

N° d'ordre :

N° attribué par la bibliothèque :

ÉCOLE CENTRALE DE LYON  
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1  
Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique

**Mémoire de thèse**  
pour l'obtention du grade de  
**Docteur de l'École Centrale de Lyon**  
**Spécialité : Mécanique**  
au titre de l'École doctorale de : MÉGA

présentée et soutenue publiquement le 30 novembre 2004  
par Samuel VAUX

---

# Étude numérique des instabilités hydrodynamiques dans un cylindre soumis à un gradient horizontal de température

---

Après avis de : M. Abdelkader MOJTABI  
M. Bernard ROUX

Devant la commission d'examen formée de :  
M. Hamda BEN HADID  
M. Thierry DUFFAR  
M. Jean-Paul GARANDET  
M. Daniel HENRY



---

# Sommaire

---

<b>Remerciements</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Position du problème et modèle physique</b>	<b>17</b>
1.1 Position du problème . . . . .	17
1.2 Lois de conservation . . . . .	17
1.2.1 Conservation de la masse . . . . .	17
1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	18
1.2.3 Conservation de l'énergie . . . . .	20
1.3 Mécanismes de transport . . . . .	21
1.4 Recherche des équations adimensionnées d'évolution . . . . .	22
1.4.1 Choix des différentes échelles physiques . . . . .	22
1.4.2 Équations adimensionnées du problème . . . . .	24
1.5 Analyse énergétique . . . . .	24
<b>2 Méthodes numériques</b>	<b>29</b>
2.1 Méthode des éléments spectraux . . . . .	29
2.1.1 Formulations variationnelles . . . . .	29
2.2 Méthode des éléments spectraux isoparamétriques . . . . .	31
2.2.1 Présentation du type de maillage utilisé . . . . .	33
2.3 Méthode de discrétisation temporelle . . . . .	35
2.3.1 Présentation générale . . . . .	35
2.3.2 Application à l'équation de la conservation de l'énergie . . . . .	37
<b>3 Proper Orthogonal Decomposition (P.O.D)</b>	<b>39</b>
3.1 Introduction . . . . .	39
3.2 Présentation générale de la méthode P.O.D. . . . .	40
3.2.1 Approximation des fonctions de base pour la méthode des snapshots . . . . .	43
3.2.2 Détermination des coefficients $a_p^{(m)}$ par la P.O.D. . . . .	44
3.3 Construction du système réduit . . . . .	45
3.3.1 Méthode-alpha . . . . .	46
3.3.2 Méthode des variables séparées . . . . .	50
<b>4 Simulation Numérique Directe</b>	<b>55</b>
4.1 Méthodes de localisation du seuil critique $Gr_C$ . . . . .	55
4.2 Étude du rapport de forme $A = 2$ . . . . .	56
4.2.1 Influence du choix du maillage . . . . .	56

4.2.2	Écoulement stationnaire . . . . .	59
4.2.3	Moment Angulaire Normé . . . . .	63
4.2.4	Écoulement instationnaire . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Proper Orthogonal Decomposition - Résultats</b>	<b>75</b>
5.1	P.O.D. sous forme locale au voisinage du seuil $Gr_c$ . . . . .	75
5.1.1	Emploi de la méthode-VT . . . . .	75
5.1.2	Effets des paramètres numériques sur la P.O.D . . . . .	77
5.2	P.O.D. sous forme locale éloignée du seuil $Gr_c$ . . . . .	83
5.2.1	Emploi de la méthode-VT . . . . .	83
5.2.2	Emploi de la méthode- $\alpha$ . . . . .	90
5.3	Capacités prédictives de la P.O.D. . . . .	95
5.3.1	Détermination de la dynamique de l'écoulement pour $Gr \neq Gr_0$ . . . . .	95
5.3.2	Diagramme de bifurcation . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Influence du rapport de forme</b>	<b>103</b>
6.1	D.N.S. pour le rapport de forme $A = 4$ . . . . .	103
6.1.1	Détermination du seuil critique $Gr_c$ . . . . .	103
6.1.2	Analyse fréquentielle . . . . .	104
6.1.3	Effet du nombre de Grashof . . . . .	105
6.2	P.O.D. pour le rapport de forme $A = 4$ . . . . .	111
6.2.1	Méthode-VT . . . . .	111
6.3	Effets du rapport de forme . . . . .	119
6.3.1	Cavités cylindriques de rapport de forme modéré ( $A \leq 3$ ) . . . . .	119
6.3.2	Cavités cylindriques de rapport de forme intermédiaire ( $4 \leq A \leq 6$ ) . . . . .	120
6.3.3	Cavités cylindriques de grand rapport de forme ( $7 \leq A \leq 10$ ) . . . . .	121
<b>7</b>	<b>Détermination de l'origine de l'instabilité</b>	<b>127</b>
7.1	Equations de Orr-Reynolds . . . . .	127
7.1.1	Termes productifs et termes dissipatifs . . . . .	127
7.1.2	Mécanisme de production d'énergie cinétique fluctuante . . . . .	128
7.2	Naissance de l'instabilité oscillatoire . . . . .	130
7.2.1	Cas $A = 4$ . . . . .	131
7.2.2	Cas $A = 2$ . . . . .	131
7.2.3	Cas $A = 10$ . . . . .	132
7.2.4	Effets du rapport de forme dans la naissance de l'instabilité . . . . .	132
<b>8</b>	<b>Influence du nombre de Prandtl</b>	<b>137</b>
8.1	Étude du cas $Pr = 0$ . . . . .	137
8.1.1	Écoulement stationnaire . . . . .	137
8.1.2	Écoulement instationnaire . . . . .	140
8.1.3	Étude de l'écoulement oscillatoire par P.O.D. . . . .	144
8.1.4	Détermination de l'origine de l'instabilité . . . . .	150
8.2	Étude du cas $Pr = 0.055$ . . . . .	154
8.2.1	Structure de l'écoulement et détermination de $Gr_c$ . . . . .	154
8.2.2	Étude de l'écoulement oscillatoire par P.O.D. . . . .	158

---

8.2.3	Détermination de l'origine de l'instabilité . . . . .	160
8.3	Étude du cas $Pr = 0.075$ . . . . .	166
8.3.1	Structure de l'écoulement et détermination de $Gr_c$ . . . . .	166
8.3.2	Détermination de l'origine de l'instabilité . . . . .	172
<b>Conclusion</b>		<b>177</b>
<b>Annexe : Compléments sur les méthodes numériques</b>		<b>179</b>
<b>Résumé/Abstract</b>		<b>190</b>



---

# Remerciements

---

Cette longue aventure, commencée à la fin du siècle dernier et qui dura un lustre, fut jalonnée de quelques rencontres des plus agréables. Aussi je tiens à les évoquer tout en les remerciant. Tout d'abord, je tiens à remercier Michel Lance de m'avoir accueilli au sein du laboratoire (au bout du couloir, à droite...) et d'avoir su toujours instauré un dialogue riche tant sur le plan scientifique qu'humain avec la "communauté thésarde" dont j'étais membre. Ensuite, merci à mon directeur de thèse, Hamda Ben Hadid, pour entre autres sa connaissance experte des méthodes numériques mais aussi pour son "coaching" et sa confiance. Merci également à Daniel Henry, pour ses intuitions mêlées de profonde rigueur scientifique. Leur encadrement fut très instructif. J'adresse également ma gratitude à Abdelkader Mojtabi et à Bernard Roux de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Enfin, je suis très reconnaissant envers Thierry Duffar et Jean-Paul Garandet d'avoir porté un intérêt à cette étude en tant qu'examineurs. Je retiendrai ainsi un excellent souvenir de cette froide journée du 30 novembre, tant par l'intérêt scientifique porté à mon travail, aux discussions très enrichissantes qui s'ensuivirent mais aussi par l'atmosphère très humaine qui s'en dégagea.

