi}^{(m)}(Z) \quad (3.96)$$

Les entiers N et M , qui seront en pratique supposés égaux dans tout le reste de l'étude numérique, représentent l'ordre de troncature du système. La discretisation spectrale est d'autant plus efficace que les fonctions $V_i^{N,M}$ convergent vite vers la vraie solution V_i lorsque N et M tendent vers l'infini.

Le système d'équations (3.52) peut se réécrire sous la forme symbolique suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{\nu} \beta^{\mu\nu}(t) A^\nu(t) \right) = \sum_{\nu} \mathbb{L}^{\mu\nu}(t) A^\nu(t) + f^\mu(\vec{V}_0, t) + NL^\mu(\vec{V}_0, A^\lambda(t), t) \quad (3.97)$$

Dans cette expression on a sous-entendu la sommation finie sur n et m . On distingue à gauche le terme instationnaire, puis à droite respectivement : le terme linéaire $\mathbb{L}A$ dont les coefficients dépendent du temps, représentant les effets de diffusion et de rotation ; le terme de forçage, qui est nul en l'absence de mouvement du piston et est également connu indépendamment de la valeur des coefficients spectraux.

3.2.2 Estimation a priori de la discrétisation spectrale nécessaire

Les composantes de \mathbf{u}^μ sont, pour n grand, rapidement oscillatoires à cause de leur dépendance en $\cos n\xi$ et $\sin n\xi$. Ces oscillations ont une échelle caractéristique de l'ordre de $\Delta\xi = O(\frac{1}{n})$, indépendante de la valeur de r . En revanche, l'échelle caractéristique Δr correspondant à la variable $r = \cos \xi$ dépend de la valeur de r . Près de la paroi ($r=1$), un développement de Taylor donne $r = \cos \xi \sim 1 - \frac{\xi^2}{2}$, ce qui donne une échelle caractéristique de l'ordre de $\Delta r \sim 1 - r \sim \frac{\xi^2}{2} \sim O(\frac{1}{n^2})$. Au centre du cylindre, on trouve une échelle caractéristique plus grande et donc numériquement moins contraignante, de l'ordre de $\Delta r \sim O(\frac{1}{n})$.

On peut faire l'hypothèse ad hoc que la couche limite est assez bien discrétisée dans la direction radiale si elle contient plusieurs longueurs d'onde caractéristiques des fonctions de base du développement spectral. Or on a vu que l'épaisseur de la couche d'Ekman varie comme $Re^{-\frac{1}{2}}$, ainsi le développement spectral doit s'appuyer dans la direction radiale sur au moins N fonctions de base, où l'ordre de grandeur de N est donné par la relation :

$$N \sim O(Re^{\frac{1}{4}}) \quad (3.98)$$

Un raisonnement similaire dans la direction axiale donne le même ordre de grandeur pour le nombre de fonctions de base nécessaire pour une discrétisation suffisante dans cette direction. Ainsi la taille totale du système d'équations à résoudre dans le cas axisymétrique évolue a priori comme $Re^{\frac{1}{2}}$.

L'estimation ci-dessus ne tient cependant pas compte des perturbations induites par le déplacement du piston ainsi que des structures de petite taille créées par les effets non linéaires qui peuvent exiger une meilleure discrétisation dans ces mêmes zones. Du point de vue du développement spectral mis en oeuvre, ce type de phénomène se traduit par la nécessité d'utiliser plus de fonctions d'ordre élevé dans l'expansion modale que dans le cas plus simple du calcul de l'écoulement en déclin linéaire à l'intérieur du cylindre, sans mouvement du piston.

3.2.3 Schéma d'intégration en temps

On utilise pour la discrétisation en temps un schéma d'ordre 2 avec un pas de temps Δt constant. Selon une procédure souvent utilisée pour les équations de Navier-Stokes, la partie linéaire ainsi que le terme de forçage sont semi-implicités selon un schéma d'Adams-Moulton qui est d'ordre 3. Le terme non-linéaire, qui sera calculé comme une fonction directe du champ des vitesses dans l'espace physique à l'instant considéré, ne peut pas être anticipé tant que les coefficients spectraux au pas de temps suivant n'ont pas été déterminés. Il doit être traité séparément dans le schéma de discrétisation temporelle, ne pouvant être facilement implicité [39]. Il ne peut donc être calculé que de manière explicite, et est discrétisé ici en temps selon un schéma d'Adams-Bashforth [48] qui est lui d'ordre 2. Ces deux schémas ont été choisis pour leur grande stabilité numérique ainsi que pour leur ordre suffisamment élevé et sont spécialement indiqués, par opposition aux schémas de type Runge-Kutta, lorsque l'évaluation des termes à chaque pas de temps est considérée coûteuse.

$$\begin{aligned} \frac{\beta^{n+1} \mathbf{A}^{n+1} - \beta^n \mathbf{A}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{12} [5(\mathbb{L}^{n+1} \mathbf{A}^{n+1} + \mathbf{f}^{n+1}) + 8(\mathbb{L}^n \mathbf{A}^n + \mathbf{f}^n) - (\mathbb{L}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{f}^{n-1})] \\ &+ \frac{1}{2} [3\mathbf{N}^n - \mathbf{N}^{n-1}] \end{aligned} \quad (3.99)$$

Cette discrétisation temporelle ramène le système d'équations différentielles à un système linéaire de dimension finie (3.100), qui doit être résolu à chaque pas de temps, et dont la solution représente le vecteur \mathbf{A}^{n+1} des amplitudes spectrales à l'instant suivant :

$$\begin{aligned} (\beta^{n+1} - \frac{5}{12} \Delta t \mathbb{L}^{n+1}) \mathbf{A}^{n+1} &= (\beta^n + \frac{8}{12} \Delta t \mathbb{L}^n) \mathbf{A}^n - \frac{\Delta t}{12} (\mathbb{L}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1}) \\ &+ \frac{\Delta t}{12} (5\mathbf{f}^{n+1} + 8\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^{n-1}) + \frac{\Delta t}{2} (3\mathbf{N}^n - \mathbf{N}^{n-1}) \end{aligned} \quad (3.100)$$

Partant d'une valeur de $\mathbf{A}(t=0)$ déterminée, nulle ou non, la première itération en temps est généralement résolue à l'aide d'un schéma d'Euler explicite en temps, puis le schéma présenté est utilisé sur toute la durée du calcul.

Notons que la précision du schéma de discrétisation temporelle employé est également connue en ce qui concerne les taux de croissance ou de déclin exponentiels à filtrer. En effet, dans le cas de la rotation pure sans mouvement du piston ($h = h_0$), supposons que l'on dispose du vecteur \mathbf{A} des composantes associées à une fonction propre de l'opérateur *linéarisé* et discrétisé en temps selon le schéma de Adams-Moulton (pour une valeur fixée du pas de temps Δt), associée elle-même à une valeur propre $\bar{\sigma}$ du système discretisé. Alors par définition,

$$(\beta - \frac{5}{12} \Delta t \mathbb{L}) \mathbf{A} e^{\bar{\sigma} \Delta t} = (\beta + \frac{8}{12} \Delta t \mathbb{L}) \mathbf{A} - \frac{\Delta t}{12} \mathbb{L} \mathbf{A} e^{-\bar{\sigma} \Delta t} \quad (3.101)$$

Ainsi $\bar{\sigma}$ est valeur propre de l'opérateur discrétisé si et seulement si $\chi_{\Delta t}(\bar{\sigma})$ est valeur propre de l'opérateur linéaire continu $\beta^{-1} \mathbb{L}$, où :

$$\chi_{\Delta t}(\bar{\sigma}) = \frac{12}{\Delta t} \left(\frac{e^{\bar{\sigma} \Delta t} - 1}{5e^{\bar{\sigma} \Delta t} + 8 - e^{-\bar{\sigma} \Delta t}} \right) \quad (3.102)$$

Soit σ cette valeur propre de l'opérateur linéaire continu. Alors $\bar{\sigma}$ représente une valeur approchée de σ pour la valeur choisie du pas de temps Δt . L'erreur entre σ et $\bar{\sigma}$ est donnée à l'aide d'un développement limité de la fonction $\chi_{\Delta t}$ par :

$$\left| \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \right| = \left| \frac{\chi_{\Delta t}(\bar{\sigma}) - \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \right| = \frac{(\bar{\sigma} \Delta t)^3}{12} + O((\bar{\sigma} \Delta t)^4) \quad (3.103)$$

Ceci prouve que le schéma temporel est également d'ordre 3 pour l'évaluation des taux de croissance en régime linéaire. *En pratique*, pour une discrétisation spectrale de 32 fonctions de base dans chacune des directions r et Z , et une course de l'ordre de $\epsilon \sim 13\%$, la convergence numérique sur le temps long est assurée avec 400 pas de temps réguliers par cycle d'oscillation du piston.

3.2.4 Algorithme d'inversion matricielle

La projection spectrale des équations du problème sur une base à divergence nulle, couplée à la discrétisation temporelle adoptée, conduit à transformer le système d'équations aux dérivées partielles (3.2) en un système matriciel de taille finie (3.100), dont les coefficients, ainsi que le second membre, varient à chaque pas de temps. Plus précisément, on a affaire à une matrice dont les coefficients sont périodiques avec la période du piston, et à un second membre qui, à cause du terme non-linéaire représentant les effets de convection, change a priori à chaque itération du schéma temporel. A chaque pas de temps, le vecteur solution du système contient les amplitudes modales qui permettent de reconstituer le champ de vitesses dans l'espace physique. Comme dans la majorité des problèmes de simulation numérique, le choix d'un algorithme rapide et précis de résolution numérique du système matriciel est crucial pour les performances du code de calcul. La taille des systèmes à inverser exclut toute tentative de résolution par des méthodes directes, comme le pivot de Gauss, la factorisation LU, et toutes les variantes associées. Par exemple, une discrétisation spectrale reposant sur 30 modes dans chacune des deux directions radiale et axiale fournit à chaque pas de temps une matrice différente, sans aucune propriété particulière de symétrie ou de nullité des coefficients, de taille 900×900 . Cette taille de système est proche de la taille limite considérée en pratique comme trop grande pour confier la résolution du système linéaire à une méthode directe avec des temps de restitution raisonnables, et surtout compétitifs. Le manque de symétrie de la matrice est à attribuer à la contribution des effets de rotation, associée à un opérateur anti-adjoint, alors que les opérateurs comme ceux relatifs à la diffusion sont auto-adjoints. La compétition entre ces phénomènes ôte à l'opérateur résultant toute propriété de symétrie exploitable pour la résolution numérique.

Notre choix d'une méthode se tourne donc plus naturellement vers les algorithmes d'inversion itératifs, basés sur un critère de convergence numérique en principe sévère, mais plus large que la précision numérique. Le choix est vaste et plusieurs méthodes se révèlent efficaces, comme par exemple les méthodes de Krylov GMRES et leurs dérivées comme GMRES- k [48]. Nous nous sommes plutôt tournés vers les méthodes de descente, type méthode du gradient conjugué [48]. La recherche de propriétés optimales nous a conduits à utiliser la méthode BiCG-STAB, construite à chaque itération sur deux directions de descente choisies pour minimiser le résidu du système à chaque pas.

Le choix des fonctions de base pour l'expansion modale est crucial pour les propriétés du système différentiel en temps (3.52) à résoudre, et ainsi pour celles du système matriciel (3.100) à inverser à chaque pas de temps. Or la technique de construction adoptée ci-dessus, où l'accent est porté sur la vérification des conditions aux limites du problème régularisé, ne tient a priori pas compte des éventuels problèmes de conditionnement du système. En particulier, la précédente construction n'a pas été spécialement mise en oeuvre dans le but de construire une base orthogonale, à la différence des bases classiques utilisées dans la littérature, qui possèdent toutes cette propriété d'orthogonalité. Il est bien entendu possible d'orthogonaliser la base vis-à-vis du produit scalaire associé à la norme L^2 du problème, par des procédures d'orthogonalisation du type Gram-Schmidt. Mais le fait que les opérateurs linéaires intervenant dans le système en cas

de compression dépendent du temps implique que cette procédure d'orthogonalisation doit être répétée à chaque pas de temps, ce qui se révèle coûteux. Sans orthogonalisation préalable, la conséquence est que la matrice β , intervenant dans le système matriciel, se distingue fortement de la matrice identité. On rappelle que :

$$\beta^{\mu\nu}(t) = \int (\mathbf{u}'_{\perp} + (\frac{h(t)}{h_0})^2 u'_Z \mathbf{e}_Z) \cdot \mathbf{u}^{\mu} d^3 X \quad (3.104)$$

Cependant, on peut procéder à une orthogonalisation approchée de la base de fonctions choisies, de la façon suivante : soit $\beta_0^{\mu\nu} = \beta^{\mu\nu}(t)|_{h=h_0}$ la matrice correspondant à un écoulement sans compression, pour lequel la course ϵ est nulle. Cette matrice est celle qui apparait notre cas lorsque l'écoulement considéré se réduit à un écoulement en rotation pure, ou éventuellement lorsque la course n'est pas nulle mais que le piston repasse par sa position moyenne. Alors pour tout temps t , on peut effectuer le développement suivant selon les puissances croissantes de ϵ :

$$\beta^{\mu\nu}(t) = \beta_0^{\mu\nu} (I_d + 2\epsilon \cos \omega t (\beta_0^{-1} \beta_Z)^{\mu\nu} + O(\epsilon^2)) \quad (3.105)$$

avec la notation suivante :

$$\beta_Z^{\mu\nu} = \int u'_Z u''_Z d^3 X \quad (3.106)$$

Ainsi, au premier ordre en ϵ , on a l'approximation suivante :

$$\beta_0^{-1} \beta(t) \sim I_d + 2\epsilon \cos \omega t (\beta_0^{-1} \beta_Z) \quad (3.107)$$

L'idée générale des méthodes de préconditionnement est de multiplier à gauche les deux membres du système d'équations (3.100) par une matrice qui rend le nouveau système matriciel plus simple à résoudre numériquement. On choisit ici justement comme matrice β_0^{-1} . Pour des valeurs relativement petites de la course ϵ , la relation 3.107 montre que la matrice β_0^{-1} constitue donc un bon préconditionnement du système matriciel à résoudre. La technique proposée, testée avec l'algorithme d'inversion Bicgstab, s'est révélée très performante. Mieux encore, elle est la seule technique testée assurant en pratique la convergence du schéma d'inversion (voir figure 3.4). En effet, le conditionnement initial du système est tel que même les techniques classiques les plus performantes, comme le préconditionnement diagonal et surtout SSOR [49], utilisés en calcul intensif lorsque l'expansion spectrale repose sur une base de fonctions orthogonales. En revanche, la technique proposée permet une convergence d'allure exponentielle, preuve que c'est *la* technique à utiliser pour accélérer le calcul. Ceci laisse penser que le mauvais préconditionnement éventuel introduit par un choix non optimal des fonctions de base, basé uniquement sur le respect des conditions aux limites, peut quand même être facilement corrigé par une technique de préconditionnement bien choisie. En pratique, cette méthode nécessite l'inversion numérique préalable d'une matrice (ici β_0) qui ne dépend que des valeurs de N et M et du rapport d'aspect moyen h_0 du cylindre. En particulier, la matrice inverse β_0^{-1} peut être stockée et réutilisée lors des variations des paramètres physiques comme ϵ , le nombre de Reynolds, ou numériques comme le critère de convergence de l'inversion, le choix de l'algorithme d'inversion lui-même, etc... La seule contrainte, bien que sévère dans certains cas limites, est que la matrice à inverser soit tout de même inversible correctement à la précision machine (ce qui exclut l'existence de valeurs propres égales ou trop proches de zéro), et que le temps relatif à cette inversion ne soit pas prohibitif.

3.2.5 Traitement du terme non-linéaire

L'algorithme présenté, ainsi que les méthodes de type Galerkin de façon générale, s'adapte très bien à un système d'équations aux dérivées partielles linéaires. Cependant la présence dans

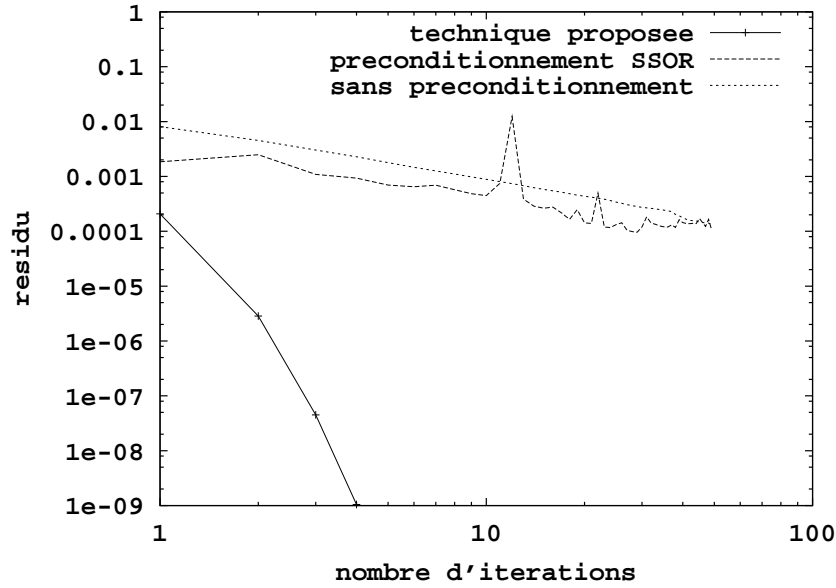


FIG. 3.4 – Comparaison des temps de convergence sans préconditionnement, avec préconditionnement SSOR et avec la technique proposée, pour une inversion du système complet à l'aide du schéma Bicgstab (32^2 modes, $h_0 = 1.18$, $\epsilon = 10\%$) à partir d'une même condition initiale.

les équations de Navier-Stokes du terme convectif, quadratique vis-à-vis du champ de vitesses, rend le problème plus délicat. On a vu que le terme non linéaire prend la forme suivante :

$$NL^\mu = \int \mathbf{W} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{u}^\mu) d^3 X \quad (3.108)$$

où les composantes de $\nabla \mathbf{u}^\mu$ s'expriment en coordonnées cylindriques avec l'hypothèse d'axi-symétrie :

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & -\frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & +\frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

La première idée pour l'évaluation de ce terme est de procéder comme pour les termes linéaires, à savoir utiliser l'expansion spectrale (3.76) de \mathbf{V} et \mathbf{W} :

$$NL^\mu = \int \left(-\frac{\dot{h}}{h} \mathbf{W}_0 + \sum_\nu A^\nu \mathbf{w}^\nu \right) \cdot \left[\left(-\frac{\dot{h}}{h} \mathbf{V}_0 + \sum_\lambda A^\lambda \mathbf{u}^\lambda \right) \cdot (\nabla \mathbf{u}^\mu) \right] d^3 X \quad (3.110)$$

Ici, \mathbf{W}_0 et \mathbf{w}^ν sont les notations correspondant aux extensions naturelles des champs \mathbf{V}_0 et \mathbf{u}^ν , la composante axiale étant multipliée par le facteur temporel $(\frac{h(t)}{h_0})^2$. Après développement, le terme non linéaire prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
NL^\mu &= \left(\frac{\hbar}{h}\right)^2 \int \mathbf{W}_0 \cdot (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}^\mu) d^3 X \\
&+ \left(-\frac{\hbar}{h}\right) \left(\sum_\lambda A^\lambda \int \mathbf{W}_0 \cdot (\mathbf{u}^\lambda \cdot \nabla \mathbf{u}^\mu) d^3 X\right) \\
&+ \sum_\nu A^\nu \int \mathbf{w}^\nu \cdot (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}^\mu) d^3 X \\
&+ \sum_\nu \sum_\lambda A^\nu A^\lambda \int \mathbf{w}^\nu \cdot (\mathbf{u}^\lambda \cdot \nabla \mathbf{u}^\mu) d^3 X
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Il est possible de pousser le développement plus loin, de la même manière que pour les termes linéaires, en décomposant composante par composante le produit $\mathbf{W} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{u}^\mu)$, et d'écrire NL^μ comme une somme d'intégrales indépendantes du temps pondérées par des facteurs qui eux sont fonctions uniquement de t . Cela aboutit à une série de coefficients spectraux supplémentaires à calculer. Le système différentiel prend au final la forme d'une équation de Riccati matricielle. Cependant, en pratique, cette technique pose un sérieux problème de temps de calcul. En effet, le caractère quadratique du terme non linéaire introduit des doubles produits du type $X^{\mu\nu\lambda} A^\nu A^\lambda$. Pour μ fixé, ce produit requiert $O(N^4)$ opérations. Sans compter le calcul préalable des coefficients, la complexité du calcul de NL évolue donc comme $O(N^6)$, alors que celle des termes linéaires comme des termes de forçage ne dépasse pas $O(N^4)$. Cette approche, bien qu'élégante puisqu'elle permet d'effectuer l'intégralité des opérations dans l'espace défini par les fonctions de bases, est donc à proscrire compte tenu des limitations des moyens de calcul.

D'un point de vue pratique, le choix des fonctions de base a été effectué pour permettre un calcul efficace à l'aide d'une discretisation non coûteuse, ainsi ce ne sont pas vraiment les estimations asymptotiques pour N grand qui sont pertinentes mais bel et bien les temps de calcul relatifs à chaque méthode. Cependant ceux-ci confirment l'idée que le terme non linéaire doit être évalué hors de l'espace spectral. En fait, ce problème est fondamental dans les méthodes de Galerkin appliquées aux e.d.p. non linéaires. C'est ce qui a empêché la simulation numérique directe de se développer en mécanique des fluides, avant l'introduction au début des années 70 par Orszag des méthodes dites pseudo-spectrales. Dans cette classe de méthodes, lorsque le champ de vitesses peut être décomposé sur une base de fonctions trigonométriques de Fourier, le terme non linéaire est calculé à chaque pas de temps dans l'espace physique. Les passages d'un espace à l'autre sont effectués par des transformées de Fourier rapides permettant de réduire de façon importante la complexité du calcul.

Cette méthode peut même être étendue à d'autres fonctions de base à condition qu'une transformée rapide existe également, c'est le cas des polynômes de Chebyshev qui dérivent facilement des fonctions trigonométriques à l'aide d'un changement de variables. Cependant une telle technique n'est a priori généralisable au cas étudié que dans le cas spécial $\hbar = 0$ (Pour lequel l'emploi des techniques de Galerkin avec des bases bien plus communes sont préférables). En effet, d'une part la base fonctionnelle choisie ne se prête pas, par la présence des préfacteurs polynomiaux, à des transformations de type FFT. D'autre part, et c'est là l'argument limitant, pour $\hbar \neq 0$, la présence du champ singulier empêche l'utilisation de transformées rapides puisque le champ singulier n'est pas assez régulier pour être développé de façon économique sur une base de fonctions trigonométriques. Un grand nombre de fonctions de base serait nécessaire en pratique pour obtenir une évaluation satisfaisante du terme non linéaire, ce qui ne justifierait plus l'effort fait dans la construction de la base.

La technique retenue dans cette étude est plus directe et s'est révélée d'une efficacité satisfaisante, du moins avec la discrétisation spectrale choisie : il s'agit d'évaluer *directement* $NL^\mu(t)$ dans l'espace physique, en calculant explicitement l'intégrale de $\mathbf{W} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{u}^\mu)$ sur un maillage discret du domaine fixe. Le maillage est raffiné (voir la sous-section suivante) près des parois pour augmenter la précision de l'intégration dans les zones de paroi où $\mathbf{V}, \mathbf{V}_0, \mathbf{W}$, ainsi que la matrice $\nabla \mathbf{u}^\mu$ de base présentent de fortes variations spatiales. La complexité du calcul dépend de la discrétisation adoptée, mais elle est globalement de $O(N^4)$ par pas de temps, en admettant que le calcul numérique de NL^μ , pour une précision fixée et pour μ donné, évolue comme $O(N^2)$ si $O(N)$ sont nécessaires dans chaque direction. Notons qu'aucun phénomène d'aliasing n'a été mis en évidence [35] [39], et donc qu'aucune technique de desaliasing, comme la règle classique des $\frac{3}{2}$ n'a dû être employée. Ici, comme pour le calcul des coefficients spectraux relatifs au forçage, la présence du champ singulier rend nécessaire l'utilisation d'un algorithme d'intégration 2D précis, qui est détaillé dans la prochaine section.

3.2.6 Calcul des coefficients, intégration spatiale

Tous les intégrandes contenus dans les coefficients à double indice (de type $M^{\mu\nu}$) sont des produits de polynômes en r et Z , ils sont donc explicitables et leurs intégrales sont, en théorie, calculables par voie analytique, à condition qu'on puisse écrire ces fonctions polynomiales sous leur forme développée $(a_0 + a_1 r + \dots + a_N r^N)(b_0 + b_1 Z + \dots + b_M Z^M)$. Cependant, même avec les logiciels de calcul symbolique performants comme Maple, la lourdeur du développement polynomial, pour des modes d'ordre élevé, peut rendre prohibitif le coût du calcul, sachant qu'un grand nombre de coefficients ($O(N^4)$) est nécessaire à un calcul complet. Pour cette raison, on choisit de calculer ces intégrales à l'aide d'un algorithme numérique. Il s'agit donc d'une évaluation approximative, dont l'erreur est contrôlée par les paramètres numériques alors que l'approche formelle permet en principe une évaluation exacte des intégrales. Le choix d'un algorithme d'ordre élevé permet cependant d'obtenir une précision excellente sans utiliser une discrétisation spatiale trop coûteuse. En exploitant la construction des fonctions de base sous forme séparée, on peut de plus alléger le calcul en se ramenant à de simples intégrales 1D, par utilisation du théorème de Fubini. Par exemple dans le cas du terme $\beta_Z^{\mu\nu}$, avec $\mu = (n, m)$ et $\nu = (n', m')$, cette simplification donne :

$$\beta_Z^{\mu\nu} = \int u_{Az}^n(r) u_{Bz}^m(Z) u_{Az}^{n'}(r) u_{Bz}^{m'}(Z) d^3 X = 2\pi \left(\int_{r=0}^1 u_{Az}^n u_{Az}^{n'} r dr \right) \left(\int_{Z=0}^{h_0} u_{Bz}^m u_{Bz}^{m'} dZ \right) \quad (3.112)$$

Ainsi seulement un nombre $O(2N^2)$ d'intégrales 1D sont nécessaires pour ce type de coefficients.

De plus, les autres coefficients à indice simple, comme ceux intervenant dans les termes de forçage sont de la forme $\int \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{u}^\mu$, et font donc intervenir le champ singulier \mathbf{V}_0 , qui possède, par construction, une forme analytique non séparable. Toute forme d'intégration symbolique de ces coefficients est donc exclue. En pratique, une intégration numérique 2D s'impose. Notons que le champ singulier, malgré son caractère singulier, est intégrable ; son intégration numérique ne pose donc pas de problèmes majeurs.

L'algorithme d'intégration 2D choisi doit également être utilisé pour évaluer le terme non linéaire (3.110) qui est présent dans le système sous la forme d'une intégrale NL^μ . Contrairement au calcul des coefficients qui n'est qu'un calcul préalable et ne doit être effectué qu'une fois, suivi d'un stockage des coefficients, le calcul du terme non linéaire nécessite l'évaluation numérique de $O(N^2)$ intégrales 2D par pas de temps, ce qui nécessite une méthode précise pour éviter que l'erreur commise s'amplifie lors de l'incrément en temps. Le problème est d'autant

plus exigeant qu'un grand nombre de simulations doivent être effectuées sur un grand nombre de cycles de compression. *Ce sont finalement les performances de l'algorithme d'intégration pour le calcul du terme non linéaire qui gouvernent, à précision équivalente, le temps de calcul total d'une simulation.*

Ainsi, des algorithmes efficaces d'intégration numérique 1D et 2D doivent être utilisés, avec l'avantage important que les coefficients calculés pour un rapport d'aspect h_0 donné peuvent être stockés et réutilisés lors de calculs avec des paramètres différents.

3.2.6.1 Algorithme d'intégration de Romberg 1D

Soit N un entier, on note $h = (b - a)/n$. Soit également f une fonction scalaire ou vectorielle f définie sur un intervalle $[a, b]$. L'intégrale de f sur $[a, b]$ approchée par la méthode classique des trapèzes, notée $T1_f(h)$, s'écrit, selon [50] :

$$T1_f(h) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{f(a + kh) + f(a + (k + 1)h)}{2} \right) h = \sum_{k=1}^{N-1} f(a + kh)h + \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) h \quad (3.113)$$

L'intégrale approchée de f par l'algorithme de Romberg [50], notée $R1_f(h)$, consiste en une somme pondérée de deux intégrales, approchées suivant la méthode des trapèzes, calculées pour deux discrétisations différentes :

$$R1_f(h) = \frac{1}{3}(4T1_f(2h) - T1_f(h)) \quad (3.114)$$

3.2.6.2 Généralisation 2D de l'algorithme de Romberg

Cet algorithme se généralise sans peine à une fonction scalaire ou vectorielle F définie sur un domaine n -dimensionnel de la forme $[a_1, b_1] \times \dots [a_n, b_n]$. Par exemple, dans notre cas, $n=3$. Cependant, la propriété d'axisymétrie des champs considérés nous permet de calculer les intégrales sur un domaine bidimensionnel, grâce à la relation :

$$\int F(r, \theta, Z) r dr d\theta dZ = 2\pi \int_{r=0}^1 \int_{Z=0}^{h_0} F(r, \theta = 0, Z) r dr dZ \quad (3.115)$$

Le changement de variables supplémentaire $\mathcal{S} = \frac{2Z-h_0}{h_0}$ permet de ramener le quadrant d'intégration au domaine de référence $[0 : 1] \times [-1 : 1]$, qui présente l'avantage de ne plus dépendre de la valeur de h_0 . L'intégrale à calculer se réduit donc à :

$$\int F(r, \theta, Z) r dr d\theta dZ = \pi h_0 \int_{r=0}^1 \int_{\mathcal{S}=-1}^1 F(r, \theta = 0, h_0 \frac{(1 + \mathcal{S})}{2}) r dr d\mathcal{S} \quad (3.116)$$

Soient N_1 et N_2 deux entiers. Par analogie avec le cas 1D, on pose :

$$h_1 = (b_1 - a_1)/N_1 \quad h_2 = (b_2 - a_2)/N_2 \quad (3.117)$$

L'intégrale double approchée selon la méthode des trapèzes en deux dimensions, notée $T2_f(h_1, h_2)$, s'écrit :

$$\begin{aligned}
T2_f(h_1, h_2) &= h_1 h_2 \left[\sum_{k_2=1}^{N_2-1} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} F(a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2) \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left(\sum_{k_2=1}^{N_2-1} (F(a_1, a_2 + k_2 h_2) + F(b_1, a_2 + k_2 h_2)) \right) \\
&+ \sum_{k_1=1}^{N_1-1} (F(a_1 + k_1 h_1, a_2) + F(a_1 + k_1 h_1, b_2)) \\
&\left. + \frac{1}{4} (F(a_1, a_2) + F(a_1, b_2) + F(b_1, a_2) + F(b_1, b_2)) \right]
\end{aligned} \tag{3.118}$$

L'intégrale approchée selon la méthode de Romberg, notée $R2_f(h_1, h_2)$, est aussi calculée comme une somme pondérée de deux intégrales calculées selon la méthode des trapèzes :

$$R2_F(h_1, h_2) = \frac{1}{3} (4T2_F(2h_1, 2h_2) - T1_F(h_1, h_2)) \tag{3.119}$$

La méthode choisie est d'ordre 2 en espace, et repose sur le choix d'une discrétisation homogène. Le meilleur moyen d'accélérer la convergence de l'intégration numérique est d'appliquer aux intégrandes un changement de variable qui a pour effet de raffiner le maillage près des bords du domaine (voir figure 3.5).

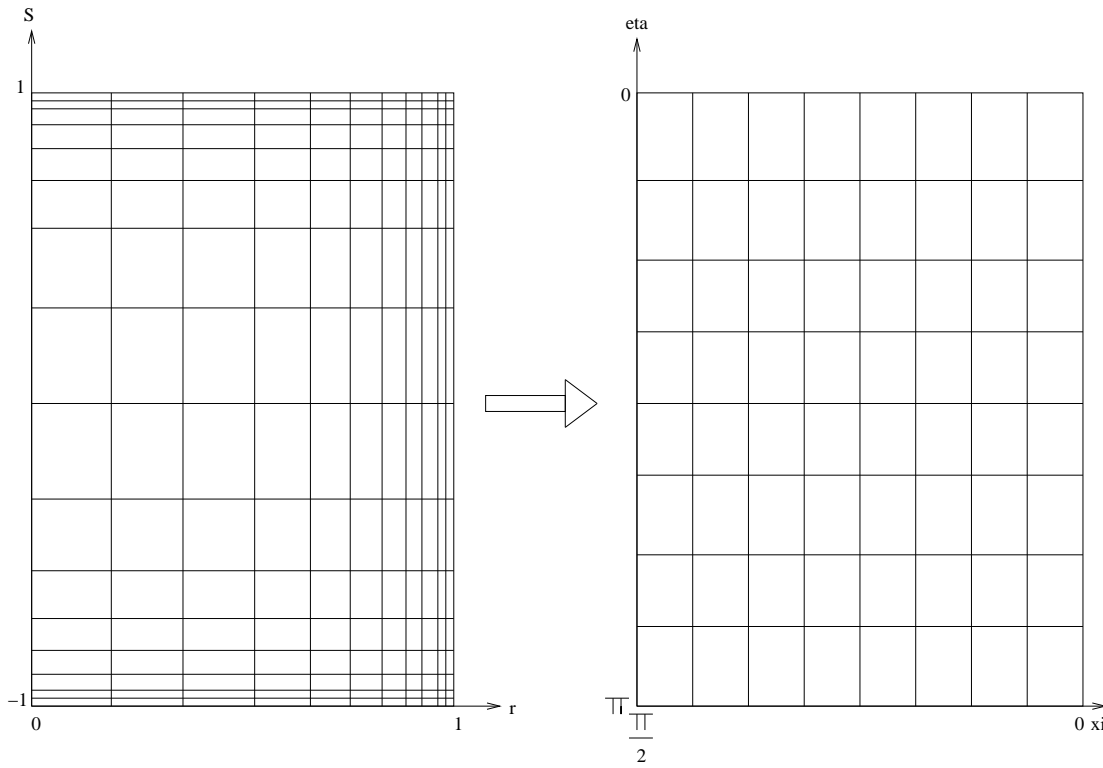


FIG. 3.5 – Changement de variables $(r, \mathcal{S}) \rightarrow (\xi, \eta)$

L'idée est spécialement intéressante car les polynômes de Tchebyshev d'ordre élevé utilisés dans la construction des fonctions de base \mathbf{u}^μ présentent des variations rapides au voisinage de la frontière du domaine. Le changement de variable adopté, spécialement adapté aux propriétés trigonométriques des polynômes de Tchebychev, est le suivant :

$$r = \cos \xi; \quad \xi \in [0, \frac{\pi}{2}] \tag{3.120}$$

$$\mathcal{S} = \cos \eta; \eta \in [0, \pi] \quad (3.121)$$

Les dérivées sont exprimées par rapport aux nouvelles variables grâce aux formules de dérivation composée classiques :

$$\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{1}{\sin \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.122)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} = -\frac{2}{h_0 \sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (3.123)$$

Finalement, si pour une fonction $F(r, Z)$ on note $\bar{F}(\xi, \eta) = F(\cos \xi, \frac{h_0}{2}(1 + \cos \eta))$, alors le calcul des intégrales dans les nouvelles coordonnées se fait de la façon suivante :

$$\int F(r, Z) d^3 X = \pi h_0 \int_{\eta=0}^{\pi} \int_{\xi=0}^{\pi/2} \bar{F}(\xi, \eta) \sin \xi \cos \xi \sin \eta d\xi d\eta \quad (3.124)$$

Cette fois-ci, le nouvel intégrande $\bar{F}(\xi, \eta) \sin \xi \cos \xi \sin \eta$ est évalué sur un maillage cartésien régulier à l'intérieur du domaine rectangulaire paramétré par $(\xi, \eta); \xi \in [0; \frac{\pi}{2}]; \eta \in [0; \pi]$

Finalement les algorithmes ont été testés et utilisés avec les fonctions de base choisies pour l'implémentation des coefficients, préalable à toute simulation.

3.2.6.3 Critère pratique de convergence

Pour $N = M = 32$, un maillage 2D constitué de 100^2 noeuds (avec raffinement près des parois) s'est révélé suffisant pour ne plus observer de différence graphique dans les simulations pour le calcul de NL^μ à chaque pas de temps. Afin de s'assurer qu'aucune erreur d'intégration ne se manifeste par cumulation de petites imprécisions lors de simulations instationnaires sur temps long, un maillage de 400^2 noeuds a été utilisé lors du calcul préalable des coefficients.

3.3 Application au calcul d'un écoulement en compression

Outre les cas d'écoulement en rotation pure (sans mouvement du piston), dont les résultats sont détaillés dans le chapitre suivant, la validité du code de calcul numérique développé a été testée dans une configuration avec compression. Le cas test présenté provient de simulations laminaires réalisées dans le cadre du projet Joule III [51], une collaboration européenne dont le but initial est la comparaison de codes de calcul et de modèles de fermeture pour la simulation d'écoulements turbulents dans des chambres de combustion. Si l'écoulement simulé n'est pas soumis à la rotation, il est en revanche soumis à une forte compression, ce qui en fait un cas de référence fiable pour tester la pertinence de la méthode de soustraction des singularités proposée. Le fort taux de compression impose ici la prise en compte de la variation de viscosité avec la masse volumique, modélisée dans tous les cas par la loi de Sutherland. Les caractéristiques de l'écoulement sont les suivantes :

- $a = 0.0375 \text{ m}$
- $\omega_{piston} = 0.25 \text{ s}^{-1}$
- $h_0 = \frac{52}{15}$
- $\epsilon = \frac{8}{13}$
- $Re_{piston}^{min}(t=0) = \frac{V_{piston} a}{\nu_{(t=0)}} = 50$

La compression s'effectue également selon une loi sinusoidale, sur un demi-cycle de compression seulement. Aucune donnée de référence n'est disponible en revanche pour la phase de détente dans des conditions analogues à celles du code de calcul réalisé. L'écoulement évolue à un nombre de Reynolds modéré (ce nombre est basé ici sur la vitesse du piston puisque le Reynolds basé sur la vitesse de rotation n'a plus de sens).

Les différentes méthodes de calcul utilisées dans le cadre du projet Joule III sont essentiellement des schémas de volumes finis avec un schéma d'ordre 2 en temps. Aucun traitement des singularités n'est appliqué, les discontinuités étant régularisées par le pas en espace. Par rapport à la méthode employée dans cette étude, où les équations sont toutes ramenées au domaine de référence Ω_0 , les autres méthodes utilisent un maillage mobile, où la valeur du champ des vitesses est interpolée à chaque pas de temps aux noeuds du nouveau maillage.

La discrétisation employée dans le cadre du projet est dans tous les cas $N_z = 128$, $N_r = 50$, $N_\theta = 8$. Il s'agit donc de codes non axisymétriques. Cependant, l'utilisation dans notre cas d'un code axisymétrique reste justifiée, puisque tous les participants au projet Joule III mentionnent l'axisymétrie de leurs résultats (sans doute forcée par la faible résolution azimuthale utilisée).

L'allure générale de l'écoulement est celle d'un écoulement axial auquel se superpose une boucle de recirculation d'intensité importante dans l'ensemble du domaine. La viscosité est trop importante dans le cas étudié pour permettre l'existence de zones de décollement près des parois, ainsi que la création de plus petites échelles à l'intérieur même de l'écoulement.

Les profils de vitesse $V_r(Z)$ et $V_z(r)$ ont été comparés aux différentes prédictions réalisées par les différents participants du projet, à différents instants de la phase de compression, correspondant respectivement à $\omega_{piston}t = \frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{2}$. Les calculs reproduits ici, représentés en variables dimensionnelles, sont annotés de la façon suivante :

- SJ-LSA : Calculs de Suad Jarkirlić au Lehrstuhl für Strömungsmechanik und Aerodynamik de Darmstadt
- SJ-LSTM : Calculs de Suad Jakirlić au Lehrstuhl für Strömungsmechanik de Erlangen
- IH-TU Delft : Calculs de Ibrahim Hadzić à la Delft University of Technology
- HP-LSTM : Calculs de Henri Pascal au Lehrstuhl für Strömungsmechanik de Erlangen
- BB-AVL : Code industriel *Fire* utilisé par le groupe PSA.

Les profils de vitesse obtenus avec le code réalisé sont comparables en allure et en ordre de grandeur avec les profils de référence et l'accord général semble bon (voir figures 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11, . Un pas de temps $\delta t = \frac{1}{4000}$, associé à une discrétisation spectrale de seulement 16^2 fonctions de base, s'est révélé suffisant pour obtenir une convergence numérique pertinente. La technique de préconditionnement utilisée s'est montrée très robuste (pas plus de 5 itérations de l'algorithme Bicgstab par pas de temps), malgré la course importante du piston. Cependant, la grande disparité des résultats obtenus au sein même du groupe de travail Joule III ne permet pas de conclure quant à la précision des résultats. Au mieux, on peut indiquer que les résultats obtenus avec le code réalisé sont légèrement plus proches des résultats cités par H. Pascal au LSTM de Erlangen, et dans une autre mesure de ceux obtenus par I. Hadzić à Delft, avec une erreur de l'ordre de quelques %.

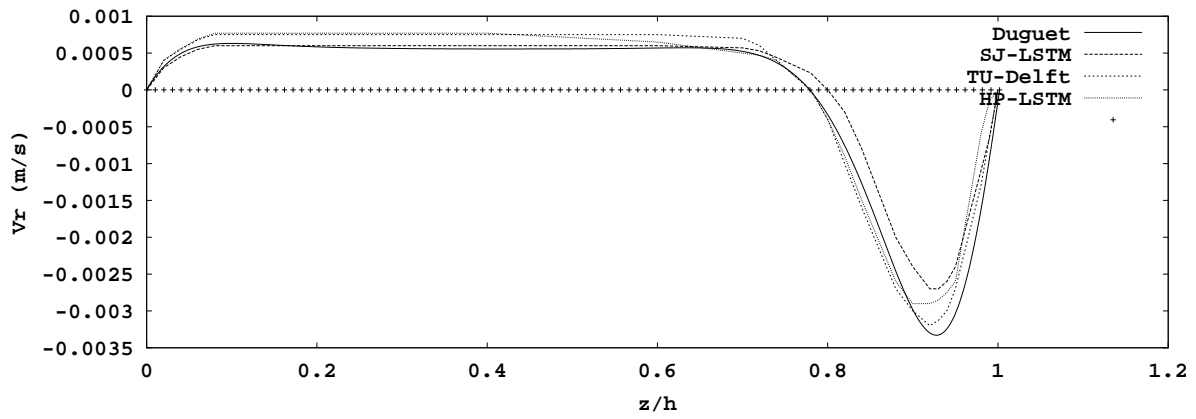


FIG. 3.6 - $V_r(z)$ pour $\omega_{piston}t = \frac{\pi}{4}$, $r=0.3$

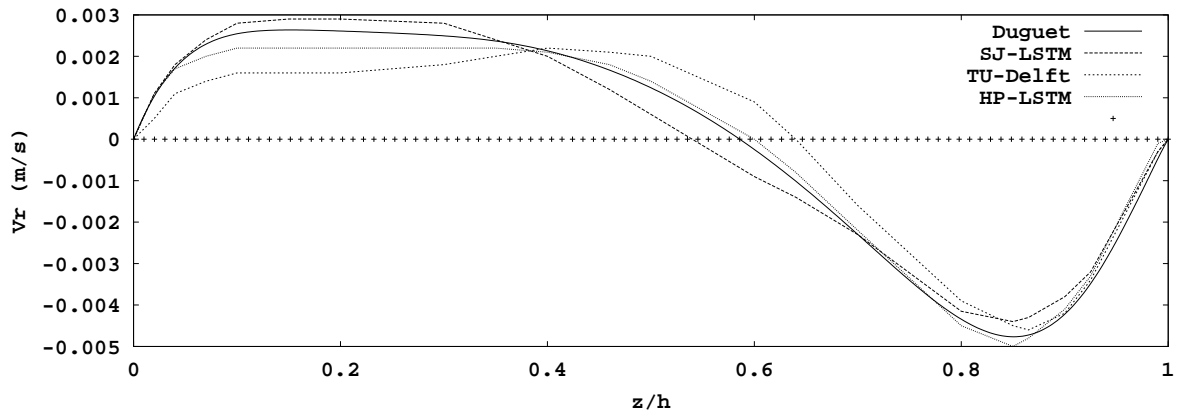


FIG. 3.7 - $V_r(z)$ pour $\omega_{piston}t = \frac{2\pi}{5}$, $r=0.3$

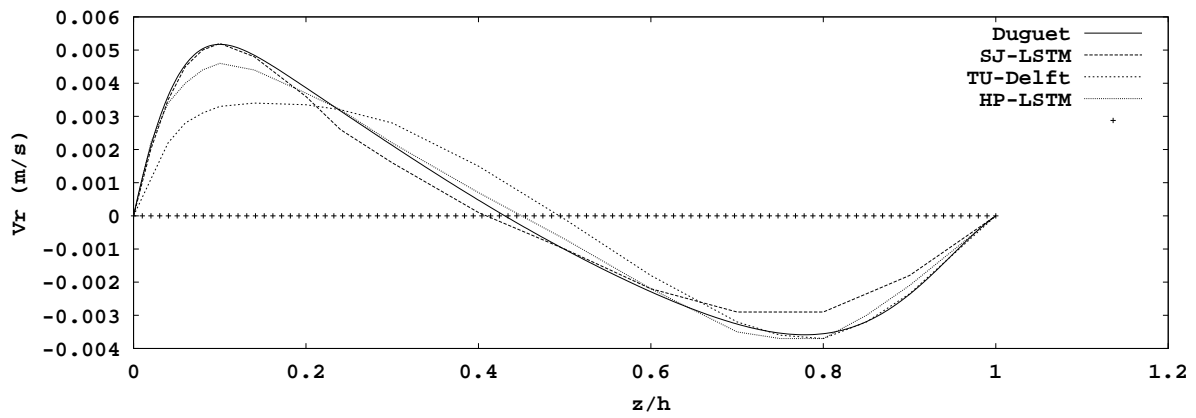


FIG. 3.8 - $V_r(z)$ pour $\omega_{piston}t = \frac{\pi}{2}$, $r=0.3$

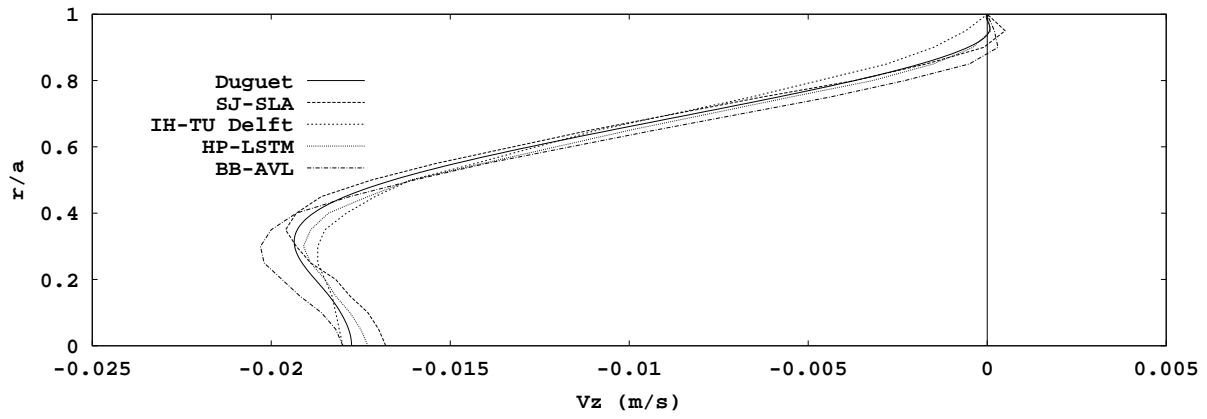


FIG. 3.9 - $V_z(r)$ pour $\omega_{piston} = \frac{2\pi}{5}, \frac{z}{h(t)} = \frac{3}{4}$

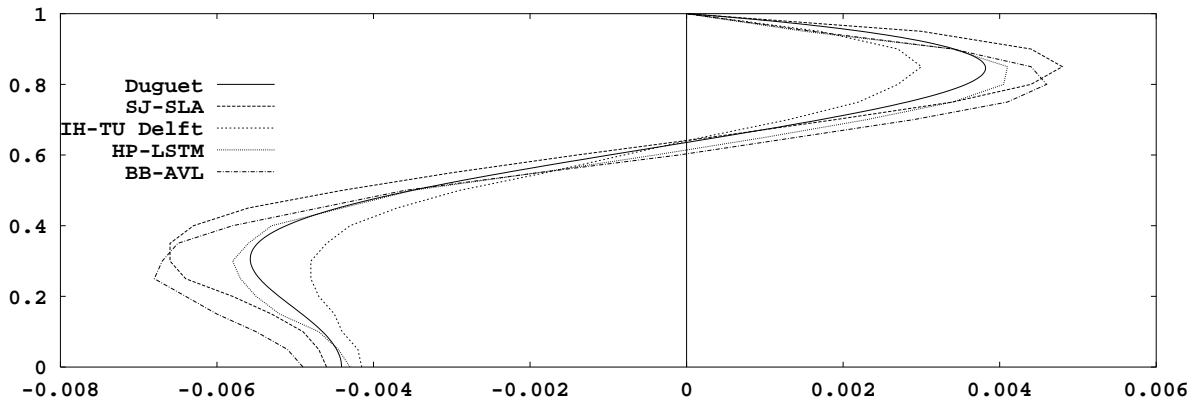


FIG. 3.10 - $V_z(r)$ pour $\omega_{piston} = \frac{\pi}{2}, \frac{z}{h(t)} = \frac{3}{4}$

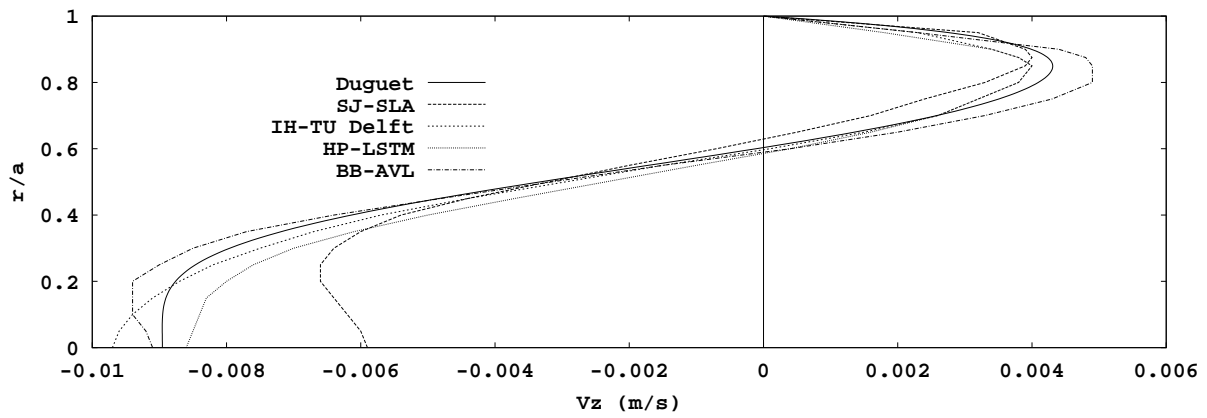


FIG. 3.11 - $V_z(r)$ pour $\omega_{piston} = \frac{\pi}{2}, \frac{z}{h(t)} = \frac{1}{4}$

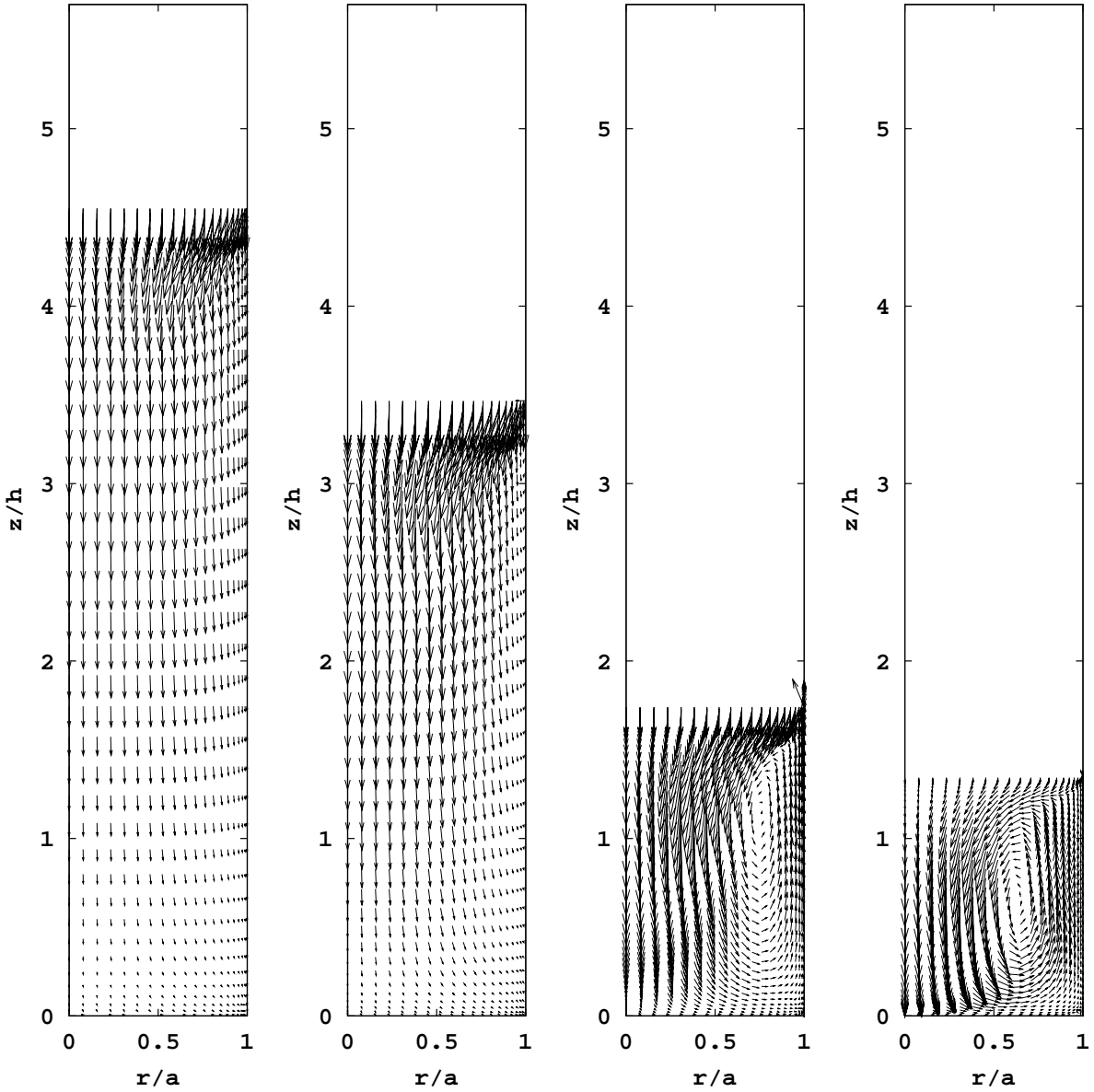


FIG. 3.12 – Semi-coupe méridienne du champ de vitesses réel associé à l’écoulement laminaire dans les conditions du projet Joule III. L’axe du cylindre est sur la gauche, les champs correspondent de gauche à droite aux valeurs de $\omega_{piston}t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$. Le cadre correspond à la hauteur initiale du piston.