La route est droite mais la pente est raide comme le disait un célèbre Poitevin ...



et que furent souvent douces et réconfortantes les rencontres tout au long de ce parcours. Tout d'abord, au contact du "carré magique" Fred-Tof-Ridha-Mac, un cocktail footballistique détonnant alliant la vision du jeu castelroussine, l'engagement physique rhodanien, la vista tunisienne et la percussion sénégalaise. À ceux-là se greffaient Manu dit l'homme-tentacule et Sylvain inéluctablement souple sur les appuis. Nous tenions là une équipe de rêve. Un compromis idéal entre la puissance d'une Mannschaft sévillanne et la grinta albiceleste. Une fois nos (pan)talonnades terminées, s'ensuivaient dans des nuages de fumée cancérigènes des pauses café-philo-foot mémorables. Et les mois passèrent, passèrent ... plusieurs éléments voguèrent sous d'autres cieus ; l'appel du gain ne se refuse pas... l'effectif devait alors se rajeunir. Parmi les arrivées, Steph, solide gaillard encagoulé qui forma à lui seul une charnière centrale au calme olympien, Charlot un de ces dur-à-cuire dopé à la tartiflette malgache et Guillevic, au toucher de balle tout fontainois et à l'accélération d'une C15. Cette nouvelle équipe suivit le chemin glorieux tracé par ses aînés et ce

---

même dans la rude épreuve-test de la troisième mi-temps. Mais force est de constater que, malheureusement, tout le monde n'est pas drogué de football. Autour d'un bon arabica ou d'un petit vin rouge, ce mammifère qu'est le thésard exprime également tout son arôme et parfois ... sa subtilité. Dans cette branche, merci à Denis le seul roi du calembour équipé tout Shimano, Serge l'homme multisoupapes, ce transalpin de Pietro, adepte féru de shorts trop courts, Ivana pour son style "Tournoi des six nations", Valeria pour ses tenues véritablement de bricolage et bien d'autres ... Parmi tous les thésards, un grand merci évidemment à Hatem, Jé, Marco, Tom, Domi, Laure, Lukas, Christophe, Wouter, Elena, Yohann et je dois sans nul doute en oublier. Une spéciale dédicace également à mon ancien co-bureau, Antoine, qui dut supporter entre autres musique, équipements sportifs et visites dans ce bureau de doléances. Outre cette jeunesse fougueuse, je tiens également à remercier dans les générations soixante-huitarde et pompidolienne tout particulièrement Dédé (dit la Sardine car ex-nageuse est-allemande), pour son humour heureusement décalé, Philippe pour son humanisme, Domi sans cesse accompagné de sa jovialité légendaire et Faouzi pour les nuits de la science. Enfin, ma plus grande sympathie aux Pr. Jean Bataille et Jean-Noël Gence pour les enseignements que j'ai conduits sous leur égide et leurs échanges souriants et prolifiques. Sur le chemin parfois chaotique de la thèse, Dieu que toutes ces rencontres ont été pour le moins humainement enrichissantes.

Outre la sphère locale et scientifique, ma gratitude se porte également à celles et ceux que je connais d'avant. Ainsi, "Vincent et les autres", qui m'avez toujours encouragé, parfois même aveuglément, qu'il est doux le souvenir de "Where is my mind?" à bord d'une Renault 9 rutilante filant droit vers un azur mordoré. Un énorme merci également à Greg, Françoise, Sam et Judith, chacun pour votre vision des choses et du plaisir que nous avons de nous retrouver.

Dans le giron ardéchois, je ne saurais oublier mon sempiternel "foyer d'accueil", à savoir la famille Ribeyre. Ô combien dois-je vous remercier pour notamment votre philosophie, votre poésie et votre humour. Qu'aurait-il advint si je ne vous avais connus?... Merci aussi pour les lapins sauce-moutarde. Et puis bien sûr merci à ma famille ; mon frère, mes sœurs, ma mère souvent trop soucieuse et mon père pour ses non-questions du genre "Et alors, cette thèse?". Merci aussi à Pascal et son goût pour le sirtaki... Merci enfin pour les caillettes (dont je me demande sérieusement si je ne devrais pas mettre la recette en annexe), blason de notre belle Ardèche au profil paysan. Je ne m'étendrai pas sur les merveilles dont regorge ce cher Vivarais, cela n'a rien à faire dans une telle rubrique, mais le cœur y est...Vive le FLAN (Front de Libération de l'Ardèche Nord) oserai-je à peine crier et qu'il est agréable de sauter dans les genêts.

Voilà, la concision n'est décidément pas mon fort.



Je sais pertinemment que certains ont décroché depuis longtemps et ont préféré se ruer corps

et à la page 24 sur la mystérieuse et énigmatique section “méthode des éléments spectraux iso-paramétriques”. Enfin, quoiqu’il en soit, dans cet exercice périlleux qu’il est de remercier, il est évident que j’en oublie et je tiens sincèrement à m’en excuser. Pour ceux-là et tous les autres précités, bon vent à tous et quelle joie de nous retrouver le sourire aux lèvres.





---

# Introduction

---

De manière générale, on définit la convection naturelle comme le mouvement d'un fluide engendré par la force volumique due à la poussée d'Archimède. Celle-ci peut-être induite par des gradients de température ou de concentration ou par les deux à la fois. Ce mouvement est généralement accompagné par le transport de masse et de chaleur. C'est le cas notamment en météorologie lorsqu'on rencontre des courants ascendants au-dessus des aires relativement plus chaudes ou tout simplement le cas d'une circulation d'air générée dans une pièce par un radiateur. L'intérêt porté à la convection naturelle peut ainsi se rencontrer dans de nombreuses situations telles que donc la météorologie mais aussi la géophysique, l'astrophysique ou encore pour nombre d'applications industrielles, notamment la croissance cristalline, où elle présente un enjeu primordial.

Ce travail de thèse est en rapport avec les technologies de fabrication des semi-conducteurs et alliages métalliques (tels InP, Ga-As, In-Sb, Bi-Sb, In-Cd ) par solidification dirigée à partir de leur phase fluide. Ces technologies prennent de plus en plus d'importance avec le développement de l'optoélectronique, l'optique non-linéaire et la microélectronique, domaines d'application de plus en plus sophistiqués. Lors de ces procédés, le métal fondu placé dans un creuset est tiré lentement ( $\sim 1$  à  $5 \mu m.s^{-1}$ ) et régulièrement vers une zone du four où la température est inférieure à la température de fusion. Le solide ainsi obtenu présente généralement des défauts de structure et de composition (dislocations, striations de composants) qui détériorent sa qualité et limitent ses champs d'applications. En fait, la plupart de ces défauts trouvent leur origine dans les comportements thermiques et hydrodynamiques au sein du bain fondu avant solidification, particulièrement les comportements dépendant du temps, si bien que la maîtrise de ces défauts passe par la compréhension et le contrôle de ce qui se passe au sein du bain fondu.

Ces mouvements dans la phase fluide sont en général complexes, car ils résultent de sollicitations diverses : action des forces de flottaison dues aux gradients de densité d'origine thermique ou solutale, déplacement de l'interface avec rejet de composants ce qui rend le problème dépendant du temps avec un champ de composants qui s'établit peu à peu au cours du temps, présence possible d'une surface libre où des forces de surface peuvent intervenir.

En général, durant le processus de solidification, le bain fondu est constamment soumis à des forces motrices. Pour de faibles valeurs de ces forces, les mouvements de convection sont indépendants du temps. Lorsque ces forces deviennent supérieures à une certaine valeur critique, la convection devient dépendante du temps. La compréhension de l'origine de ce changement de comportement du fluide passe en premier par une caractérisation précise de la nature et la structure des nouveaux régimes d'écoulement au voisinage de ce changement (transition). Des études fines sont donc nécessaires pour bien caractériser ces mouvements et permettre un meilleur développement du contrôle.

Le contrôle de ces mouvements est devenu depuis quelques années un objectif majeur de recherche dans ce domaine. Parmi les moyens de contrôle utilisés ces dernières années, l'application d'un champ magnétique constant ou tournant ([1],[2],[3],[4]) a donné des résultats intéressants, mais ce procédé ne s'applique qu'aux fluides électriquement conducteurs et le dispositif est lourd

à mettre en oeuvre. Afin d'élargir le domaine de contrôle des écoulements au cas des fluides transparents (non électriquement conducteurs), la convection vibrationnelle est un moyen efficace alternatif à la microgravité pour stabiliser les écoulements ([5],[6]). Des études récentes [7] ont été réalisées sur l'utilisation des ondes ultrasons "acoustic streaming" [8] pour stabiliser les écoulements. Le passage d'un écoulement de convection naturelle initialement dépendant du temps vers un écoulement indépendant du temps (qui est un des objectifs principaux recherchés) ne peut être obtenu que dans certaines plages des paramètres. C'est la connaissance de ces plages de paramètres qui permettra in fine l'amélioration de la qualité de la croissance. Une telle amélioration, correspondant à une réduction notable des inhomogénéités de concentration, est mentionnée dans la littérature lors d'expériences de solidification en présence d'ondes ultrasons ([9],[10],[11]). Ces expériences concernaient la solidification dirigée de monocristaux de Ga-As, In-Sb et d'alliages Bi-Sb et les ondes acoustiques utilisées avaient des fréquences entre 0.15 et 5 Mhz.

Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons à la convection naturelle dans un cylindre chauffé latéralement et nous étudions plus précisément les régimes d'écoulements dépendant du temps et chercherons à déterminer avec précision les seuils de déclenchement des instabilités. Nous abordons en premier lieu la simulation numérique directe tridimensionnelle utilisant la méthode des éléments spectraux isoparamétriques pour la discrétisation spatiale des équations du problème. Le domaine de calcul que représente la cavité cylindrique est découpé en douze macro-éléments. Notons que pour ce problème, la matrice globale résultant de l'assemblage des macro-éléments est de taille relativement importante,  $\sim 5.10^4$  pour chaque variable. Afin de réduire les temps de calcul, les simulations sont réalisées au moyen du calcul parallèle. La parallélisation des calculs est obtenue à l'aide de la méthode de complément de Schur qui permet de découpler les matrices relatives à chaque macro-élément. La discrétisation temporelle utilise pour sa part un schéma de différences finies d'ordre trois et se déroule en trois temps. Les fluides considérés s'apparentent aux métaux liquides caractérisés par un faible nombre de Prandtl,  $Pr \sim 10^{-2}$ . L'étude se base sur une large gamme de rapports de forme du cylindre ( $A$ =longueur/diamètre) et nous étudions l'évolution de  $Gr_c = f(A)$  pour  $Pr = 0.026$  et  $1.5 \leq A \leq 10$ . Ensuite l'influence du nombre de Prandtl sera abordée en considérant les couples ( $A = 3, Pr = 0$ ); ( $A = 4, Pr = 0.055$ ) et ( $A = 4, Pr = 0.075$ ). Nous spécifions les particularités de l'écoulement stationnaire rencontré avec notamment l'apparition d'une bifurcation stationnaire précédant la bifurcation oscillatoire (bifurcation de Hopf) pour les faibles rapports de forme ( $A \leq 3$ ). Nous étudions ensuite l'apparition de l'instabilité oscillatoire en déterminant sa nature et les caractéristiques de sa structure.

L'application de la méthode de Décomposition Orthogonale ("Proper Orthogonal Decomposition", P.O.D.) à l'écoulement instationnaire permet l'extraction des principaux modes caractéristiques de l'écoulement. La projection de Galerkin des équations du système sur les principaux modes permet l'obtention d'un modèle dynamique de faible dimension. Nous verrons dans quelle mesure ce modèle est capable de reproduire les résultats de la simulation numérique directe (D.N.S.) dans un domaine plus ou moins étendu autour du cas de référence. Par ailleurs, il est également possible de déterminer les paramètres critiques de l'instabilité à savoir sa nature, son seuil critique et la fréquence qui lui est associée.

Ensuite, une étude par analyse énergétique nous permet de mieux comprendre le mécanisme de transition de l'écoulement et de cerner les distinctions entre les scénarii des différents rapports de forme. Finalement, nous abordons l'effet de la nature du fluide considéré en prenant tout d'abord le cas d'un fluide parfaitement conducteur ( $Pr=0$ ) où les transferts thermiques sont instantanés. Nous concluons sur la prise en compte d'écoulements de fluides où le transport convectif joue par

contre un rôle majeur et envisageons de ce fait une gamme de fluides pour lesquels les mécanismes conduisant à l'apparition des instabilités sont distincts.

Après une présentation dans le premier chapitre du problème physique et la définition des différents paramètres du problème, nous nous penchons dans le chapitre suivant sur les méthodes numériques employées. Le troisième chapitre présente pour sa part les principes de la méthode P.O.D. dite "méthode des snapshots" et détaille la construction du système dynamique en adoptant deux méthodes différentes. Dans le chapitre 4, nous étudions en détail le cas ( $Pr = 0.026$ ,  $A = 2$ ) et mettons en évidence l'existence d'une bifurcation stationnaire précédant la bifurcation oscillatoire. Dans le cinquième chapitre, les résultats de la P.O.D concernant les cas ( $Pr = 0.026$ ,  $A = 2$ ) sont présentés de même que l'influence des différents facteurs conditionnant la fiabilité du modèle dynamique de faible dimension. Le chapitre 6 traite de l'influence du rapport de forme  $A$  ( $1.5 \leq A \leq 10$ ) pour le cas du fluide caractérisé par  $Pr = 0.026$ . Afin de déterminer les mécanismes sous-jacents au déclenchement des instabilités, le chapitre 7 développe une étude par analyse énergétique. Enfin, le chapitre 8 aborde l'influence du fluide en considérant tout d'abord le cas d'une instabilité purement hydrodynamique pour  $Pr = 0$ . Les effets thermiques sont ensuite clairement mis en évidence en étudiant des fluides à nombre de Prandtl plus élevés, à savoir  $Pr = 0.055$  et  $Pr = 0.075$ .

## Aperçu des travaux antérieurs sur les instabilités dans les fluides confinés

Hart ([12],[13]) est parmi les premiers à étudier la stabilité d'une couche fluide d'extension horizontale infinie, soumise à un gradient horizontal de température. En considérant l'écoulement parallèle établi (circulation de Hadley), il a montré que si l'on considère des fluides à nombre de Prandtl supérieur à 0.015, la première instabilité est une solution oscillatoire longitudinale. Cormack, Leal & Imberger [14] étendent l'étude de Hart à une cavité bidimensionnelle en utilisant une approche asymptotique. Ils trouvent ainsi un écoulement parallèle dans le centre de la cavité tandis que les régions voisines des extrémités sont limitées à la recirculation du fluide. Bejan & Tien [15] étudient ensuite le cas plus général de cavités bidimensionnelles de rapport de forme fini. Ils déterminent ainsi trois régimes d'écoulements pour différentes valeurs croissantes du nombre de Rayleigh,  $Ra$ . Tout d'abord, dans le régime conducteur, la solution d'écoulement parallèle trouvée par Cormack & al [14] est assez bien reproduite. Lorsqu'on augmente encore  $Ra$ , le régime est dit intermédiaire et la zone dans laquelle l'écoulement était parallèle rétrécit. Pour des valeurs encore plus grandes de  $Ra$ , on est en présence d'un régime de couche limite au niveau des extrémités de la cavité. Bejan & Tien [16] se pencheront ensuite sur le cas d'un cylindre horizontal soumis à un gradient horizontal de température et obtiennent une solution analytique pour l'écoulement tridimensionnel en considérant un nombre de Prandtl de l'ordre de l'unité ou supérieur. Des études similaires à celles de Hart sont menées et approfondies par Laure [17], Laure & Roux [18] et Kuo et Korpella [19] et montrent que pour des nombres de Prandtl supérieurs à 0.034, l'instabilité de la cellule de Hadley prend la forme d'une solution oscillatoire longitudinale. Pour des nombres de Prandtl inférieurs à 0.034, la première transition conduit à des rouleaux transverses stationnaires. Laure [17] réalise également une analyse de stabilité faiblement non-linéaire et montre qu'une solution constituée de rouleaux co-rotatifs est localement stable. Il est à remarquer que ces études analytiques ou de stabilité linéaire sur la circulation de Hadley ont un impact relativement limité pour l'étude des transitions oscillatoires dans des cavités de dimensions finies. En effet, la circulation de Hadley n'est pas l'écoulement de base approprié pour le domaine de valeurs de Grashof

---

auxquelles les oscillations apparaissent en milieu confiné. Devant la complexité des études théoriques nécessitant la prise en compte de conditions aux limites réalistes et de rapports de forme finis, de nombreuses études récentes ont été réalisées au moyen de la simulation numérique directe (D.N.S.).

La simulation numérique a été largement utilisée pour étudier le problème de la convection. Ces études numériques peuvent être regroupées en trois catégories, celles utilisant des intégrations du système d'équations évolutives dans le temps, celles basées sur la résolution du système d'équations indépendant du temps par une méthode de Newton combinées à des techniques de continuation et en dernier les approches mixtes basées sur la simulation numérique directe des régimes instationnaires associée à la résolution d'un système réduit obtenu à l'aide d'une projection orthogonale du système d'équations sur les modes propres du régime instationnaire ([20],[21]).

De nombreuses simulations numériques bidimensionnelles ont été réalisées pour un rapport de forme  $A_y = 4$  et pour des nombres de Prandtl  $Pr = 0$  et  $Pr = 0.015$ . Elles sont rassemblées dans la collection de "benchmarks" numériques réalisées par Roux [18]. Elles incluent notamment le travail de Behnia & Davies [22], Behnia *et al.*[23], Ben Hadid & Roux [24], Garrec & Magnaud [25] et Le Quéré [26]. D'autres travaux numériques tels ceux de Crespo del Arco, Pulicani & Randriamampianina [27], Roux, Ben Hadid & Laure [28], Pulicani *et al.*[29] et Okada et Ozoe [30] considèrent également une cavité de rapport de forme 4. Pour l'écoulement oscillatoire qui apparaît lors d'une bifurcation de Hopf, Le Quéré [26] trouve une valeur critique du nombre de Grashof  $Gr_c = 27875$  et une fréquence fondamentale d'oscillation  $f_0 = 17.3$ . Dans les deux cas, l'écoulement stationnaire avant l'apparition d'oscillations contient trois cellules de convection corotatives et l'oscillation consiste en une pulsation de ces cellules par rapport au centre de la cavité. Ces simulations numériques bidimensionnelles sont proches des simulations 3D si l'on considère des cavités de grande largeur mais il apparaît essentiel de réaliser des simulations tridimensionnelles dans le cas de cavités "finies".