La représentation graphique du champ de vitesse sur la figure 3.12 permet de mettre en évidence le rôle de la singularité dans l’écoulement : la discontinuité de la vitesse axiale proche du coin du piston joue le rôle d’une source instationnaire de vorticité azimuthale. Si l’allure de l’écoulement est globalement un mouvement d’oscillation de la vitesse axiale qui suit la dynamique du piston, la source de vorticité produit une boucle de recirculation secondaire torique superposée à l’écoulement axial. On note également la présence de couches limites sur les parois latérales dont la taille n’est pas négligeable vue la forte viscosité du fluide. Le nombre de Reynolds utilisé dans cette simulation est suffisamment bas pour que l’écoulement secondaire induit par la singularité soit d’intensité quasi-équivalente à celle de l’écoulement non visqueux associé. En revanche, l’influence de la singularité proche de la culasse, également prise en compte lors de la construction du champ singulier puisqu’elle se manifeste par une discontinuité de la dérivée $\frac{\partial V_z}{\partial z}|_{z=0}$, reste essentiellement locale.

3.4 Extension à des problèmes plus généraux

Notons que cette méthode de Galerkin, ainsi que la technique de préconditionnement adoptée, peuvent être généralisées simplement à tous les systèmes différentiels d'évolution où les opérateurs sont eux-mêmes instationnaires. De la même façon, la méthode proposée est également pertinente pour un système d'évolution dans un domaine qui évolue de façon périodique au cours du temps : le changement de variables qui permet de se ramener à un domaine fixe induit dans les opérateurs différentiels une nouvelle dépendance temporelle, qui se traduit, lors de la résolution par une méthode spectrale, par un opérateur matriciel instationnaire. L'idée de préconditionner le système matriciel par la valeur temporelle moyenne des opérateurs en jeu se révèle être une technique performante lorsque la déformation du domaine est asymptotiquement petite. Notons de façon formelle le système différentiel initial (équivalent des équations de Navier-Stokes), dans un domaine déformable $\Omega_\epsilon(t)$, où ϵ est un paramètre quantifiant la déformation du domaine :

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \phi(x, t)\right) + g(x, t), x \in \Omega_\epsilon(t) \quad (3.125)$$

Introduisons un changement de variables qui ramène le domaine instationnaire $\Omega_\epsilon(t)$ à un domaine de référence, fixe dans le temps Ω_0 , correspondant à $\Omega_\epsilon(t)$ pour $\epsilon = 0$:

$$\Omega_\epsilon(t) \rightarrow \Omega_0 \quad (3.126)$$

$$x \rightarrow X \quad (3.127)$$

Dans un souci de généralité, le domaine Ω_0 , s'il n'est pas directement adapté à une méthode de type Galerkin, peut toujours être ramené à un domaine plus simple par une transformation conforme ou être décomposé en sous-domaines adaptés (Canuto). Le système se réécrit maintenant par rapport aux nouvelles variables sous la forme générique suivante, avec la notation $\Phi(X, t) = \phi(x, t)$:

$$\frac{\partial E_\epsilon(\Phi(X, t), t)}{\partial t} = F_\epsilon\left(\frac{\partial}{\partial X}, \Phi(X, t), t\right) + G_\epsilon(X, t), X \in \Omega_0 \quad (3.128)$$

Ici, $E_\epsilon(\Phi(X, t), t)$ représente le nouveau champ physique dont l'évolution est régie par l'équation précédente. Dans notre problème, il correspond à l'expression de \mathbf{W} en fonction de \mathbf{V} , puisque c'est \mathbf{V} qui est choisi comme champ principal à cause de sa propriété de divergence nulle, alors que seule la quantité \mathbf{W} peut être régie par une équation sous la forme standard précédente. On peut noter au passage que $E_{\epsilon=0} = Id$. Discrétisons le système obtenu selon un schéma de Galerkin sur une base de fonctions $(u^\mu)_\mu$:

$$\Phi(X, t) = \sum_{\mu} A^\mu(t) u^\mu(X) \quad (3.129)$$

Le système d'EDPs obtenu par projection spectrale est de la forme :

$$\frac{d \langle E_\epsilon(\sum_{\mu} A^\mu(t) u^\mu, t), u^\nu \rangle}{dt} = \langle F_\epsilon\left(\frac{\partial}{\partial X}, \sum_{\mu} A^\mu(t) u^\mu, u^\nu\right) \rangle + \langle G_\epsilon, u^\nu \rangle \quad (3.130)$$

Les éventuelles singularités du champ peuvent être retranchées selon la méthode utilisée dans cette étude, et leurs contributions respectives peuvent alors être incluses dans le terme de forçage G_ϵ . Le système d'é.d.p. prend donc la forme symbolique :

$$\frac{d\beta_\epsilon(t) A(t)}{dt} = L_\epsilon(t) A(t) + g_\epsilon(A(t), t) \quad (3.131)$$

L'application d'un schéma en temps (ici un Schéma d'Euler pour la clareté de l'exposé, sans aucune restriction sur la généralité de la méthode) amène alors au système linéaire suivant :

$$(\beta_\epsilon^{n+1} - \gamma \Delta t L_\epsilon^{n+1}) A^{n+1} = (\beta_\epsilon^n + (1 - \gamma) \Delta t L_\epsilon^n) A^n + g_\epsilon^n \quad (3.132)$$

Sous réserve d'existence, l'application à gauche de l'opérateur inverse β_0^{-1} , où β_0 est la moyenne temporelle de l'opérateur instationnaire $\beta_\epsilon(t)$ périodique en temps, se ramène à la technique de préconditionnement proposée :

$$\underbrace{[(\beta_0)^{-1}(\beta_\epsilon^{n+1} - \gamma \Delta t L_\epsilon^{n+1})]}_{\text{preconditionnement}} A^{n+1} = \underbrace{(\beta_0)^{-1}(\beta_\epsilon^n + (1 - \gamma) \Delta t L_\epsilon^n) A^n + (\beta_0)^{-1} g_\epsilon^n}_{\text{second membre}} \quad (3.133)$$

Néanmoins, il faut garder à l'esprit que si la recherche d'une base "optimale", sur laquelle le développement de Galerkin sera toujours le plus économique dans toutes les gammes de paramètres, reste un enjeu intéressant pour les numériciens, une base est suffisamment adaptée au problème posé dès que la convergence est assurée dans des temps corrects à l'aide du matériel informatique à disposition. Un grand nombre de bases admissibles peuvent être proposées pour le présent problème, et il est certain que beaucoup de bases citées dans la littérature permettent d'obtenir des résultats complètement équivalents. Il est cependant intéressant de constater que, moyennant une technique de préconditionnement efficace et une normalisation adéquate, l'utilisation d'une base de fonctions non orthogonale reste envisageable. Ceci permet de construire une base modale sur des critères autres que ceux mis en avant dans la plupart des manuels, comme la structure spatiale où le respect des conditions aux limites.

Chapitre 4

Dynamique des modes inertiels dans un cylindre tournant

Dans ce chapitre, on s'intéresse essentiellement à l'étude numérique de la dynamique modale de l'écoulement dans un cylindre en rotation uniforme autour de son axe, selon l'algorithme présenté dans le chapitre précédent. Cependant, à la différence du reste de cette thèse, on se focalise sur le cas particulier sans compression, c'est-à-dire lorsque le piston n'est pas mis en mouvement ($h = h_0$).

4.1 Modes de Kelvin visqueux

Les quantités appelées “modes de Kelvin” sont *stricto sensu* les solutions complexes *harmoniques* correspondant aux équations d'Euler en repère tournant, linéarisées autour de l'état de rotation en bloc, avec adjonction de conditions de glissement sur les parois du cylindre. Elles ont été déterminées analytiquement par Lord Kelvin en 1880 [1]. Ce calcul, bien que novateur à son époque puisqu'il préfigurait nombre d'approches spectrales en physique, ignore tout phénomène de dissipation visqueuse et prédit donc au sein d'un fluide tournant l'existence et surtout la persistance temporelle de structures tourbillonnaires oscillantes. L'expérience prouve cependant que ces structures se dissipent au bout d'un temps certain, et que ce temps caractéristique de déclin est plus court que le temps caractéristique associé aux phénomènes de diffusion visqueuse de quantité de mouvement (inversement proportionnel au coefficient de viscosité cinématique du fluide). La caractérisation de ce phénomène de dissipation doit donc être basée sur la résolution du problème visqueux associé, qui est une généralisation du problème 2.32 en présence de viscosité.

La prise en compte des phénomènes de viscosité newtonienne étant incompatibles avec les conditions de glissement du problème 2.32, celles-ci doivent être remplacées, selon la procédure classique, par des conditions d'adhérence aux parois du cylindre. On cherche des solutions au problème visqueux linéarisé sous la forme $(\mathbf{U}(\mathbf{x})e^{\sigma t}, P(\mathbf{x})e^{\sigma t})$. Le problème se ramène à la résolution du système (4.1), où σ représente une valeur propre complexe de l'opérateur linéarisé :

$$\sigma \mathbf{U} + \mathbf{e}_z \times \mathbf{U} + \nabla P = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4.2)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (r = 1, Z = 0, h_0) \quad (4.3)$$

La prise en compte rigoureuse de ce phénomène supplémentaire complique le problème analytique de sorte qu'aucune solution globale n'a été découverte jusqu'à présent. Ces solutions

(\mathbf{U}, P)), que nous appellerons par extension *modes de Kelvin visqueux* ou bien encore tout simplement *modes inertiels*, sont donc décrits dans la littérature comme ayant, pour $Re \gg 1$, le même comportement que les modes non-visqueux loin des parois, ainsi qu'un comportement proche paroi semblable à celui des couches d'Ekman dans le cas de semi-plans infinis, selon la technique de séparation d'échelles utilisée par Greenspan [5]. Les différents comportements sont reliés par des procédures de raccordement approximatives, ce qui a entre autres pour effet de fausser la contribution de la viscosité dans les zones de coin. Les singularités géométriques des zones de coin peuvent pourtant induire à leur tour des comportements singuliers, comme en témoignent les couches de cisaillement internes mises en évidence expérimentalement par McEwan. De plus la connaissance précise de l'écoulement dans la totalité des zones de proche paroi est nécessaire à la détermination précise des taux de déclin modaux, puisque ce sont précisément des zones où les forts gradients assurent une part a priori importante de la dissipation visqueuse de la quantité de mouvement. De plus, dans une perspective d'étude d'une éventuelle croissance de ces modes par un mécanisme destabilisateur, la connaissance de ces taux de déclin, liés à la viscosité en tant que phénomène au contraire stabilisant et s'opposant à la croissance, est cruciale, en particulier dans la détermination des seuils marginaux d'instabilité.

4.2 Caractère conservatif du schéma spectral

Si les propriétés naturelles des opérateurs de diffusion, associés à la valeur strictement positive des coefficients de viscosité, permettent le déclin des petites perturbations incompressibles par rapport à l'écoulement de rotation en bloc, il est utile de remarquer qu'il en est tout aussi vrai dans le cas de perturbations non nécessairement petites. Ceci est lié au caractère *énergétiquement stable* de l'écoulement de rotation en bloc (qui est donc l'écoulement nul dans le repère tournant). On considère l'équation adimensionnelle de ces perturbations en formulation vitesse-pression :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} \quad (4.4)$$

Compte tenu des conditions aux limites et du fait que la force de Coriolis ne travaille pas, il en découle le bilan énergétique qui traduit la propriété de stabilité énergétique [37] :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |\mathbf{u}|^2 d^3x = -\frac{1}{Re} \int \|\nabla \mathbf{u}\|^2 d^3x \quad (4.5)$$

Du point de vue numérique, il est important que le schéma en espace choisi respecte cette propriété, et donc qu'un bilan énergétique analogue soit vérifié dans chacune des directions sur laquelle la solution doit être projetée. On rappelle que le schéma proposé, avec technique de soustraction de la singularité, se réduit à un schéma spectral de type Galerkin classique associé à des conditions aux limites nulles aux parois dans le repère tournant.

Le développement du champ de vitesse selon les fonctions de base $\mathbf{u}^\mu(\mathbf{x})$ se ramène à un système différentiel infini sur les amplitudes $A(t)$, de la forme :

$$\sum_{\nu} \beta^{\mu\nu} \frac{dA^\nu}{dt} = \sum_{\nu} \left(\frac{1}{Re} D^{\mu\nu} + C^{\mu\nu} \right) A^\nu + \sum_{\nu\lambda} G^{\mu\nu\lambda} A^\nu A^\lambda \quad (4.6)$$

Dans cette expression, on utilise les définitions suivantes :

$$\beta^{\mu\nu} = \int \mathbf{u}^\mu \cdot \mathbf{u}^\nu d^3x \quad (4.7)$$

$$C^{\mu\nu} = - \int (\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^\nu) \cdot \mathbf{u}^\mu d^3x \quad (4.8)$$

$$D^{\mu\nu} = \int \mathbf{u}^\nu \cdot \Delta \mathbf{u}^\mu d^3x = - \int (\nabla \mathbf{u}^\nu : \nabla \mathbf{u}^\mu) d^3x \quad (4.9)$$

$$G^{\mu\nu\lambda} = \int \mathbf{u}^\nu \cdot (\mathbf{u}^\lambda \cdot \nabla \mathbf{u}^\mu) d^3x \quad (4.10)$$

Les matrices D et β sont symétriques et sont respectivement définie négative et définie positive. alors que C est anti-symétrique. De plus, G vérifie une propriété d'antisymétrie sous la forme $G^{\mu\nu\lambda} = -G^{\nu\mu\lambda}$.

On peut réécrire cette même équation en intervertissant les rôles de μ et de ν . En effectuant la demi-somme des deux equations obtenues, pondérées respectivement par $A^\mu(t)$ et $A^\nu(t)$, on peut dériver un bilan d'énergie, en utilisant les propriétés des opérateurs β , C , D et G :

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{d}{dt} (A^\mu \beta^{\mu\nu} A^\nu) = \frac{1}{Re} \sum_{\mu\nu} (A^\mu D^{\mu\nu} A^\nu) \quad (4.11)$$

ce qui correspond à la relation (4.5) exprimée en fonction des amplitudes spectrales.

A ce stade on introduit une troncature spectrale sous la forme :

$$\mathbf{U}_{N,M}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n,m=0}^{N,M} A^{n,m}(t) \mathbf{u}^{n,m}(\mathbf{x}) \quad (4.12)$$

A l'aide d'un raisonnement analogue à celui que l'on vient de voir, on retrouve alors la condition énergétique (4.5) portant ici sur le champ tronqué, quelque soit l'ordre de troncature :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |\mathbf{U}_{N,M}|^2 d^3x = - \frac{1}{Re} \int \|\nabla \mathbf{U}_{N,M}\|^2 d^3x \quad (4.13)$$

Ainsi le schéma adopté est totalement conservatif en espace. On notera cependant que :

- cette propriété se généralise à toutes les géométries ainsi qu'à toutes les bases de fonctions incompressibles répondant au problème.
- en revanche, rien n'assure la conservativité du schéma en temps. Une simulation avec avancement discret en temps et évaluation numérique du termes non linéaires, introduit donc des erreurs qui sont, avec les schémas en temps employés, de type dissipatif.
- de la même façon, dans la limite des grands systèmes linéaires, l'inversion matricielle à réaliser dans le cas d'une itération en temps ou d'une résolution du problème aux valeurs propres peut induire des erreurs d'arrondi susceptibles de dégrader la propriétés de conservativité du schéma spectral.

4.3 Spectre de l'opérateur linéarisé

4.3.1 Détermination numérique du spectre

Les modes propres complexes du système sont par définition les solutions *harmoniques* du problème à résoudre, une fois linéarisé autour de l'état correspondant à $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ et $\Pi(\mathbf{x}, t) = cste$. Notons σ une valeur propre complexe du système. Si on suppose pour ce mode une phase initiale coïncidant avec $t = 0$, alors le champ de vitesse associé s'écrit de façon harmonique :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) e^{\sigma t} \quad (4.14)$$

Avec cette définition on remarque que :

- la partie réelle de σ représente le taux de croissance adimensionnel du mode propre (qui est négatif s'il s'agit d'un cas de déclin)
- la partie imaginaire représente la pulsation adimensionnelle du mode propre
- \mathbf{U} décrit la structure spatiale du champ de vitesse associé au mode propre. Notons que ces fonctions forment une base *non orthogonale*, à la différence des modes de Kelvin [28].

Ainsi, projetée sur la base spectrale, l'équation linéarisée des amplitudes modales s'écrit :

$$\sigma \sum_{\nu} \beta^{\mu\nu} A^{\nu} = \sum_{\nu} (C^{\mu\nu} + \frac{1}{Re} D^{\mu\nu}) A^{\nu} \quad (4.15)$$

Les valeurs propres du système continu peuvent donc être approchées par celles de l'opérateur matriciel $\beta^{-1}(C + \frac{1}{Re}D)$, de taille $(N+1)(M+1)$. De même, soit A un vecteur propre associé à ce même opérateur matriciel et à la valeur propre σ , alors on peut reconstruire une approximation du mode propre $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ par la formule :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) \approx \sum_{n,m=0}^{N,M} A^{n,m} \mathbf{u}^{n,m}(\mathbf{x}) \quad (4.16)$$

Il est entendu, par la convention habituelle, que les grandeurs physiques associées correspondent aux parties réelles des champs calculés, selon la formule $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \Re(a\mathbf{U}(\mathbf{x})e^{\sigma t})$, où a est un coefficient complexe représentant l'amplitude du mode et sa phase.

Remarquons qu'en multipliant l'équation (4.15) par le conjugué hermitien de A , noté A^H , il vient

$$\sigma A^H \beta A = A^H C A + \frac{1}{Re} A^H D A \quad (4.17)$$

Les propriétés des opérateurs β , D et C font que les termes $A^H \beta A$ et $A^H D A$ sont réels alors que $A^H C A$ est imaginaire pure. On peut donc évaluer les parties réelle et imaginaire de σ par les formules :

$$\Re(\sigma) = \frac{1}{Re} \frac{A^H D A}{A^H \beta A} \quad (4.18)$$

$$\Im(\sigma) = -i \frac{A^H C A}{A^H \beta A} \quad (4.19)$$

Or l'expansion spectrale $\mathbf{u} = \sum_{\mu} A^{\mu} \mathbf{u}^{\mu}$ permet d'écrire :

$$A^H C A = - \sum_{\mu, \nu} \int A^{\mu*} A^{\nu} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^{\nu}) \cdot \mathbf{u}^{\mu} d^3 x = - \int (\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}^* d^3 x$$

d'où :

$$|A^H C A| \leq \int |(\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}^*| d^3 x \leq \int |\mathbf{u}|^2 d^3 x = A^H \beta A$$

Ce qui implique $|\Im(\sigma)| \leq 1$.

De même, on a :

$$A^H D A = - \sum_{\mu, \nu} \int A^{\mu*} A^\nu \Delta \mathbf{u}^\nu \cdot \mathbf{u}^{\mu*} d^3 x = - \int \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}^* d^3 x$$

ce qui implique $\Re(\sigma) < 0$.

On peut d'ores et déjà résumer certaines caractéristiques du spectre recherché, concernant *autant* le spectre du problème continu que celui du problème tronqué :

- Si σ est valeur propre, alors son conjugué σ^* l'est également, le spectre admet donc l'axe réel comme axe de symétrie.
- En l'absence de rotation, le problème associé n'admet donc que des valeurs propres réelles négatives, alors que pour $Re \rightarrow \infty$, il n'admet que des valeurs propres concentrées autour de l'axe imaginaire. Ainsi, c'est la force de Coriolis qui est responsable du caractère oscillant des solutions, alors que c'est l'opérateur de diffusion qui est responsable de leur déclin temporel.
- Le schéma spectral tronqué conserve la propriété du système continu, propre à la fois aux modes propres visqueux et non visqueux, de ne posséder que des pulsations adimensionnelles inférieures à 1 [5].

La méthode numérique choisie pour résoudre le problème matriciel est classique pour des matrices ne possédant pas de symétrie particulière. Il s'agit de réduire la matrice dont on cherche à extraire le spectre en la matrice de Hessenberg supérieure qui lui est orthogonalement semblable et qui possède le même spectre. Enfin, il s'agit d'appliquer à cette nouvelle matrice l'algorithme Hessenberg QR de recherche de valeurs propres. Les vecteurs propres associés sont ensuite calculés par résolution du système matriciel associé à chaque valeur propre du spectre déterminé précédemment.

4.3.2 Allure graphique des spectres

Les spectres de l'opérateur linéarisé sont représentés sur les figures 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6 pour différentes valeurs croissantes du nombre de Reynolds, correspondant toutes à un même rapport d'aspect $h_0 = 1.35045$. La partie réelle est présentée en valeur absolue. La représentation logarithmique de l'axe des abscisses est utilisée car elle permet une visualisation plus aisée de la structure du spectre autour de l'axe imaginaire. Les calculs ont été faits, sauf mention contraire, avec une discrétisation spectrale de $N=M=32$, ainsi au plus $(32 + 1)^2 = 1089$ valeurs propres sont représentées, alors que le spectre continu possède une infinité dénombrable de valeurs singulières. Une remarque valable quelque soit la valeur du nombre de Reynolds est que les valeurs propres possèdent toutes une partie réelle négative, ainsi qu'une partie imaginaire inférieure à 1 en valeur absolue, conformément aux propriétés des opérateurs de rotation et de diffusion. De plus, les spectres calculés par l'algorithme possèdent effectivement l'axe réel comme axe de symétrie. On constate qu'aux nombres de Reynolds proches de l'unité, les valeurs propres se concentrent sur l'axe réel. Lorsque Re augmente, le spectre tend à se structurer autour de l'axe imaginaire, la repartition des modes à partie imaginaire nulle étant plus irrégulière, ce qui illustre la contribution croissante des effets de rotation par rapport aux effets de diffusion. Pour les valeurs de Re très supérieures à l'unité, à partir de $Re = 100$, la repartition des valeurs singulières prend la forme d'une fourche tournée vers les réels négatifs, les valeurs propres proches de l'axe imaginaires présentant des taux de déclin légèrement plus grands en valeur absolue. Une description plus fine met en évidence des bandes de valeurs propres, d'autant plus

reserrées que Re est grand, dont l'accumulation dessine le motif général du spectre. La répartition spectrale théorique correspondant au cas limite des modes de Kelvin ($Re \rightarrow \infty$ avec conditions de glissement) est une distribution dense de valeurs propres sur le segment imaginaire $[-i, i]$, toutes les parties réelles étant nulles puisque les effets de diffusion sont négligés.

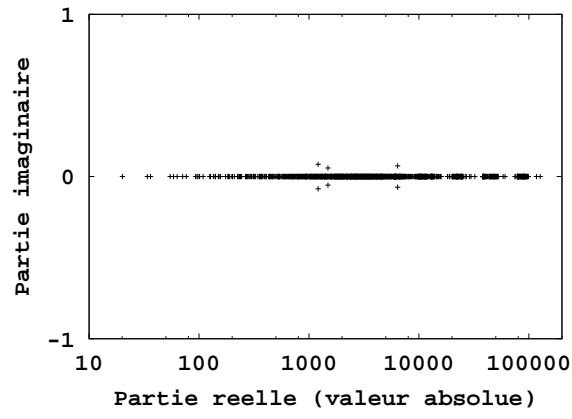


FIG. 4.1 - $h_0 = 1.35045$, $Re=1$

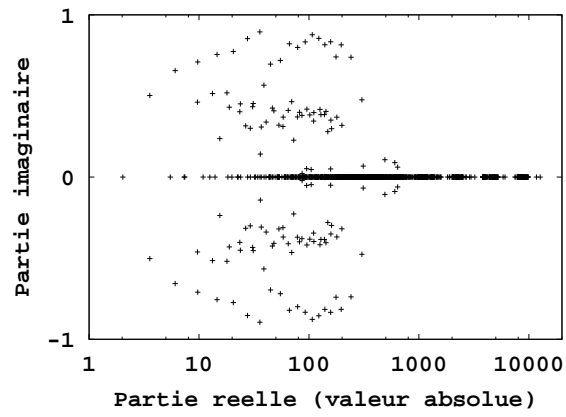


FIG. 4.2 - $h_0 = 1.35045$, $Re=10$

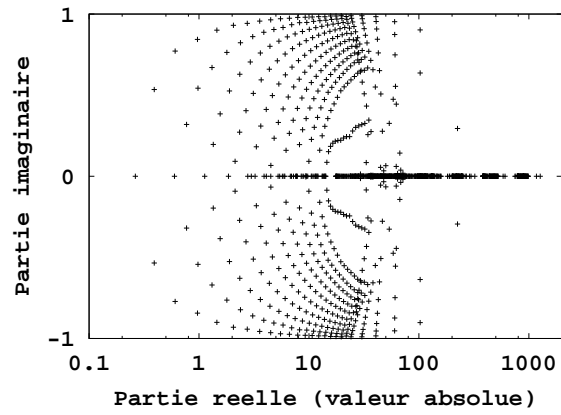


FIG. 4.3 - $h_0 = 1.35045$, $Re = 10^2$

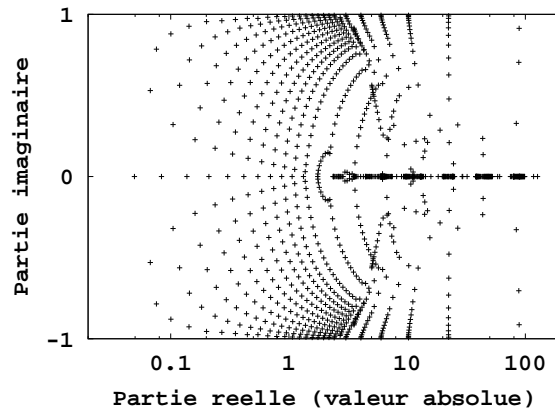


FIG. 4.4 - $h_0 = 1.35045$, $Re = 10^3$

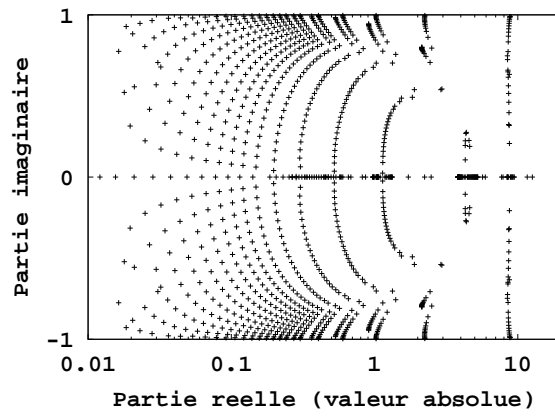


FIG. 4.5 - $h_0 = 1.35045$, $Re = 10^4$

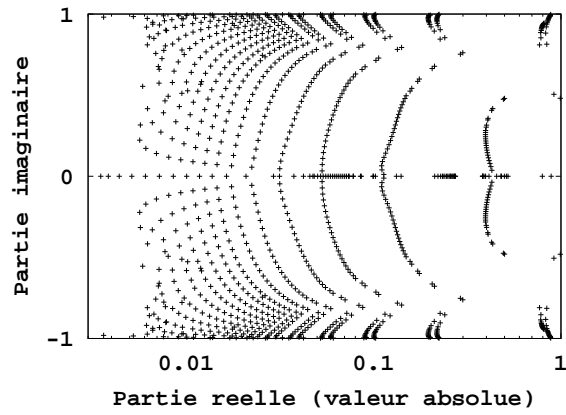


FIG. 4.6 - $h_0 = 1.35045$, $Re = 10^5$

4.3.3 Problème de la classification en familles de modes axisymétriques

On souhaite ici pouvoir établir une classification des modes propres visqueux axisymétriques du système en rotation. Une méthode simple de classification des modes non visqueux existe déjà. L'idée est d'identifier la structure d'un mode propre visqueux avec celle du mode propre non visqueux associé en utilisant les propriétés de continuité des valeurs propres en fonction du paramètre Re .

Pour les modes de Kelvin issus du problème *non visqueux*, il est possible de procéder à une classification simple en fonction de la topologie du champ de pression ou du champ de vitesse associé. Pour les modes axisymétriques, la vitesse azimuthale d'un mode s'écrit en coordonnées cylindriques à l'aide de la fonction de Bessel J_0 :

$$u_{\theta}^{(\mu)}(\mathbf{x}) = N^{(\mu)} k^{(\mu)} J_0'(k^{(\mu)} r) \cos\left(\frac{m\pi z}{h_0}\right) \quad (4.20)$$

où les réels formant la suite $(k^{(\mu)})_{\alpha}$ sont les solutions $0 < k_{\alpha=1} < k_{\alpha=2} \dots$ de l'équation :

$$J_0'(k) = 0 \quad (4.21)$$

Ainsi il s'établit une classification topologique aisée, où l'indice α représente le nombre de noeuds du champ u_r dans la direction radiale, et m le nombre de noeuds dans la direction axiale. Il est intéressant de savoir si le spectre issu du problème visqueux admet une classification analogue, dont la classification non-visqueuse ne serait éventuellement que la limite pour $Re \rightarrow \infty$. Ce qui facilite grandement la classification des modes non visqueux est le caractère séparable des solutions en fonction des coordonnées spatiales, exprimées en repère cylindrique. Cependant, dans le cas visqueux, rien n'assure la pertinence d'une recherche de solutions sous une forme séparée vis-à-vis des variables r et z .

Outre la théorie asymptotique, les expérience numériques montrent que la topologie simple qui caractérise un mode non-visqueux axisymétrique donné est préservée pour les nombres de Reynolds suffisamment grands. En revanche, pour un mode de Kelvin non visqueux d'ordre élevé, présentant un grand nombre de structures vorticales de petite taille, il existe toujours une valeur du nombre de Reynolds en dessous de laquelle ces structures vorticales sont englobées par la couche d'Ekman dont la taille varie comme $O(Re^{-\frac{1}{2}})$. Ceci a pour effet de modifier la topologie des modes correspondants en fonction du nombre de Reynolds lorsque celui-ci est trop bas. Les modes propres visqueux sont donc classifiables avec les mêmes critères que les modes non visqueux lorsque leur couche d'Ekman est petite devant la longueur d'onde caractéristique du mode non visqueux associé, donnée par $\frac{2\pi}{K^{(\mu)}}$, où $(K^{(\mu)})^2 = k_{\alpha}^2 + \left(\frac{m\pi}{h_0}\right)^2$. Cette condition s'écrit alors :

$$Re \gg (K^{(\mu)})^2 \quad (4.22)$$

De façon qualitative, K^2 augmente avec l'ordre du mode, et pour les modes de bas ordre comme le mode primaire (1,1), il se révèle être de l'ordre de 100. En pratique, les ordres de grandeurs fournis par la théorie asymptotique, associés à une visualisation graphique systématique dans l'espace physique du nombre de tourbillons du champ de vitesses associé, constituent un critère permettant de suivre la dynamique d'un mode propre de bas ordre précis lorsque Re varie.

4.3.3.1 Modes géostrophiques

Les modes de Kelvin formant la catégorie la plus simple à décrire sont sans doute les modes dits *géostrophiques*, c'est-à-dire ceux qui possèdent une pulsation nulle. Dans le cadre non visqueux, ces modes qui n'oscillent pas au cours du temps sont exactement ceux dont les profils de

vitesse ne présentent pas de variation dans la direction de l'axe de rotation, dans notre cas l'axe \mathbf{e}_z . Ils correspondent à la classe des modes de Kelvin pour lesquelles $m = 0$, et s'interprètent physiquement comme un équilibre stationnaire entre le gradient de pression et la force de Coriolis dans chaque plan orthogonal à l'axe de rotation, conformément au cadre du théorème de Taylor-Proudman. Associée à la condition d'imperméabilité sur des surfaces également orthogonales à l'axe de rotation, cette propriété permet d'assimiler les modes géostrophiques à des modes stationnaires bidimensionnels, invariants selon la direction de l'axe. L'expression analytique de ces modes de Kelvin géostrophiques révèle, dans le cas axisymétrique, une structure de la forme $\mathbf{V} = u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$, ce qui permet encore de les rebaptiser modes *horizontaux*.

La notion de géostrophie étant intrinsèquement non visqueuse, il est intéressant de déterminer dans quelles limites on peut l'appliquer à un écoulement visqueux. La théorie asymptotique de Greenspan repose sur une séparation de l'écoulement en une zone non visqueuse et une zone de couche d'Ekman, d'épaisseur $O(Re^{-\frac{1}{2}})$, supposée faible devant les dimensions caractéristiques du domaine. Un moyen de vérifier le cadre de validité de cette hypothèse, dans le cas des modes stationnaires, est de comparer les profils typiques suivant la direction z de certains modes à fréquence nulle, ceci pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Des tests ont été menés pour le cas du mode stationnaire le moins amorti.

Tout d'abord, contrairement aux autres modes propres, la pulsation des modes géostrophiques ne varie pas en fonction du nombre de Reynolds et reste rigoureusement nulle. Ceci permet donc d'étendre sans ambiguïté la définition "géostrophique=mode stationnaire" au cadre visqueux.

On remarque sur les figures 4.7 et 4.8 que pour $Re \leq 10^2$, l'hypothèse même d'une couche d'Ekman fine n'est pas correctement vérifiée puisque pour chaque composante de vitesse, le profil vertical exhibe une dépendance vis-à-vis de z . Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10^3 , en revanche, les profils de vitesses se bidimensionnalisent hors de très fines zones que l'on peut sans risque d'erreur assimiler à des couches d'Ekman. Une mesure pertinente de l'épaisseur relative de cette couche d'Ekman par rapport à la hauteur totale du cylindre est la distance de la paroi horizontale à partir de laquelle toutes les composantes du champ des vitesses ne montrent graphiquement plus de caractère tridimensionnel. On retrouve effectivement, pour le rapport d'aspect $h_0 = 1.35045$, une loi asymptotique en $O(Re^{-\frac{1}{2}})$, conforme à la loi en puissance attendue (voir figure 4.9).

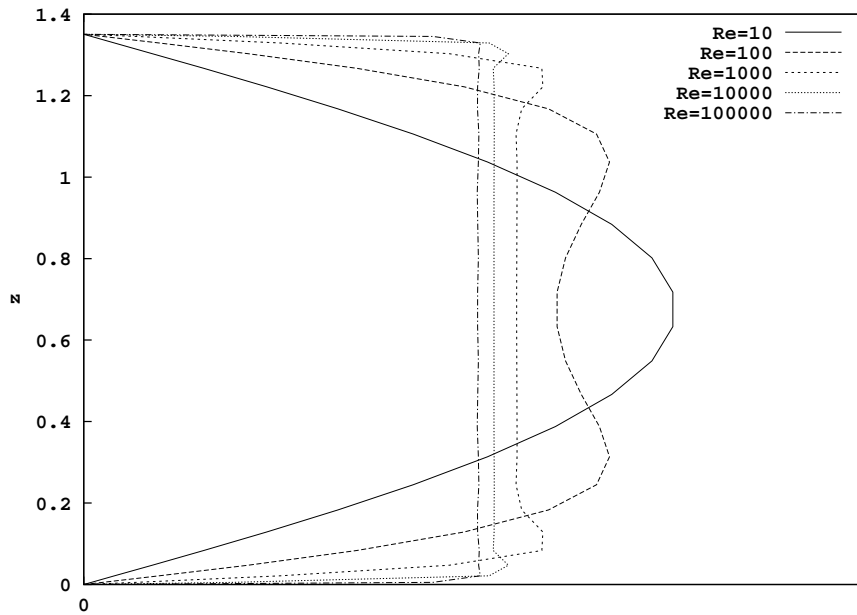


FIG. 4.7 – Profil vertical de vitesse azimuthale d'un mode géostrophique en fonction de z pour différentes valeurs de Re ($r = 0.25$, échelles arbitraires)

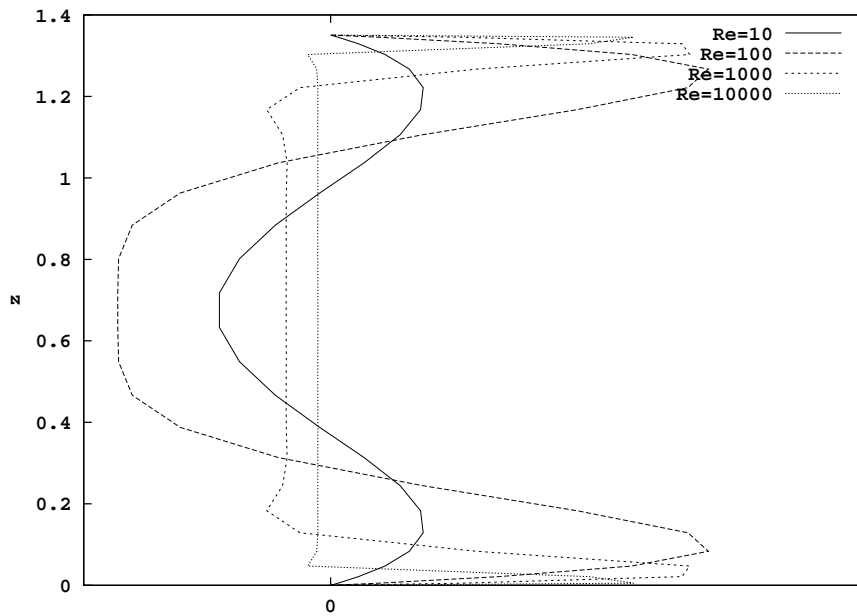


FIG. 4.8 – Profil vertical de vitesse radiale d'un mode géostrophique en fonction de z pour différentes valeurs de Re ($r = 0.25$, échelles arbitraires)

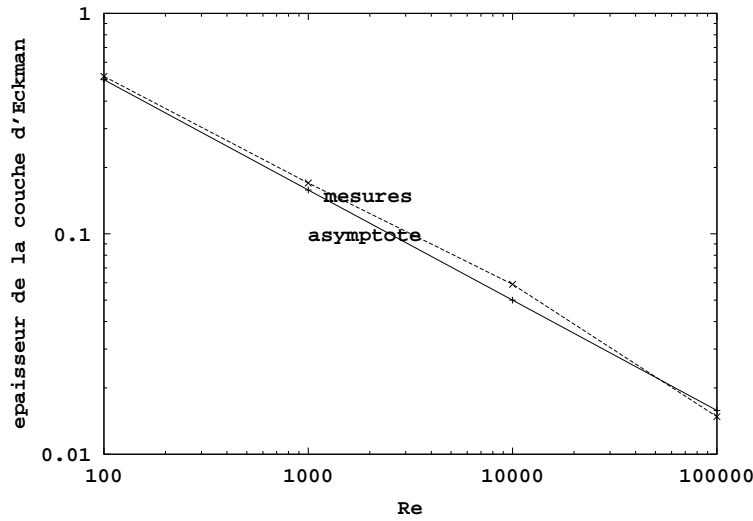


FIG. 4.9 – Epaisseur de la couche d’Ekman d’un mode géostrophique en fonction du nombre de Reynolds, comparée au modèle asymptotique en $5Re^{-\frac{1}{2}}$

4.3.3.2 Modes verticaux

De même qu’à une pulsation nulle est associée une classe de modes dits horizontaux ou géostrophiques, est-il possible de qualifier les modes de pulsation proche de l’unité? Dans le cadre d’ondes de Kelvin planes, non visqueuses, en milieu infini, une pulsation égale, en valeur absolue, à l’unité correspond à une onde dont la direction de propagation est alignée avec l’axe de rotation. Le mécanisme qui conduit à une propagation de ce genre est élégamment expliqué dans [37]. Dans le cadre confiné d’un cylindre, en revanche, l’étude du spectre du système, avec ou même sans viscosité, ne révèle aucune valeur propre dont la partie imaginaire est égale exactement à 1 en valeur absolue. Cependant beaucoup de valeurs propres ont une partie imaginaire qu’on peut qualifier *proche* de l’unité, ainsi ce sont celles-ci qui méritent une étude plus poussée. La dynamique du mode (1,4,0) a été suivie en fonction du nombre de Reynolds. On constate que même pour les nombres de Reynolds élevés, sa pulsation reste proche de l’unité mais sans montrer de signe de convergence vers cette valeur (voir figure 4.11). Sa topologie (représentée sur la figure 4.10) indique clairement une succession de structures allongées selon l’axe radial, et empilées selon une direction purement verticale. Ainsi on peut tout de même qualifier ce mode propre de *vertical* par référence à la direction de son vecteur d’onde. On notera que le spectre de l’opérateur linéarisé en l’absence de diffusion ne possède pas de valeurs propres dont la partie imaginaire est strictement égale à 1, sauf dans la limite $\frac{k_\alpha h_0}{\pi m} \rightarrow 0$, où α et m sont reliés aux nombres de noeuds respectivement radial et axial de la pression et du champ de vitesses. Ainsi, il semble que les systèmes confinés, visqueux comme non visqueux, admettent des modes verticaux se propageant parallèlement à l’axe de rotation, mais que ceux-ci ne sont caractérisés par une pulsation adimensionnelle égale à 1 seulement dans les cas limites d’un mode d’ordre infini selon la direction axiale ou bien dans le cas d’un cylindre infiniment allongé.

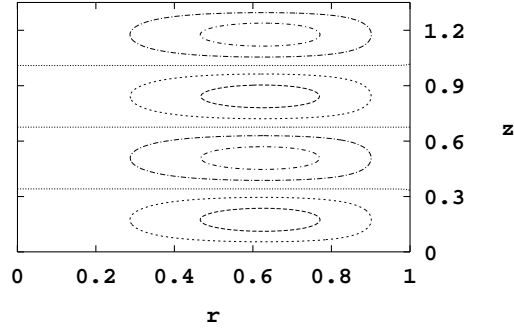


FIG. 4.10 – Lignes de courant dans le plan méridien du mode visqueux (1,4,0) pour $h_0 = 1.35045$ et $Re = 5.10^4$.

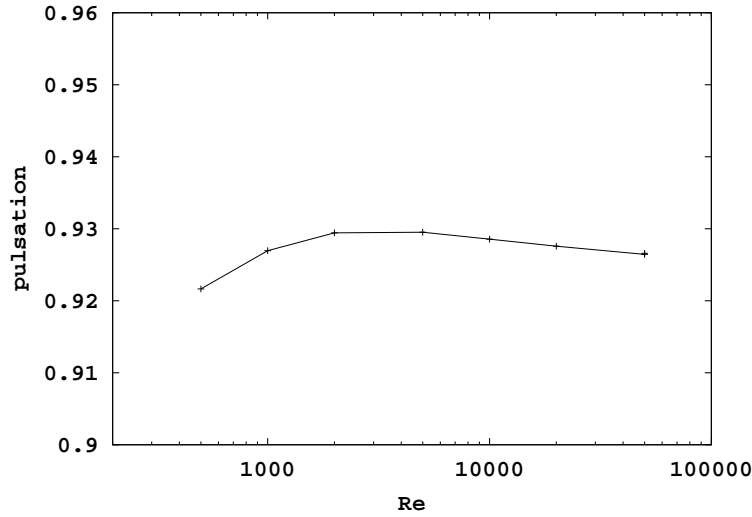


FIG. 4.11 – Pulsation adimensionnelle du mode visqueux (1,4,0) en fonction de nombre de Reynolds, pour $h_0 = 1.35045$.

4.4 Pulsations des modes inertiels

On sait qu'en milieu infini en rotation à la vitesse angulaire adimensionnelle $\frac{1}{2}$ et dans le cas d'un fluide sans viscosité, des ondes de Kelvin peuvent se propager avec n'importe quelle pulsation comprise entre 0 et 1. Pour les ondes planes, cette pulsation est directement liée à l'angle que fait le vecteur d'onde avec l'axe de rotation. L'adjonction de conditions aux limites au problème, traduisant le caractère fermé de l'écoulement, comme c'est le cas à l'intérieur d'un cylindre, opère une sélection discrète des pulsations admissibles. Cependant, les pulsations, paramétrées par 2 indices relatifs à la topologie radiale et axiale des modes propres associés, via la formule analytique

$$|\omega^{\alpha,m,n}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_\alpha h_0}{\pi m}\right)^2}} \quad (4.23)$$

forment toujours un ensemble dense dans le segment $[-1, 1]$.

La prise en compte d'une viscosité modérée dans le problème ne modifie pas le caractère oscillatoire des solutions, en revanche les pulsations calculées par résolution du problème aux valeurs propres dépendent, quand elles ne sont pas nulles, du nombre de Reynolds.

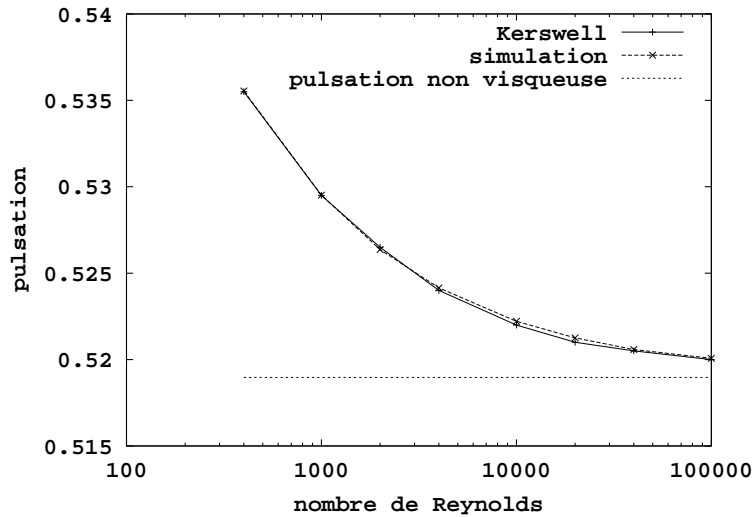


FIG. 4.12 – Calcul de la pulsation adimensionnée du mode (1,1,0) en fonction de Re , pour $h_0 = 1.35045$, calculé avec $N = M = 32$

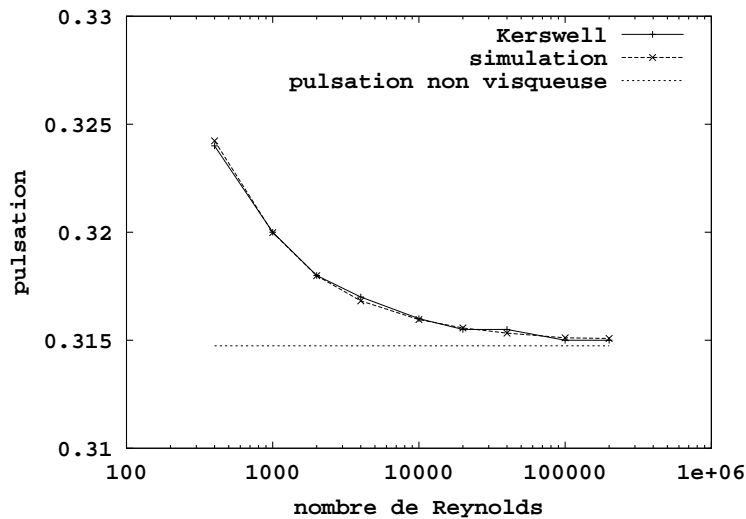


FIG. 4.13 – Calcul de la pulsation adimensionnée du mode (2,1,0) en fonction de Re , pour $h_0 = 1.35045$, calculé avec $N = M = 32$

4.5 Taux de déclin des modes inertiels

Contrairement à la pulsation, le taux de déclin d'un mode inertiel est une quantité physique qui n'a pas réellement d'équivalent direct et pertinent dans la théorie non visqueuse, à moins de considérer que la limite des taux de déclin quand $Re \rightarrow \infty$ est zéro. Le taux de déclin d'un mode propre visqueux est donné, selon notre convention, et de façon adimensionnelle, par la partie réelle des valeurs propres de l'opérateur linéarisé. Il correspond physiquement, en valeur absolue, à l'inverse du temps que met le module de l'amplitude du champ de vitesse pour être divisé par

la constante néperienne e . Il s'agit donc de l'inverse du temps de survie d'une structure de faible énergie qui est superposée initialement à l'écoulement de rotation solide. Sa détermination est également cruciale dans les situations où un mode doit être excité par un mécanisme d'instabilité. En effet, c'est la compétition entre amortissement visqueux du mode et croissance du mode, via uniquement le mécanisme destabilisant, qui est responsable du véritable taux de croissance observé.

Plusieurs modèles ont été proposés dès les années 60 pour déterminer les taux de déclin des solutions harmoniques des équations de Navier-Stokes en régime tournant, linéarisées autour de l'écoulement en rotation solide. Wedemeyer et Kudlick ont proposé (voir [52] pour une analyse comparée des deux modèles), indépendamment l'un de l'autre, des modèles analytiques pour le déclin dû à la seule présence de parois. Ils sont tous deux basés sur la séparation d'échelles entre l'écoulement principal et l'écoulement dans les couches d'Ekman et mènent donc à des taux de déclin proportionnels à $Re^{-\frac{1}{2}}$. Ils diffèrent seulement dans leur façon de simplifier géométriquement l'influence de la zone de coin, mais aboutissent cependant au même résultat dans le cas particulier de modes axisymétriques. Plus tard, Kerswell et Barenghi [52] ont été les premiers à vérifier numériquement ces modèles théoriques, par une détermination des valeurs propres de l'opérateur issu d'une expansion spectrale des solutions. Un modèle supplémentaire a été proposé par Racz et Scott, qui prend en compte l'influence combinée de la viscosité volumétrique (expliquée par le frottement instantané des couches de fluide les unes sur les autres, aboutissant à un modèle en Re^{-1}) et du frottement du fluide contre les parois. Leur modèle, en plus des prévisions quantitatives, aboutit à une loi qualitative simple : à faible nombre de Reynolds, la dissipation est dominée par le déclin volumétrique (en Re^{-1}) et à grand nombre de Reynolds la dissipation est dominée par le frottement à la paroi (en $Re^{-\frac{1}{2}}$).

Les taux de déclin de 3 modes différents de bas ordre (dont le mode géostrophique principal figure 4.14) ont été calculés pour une vaste gamme de nombres de Reynolds, puis comparés aux taux de déclin prédits par les calculs de Kerswell et Barenghi (voir les figures 4.15 et 4.16), ainsi qu'au modèle de Racz et Scott ou au modèle haut Re de Kudlick. La géométrie choisie est donc encore celle utilisé dans les références bibliographiques : $h_0 = 1.35045$. Dans chaque cas, les simulations vérifient parfaitement les modèles proposés.

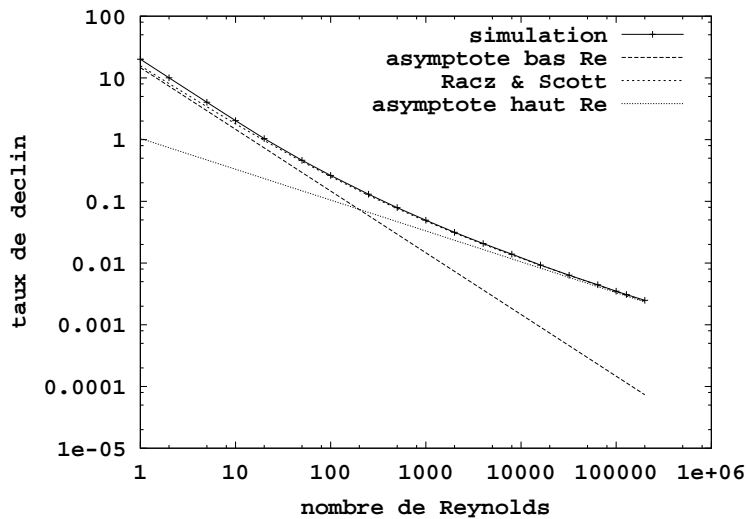


FIG. 4.14 – Calcul du taux de déclin adimensionné du mode géostrophique (1,0,0) en fonction de Re , pour $h_0 = 1.35045$, calculé avec $N = M = 32$

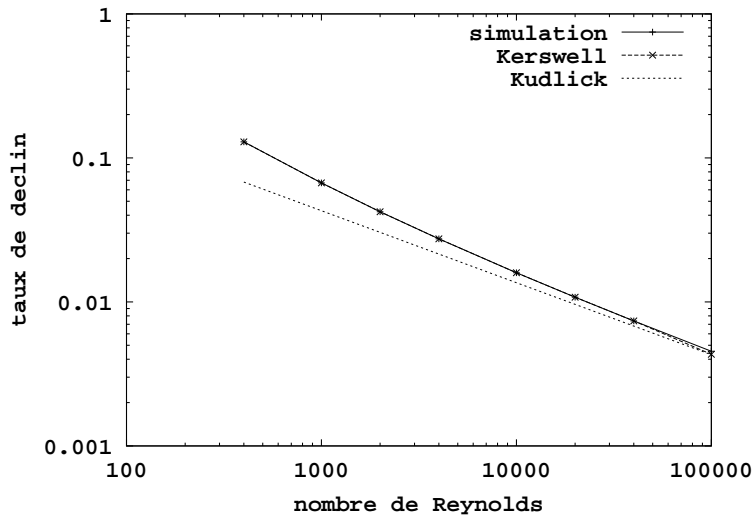


FIG. 4.15 – Calcul du taux de déclin adimensionné du mode primaire (1,1,0) en fonction de Re , pour $h_0 = 1.35045$, calculé avec $N = M = 32$

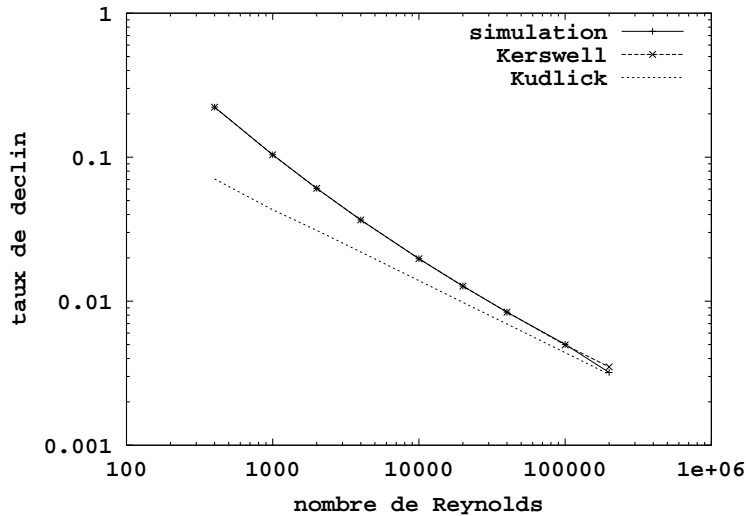


FIG. 4.16 – Calcul du taux de déclin adimensionné du mode (2,1,0) en fonction de Re , pour $h_0 = 1.35045$, calculé avec $N = M = 32$

Critère de convergence numérique Ces cas tests sont également intéressants du point de vue numérique, car ils permettent de mettre en évidence quelle est la discrétisation spectrale nécessaire pour représenter avec précision la dynamique linéaire d'un mode propre. Les calculs ont montré qu'un expansion spectrale insuffisante sous-estime les taux de déclin (en valeur absolue). Qualitativement, cela s'explique par le fait que les variations de vitesse sont négligées sur les échelles de petite taille, non résolues par les fonctions de base, et donc que la dissipation qu'elles induisent, dérivant directement des gradients de vitesse, est également négligée. En pratique, pour une gamme de nombres de Reynolds prédéterminée, cela fournit un critère sur l'expansion spectrale minimale garantissant une simulation numérique correcte de la dynamique linéaire de l'écoulement : c'est l'expansion à partir de laquelle les taux de déclin de tous les modes propres considérés vérifient la loi proposée par Racz et Scott. Ce critère devient plus exigeant lorsque l'étude porte, d'une part sur des régimes à plus grand nombre de Reynolds, d'autre part sur des modes propres d'ordre plus élevé. Pour des modes de bas ordre et un rapport d'aspect de l'ordre de l'unité, l'ensemble des simulations réalisées a mis en évidence sur l'ordre de troncature minimal N et M (dans les directions respectivement radiale et axiale) le critère suivant :

- $Re \leq 10^4 \rightarrow N = M = 16$

- $10^4 \leq Re \leq 5.10^4 \rightarrow N = M = 32$

Ces critères sont cohérents avec les estimations a priori selon lesquelles l'ordre de troncature varie en $O(Re^{\frac{1}{4}})$. Cependant ils ne caractérisent que la dynamique linéaire des modes propres, ainsi ils ne tiennent pas compte de la création d'échelles plus petites par les effets non linéaires, qui peuvent exiger une expansion spectrale accrue. De la même façon, les effets de compression peuvent être à l'origine de nouvelles échelles, ainsi les critères précédents peuvent s'avérer insuffisants.

4.6 Profils de vitesse

L'analyse des valeurs propres est intéressante car elle contient toute la dynamique linéaire de chacune des composantes du vecteur vitesse, prise indépendamment des autres. En revanche, elle ne fournit pas d'indication directe sur la structure des modes propres dans l'espace physique, cette information étant plutôt contenue dans le vecteur propre associé à une valeur propre donnée. L'analyse du champ de vitesse en un point révèle que, *hors des couches d'Ekman*, les trois composantes sont chacune déphasées de $\frac{\pi}{4}$; plus précisément les composantes radiale et axiale U_r et U_z sont en opposition de phase alors que la composante azimuthale U_θ est en quadrature de phase avec elles. Cette propriété est également vérifiée analytiquement par les modes de Kelvin du problème non visqueux. Ceci constitue donc une extension supplémentaire de la théorie non visqueuse à la théorie visqueuse. Comme précédemment, le fait que cette propriété ne soit valable que dans la zone non visqueuse de l'écoulement exclut les nombres de Reynolds trop faibles, en-dessous desquels la notion de couche d'Ekman perd sa pertinence.

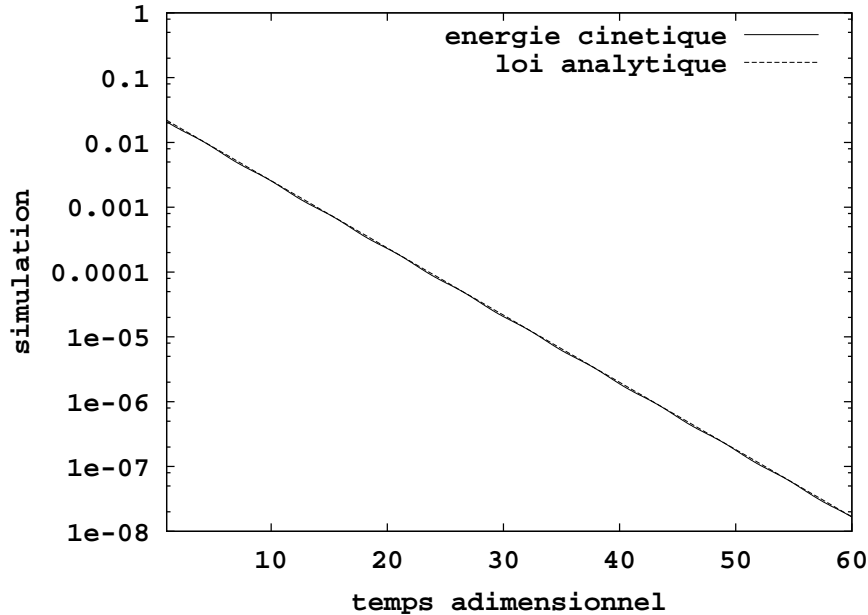


FIG. 4.17 – Energie cinétique totale dans un cas de déclin linéaire du mode (2,2,0) pour $Re = 10^3$, comparée à la loi théorique de déclin exponentiel.

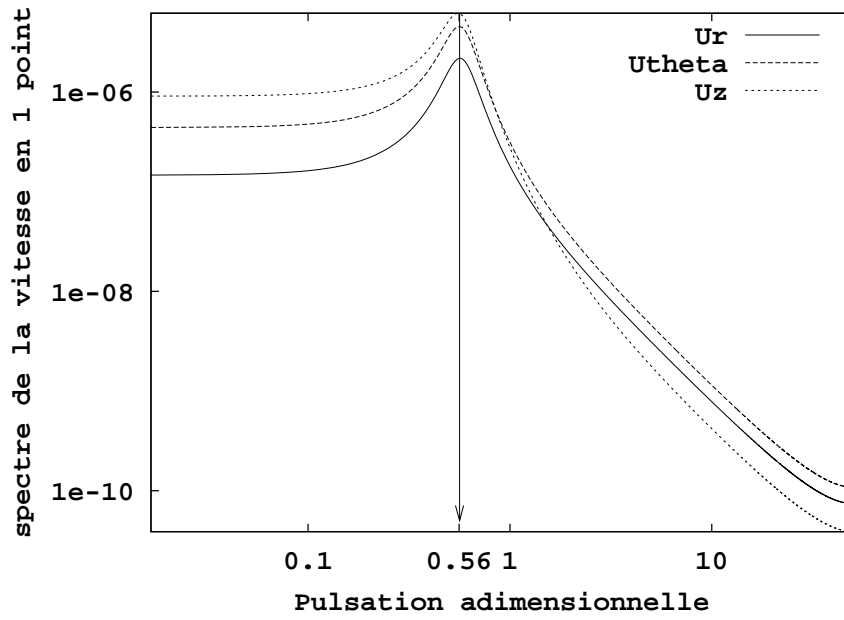


FIG. 4.18 – Spectre temporel des trois composantes de vitesses du mode $(2,2,0)$ calculées au point $(r = 0.685, z = 0.741h_0)$, $h_0 = 1.35045$, $Re = 10^3$ (Fréquence non visqueuse $\omega = 0.55269216$, fréquence mesurée $\omega = 0.56$).

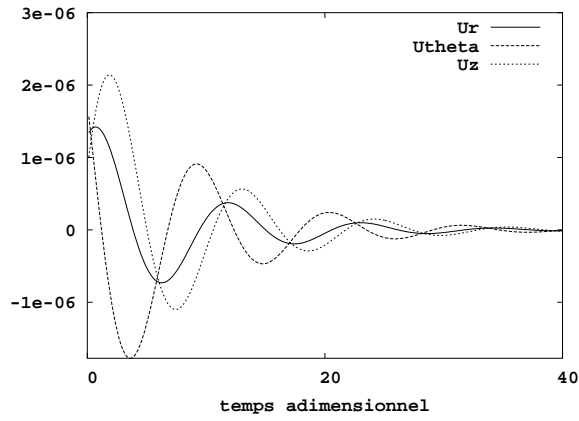


FIG. 4.19 – Déclin linéaire du mode $(2,2,0)$ au point $(r = 0.685, z = 0.741h_0)$, $h_0 = 1.35045$, $Re = 10^3$, $N = M = 16$

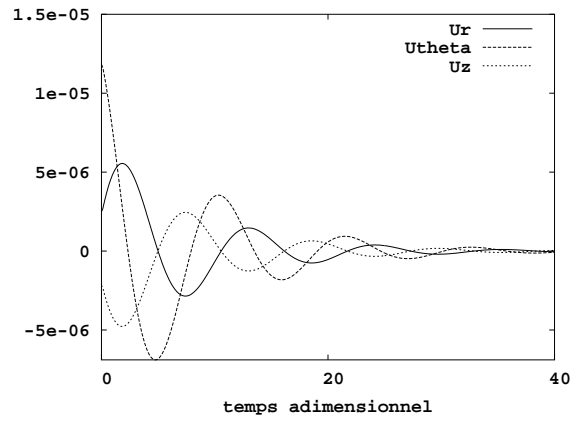


FIG. 4.20 – Déclin linéaire du mode $(2,2,0)$ au point $(r = 0.094, z = 0.741h_0)$, $h_0 = 1.35045$, $Re = 10^3$, $N = M = 16$

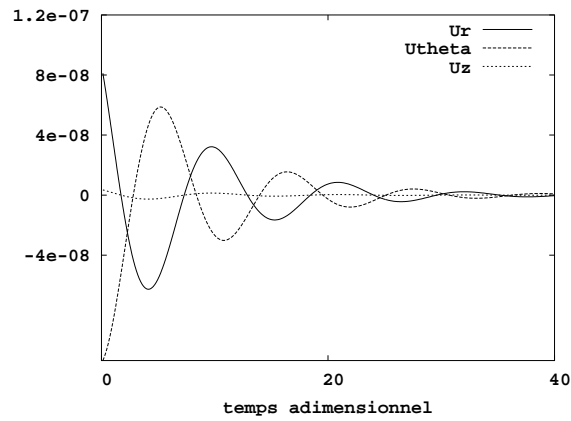


FIG. 4.21 – Déclin linéaire du mode $(2,2,0)$ proche du coin $(r = 0.9956, z = 0.0088h_0)$, $h_0 = 1.35045$, $Re = 10^3$, $N = M = 16$

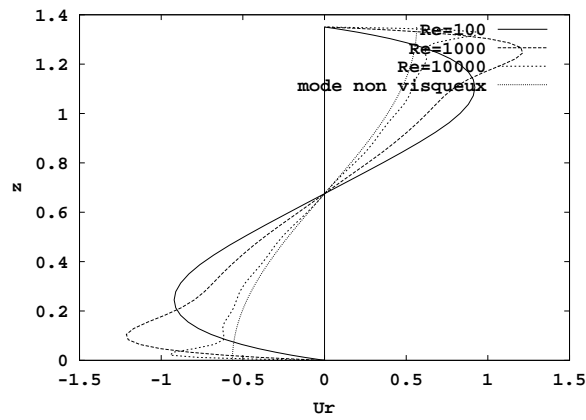


FIG. 4.22 – Evolution du profil vertical ($r = 0.4258$) de vitesse radiale U_r du mode $(1,1,0)$ en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison avec le profil du mode de Kelvin associé.

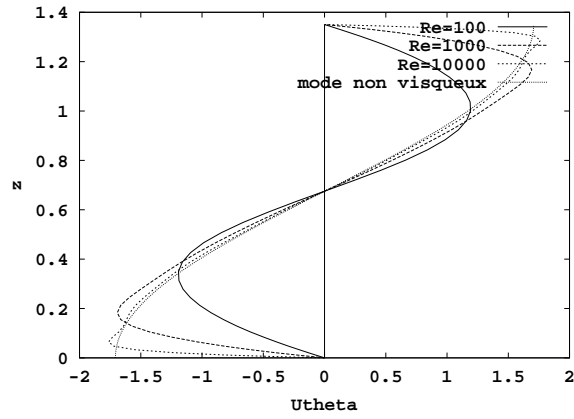


FIG. 4.23 – Evolution du profil vertical ($r = 0.4258$) de vitesse azimuthale U_θ du mode $(1,1,0)$ en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison avec le profil du mode de Kelvin associé.

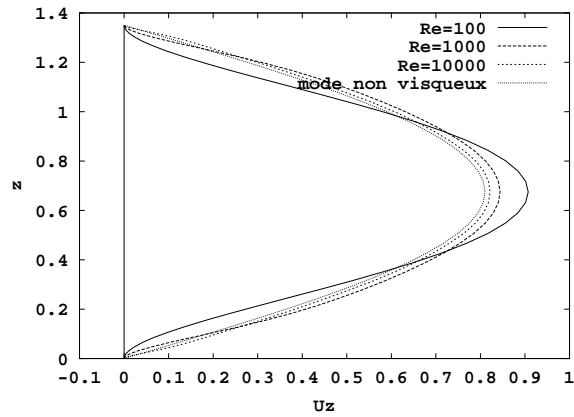


FIG. 4.24 – Evolution du profil vertical ($r = 0.4258$) de vitesse axiale U_z du mode $(1,1,0)$ en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison avec le profil du mode de Kelvin associé.

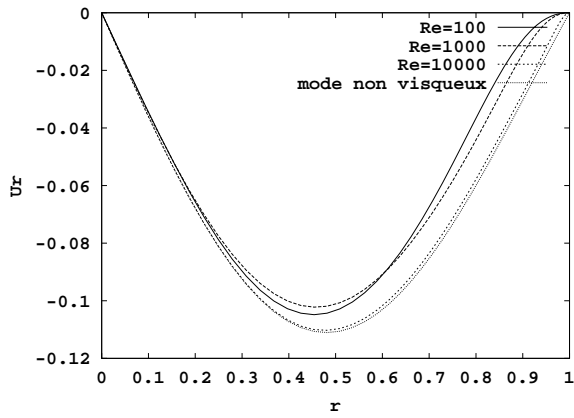


FIG. 4.25 – Evolution du profil radial ($z = 0.2321h_0$) de vitesse radiale U_r du mode $(1,1,0)$ en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison avec le profil du mode de Kelvin associé.

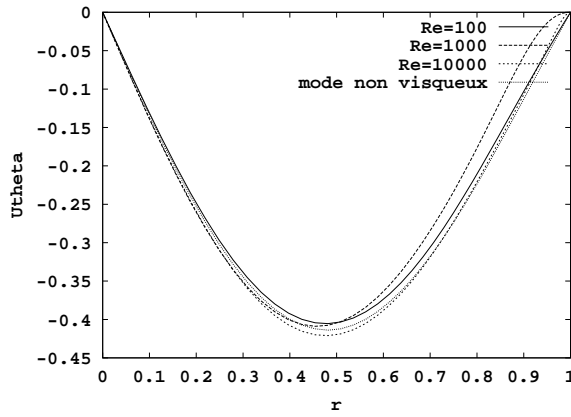


FIG. 4.26 – Evolution du profil radial ($z = 0.2321h_0$) de vitesse azimuthale U_θ du mode $(1,1,0)$ en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison avec le profil du mode de Kelvin associé.

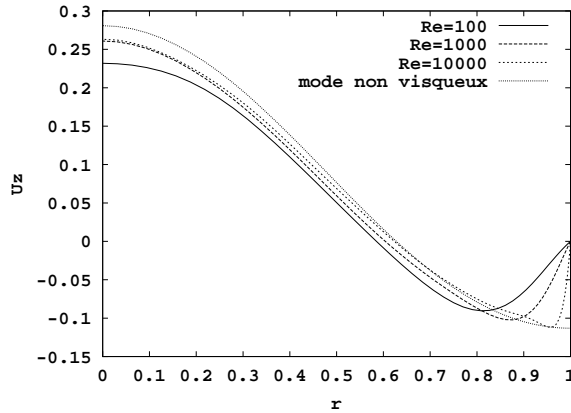


FIG. 4.27 – Evolution du profil radial ($z = 0.2321h_0$) de vitesse axiale U_z du mode $(1,1,0)$ en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison avec le profil du mode de Kelvin associé.

4.7 Caractérisation de l'écoulement dans les couches d'Ekman

Dès que le nombre de Reynolds est suffisamment élevé, l'écoulement associé à un mode propre du système visqueux peut être décomposé comme la superposition d'un écoulement non visqueux (dont la structure et les conditions aux limites sont celles du mode de Kelvin associé) et d'un écoulement de couche limite, souvent appelé écoulement secondaire en raison de son intensité, plus faible que l'écoulement non visqueux d'un ordre de grandeur $O(Re^{-\frac{1}{2}})$ [5].

Dans le cas académique, mais cependant pertinent en météorologie ou en océanographie, d'un domaine semi-infini avec un vent horizontal constant, l'écoulement secondaire, à faible nombre de Rossby, c'est-à-dire comme dans le cas présent en l'absence d'effets non linéaires, est complètement déterminé analytiquement [10]. En particulier, le vecteur vitesse présente un changement de direction au fur et à mesure que l'on pénètre à l'intérieur de la couche d'Ekman. Le même phénomène est attesté dans un milieu semi-infini si les trajectoires de l'écoulement non visqueux sont fermées, comme c'est le cas en présence d'un extremum de pression locale. Les particules présentes dans les couches d'Ekman évoluent donc selon des trajectoires spirales. L'angle que fait le vecteur vitesse total avec le champ géostrophique non visqueux dans la zone proche de la paroi solide, interprétable comme la déviation introduite dans les couches d'Ekman par la viscosité, est invariablement de $\frac{\pi}{4}$. A l'ordre dominant en puissances inverses de Re , la pression n'est pas affectée par la présence des couches d'Ekman.

4.7.1 Modes géostrophiques

Il est intéressant, pour quantifier l'écoulement de couche d'Ekman à l'intérieur du cylindre, d'étudier les effets du confinement sur la déviation du vecteur vitesse. Dans le cas d'un mode géostrophique axisymétrique, l'écoulement non visqueux s'écrit sous la forme simple $\mathbf{V} = u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$, alors que l'écoulement secondaire, sous l'hypothèse d'axisymétrie, prend une forme générique plus complexe $\mathbf{V} = u_r(r, z)\mathbf{e}_r + u_\theta(r, z)\mathbf{e}_\theta + u_z(r, z)\mathbf{e}_z$, en omettant la dépendance vis-à-vis du temps t .

Pour une géométrie fixée ($h_0 = 1.35045$), l'hodographe des vitesses du mode géostrophique $(1,0,0)$ a été représenté près de la couche d'Ekman correspondant à $z = 0$, pour plusieurs valeurs représentatives du nombre de Reynolds (voir figure 4.28). Par symétrie de la distribution des vitesses, le même diagramme est également valide pour l'écoulement dans la couche en $z = h_0$. Les vitesses loin de la zone visqueuse ont été ramenées à l'unité afin d'apprécier exclusivement la géométrie du profil. Il ressort de cette comparaison que, malgré l'effet du confinement, l'hodographe préserve la forme classique de spirale qui caractérise l'écoulement en milieu semi-infini. Cependant, dans ce dernier cas, l'effet de la viscosité sur le champ de vitesses non géostrophique décroît avec l'altitude pour tendre vers 0 alors que dans le cas du cylindre, sa décroissance semble gênée par la présence d'une autre paroi en vis-à-vis. Ce point se caractérise par une vitesse non azimuthale résiduelle au centre de l'écoulement, d'autant plus importante que Re est faible. Cette vitesse résiduelle, d'ordre $O(Re^{-\frac{1}{2}})$, peut s'interpréter par le fait que les points de mesure subissent encore l'influence de la couche d'Ekman, voire, pour être plus précis, l'influence combinée des 2 couches associées respectivement aux parois $z = 0$ et $z = h_0$. Pour les cas étudiés, l'angle que fait la spirale à l'origine (la déviation de l'écoulement non visqueux par la viscosité) est aussi de l'ordre de $\frac{\pi}{4}$, cependant une mesure précise de cet angle à la paroi pour plusieurs valeurs de Re révèle que $\frac{\pi}{4}$ n'est en fait qu'une valeur limite *par excès* correspondant au cas $Re \rightarrow \infty$ (voir figure 4.29). Cependant, ces effets de bas Re sont moins à interpréter comme des effets de forte viscosité relative que comme des effets de confinement, la grandeur pertinente étant plutôt l'épaisseur relative de la couche d'Ekman par rapport à la demi-hauteur du cylindre (dont il a été vérifié qu'elle varie effectivement en $Re^{-\frac{1}{2}}$).

Pour la même géométrie, l'hodographe des vitesses a été tracé sur la figure 4.30 dans la zone correspondant à la paroi $r = 1$. Ce cas diffère du précédent car la paroi est désormais parallèle à l'axe de rotation du cylindre. Il s'agit là priori d'un cas singulier où l'analyse théorique en milieu semi-infini prédit une couche d'Ekman d'épaisseur infinie. Les mesures effectuées montrent un comportement régulier du champ de vitesses près de la paroi, sans mettre en évidence une zone de forts gradients assimilable à une couche d'Ekman. Ceci confirme le caractère singulier de l'écoulement face à la paroi verticale, prédit analytiquement. Une mesure plus fine de l'angle formé entre les composantes azimuthale et axiale de la vitesse en $r = 1$ montre (voir figure 4.31) en revanche que cet angle tend rapidement vers 0 (c'est-à-dire un champ de vitesse purement azimuthal, à l'image du mode de Kelvin associé) lorsque Re tend vers l'infini, au lieu de la valeur $\frac{\pi}{4}$ attendue pour une autre orientation de la paroi par rapport à l'axe de rotation.

La convergence ou la divergence, au niveau des couches d'Ekman, des trajectoires spirales vers le centre de l'écoulement implique un flux de matière parallèle à la paroi qui doit nécessairement être équilibré par un écoulement dans la direction orthogonale à la paroi, afin de ne pas violer l'incompressibilité du fluide. Cet écoulement, qui induit en milieu fermé une recirculation faisant partie intégrante de l'écoulement secondaire puisqu'il n'est dû aux effets visqueux, donne lieu au phénomène de *pompage d'Ekman*. Il s'agit d'un échange de matière entre les couches d'Ekman et le reste de l'écoulement. L'écoulement vertical associé au pompage est une mesure indirecte de la déviation des lignes de courant circulaires par la présence de parois. La superposition de ces différents mouvements donne ainsi aux trajectoires fluides proche de la paroi une allure hélicale.

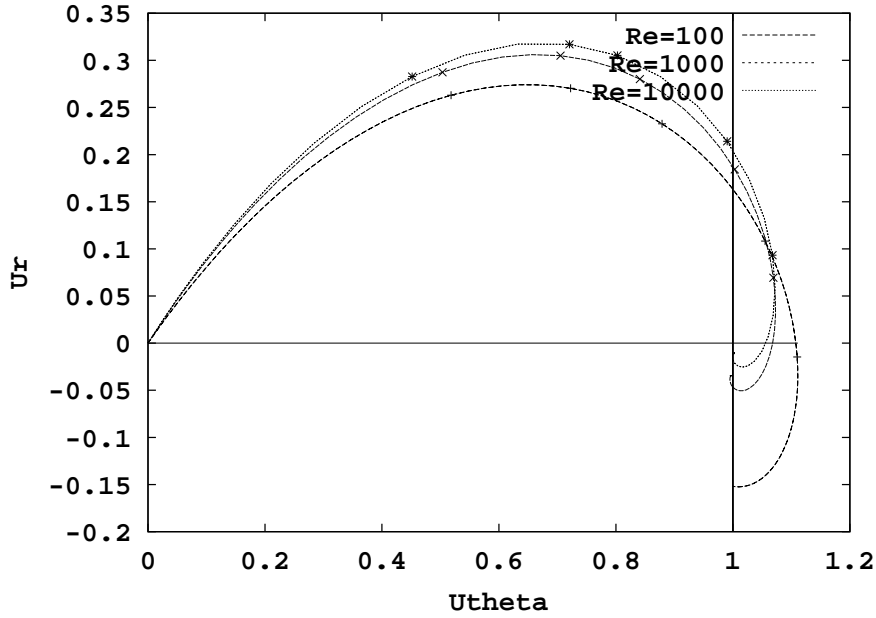


FIG. 4.28 – Hodographe des vitesses (U_θ, U_r) proche de la paroi $z=0$ ($r = 0.25$), pour le mode géostrophique $(1,0,0)$ en fonction du nombre de Reynolds. Les vitesses sont calées sur la vitesse azimuthale au centre du cylindre ($z = \frac{h_0}{2}$). les différents points correspondent à différentes valeurs du vecteur vitesse pour $z\sqrt{\frac{Re}{2}} = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$.

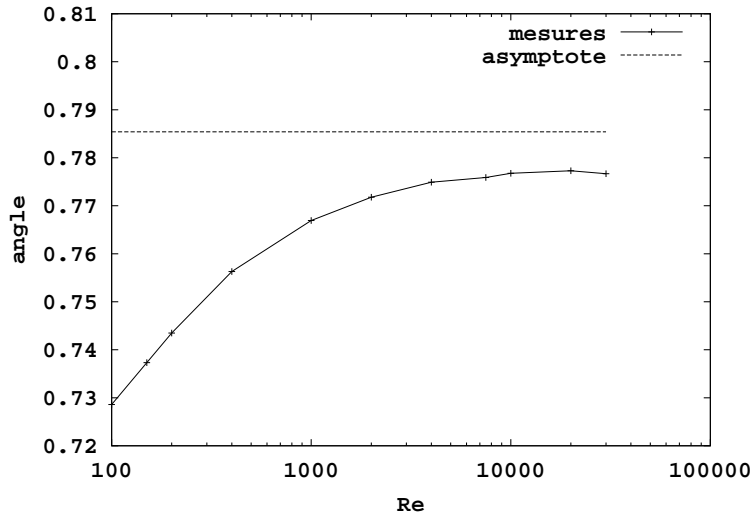


FIG. 4.29 – Angle (en radians) formé entre les composantes azimuthale et radiale du vecteur vitesse proche de la paroi $z=0$ ($r = 0.25$), pour le mode géostrophique $(1,0,0)$, en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison avec la valeur $\frac{\pi}{4}$ correspondant au cas d'un milieu infini.

Une quantité scalaire qui paraît appropriée à la mesure quantitative de ce phénomène est donc l'hélicité $H = \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{V})$. En l'absence de viscosité, un mode géostrophique, par sa structure en $u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$, possède une vorticité portée par \mathbf{e}_z , ce qui conduit à une hélicité identiquement nulle. La représentation des contours d'iso-hélicité dans l'écoulement associé au mode géostrophique visqueux $(1,0,0)$ sur la figure 4.32 met en évidence des zones d'hélicité de signes alternés. Ces zones d'hélicité marquées ne sont pas localisées seulement près des parois $z = 0$ et $z = h_0$, mais également dans tout le domaine, avec cependant de plus forts gradients près de ces deux parois. Ce résultat indique que le caractère hélical de l'écoulement total, manifestement dû à

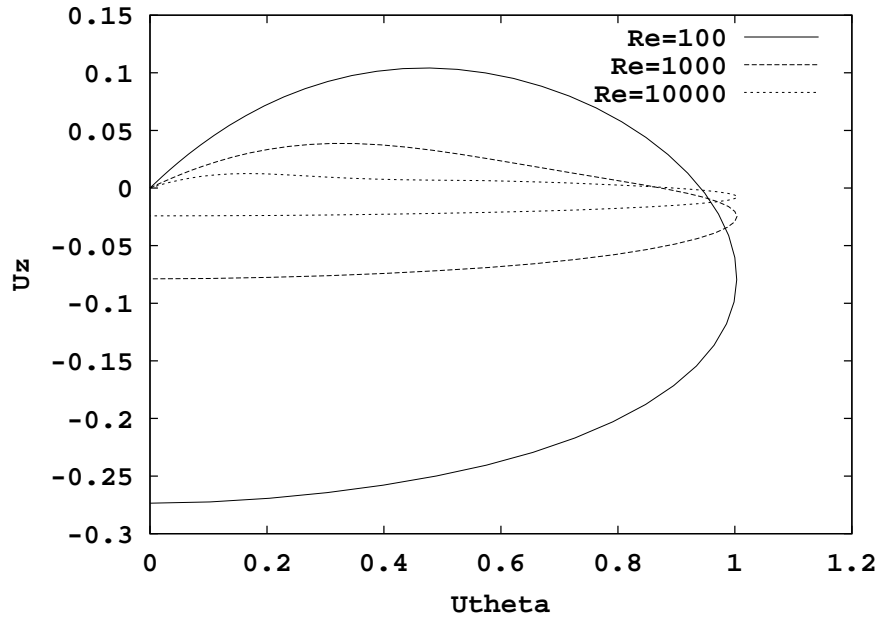


FIG. 4.30 – Hodographe des vitesses (U_θ, U_z) proche de la paroi $r=1$ ($r = 0.245$), pour le mode géostrophique $(1,0,0)$ en fonction du nombre de Reynolds. Les vitesses sont calées sur la vitesse azimuthale au centre du cylindre ($r = \frac{1}{2}$).

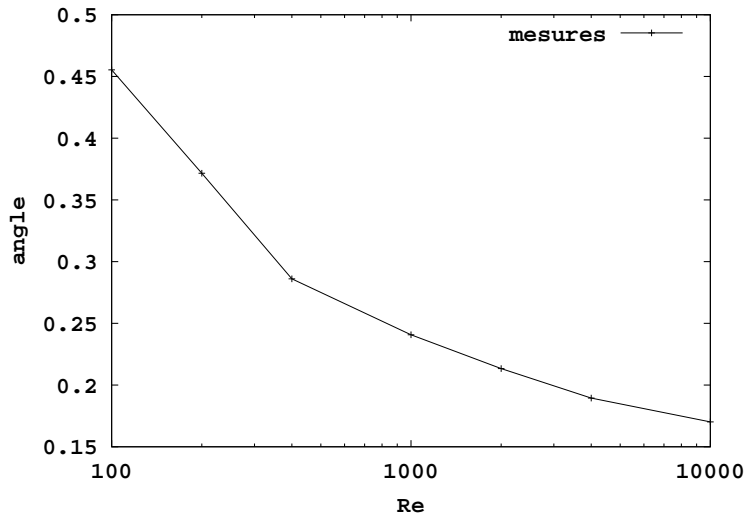


FIG. 4.31 – Angle (en radians) formé entre les composantes azimuthale et axiale du vecteur vitesse proche de la paroi $r=1$ ($z = 0.245h_0$), pour le mode géostrophique $(1,0,0)$, en fonction du nombre de Reynolds.

l'écoulement de recirculation induit par la viscosité, n'est pas un phénomène confiné dans la seule région de proche-paroi. Près de la paroi $z = 0$, l'hélicité positive est associée à un écoulement hors de la couche d'Ekman, alors que l'hélicité négative, concentrée seulement près de l'axe et de la paroi inférieure du cylindre, est associée à un flux rentrant. Près de la paroi $z = h_0$, par symétrie, c'est l'hélicité négative qui est associée à un pompage du fluide hors de la couche d'Ekman. On peut remarquer qu'aucun phénomène de pompage n'est repéré au niveau de la paroi $r = 1$, ce qui souligne encore la singularité de l'orientation de la paroi latérale du cylindre par rapport à l'axe de rotation de l'ensemble.

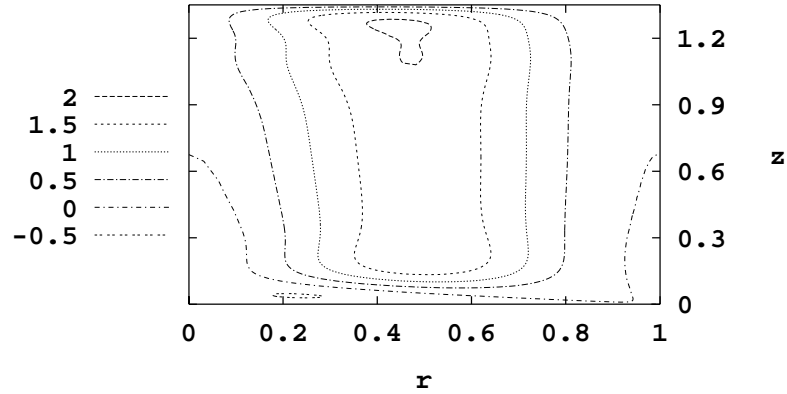


FIG. 4.32 – Isocontours de l’helicité totale du mode géostrophique (1,0,0), $Re=200$

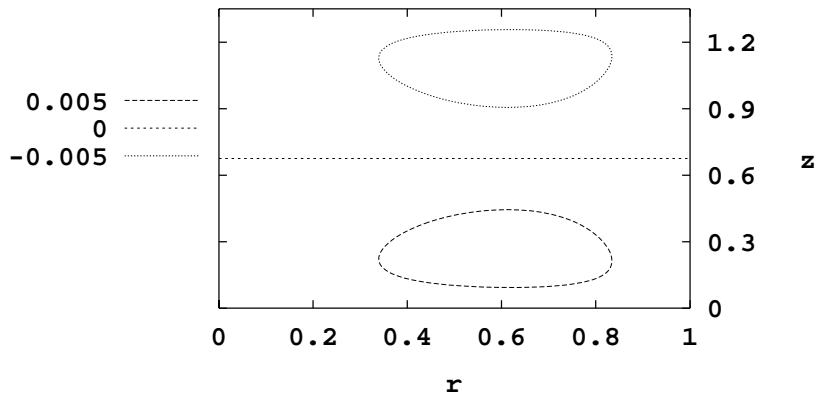


FIG. 4.33 – Isocontours de la fonction de courant du mode géostrophique (1,0,0), $Re=200$

4.7.2 Mode axisymétrique primaire

Dans le cas du mode axisymétrique, l’analyse de la dynamique des couches d’Ekman est plus délicate que dans le cas des modes géostrophiques, car le mode lui-même n’est plus stationnaire. On peut établir de façon analytique que pour le mode non visqueux associé, l’angle entre la composante horizontale du vecteur vitesse (c’est-à-dire $\mathbf{V}_\perp = V_r \mathbf{e}_r + V_\theta \mathbf{e}_\theta$) et les axes ne varie en fonction ni de r , ni de z , mais seulement en fonction de t , à la pulsation du mode lui-même. On peut caractériser l’influence de la viscosité sur ce mode propre en mettant en évidence une déviation du vecteur vitesse dans les couches d’Ekman. Pour la couche d’Ekman proche de la paroi $z = 0$, on a représenté sur la figure 4.35 l’angle que fait \mathbf{V}_\perp avec la direction azimuthale en fonction du temps adimensionnel, pour deux altitudes différentes, la première correspondant

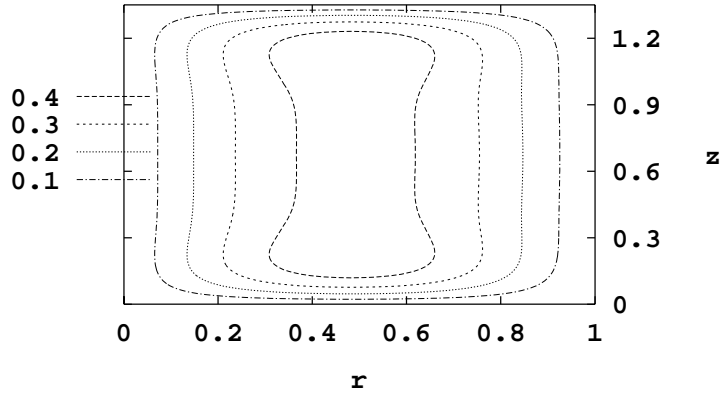


FIG. 4.34 – Isocontours de la vitesse azimuthale du mode géostrophique $(1,0,0)$, $Re=200$

à l'angle à la paroi alors que l'autre correspond à l'écoulement à mi-hauteur du cylindre. Les mesures, effectuées pour $Re = 10^3$, mettent en évidence un décalage de l'écoulement dans la couche limite par rapport à l'écoulement au centre, qui peut être qualifié de non visqueux pour les nombres de Reynolds élevés. les deux champs de vitesses évoluent avec la même fréquence, mais il existe un déphasage entre eux. Une mesure du taux de rotation angulaire des composantes horizontales du mode permet d'établir que c'est ici l'écoulement de couche d'Ekman qui est en retard de phase avec l'écoulement non visqueux. Ceci confirme le rôle résistif de la viscosité dans les couches d'Ekman.

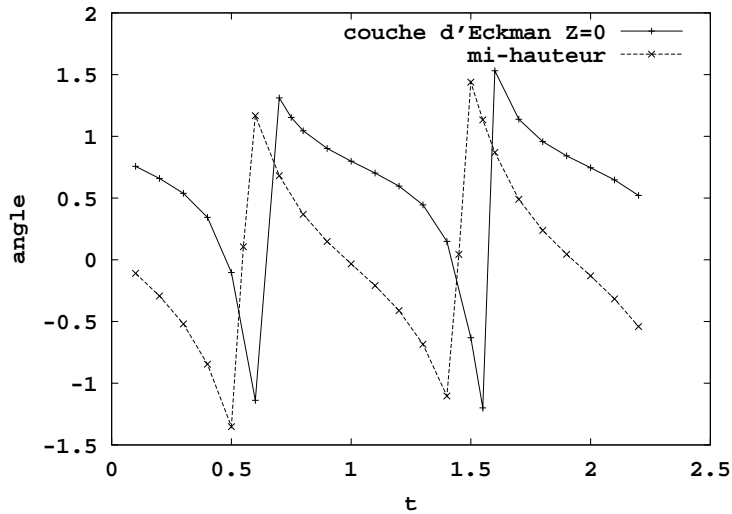


FIG. 4.35 – Angle (en radians) formé entre la composante horizontale du vecteur vitesse et la direction horizontale en 2 points ($z = 0.245h_0$) : proche de la paroi $z=0$, et au centre de l'écoulement ($z = \frac{h_0}{2}$) pour le mode primaire $(1,1,0)$ à $Re = 10^3$.

Les mesures de l'hodographe des vitesses à différents instants sur la figure 4.36 montrent également que, même en omettant le caractère instationnaire du mode, le terme de *spirale* d'Ekman ne s'applique systématiquement dans le cas d'un écoulement non visqueux non géostrophique.

Le déphasage mentionné précédemment, induit par la viscosité, se visualise graphiquement par l'angle formé entre les deux directions qui définissent les lobes de l'hodographe au niveau de l'origine (l'origine correspond en effet à la fois au champ de vitesse nul en $z = 0$ et en $z = \frac{h_0}{2}$). Cet angle est théoriquement nul pour un mode sans viscosité.

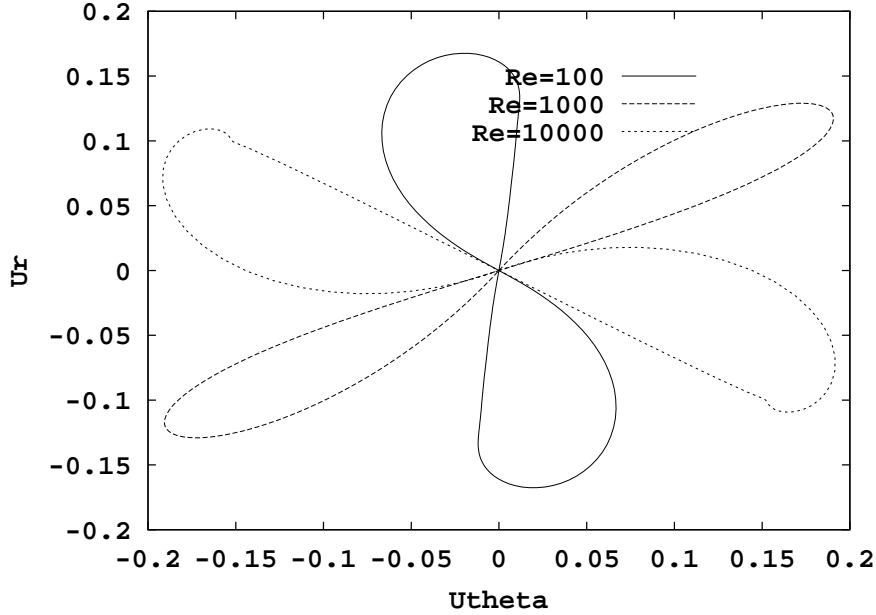


FIG. 4.36 – Hodographe des vitesses (U_θ, U_r) proche de la paroi $z=0$ ($r = 0.25$), pour le mode primaire $(1,1,0)$ pour différents nombres de Reynolds. Les hodographes sont représentés à des temps différents par souci de clarté.

4.8 Dynamique non-linéaire

Les modes inertiels présentés précédemment ont été introduits dans un contexte linéaire, on peut les interpréter physiquement comme la réponse du système visqueux en rotation à une excitation de petite énergie. Or ces modes propres du système linéarisé ne sont pas fonctions propres de l'opérateur non linéarisé puisque qu'un calcul numérique du terme convectif $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ ne donne, pour les modes testés, généralement jamais identiquement une valeur nulle. Sans prétendre à une étude paramétrique exhaustive du phénomène de déclin non linéaire en rotation, on peut toutefois examiner, dans le cadre de perturbations de taille finie, la dynamique du déclin de l'un de ces modes afin de la comparer au déclin exponentiel prédit par la théorie linéaire.

Un nombre adimensionnel exprimant le rapport des ordres de grandeur des termes non-linéaires par rapport aux autres phénomènes en jeu, ici la force de Coriolis, est le nombre de Rossby, que l'on peut définir par : $Ro = \frac{U}{2\Omega a}$ [9]. Dans cette définition, Ω est la vitesse angulaire du cylindre, a est son rayon, et U représente un ordre de grandeur de la vitesse du fluide à l'intérieur du cylindre en rotation, exprimée dans le référentiel tournant. Le choix de la caractérisation de U n'est pas univoque, cependant il paraît raisonnable de choisir $U = \sqrt{2E_c(t)}$ où E_c représente l'énergie cinétique totale de l'écoulement. Dans un cas de déclin, ce choix implique donc une décroissance de Ro vis-à-vis du temps. Ainsi le paramètre pertinent dans cette étude est plutôt la valeur initiale du nombre de Rossby au temps $t = 0$.