Le nombre de simulations numériques tridimensionnelles est plus faible. En effet, les calculs instationnaires tridimensionnels sont grands consommateurs de temps-CPU et nécessitent des maillages raffinés. Ainsi, les premières réalisées par Chabbar & Lalanne [31], Extremet *et al.*[32] ou Gervaisio *et al.*[33] notamment, souffraient d'une résolution spatiale insuffisante. Cependant, ils trouvent que l'écoulement tridimensionnel est qualitativement différent du bidimensionnel et que les effets tridimensionnels sont présents dans toute la cavité. En contraste avec les résultats bidimensionnels, Afrid & Zebib [34] ont ainsi trouvé que l'écoulement présente toujours une unique cellule de convection. Cependant, il n'était toujours pas possible de reproduire correctement les résultats expérimentaux de Pratte & Hart [35], Hart & Pratte [36] ou Hung & Andereck [37]. Henry & Buffat [38] parviennent par contre à un bon accord avec ces expériences au niveau des seuils et des symétries de l'écoulement. Enfin, Wakitani [39] considère un grand nombre de cavités de "rapport de forme suivant la longueur" compris entre 2 et 4 et de "rapport de forme suivant la largeur" compris entre 0.5 et 2. Il étudie l'apparition des oscillations en fonction des rapports de forme et du nombre de Prandtl ( $0 \leq Pr \leq 0.027$ ) et trouve que les seuils augmentent avec  $Pr$  et la réduction du "rapport de forme suivant la largeur". Cependant, ces variations ne sont pas régulières indiquant des changements dans les modes oscillatoires lors de l'apparition des oscillations. Enfin, parmi les études utilisant des techniques de continuation, on distingue les travaux de Winters [40],[41] ou Winters & Jack [42]. L'écoulement de base est calculé en utilisant une méthode d'éléments finis et l'analyse de stabilité linéaire est ensuite réalisée autour de ces solutions de base. En faisant évoluer progressivement le paramètre du problème, le nombre de

Rayleigh ou de Grashof en l'occurrence pour ce problème, il est possible de déterminer la nature de la solution en calculant les valeurs propres de la Jacobienne du système. À partir de ces valeurs propres, il est possible de se prononcer sur la nature de la solution et d'évoluer vers les paramètres critiques et de déterminer ainsi le seuil d'instabilité. Cette méthode a le mérite de pouvoir déterminer les solutions stables ou instables et de connaître leur nature stationnaire ou instationnaire. Par exemple, dans le cas d'une cavité de rapport de forme  $A = 4$  et  $Pr = 0.015$  avec un écoulement bi-dimensionnel, Winters [40] trouve  $Gr_c = 38085$  et  $f_0 = 80.5$ , résultats en très bon accord avec ceux les plus précis de la littérature.

Pour l'étude de la convection dans des cavités cylindriques, les travaux sont peu nombreux. Nous notons entre autres, à l'image de Wanschura *et al.*[43] ou Touihri *et al.*[3], l'étude de l'évolution non-linéaire de la convection, au-delà des seuils primaires montrant l'existence d'un point de bifurcation secondaire. En ce point, la branche axi-symétrique perd sa stabilité et il y a création d'une nouvelle branche stable avec une structure  $3D$ .

Les études expérimentales de Schiroky & Rosenberger [44], Smutek *et al.*[45] et Bontoux *et al.*[46] considèrent une cavité cylindrique de rapport de forme 5 rempli d'un fluide caractérisé par  $Pr = 0.73$ . Schiroky & Rosenberger [44] observent la présence d'un écoulement secondaire tridimensionnel complexe. Bontoux *et al.*[46] obtiennent un excellent accord entre les mesures expérimentales et les simulations numériques tridimensionnelles sur une grande plage de nombre de Rayleigh alors qu'ils notent plusieurs différences avec les résultats analytiques et numériques bidimensionnels. Récemment, on relève les expériences de Braunsfurth & Mullin [47], Braunsfurth *et al.*[48], Juel *et al.*[49], Hof *et al.*[50] montrant notamment que la transition entre écoulement stationnaire et oscillatoire dépend fortement du rapport de forme et du nombre de Prandtl considéré. Hof *et al.*[50] observe entre autres que les modes obtenus par l'expérience et la simulation coïncident. Enfin, l'expérience de Davoust *et al.*[4] se rapproche de notre étude dans le sens où il considère la convection dans un cylindre horizontal soumis à un gradient horizontal de température. Il remarque notamment que sous champ magnétique vertical, quelque soit le niveau de convection, lorsque le nombre de Hartmann (mesurant le rapport entre l'effet amortissant dû au champ magnétique et la friction visqueuse) atteint une valeur de l'ordre de 10, les effets d'amortissement dus aux forces magnétiques (forces de Lorenz) deviennent suffisants pour stabiliser un écoulement initialement turbulent. De plus, à des valeurs plus élevées du nombre de Hartmann (de l'ordre de 100), les effets de la magnétohydrodynamique sont responsables d'un changement de régime à savoir le passage d'un régime de couche limite vers un régime dominé par le coeur de l'écoulement.

Comme le souligne Gelfgat *et al.*[51], la plupart des études numériques considèrent des valeurs fixes pour le rapport de forme et le nombre de Prandtl ( $Pr$ ), à savoir  $A = 4$  et  $Pr = 0$  et  $Pr = 0.015$ , autrement dit celles correspondant aux benchmarks GAMM [18] très détaillées. On trouve moins de travaux numériques considérant d'autres valeurs de Prandtl et de rapports de forme. De même, il n'apparaît pas de réelle compréhension de la dépendance du Grashof critique avec le rapport de forme et le nombre de Prandtl.



# Position du problème et modèle physique

## 1.1 Position du problème

Nous considérons l'écoulement d'un fluide dans une cavité cylindrique caractérisée géométriquement par son rapport de forme  $A$  défini comme le rapport de la longueur sur le diamètre ( $A = L/D$ ) (fig.1.1). Le cylindre est différentiellement chauffé par ses extrémités qui sont maintenues à des températures constantes. La température de l'extrémité droite ( $z = 0$ ),  $T_f$ , est supposée inférieure à celle de l'extrémité gauche ( $z = A$ ),  $T_c$ . Les parois latérales du cylindre sont supposées parfaitement isolées. Dans cette configuration et en présence de la gravité, un mouvement de convection naturelle s'établit dans le cylindre dès la plus petite différence de température entre les extrémités chaude et froide. Il est bien établi que lorsque la différence de température augmente, les mouvements convectifs s'intensifient conduisant à une modification de la nature et de la structure de l'écoulement. Dans plusieurs applications industrielles, notamment l'élaboration des matériaux, la nature de l'écoulement aussi bien que sa structure ont une importance capitale sur la qualité des matériaux. Nous considérons le cas d'un fluide newtonien incompressible. Toutes les propriétés du fluide sont constantes sauf la masse volumique  $\rho$  qui obéit à l'approximation de Boussinesq, c'est-à-dire qu'elle est constante partout sauf dans le terme de la poussée d'Archimède où elle varie linéairement avec la température.

## 1.2 Lois de conservation

Dans un premier temps, nous présentons le système d'équations qui modélise le problème physique. Ces équations sont au nombre de trois et représentent respectivement les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

### 1.2.1 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse peut s'écrire sous sa forme générale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.1)$$

En développant le terme de divergence  $\nabla \cdot (\rho \vec{v})$  et en utilisant la définition de la dérivée particulaire, on obtient la forme la plus connue de l'équation de continuité :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.2)$$

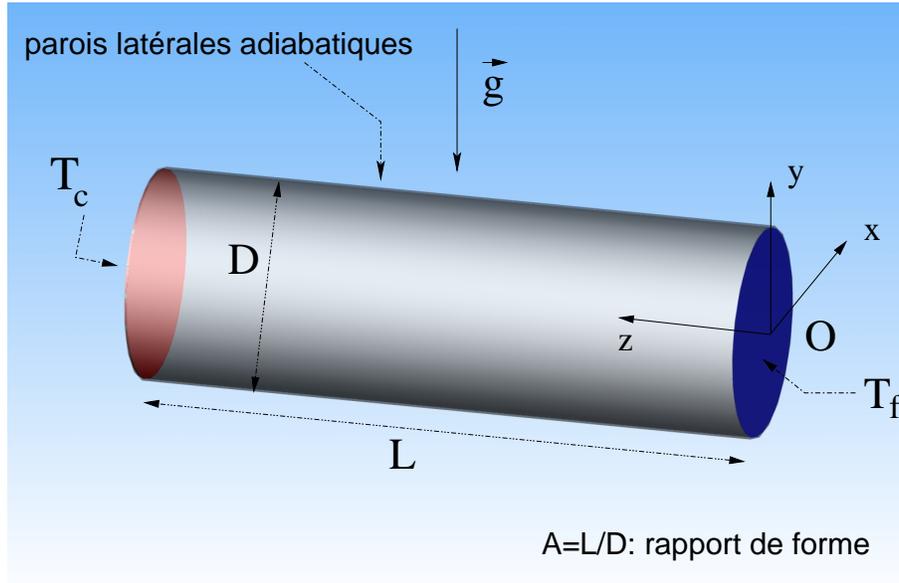


FIG. 1.1 – Configuration étudiée : Cavité cylindrique soumise à un gradient horizontal de température.