Le calcul a été initialisé avec $Ro = 0.916$ et $Re = 5.10^3$ pour le mode vertical $(1,4,0)$. L'initialisation est réalisée à partir du mode propre en question, tel qu'il est calculé à partir du problème aux valeurs propres. On notera que pour le nombre de Reynolds choisi, le mode géostrophique

(1,0,0) est le mode inertiel ayant le plus faible taux de déclin (en valeur absolue) de tout le spectre. A titre de comparaison, $\delta^{(1,0,0)} = -1,878.10^{-2}$ alors que $\delta^{(1,4,0)} = -3,117.10^{-2}$. Le mode (1,0,0) correspond donc, dans le cadre du déclin linéaire, à la structure vorticale qui persiste le plus dans le temps une fois que toutes les autres contributions modales ont décliné. Autrement dit, c'est la structure dont le temps de déclin linéaire est le plus long. La représentation de l'énergie cinétique totale de l'écoulement sur la figure montre que, dès $t = 0$, la dynamique non linéaire de l'écoulement diffère fortement de sa dynamique linéaire. La non linéarité redistribue l'énergie cinétique initiale parmi tous les modes inertiels, si bien que des composantes modales non excitées initialement se voient injecter de l'énergie. On constate que lorsque l'énergie cinétique totale atteint un niveau suffisamment faible, correspondant à un ordre de grandeur de $Ro = 2,5.10^{-2}$, sa décroissance devient d'une part purement exponentielle, signe que le régime linéaire est atteint ; d'autre part, la décroissance de l'énergie est moins rapide qu'au stade initial. Une interpolation numérique linéaire montre qu'à partir de ce temps-là, l'énergie décroît comme $(\exp(-1,862.10^{-2}t))^2$. On identifie donc à son temps de déclin le mode géostrophique (1,0,0). Ce résultat, observé également numériquement pour d'autres modes inertiels, permet de postuler le mécanisme suivant : à partir d'une excitation initiale d'amplitude finie, l'énergie est redistribuée par le terme non linéaire sur différentes composantes modales, pendant que le déclin de l'énergie totale est assuré par la dissipation visqueuse. Lorsque ce déclin amène l'écoulement dans des conditions telles que $Ro \ll 1$, la dynamique devient linéaire, chaque mode inertiel déclinant de façon exponentielle avec son propre taux de déclin, les structures persistant asymptotiquement en temps étant celles possédant (en valeur absolue) le plus faible taux de déclin . Comme le taux de déclin d'un mode inertiel est qualitativement reliée à sa topologie, les structures spatiales qui émergent dans l'écoulement sont celles qui présentent la distribution vorticale la plus simple (voir figure 4.38).

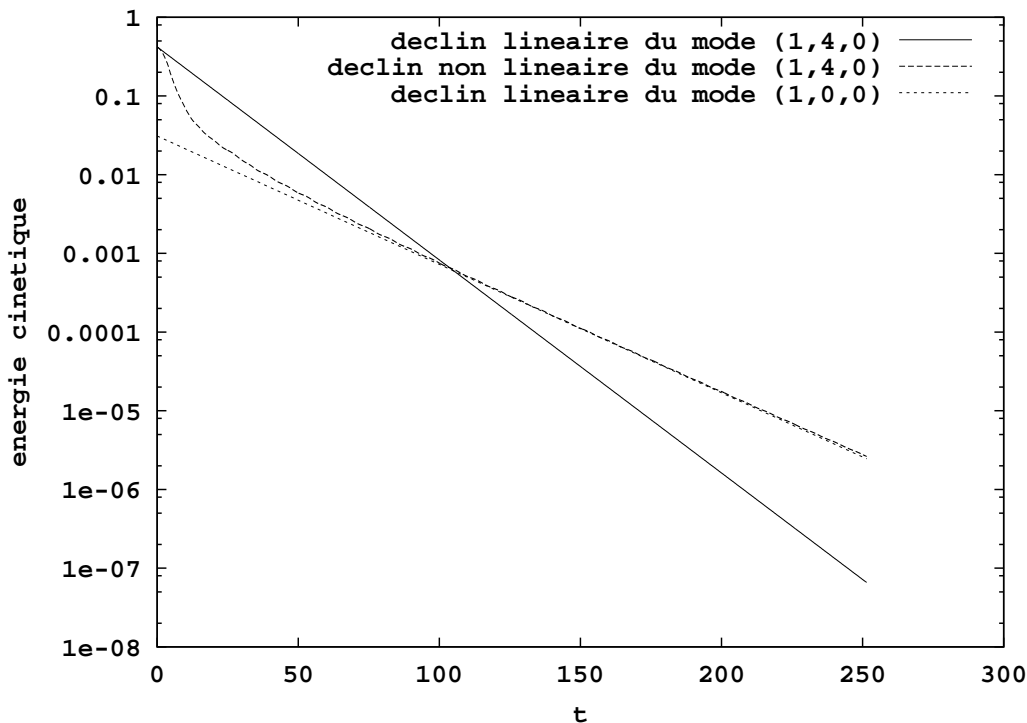


FIG. 4.37 – Déclin non linéaire de l'énergie cinétique totale du mode vertical (1,4,0) en fonction du temps adimensionnel, comparé au déclin linéaire du même mode et à celui du mode géostrophique (1,0,0).

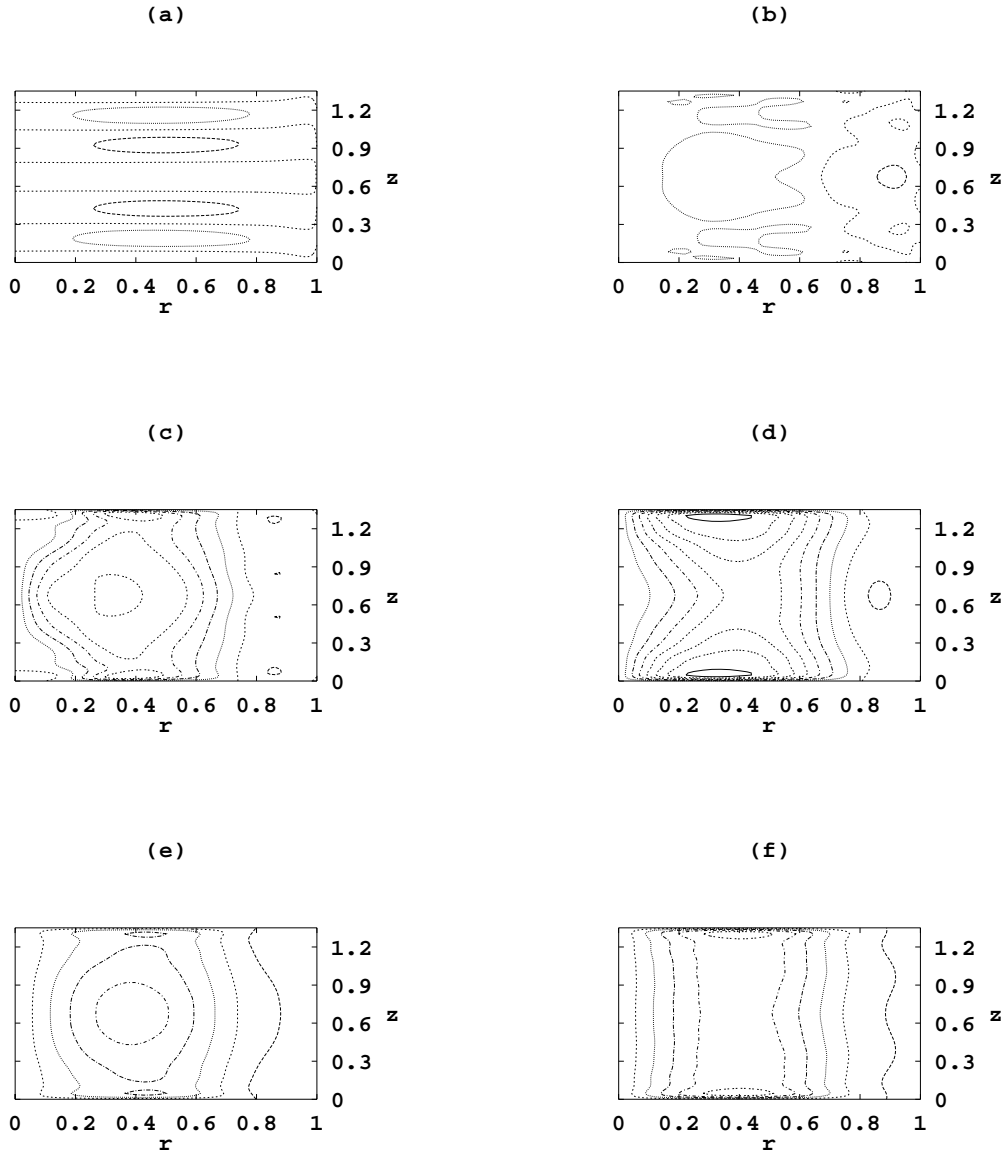


FIG. 4.38 – Evolution temporelle des isocontours de la vitesse azimuthale dans un plan méridien, $Re = 5.10^3$, $Ro_{(t=0)} = 0.916$, initialisation par le mode vertical $(1,4,0)$. Les tracés sont réalisés au bout de (a) : 0, (b) : 3, (c) : 6, (d) : 9, (e) : 12 et (f) : 15 révolutions du cylindre.

4.9 Conclusion

Ce chapitre est une exploration numérique de la dynamique des modes inertiels axisymétriques dans le cas d'une rotation pure. Une attention particulière est portée sur l'influence du nombre de Reynolds (basé sur la vitesse de rotation) sur les modes inertiels *visqueux* du système, par comparaison avec le cas limite des modes inertiels *non visqueux* ($Re \rightarrow \infty$), qui sont justement les modes propres utilisés par Racz et Scott dans l'étude analytique du système en rotation en présence d'un forçage périodique (voir [28] ou le chapitre 2). Instinctivement, la base de fonctions indiquée pour l'analyse du phénomène d'instabilité serait, en présence de viscosité, les modes inertiels visqueux. Cependant leur non-orthogonalité ainsi que l'absence d'expression analytique explicite rend l'analyse en modes propres non visqueux plus adaptée à l'étude analytique [28]. Une des difficultés de l'utilisation des modes non visqueux dans la théorie est qu'elle nécessite

des modèles de nature asymptotique, en particulier pour la détermination des taux de déclin et des pulsations modales qui sont sensibles à l'influence de la viscosité. Les résultats présentés dans ce chapitre valident l'utilisation des modèles proposés dans [28] dans la gamme des nombres de Reynolds étudiés dans les chapitres suivants (de l'ordre de 10^4). Ces résultats sont en bon accord avec les travaux existant, notamment les estimations d'ordre de grandeur de Greenspan [5] et les simulations numériques effectuées par Kerswell et Barenghi [52].

La structure pariétale de l'écoulement associé à ces modes inertiels a été examinée en détail dans le cas de modes géostrophiques ou instationnaires. L'hodographe des vitesses présente une analogie évidente avec les spirales d'Ekman connues dans le cas d'un écoulement en rotation non confiné.

Enfin, une analyse détaillée de la structure du mode inertiel $(1,1,0)$ a été réalisée. Ces résultats seront réutilisés dans le chapitre 6, dans lequel on cherchera, par un mécanisme de forçage paramétrique, à exciter le même mode inertiel.

Chapitre 5

Etude numérique de l'état de base

Ce chapitre aborde l'étude numérique de l'état de base de l'écoulement de gaz dans un cylindre en rotation uniforme soumis à une compression périodique. On montre l'existence d'un état de base visqueux, périodique avec la pulsation du piston ω_0 . Deux cas différents sont mis en évidence en fonction de la valeur de ω_0 . Lorsque $\omega_0 > 1$, l'écoulement ne diffère de l'état de base non visqueux que dans la zone de proche paroi. Dans le cas $\omega_0 < 1$, des ondes inertielles peuvent être directement excitées par le mouvement du piston. La différence entre état de base visqueux et non visqueux est alors localisée dans les couches limites ainsi que dans des zones de cisaillement internes.

5.1 Complémentarité de l'étude numérique

5.1.1 Etat de base en l'absence de viscosité

La caractérisation détaillée de l'état de base du système est fondamentale puisque c'est cet écoulement même dont on souhaite étudier ultérieurement la stabilité. Or cet écoulement de base, introduit dans le chapitre 2 comme étant l'écoulement oscillant avec la pulsation du piston, n'est connu que par le biais d'estimations *a priori*. L'approche analytique [28] n'en fournit une description précise qu'en l'absence de viscosité (voir 2.16, 2.17 et 2.18) : l'écoulement non visqueux est décrit dans le repère tournant comme étant purement axial, affine vis-à-vis de la coordonnée axiale, périodique avec la période du piston, et de vorticit   nulle. Il s'agit en fait d'un   coulement de rotation en bloc auquel se surperpose une oscillation axiale du fluide, induite par le mouvement du piston. Or l'adjonction de viscosit   au probl  me introduit un m  canisme stabilisant dans le bilan des forces en jeu ; ainsi il existe un r  gime de fonctionnement pour lequel cet   tat de base est stable, comme l'attestent les observations exp  rimentales de Graftieaux [34]. La description pr  cise de cet   tat de base, avec prise en compte de la viscosit  , poss  de donc une pertinence physique particuli  re, puisqu'il est ainsi observable d  s que le point de fonctionnement du syst  me est bien choisi.

5.1.2 Ordre de grandeur de l'  coulement de base visqueux

L'analyse th  orique du ph  nom  ne d'instabilit   se base cependant sur une connaissance *a priori* des ordres de grandeur de cet   coulement de base corrig   par la viscosit  . Racz et Scott [28] se placent dans le cadre d'une course du piston ϵ asymptotiquement petite et d'un nombre de Reynolds (bas   sur la vitesse de rotation) asymptotiquement grand, les deux   tant reli  s par la condition $\epsilon = O(Re^{-\frac{1}{2}})$. A l'ordre o   est poussé leur analyse en termes des puissances croissantes de ϵ , le champ de base est d  crit par la donné de l'  tat de base non visqueux. Bien que les valeurs de ϵ ne soient en pratique pas n  cessairement petites, cette hypoth  se simplificatrice permet de n  gliger les interactions entre l'  coulement de base et les perturbations dans

la théorie d'instabilité linéaire. Elle se base sur l'estimation que l'écoulement de base visqueux diffère seulement *localement* de l'écoulement non visqueux, principalement par un écoulement de couche limite où la vitesse est d'ordre $O(\epsilon)$ sur une zone d'épaisseur $O(Re^{-\frac{1}{2}}) = O(\epsilon)$. A ce premier écoulement est associé un écoulement secondaire d'intensité $O(\epsilon^2)$, correspondant au pompage d'Ekman entre les couches limites et le reste du domaine. Ils notent aussi l'éventualité de phénomènes vorticaux rattachés à la présence des coins. La zone de coin proche du piston est en effet caractérisée par une discontinuité de la vitesse axiale qui induit, de façon périodique, une source ponctuelle singulière de vorticité dans la direction azimuthale. Cette source de vorticité peut être à l'origine de structures d coll es le long des parois et d'éjections de tourbillons hors des zones de coin [53], ce qui aurait une influence quantitative (non prédite par l'analyse) sur le processus de sélection modale, ainsi que sur le profil de vitesses de l'écoulement, que l'on se place dans un régime stable ou instable.

Les mesures expérimentales de Graftieaux [36] [34], effectu es dans le cas $\omega_0 > 1$ à l'aide d'un système de mesures PIV, mettent clairement en évidence la structure prédite par Raczy et Scott pour le champ des vitesses dans la zone centrale du cylindre, confirmant en première approche le caractère uniquement pariétal de l'action de la viscosité. En revanche, la mesure des vitesses dans les coins du cylindre ainsi que dans toute zone de proche-paroi est rendue expérimentalement difficile par les réflexions optiques sur les parois en verre. Graftieaux indique que ses mesures ne sont pertinentes que sur l'intervalle restreint $r \in [0 : 0.9]$, $Z \in [0.25 : 0.85]$, lors de mesures avec une course de l'ordre de 13% (la valeur choisie pour ϵ n'est d'ailleurs pas asymptotiquement petite). Les estimations théoriques de la taille de la couche limite, d'ordre $O(\epsilon)$ (correspondant dimensionnellement, pour $a = 70mm$, à une épaisseur de l'ordre du centimètre), indiquent que la précision expérimentale est donc insuffisante pour étudier la structure de l'écoulement pariétal. Graftieaux note une légère augmentation de la vitesse en s'approchant du coin proche du piston. Il montre également une augmentation des fluctuations statistiques des mesures (d'un facteur deux pour l'écart-type), de l'ordre de 3% par rapport à la vitesse maximale, lorsqu'il s'approche des parois latérales du cylindre, indépendamment de la valeur de Z . Les résultats expérimentaux confirment donc le caractère non visqueux de l'écoulement prédit par la théorie à une distance $O(\epsilon)$ de la paroi, sans toutefois éclairer davantage notre connaissance de l'écoulement secondaire induit par la viscosité. La simulation numérique directe, associ e à une méthode précise de calcul dans les zones de coin permettant de prendre en compte les singularités pr sent es dans le chapitre 4, reste alors la meilleure alternative pour vérifier quantitativement les hypothèses formul es par Raczy et Scott, et ainsi de vérifier leur influence sur la dynamique des modes inertiels instables sous l'hypothèse d'axisymétrie.

5.1.3 Champ résolu par le schéma

Dans le système de coordonnées adopté pour l'écriture de l'algorithme (2.20), l'état de base non visqueux du système correspond à un écoulement nul. Le champ résolu par le schéma numérique est donc également l'écoulement noté \mathbf{U} dans [28], qui représente la différence entre l'état de base réel du système et l'état de base calculé en l'absence de viscosité. Cet écoulement \mathbf{U} possède des conditions aux limites nulles sur les bords du domaine sauf sur la paroi ($r = 1$).

5.2 Périodicité de l'écoulement

La première information pertinente sur l'état de base réel du système concerne sa dynamique temporelle : existe-t-il un écoulement périodique, et si oui sa fréquence fondamentale est-elle celle du forçage ou est-elle différente ? Afin de répondre à cette question, des simulations numériques ont été effectu es, à l'aide du code réalisé, pour différentes valeurs du forçage ϵ , et pour un nombre de Reynolds ($Re = 2.10^3$) auxquels l'analyse ainsi que les résultats expérimentaux prédisent la stabilité inconditionnelle de l'écoulement de base. La condition initiale du calcul

numérique correspond dans chaque cas à un champ de vitesse nul, afin de rendre la simulation plus proche des conditions expérimentales. Dans chaque cas, l'écoulement observé correspond, conformément aux prévisions, à un état oscillatoire du champ des vitesses et de l'énergie, attesté en tout point du domaine de calcul (voir figure 5.1). Le champ de vitesses, contrairement au cas test [51] présenté à la fin du chapitre 4, possède bien 3 composantes non nulles, ce qui est un effet direct de la déviation de l'écoulement par la force de Coriolis. Au-delà d'un temps transitoire d'environ 20 cycles du piston, on constate dans tous les cas que chaque composante du champ des vitesses exhibe un comportement clairement périodique à la fréquence du piston.

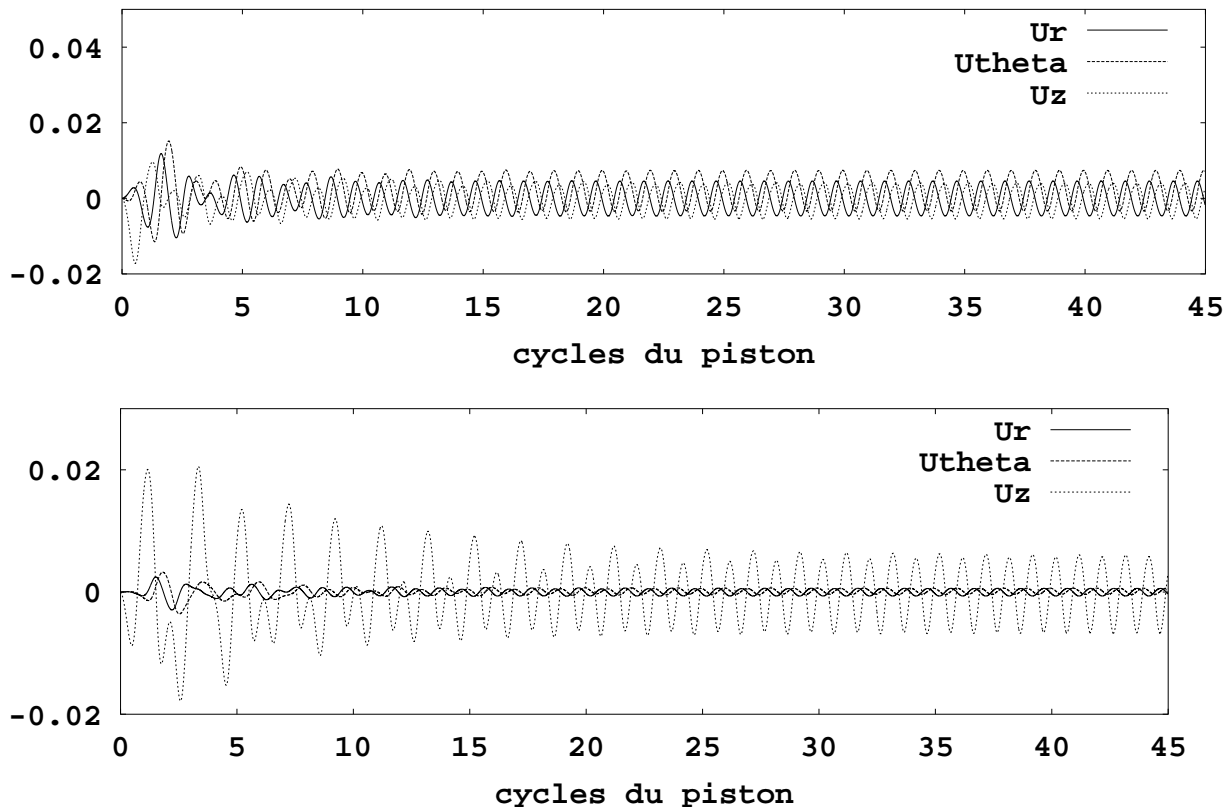


FIG. 5.1 – Evolution temporelle des 3 composantes du champ U près de l'axe du cylindre, aux points $(r, Z) = (\frac{1}{2}, \frac{h_0}{2})$ (en haut) et $(r, Z) = (0.094, \frac{h_0}{2})$ (en bas), $Re = 2.10^3$, $\omega_0 = 1.15$, $\epsilon = 0.131$.

5.3 Caractérisation fréquentielle de l'écoulement de base

5.3.1 Périodicité du champ des vitesses à partir de son spectre

La représentation fréquentielle du champ de vitesses est utile à la quantification de l'amplitude relative de ses différentes harmoniques. La figure 5.2 met clairement en évidence, par l'existence d'un pic dominant en fréquence pour chacune des 3 composantes de la vitesse, la périodicité du signal à la pulsation ω_0 .

5.3.2 Rôle des harmoniques supérieures

Le spectre en fréquence de la fonction $-\frac{1}{h(t)} \frac{dh}{dt}(t)$ a été représenté dans la partie inférieure de la figure 5.2, avec la même échelle. Cette fonction du temps intervient en tant que facteur temporel dans le forçage lorsque les équations sont exprimées dans le repère modifié (voir 2.24).

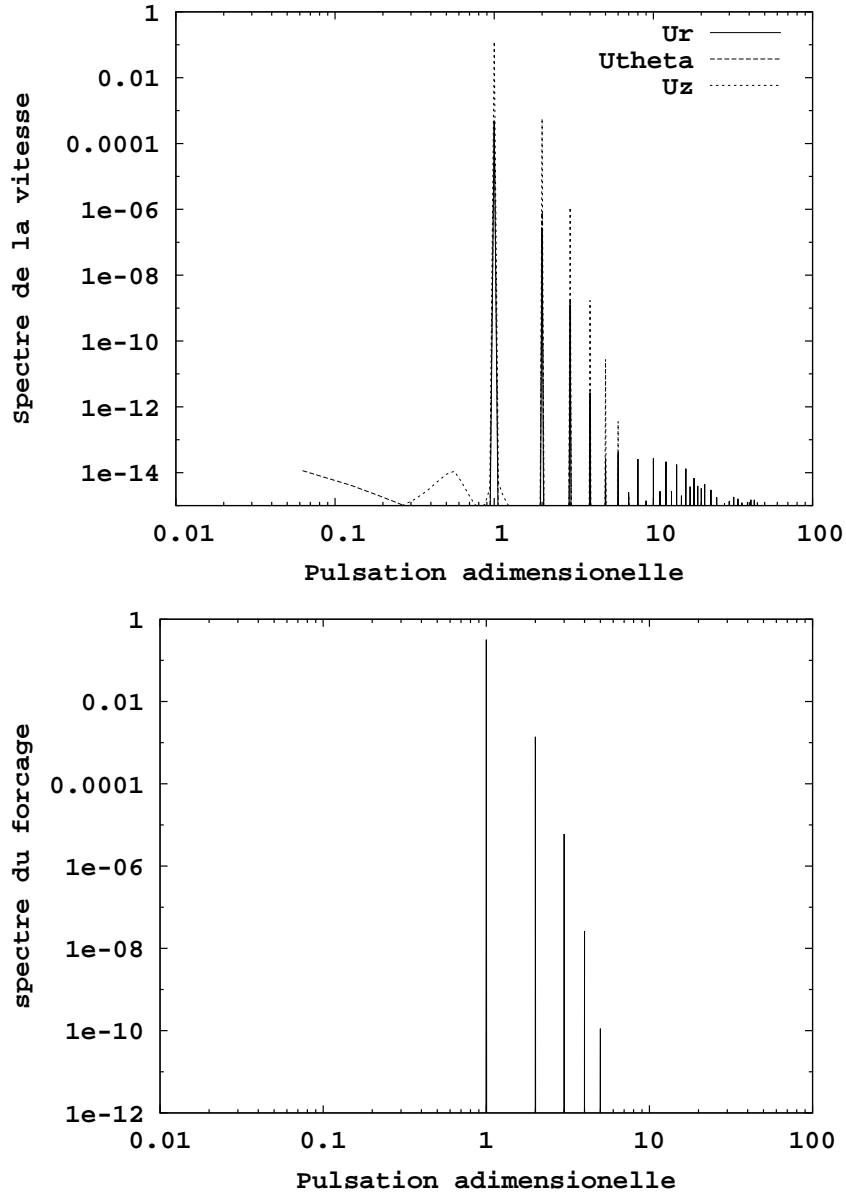


FIG. 5.2 – Spectre en puissance des 3 composantes du champ \mathbf{U} au point $(r, Z) = (0.094, \frac{h_0}{2})$. Les pulsations sont adimensionnées par rapport à la pulsation du piston $\omega_0 = 1.15(2\Omega)$. La transformée de Fourier s'appuie sur 100 périodes du piston, les 40 premiers cycles correspondant au transitoire ayant été tronqués (*en haut*). Spectre de puissance de la fonction $-\frac{1}{h(t)} \frac{dh}{dt}(t)$ (*en bas*).

On constate une grande similitude dans la répartition des amplitudes des 4 harmoniques dominantes, correspondant aux pulsations $2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0$ et $5\omega_0$. Ceci montre que la réponse du système à un forçage en $\frac{h}{h}$ se comporte également comme $\frac{h}{h}$. Le signal provenant de la simulation possède, outre la signature sous-harmonique du mode inertiel amorti déjà évoquée, des harmoniques d'ordre plus élevé mais d'amplitude négligeable, ainsi qu'un faible bruit.

Concernant les harmoniques principales, on peut estimer un facteur 10^2 (en puissance) entre l'énergie de la fréquence fondamentale et la première harmonique. Cette information est précieuse car elle permet de négliger la contribution du forçage à la pulsation $2\omega_0$, ce qui écarte, pour la course du piston choisie, des phénomènes supplémentaires de résonance paramétrique excitée, non pas pas la fréquence du piston, mais par les harmoniques de l'écoulement induit par le

mouvement du piston. En effet, l'amplitude totale du forçage n'est ici pas suffisante, selon les estimations analytiques avec prise en compte de la viscosité, pour qu'une harmonique d'intensité 10 fois moindre puisse exciter un mode inertiel. Une telle résonance parasite induirait, selon le scénario adopté, une croissance modale à la fréquence moitié de l'harmonique $2\omega_0$, c'est-à-dire à la fréquence du piston même.

L'amplitude des harmoniques d'ordre supérieur décroît avec leur ordre, écartant tout autre possibilité de résonance tant que $n\omega_0 < 2$ (où n représente l'ordre de l'harmonique considérée). De plus, pour $n\omega_0 \geq 2$, aucun mode inertiel ne peut vérifier la relation de résonance paramétrique, ce qui exclut également toute possibilité d'instabilité causée par les harmoniques du forçage.

5.4 Topologie de l'écoulement secondaire dans le cas $0 < \omega_0 < 1$

5.4.1 Singularité du cas $0 < \omega_0 < 1$

Dans un système en rotation non forcé, les solutions harmoniques de (2.8), écrites sous la forme $(\mathbf{v}, \pi) \sim e^{-i\omega t}$, vérifient également l'équation de Poincaré sur la pression :

$$\Delta_{\perp} \pi + \frac{(1 - \omega^2)}{\omega^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.1)$$

La topologie de l'écoulement de base est reliée aux solutions éventuelles de l'équation de Poincaré. Si la condition $\omega_0 < 1$ est vérifiée (dimensionnellement $\omega_{0dim} < 2\Omega$), on constate que cette équation possède une forme hyperbolique et que le problème est mal posé au sens mathématique du terme [9]. Certaines solutions peuvent alors exhiber des singularités sous la forme de surfaces de discontinuité. Dans l'expérience de Mc Ewan [30] ou les travaux analytiques de Wood [54], de telles discontinuités sont mises en évidence dans le cas d'un cylindre tournant analogue au cas étudié dans cette thèse, sauf que le forçage en fréquence s'applique via une rotation différentielle de la paroi supérieure ou à une précession du système. On peut donc également conjecturer l'existence de telles zones de discontinuité dans le cas de cette thèse. Notons que dans notre cas, c'est la source ponctuelle de vorticité azimuthale dans le coin proche du piston qui représente un forçage périodique à une pulsation ω_0 .

5.4.2 Mécanisme de propagation des paquets d'ondes inertielles

On peut proposer un mécanisme général expliquant l'existence de zones de discontinuité au sein de l'écoulement, valable pour le cas de cette thèse comme pour les travaux relatifs à l'expérience de McEwan. La relation de dispersion des ondes inertielles planes dans le cas non visqueux est $\omega = \cos(\mathbf{k}, \mathbf{e}_z)$. La pulsation adimensionnelle du forçage ω_0 est donc reli e à toutes les ondes planes inertielles dont la direction de propagation fait en valeur absolue un angle θ_0 avec l'axe de rotation, tels que $\omega_0 = \cos \theta_0$.   chacun de ces ondes est associ e une vitesse de propagation de l'énergie selon la vitesse de groupe, orient e selon la direction $\mathbf{c}_g = -\frac{\omega_0}{|\mathbf{k}|^2} (k_1, k_2, -\frac{(1-\omega_0^2)}{\omega_0^2} k_3)$.   une pulsation ω_0 donn e correspond donc une vitesse de groupe théorique faisant un angle ϕ_0 avec l'axe de rotation, complémentaire de θ_0 tel que $tg\phi_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\omega_0^2}}$. La discontinuité de vitesse cr e e au niveau des coins supérieurs est propag e dans le fluide dans la direction $\mathbf{c}_g + \mathbf{V}$, où \mathbf{V} est la vitesse locale de convection par l'écoulement. Cette vitesse de propagation définit alors au sein du fluide des surfaces caractéristiques de cisaillement de forme conique lorsque $|\mathbf{V}| \ll |\mathbf{c}_g|$.

Les paquets d'ondes inertielles sont ensuite refl chis par les parois, avec conservation de la pulsation, ce qui implique la conservation des angles après réflexion puisque les parois du cylindre

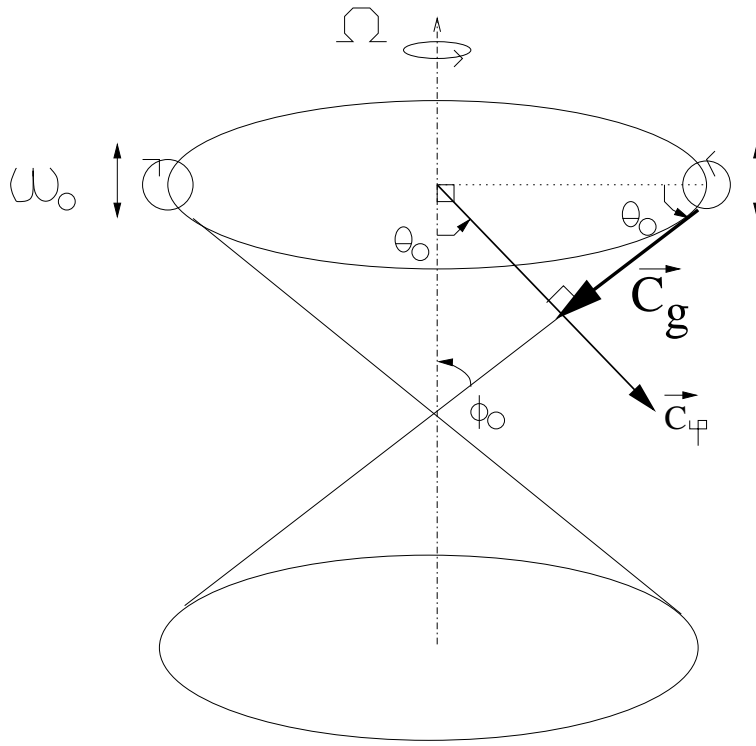


FIG. 5.3 – Schéma du mécanisme de propagation non visqueux des ondes inertielles dans la zone de cisaillement conique induite par une singularité périodique à la pulsation ω_0 de la vorticité azimuthale dans la zone de coin supérieure du cylindre.

sont soit parallèles, soit orthogonales à l'axe de rotation [55] [56], à partir duquel sont mesurés les angles. Mc Ewan note que l'utilisation de la théorie simplifiée présentée par Wood, basée sur la réflexion de surfaces caractéristiques sans considération implicite des effets visqueux mène à une description qualitative très satisfaisante de l'écoulement. La prise en compte *a posteriori* des effets visqueux dans cette théorie ôte à l'écoulement son caractère discontinu, les surfaces de discontinuité sont ainsi remplacées par des jets issus des coins, d'épaisseur variant comme $Re^{-\frac{1}{3}}$. De plus, Mc Ewan constate que le processus de réflexion est dissipatif, et note une atténuation de l'intensité des zones de cisaillement associées à ces surfaces résonantes après un faible nombre de réflexions. Remarquons que le cas limite $\omega_0 \rightarrow 1^-$ est singulier puisque le nombre de réflexions tend vers l'infini (la direction de \mathbf{c}_g tendant vers l'horizontale), alors que la norme de la vitesse de groupe \mathbf{c}_g , correspondant à la vitesse de propagation de la singularité, tend vers 0.

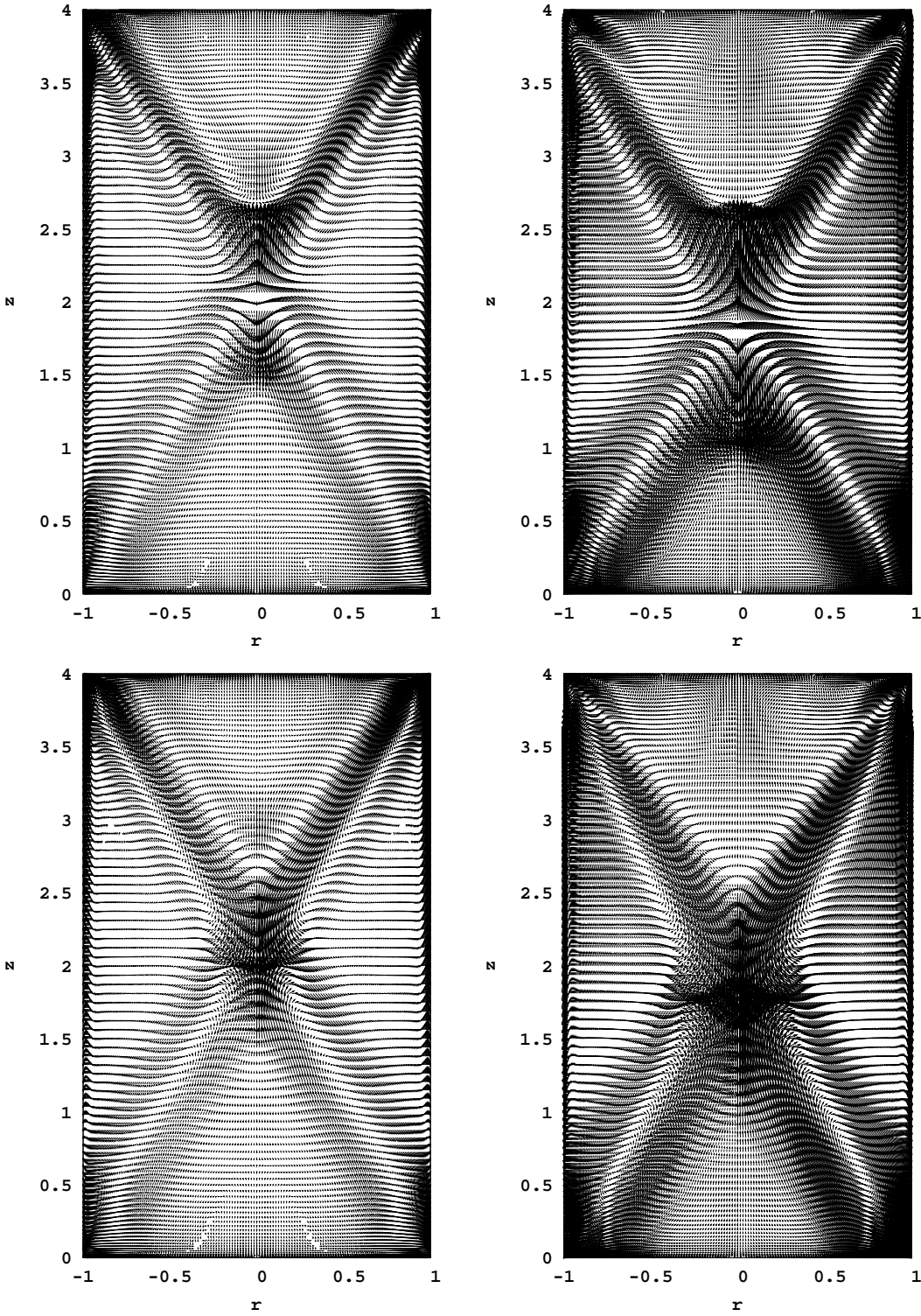


FIG. 5.4 – Champ de vitesse méridien associé à l'écoulement secondaire U pour le cas $h_0 = 4$, $\epsilon = 10^{-3}$, $\omega_0 = 0.4472$, $Re = 4994$, au cours d'un cycle d'oscillation du piston

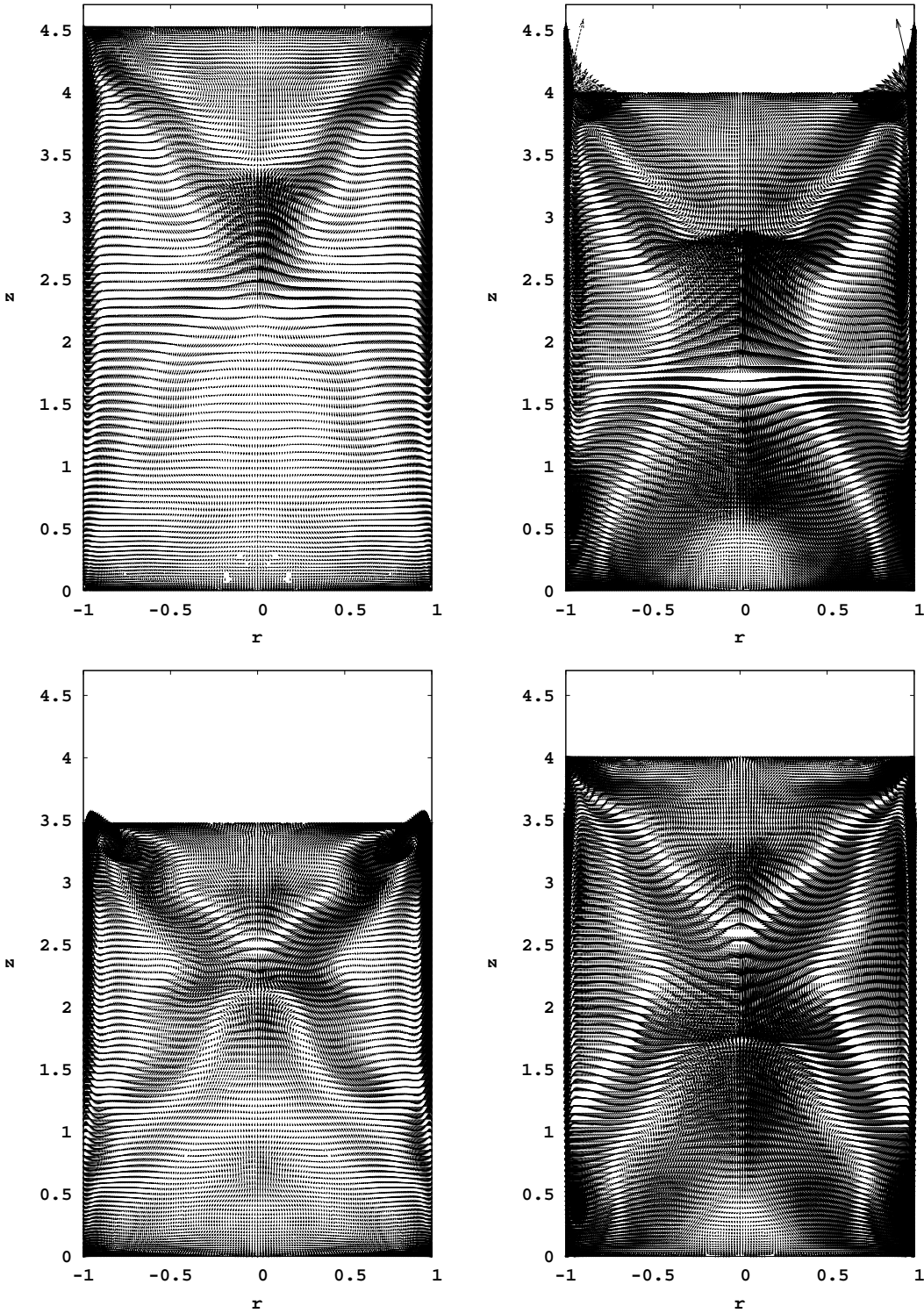


FIG. 5.5 – Champ de vitesse méridien associé à l’écoulement de base pour le cas $h_0 = 4$, $\epsilon = 0.131$, $\omega_0 = 0.4472$, $Re = 4994$, au cours d’un cycle d’oscillation du piston

5.4.3 Mise en évidence numérique des zones de cisaillement

Le cas étudié en détail correspond aux valeurs particulières de la pulsation du piston pour lesquelles la surface caractéristique peut effectuer exactement N réflexions sur chacune des parois latérales, selon l’estimation non visqueuse ne prenant pas en compte l’épaisseur de la couche de cisaillement. Géométriquement, cette condition se traduit par $2N \cot g(\phi_0) = h_0$, où N est

un nombre entier positif non nul. La relation de dispersion des ondes inertielles non visqueuses implique alors pour la pulsation de forçage la valeur $\omega_0 = (1 + (\frac{h_0}{2N})^2)^{-\frac{1}{2}}$. Or le nombre de Reynolds est limité par l'algorithme à des valeurs de l'ordre de 10^4 . Comme l'épaisseur des jets est supposée varier comme $Re^{-\frac{1}{3}}$, le nombre de réflexions réalisables est limité en pratique. De plus, ceci impose un rapport d'aspect assez grand pour que les jets n'interfèrent pas avec les couches limites près des parois. Pour ce cas-ci, le rapport d'aspect a donc été élevé à la valeur $h_0 = 4$. On a choisi de réaliser $N=1$ réflexions, ce qui correspond à $\omega_0 = 0.4772$. Le phénomène a été simulé pour deux valeurs différentes de la course du piston, la première très faible ($\epsilon = 10^{-3}$) et la seconde non négligeable ($\epsilon = 0.131$, comme dans l'expérience de Graftieaux).

Dans le cadre d'une faible course du piston ($\epsilon = 10^{-3}$), des zones de cisaillement ont été clairement mises en évidence par la simulation numérique, comme l'atteste la figure 5.6. Les prédictions issues de la théorie géométrique non visqueuse, corrigées par une estimation de la taille des couches de cisaillement en $Re^{-\frac{1}{3}}$, donnent une très bonne approximation de la topologie de l'écoulement de base. En effet, on observe des zones de vitesses plus élevées, assimilables à des jets axisymétriques émanant des coins supérieurs, faisant un angle constant avec l'axe de rotation. Dans ces zones de faible épaisseur, le vecteur de vitesse change de sens alternativement en retard de phase avec la vitesse du piston. L'angle au sommet observé se surperpose *exactement* avec le cône prédit par le calcul géométrique pour des valeurs de $Re \geq 10^3$, alors qu'il est légèrement inférieur à sa valeur théorique pour des nombres de Reynolds plus faibles. En plus de l'écoulement méridien, on peut noter, comme autre manifestation de la force de Coriolis, la présence d'un champ de vitesse azimuthal d'intensité moindre, déjà mentionné dans la simulation numérique directe par Godeferd et Lollini [7] (basée sur un calcul linéaire). L'estimation de Wood concernant l'épaisseur de la couche de cisaillement a été comparée avec des mesures basées sur une estimation à partir des iso-valeurs d'énergie cinétique issues des simulations. La figure 5.6 montre que la loi en $Re^{-\frac{1}{3}}$ est bien vérifiée.

Dans le premier cas ($\epsilon = 10^{-3}$), la structure en croix de Saint-André attendue apparaît distinctement sur les figures 5.6 et 5.4, formant un motif d'allure stationnaire. Cependant, le champ de vitesse à l'intérieur de la zone de cisaillement change de signe avec la périodicité du piston. La partie basse de la structure cônica semble affectée par la zone d'interaction des jets.

5.4.4 Effets de grande course

Pour le cas où la course $\epsilon = 0.131$ n'est plus négligeable, on constate numériquement que la forte variation de hauteur du cylindre a une grosse influence sur l'allure des cones de cisaillement. En effet, la structure en croix visualisée dans le cas $\epsilon = 10^{-3}$ n'apparaît que lorsque le piston passe par sa position moyenne $h(t) = h_0$. Quand celui-ci se trouve dans une autre position, la relation géométrique permettant d'obtenir cette structure en croix n'est en effet plus vérifiée : d'une part parce que $h(t) \neq h_0$, d'autre part parce qu'à la vitesse de groupe théorique s'ajoute la vitesse axiale non nulle induite par le piston. Ce phénomène peut être directement imputé aux effets de grande course du piston. De plus, l'angle avec lequel émanent les surfaces de cisaillement dans les coins proches du piston est fixé par la valeur de ω_0 , alors que la structure hors des coins subit les cycles de compression-détente au même titre que le reste de l'écoulement : il en résulte un effet de courbure des surfaces de cisaillement, d'où une déformation de la structure cônica mise en évidence sur la figure 5.5. Cet effet de distortion apparaît plus nettement dans la partie inférieure du cylindre, sous la zone centrale d'interaction des jets. Une autre manifestation des effets de grande course est la variation non négligeable de la viscosité au cours d'un cycle de compression-détente. La variation du nombre de Reynolds qui est en découle se répercute directement sur l'épaisseur des couches de cisaillement, dont on a vérifié précédemment la dépendance en $Re^{-\frac{1}{3}}$. Celles-ci présentent ainsi une épaisseur variable selon le nombre de Reynolds instantané, évalué

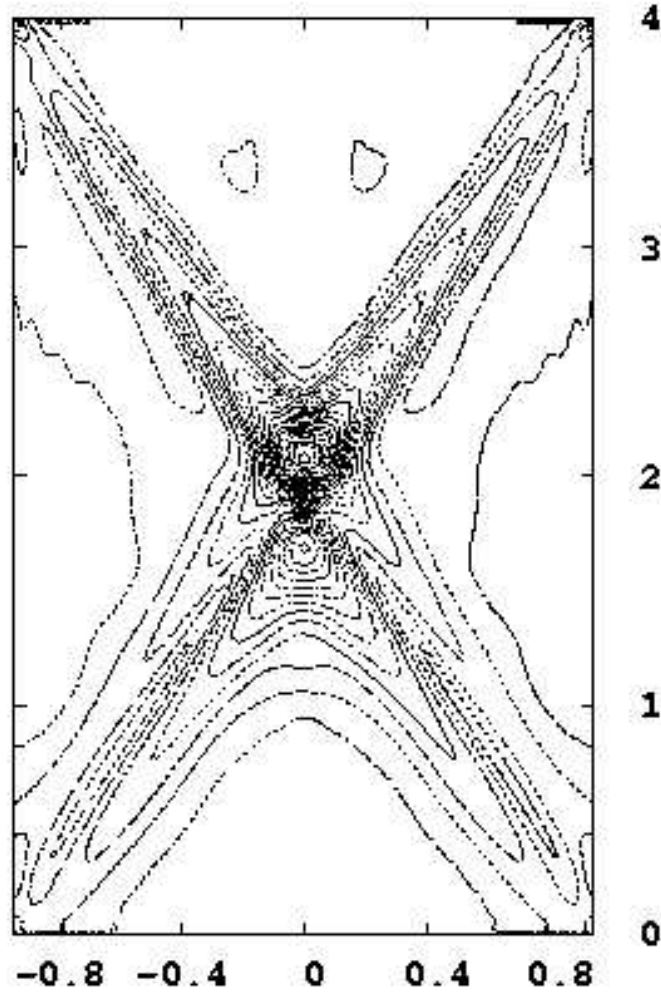


FIG. 5.6 – Profil méridien d'énergie cinétique de l'écoulement secondaire correspondant à $h_0 = 4$, $\omega_0 = 0.4472$, $\epsilon = 10^{-3}$, $Re = 5.10^4$.

à l'instant où le fluide a été expulsé de la zone de discontinuité.

5.4.5 Conclusion

Dans cette section on a mis en évidence la topologie de l'écoulement de base lorsque $\omega_0 < 1$. Dans les conditions où $Re \sim O(\epsilon^{-\frac{1}{2}})$, l'énergie de l'écoulement secondaire U est alors concentrée dans les couches limites d'épaisseur $O(Re^{-\frac{1}{2}})$ et dans les zones de cisaillement d'épaisseur $O(Re^{-\frac{1}{3}})$. L'existence de ces zones de cisaillement peut être expliquée pour $\epsilon \ll 1$ par un mécanisme similaire à celui de l'expérience de McEwan [30]. L'influence d'une plus grande valeur de ϵ a également été mise en évidence. Cette topologie diffère des estimations théoriques de Racz et Scott [28] par la présence de ces zones de cisaillement. Cependant leur hypothèse selon laquelle l'écoulement U reste confiné dans des zones de faible épaisseur pour $Re \gg 1$ reste valide. L'influence des zones des cisaillement sur l'instabilité de cet écoulement reste à déterminer.