Pour un fluide incompressible, on obtient finalement :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.3)$$

### 1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

Nous considérons un fluide newtonien, incompressible et de viscosité dynamique  $\eta$ . L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right\} = \vec{f} - \nabla P + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (1.4)$$

où  $\vec{f}$  est le terme force extérieure. Dans le problème considéré,  $\vec{f}$  est la force due à la poussée d'Archimède. On applique alors l'approximation de Boussinesq qui suppose la masse volumique  $\rho$  constante partout sauf dans le terme de pesanteur où elle varie linéairement avec la température sous la forme :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (1.5)$$

$\alpha$  représente le coefficient d'expansion thermique ( $K^{-1}$ ). Etant donné que dans le cas présent, la seule force volumique est la force due à la pesanteur  $\vec{f} = -\rho g \vec{e}_y$ , l'équation (1.4) devient :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -[1 - \alpha(T - T_0)] g \vec{e}_y - \frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (1.6)$$

où  $\nu = \eta/\rho_0$  est appelée viscosité cinématique du fluide considéré ( $m^2 \cdot s^{-1}$ ).

Si l'on introduit de plus le terme  $-\rho_0 g \vec{e}_y$  dans le terme de pression ( $p = P + \rho_0 g y$ ), on aboutit

finalement à :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \alpha(T - T_0)g\vec{e}_y - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (1.7)$$

### Bilan des forces extérieures agissant sur un fluide chauffé

Le fluide est soumis à des forces gravitationnelles dues à la pesanteur  $\vec{g}$  mais aussi à des forces dissipatives qui s'opposent à ces dernières.

La force gravitationnelle est d'origine thermique. Considérons une goutte de fluide dont la température varie de  $\theta$  par rapport à la couche fluide à laquelle elle appartient. Ceci correspond donc à l'application d'une perturbation ponctuelle au sein du fluide. Cette goutte subit alors une poussée d'Archimède d'origine thermique de résultante :

$$F = m_f g = (\rho_g V - \rho_{couche} V)g \quad (1.8)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} V : \text{volume de la goutte de fluide (m}^3\text{)} \\ m_f : \text{variation de la masse de la goutte (kg)} \\ \rho_g : \text{masse volumique de la goutte de volume V (kg.m}^{-3}\text{)} \\ \rho_c : \text{masse volumique de la couche de fluide (kg.m}^{-3}\text{)} \end{array} \right.$$

En se plaçant dans le cadre des approximations de Boussinesq, ces deux masses volumiques varient selon la loi 1.5. On obtient donc l'expression suivante pour la résultante de la force gravitationnelle d'origine thermique par unité de volume :

$$F = \rho_0 \alpha \theta g \quad (1.9)$$

La poussée d'Archimède différentielle a de ce fait tendance à pousser la goutte vers le haut si  $\theta > 0$  et vers le bas si  $\theta < 0$ .

Les forces dissipatives s'opposant à cette force gravitationnelle sont pour leur part au nombre de deux. On distingue tout d'abord une force d'origine thermique : c'est la diffusion thermique (de diffusivité thermique  $\kappa$ ) qui affiche une tendance à uniformiser le champ de température. La seconde, quant à elle d'origine mécanique, est la dissipation visqueuse (de viscosité cinématique  $\nu$ ). C'est une force de frottement donc une force de freinage du liquide.

### Convection thermique créée par un gradient horizontal de température

Considérons un fluide placé entre deux plaques verticales distantes d'une longueur  $L$ . L'une est soumise à une température chaude constante  $T_c$  tandis que l'autre est soumise à une température froide constante  $T_f$ . L'approximation de Boussinesq envisage alors, pour le terme de gravité uniquement, la dépendance de la masse volumique  $\rho$  en fonction de la température. On peut ainsi écrire :

$$\rho(x) = \rho_0 \left[ 1 - \alpha(T_c - T_f) \frac{x}{L} \right] \quad (1.10)$$

Si l'on considère qu'il n'y a aucun mouvement, l'équation de Navier-Stokes se simplifie et se ramène à :

$$\nabla p = \rho \vec{g} \quad (1.11)$$

Nous venons de voir que  $\rho$  dépend de  $x$ . De ce fait, afin de satisfaire l'équation précédente, la pression  $p$  doit également dépendre de  $x$ . Or si  $p$  dépend de  $x$ , un mouvement convectif prend

naissance. Ainsi, la solution statique n'est pas solution de l'équation de Navier-Stokes dans une telle configuration. L'application d'un gradient horizontal thermique entraîne donc toujours un mouvement convectif.

### 1.2.3 Conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie interne d'un fluide en mouvement s'écrit :

$$\underbrace{\rho \frac{de}{dt}}_{\text{taux de variation de l'énergie interne}} = \underbrace{-p \nabla \cdot \vec{v}}_{\mathcal{P}_{\text{pression}}} + \underbrace{\tau : \nabla \vec{v}}_{\mathcal{P}_{\text{viscosité}}} - \underbrace{\nabla \cdot \vec{J}_q}_{\text{flux de chaleur}} \quad (1.12)$$

où  $\begin{cases} \mathcal{P}_{\text{pression}} : \text{puissance des forces de pression} \\ \mathcal{P}_{\text{viscosité}} : \text{puissance des forces de viscosité} \end{cases}$

Or, pour un fluide incompressible, la variation d'énergie interne s'écrit :

$$de = CdT \quad (1.13)$$

où  $C$  désigne la chaleur massique ( $J.K^{-1}.kg^{-1}$ ) supposée uniforme et constante. Par ailleurs, étant donné la divergence nulle du champ de vitesse, la puissance liée aux forces de pression l'est aussi. La puissance des forces visqueuses est souvent négligée. La loi de Fourier nous donne pour sa part l'expression du vecteur densité de flux de chaleur  $\vec{J}_q$  dû à la conduction :

$$\vec{J}_q = -k \nabla T \quad (1.14)$$

où  $k$  désigne la conductivité thermique du milieu ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ ) supposée uniforme et constante. L'équation d'énergie interne s'écrit donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (1.15)$$

où  $\kappa = k/\rho C$  est la diffusivité thermique du fluide considéré ( $m^2.s^{-1}$ ).

De cette manière, une grande diffusivité thermique correspond à une grande conductivité thermique et à une faible inertie thermique mesurée par  $\rho C$ . Le transport de chaleur est assuré par convection au travers du terme  $\vec{v} \cdot \nabla T$  et par diffusion au travers du terme  $\kappa \nabla^2 T$ .

### Compétition entre les forces dans l'apparition de mouvements convectifs ou d'instabilités

La compétition entre la force gravitationnelle et les forces dissipatives peut être mesurée à l'aide du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_t$ . Il évalue le rapport entre la force gravitationnelle d'origine thermique et les forces dissipatives d'origine thermique (diffusivité thermique) et mécanique (dissipation visqueuse) :

$$Ra_t = \frac{\text{force d'Archimède thermique}}{\text{forces visqueuses thermiques et mécaniques}} = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu \kappa} \quad (1.16)$$

où  $h$  est l'épaisseur de la couche fluide. La différence de température  $\Delta T$  entre les deux parois est donc le paramètre de contrôle. Il devient alors possible de trouver un écart de température critique  $\Delta T_c$  correspondant à un nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_t^c$  tel que pour un fluide chauffé par le bas :

- pour  $Ra_t < Ra_t^c$ , les forces dissipatives thermique et mécanique dominent la force gravitationnelle thermique. Toute perturbation mécanique et thermique se trouve ainsi rapidement dissipée. Aucun mouvement de convection n'apparaît : le régime est diffusif.
- pour  $Ra_t > Ra_t^c$ , la force gravitationnelle thermique domine les forces dissipatives thermique et mécanique. Toute perturbation est alors amplifiée. Effectivement, si  $\theta > 0$ , la goutte de liquide monte, elle se retrouve dans un milieu plus froid ce qui accroît la poussée d'Archimède et renforce le mouvement ascendant. Le régime est convectif.
- pour  $Ra_t = Ra_t^c$ , la force gravitationnelle contrebalance exactement les forces dissipatives. Le taux de croissance de la perturbation est nul : on parle de stabilité marginale.