5.5 Topologie de l'écoulement secondaire dans le cas $\omega_0 > 1$

Dans le cas $\omega_0 > 1$, les fréquences excitées par le mouvement du piston, ainsi que leurs harmoniques, ne peuvent pas être interprétées en terme de modes inertiels, dont les pulsations

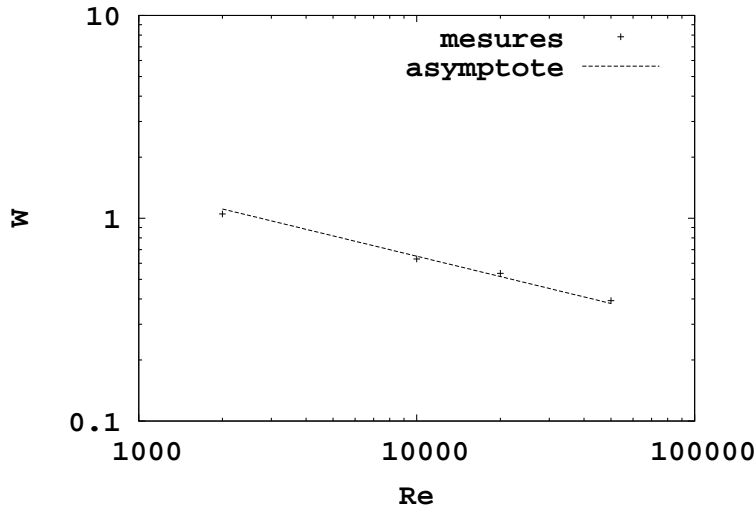


FIG. 5.7 – Demi-largeur adimensionnelle W des zones de cisaillement issues des coins en fonction du nombre de Reynolds pour $h_0 = 4$, $\omega_0 = 0.4472$, $\epsilon = 10^{-3}$, estimée à partir des profils d'énergie cinétique. Les mesures sont comparées avec la fonction $14Re^{-\frac{1}{3}}$.

sont bornées de façon adimensionnelle par 1. Le mécanisme de propagation des ondes inertielles présenté dans la section précédente ne peut donc plus expliquer la dynamique de l'écoulement. C'est d'ailleurs ce type de configuration qui a été examiné par Graftieaux [36] [34], dans sa mise en évidence du mode axisymétrique primaire dont la pulsation est justement supérieure à 1.

5.5.1 Profils de vitesse

L'écoulement \mathbf{U} , qui représente l'écart entre l'écoulement de base en présence de viscosité et celui prédit par la théorie non visqueuse, peut être estimé à partir des profils de vitesse. L'outil numérique permet d'examiner en détail l'écoulement dans les zones de coin ou de proche-paroi, alors que ces informations sont inaccessibles par la voie expérimentale.

Afin de comparer également les calculs aux résultats expérimentaux de Graftieaux, le calcul présenté ici a été effectué dans les mêmes conditions et représenté en variables dimensionnelles. Le champ représenté sur la figure 5.8 n'est pas U_Z , mais le champ $\mathbf{U} + V_Z (piston) \mathbf{e}_Z$. Les conditions expérimentales sont les suivantes : $a = 70 \text{ mm}$, $h_0 = 1.18$, $\epsilon = 13.1\%$, $\omega_{0adim} = 1.523$, $\Omega = 18.85 \text{ rad.s}^{-1}$, $Re = 9989$.

La comparaison avec le profil expérimental (voir figure 5.8) montre un bon accord quantitatif, à quelques % près, dans toute la zone $0 \leq r \leq 0.9$ où les mesures expérimentales, associées à un profil uniforme, sont accessibles. Ces résultats prouvent que le comportement du fluide dans le repère tournant est bien décrit par l'approximation non visqueuse dans la zone accessible par l'expérience. C'est, conformément aux estimations a priori de Racz et Scott, seulement dans la zone de proche paroi ($r = 1$) que le gradient du champ de vitesse axiale est confiné, dans une fine zone assimilable à une couche de Stokes verticale oscillante d'épaisseur $O(Re^{\frac{1}{2}})$.

Après vérification de cet effet de confinement des non-uniformités du champ de vitesse, il est intéressant de soustraire au champ total le champ uniforme provenant de l'analyse non visqueuse, pour revenir au champ \mathbf{U} tel qu'il est résolu par le schéma numérique. De cette façon, la condition d'adhérence à la paroi latérale fait que ce sont les zones de forte vitesse axiale qui sont confinées près de cette paroi, comme le montre la figure 5.9. L'écoulement visualisé sur la figure 5.10 en dehors de la zone de forts gradients, apparemment très faible devant la vitesse

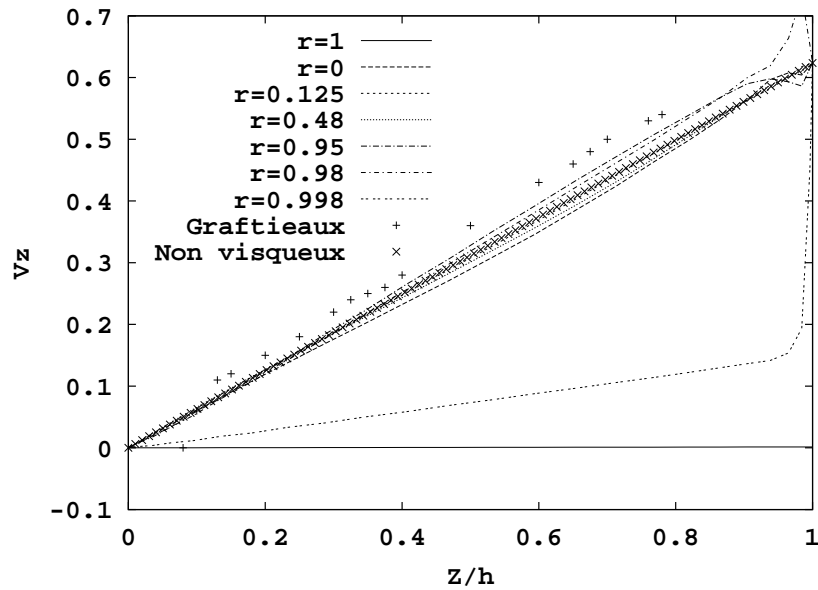


FIG. 5.8 – profil de vitesse axiale en fonction de Z pour différentes valeurs de r . Comparaison avec le profil non visqueux et avec le profil expérimental.

du piston, même pour la valeur choisie de ϵ (13%), peut être interprété comme l'écoulement secondaire négligé dans l'étude analytique.

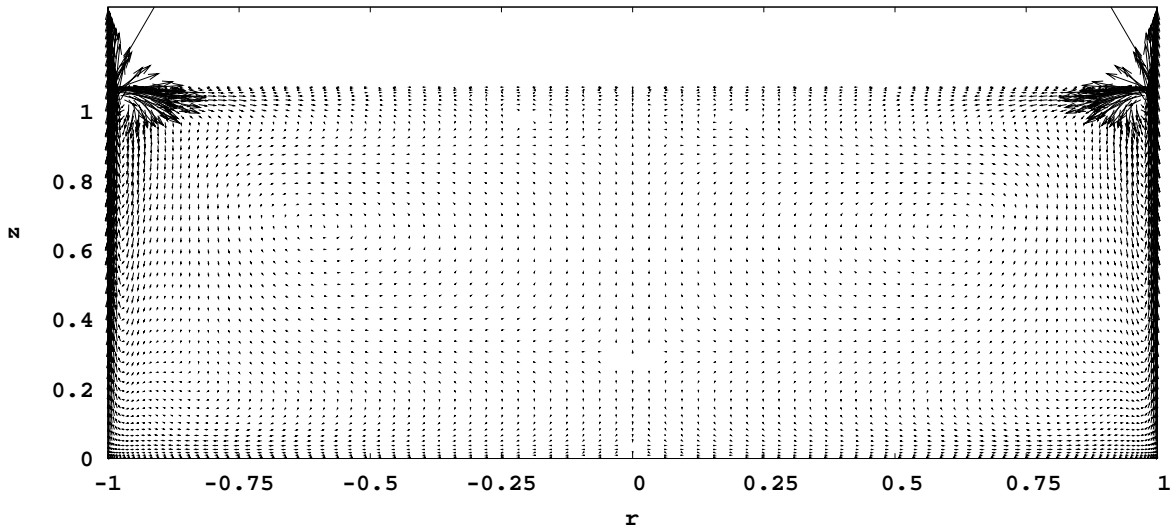


FIG. 5.9 – Coupe méridienne de l'écart \mathbf{U} instantané entre les états de base visqueux et non visqueux ($h_0 = 1.18$, $\epsilon = 13.1\%$, $Re = 4994$, $\omega_0 = 1.523$). On constate que cet écart est quantitativement restreint à la zone de proche paroi.

L'écoulement secondaire, représenté sur la figure 5.10, est également périodique avec la période du piston, et est principalement constitué de deux boucles de circulation alternées. La plus intense, dont la circulation est du même signe que la source de vorticité dans le coin, est situ e proche du piston. La vorticité y est également dans le même sens que dans la couche limite associ e au champ \mathbf{U} dans la zone ($r = 1$). il existe également une composante azimuthale, en quadrature de phase avec les composantes méridiennes, dont la présence est due à la déviation par la force de Coriolis.

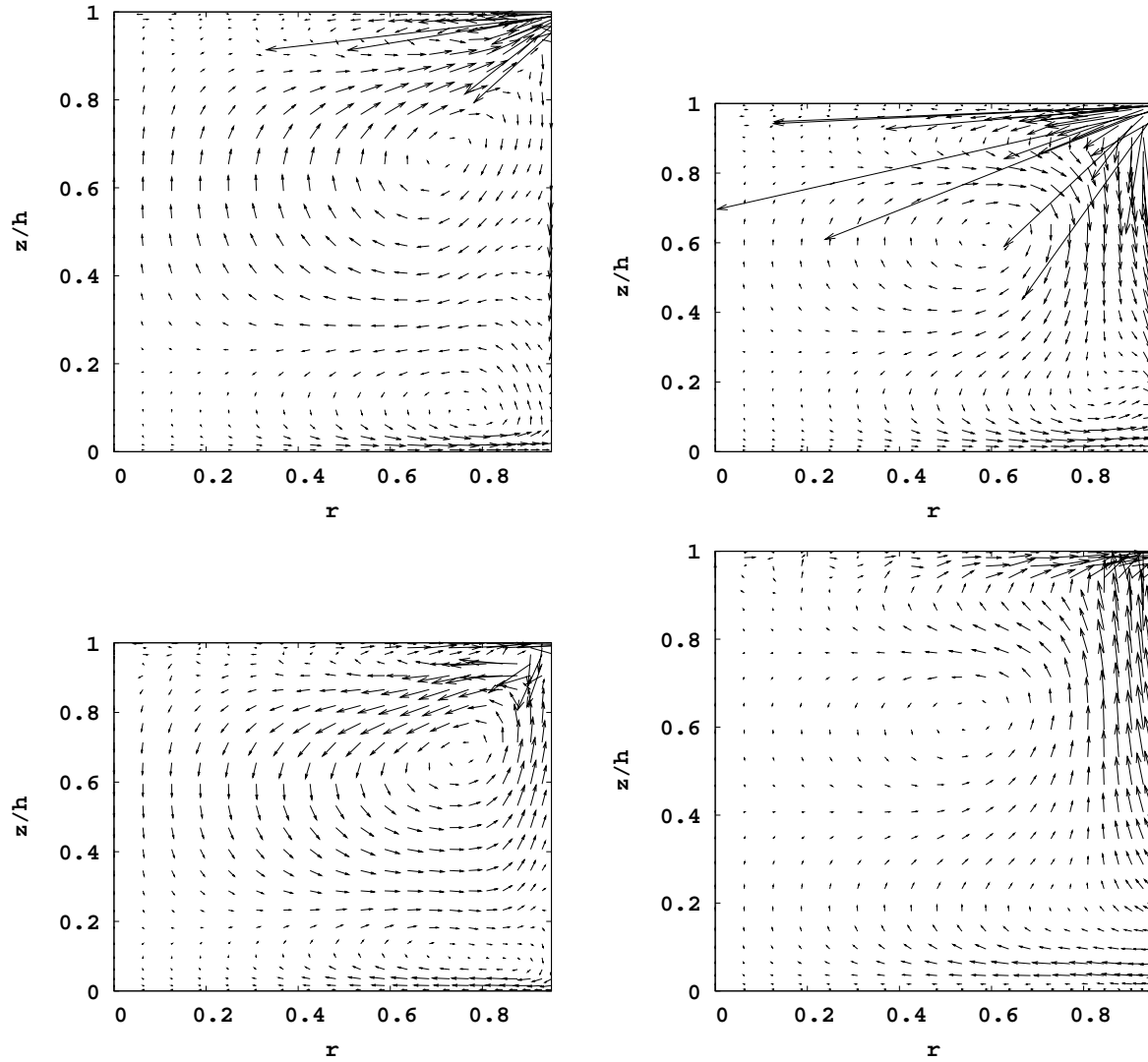


FIG. 5.10 – Semi-coupses méridiennes du champ des vitesses \mathbf{U} associé à l'écoulement secondaire, correspondant à l'écoulement de base visqueux hors de la zone de paroi $r = 1$, auquel est retranchée la composante axiale moyenne. $h_0 = 1.18$, $\epsilon = 13.1\%$, $Re = 4994$, $\omega_0 = 1.523$, à différents instants d'un même cycle de compression-détente $\omega_0 t = \frac{\pi}{4}$ ($h(t) = 1.291$), $\frac{3\pi}{4}$ ($h(t) = 1.072$), $\frac{5\pi}{4}$ ($h(t) = 1.072$), $\frac{7\pi}{4}$ ($h(t) = 1.291$).

5.5.2 Influence de la course

D'un point de vue énergétique, on peut essayer de comparer l'écoulement de base tel qu'il est prédit par les ordres de grandeur issus de l'analyse avec celui réellement observé lors des simulations, dans le but de trancher quant à la pertinence de la prise en compte des effets visqueux lors d'un bilan énergétique.

Le champ résolu par le schéma numérique, rapporté au domaine fixe, est le champ de vitesse total auquel l'oscillation axiale non visqueuse a été retranché. Son énergie cinétique, donnée par $\int (-\frac{\dot{h}}{h} \mathbf{V}_0 + \sum_{\mu} A^{\mu} \mathbf{u}^{\mu})^2$, correspond donc à l'énergie de l'écoulement secondaire étudié dans cette section. L'énergie moyenne totale de cet écoulement secondaire, calculée comme la moyenne temporelle de l'énergie cinétique totale calculée sur 50 cycles de compression, a été mesurée pour plusieurs valeurs de la course ϵ , avec $Re = 6.10^3$, proche du seuil d'instabilité. Afin de s'assurer, particulièrement pour les grandes valeurs de la course ϵ , que l'écoulement mesuré est effectivement l'écoulement de base, et n'est pas le résultat d'une instabilité, la pulsation du piston ω_0 a

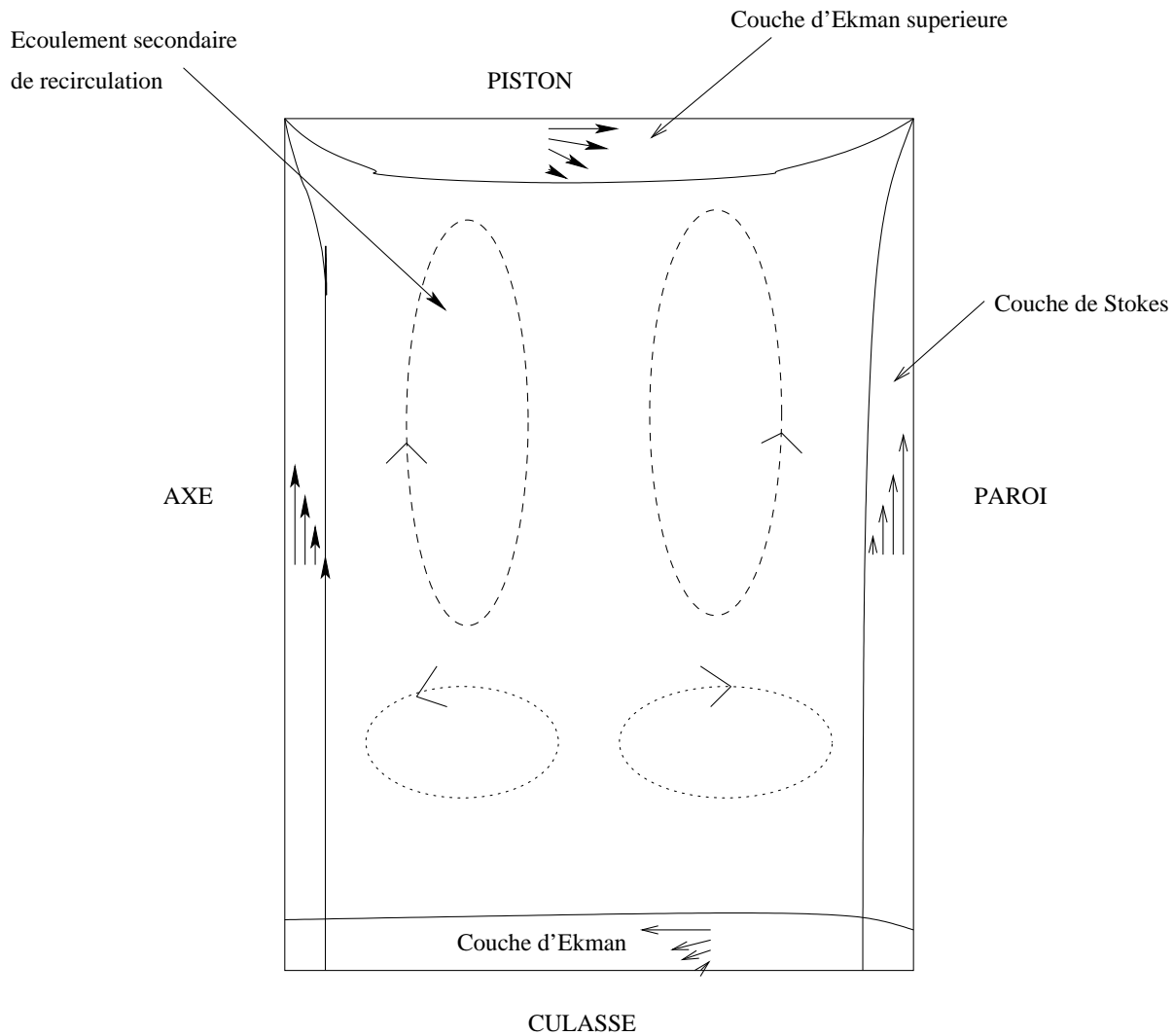


FIG. 5.11 – Schéma de la topologie de l'écoulement secondaire associé à l'état de base dans le plan méridien pour $Re \sim O(10^4)$ et $\omega_0 > 1$.

été prise comme un autre paramètre variable afin de se trouver constamment hors des conditions de résonance portant sur ω_0 . L'énergie mesurée a donc été comparée à la variable réduite $\epsilon\omega_0$ plutôt qu'à la simple variable ϵ (voir figure 5.13).

L'allure de la courbe obtenue confirme que l'énergie de l'écart entre l'état de base visqueux et son analogue non visqueux se comporte comme $O(\epsilon^2\omega_0^2)$ sur une gamme relativement étendue de valeurs de ϵ . Un écart faible mais significatif entre la courbe et les résultats apparaît vers $\epsilon \geq \frac{2}{10}$, c'est-à-dire dans le régime où les effets en $O(\epsilon^2)$ ne sont plus quantitativement négligeables par rapport aux termes dominants en $O(\epsilon)$. L'ordre de grandeur de cet écart est au plus de 14 %. D'autre part, la visualisation du champ des vitesses met clairement en évidence que l'énergie cinétique de l'écoulement de base est concentrée dans la région de proche paroi correspondant à la couche limite oscillante le long de la paroi verticale. Dans cette zone, l'écoulement est aligné à la paroi qui est parallèle à l'axe de rotation, il n'est donc pas affecté par la force de Coriolis. Il peut être assimilé à une couche de Stokes oscillante dont l'épaisseur varie comme $Re_{piston}^{-\frac{1}{2}}$, et donc comme $Re^{-\frac{1}{2}}$ pour des valeurs de ω_0 de l'ordre de l'unité. La gamme de valeurs de la course du piston proche du seuil d'instabilité varie comme $Re^{-\frac{1}{2}}$, ainsi dans cette gamme de paramètres, l'énergie de l'état de base secondaire est concentrée sur une couche dont l'épaisseur est $O(\epsilon)$, et varie donc, à nombre de Reynolds variable, comme $O(\epsilon^3)$.

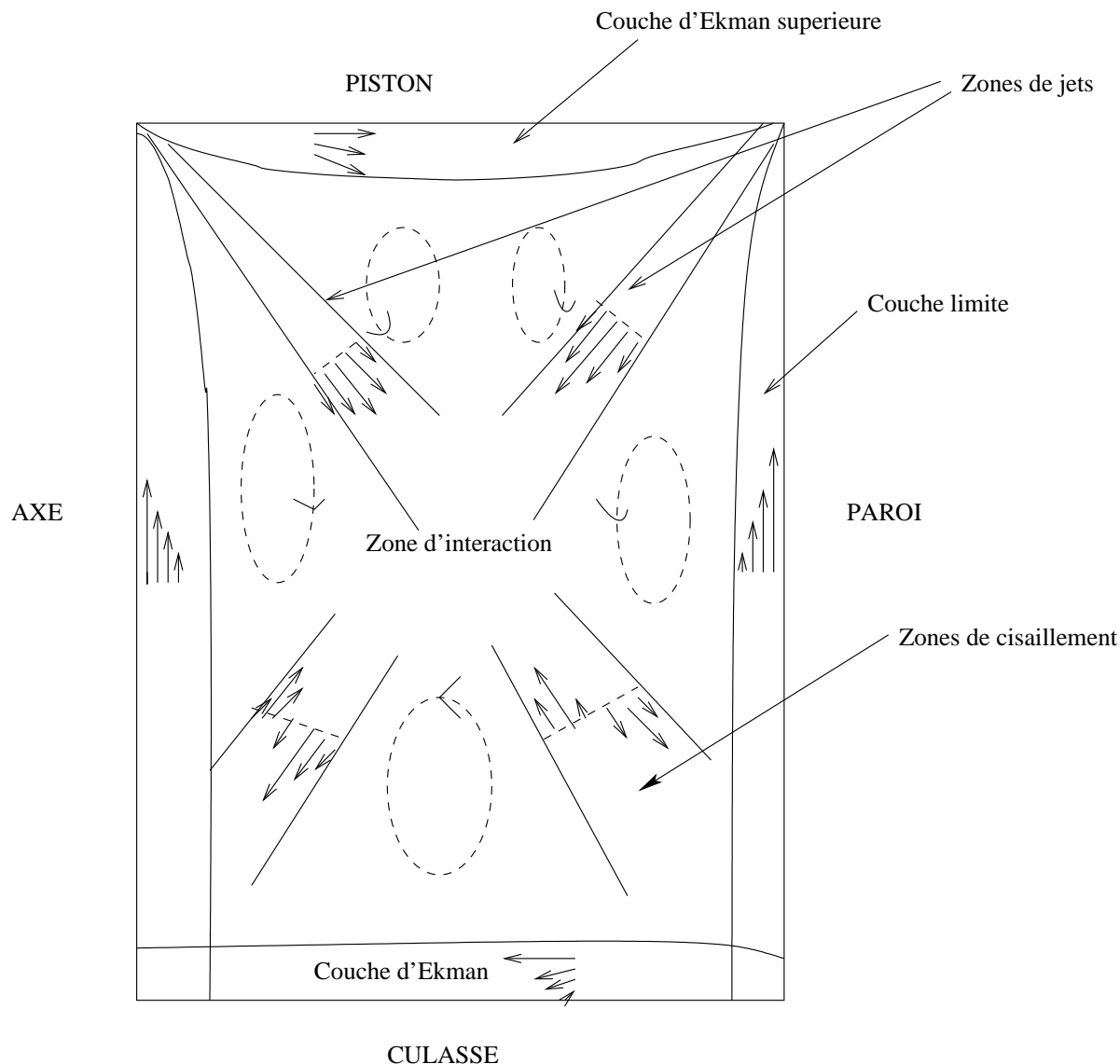


FIG. 5.12 – Schéma de la topologie de l'écoulement secondaire associé à l'état de base dans le plan méridien pour $Re \sim O(10^4)$ et $\omega_0 < 1$.

5.5.3 Conclusion

Ces résultats confirment l'hypothèse de Racz et Scott selon laquelle, autour du seuil critique, l'écoulement secondaire apporte une contribution négligeable dans le bilan énergétique, qui reste d'ordre $O(\epsilon)$ par rapport à l'écoulement de couche limite qui est déjà d'ordre $O(\epsilon)$. Dans le cas $\omega_0 > 1$ et pour des courses du piston modérées (sans être asymptotiquement faibles), l'écoulement de base peut donc être assimilé en première approche à l'écoulement non visqueux tel qu'il est décrit par la théorie analytique, avec les corrections visqueuses d'ordre $O(\epsilon^2)$ proposées dans la thèse de Racz.

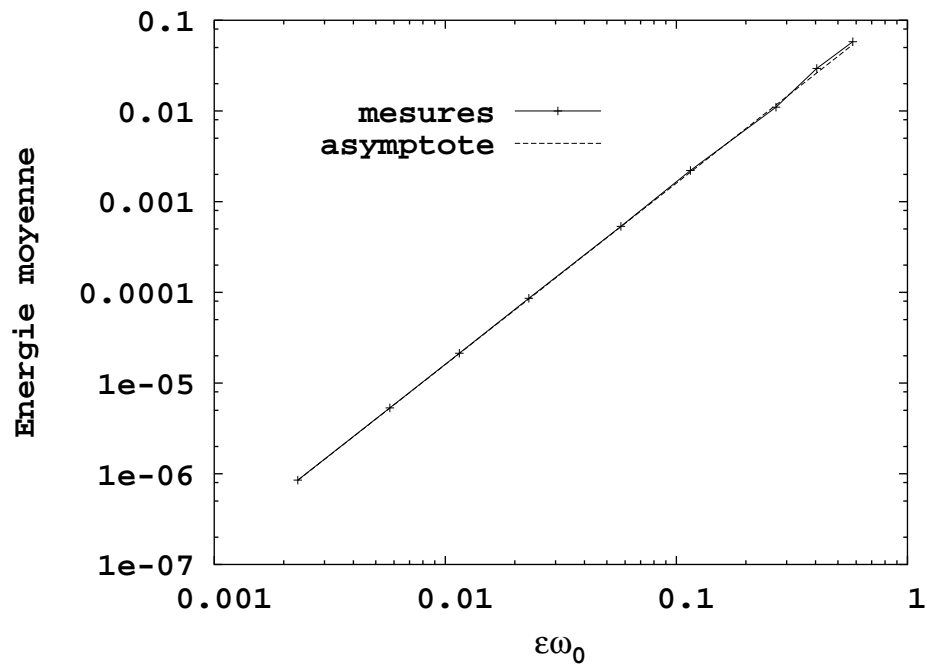


FIG. 5.13 – Energie cinétique moyenne de l'état de base en fonction de la variable adimensionnelle $\epsilon\omega_0$ pour $h_0 = 1.18$, $Re = 6.10^3$. Les calculs sont comparés avec l'asymptote $\frac{1}{6}(\epsilon\omega_0)^2$.

Chapitre 6

Déstabilisation du système par une compression périodique

Cette section présente en détail l'étude numérique du phénomène d'instabilité paramétrique décrit dans la thèse de Racz [28]. Les simulations effectuées sont focalisées sur le cas du mode inertiel $(1, 1, 0)$ mis en évidence expérimentalement dans la thèse de Graftieaux [34] [36]. La première section traite de la phase linéaire de l'instabilité, des difficultés intrinsèques à la détermination des taux de croissance et de l'obtention de la courbe de stabilité marginale du système autour des conditions de résonance. La deuxième partie est une étude précise de la structure spatiale du champ de vitesse en régime non linéaire et mène à l'identification du mode de Kelvin prédit dans la thèse de Racz. Enfin, une troisième et dernière partie se focalise sur la mise en évidence du couplage non linéaire entre le mode inertiel identifié auparavant et la famille des modes géostrophiques du cylindre en rotation.

6.1 Instabilité linéaire du mode axisymétrique primaire

Le système physique étudié est caractérisé par 4 paramètres sans dimensions qui sont le rapport d'aspect moyen h_0 du cylindre, la course ϵ du piston, la fréquence ω_0 du piston et le nombre de Reynolds moyen Re . Dans cette étude, seules les variations des paramètres ω_0 et Re sont considérées, la réduction de l'étude du phénomène à un espace à seulement deux paramètres physiques au lieu de quatre simplifiant déjà considérablement l'investigation numérique. Si le choix préalable des paramètres h_0 et ϵ ne peut plus permettre de prétendre à une étude exhaustive du phénomène d'instabilité, il est utile de noter plusieurs points.

D'une part, si le rapport d'aspect h_0 est de l'ordre de l'unité, comme dans l'expérience de Graftieaux, les structures susceptibles d'être les plus instables sont, quand elles sont axisymétriques, représentées par des modes propres de bas ordre dans chaque direction. Ceci se justifie par l'idée *a priori* que des structures d'ordre élevé possèdent des gradients de vitesse plus importants, elles sont donc plus efficacement dissipées par la viscosité et ainsi plus stables que les modes de bas ordre. Dans un cylindre "haut", c'est-à-dire de rapport d'aspect élevé, les structures axisymétriques attendues par l'observateur sont, en première approche, plus proches de cellules toriques empilées les unes au-dessus des autres. Inversement, dans le cas d'un rapport d'aspect petit où l'on attendrait plutôt des structures en tores concentriques. Mais cet estimation qualitative possède ses limites, en particulier elle repose sur l'hypothèse d'axisymétrie des modes.

L'étude numérique de l'instabilité du système présentée ici a été réalisée, conformément aux conditions de l'étude expérimentale de Graftieaux, pour :

- un rapport d'aspect donné $h_0 = 1.18$

– une course du piston fixée à $\epsilon = 0.131$

D'autre part, Graftieaux s'est focalisé sur une valeur du déplacement du piston qui place l'expérience hors du cadre des petites oscillations. Dans l'analyse théorique de Racz, au contraire, beaucoup de simplifications analytiques sont basées sur l'hypothèse $\epsilon \ll 1$. L'étude numérique présentée ici doit donc être moins considérée comme une stricte vérification du travail de Racz que comme une investigation du phénomène d'instabilité paramétrique au-delà des hypothèses analytiques, à la lumière des résultats expérimentaux de Graftieaux.

La comparaison des taux de croissance linéaire calculés par Racz, pour les valeurs des paramètres h_0 et ϵ précitées, prédit que le premier mode inertiel du cylindre à être déstabilisé lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds est le mode $(k, m, n) = (1, 1, 0)$, où k , m et n représentent respectivement le nombre de noeuds radiaux, axiaux et azimuthaux. Ce mode propre a déjà été étudié en détail dans le chapitre 5 avec inclusion des effets visqueux. Il est caractérisé par une fréquence non visqueuse $\omega^{1,1,0} \sim 0.57$. Le champ de vitesses associé possède la forme d'un tourbillon torique de même axe que le cylindre, auquel se superpose une circulation azimuthale de signe alternée sur la hauteur du cylindre. L'axisymétrie de l'écoulement justifie dans cette configuration l'écriture d'un code de calcul axisymétrique.

L'analyse de Racz prédit que les coordonnées du vertex de la langue d'instabilité associé au mode primaire dans l'espace $(\omega_0 - Re)$ sont $(\omega_c, Re_c) \sim (1.155, 5250)$, ce qui fournit un ordre de grandeur des paramètres à explorer pour repérer les premiers stades de l'instabilité. La pulsation ω_c correspond analytiquement au double de la pulsation du mode inertiel excité, avec une correction sur la fréquence naturelle due à la viscosité. Le fait que, d'une part, les pulsations visqueuses calculées dans le chapitre précédent en l'absence de mouvement du piston vérifient avec précision les prédictions analytiques, et que, d'autre part, les courbes de seuil de la thèse de Graftieaux indiquent une valeur de ω_c proche à moins de 0.4% de la valeur théorique, justifie l'investigation numérique de cette zone des paramètres.

6.1.1 Mise en évidence d'une réponse sous-harmonique

Toutes les simulations effectuées dans l'intervalle $\omega_0 \in [1.12, 1.19]$ ont montré que, pour Re suffisamment bas, l'écoulement converge vers l'écoulement de base décrit dans le chapitre 5, avec une fréquence fondamentale calée sur celle du piston. Si Re augmente, avec ω_0 fixé, il existe bien une valeur critique de Re , fortement dépendante de ω_0 , à partir de laquelle l'énergie cinétique totale de l'écoulement, ainsi que toutes les composantes du vecteur vitesse, se mettent à croître de façon exponentielle. On note également des oscillations plus rapides, à une fréquence de l'ordre de grandeur de la moitié de la fréquence du piston, proche de la fréquence naturelle du mode inertiel attendue (voir figure 6.1). Cette apparition d'une fréquence moitié n'est également attestée qu'au-delà d'un temps transitoire (dépendant de l'énergie initiale de la perturbation et du point de fonctionnement considéré), au-delà duquel les oscillations à la fréquence du mode se superposent aux oscillations à la fréquence du piston, jusqu'à dominer progressivement la dynamique de l'écoulement. Il est intéressant de noter que la valeur de l'amplitude de la perturbation initiale n'a pas d'influence sur la croissance observée, même dans le cas limite où elle est numériquement nulle. En effet, une condition initiale nulle dans l'espace des vitesses représente un écart non nul par rapport à l'état de base périodique du système, et c'est cet écart initial, d'énergie totale $O(\epsilon^2)$, qui joue le rôle de la faible perturbation initiale par rapport à l'état de base, comme dans une analyse de stabilité linéaire classique. Aucun phénomène d'instabilité sous-critique n'a été observé, conformément aux résultats expérimentaux.

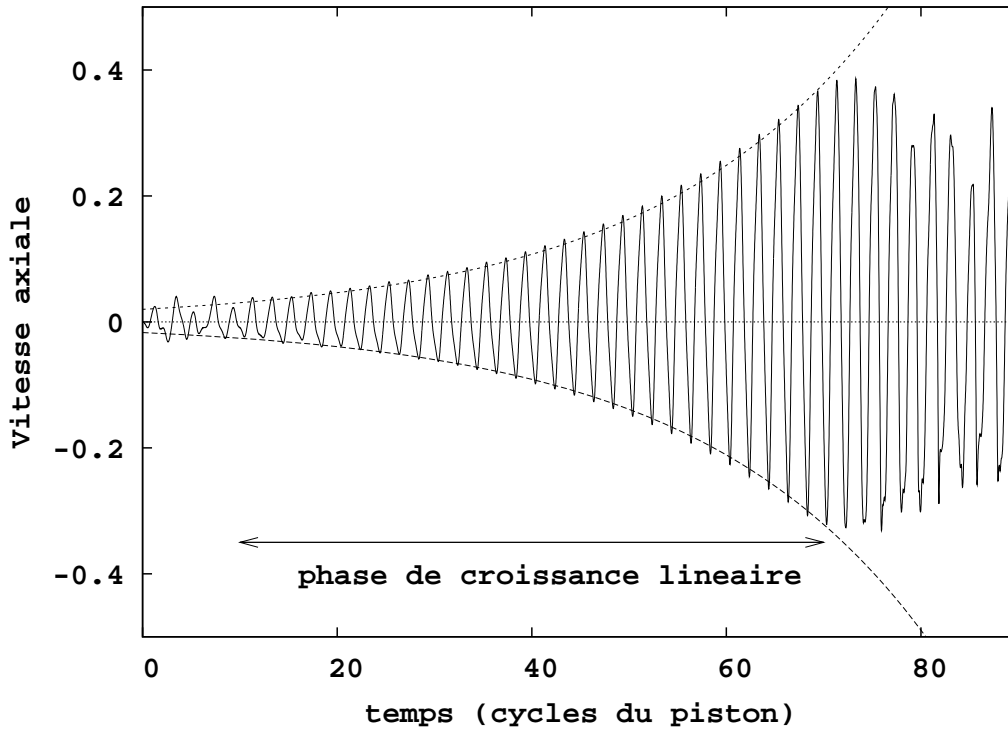


FIG. 6.1 – Signal transitoire de la vitesse axiale pour le point de fonctionnement $h_0 = 1.18$, $\epsilon = 0.131$, $\omega_0 = 1.15$ et $Re = 10000$ au point $(0.094, \frac{h_0}{2})$. Le fitting exponentiel du signal permet d’apprécier la durée de la phase transitoire régie par une dynamique linéaire.

Le caractère sous-harmonique de la réponse en fréquence, dans le cas instable, est bien mis en évidence sur la figure 6.2 par le spectre temporel du signal de vitesse en un point. On a également pu vérifier que l’apparition d’une composante fréquentielle dominante à la pulsation visqueuse du mode inertiel, proche de $\frac{\omega_0}{2}$, est indépendante de la position spatiale de la mesure.

Le fait que la fréquence mesurée correspond, en première estimation, à la fréquence du mode inertiel prévu confirme l’idée que la quantité physique en question est bien le mode primaire lui-même, même si la structure spatiale du champ de vitesses obtenu reste à comparer avec celle du mode de Kelvin (1,1,0) d’une part, et avec celle du mode inertiel associée à la valeur de Re considérée, d’autre part. De plus, l’estimation numérique de la fréquence d’oscillation dominante, à l’aide d’une transformée de Fourier, est limitée en précision par le caractère fini du signal. Dans la suite de ce chapitre, une méthode d’analyse plus poussée permet de préciser si la fréquence du signal est *avec précision* la fréquence moitié du piston. A ce stade, on obtient toutefois déjà une réponse quant à la pertinence de l’étude du phénomène en terme de modes inertiels.

La comparaison avec la représentation fréquentielle de l’état de base, sur la figure 5.2, met en évidence non seulement l’apparition d’une fréquence sous-harmonique dominante, mais également la modification des amplitudes relatives aux différentes harmoniques du mouvement du piston. Ceci s’explique en première approche par le fait que la pulsation du piston ω_0 , ainsi que ses harmoniques, sont également des harmoniques d’ordre supérieur du mode instable lui-même. Les différences entre la répartition spectrale des états stable et instable sont donc dues apparemment aux interactions quadratiques entre les différentes harmoniques en jeu.

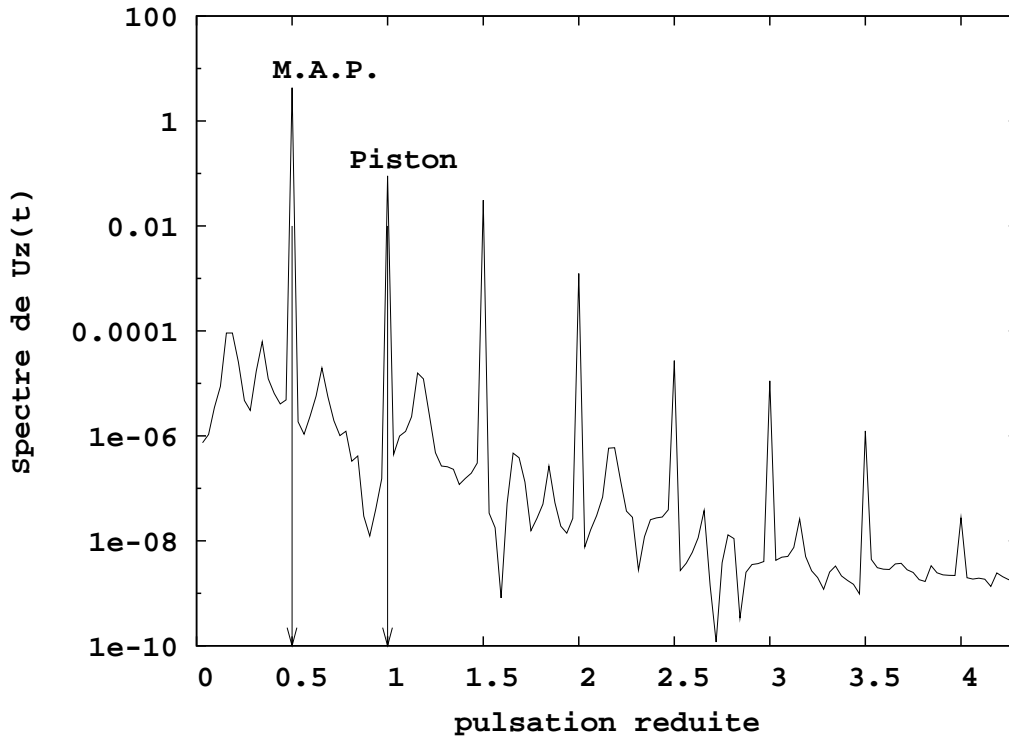


FIG. 6.2 – Transformée de Fourier temporelle du signal de vitesse axiale au point $(r, Z) = (0.094, \frac{h_0}{2})$, pour $\omega_0 = 1.15$ et $Re = 6000$, calculée en éliminant la phase transitoire correspondant aux 300 premiers cycles du piston. La pulsation a été réduite pour que la pulsation du piston corresponde à la pulsation unité. On distingue clairement la présence d’un pic sous-harmonique (noté “M.A.P.” comme Mode Axisymétrique Primaire) à la fréquence moitié du forçage, caractéristique de l’instabilité paramétrique.

6.1.2 Mesure des taux de croissance linéaire

Au-delà de la simple constatation de la réponse sous-harmonique du système aux oscillations du piston, il est important de connaître avec précision pour quelles valeurs des paramètres le système est instable. Supposons qu’en régime linéaire, l’amplitude de la contribution sous-harmonique se comporte comme $e^{\Re(\sigma) + i\Im(\omega)t}$, où les $\Re(\sigma)$ et $\Im(\sigma)$ représentent respectivement son taux de croissance linéaire et sa pulsation. Le système est dit stable lorsque $\Re(\sigma) < 0$ et instable lorsque $\Re(\sigma) > 0$. La relation $\Re(\sigma) = 0$ définit dans l’espace des paramètres la courbe de stabilité marginale. Une distinction du type “stable/instable” est pertinente, mais il est préférable de pouvoir quantifier les taux de croissance linéaire du mode inertiel instable, de la même façon que les taux de déclin modaux ont été quantifiés dans le cas complètement stable. La mesure précise des taux de croissance de part et d’autre du seuil permet, via une interpolation numérique, une détermination plus précise et moins coûteuse de la courbe de stabilité marginale. Deux méthodes numériques différentes ont été testées pour l’évaluation des taux de croissance : une méthode de filtrage fréquentiel, puis l’algorithme de Prony.

6.1.2.1 Algorithme de filtrage fréquentiel

La méthode de filtrage fréquentiel de l’amplitude modale s’appuie sur une analyse de Fourier *locale* en temps et peut être résumée de la façon suivante : supposons qu’au terme d’une simulation on dispose d’un signal temporel noté $u(t)$, correspondant à une des composantes du champ de vitesse en un point donné. Cette quantité varie linéairement en fonction de l’amplitude modale. On procède à un premier fenêtrage en temps $u_T(t) \leftarrow H_T(t)u(t)$, où $H_T(t)$ est une fenêtre temporelle de type *porte* sur $[T, T + \Delta T]$. De la transformée de Fourier $\hat{u}_T(\omega)$ du

signal ainsi fenêtré, on extrait la composante $\hat{u}_T(\omega^\mu)$, correspondant à la pulsation du mode inertiel attendu, ou éventuellement de ses harmoniques $\hat{u}_T(n\omega^\mu)$, $n = 2, 3, \dots$ dans la limite où celles-ci sont d'ordre suffisamment bas pour pouvoir être résolues par la discrétisation temporelle du signal. En variant la valeur de T tout en maintenant ΔT constant, on translate la fenêtre le long de l'axe temporel, ce qui permet d'obtenir l'évolution de l'amplitude du mode ou d'une de ses harmoniques.

Lors du filtrage temporel des signaux, le problème peut se manifester par une variabilité relative des résultats numériques obtenus en fonction des paramètres de filtrage. Cette méthode de fenêtrage s'appuie en effet sur une hypothèse de séparation des échelles de temps, selon laquelle l'amplitude croît sur une échelle de temps infiniment plus longue que l'échelle de temps associée au filtrage ΔT , à son tour infiniment plus longue que l'échelle de temps courte associée aux oscillations à filtrer. Cette situation est conforme aux hypothèses de Racz lorsque $\epsilon \ll 1$, mais n'est cependant pas rigoureusement vérifiée vu la valeur choisie pour ϵ , qui n'est pas à proprement parler "infiniment petite" devant l'unité. Or pour des nombres de Reynolds modérés, ce problème s'avère difficilement contournable. Selon les prédictions analytiques, la course du piston minimale nécessaire à l'apparition d'une instabilité est en effet, à cause de l'amortissement visqueux, loin d'être petite puisque qu'elle est tout de même, pour des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^4 (accessibles expérimentalement et numériquement), d'environ 10%. Ainsi ce manque de séparation nette entre les échelles de temps caractéristiques du problème est ici un obstacle à la pertinence de l'approche asymptotique.

Indiquons au passage que la méthode d'analyse des signaux expérimentaux de Graftieaux [34] s'appuie sur une transformée de Hilbert du signal en un point suivie d'un lissage exponentiel. On peut supposer que ce type de méthode est également caractérisée par une certaine sensibilité aux paramètres numériques, dues aux aller-retours entre espaces duaux.

6.1.2.2 Algorithme de Prony

Une autre méthode numérique de détermination des taux de croissance, d'un tout autre type, a été testée. Il s'agit de la méthode dite de Prony, issue d'applications dans le domaine de l'automatique. Cette méthode algébrique ne fait pas appel à des passages dans l'espace de Fourier. Elle s'appuie sur un pas d'échantillonnage en temps constant [57]. Elle consiste à interpréter le signal dans le régime linéaire comme une somme d'exponentielles à pulsations complexes σ_k . Le signal échantillonné prend la alors forme polynômiale suivante :

$$u_n = u(n\Delta t) = \sum_k a_k z_k^n, \text{ avec } z_k = e^{(\Re(\sigma_k) + i\Im(\sigma_k))\Delta t} \quad (6.1)$$

Les variables $z_k = e^{(\Re(\sigma_k) + i\Im(\sigma_k))\Delta t}$ peuvent être interprétées comme les taux d'amplification linéaire des composantes modales du signal et sont directement reliées aux taux de croissance et aux pulsations modales. Ainsi la méthode n'est adaptée qu'à la phase d'instabilité linéaire, lorsque les différents contributions modales croissent ou décroissent de façon exponentielle, par opposition à la méthode de filtrage précédente qui permet d'extraire une amplitude des modes au-delà de cette phase de croissance linéaire. La connaissance du signal échantillonné permet d'obtenir la liste des fréquences complexes contenues dans le signal d'origine, ce qui permet donc de lier un taux de croissance à une pulsation donnée. L'idée est de retrouver, par l'inversion d'un système linéaire sous-déterminé $\sum_i \alpha_i U_{n+i} = 0$, une combinaison linéaire nulle des valeurs successives échantillonnées. Les coefficients α_i ainsi déterminés définissent alors un polynôme annulateur des z_k , par utilisation de l'identité suivante :

$$\sum_i \alpha_i U_{n+i} = \sum_i \alpha_i \left(\sum_k a_k z_k^{n+i} \right) = \sum_k a_k z_k^n \left(\sum_i \alpha_i z_k^i \right) \quad (6.2)$$

La mise en place numérique de l'algorithme passe par la recherche de l'ensemble des racines de ce polynôme annulateur, ce qui a pour effet de dégrader fortement les résultats lorsque le signal à lisser nécessite un développement sur une base d'exponentielles assez grande. La bonne utilisation de cet algorithme est donc soumise à un choix judicieux des paramètres comme la fréquence d'échantillonnage ou le degré de l'expansion. La méthode de Prony ne constitue donc pas vraiment une méthode de référence pour tester la méthode de filtrage par fenêtrage, mais constitue plutôt une alternative à cette méthode.

6.1.2.3 Comparaison des résultats obtenus

Un des avantages majeurs de l'algorithme de Prony est que la partie imaginaire du taux de croissance, qui correspond à la pulsation du mode propre identifié, est donnée avec précision. Au contraire, la méthode de fenêtrage s'appuie sur une connaissance *a priori* de la pulsation du mode, celle-ci n'étant estimée qu'à la précision associée à la transformation de Fourier du signal. Or la durée limitée de la phase d'instabilité linéaire est une limitation naturelle à la précision lors de la détermination de cette fréquence. L'utilisation de l'algorithme de Prony a donc permis une mesure effective des pulsations du signal. La signature sous-harmonique du mode instable a ainsi été identifiée comme étant la pulsation du mode naturel du système, avec une erreur inférieure dans tous les cas à 0.02%. On confirme donc par la mesure que le mode excité oscille bien à la fréquence du mode inertiel associé (avec une légère correction de la pulsation par la viscosité). Conformément au mécanisme générique des instabilités paramétriques, le forçage ne semble pas introduire de phénomène de "detuning" des fréquences propres du système.

La comparaison des deux méthodes de traitement des signaux temporels précédentes a cependant mis en évidence un phénomène limitant dans notre analyse. Pour chaque méthode, une certaine variabilité des résultats a été observée vis-à-vis des paramètres d'analyse. Pour la méthode de filtrage temporel, les paramètres concernés sont la taille du fenêtrage, le nombre de fenêtres utilisées pour décrire le signal temporel. Pour l'algorithme de Prony, en revanche, les paramètres importants sont le nombre de fonctions exponentielles utilisées pour décrire le signal ainsi que la fréquence d'échantillonnage choisie. A chacune des deux méthodes, appliquées à un signal donné pour la détermination des taux de croissance, peut être associé un nuage de points dont les écarts-type sont de l'ordre de 2% à 3% (voir figure 6.3). Pour la méthode de filtrage, l'imprécision de la méthode est due au manque de séparation nette entre les différentes échelles de temps dans le signal; pour l'algorithme de Prony, elle semble être due au compromis entre une expansion en fonctions exponentielles suffisante et la perte de précision lors de l'extraction des racines du polynôme associé lorsque l'ordre de ce polynôme augmente.