Il peut être intéressant également de raisonner en termes de temps caractéristiques. On définit tout d'abord  $\tau_A$  le temps caractéristique du transport convectif dû à la poussée d'Archimède thermique par :

$$\tau_A^2 = \frac{d}{\alpha g \Delta T} \quad (1.17)$$

où  $d$  représente la distance parcourue par la particule (particule chaude montante ou particule froide descendante). On définit ensuite  $\tau_T$  le temps caractéristique de la diffusion de la chaleur par :

$$\tau_T = \frac{d^2}{\kappa} \quad (1.18)$$

Enfin,  $\tau_v$ , temps caractéristique de la dissipation visqueuse, s'écrit :

$$\tau_v = \frac{d^2}{\nu} \quad (1.19)$$

Si  $\tau_A^2 \ll \tau_T \tau_v$ , les forces dissipatives ne peuvent contrecarrer la poussée d'Archimède. La convection apparaît.

Si  $\tau_A^2 \gg \tau_T \tau_v$ , la perturbation n'a pas le temps de s'amplifier. Les mécanismes stabilisants que sont la diffusion thermique et la dissipation visqueuse sont prépondérants : le régime est diffusif. On retrouve les mêmes conclusions que précédemment en remarquant justement que :

$$Ra_t = \frac{\tau_v \tau_T}{\tau_A^2} \quad (1.20)$$

### 1.3 Mécanismes de transport

Considérons un écoulement chauffé régi par les équations de Navier-Stokes et l'équation de conservation de l'énergie. Dans ce cas, le transport de la quantité de mouvement et de la chaleur sont assurés par deux mécanismes : la diffusion et la convection. Ces deux mécanismes agissent simultanément. Cependant, ils ont une importance différente au regard de la géométrie utilisée et de la vitesse de l'écoulement.

Dans l'équation de Navier-Stokes, le terme régissant la convection est  $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$  où  $\rho$  représente la masse volumique du fluide et  $\vec{v}$  sa vitesse. Le flux de quantité de mouvement dû à la convection est de l'ordre de  $\rho U^2$  avec  $U$  une vitesse caractéristique de l'écoulement. Le flux de quantité de mouvement dû à la diffusion visqueuse provient pour sa part du terme  $\eta \nabla^2 \vec{v}$ . Il est de l'ordre de  $\frac{\eta U}{L}$  avec  $L$  longueur caractéristique de l'écoulement. Le rapport entre ces deux flux permet de

connaître le mécanisme prépondérant pour le transport de la quantité de mouvement. Ce rapport nous donne le nombre de Reynolds  $Re$  défini par :

$$Re = \frac{\text{flux convectif de quantité de mouvement}}{\text{flux diffusif de quantité de mouvement}} = \frac{\rho UL}{\eta} = \frac{UL}{\nu} \quad (1.21)$$

Ce nombre peut être vu aussi comme le rapport des temps caractéristiques de diffusion et de convection ; ainsi le mécanisme le plus rapide imposera l'organisation du champ de vitesse.

Dans l'équation de conservation de l'énergie, le terme  $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)T$  représente la convection de la chaleur. Le flux convectif de chaleur peut alors se mettre sous la forme  $\rho CTU$  où  $T$  est une température caractéristique. De son côté, la densité de flux diffusif est de l'ordre de  $\frac{kT}{L}$ . De même que l'on a défini précédemment le nombre de Reynolds  $Re$ , le nombre de Péclet thermique  $Pe_T$  évalue le rapport entre ces deux flux thermiques :

$$Pe_T = \frac{\text{flux convectif de chaleur}}{\text{flux diffusif de chaleur}} = \frac{\rho CLU}{k} = \frac{UL}{\kappa} \quad (1.22)$$

Dans un écoulement chauffé, il est par voie de conséquence intéressant de connaître l'importance relative du transport de quantité de mouvement et de chaleur. A cet effet, on introduit le nombre de Prandtl  $Pr$  défini par :

$$Pr = \frac{Pe_T}{Re} = \frac{\nu}{\kappa} \quad (1.23)$$

qui peut s'exprimer également en tant que rapport des temps caractéristiques de diffusion des fluctuations de température  $\tau_{diff_T} = \frac{L^2}{\kappa}$  et des fluctuations de vitesse  $\tau_{diff_{\vec{v}}} = \frac{L^2}{\nu}$  :

$$Pr = \frac{\tau_{diff_T}}{\tau_{diff_{\vec{v}}}} \quad (1.24)$$

Ainsi, lorsque  $\tau_{diff_T} > \tau_{diff_{\vec{v}}}$ , le mécanisme le plus lent est la thermique et la valeur de  $Pr$  est élevée. On rencontre notamment des  $Pr$  élevés dans les huiles organiques pour lesquels la viscosité cinématique  $\nu$  est forte et la diffusivité thermique  $\kappa$  est faible. Le cas des gaz est différent. Le coefficient de diffusivité thermique  $\kappa$  et de viscosité cinématique  $\nu$  étant sensiblement du même ordre de grandeur, le nombre de Prandtl  $Pr$  avoisine l'unité. Concernant les métaux liquides et plus spécialement ceux utilisés dans le domaine de la croissance cristalline, la diffusivité thermique est élevée ; le transport de chaleur par conduction prédomine. De ce fait, on est en présence de faibles valeurs du nombre de Prandtl  $Pr$ .

## 1.4 Recherche des équations adimensionnées d'évolution

### 1.4.1 Choix des différentes échelles physiques

Il est donc tout d'abord essentiel de définir des échelles pour les différentes grandeurs physiques que sont la longueur, le temps, la vitesse, la température et la pression. Dans le cas du problème que nous considérons, on prend en compte un cylindre soumis à un gradient horizontal de température et dont le rapport de forme  $A$  est défini par  $A = \frac{L}{D} = \frac{\text{longueur}}{\text{diamètre}}$ .

– **échelle de longueur** :  $L_{ref} = D$ .

On définit alors les grandeurs dimensionnées et adimensionnées (portant un \*) suivant :

$$\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{D} \quad \nabla = \frac{1}{D} \nabla^* \quad \nabla^2 = \frac{1}{D^2} \nabla^{*2} \quad (1.25)$$

– **échelle de temps** :  $t_{ref} = \frac{D^2}{\nu}$

On obtient alors :

$$t^* = \frac{\nu}{D^2} t \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\nu}{D^2} \frac{\partial}{\partial t^*} \quad (1.26)$$

– **échelle de vitesse** :  $V_{ref} = \frac{\nu\sqrt{Gr}}{D}$  où  $Gr$  est le nombre de Grashof défini par :

$$Gr = \frac{\alpha g \Delta T D^4}{\nu^2 L} \quad (1.27)$$

On obtient alors :

$$\vec{v}^* = \frac{D}{\nu\sqrt{Gr}} \vec{v} \quad (1.28)$$

**Remarque 1** : Pour le choix de la vitesse de référence  $V_{ref}$ , on part de l'équation de Navier-Stokes 1.7. Si l'on considère que le terme convectif  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  est du même ordre de grandeur que le terme visqueux  $\nu \nabla^2 \vec{v}$ , une analyse dimensionnelle nous donne comme vitesse de référence  $V_{ref} = \nu/D$ . Par contre, et ce qui est le cas dans notre configuration, en considérant le terme convectif du même ordre de grandeur que le terme force  $\alpha(T - T_0)g\vec{e}_y$ , l'analyse dimensionnelle nous donne la vitesse de référence  $V_{ref} = \frac{\nu\sqrt{Gr}}{D}$ .

– **température**

– **température moyenne** :  $T_{ref} = T_m = \frac{T_c + T_f}{2}$

– **écart de température** :  $\Delta T = T_c - T_f$

On obtient alors :

$$T^* = A \left( \frac{T - T_m}{\Delta T} \right) \quad (1.29)$$

Avec les échelles de température choisies, on a donc :

$$T_f = T_m - \frac{\Delta T}{2} \text{ et } T_c = T_m + \frac{\Delta T}{2} \quad (1.30)$$

ce qui donne, sous forme adimensionnée, en prenant l'origine du repère à l'extrémité froide du cylindre :

$$T^*(z = 0) = -\frac{A}{2} \text{ et } T^*(z = A) = \frac{A}{2} \quad (1.31)$$

– **échelle d'écart de pression** :  $P_{ref} = \frac{\rho_0 \nu^2 \sqrt{Gr}}{D^2}$

On obtient alors :

$$P^* = \frac{D^2}{\rho_0 \nu^2 \sqrt{Gr}} P \quad (1.32)$$

### 1.4.2 Équations adimensionnées du problème

En utilisant les grandeurs de référence définies précédemment, on obtient les équations adimensionnées du système. Celles-ci s'écrivent de la manière suivante :

– conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.33)$$

– conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \sqrt{Gr} (\vec{v} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \quad (1.34)$$

– conservation de la quantité de mouvement :

On se place dans le cadre de l'approximation de Boussinesq en vérifiant la relation (1.5), et en prenant  $T_0 = T_m$ , c'est-à-dire :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_m)] \quad (1.35)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement sous forme adimensionnée s'écrit alors :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sqrt{Gr} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \nabla^2 \vec{v} + \sqrt{Gr} T \vec{e}_y \quad (1.36)$$

Par conséquent, les trois équations adimensionnées d'évolution du système représentant les équations de conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement sont :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \sqrt{Gr} (\vec{v} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sqrt{Gr} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \nabla^2 \vec{v} + \sqrt{Gr} T \vec{e}_y \end{cases} \quad (1.37)$$

## 1.5 Analyse énergétique

L'étude par analyse énergétique peut être utilisée afin de trouver le mécanisme de transition de l'écoulement. On repart des équations régissant notre système. En adoptant une notation indicielle ( $i = 1, 2, 3$ ), elles prennent la forme suivante :

– conservation de la masse :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (1.38)$$

– conservation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \sqrt{Gr} u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \quad (1.39)$$

– conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sqrt{Gr} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \sqrt{Gr} T \vec{e}_y \quad (1.40)$$

Adoptons désormais la décomposition habituelle :

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, T = \bar{T} + T', p = \bar{p} + p' \quad (1.41)$$

$\bar{u}_i, \bar{T}$  et  $\bar{p}$  représentent la valeur moyenne respectivement de  $u_i, T$  et  $p$ .  $u'_i, T'$  et  $p'$  symbolisent pour leur part la fluctuation de  $u_i, T$  et  $p$  autour de leur valeur moyenne respective  $\bar{u}_i, \bar{T}$  et  $\bar{p}$ . L'équation (1.38) peut être écrite comme :

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.42)$$

Etant donné la divergence nulle du champ de vitesse, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.44)$$

Formons le produit scalaire entre l'équation de Navier-Stokes (1.40) et la fluctuation du vecteur vitesse  $u'_i$ . Il s'écrit :

$$u'_i \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \sqrt{Gr} u'_i (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = -u'_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2} + \sqrt{Gr} u'_i T \bar{e}_y \quad (1.45)$$

Etant donné que  $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = 0$ , on obtient alors :

$$\frac{\partial(u'_i u'_i / 2)}{\partial t} = -\sqrt{Gr} u'_i (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} - u'_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2} + \sqrt{Gr} u'_i T \bar{e}_y \quad (1.46)$$

Le premier terme du second membre de (1.46) peut être réécrit sous la forme :

$$-\sqrt{Gr} u'_i (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = -\sqrt{Gr} \left( u'_i \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_i u_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.47)$$

où

$$-\sqrt{Gr} u'_i \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\sqrt{Gr} \left( \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j u'_i)}{\partial x_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - u'_i \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) = -\sqrt{Gr} \left( \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j u'_i)}{\partial x_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.48)$$

et

$$-\sqrt{Gr} u'_i u_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\sqrt{Gr} \left( \frac{\partial(u'_i u_j u'_i)}{\partial x_j} - u'_i u'_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - u'_i u_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.49)$$

$$\iff -\sqrt{Gr} u'_i u_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{2} \sqrt{Gr} \left( \frac{\partial(u'_i u_j u'_i)}{\partial x_j} - u'_i u'_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{Gr} \frac{\partial(u'_i u_j u'_i)}{\partial x_j} \quad (1.50)$$

La relation (1.47) devient donc :

$$-\sqrt{Gr}u'_i(\bar{u}_j + u'_j)\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = -\sqrt{Gr}\left(\frac{\partial(\bar{u}_i\bar{u}_ju'_i)}{\partial x_j} - \bar{u}_i\bar{u}_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_iu'_j\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial(u'_iu'_ju'_i)}{\partial x_j}\right) \quad (1.51)$$

Le second terme du second membre de (1.46) peut s'écrire :

$$-u'_i\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{\partial(u'_ip)}{\partial x_i} - p\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial(u'_ip)}{\partial x_i} \quad (1.52)$$

Le troisième terme du second membre de (1.46) peut pour sa part s'écrire sous la forme :

$$-u'_i\frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}(u'_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(u'_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) - \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)^2 \quad (1.53)$$

Enfin, pour le quatrième terme du second membre, on obtient :

$$\sqrt{Gr}u'_iT\vec{e}_y = \sqrt{Gr}u'_i\bar{T}\vec{e}_y + \sqrt{Gr}u'_iT'\vec{e}_y \quad (1.54)$$

Finalement, l'équation (1.46) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u'_iu'_i/2)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{Gr}\bar{u}_i\bar{u}_ju'_i + u'_ip + u'_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sqrt{Gr}u_j\frac{u'_iu'_i}{2}\right) \\ &+ \sqrt{Gr}\bar{u}_i\bar{u}_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \sqrt{Gr}u'_i\bar{T}\vec{e}_y \\ &- \sqrt{Gr}u'_iu'_j\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)^2 + \sqrt{Gr}u'_iT'\vec{e}_y \end{aligned} \quad (1.55)$$

En intégrant (1.55) sur le volume total, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\Omega}\frac{u'_iu'_i}{2}d\Omega\right) &= \int_{\Omega}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{Gr}\bar{u}_i\bar{u}_ju'_i + u'_ip + u'_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sqrt{Gr}u_j\frac{u'_iu'_i}{2}\right)d\Omega \\ &+ \int_{\Omega}\left(\sqrt{Gr}\bar{u}_i\bar{u}_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \sqrt{Gr}u'_i\bar{T}\vec{e}_y\right)d\Omega \\ &+ \int_{\Omega}\left(-\sqrt{Gr}u'_iu'_j\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)^2 + \sqrt{Gr}u'_iT'\vec{e}_y\right)d\Omega \end{aligned} \quad (1.56)$$

Le premier terme (sur la première ligne) du second membre de (1.56) représente une divergence. En utilisant le théorème de la divergence de Gauss lors de son intégration sur le domaine  $\Omega$  et en considérant par ailleurs les conditions aux limites de non-glissement, on constate que sa contribution à la variation d'énergie cinétique fluctuante est nulle.

La moyenne de Reynolds du second terme (sur la deuxième ligne) de (1.56) est nulle (pour une oscillation périodique, prendre la moyenne sur une période rend l'intégration nulle).

Par conséquent, en notant  $K$  l'énergie cinétique fluctuante totale (sur le domaine  $\Omega$ ) à un instant  $t$ , vérifiant donc :

$$K = \int_{\Omega} \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{u'_i u'_i}{2} d\Omega \quad (1.57)$$

on obtient :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \int_{\Omega} \left( -\sqrt{Gr} u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 + \sqrt{Gr} u'_i T' \vec{e}_y \right) d\Omega \quad (1.58)$$

D'un point de vue physique, le terme  $-\sqrt{Gr} u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$  représente la production d'énergie cinétique

fluctuante dû au cisaillement de l'écoulement moyen. Le second terme, à savoir  $-\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)^2$ , tra-

duit la dissipation visqueuse de l'énergie cinétique fluctuante. Enfin, le dernier terme  $\sqrt{Gr} u'_i T' \vec{e}_y$

concerne la production d'énergie cinétique fluctuante dû à la poussée d'Archimède thermique. Penchons-nous désormais sur l'énergie thermique totale fluctuante  $\Theta$ . Elle est définie à un instant  $t$  par la relation :

$$\Theta = \int_{\Omega} \frac{T'^2}{2} d\Omega \quad (1.59)$$

On forme alors le produit scalaire entre l'équation de conservation de la chaleur (1.39) et la fluctuation de température  $T'$ . En adoptant une démarche similaire à celle appliquée pour l'énergie cinétique fluctuante et en opérant les simplifications, on obtient finalement pour l'énergie thermique fluctuante :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \int_{\Omega} \left( -\sqrt{Gr} T' u'_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \left( \frac{\partial T'}{\partial x_j} \right)^2 \right) d\Omega \quad (1.60)$$

Le terme  $-\sqrt{Gr} T' u'_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}$  caractérise le transport de chaleur par le champ de vitesse de perturbation

tandis que le terme  $\left(\frac{\partial T'}{\partial x_j}\right)^2$  symbolise la dissipation de chaleur par diffusion thermique.