Notons au passage que ces phénomènes numériques se manifestent lors de l'application des algorithmes cités aux signaux provenant des simulations, alors qu'ils sont beaucoup moins marqués lors du calibrage de ces mêmes méthodes sur des fonctions tests. Cela laisse penser qu'un nombre important d'harmoniques différentes sont présentes dans le signal lors de la phase d'instabilité linéaire, agissant lors du filtrage comme un effet de "bruit" numérique. D'autre part, sur un même signal, après homogénéisation des différents résultats obtenus, les taux de croissance obtenus par l'une et l'autre des deux méthodes donnent des résultats sensiblement différents, dans une fourchette dont l'ordre de grandeur est environ 5%. L'écart entre les deux méthodes est comparable à l'erreur commise lorsque la discrétisation spectrale est insuffisante, avec N représentant le degré de l'expansion spectrale dans chaque direction. A titre d'exemple, pour une simulation dans un cas instable, avec $Re = 8.10^3$, on reproduit ci-après les résultats obtenus selon les différentes méthodes :

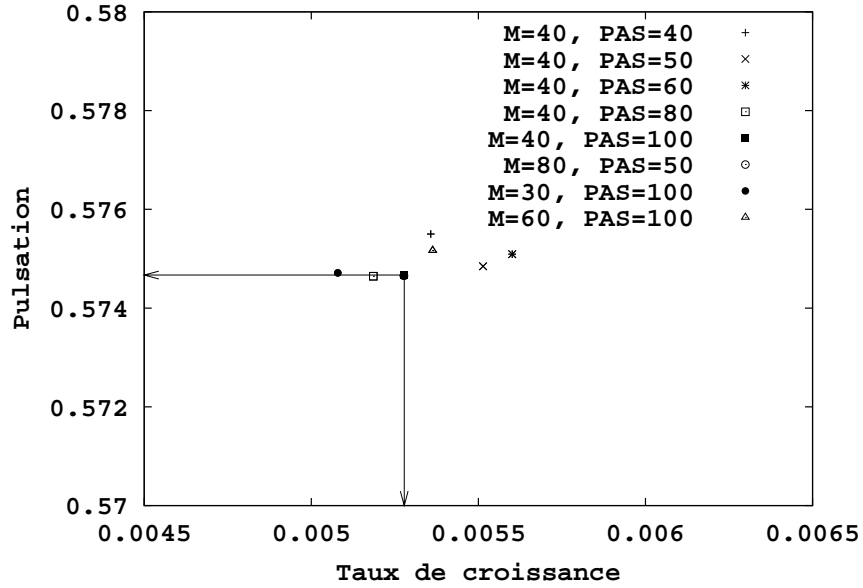


FIG. 6.3 – Répartition des taux de croissance complexes $\Re(\sigma) + i\Im(\sigma)$ associés au mode primaire instable selon la méthode de Prony, en fonction de 2 paramètres numériques : le degré de l'expansion polynômiale M et le pas d'échantillonnage. Discrétisation adoptée dans le calcul : 32^2 fonctions de base, 400 pas de temps par cycle du piston.

- $\sigma_{\text{théorique}} = +5.5721 \cdot 10^{-3} + i0.5748$
- $\sigma_{\text{filtrage}, N=32} = 5.5479 \cdot 10^{-3} + i0.5748$
- $\sigma_{\text{filtrage}, N=20} = 5.5095 \cdot 10^{-3} + i0.5748$
- $\sigma_{\text{Prony}, N=32} = 5.278 \cdot 10^{-3} + i0.5747$

Il ressort de cet exemple que *c'est la sensibilité numérique des méthodes de détermination des taux de croissance qui limite la précision globale de l'évaluation des taux de croissance*. En effet, la variation des paramètres numériques de filtrage est à l'origine d'un écart-type plus important ($\sim 5\%$) que l'erreur occasionnée ici par le schéma spectral ($\leq 1\%$).

6.1.2.4 Influence sur la détermination du nombre de Reynolds critique

Il est possible de procéder à une analyse de grandeur de l'erreur relative commise sur la valeur numérique du nombre de Reynolds critique Re_c en fonction de l'erreur $\Delta\sigma$ commise sur les taux de croissance σ . Cette grandeur $\Delta\sigma$ représente la variabilité des taux de croissance calculés en fonction de l'algorithme utilisé. Pour une valeur de ω_0 donnée, proche du seuil, on a :

$$\frac{\Delta Re_c}{Re_c} \sim \frac{\Delta\sigma}{Re_c} \frac{1}{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial Re}\right)_{\text{seuil}}}$$

Numériquement, si on retient pour $\Delta\sigma$ l'ordre de grandeur des 5% associés à l'imprécision du filtrage, identifiés auparavant comme étant la source majeure d'imprécision de l'analyse numérique, l'erreur relative sur le nombre de Reynolds critique est $\frac{\Delta Re_c}{Re_c} = 0.77\%$

TAB. 6.1 – Taux de croissance du mode inertiel (1,1,0) évalués à l’aide de l’algorithme de filtrage, pour $h_0 = 1.18$ et $\epsilon = 0.131$, en fonction de la fréquence de forçage ω_0 (en abscisses) et du nombre de Reynolds Re (en ordonnées).

ω_0	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17
Re=4937,5	-4, 24.10 ⁻³	-2, 00.10 ⁻³	-8, 14.10 ⁻⁴	-6, 98.10 ⁻⁴	-1, 65.10 ⁻³	-3, 66.10 ⁻³
Re=5375	-3, 74.10 ⁻³	-1, 51.10 ⁻³	-3, 52.10 ⁻⁴	-2, 56.10 ⁻⁴	-1, 23.10 ⁻³	-3, 26.10 ⁻³
Re=5812,5	-1, 81.10 ⁻³	3, 81.10 ⁻⁴	1, 52.10 ⁻³	1, 59.10 ⁻³	6, 09.10 ⁻⁴	-1, 43.10 ⁻³
Re=6250	-6, 57.10 ⁻⁴	1, 48.10 ⁻³	2, 56.10 ⁻³	2, 57.10 ⁻³	1, 51.10 ⁻³	-6, 17.10 ⁻⁴
Re=6687,5	1, 96.10 ⁻⁴	2, 46.10 ⁻³	3, 58.10 ⁻³	3, 54.10 ⁻³	2, 34.10 ⁻³	-1, 59.10 ⁻⁵
Re=7125	1, 09.10 ⁻³	3, 32.10 ⁻³	4, 39.10 ⁻³	4, 31.10 ⁻³	3, 07.10 ⁻³	6, 67.10 ⁻⁴
Re=7562,5	1, 95.10 ⁻³	4, 08.10 ⁻³	5, 06.10 ⁻³	4, 89.10 ⁻³	3, 56.10 ⁻³	1, 08.10 ⁻³
Re=8000	2, 76.10 ⁻³	4, 83.10 ⁻³	5, 75.10 ⁻³	5, 51.10 ⁻³	4, 11.10 ⁻³	1, 56.10 ⁻³

6.1.3 Seuil d’instabilité marginale dans le plan ($\omega_0 - Re$)

La mesure des taux de croissance, effectuée à l’aide de la méthode de filtrage fréquentiel, a été répétée pour un grand nombre de valeurs des paramètres ω_0 et du nombre de Reynolds Re . Une cartographie du taux de croissance dans cet espace des paramètres, réduit à deux dimensions, a ainsi été réalisée. Une interpolation numérique de cette base de données permet de déterminer avec une bonne précision la courbe de stabilité marginale du système pour une géométrie et une course du piston données. On constate que la zone instable prend la forme d’une langue centrée sur une fréquence centrale proche de $2\omega_{mode} \sim 1.155$, ce qui confirme la condition de résonance $|2\omega^{mode} - \omega_0| = O(\epsilon)$. Pour une pulsation de forçage donnée, on vérifie l’existence d’un nombre de Reynolds critique en-dessous duquel l’état de base est stable. La croissance du mode est d’autant plus importante que le nombre de Reynolds est élevé, ce qui met en évidence le caractère stabilisant de la viscosité (voir tableau 6.1). La partie inférieure de la langue d’instabilité détermine, à l’erreur d’interpolation numérique près, un couple de paramètres critiques ($\omega_c - Re_c$).

Une comparaison avec les courbes de stabilité marginales issues des travaux de Raczy et Scott [28] ainsi qu’avec les résultats expérimentaux de Graftieaux [34] a été réalisée sur la figure 6.4. L’allure théorique de la langue d’instabilité est bien reproduite par les données numériques et expérimentales. Une estimation directe des paramètres critiques donne :

- ($\omega_c - Re_c$)*analytique*=(1.155,5250)
- ($\omega_c - Re_c$)*experimental*=(1.159,6160)
- ($\omega_c - Re_c$)*numerique*=(1.150,5430)

L’erreur relative entre les prédictions analytiques et la simulation numérique est donc de l’ordre de 0.4% sur la pulsation critique et de 3.3% sur la valeur du nombre de Reynolds critique. Cette erreur peut être interprétée comme relativement faible compte tenu du fait que les conditions de course modérée ($\epsilon = 13, 1\%$) ne permettent a priori de se placer dans le cadre des prédictions analytiques de Raczy et Scott, basées sur l’hypothèse d’une course asymptotiquement petite.

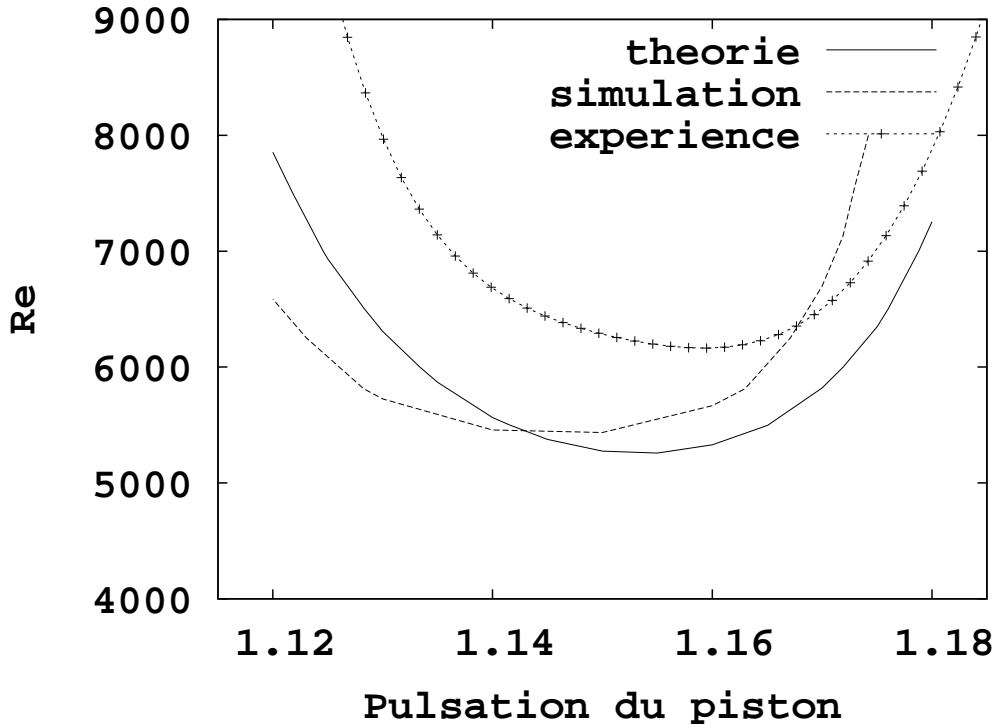


FIG. 6.4 – Courbe marginale de stabilité relative à l’instabilité du mode axisymétrique primaire dans la zone centrale de la langue d’instabilité, pour $h_0 = 1.18$, $\epsilon = 0.131$, en fonction des paramètres ω_0 et $Re = \frac{2\Omega a^2}{\nu(t)}$. Comparaison entre les résultats analytiques, expérimentaux et numériques.

6.1.3.1 Origine des écarts avec la théorie

Afin de vérifier l’influence quantitative des effets de grande course du piston sur les paramètres critiques, on peut regarder de plus près l’influence des termes analytiques instationnaires qui ont été simplifiés dans l’équation 2.41, sous l’hypothèse $\epsilon \ll 1$. Parmi les termes simplifiés, on peut évoquer les termes incluant l’état de base visqueux \mathbf{U} , tous les termes en $(\frac{h}{h_0})^2$ présents dans les termes de couplage linéaire et non linéaires, ainsi que la dépendance temporelle du nombre de Reynolds. Plutôt que de mesurer l’influence de ces contributions terme par terme à l’ordre $O(\epsilon^2)$ dans le développement faiblement non linéaire 2.45, on peut se concentrer par exemple sur le nombre de Reynolds instationnaire $Re(t) = \frac{2\Omega a^2}{\nu(t)}$. Racz a supposé, à l’ordre dominant selon les puissances croissantes de ϵ , que ce nombre de Reynolds instationnaire peut être assimilé à une constante, choisie égale à $Re_0 = \frac{2\Omega a^2}{\nu|_{h(t)=h_0}}$. La simulation numérique permettant de se dispenser ou pas de cette hypothèse, deux mesures du taux de croissance du mode, dans des conditions d’instabilité proches du seuil ($Re_0 = 6000$, $\omega_0 = 1.15$), ont été effectuées : la première en tenant compte de l’instationnarité du coefficient de viscosité, la seconde avec l’hypothèse que ce coefficient reste constant dans le temps malgré la valeur de la course adoptée. On a volontairement renoncé à procéder à d’autres approximations au même ordre, dans le but de quantifier l’influence directe de cette hypothèse sur la mesure des taux de croissance) :

$$- \sigma_{[Re \text{ instationnaire}]} = 1.99 \cdot 10^{-3}$$

$$- \sigma_{[Re \text{ constant}]} = 1.85 \cdot 10^{-3}$$

La différence entre ces deux valeurs est de 7.2%, ce qui donne une incertitude sur la valeur de Re_c de l’ordre de 1.1%. Cette erreur est déjà plus grande que l’écart entre la valeur de Re_c

fournie par la simulation numérique (avec Re instationnaire) et celle prédite par Racz. Ceci souligne l'importance au moins quantitative des puissances de ϵ négligées dans les diverses approximations effectuées lors de la détermination des paramètres critiques du système.

6.1.3.2 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux de Graftieaux présentent un plus grand décalage quant à la prédiction du nombre de Reynolds critique Re_c , surestimé par rapport à la théorie d'environ 17.3%. On note également un décalage de l'ordre de 1% sur la fréquence centrale ω_c de la langue d'instabilité entre la théorie et l'expérience. On constate que la valeur expérimentale semble surestimer la valeur théorique de la fréquence de résonance critique alors que la valeur numérique en est une valeur approchée par défaut.

Sans référence aux résultats analytiques, l'écart entre simulation numérique et expérience est de l'ordre de 0.79% sur la fréquence résonante et de 13.6% sur le nombre de Reynolds critique, ce qui reste satisfaisant dans le cadre d'une confrontation numérique/expérimental. Si aucune explication n'est disponible actuellement sur l'origine du décalage en fréquence observé, en revanche on peut s'interroger si les quantités appelées "nombre de Reynolds" concordent bien de part et d'autre. En effet, la mesure du nombre de Reynolds moyen dans le cadre expérimental provient d'une estimation de la viscosité moyenne du gaz, basée sur des mesures directes de la pression statique moyenne à l'intérieur du cylindre. Cette mesure de pression est d'une part assez délicate puisqu'elle est intrusive, d'autre part aucun moyen n'est disponible pour vérifier l'homogénéité spatiale de la pression statique (et ainsi de la viscosité) à l'intérieur du cylindre, sachant que les défauts d'adiabaticité des parois du cylindre sont difficiles à quantifier et que l'hypothèse d'adiabaticité est fondamentale dans la dérivation du système d'équations utilisé dans le cadre analytique et numérique. Ceci peut expliquer un léger décalage ou une dilatation des courbes de seuil selon l'axe associé au nombre de Reynolds. Afin de quantifier l'erreur commise, on peut se baser la loi de Sutherland déjà évoquée dans le chapitre 2, selon laquelle le nombre de Reynolds instantané varie en fonction de la température comme $Re \sim T^\alpha$, où $\alpha = \frac{7}{4}$. L'hypothèse d'adiabaticité permet donc de dériver la loi du nombre de Reynolds en fonction de la pression thermodynamique : $Re \sim p^{\alpha \frac{\gamma-1}{\gamma}}$, où $\gamma = \frac{7}{5}$. On en déduit la loi d'erreur $\frac{\Delta Re}{Re} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p}$. Dans les conditions de l'expérience, une erreur expérimentale de l'ordre de 10%, sur la pression moyenne mesurée induit donc une erreur non négligeable de 5% sur l'estimation du nombre de Reynolds moyen.

6.2 Comportement non linéaire du mode axisymétrique primaire

6.2.1 A la recherche d'un état saturé

Dans un cas instable, l'amplitude de la perturbation à l'état de base croît de façon exponentielle jusqu'à ce que les effets non linéaires, faibles dans le début de la phase de croissance, deviennent progressivement non négligeables. On rappelle que dans l'espace des phases (amplitude-phase) servant à décrire la dynamique du mode inertiel instable, plusieurs scénarios ont été prédits par Racz et Scott à partir d'une analyse faiblement non linéaire basée sur une décomposition suivant les puissances croissantes de $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ (2.45). Selon cette analyse, pour des nombres de Reynolds proche du seuil, le système peut converger vers un point fixe nul (auquel cas l'écoulement de base est stable) ou vers un point fixe non nul (auquel cas l'écoulement de base est instable et le mode inertiel se retrouve au-delà de la phase de croissance dans un état de saturation, voir figure 2.5).

Pour des nombres de Reynolds de plus en plus élevés, la dynamique du mode instable axisymétrique est couplée avec celle des modes géostrophiques axisymétriques, et le système peut évoluer vers un cycle limite (voir figure 2.6), un cycle limite avec une dynamique à deux phases (voir figure 2.7).

La théorie faiblement non linéaire indique également la possibilité, au-delà d'une certaine course critique, ou de façon équivalente, au-delà d'un certain nombre de Reynolds pour une course fixée, d'une divergence exponentielle des trajectoires dans l'espace des phases. L'interprétation physique de cette prédiction n'est pas encore claire, si ce n'est que ce scénario met en évidence les limitations de la troncature à l'ordre dominant selon les puissances croissantes de ϵ . Dans la thèse de Graftieaux, seuls les trois premiers scénarios (stabilité, instabilité avec saturation, instabilité avec modulation périodique de l'amplitude sur le temps long) ont été clairement mis en évidence.

Ici, les différents états du système ont été explorés en maintenant le rapport d'aspect, la course du piston ainsi que la fréquence d'excitation fixe ($\omega_0 = 1.15$) à une valeur proche de la résonance théorique exacte (et égale à la valeur exacte issue des estimations numériques). Le nombre de Reynolds Re a été progressivement augmenté à partir d'un état stable afin de passer en revue les différentes dynamiques possibles. Un comportement asymptotique de point fixe a été repéré pour $Re = 6000$, et dès $Re \sim 6500$, toutes les simulations numériques font état d'un régime saturé avec une modulation périodique de l'amplitude (voir figures 6.5, 6.6 et 6.7. Ces comportements sont également ceux mis en évidence expérimentalement par Graftieaux.

Il est intéressant de noter que le cas $Re = 6000$ a été étudié numériquement par Racz à partir des équations d'amplitude de sa thèse, en utilisant les mêmes valeurs de h_0 , ϵ et $\hat{\Delta}$, mais que ce point de fonctionnement est associé selon ses simulations à un comportement de cycle limite, alors qu'il met bien en évidence un attracteur de type point fixe pour les valeurs $Re = 5000$ et $Re = 5750$. Cette différence de comportement n'est pas surprenante compte tenu du faible écart entre analyse et simulation numérique directe déjà identifié pour la courbes marginales de stabilité. En revanche, on remarque que la valeur $Re = 6000$ se situe 10.5% au-dessus du seuil Re_c estimé par la simulation numérique alors que la valeur $Re = 5750$ se situe 9,4% au-dessus du seuil Re_c issu de l'analyse et que la valeur $Re = 6000$ se situe elle 14,2% au-dessus de ce même seuil théorique. Il est donc sans doute plus pertinent de raisonner avec les valeurs numériques de l'écart au seuil qu'avec la valeur brute du nombre de Reynolds.

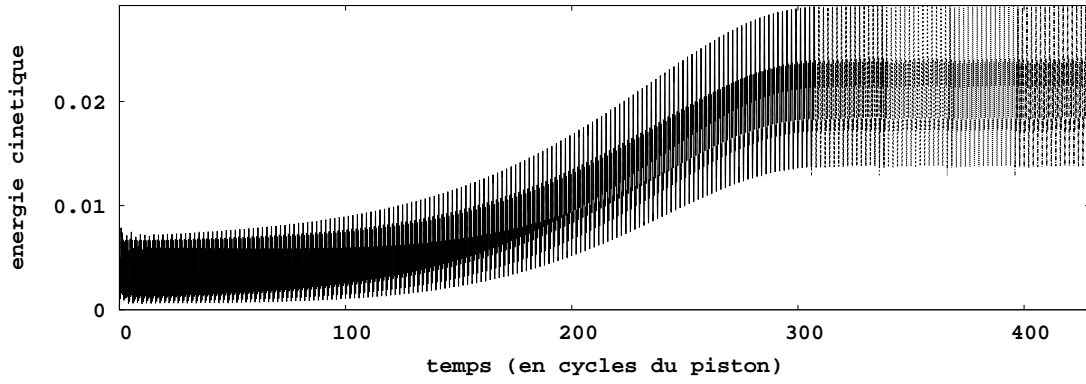


FIG. 6.5 – Energie cinétique totale de l'écoulement pour $\omega_0 = 1.15$ et $Re = 6000$

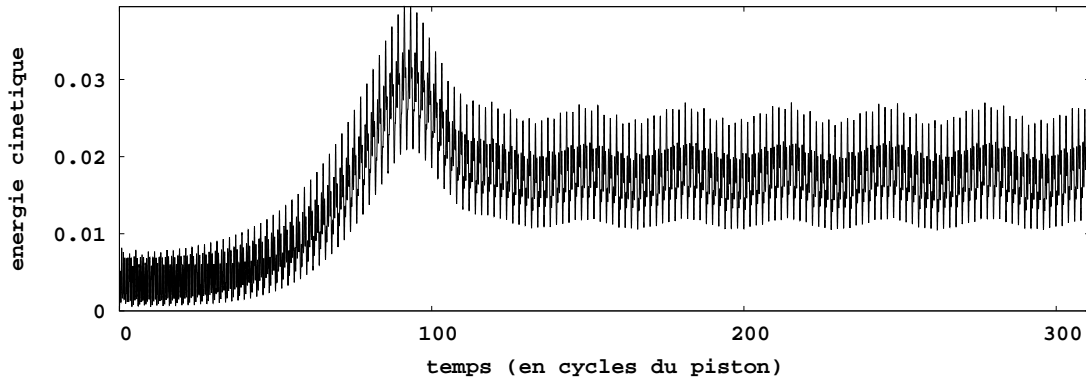


FIG. 6.6 – Energie cinétique totale de l'écoulement pour $\omega_0 = 1.15$ et $Re = 8500$

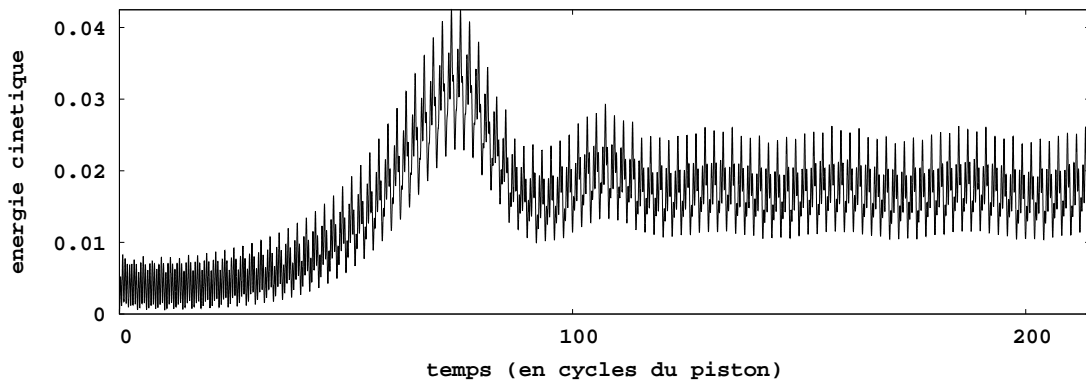


FIG. 6.7 – Energie cinétique totale de l'écoulement pour $\omega_0 = 1.15$ et $Re = 10000$

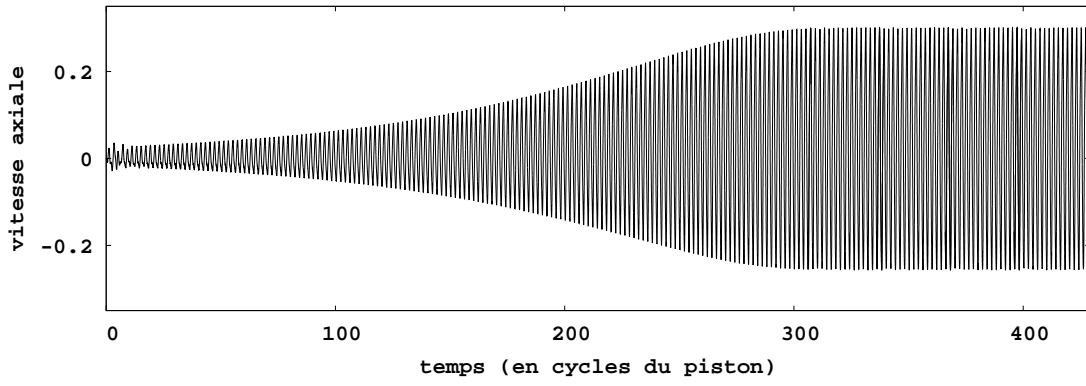


FIG. 6.8 – Vitesse axiale au point $(0.094, \frac{h_0}{2})$ pour $\omega_0 = 1.15$ et $Re = 6000$

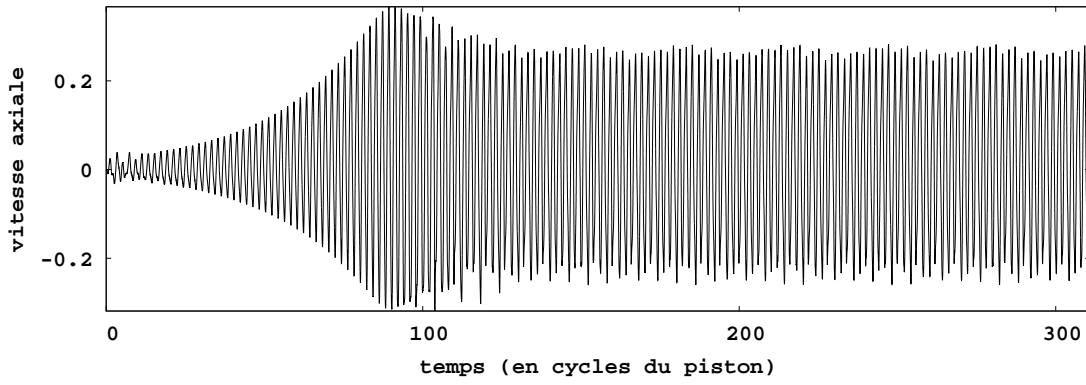


FIG. 6.9 – Vitesse axiale au point $(0.094, \frac{h_0}{2})$ pour $\omega_0 = 1.15$ et $Re = 8500$

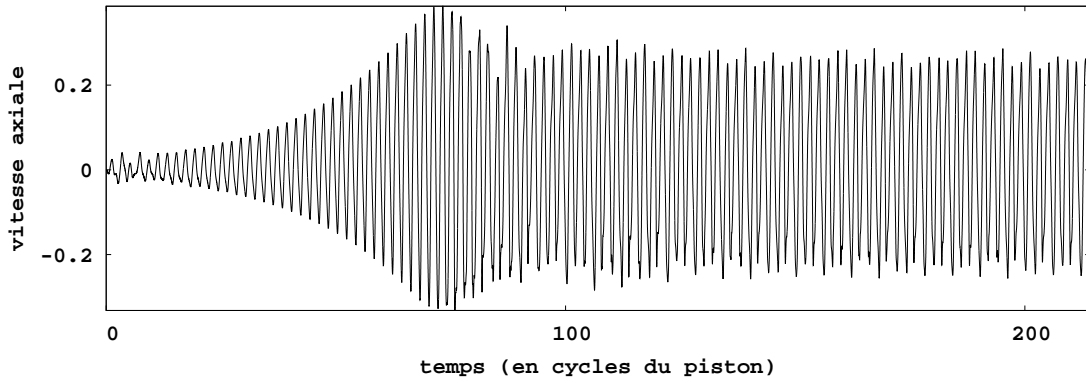


FIG. 6.10 – Vitesse axiale au point $(0.094, \frac{h_0}{2})$ pour $\omega_0 = 1.15$ et $Re = 10000$

6.2.2 Saturation avec oscillations basse fréquence

Lorsque le nombre de Reynolds augmente, tous les autres paramètres du problème étant maintenus fixes dans des conditions propices à la résonance, la simulation numérique montre une évolution vers une dynamique plus complexe que le précédent cas de saturation de l'amplitude : l'énergie cinétique ainsi que les différentes composantes du champ de vitesses restent bornées mais subissent une modulation périodique sur une échelle de temps plus longue que le temps d'une oscillation modale (voir figures 6.6 et 6.7). Ce comportement est prévu par l'analyse par un scénario de bifurcation de Hopf. Dans l'expérience, ce comportement oscillatoire a également été mis en évidence, cependant les résultats ne semblent pas confirmer l'hypothèse d'une bifurcation. La fréquence de modulation semble indépendante du point de mesure tant que celui-ci ne se trouve pas dans la zone de couche limite, mais est en revanche sensible à la valeur de Re choisie.

Le mécanisme proposé pour justifier ce type d'état oscillatoire à basse fréquence est un cycle limite dans l'espace des paramètres du problème, où le système est alternativement accordé et désaccordé en fréquence [28] [32]. Plus précisément, lorsque l'amplitude du mode instable croît à partir d'une valeur faible dans des conditions de résonance paramétrique, le couplage non linéaire entre le mode instable et la famille des modes géostrophiques implique la croissance simultanée de composantes géostrophiques. L'introduction de ces composantes géostrophiques, associées à des écoulements majoritairement azimuthaux bien que dépendants de la variable radiale r , modifie le taux de rotation local du fluide, et place ainsi le système hors des conditions de résonance permettant la croissance modale. La perturbation introduite décline donc, de même que les modes géostrophiques issus du couplage. L'accord fréquentiel à nouveau vérifié, la perturbation se remet à croître jusqu'à ce que le couplage non-linéaire intervienne de nouveau pour désaccorder la résonance, et ainsi de suite jusqu'à ce que le phénomène devienne périodique.

6.2.3 Structure spatiale du mode axisymétrique primaire

Les simulations numériques présentées dans cette partie ont été réalisées pour deux points de fonctionnement différents, correspondant aux deux types de régime observés, et qui seront discutés dans la section suivante. Ces deux régimes sont $Re = 6000$ et $Re = 8500$, et correspondent respectivement au cas théorique de saturation de l'amplitude modale et au cas d'une saturation du mode avec modulation périodique de son amplitude sur une échelle de temps long.

- Premier point de fonctionnement : $h_0 = 1,18$, $\epsilon = 0,131$, $\omega_0 = 1,15$, $Re = 6000$, calcul montré au temps $t = 320.5$ cycles du piston à partir d'une condition initiale nulle ($t = 320$ cycles du piston pour le champ azimuthal qui est en quadrature de phase avec les composantes méridiennes).
- Second point de fonctionnement : $h_0 = 1,18$, $\epsilon = 0,131$, $\omega_0 = 1,15$, $Re = 8500$, calcul montré au temps $t = 180.5$ cycles du piston à partir d'une condition initiale nulle ($t = 180$ cycles du piston pour le champ azimuthal qui est en quadrature de phase avec les composantes méridiennes).

Les profils de vitesses instantanés, issus de la simulation, présentent à chaque pas de temps une similitude relative avec les profils de vitesse associés au mode de Kelvin $(1, 1, 0)$ théorique hors des zones de paroi. Cependant, il est plus pertinent de comparer ce même profil théorique avec le champ simulé auquel un filtrage en fréquence a été appliqué. L'idée est que le champ de vitesses total est la somme de plusieurs composantes oscillant à des fréquences différentes, comme l'atteste la figure 6.2. Ainsi on choisit de ne retenir du champ simulé que la compo-

sante spectrale oscillant à la fréquence naturelle du mode de Kelvin, c'est-à-dire la moitié de la fréquence du piston. Ce filtrage a été réalisé en mesurant, en chaque point du domaine physique, les 3 composantes du vecteur vitesse. A chacun des signaux obtenus a ensuite été appliquée une transformation de Fourier pour décrire le champ de vitesses dans l'espace des fréquences. Un fenêtrage passe-bande de faible largeur spectrale est ensuite appliqué aux spectres ainsi déterminés, centré autour de la fréquence du mode. Une transformée de Fourier inverse permet finalement de revenir à un signal temporel et d'analyser les profils de vitesse associés.

Le profil de vitesses de l'écoulement obtenu par le procédé de filtrage décrit auparavant a été comparé, composante par composante, avec le profil de vitesses associé au mode de Kelvin (1,1,0) non visqueux. C'est en effet cette quantité qui intervient directement dans la décomposition modale de Racz et Scott. Les figures 6.14 à 6.19 correspondent au cas $Re = 6000$, alors que les figures 6.20 à 6.25 correspondent au cas $Re = 8500$). La comparaison avec le mode inertiel visqueux, défini pour la valeur correspondante du nombre de Reynolds, permet une comparaison des profils de vitesse dans les zones de proche paroi.

L'échelle pour l'amplitude du mode de Kelvin non visqueux est indicative puisque celui-ci, en tant que solution d'un problème linéaire, est défini à une constante multiplicative près. Les champs de vitesse méridiens, bruts et filtrés, provenant de la simulation ont été comparés au mode de Kelvin non visqueux affecté d'un facteur de pondération. On a choisi de pondérer différemment le mode de Kelvin selon que l'on présente la comparaison du champ méridien ou du champ azimuthal. On rappelle que, d'après leur expression analytique (2.33,2.34,2.35), les composantes radiales et axiales évoluent toutes les deux en quadrature de phase avec la composante azimuthale. Au cours d'un cycle modal l'énergie cinétique du mode se répartit donc alternativement entre le champ méridien et le champ azimuthal. La partie méridienne du mode de Kelvin est pondérée par le facteur $\sqrt{\frac{(\int |V_r|^2 + |V_z|^2)_{champ\ filtré}}{(\int |V_r|^2 + |V_z|^2)_{mode\ de\ Kelvin}}}$, qui représente le rapport énergétique entre le champ filtré méridien et le mode de Kelvin méridien. Ainsi on est certain de comparer deux champs méridiens qui possèdent la même énergie totale. De même, pour la comparaison des champs azimuthaux, on a choisi comme facteur de pondération la quantité $\sqrt{\frac{(\int |V_\theta|^2)_{champ\ filtré}}{(\int |V_\theta|^2)_{mode\ de\ Kelvin}}}$.

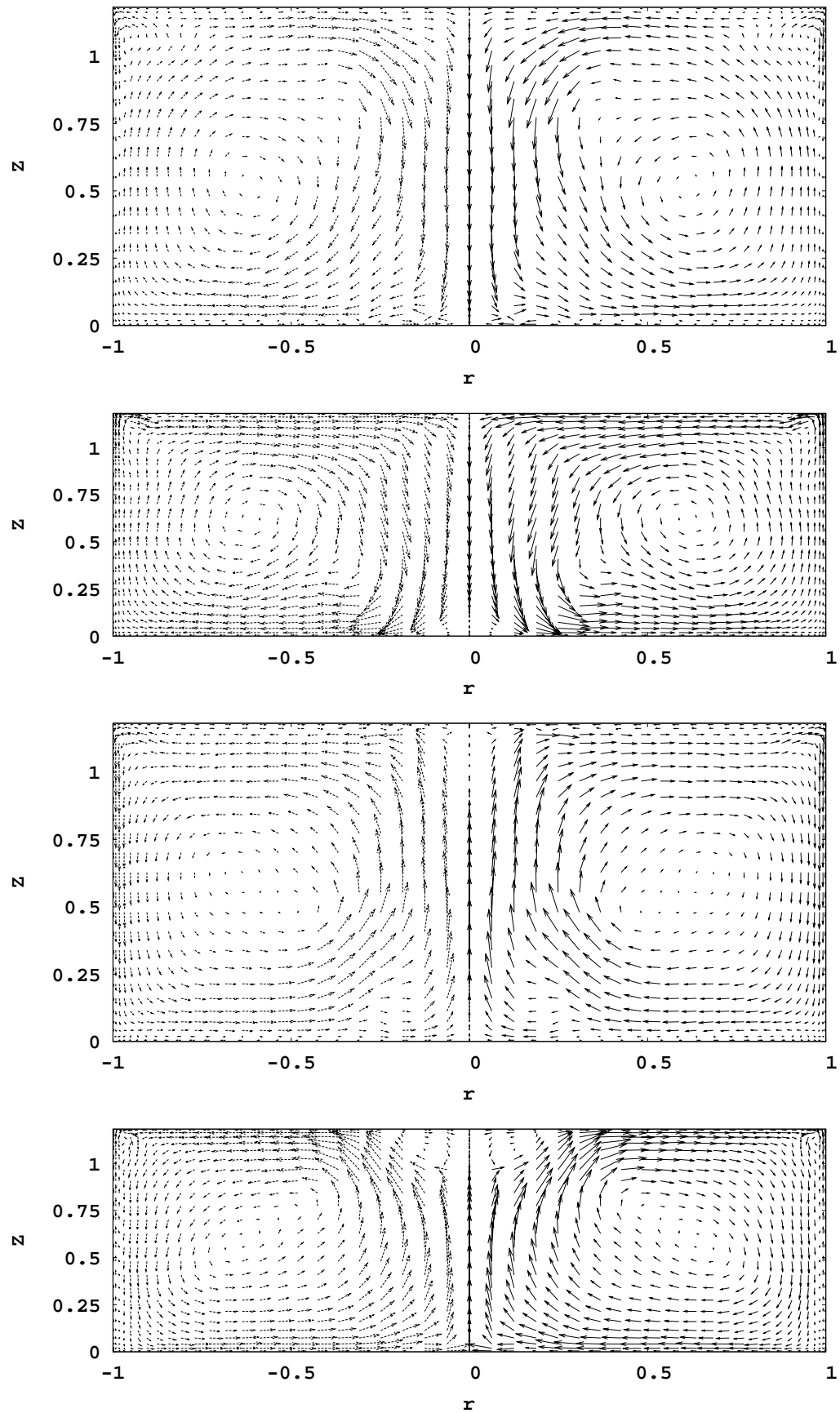


FIG. 6.11 – Champ de vitesse méridien sur un cycle d'oscillation du mode axisymétrique primaire en phase non linéaire, *sans* filtrage, $h_0 = 1.18$, $Re = 8500$, $\omega_0 = 1.15$, $\epsilon = 0.131$, aux temps $t = 180, 180.5, 181, 181.5$ cycles du piston. La même échelle de vitesse a été conservée sur les 4 figures. La hauteur graphique des fenêtres indique la hauteur instantanée du cylindre.

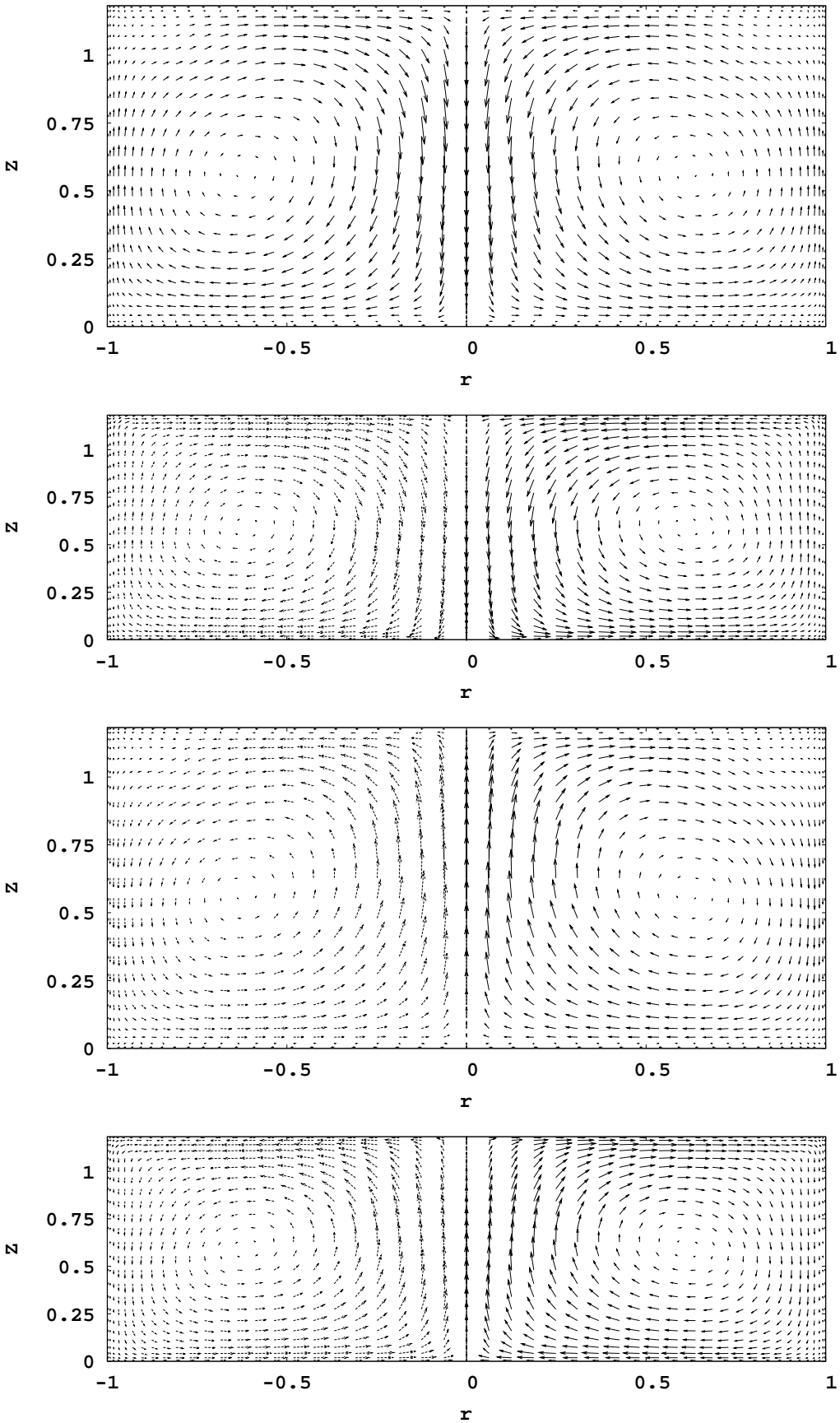


FIG. 6.12 – Champ de vitesse méridien sur un cycle d'oscillation du mode axisymétrique primaire en phase non linéaire, avec filtrage à la fréquence du mode, $h_0 = 1.18$, $Re = 8500$, $\omega_0 = 1.15$, $\epsilon = 0.131$, aux temps $t = 180, 180.5, 181, 181.5$ cycles du piston. La même échelle de vitesse a été conservée sur les 4 figures.

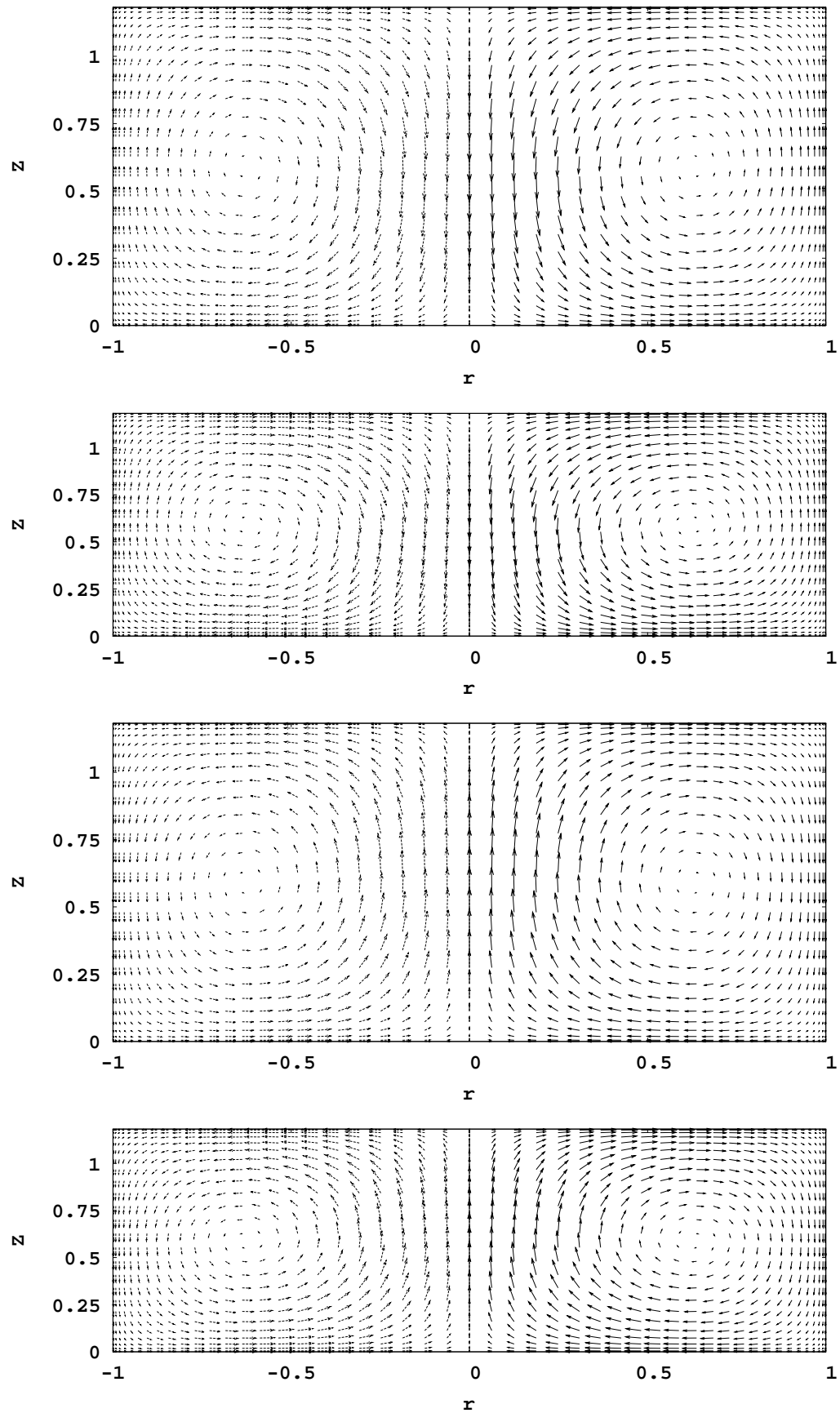


FIG. 6.13 – Champ de vitesse méridien sur un cycle d'oscillation du mode de Kelvin théorique non-visqueux (1,1,0), aux temps $t = 180, 180.5, 181, 181.5$ cycles du piston. Les champs vitesses ont été normalisés par la racine carrée du rapport entre les énergies cinétiques méridiennes du champ filtré et du champ théorique.

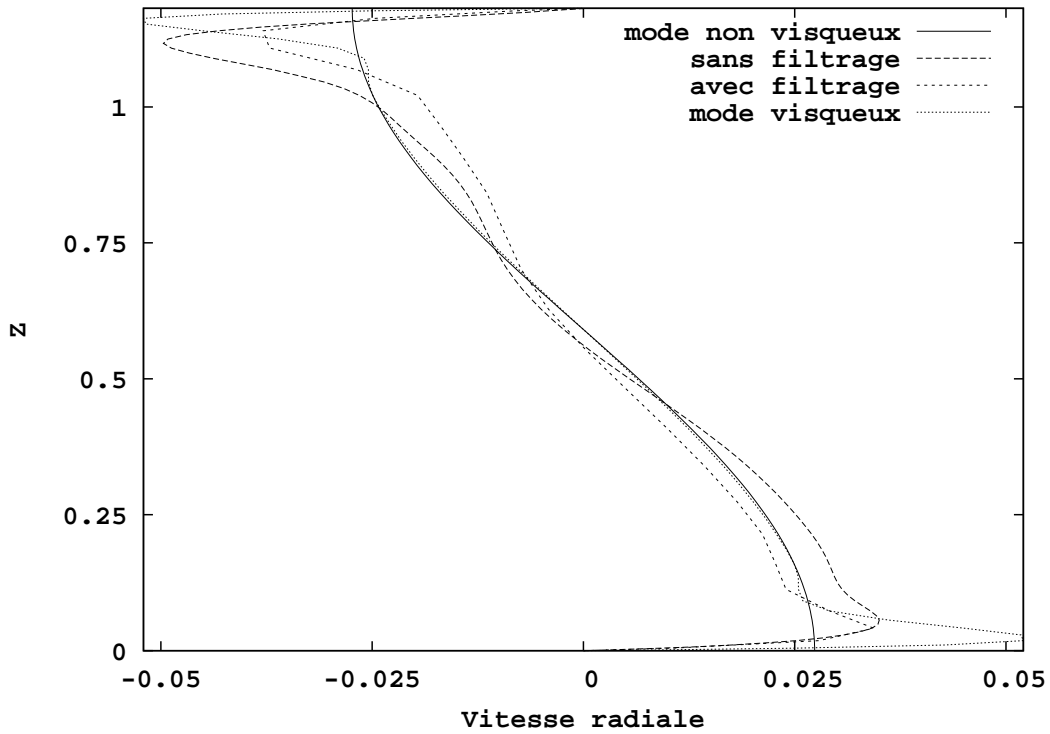


FIG. 6.14 – Profils de vitesse radiale comparés du mode inertiel non visqueux, du mode inertiel visqueux à $Re = 6000$, du champ brut et du champ filtré à la fréquence propre du mode de Kelvin, calculés pour $r = 0.81$ et $t = 320.5$ cycles du piston.

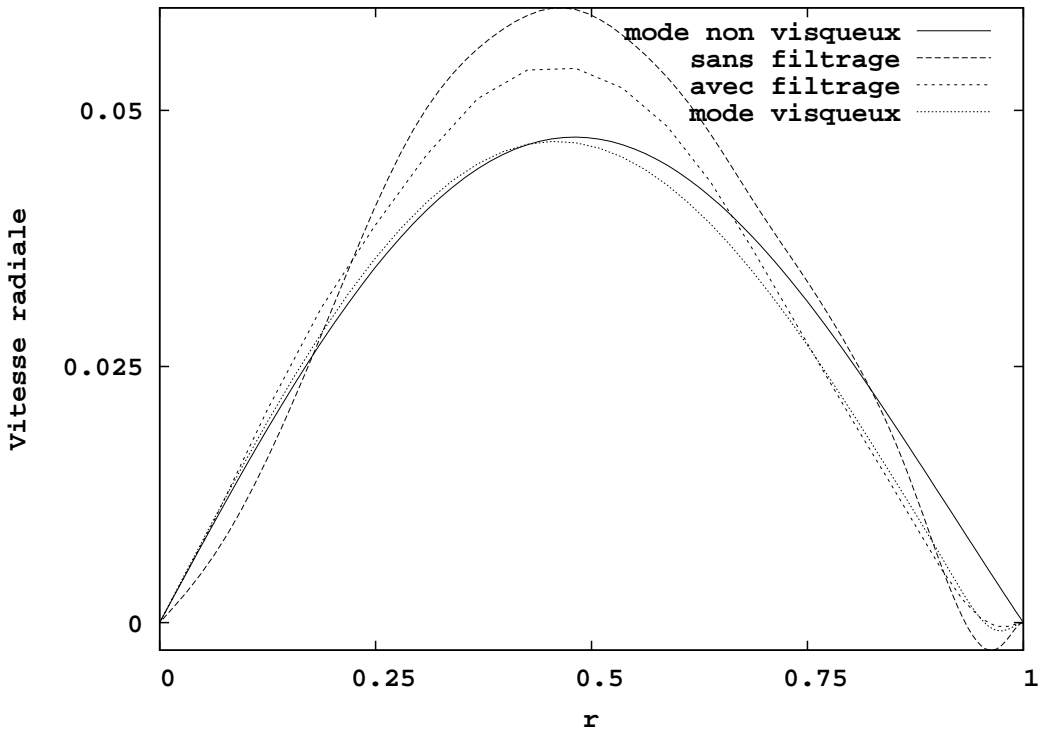


FIG. 6.15 – Profils de vitesse radiale comparés du mode inertiel non visqueux, du mode inertiel visqueux à $Re = 6000$, du champ brut et du champ filtré à la fréquence propre du mode de Kelvin, calculés pour $Z = 0.85h_0$ et $t = 320.5$ cycles du piston.

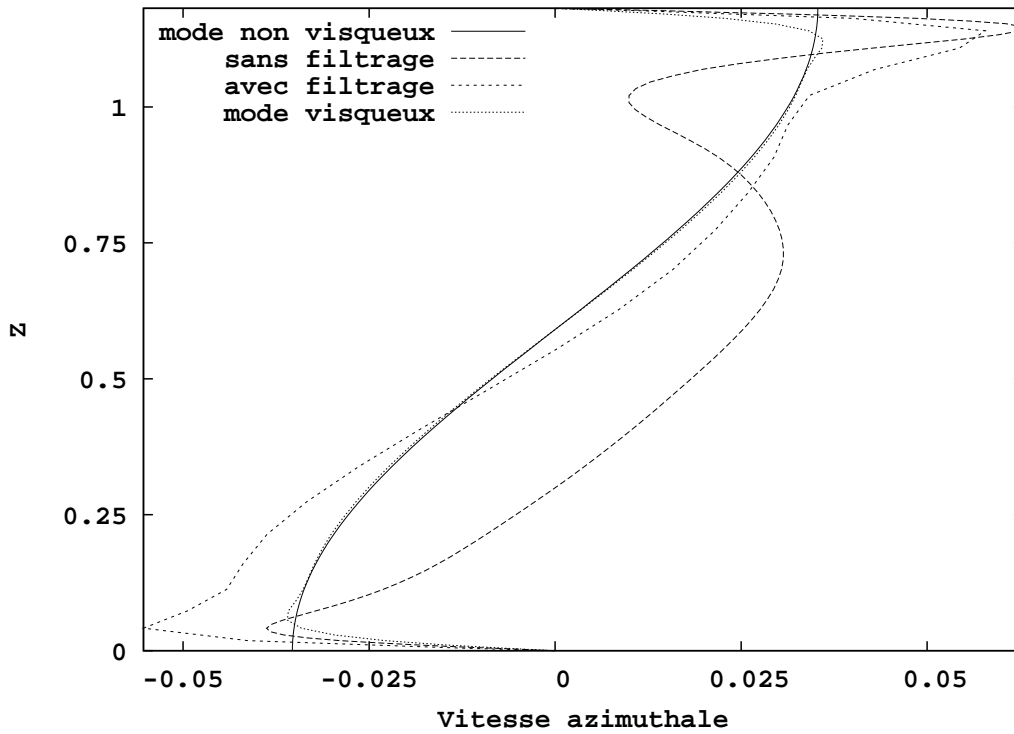


FIG. 6.16 – Profils de vitesse azimuthale comparés du mode inertiel non visqueux, du mode inertiel visqueux à $Re = 6000$, du champ brut et du champ filtré à la fréquence propre du mode de Kelvin, calculés pour $r = 0.81$ et $t = 320$ cycles du piston.

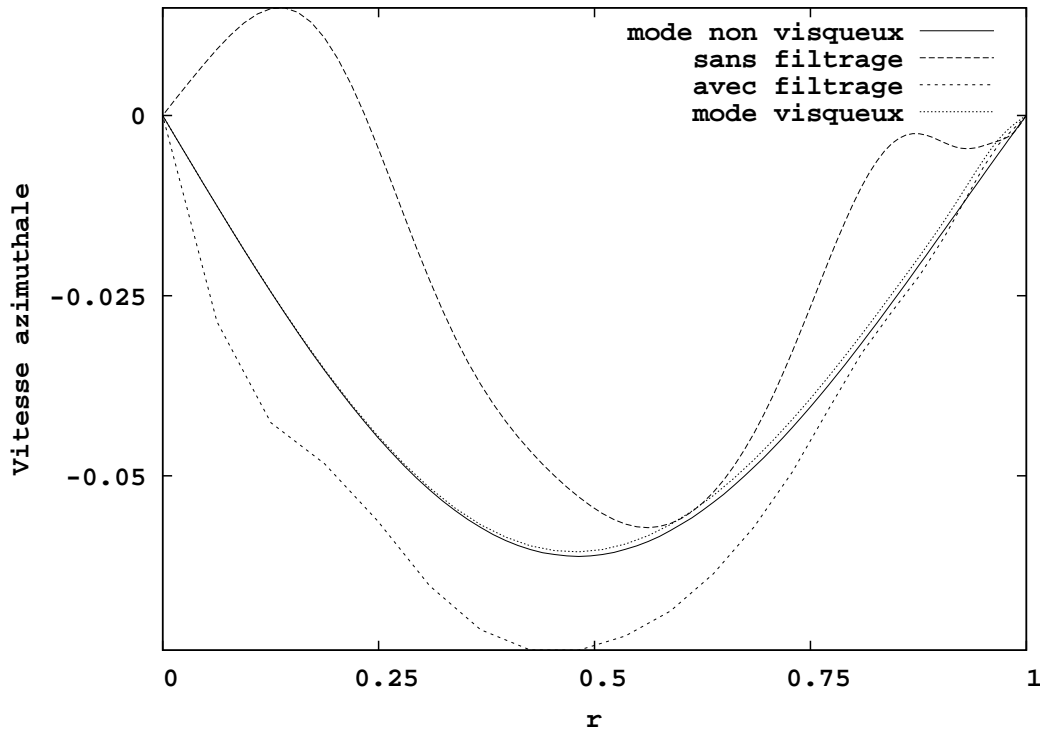


FIG. 6.17 – Profils de vitesse azimuthale comparés du mode inertiel non visqueux, du mode inertiel visqueux à $Re = 6000$, du champ brut et du champ filtré à la fréquence propre du mode de Kelvin, calculés pour $Z = 0.85h_0$ et $t = 320$ cycles du piston.

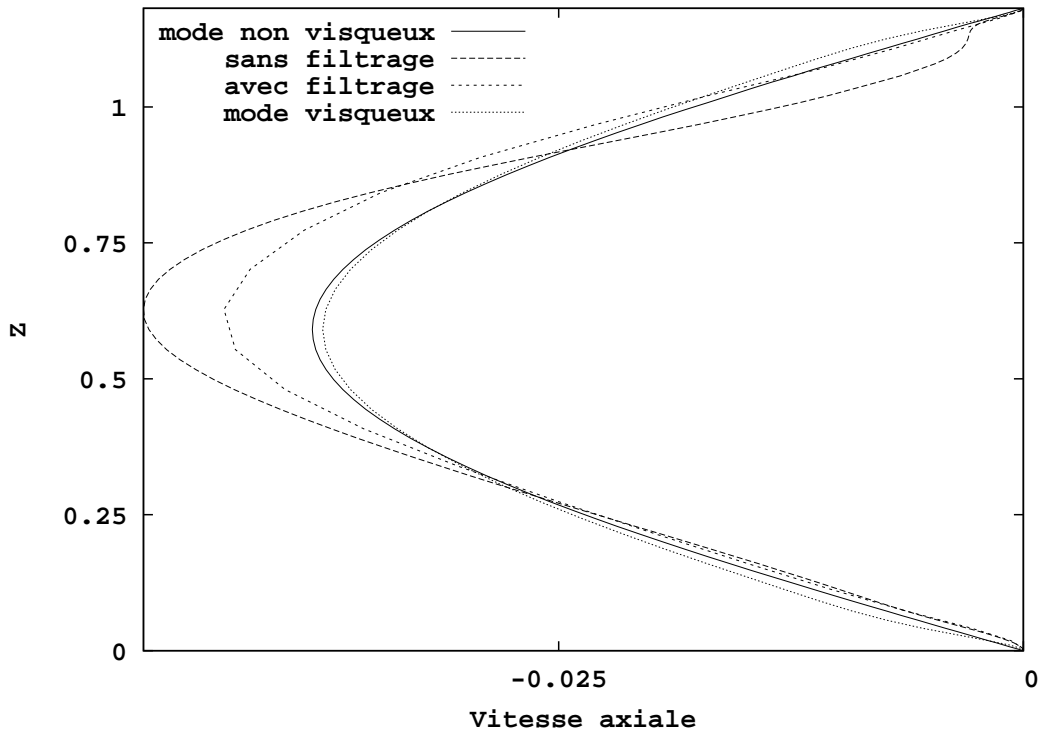


FIG. 6.18 – Profils de vitesse axiale comparés du mode inertiel non visqueux, du mode inertiel visqueux à $Re = 6000$, du champ brut et du champ filtré à la fréquence propre du mode de Kelvin, calculés pour $r = 0.81$ et $t = 320.5$ cycles du piston.

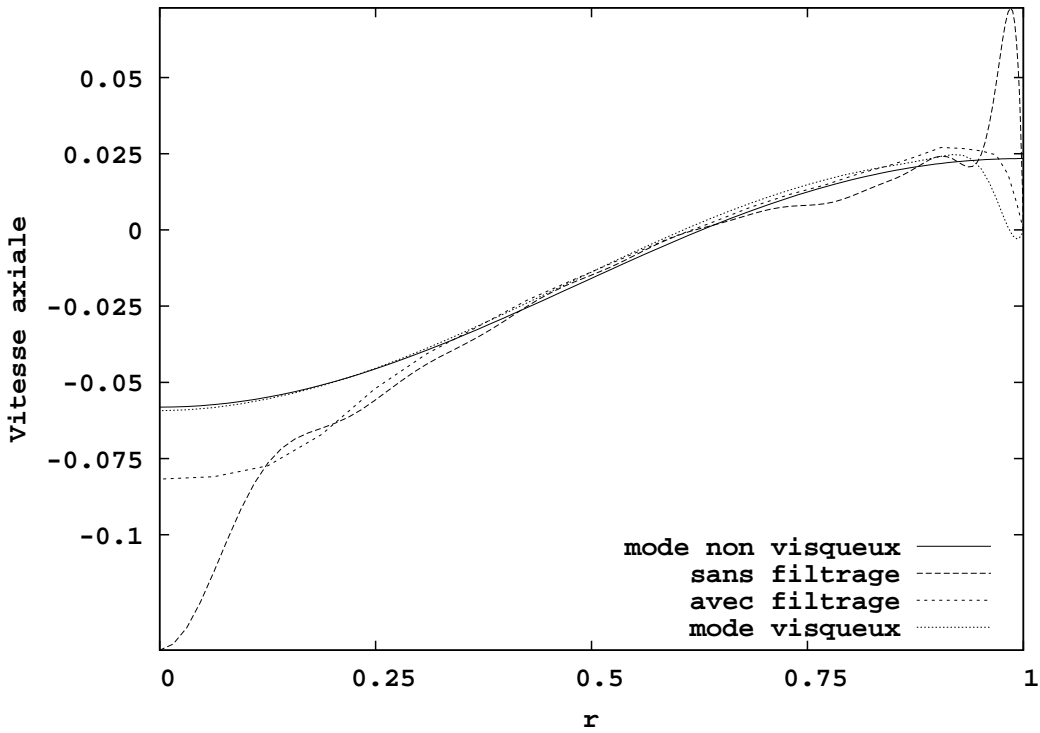


FIG. 6.19 – Profils de vitesse axiale comparés du mode inertiel non visqueux, du mode inertiel visqueux à $Re = 6000$, du champ brut et du champ filtré à la fréquence propre du mode de Kelvin, calculés pour $Z = 0.85h_0$ et $t = 320.5$ cycles du piston.

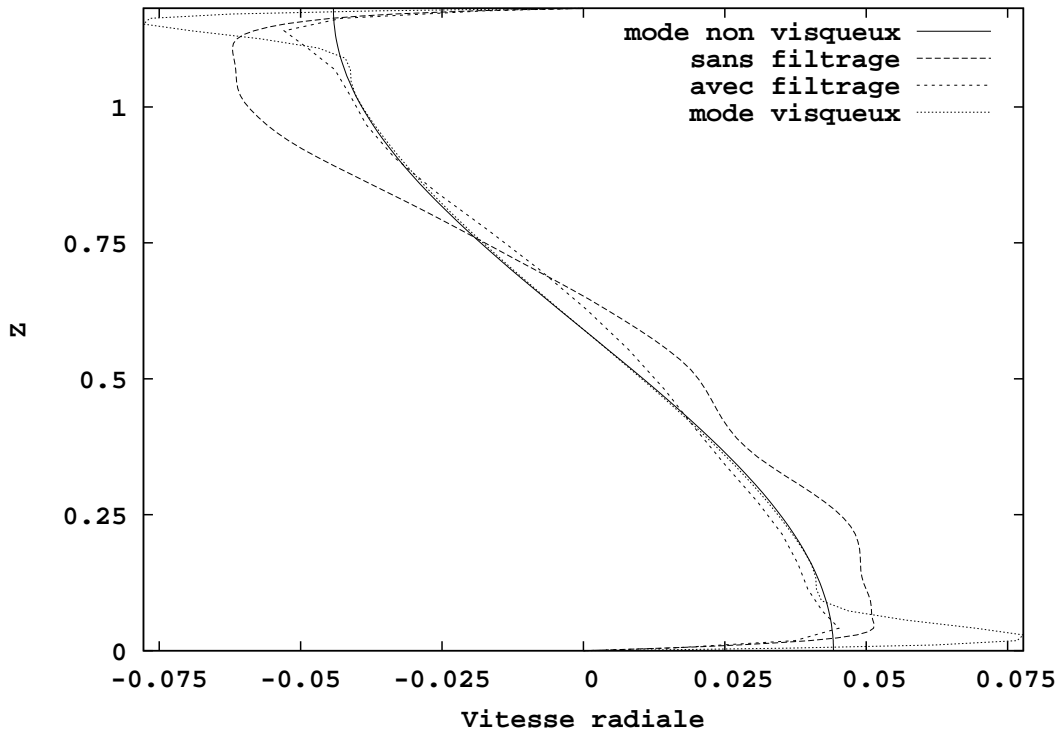


FIG. 6.20 – Profils de vitesse radiale comparés du mode inertiel non visqueux, du mode inertiel visqueux à $Re = 8500$, du champ brut et du champ filtré à la fréquence propre du mode de Kelvin, calculés pour $r = 0.4258$ et $t = 180.5$ cycles du piston.

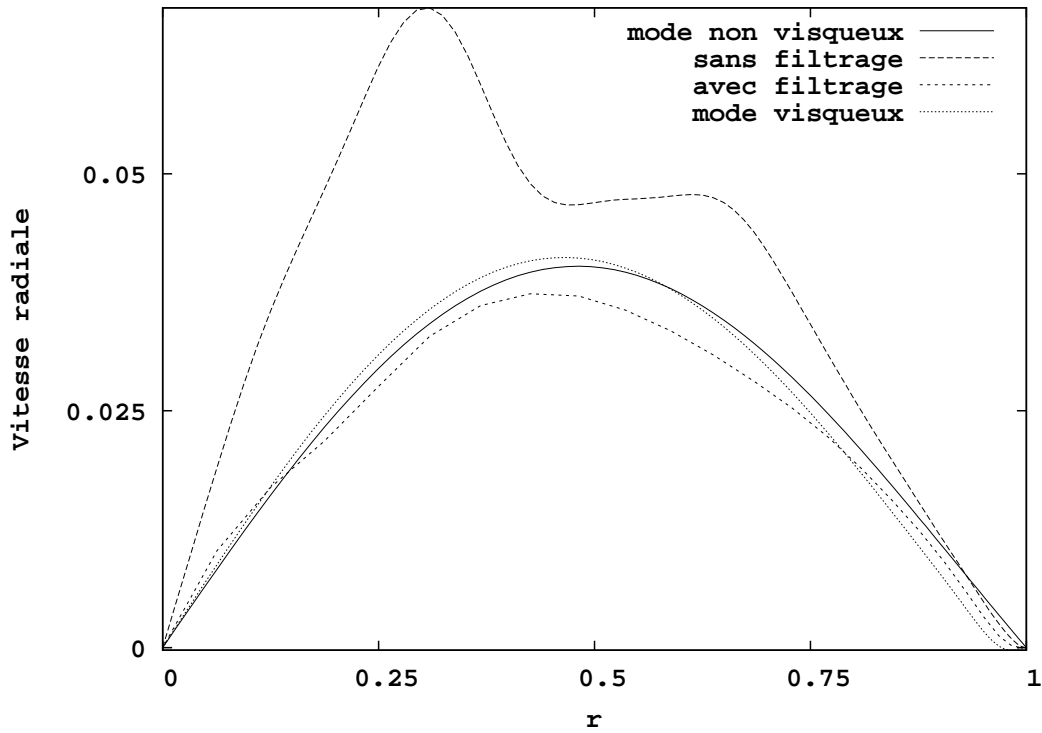


FIG. 6.21 – Profils de vitesse radiale comparés du mode inertiel non visqueux, du mode inertiel visqueux à $Re = 8500$, du champ brut et du champ filtré à la fréquence propre du mode de Kelvin, calculés pour $Z = 0.146h_0$ et $t = 180.5$ cycles du piston..

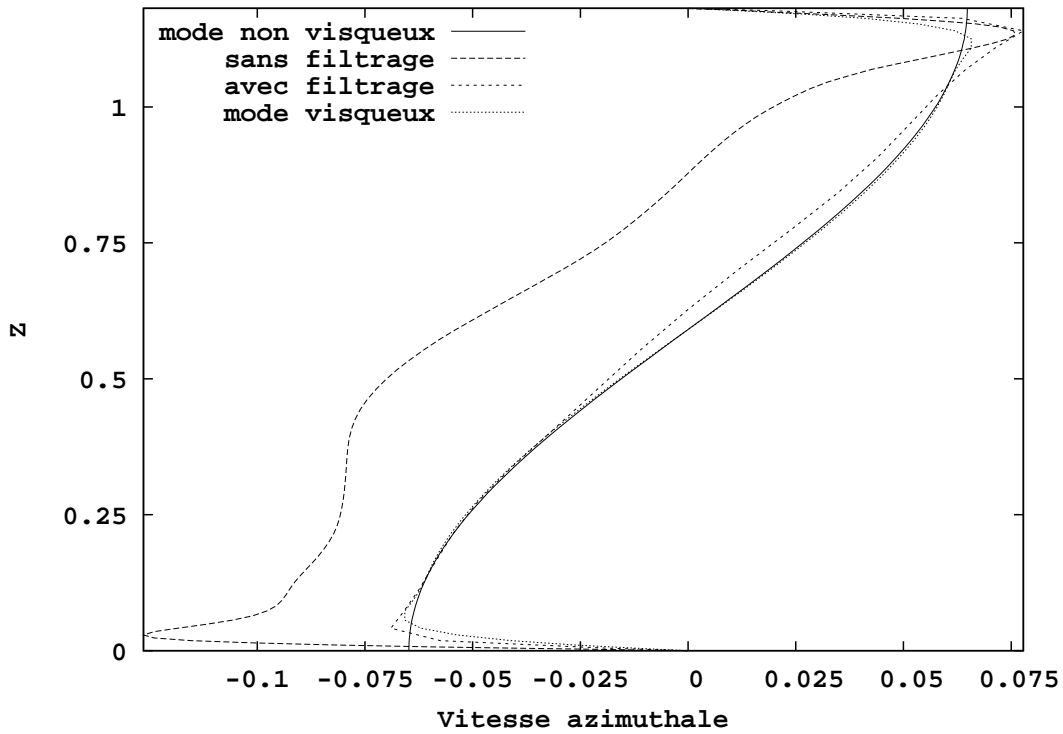


FIG. 6.22 – Profils de vitesse azimuthale comparés du mode inertiel non visqueux, du mode inertiel visqueux à $Re = 8500$, du champ brut et du champ filtré à la fréquence propre du mode de Kelvin, calculés pour $r = 0.4258$ et $t = 180$ cycles du piston.

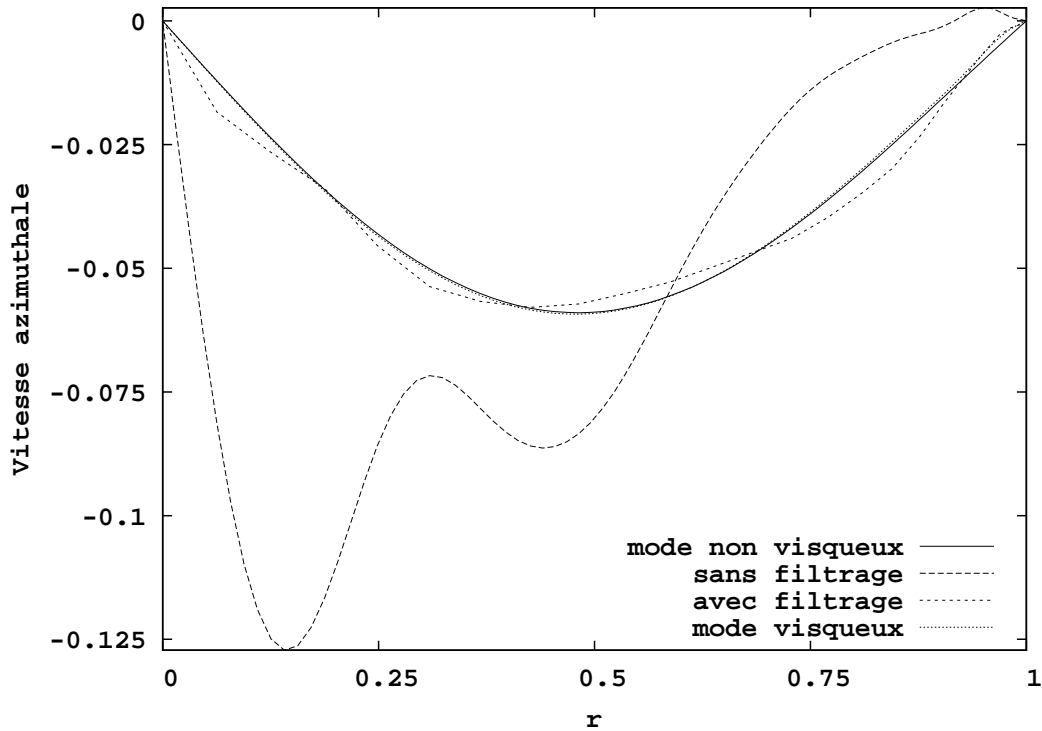


FIG. 6.23 – Profils de vitesse azimuthale comparés du mode inertiel non visqueux, du mode inertiel visqueux à $Re = 8500$, du champ brut et du champ filtré à la fréquence propre du mode de Kelvin, calculés pour $Z = 0.146h_0$ et $t = 180$ cycles du piston.

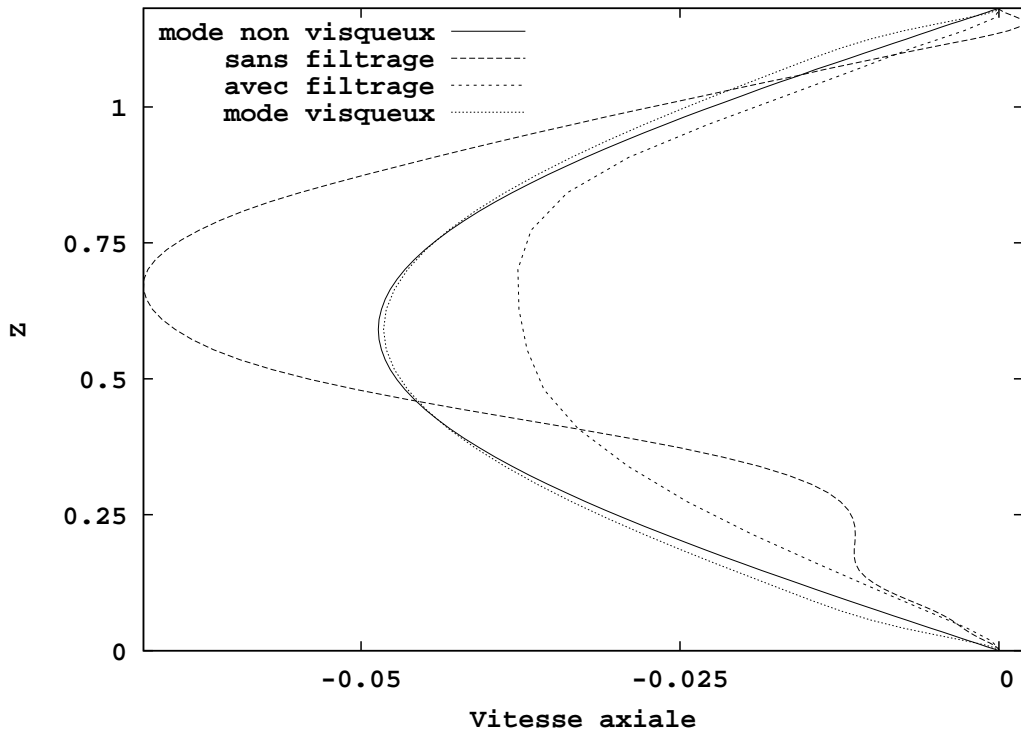


FIG. 6.24 – Profils de vitesse axiale comparés du mode inertiel non visqueux, du mode inertiel visqueux à $Re = 8500$, du champ brut et du champ filtré à la fréquence propre du mode de Kelvin, calculés pour $r = 0.4258$ et $t = 180.5$ cycles du piston.

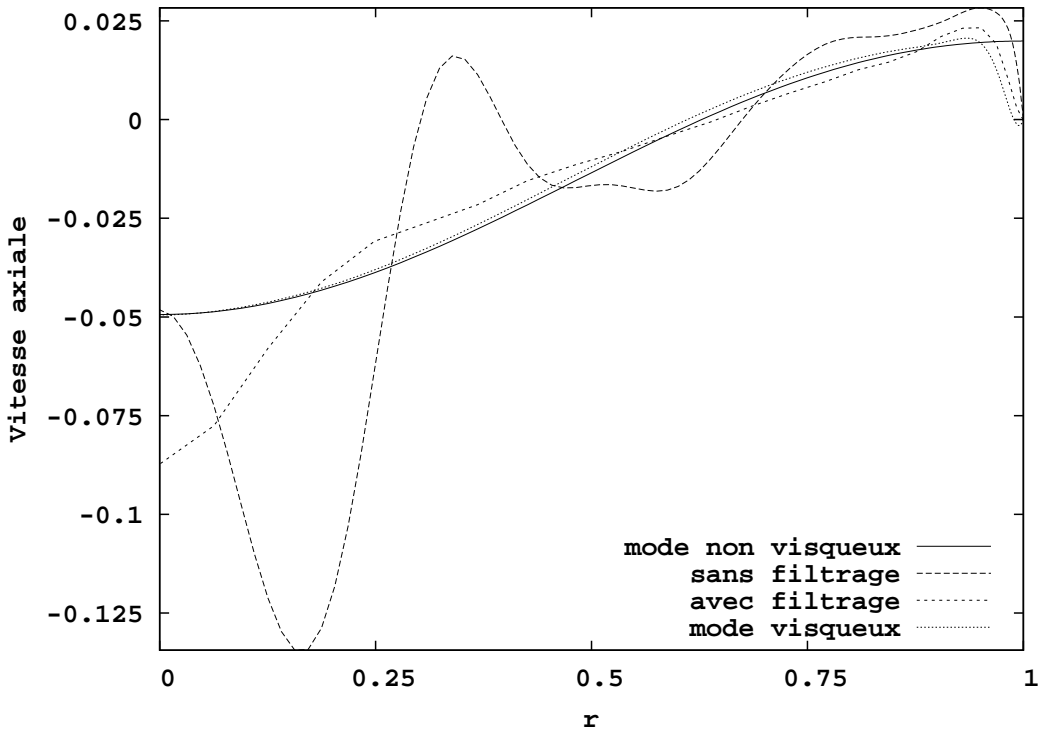


FIG. 6.25 – Profils de vitesse axiale comparés du mode inertiel non visqueux, du mode inertiel visqueux à $Re = 8500$, du champ brut et du champ filtré à la fréquence propre du mode de Kelvin, calculés pour $Z = 0.146h_0$ et $t = 180.5$ cycles du piston..

La comparaison des deux points de fonctionnement étudiés met en évidence la similarité des profils de vitesse étudiés, pour chacune des composantes du vecteur vitesse. Il n'y a donc pas de différence notable dans la structure spatiale du champ de vitesse entre les cas avec et sans modulation périodique de l'amplitude. Ceci confirme donc l'hypothèse que, hors des couches limites, augmenter le nombre de Reynolds ne modifie pas la topologie du champ de vitesses.

L'écoulement filtré à la fréquence moitié de celle du forçage se superpose de façon nette à l'écoulement associé au mode de Kelvin $(1, 1, 0)$ et possède bien la même fréquence d'oscillation, ce qui permet bien de l'identifier au mode inertiel même. Ceci justifie donc l'emploi d'une décomposition sur une base de modes de Kelvin non visqueux, comme dans la thèse de Racz.

La comparaison avec le mode inertiel visqueux montre que l'écoulement filtré possède également des couches limites assimilables à des couches d'Ekman, caractérisées par une déviation angulaire du vecteur vitesse. L'épaisseur de cette couche d'Ekman concorde bien avec celle du mode inertiel de référence. Cependant, on constate des différences quantitatives assez importantes dans l'écoulement de proche paroi.

En revanche, il n'a pas été possible de procéder à une comparaison rigoureuse des profils de vitesse obtenus avec les profils expérimentaux de Graftieux [34]. En effet, celui-ci a effectué ses mesures à un point de fonctionnement très proche du seuil, pour éviter un régime avec modulation d'amplitude. Or le décalage, même faible, entre les courbes de seuil expérimentale et numérique (voir figure 6.4) fait que le point de fonctionnement qui est instable pour l'expérience de Graftieux est stable pour la simulation numérique. Le champ observé numériquement est donc simplement l'état de base. Pour cette raison, aucune comparaison quantitative n'a été montrée. Cependant, les profils de vitesse expérimentaux semblent confirmer clairement l'hypothèse d'un écoulement instable dominé par le mode $(1,1,0)$.

L'analyse de la structure du champ saturé montre que, hors de la zone de proche paroi, l'écoulement est directement identifiable à celui du mode de Kelvin non visqueux associé, ce qui souligne le rôle central que jouent les modes inertiels dans ce mécanisme d'instabilité [58].

6.3 Présence d'un écoulement géostrophique

6.3.1 Couplage géostrophique

La contribution de modes géostrophiques (non visqueux) dans le système d'équations modales se traduit par l'existence d'une circulation azimuthale moyenne non nulle. Ce phénomène de circulation azimuthale a été observé dans la majorité des expériences où un fluide en rotation solide est soumis à un forçage périodique permettant, d'une manière directe (Mc Ewan, Mannaseh) ou paramétrique (instabilité paramétrique), d'exciter des modes inertiels. La vitesse azimuthale représenté sur la figure 6.26 constitue ici un moyen efficace de vérifier la contribution des modes géostrophiques. On rappelle que les modes géostrophiques possèdent tous une pulsation nulle, leur amplitude ne varie donc pas sur l'échelle de temps d'un cycle modal.

Il est intéressant d'analyser quels modes géostrophiques sont directement affectés par le couplage avec le mode axisymétrique primaire. Racz montre dans sa thèse que seuls les modes géostrophiques axisymétriques (non visqueux), formant une famille dénotée M , interviennent via le couplage par les effets non linéaires. Ce couplage provient de la non-nullité des termes $\Lambda_{\mu_+\mu_+\sigma}$, exprimant l'interaction non-linéaire entre 2 modes de Kelvin axisymétriques (non visqueux) μ_+ et σ , dans l'équation d'amplitude complète 2.60 du mode primaire :

$$\frac{da}{dT} = i\omega_+ C a^* + \left(\frac{1}{2}i\hat{\Delta} - \epsilon^{-1} Re^{-\frac{1}{2}} d_+^r + 2i \sum_{\sigma \in M} \Lambda_{\mu_+\mu_+\sigma} \mathcal{A}_\sigma\right) a + iG|a|^2 a \quad (6.3)$$

$$\frac{d\mathcal{A}_\sigma}{dT} = -\epsilon^{-1} Re^{-\frac{1}{2}} d_\sigma \mathcal{A}_\sigma + (2C\Lambda_{\sigma\mu_+\mu_+} \cos \psi + \epsilon^{-1} Re^{-\frac{1}{2}} \Gamma_\sigma) |a|^2 \quad (6.4)$$

La famille M contient une infinité de modes non visqueux, qui diffèrent les uns des autres par leur structure radiale, et il est intéressant de quantifier quel est le nombre d'éléments de M qui interviennent de façon significative dans le couplage. Ce nombre est-il fini ? Racz mentionne [28] que 10 modes géostrophiques non visqueux, en particulier ceux de plus bas ordre, suffisent en pratique à décrire la dynamique entière du système tel qu'il est déduit de l'analyse faiblement non linéaire. Qu'en est-il dans le cadre de modes inertiels visqueux ? Le nombre de modes géostrophiques effectivement couplés est une information précieuse pour décrire la dynamique complète du système. En effet, de même qu'un système de faible dimension (dans le cas où au plus deux modes géostrophiques sont pris en compte) ne permet de prédire que des comportements de type point fixe ou cycle limite, on sait que plus la taille du système dynamique est importante, plus la richesse des comportements dynamiques attendus est grande. Par exemple, la dimension du système dynamique associé est alors un indicateur de la complexité potentielle de l'écoulement dans le cas d'un régime chaotique.

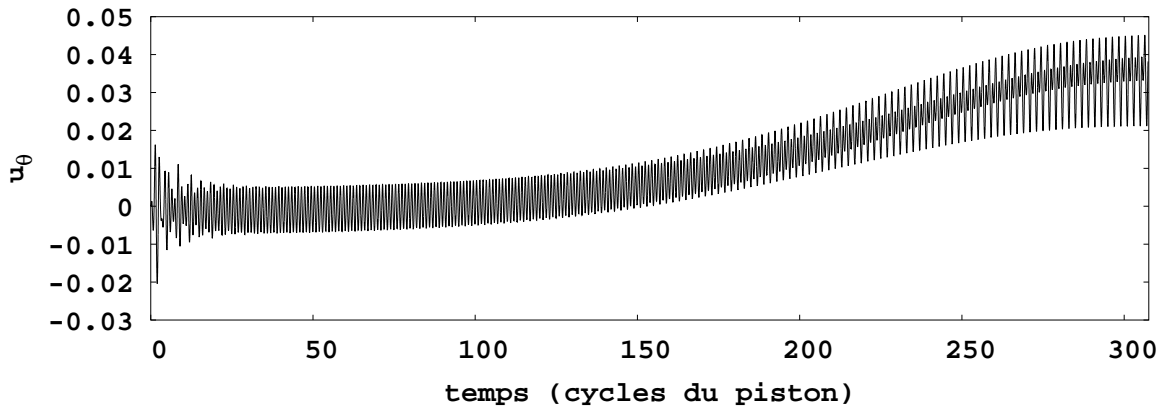


FIG. 6.26 – Signal de vitesse azimuthale non filtré, calculé pour $\omega_0 = 1.15$, $Re = 6000$ au point $(r, Z) = (0.094, \frac{h_0}{2})$. On remarque que dans ces cas d'instabilité le signal n'est pas nul en moyenne (contrairement aux cas stables), ce qui traduit la présence de modes géostrophiques dans l'écoulement.

6.3.2 Comparaison des profils de vitesse azimuthale

Pour ceci, une moyenne temporelle du champ de vitesse azimuthal a été réalisée sur un cycle modal, et le champ spatial moyenné en temps a été représenté au point de fonctionnement suivant : ($\omega_0 = 1.15$, $Re = 8.5.10^3$). La moyenne temporelle est approchée en pratique par une moyenne arithmétique sur une période modale, notée $\langle u_\theta \rangle_t$, effectué à partir de N_t champs bruts instantanés régulièrement espacés en temps. On a choisi en pratique $N_t = 20$. On a ainsi :

$$\langle u_\theta \rangle_t (r, Z) = \frac{1}{N_t} \sum_{k=0}^{N_t} u_\theta(r, Z, t_{initial} + \frac{2\pi k}{N_t \omega^\mu}) \quad (6.5)$$

Cette sommation a pour effet d'annuler les contributions du mode, du piston ainsi que leurs harmoniques. Le champ $\langle u_\theta \rangle_t (r, Z)$ a été calculé pour $Re = 6000$ et $Re = 8500$. Pour le second cas, qui présentent des modulations périodiques d'amplitude, on a calculé $\langle u_\theta \rangle_t (r, Z)$ à deux instants différents d'un cycle de modulation : pour un cycle modal qui débute à $t = 180$, puis pour un cycle modal débutant à $t = 200$ (le temps est compté en cycles du piston à partir du temps initial). On constate sur la figure 6.27 que, hors de la zone de paroi, le champ

$\langle u_\theta \rangle_t(r, Z)$ présente un caractère quasi-bidimensionnel selon la direction axiale. Ce résultat est une signature de la présence de modes inertiels géostrophiques visqueux. En effet, seuls ces modes possèdent cette propriété d'invariance selon la direction de l'axe de rotation.

On a ensuite moyenné le champ $\langle u_\theta \rangle_t(r, Z)$ selon la direction axiale, ce qui définit le champ $\langle u_\theta \rangle_{Z,t}(r)$ par :

$$\langle u_\theta \rangle_{Z,t}(r) = \frac{1}{h_0} \int_{Z=0}^{h_0} \langle u_\theta \rangle_t(r, Z) dZ \quad (6.6)$$

Les profils azimuthaux de vitesse, calculés puis moyennés sur un cycle modal sont à comparer à l'écoulement azimuthal théorique prédit par Raczy et Scott [28]. A l'ordre dominant en $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ du développement faiblement non linéaire 2.45 vu au chapitre 2, on n'observe pas d'écoulement géostrophique, puisque c'est le mode axisymétrique primaire qui domine, oscillant à la pulsation ω_{mode} , avec une amplitude notée $|a|$. En revanche, a l'ordre $O(\epsilon)$, la résolution de l'équation pour $B_\mu^{[2]}$ permet de dériver le profil de vitesse azimuthale :

$$u_\theta^{[2]}(r, Z, t) = \epsilon|a|^2 \left\{ U_1(r) + U_2(r) \sin(2\omega_{mode}t + \phi) + U_3(r) \cos\left(\frac{2\pi Z}{h_0}\right) \right\} \quad (6.7)$$

Les fonctions radiales U_1 , U_2 et U_3 proviennent toutes des interactions quadratiques mode-mode $\omega_{mode} \pm \omega_{mode}$ qui génèrent les fréquences 0 et $2\omega_{mode}$. Ces fonctions présentent une dépendance radiale en $J'_0(r)$, où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0 :

$$U_1(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi h_0}} \sum_{\sigma \in M} \frac{\Gamma_\sigma - 2\omega_+^{-1} d_\sigma^r \Lambda_{\sigma\mu_+\mu_+}}{d_\sigma J_0(k^{(\sigma)})} J'_0(k^{(\sigma)}r) \quad (6.8)$$

$$U_2(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi h_0}} \sum_{\sigma \in M} \frac{\Lambda_{\sigma\mu_+\mu_+}}{\omega_+ J_0(k^{(\sigma)})} J'_0(k^{(\sigma)}r) \quad (6.9)$$

$$U_3(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi h_0}} \sum_{\sigma \in M} \left(4 - \left(\frac{k^{(\sigma)}}{k^{(\mu_+)}}\right)^2\right) \frac{\Lambda_{\sigma\mu_+\mu_+}}{\omega_+ J_0(k^{(\sigma)})} J'_0(k^{(\sigma)}r) \quad (6.10)$$

La moyenne temporelle $\langle \rangle_t$ sur un cycle modal, appliquée au champ théorique $u_\theta^{[2]}$, annule la contribution instationnaire de U_2 . En revanche elle n'annule pas celle du champ U_3 . On a en effet :

$$\langle u_\theta^{[2]} \rangle_t(r, Z) = \epsilon|a|^2 \left\{ U_1(r) + U_3(r) \cos\left(\frac{2\pi Z}{h_0}\right) \right\} \quad (6.11)$$

L'application d'une moyenne selon la direction axiale annule bien la contribution de U_3 et isole l'influence du champ géostrophique U_1 . On a alors :

$$\langle u_\theta^{[2]} \rangle_{Z,t}(r) = \epsilon|a|^2 U_1(r) \quad (6.12)$$

Notons qu'on peut alors récupérer la fonction U_3 grâce à la formule :

$$\langle u_\theta^{[2]} \rangle_t(r, Z) - \langle u_\theta^{[2]} \rangle_{Z,t}(r) = \epsilon|a|^2 U_3(r) \cos\left(\frac{2\pi Z}{h_0}\right) \quad (6.13)$$

Le champ $\epsilon|a|^2 U_1(r)$ a donc été comparé sur la figure 6.28 avec le champ $\langle u_\theta \rangle_{Z,t}(r)$ issu de la simulation numérique. Les niveaux de vitesse prédits par l'analyse faiblement linéaire à

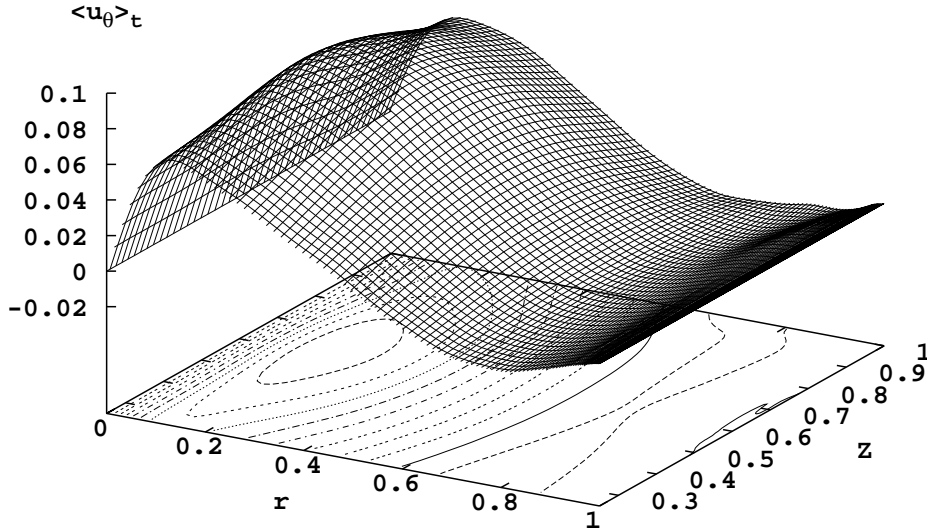


FIG. 6.27 – Profils de vitesse azimuthale moyenne au point de fonctionnement $\omega_0 = 1.15$, $Re = 6000$ au temps $t=320$ cycles du piston (phase saturée). On distingue le caractère bidimensionnel de l'écoulement hors des couches limites qui traduit la présence de modes géostrophiques.

l'ordre $O(\epsilon)$ correspondent bien à ceux issus de la simulation numérique. Dans les simulations, la vitesse aximuthale semble cependant plus concentrée près de l'origine. Pour $Re = 8500$, la comparaison des deux instants $t = 180$ et $t = 200$ (voir figure 6.28) montre que le profil de l'écoulement géostrophique moyen varie peu au cours d'une période de modulation sur le temps long.

Ensuite, la différence $\langle u_\theta \rangle_t - \langle u_\theta \rangle_{z,t}$ a été comparée à l'expression analytique de $U_3(r)$ sur la figure 6.29. On reconnaît qualitativement la présence d'un surplus de vitesse au centre du cylindre compensé par un déficit près des parois inférieure et supérieure, exprimée par la dépendance en $\cos(\frac{2\pi Z}{h_0})$. Cependant, la comparaison est quantitativement moins satisfaisante, ce qui suggère la nécessité de prendre en compte les termes d'ordre supérieurs dans le développement en puissances de $\epsilon^{\frac{1}{2}}$.

6.3.3 Désaccordage fréquentiel

Si l'on revient à la figure 6.28, on constate que l'écoulement azimuthal moyen induit un surplus de vitesse très près de l'axe et un plus léger déficit de la vitesse azimuthale lorsque l'on approche la paroi ($r = 1$). C'est à dire que, vu du référentiel fixe plutôt que du référentiel tournant, l'écoulement tourne plus vite au centre et plus lentement près des parois. La circulation moyenne n'est donc plus uniforme une fois le régime non linéaire atteint.

Le moment cinétique total à travers une section méridienne du cylindre, associé à cet écoulement moyenné selon la direction axiale, et vu du référentiel tournant, a été calculé pour $t = 200$. Sa valeur dimensionnelle est $2\Omega ah_0 \int_{r=0}^a u_\theta(r)rdr = 1.478 \cdot 10^{-2} (2\Omega a^3)$. A titre de comparaison, le moment cinétique associé à l'écoulement de rotation solide tournant à la vitesse Ω , calculé à partir

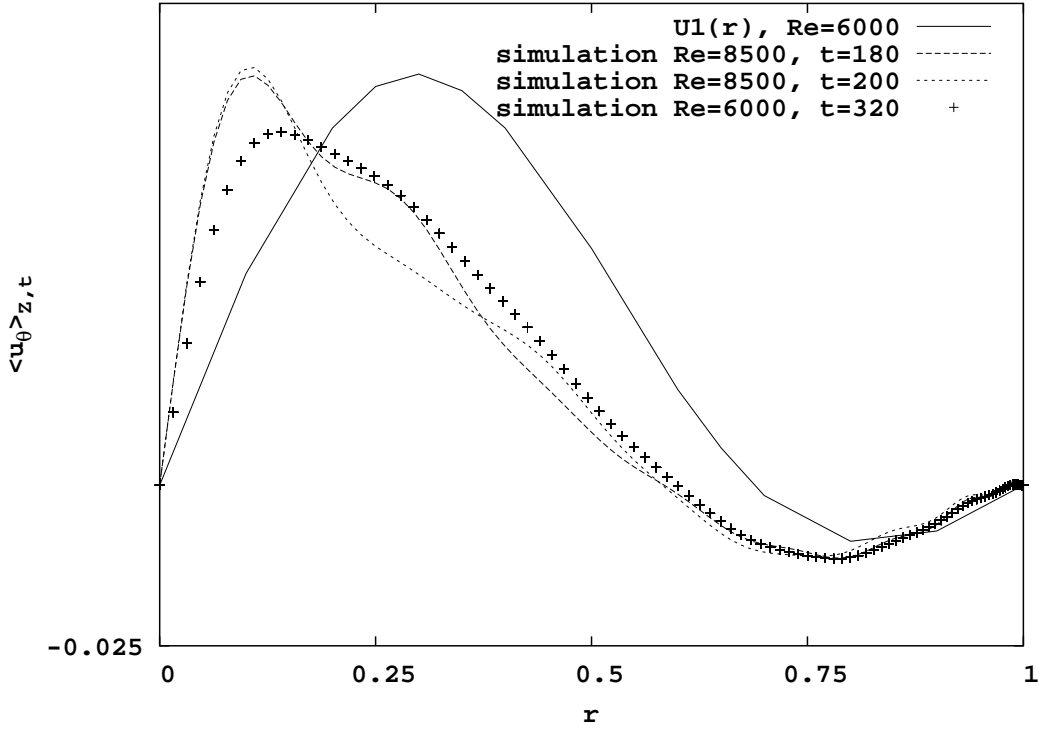


FIG. 6.28 – Profils de vitesse azimuthale moyenne. Le profil théorique correspond au champ $\epsilon|a|^2U_1(r)$. L'amplitude à saturation $|a|$ a été évaluée à $Re = 6000$ et $\omega_0 = 1.15$. Les profils $\langle u_\theta \rangle_{z,t}$ issus des simulations numériques correspondent aux points de fonctionnement $\omega_0 = 1.15$, $Re = 6000$ à l'instant $t = 320$ cycles de piston et $Re = 8500$ à deux instants distincts d'une période de modulation ($t = 180$ et $t = 200$).

du référentiel fixe, vaut en variables dimensionnelles $h_0 \int_{r=0}^a (\Omega r) r dr = 2\Omega a^3 \frac{h_0}{6} = 0.1969(2\Omega a^3)$. La correction moyenne apportée par l'écoulement géostrophique est donc essentiellement positive, et le moment cinétique associé à l'écoulement dans le référentiel fixe est augmenté quantitativement d'environ 7.5%.

En première approche, sans considérer le fait que cette correction à la circulation moyenne dépend de la position radiale, on peut associer cette correction à une modification directe de la *vitesse de rotation moyenne équivalente* du dispositif. On choisit de baser cette vitesse de rotation moyenne équivalente sur le moment cinétique total. Or les paramètres adimensionnels $\omega_0 = \frac{\omega_{olim}}{2\Omega}$ et $Re = \frac{2\Omega a^2}{\nu}$ définissant l'espace à deux dimensions dans lesquels a été représenté le diagramme de stabilité linéaire du système, sont définis à partir du taux de rotation du dispositif. Une correction positive de 7.5% du taux de rotation équivalent modifie le point de fonctionnement du système, qui passe ainsi, en variables adimensionnées, de $(\omega_0, Re) = (1.15, 8.5 \cdot 10^3)$ à $(\omega_0, Re) = (1.07, 9.138 \cdot 10^3)$. Ce nouveau point de fonctionnement se situe en dehors de la langue d'instabilité linéaire du système, ce qui confirme l'idée d'un désaccordage fréquentiel : le couplage géostrophique est suffisant pour faire revenir temporairement le système à un état de stabilité. Ce raisonnement approximatif n'inclut pas la variation radiale de ce changement de vitesse angulaire du fluide, ce qui explique pourquoi le scénario précédent n'est pas rigoureusement observé. Cependant il confirme l'idée selon laquelle les effets de couplage sont quantitativement suffisants pour influencer périodiquement sur le point de fonctionnement instantané du système, et donc pour le faire bifurquer d'un comportement de point fixe à celui de cycle limite.

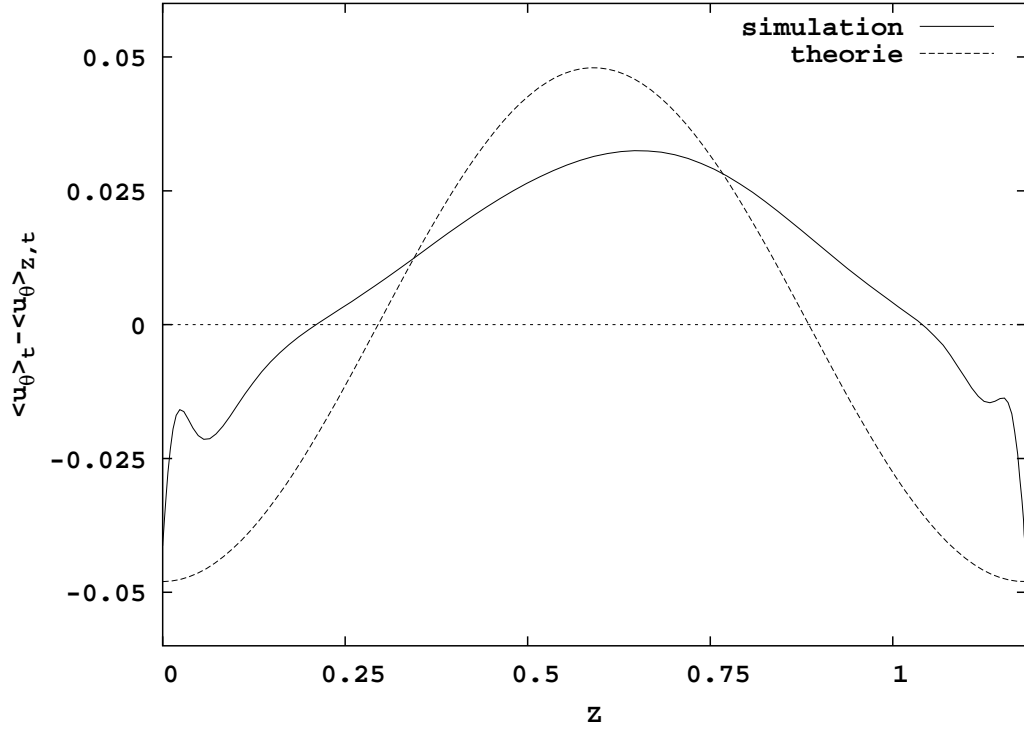


FIG. 6.29 – Profil axial du champ $\langle u_\theta \rangle_t (r, Z) - \langle u_\theta^{[2]} \rangle_{z,t} (r)$ au point $r = 0.3$. Le profil théorique correspond au champ $\epsilon |a|^2 U_3(r) \cos \frac{2\pi Z}{h_0}$. L'amplitude à saturation $|a|$ a été évaluée à $Re = 6000$ et $\omega_0 = 1.15$. Le profil issu de la simulation numérique correspond au même point de fonctionnement en régime saturé ($t=320$ cycles de piston), évalué en $r = 0.3$.

6.4 Répartition modale de l'énergie

Pour les points de fonctionnement étudiés, l'ensemble des résultats précédents tend à confirmer l'idée de Racz et Scott qu'au-delà du stade transitoire, la dynamique de l'écoulement est dominée par le mode non visqueux $(1,1,0)$. Afin d'estimer quantitativement la validité de cette hypothèse, on peut projeter le champ de vitesse issu des simulations numériques sur différents éléments de la base des modes de Kelvin, et ainsi cartographier dans l'espace spectral le poids relatif des différentes contributions. La méthode de projection modale est la suivante : soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le champ de vitesse à un instant donné. La complétude de la base des modes de Kelvin non visqueux permet de décomposer ce champ sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mu} B_{\mu}(t) \mathbf{u}^{(\mu)}(\mathbf{x}) \quad (6.14)$$

où les $\mathbf{u}^{(\mu)}(\mathbf{x})$ sont les modes de Kelvin (complexes) indépendants du temps, normalisés, et où $B_{\mu}(t)$ représente l'amplitude (complexe) instantanée du champ \mathbf{u} projeté sur le mode $\mu = (n, m, 0)$, où n représente l'indice radial du mode et m son nombre d'onde axial. La sommation ne porte ici que sur la famille des modes axisymétriques, puisque le champ simulé est par hypothèse axisymétrique. L'orthonormalité des modes de Kelvin vis-à-vis du produit scalaire dans L^2 permet de dériver l'amplitude B_{μ} :

$$B^{\mu} = \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^{(\mu)*} \quad (6.15)$$

Définissons à présent pour chaque mode de Kelvin μ non géostrophique la quantité $b^{(\mu)}$ par :

$$b^{(\mu)}(t) = \frac{2|B^{(\mu)}(t)|^2}{\int |\mathbf{u}(t)|^2} \quad (6.16)$$

et son analogue pour les modes géostrophiques :

$$b^{(\mu_0)}(t) = \frac{|B^{(\mu_0)}(t)|^2}{\int |u(t)|^2} \quad (6.17)$$

Ce rapport représente donc l'énergie relative du mode de Kelvin et de son conjugué par rapport à l'énergie totale du champ \mathbf{u} . L'inclusion de l'énergie du mode conjugué est nécessaire pour les modes non géostrophiques puisque le champ modal physique, nécessairement réel, s'écrit comme une combinaison du mode de Kelvin μ et son conjugué μ^* . Remarquons que la définition précédente s'appuie sur l'orthogonalité de la base des modes de Kelvin. Le même calcul de projection sur une autre base non orthogonale, comme par exemple la base des modes inertiels *visqueux* d'un cylindre en rotation, est moins direct.

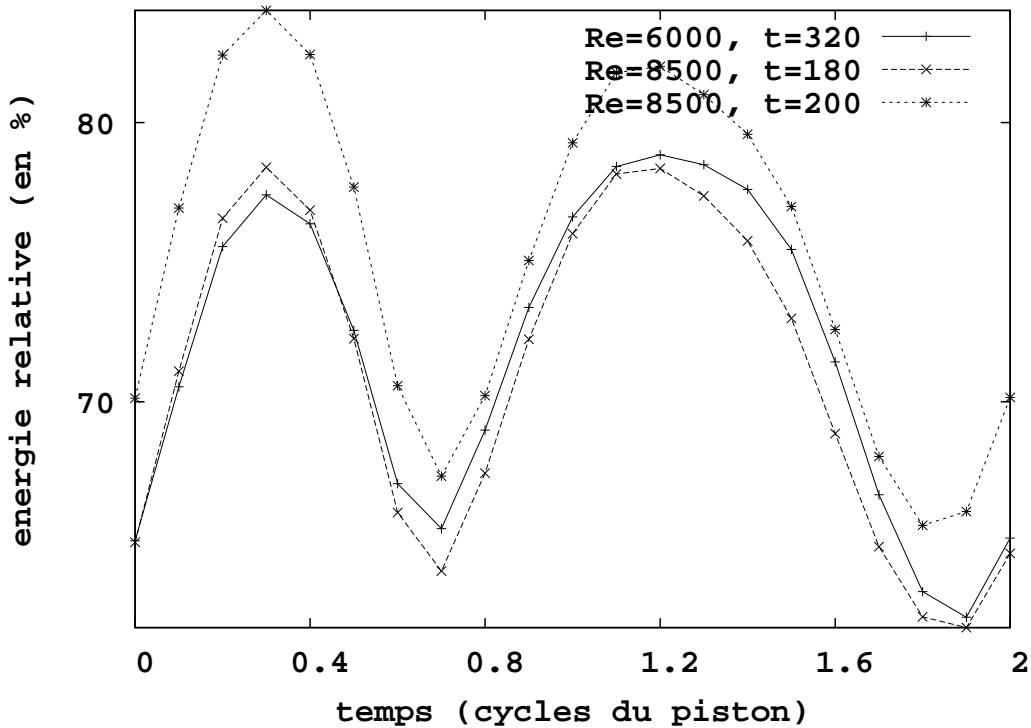


FIG. 6.30 – Evolution temporelle du facteur $b^{(1,1,0)}$ traduisant le rapport entre l'énergie cinétique associée au Mode Axisymétrique Primaire et l'énergie instantané du champ brut (à laquelle on a retranché l'énergie cinétique associée au mouvement du piston). Les trois cas étudiés sont encore le cas de saturation ($Re = 6000$) évalué au temps $t = 320$ cycles du piston, et le cas avec modulation périodique de l'amplitude ($Re = 8500$) pour lequel le rapport a été calculé sur deux cycles de forçage distincts à $t = 180$ et $t = 200$ cycles du piston.

Le processus de projection décrit auparavant a été appliqué sur les champs de vitesse bruts. On constate que le facteur $b^{(1,1,0)}$ oscille au cours d'un cycle modal entre 66 et 84 %. Ces oscillations traduisent la part énergétique instationnaire associée aux oscillations du piston, proportionnelle à $(\frac{h}{h})^2$.

TAB. 6.2 – Répartition modale $b^{(\mu)}$ de l'énergie du signal filtré ($Re = 6000$) à la fréquence du Mode Axisymétrique Primaire (en %), représentée en fonction de l'indice radial n et du nombre d'onde axial m .

%	m=0	m=1	m=2	m=3
n=1	0.008	93,6	0.019	0.51
n=2	0.009	1	0.39	0.1
n=3	0.013	0.48	0.16	0.08
n=4	0.0025	0.076	0.035	0.002

La projection a également été appliquée aux champs filtrés à la fréquence modale, afin de déterminer avec précision quelle portion d'énergie le Mode Axisymétrique Primaire représente au sein de la composante du champ oscillant à la même fréquence. Les résultats numériques sont les suivants :

- $Re = 6000 \rightarrow b^{(1,1,0)} = 93,6\%$
- $Re = 8500 \rightarrow b^{(1,1,0)} = 94 \pm 0.3\%$

Il ressort de ces estimations que le mode de Kelvin (1,1,0) est clairement la contribution spectrale qui domine le champ de vitesses filtré. L'incertitude signalée dans le cas $Re = 8.5.10^3$ traduit les variations observées entre les différents instants auxquels la projection a été effectuée.

Quels sont les autres modes de Kelvin sur lesquels sont répartis les 6% d'énergie restants ? Les tables 6.2 6.3 correspondent respectivement aux cas $Re = 6000$ (au temps $t=320$) et $Re = 8500$ (au temps $t=180$), et représentent dans chaque cas la répartition modale de l'énergie du champ filtré à la fréquence du Mode Axisymétrique Primaire. Il s'avère que les deux cas étudiés sont quantitativement très proches. Toutefois on peut noter une légère augmentation du rôle des modes d'ordre plus élevé dans le cas $Re = 8500$. On constate qu'à part le mode primaire lui-même, aucun mode de Kelvin n'apporte une contribution quantitativement importante à l'écoulement filtré. Tout au plus, on peut préciser que le mode (2,1,0) apporte la plus forte contribution, qui est de l'ordre de 1% dans les deux cas étudiés. Pour $\mu = (n, m, 0)$ avec $n \geq 4$ et $m \geq 3$, on constate que $b^{(\mu)} \leq 0.1\%$. De plus on constate que, bien qu'aucun mode (à part le M.A.P.) n'apporte une contribution importante, le nombre total de modes de Kelvin à prendre en compte dans le développement spectral est élevé. En effet, en comparant la somme finie $\sum_{\mu} b^{(\mu)}$ à l'énergie totale du signal filtré, on constate que la prise en compte des 8^2 premiers modes de Kelvin ne recouvre que 97,4 % de l'énergie du signal d'origine, et que les 16^2 premiers modes n'y contribuent qu'à 98,7 %. Ce résultat traduit vraisemblablement la répartition modale nécessaire pour représenter les forts gradients dans les couches d'Ekman à partir d'un développement sur une base de fonctions issues du problème non visqueux. Cet aspect a déjà été noté dans le thèse de Racz et c'est la principale raison pour laquelle la base des modes de Kelvin n'a pas été utilisée dans le schéma numérique : elle impliquerait une convergence trop lente en terme de nombre de fonctions de base.

Le même procédé de projection spectrale a été appliqué, non pas sur le champ filtré à la fréquence du M.A.P., mais au champ moyenné en temps et moyenné selon la direction axiale, c'est-à-dire au même champ que celui qui a permis d'identifier l'écoulement géostrophique $U_1(r)$. Ce champ U_1 est construit comme une somme des composantes géostrophiques $\sigma \in M$ pondérées par des coefficients exprimant le couplage de ces modes avec le mode primaire. La question de la répartition de l'énergie au sein de la famille est laissée ouverte dans la thèse de Racz, même s'il mentionne que les 20 premiers modes de M suffisent en pratique à obtenir une description conver-

TAB. 6.3 – Répartition modale $b^{(\mu)}$ de l'énergie du signal filtré ($Re = 8500$, $t = 180$) à la fréquence du Mode Axisymétrique Primaire (en %), représentée en fonction de l'indice radial n et du nombre d'onde axial m .

%	m=0	m=1	m=2	m=3
n=1	0.009	93,7	0.009	0.35
n=2	0.011	1.13	0.59	0.08
n=3	0.013	0.52	0.22	0.052
n=4	0.0014	0.12	0.027	0.011

gente du champ azimuthal. L'algorithme de projection fournit cette répartition de l'énergie, et met en évidence dans le cas $Re = 6000$ que c'est le mode (0,2,0) qui domine l'écoulement azimuthal moyen, dont il représente environ 77,6% de l'énergie, suivi du mode (1,0) qui représente 13,1 % de l'énergie. On note qu'ici moins de modes sont nécessaires à une bonne représentation de l'écoulement puisqu'il suffit effectivement des 5 premiers modes de M pour recouvrir 98.6 % de l'énergie, ainsi que des 10 premiers modes de M pour recouvrir 99,2% du signal projeté.

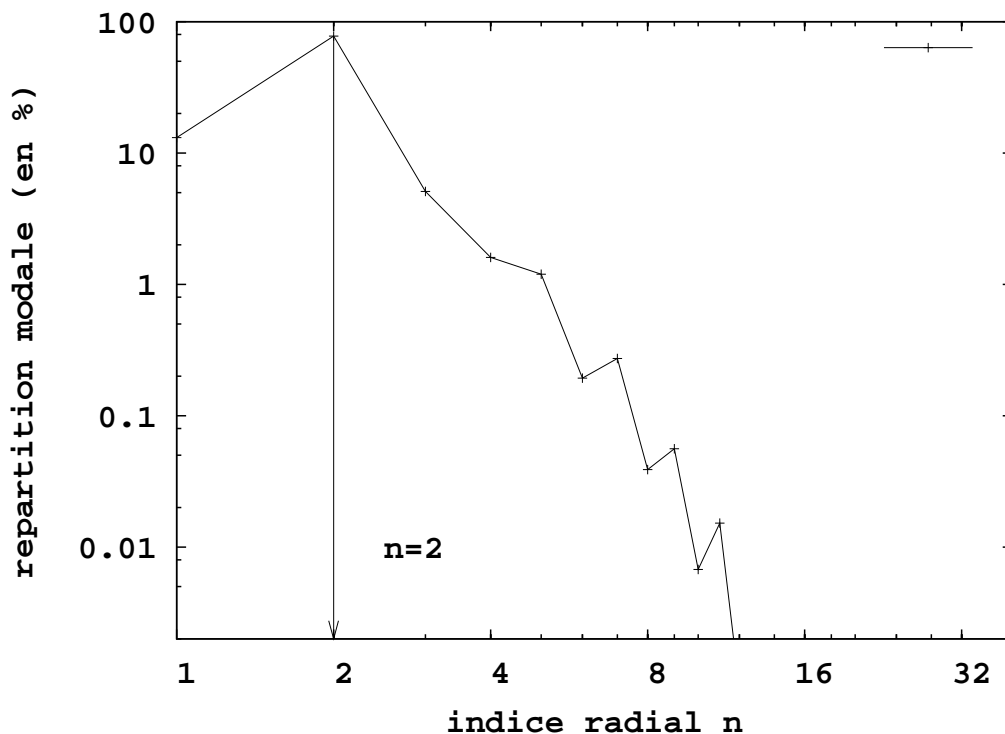


FIG. 6.31 – Répartition modale de l'énergie (en %) du champ azimuthal moyenné selon la direction axiale ($Re = 6000$) selon les différentes composantes géostrophiques de la famille M . Les modes géostrophiques sont identifiés par leur indice radial n .

6.5 A propos du seuil théorique de divergence

D'après l'analyse théorique de Racz et Scott, au-delà d'un certain seuil, le système d'équations 2.60 prévoit de manière suffisante (mais non nécessaire) la divergence exponentielle de l'amplitude modale. Pour la géométrie adoptée, les simulations effectuées par Racz à partir de ces équations d'amplitude montrent une divergence dès que $Re \geq 7210$ lorsque ω_0 est calé sur la pulsation critique. Lors des tests numériques, effectués en augmentant Re jusqu'à 10^4 , on a remarqué une augmentation des fluctuations autour de l'amplitude à saturation. Ceci corres-

pond à une augmentation graduelle de l'amplitude du cycle limite dans l'espace des phases, ce qui est conforme qualitativement à la dynamique modale prédite par Racz *en dessous* du seuil théorique de divergence. De façon générale, autant en augmentant la valeur de ϵ à Re fixé qu'en augmentant Re avec ϵ fixé, *aucun comportement divergent n'a été observé dans la simulation numérique*. Remarquons également que Graftieaux, avec son dispositif expérimental, a mis en évidence des comportements apériodiques mais n'a pas non plus observé de divergence.

Une analyse plus quantitative des oscillations modales permet d'établir une explication de cette différence constatée entre la prévision analytique et les résultats expérimentaux comme numériques. Il se trouve en effet que l'amplitude des fluctuations autour de l'état saturé augmente graduellement pour chacune des composantes de la vitesse. Entre autres, l'écoulement géostrophique devient lui-même quantitativement important. Or l'analyse faiblement linéaire est bâtie sur l'hypothèse que ϵ est assez faible pour pouvoir développer l'écoulement selon ses contributions aux différents ordres en puissance de $\epsilon^{\frac{1}{2}}$. Cette approche ne reste pertinente pour l'étude de l'écoulement réel que dans la limite où les différentes contributions en puissances de $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ sont effectivement chacune d'ordre $O(1)$. Les simulations réalisées par Racz pour des nombres de Reynolds loin au-delà du seuil de stabilité linéaire montrent que l'écoulement azimuthal moyen (théoriquement d'ordre $O(\epsilon)$) peut être plus important que l'écoulement associé au mode primaire (théoriquement d'ordre $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$). La vitesse de rotation du cylindre, qui est d'ordre $O(1)$, peut même être localement dépassée. La hiérarchie entre les différents écoulements en fonction des puissances de ϵ se retrouve donc invalidée. Ceci met donc en évidence les limitations du développement asymptotique utilisé. Pour être représentatif de l'écoulement réel, le développement asymptotique, même s'il est formellement correct à l'ordre considéré, devrait être poussé bien plus loin. Rien n'interdit d'ailleurs de conjecturer qu'à des ordres supérieurs en ϵ , des phénomènes de couplage résonant ne font pas entrer en jeu d'autres familles modales non impliquées aux ordres déjà étudiés. En particulier, il est envisageable que pour des valeurs plus élevées de la course, une interaction avec une famille de modes non axisymétriques gouverne la dynamique de l'écoulement, ce qui représente un obstacle à l'utilisation du code numérique écrit sous l'hypothèse d'axisymétrie. Il est en tout cas correct de postuler, sans surprise, que le phénomène de divergence des amplitudes modales prédit par l'analyse faiblement linéaire n'est pas physiquement observable.

Chapitre 7

Conclusion

L'objectif de cette thèse est l'étude numérique de l'instabilité d'un écoulement de gaz à l'intérieur d'un cylindre en rotation uniforme autour de son axe principal, soumis à une compression périodique à faible nombre de Mach. Cette étude s'appuie sur les travaux antérieurs réalisés au LMFA : les estimations analytiques de Racz et Scott [28], suivies du travail expérimental de Graftieaux [34] [36] qui a été mené en complémentarité du travail numérique. Le présent travail de thèse s'est articulé chronologiquement autour de deux parties : l'écriture complète d'un code de calcul axisymétrique, basé sur de l'utilisation de nouveaux outils numériques, suivie de la phase d'exploitation des résultats en comparaison avec les travaux de référence.

Le code numérique réalisé s'appuie sur une méthode spectrale de type Galerkin. Par un changement de variables, le problème faiblement compressible dans le domaine mobile a été ramené à un problème incompressible dans un domaine fixe. La présence de singularités de la vitesse axiale dans les coins du cylindre a conduit à utiliser une technique originale de soustraction d'un champ singulier, ce champ étant calculé de façon analytique comme une interpolation des solutions locales du problème de Stokes dans les coins du cylindre. De plus, une base de fonctions spectrales construites à partir de polynômes de Chebyshev, respectant exactement les conditions aux limites du problème visqueux régularisé, a été construite pour permettre une représentation économique du champ de vitesse en terme de coût de calcul. Une technique originale de préconditionnement s'est révélée indispensable à la mise en oeuvre numérique de l'algorithme. Le calcul des coefficients du schéma spectral a été vérifié à l'aide du logiciel de calcul formel Maple. Le code de calcul a été comparé avec succès aux simulations numériques de modes inertiels en déclin effectuées par Kerswell et Barenghi [52], ainsi qu'aux différentes simulations numériques d'un cas de compression laminaire dans un cylindre réalisées au sein du projet européen Joule III [51]. Les calculs les plus coûteux ont été effectués à l'aide du serveur de calcul multi-processeurs de type HP AlphaServer 1280 GS baptisé Mercure, acquis en 2003 par le LMFA, qui offre une puissance totale de 30 Gigaflops linpack 1000x1000, et représentent plusieurs jours de calcul en temps CPU.

Une étude numérique détaillée des modes inertiels dans le cylindre en rotation a été effectuée, en incluant les effets de la viscosité. La structure des couches d'Ekman s'est révélée conforme aux estimations asymptotiques de Greenspan [5] et de Racz et Scott [28]. La mesure des taux de déclin visqueux confirme quantitativement le modèle asymptotique proposé par Racz.

Une étude numérique de l'état de base du système en rotation soumis aux effets de compression périodique, connu seulement sans l'hypothèse de viscosité, a permis de préciser le faible rôle de l'écoulement secondaire dans le mécanisme d'instabilité. L'écoulement de base identifié expérimentalement par Graftieaux a été retrouvé numériquement pour le cas $\omega_0 > 1$. Pour $\omega_0 < 1$, un autre type d'écoulement a été identifié numériquement. Des zones de cisaillement, analogues à celles identifiées expérimentalement par Mc Ewan [30] dans un autre cas de forçage,

forment des surfaces coniques issues des zones de coin, qui peuvent être décrites par une analyse en ondes planes inertielles non visqueuses.

La partie finale de cette thèse porte sur l'instabilité de l'écoulement est sur l'identification du mode inertiel $(1, 1, 0)$ déjà visualisé expérimentalement par Graftieux pour un rapport d'aspect moyen $h_0 = 1.18$ et une amplitude de forçage $\epsilon = 13,1\%$. La valeur choisie pour ϵ place cette étude hors du cadre des petites oscillations du piston qui forme l'hypothèse la plus restrictive de la thèse de Racz. Cependant, l'ensemble des résultats obtenus dans cette configuration semble indiquer un bon accord avec la théorie et l'expérience. La mesure des taux de croissance par plusieurs méthodes différentes de filtrage a conduit à la courbe marginale d'instabilité du système, en bon accord avec les résultats analytiques et expérimentaux. Il ressort de cette étude que c'est l'incertitude liée aux méthodes de filtrage employées qui limite la précision globale de la méthode. L'étude du régime non linéaire du Mode Axisymétrique Primaire a mis en évidence deux types de comportements : un régime de point fixe proche du seuil d'instabilité, et un régime de cycle limite au-delà. Dans les deux cas, l'écoulement a été identifié en fréquence et dans sa structure spatiale au Mode Axisymétrique Primaire. La projection de l'écoulement filtré à la fréquence du mode instable sur le mode de Kelvin non visqueux $(1,1,0)$ issu de l'analyse de Racz a révélé que celui-ci représente 94 % du champ projeté. Ce résultat montre que l'emploi d'une base de modes non visqueux est justifiée pour la gamme des nombres de Reynolds étudiés. De plus, l'hypothèse dite de la "paire de modes" reste valide pour des plus grandes valeurs de la course. L'analyse de l'écoulement azimuthal moyen a permis de montrer l'existence d'un couplage non linéaire avec les modes géostrophiques axisymétriques du système, ainsi que leur rôle dans le processus de désaccordage fréquentiel du mode instable. En revanche, le comportement divergent prédit par l'analyse faiblement non linéaire de Racz pour des nombres de Reynolds plus élevés n'a pas été observé numériquement.

Le code numérique réalisé pourrait permettre d'approfondir l'étude de l'instabilité étudiée :

- L'analyse de la bifurcation de Hopf peut être détaillée. En particulier la question de l'existence d'un seuil précis de bifurcation reste ouverte.
- La dynamique d'autres modes inertiels axisymétriques peut être étudiée, en particulier ceux résultant de l'instabilité de l'état de base mis en évidence dans cette thèse pour $\omega_0 < 1$. Le dispositif expérimental mis au point par Graftieux reste également disponible dans le but de procéder à des comparaisons numérique/expérimental.
- L'effet d'un forçage de grande amplitude peut également être étudiée.

Le développement d'un code tridimensionnel, qui nécessite une généralisation des fonctions de base spectrales utilisées, permettrait une étude de la dynamique des modes non axisymétriques du système. Une telle étude serait susceptible de compléter la connaissance actuelle sur la transition éventuelle vers la turbulence dans les écoulements tournants.

Annexe A

Variations du nombre de Reynolds

Les changements de température au sein du fluide lors des variations cycliques de volume du cylindre induisent une dépendance de la viscosité cinématique vis-à-vis de la hauteur du cylindre, et donc du temps. Ceci implique que le nombre de Reynolds précédemment construit varie également de façon périodique au cours du temps. Dans l'étude théorique de Racz et Scott, cette dépendance est négligée car l'étude se base sur l'hypothèse d'une petite course du piston, et donc de changements de volume négligeables sur le plan thermodynamique. Nous avons choisi de dépasser ici le cadre de cette hypothèse puisque l'approche numérique le permet sans alourdir l'étude. Afin de disposer de paramètres rigoureusement définis pour décrire l'instabilité attendue, qui dépend justement fortement de la compétition entre effets de rotation et effets visqueux, il est utile de considérer un *nombre de Reynolds moyen*, bâti comme la moyenne temporelle du nombre de Reynolds instationnaire. Compte tenu des faibles courses autorisées pour le déplacement du piston, cette moyenne, ainsi que les moments négatifs d'ordre -1 et $-\frac{1}{2}$, qui paraissent plus judicieux puisque le nombre de Reynolds instationnaire apparaît devant les opérateurs de diffusion élevé aux puissances -1 et $-\frac{1}{2}$, est quantitativement assimilable, à 0.1% près, à la valeur prise par le nombre de Reynolds lorsque le piston est en position moyenne ($h = h_0$). Il est donc utile de disposer un modèle pour l'évolution temporelle de cette grandeur. On peut se baser sur la loi assez générale proposée par Sutherland pour la dépendance de la viscosité dynamique d'un gaz vis-à-vis de la température :

$$\mu(T) = \mu(T_0) \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{T_0 + S}{T + S}\right) \quad (\text{A.1})$$

où S est la constante de Sutherland qui vaut 111 K pour l'air sec.

Sous hypothèse d'adiabaticité du cylindre et d'isentropie de l'écoulement, la dépendance de la masse volumique ρ vis-à-vis de la température s'écrit, selon la loi de Laplace :

$$\rho(T) = \rho(T_0) \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{A.2})$$

On peut ainsi déduire une loi concernant la viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Par mesure de simplicité, on peut ici se contenter d'une approximation simple mais valide (voir figure A.1) pour ν dans la gamme de températures considérées implicitement dans notre étude, afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec ceux de l'expérience menée par Graftieaux [34] avec, comme gaz, l'air dans des conditions de température autour de 20 degrés celsius. On utilise pour l'air la valeur $\gamma = \frac{7}{5}$.

$$\nu \sim T^{-\alpha}, \quad \alpha \sim 1.75 \quad (\text{A.3})$$

La masse volumique, considérée ici spatialement homogène, étant inversement proportionnelle à la hauteur du cylindre, on en déduit analytiquement la loi approchée suivante :

$$Re(t) \sim Re_{moyen} \left(\frac{h(t)}{h_0}\right)^{-0.7} \quad (\text{A.4})$$

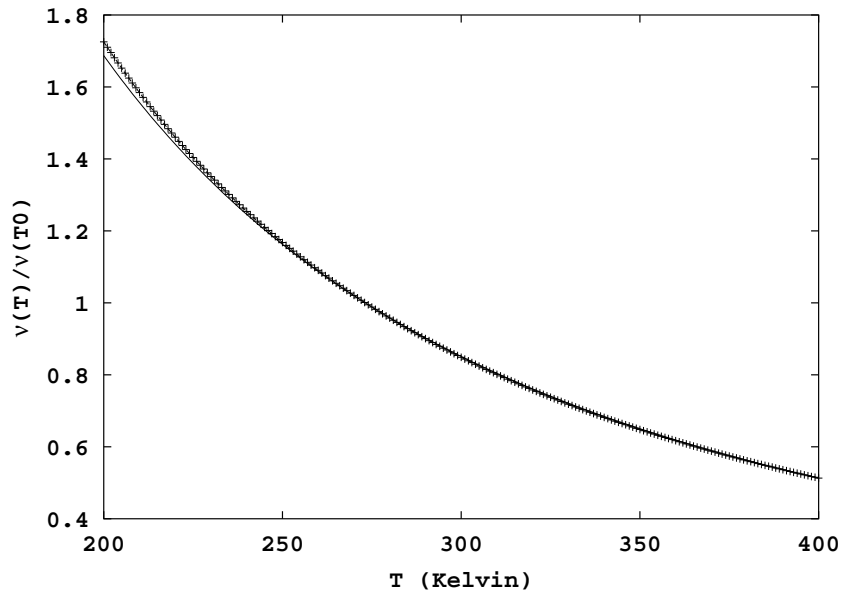


FIG. A.1 – Comparaison entre la loi de Sutherland pour la viscosité *cinématique* (-) et la loi en puissance adoptée (+++) ($T_0=273.15$ K)

Dans l'absolu, tant que l'étude se rapporte à un écoulement de gaz non précisé, les valeurs de γ ou même de α peuvent être considérées comme des paramètres thermodynamiques adimensionnels du problème. Cependant, nous ne les ferons pas varier au cours de cette étude.

Annexe B

Résolution du problème de Stokes plan

On souhaite résoudre l'équation biharmonique plane (3.31) de façon indépendante dans chacun des deux coins. Pour cela, on adopte dans chacune des deux zones de coin un système de coordonnées polaires (voir figure 3.1).

Dans la zone proche de chaque coin, la fonction de courant $\psi = \psi_P$ ou $\psi = \psi_C$, exprimée en coordonnées radiales locales (R, ϕ) , est régie par l'équation biharmonique plane qui prend la forme suivante :

$$\left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \frac{\partial}{\partial R}) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)^2 \psi_0 = 0 \quad (\text{B.1})$$

De plus, on peut chercher dans chaque coin, en s'inspirant de la méthode utilisée par Moffatt [46] et Batchelor [37], une solution locale sous la forme générique $\psi = R^\alpha g(\phi)$.

Nous avons :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \frac{\partial \psi}{\partial R}) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = R^{\alpha-2} G$$

où $G = g'' + \alpha^2 g$ et

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \frac{\partial G}{\partial R}) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} = R^{\alpha-4} (G'' + (\alpha - 2)^2 G) \quad (\text{B.2})$$

d'où :

$$\left(\frac{d^2}{d\phi^2} + (\alpha - 2)^2\right) \left(\frac{d^2}{d\phi^2} + \alpha^2\right) g = 0 \quad (\text{B.3})$$

Les conditions aux limites dépendent du coin considéré.

– Au coin piston, d'après (3.30), on a :

$$\psi_P = \frac{\partial \psi_P}{\partial \phi_P} = 0 \quad (\phi_P = 0) \quad (\text{B.4})$$

$$\psi_P = 0, \quad \frac{\partial \psi_P}{\partial \phi_P} = -R_P h_0 \quad (\phi_P = \frac{\pi}{2}) \quad (\text{B.5})$$

et on déduit $\alpha = 1$ et :

$$g_P(0) = g'_P(0) = g_P\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad g'_P\left(\frac{\pi}{2}\right) = h_0 \quad (\text{B.6})$$

La solution de (B.3) avec $\alpha = 1$ qui satisfait les conditions limites (B.5) est :

$$\psi_P = \frac{R_P h_0}{\left(\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{2}\right)} \left(\sin \phi_P - \phi_P \cos \phi_P - \frac{2}{\pi} \phi_P \sin \phi_P \right) \quad (\text{B.7})$$

– Au coin culasse, les Conditions aux limites sont

$$\psi_C = \frac{\partial \psi_C}{\partial \phi_C} = 0 \quad (\phi_C = 0) \quad (\text{B.8})$$

$$\psi_C = 0, \quad \frac{\partial \psi_C}{\partial \phi_C} = -R_C^2 \quad (\phi_C = \frac{\pi}{2}) \quad (\text{B.9})$$

ce qui implique $\alpha = 2$ et :

$$g_C(0) = g'_C(0) = g_C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad g'_C\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad (\text{B.10})$$

La solution de (B.3) avec $\alpha = 2$ qui satisfait les conditions limites (B.9) est :

$$\psi_C = \frac{R_C^2}{4} \left(\sin 2\phi_C - 2\phi_C + \frac{\pi}{2} (1 - \cos 2\phi_C) \right) \quad (\text{B.11})$$

On remarque que la différence quantitative entre les exposants α dans les deux zones de coin reflète les différents ordres auxquels apparaissent les singularités dans le problème initial.

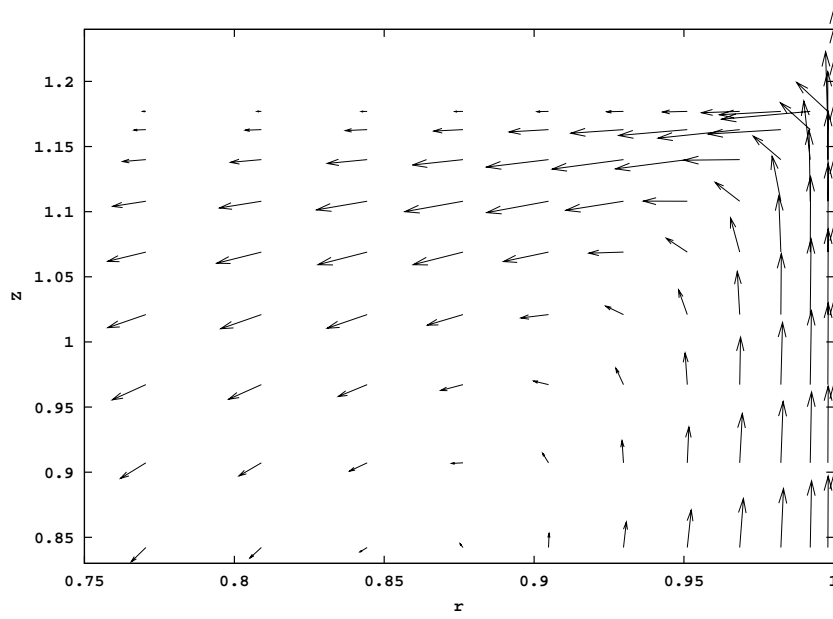


FIG. B.1 – Détail du champ singulier dans le coin proche du piston ($h_0 = 1.18$)

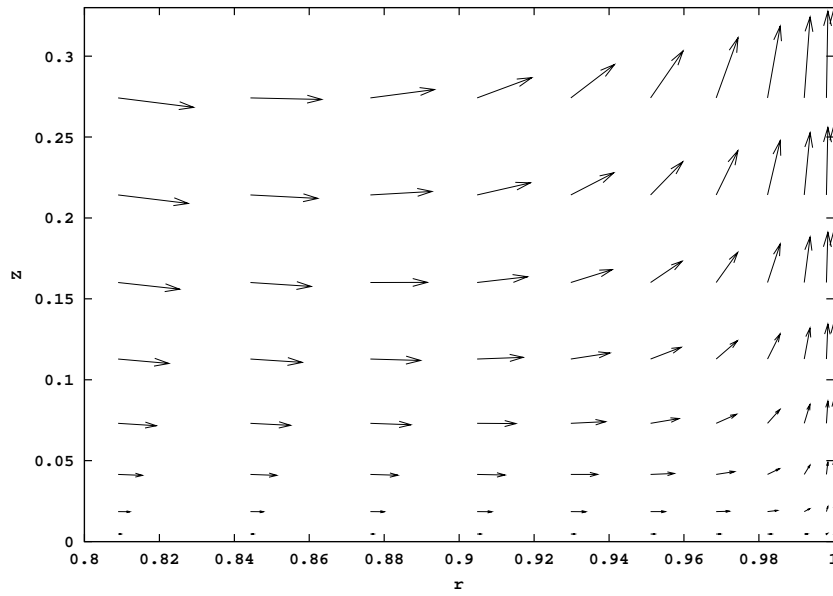


FIG. B.2 – Détail du champ singulier dans le coin proche de la culasse ($h_0 = 1.18$)

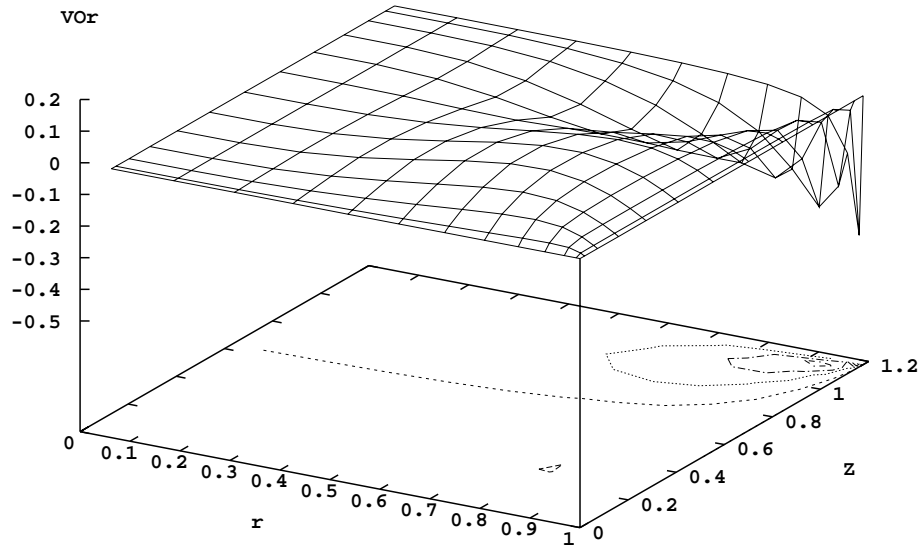


FIG. B.3 – semi-coupe méridienne de la composante radiale du champ de vitesse singulier ($h_0 = 1.18$)

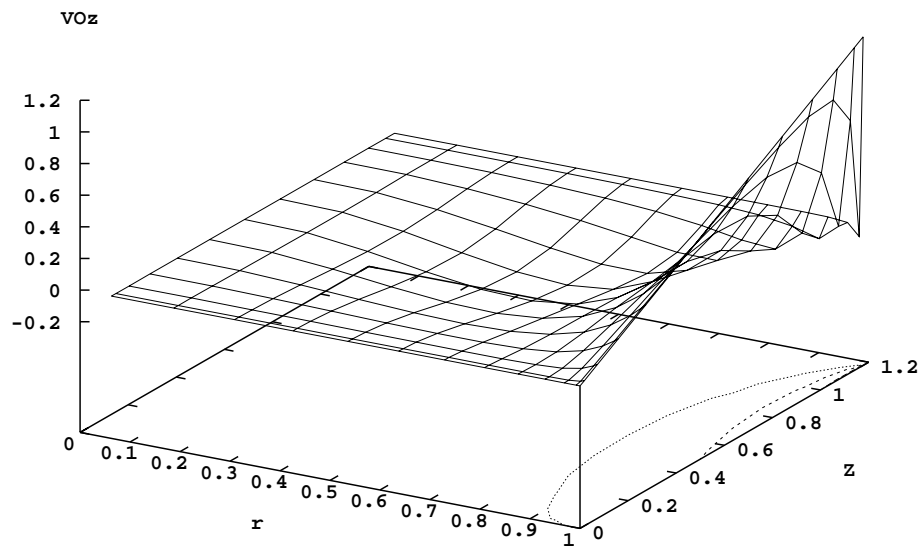


FIG. B.4 – semi-coupe méridienne de la composante axiale du champ de vitesse singulier ($h_0 = 1.18$)

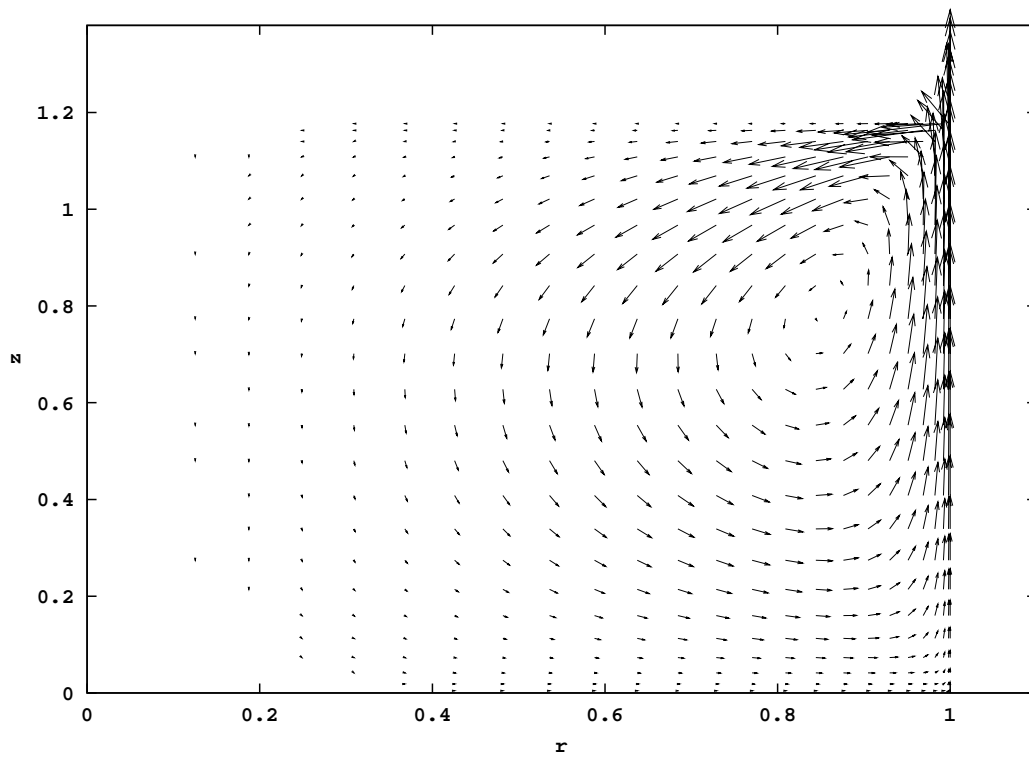


FIG. B.5 – semi-coupe méridienne du champ de vitesses singulier ($h_0 = 1.18$)

Bibliographie

- [1] Lord Kelvin. Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag.*, (10) :155–168, 1880.
- [2] D. J. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 1990.
- [3] V. Bjerknes, J. Bjerknes, H.S. Solberg, and T. Bergeron. *Hydrodynamique Physique avec applications à la météorologie dynamique*. P.U.F. Paris, 1934.
- [4] G. I. Taylor. Experiments with rotating fluids. *Proc. Camb. Phil. Society A*, (100) :114–121, 1921.
- [5] H. P. Greenspan. *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press, 1969.
- [6] E.J. Hopfinger, F.K. Browand, and Y. Gagne. Turbulence and waves in a rotating tank. *Journal of Fluid Mechanics*, (125) :319–345, 1982.
- [7] F.S Godeferd and L. Lollini. Direct numerical simulation of turbulence with confinement and rotation. *Journal of Fluid Mechanics*, (393), 1997.
- [8] C. Cambon, N.N.Mansour, and F.S. Godeferd. Energy transfer in rotating turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 337 :303–322, 1997.
- [9] M. Rieutord. *Une Introduction la Dynamique des Fluides*. Masson, 1997.
- [10] J. Pedlovsky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer Verlag, 1987.
- [11] W.V.R. Malkus. An experimental study of the global instabilities due to tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder. *Geophysical Astrophysical Fluid Dynamics*, (48) :123–134, 1989.
- [12] L. Lacaze, P. Le Gal, and S. Le Dizès. Elliptical instability in a rotating spheroid. *Journal of Fluid Mechanics*, (505), 2004.
- [13] R. Manasseh. Breakdown regimes of inertia waves in a precessing cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, (243) :261–296, 1992.
- [14] S. Douady, Y. Couder, and M. Meneguzzi. Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence. *Physical Reviews Letters*, 67 :983–986, 1991.
- [15] J.Jimenez, A.A. Wray, P.G. Saffman, and R.S. Rogallo. The structure of intense vorticity in isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, (255) :65–90, 1993.
- [16] S.C. Crow. Stability theory for a pair of trailing vortices. *AIAA Journal*, 8 :2172–2179, 1970.
- [17] C.-Y. Tsai and S.E. Widnall. The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field. *Journal of Fluid Mechanics*, (73) :721–733, 1976.
- [18] C.Cambon and J.F. Scott. Linear and on linear models for anisotropic turbulence. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, 31, 1999.
- [19] C. Cambon. *Etude spectrale d’un champ turbulent incompressible soumis à des effets couplés de déformation et de rotation imposés extérieurement, thèse d’état*. PhD thesis, Université Claude Bernard de Lyon, 1982.
- [20] B.J.Bayly. Three-dimensional instability of elliptical flow. *Physical Review Letters*, 57, 1986.

- [21] R.T. Pierrehumbert. Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid. *Physical Review Letters*, (57) :2157, 1986.
- [22] F. Waleffe. On the three-dimensional instability of strained vortices. *Physics of Fluids A2*, pages 76–80, 1990.
- [23] C. Eloy, P. Le Gal, and S. Le Dizès. Elliptic and triangular instabilities in rotating cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, (476) :357–388, 2003.
- [24] D.M. Mason and R.R. Kerswell. Nonlinear evolution of the elliptical instability : an exemple of inertial wave breakdown. *Journal of Fluid mechanics*, (396) :73–108, 1999.
- [25] C. Eloy, P. Le Gal, and S. Le Dizès. Experimental study of the multipolar vortex instability. *Physical Review Letters*, 85(16), 2000.
- [26] O. Le Roy and L. Le Penven. Compression of a turbulent vortex flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, (19), 1998.
- [27] N.N. Mansour and T.S. Lundgren. Three-dimensional instability of rotating flows with oscillating axial strain. *Physics of Fluids A2*, 12 :2089–2091, 1990.
- [28] J.P. Racz. Instability in a rotating cylinder with sinusoidal compression, part i and ii. A paraitre dans *Journal of Fluid Mechanics*, 2004.
- [29] M. Rieutord and L. Valdettaro. Inertial waves in a rotating spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics*, (341) :77–99, 1997.
- [30] A.D. Mac Ewan. Inertial oscillations in a rotating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, (40) :603–639, 1970.
- [31] R. Manasseh. Nonlinear behaviour of contained inertia waves. *Journal of Fluid Mechanics*, (315) :151–173, 1996.
- [32] R. Manasseh. Distortions of inertia waves in a rotating fluid cylinder forced near its fundamental mode resonance. *Journal of Fluid Mechanics*, (265) :345–370, 1994.
- [33] J.J. Kobine. Inertial wave dynamics in a rotating and precessing cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, (303) :233–252, 1995.
- [34] L. Graftieaux. *Etude expérimentale de l'instabilité d'un cylindre tournant soumis à une compression périodique, thèse de doctorat*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [35] C. Canuto, Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1988.
- [36] L. Graftieaux, L. Le Penven, J.F. Scott, and N. Grosjean. A new parametric instability in rotating cylinder flow. In *Advances in Turbulence IX, Proceedings of 9th European Turbulence Conference Southampton UK, July 2-5, 2002*, 2002.
- [37] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [38] R.R. Kerswell. Elliptical instability. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, (34) :83–113, 2002.
- [39] J.P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover, 2001.
- [40] M. Buffat. *Étude de la simulation numérique par une méthode d'éléments finis des écoulements internes subsoniques instationnaires bi et tridimensionnels*. PhD thesis, Université Claude Bernard (Lyon I), 1992.
- [41] C. Bernardi, M. Dauge, and Y. Maday. *Spectral methods for Axisymmetric Domains*. Gauthier-Villars, 1999.
- [42] H. C. Ku and D. Hatzivramidis. Solution of the two-dimensional navier-stokes equations by chebyshev expansions method. *Comput. Fluids*, (13) :99–113, 1985.
- [43] J.M. Lopez and J. Shen. An efficient spectral-projection method for the navier-stokes equations in cylindrical geometries, part 1. *Journal of Computational Physics*, (139), 1998.

- [44] E. Serre and J.P. Pulicani. A three-dimensional pseudospectral method for rotating flows in a cylinder. *Computers and Fluids*, (30) :491–519, 2001.
- [45] W.W. Schultz, N.Y. Lee, and J.P. Boyd. Chebyshev pseudospectral method of viscous flows with corner singularities. *Journal of Scientific Computing*, 4 :1–24, 1989.
- [46] H. K. Moffatt. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *Journal of Fluid Mechanics*, (18), 1964.
- [47] O. Botella and R. Peyret. Computing singular solutions of the navier-stokes equations with the chebyshev collocation method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 36 :125–163, 2001.
- [48] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukosly, and W.T. Vetterling. *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, 1992.
- [49] P. Lascaux and R. Theodor. *Analyse numerique matricielle appliquee a l'art de l'ingenieur, Tome 1 et 2*. Masson, 1994.
- [50] J.P. Nougier. *Méthodes de calcul numérique*. Masson, 1985.
- [51] S. Jakirlić et al. Study and modeling of near wall turbulence in internal combustion engines. *Commission of the European community, Final Report*, 1999.
- [52] C.F. Barenghi R.R. Kerswell. On the viscous decay rates of inertial waves in a rotating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 285, 1995.
- [53] J.J. Allen and M. S. Chong. Vortex formation in front of a piston moving through a cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 416, 2000.
- [54] W.W. Wood. An oscillatory disturbance of rigidly rotating fluid. *Proc. Royal Soc. of London, Series A*, 293, 1966.
- [55] L.R.M. Maas. Wave focusing and ensuing mean flow due to symmetry breaking in rotating fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, (437) :13–28, 2001.
- [56] A. Manders. *Internal wave patterns in enclosed density-stratified and rotating fluids*. PhD thesis, Universiteit van Utrecht, 2003.
- [57] M. Fullekrug. *Schumann-Resonanzen in den Magnetfeld-Komponenten*. Cuvillier Verlag G
- [58] Y. Duguet, J.F. Scott, and L. Le Penven. Destabilization of inertial waves in a rotating cylinder. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Held at Jyväskylä, Finland, 30/06-04/07/2003*. Springer-Verlag, 2003.