# Chapitre 2

## Méthodes numériques

La discrétisation spatiale des équations du problème est réalisée à l'aide de la méthode des éléments spectraux isoparamétriques. La cavité cylindrique qui représente le domaine de calcul est divisée en douze macro-éléments. Pour la discrétisation temporelle, nous utilisons un schéma de différences finies d'ordre 3. La résolution numérique se fait en trois étapes. Nous traitons dans l'ordre les termes non-linéaires plus le terme force, la pression et enfin les termes linéaires.

### 2.1 Méthode des éléments spectraux

Nous présentons ici une brève description de la méthode des éléments spectraux. Nous renvoyons le lecteur, pour une description beaucoup plus détaillée, aux travaux de Bernardi & Maday [52], Gottlieb & Orszag [53] ou Canuto et al. [54]. Cette méthode fait partie de la catégorie des méthodes aux résidus pondérés et profite à la fois des avantages de la méthode des éléments finis (flexibilité géométrique) et ceux des techniques spectrales (ordre de convergence élevé) ([55] et [56]). Le domaine de calcul est découpé en douze macro-éléments appelés aussi sous-domaines où les variables du problème sont approchées par un produit tensoriel polynomial, et la liaison entre ces sous-domaines est prise en compte implicitement dans la formulation variationnelle ([57] et [58]).

#### 2.1.1 Formulations variationnelles

Considérons le problème de Helmholtz se présentant sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \nabla^2 u - \lambda^2 u = f \text{ sur } \Omega \\ u = g \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } \frac{\partial u}{\partial n} = h \text{ sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\Omega$  est un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$ ;  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont des fonctions connues,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\Gamma_D$  est la frontière de Dirichlet de  $\Omega$  et  $\Gamma_N$  est la frontière de Neumann de  $\Omega$ . Avant de le résoudre, il est utile de rappeler la définition des espaces suivants :

– l'espace des fonctions de carré sommable sur  $\Omega$  :

$$L^2(\Omega) = \left\{ u; \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega < +\infty \right\} \quad (2.2)$$

– l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\} \quad (2.3)$$

– un sous-espace  $H_g^1(\Omega)$  de l'espace  $H^1(\Omega)$  dans lequel toutes les fonctions vérifient les conditions aux limites de Dirichlet du problème et donc défini par :

$$H_g^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = g \text{ sur } \Gamma_D\} \quad (2.4)$$

On définit le produit scalaire suivant dans  $H_g^1(\Omega)$  :

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) d\Omega \quad (2.5)$$

et la norme qui lui est associée :

$$\|u\|_H^2 = (u, u)_H \quad (2.6)$$

On définit également les formes suivantes :

$$a(u, v) = - \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + \lambda^2 uv) d\Omega \quad (2.7)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega - \int_{\Gamma_N} h v d\Gamma \quad (2.8)$$

$a(u, v)$  est une forme bilinéaire symétrique définie négative tandis que  $L(v)$  est une forme linéaire.  $u$  est donc solution du problème de Helmholtz si et seulement si elle vérifie :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_g^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) \end{cases} \quad (2.9)$$

◇ *Preuve.* On considère l'équation (2.1). Multiplions chaque membre de cette équation par une fonction test  $v \in H$  et intégrons ensuite sur  $\Omega$ , on a donc :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u \cdot v d\Omega - \lambda^2 \int_{\Omega} uv d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (2.10)$$

Considérons le terme  $\int_{\Omega} \nabla^2 u \cdot v d\Omega$  et faisons une intégration par parties :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u \cdot v d\Omega = \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega \quad (2.11)$$

En reportant (2.11) dans (2.10), on a alors, en considérant que sur  $\Gamma_N$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n} = h$  :

$$- \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + \lambda^2 uv) d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma \quad (2.12)$$

$$\iff a(u, v) = L(v) \quad (2.13)$$

□

Pour la méthode des éléments spectraux,  $H_g^1(\Omega)$  est remplacé par un sous-espace affine noté  $A_h$  de dimension finie et dont les fonctions de base de l'espace vectoriel associé sont des fonctions polynomiales par morceaux à support local lié au découpage par éléments du domaine  $\Omega$ . Le problème se résume alors à :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in A_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), \text{ pour tout } v \text{ de } A_h \end{cases} \quad (2.14)$$

Nous présentons en **annexe A** l'application de cette méthode à un problème mono-dimensionnel. Par ailleurs, dans cette même annexe, la discrétisation du domaine par la méthode de Legendre-Gauss-Lobatto ainsi que le calcul des matrices  $A$  et  $B$  sont également abordés.

## 2.2 Méthode des éléments spectraux isoparamétriques

Lorsque le domaine de calcul est une géométrie complexe avec des frontières non rectilignes, l'application de la méthode des éléments spectraux nécessite la transformation des domaines élémentaires (avec des frontières curvilignes) en des domaines rectangulaires dans le cas bidimensionnel ou parallélépipédiques dans le cas tridimensionnel [59]. Dans le cas d'un domaine cylindrique, la transformation n'est nécessaire que dans le plan  $(xy)$  (fig.2.1).

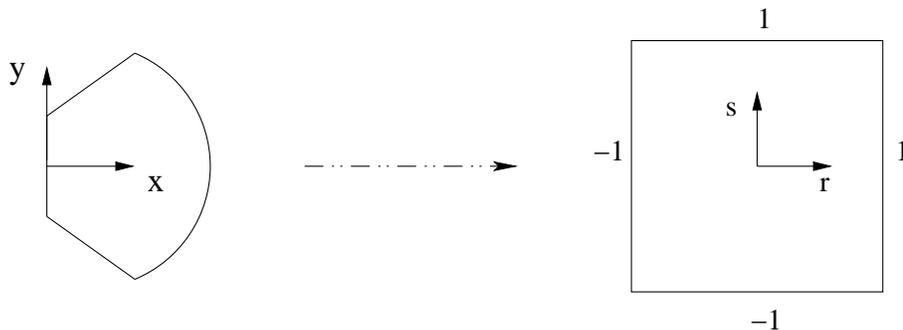


FIG. 2.1 – Transformation géométrique d'une portion de disque en un carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

Considérons à titre d'exemple le cas bidimensionnel, plus simple. Soit un point  $M$  de l'espace physique de coordonnées  $(x, y)$ . Dans le plan de calcul, on lui associe les coordonnées  $(r, s)$ . Le passage du plan physique au plan de calcul peut être exprimé par un produit tensoriel. Pour un élément  $k$  correspondant à une portion de disque, celui-ci s'écrit :

$$(x, y)^k = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (x, y)_{ij}^k H^i(r) H^j(s) \quad (2.15)$$

$H^i$  et  $H^j$  représentent les  $i^{\text{èmes}}$  et  $j^{\text{èmes}}$  polynômes de Lagrange. Dans le plan de calcul, le champ recherché  $u$  et la fonction du second membre  $f$  sont discrétisés de la façon suivante :

$$u^k(r, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n u_{ij}^k H^i(r) H^j(s) \quad (2.16)$$

$$f^k(r, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f_{ij}^k H^i(r) H^j(s) \quad (2.17)$$

Le problème variationnel appliqué au problème (2.1) s'écrit dans le cas bidimensionnel :

$$-\underbrace{\int \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx dy}_{J_1} - \lambda^2 \underbrace{\int \int_{\Omega} uv \, dx dy}_{J_2} = \underbrace{\int \int_{\Omega} f v \, dx dy}_{J_3} \quad (2.18)$$

Lorsqu'on applique pour un élément  $k$  le changement de variables induit par la transformation géométrique, ces différentes intégrales s'écrivent dans le plan de calcul :

$$J_1^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -\frac{\tilde{\nabla} u^k \tilde{\nabla} v^k}{J} \, dr ds \quad (2.19)$$

$$J_2^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J u^k v^k \, dr ds \quad (2.20)$$

$$J_3^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J f^k v^k \, dr ds \quad (2.21)$$

avec :

$$\tilde{\nabla} = \left(-y_s \frac{\partial}{\partial r} + y_r \frac{\partial}{\partial s}\right) \vec{x} + \left(x_s \frac{\partial}{\partial r} - x_r \frac{\partial}{\partial s}\right) \vec{y} \quad (2.22)$$

et  $J$  est le déterminant de la matrice Jacobienne de la transformation géométrique :

$$J = x_s \cdot y_r - x_r \cdot y_s \quad (2.23)$$

où  $x_s$  et  $x_r$  sont les dérivées partielles de  $x$  par rapport respectivement à  $s$  et à  $r$  et  $y_s$  et  $y_r$  les dérivées partielles de  $y$  par rapport à  $s$  et à  $r$ .

Les équations du système discrétisé relatif à tout élément  $k$  s'obtiennent en remplaçant  $u$  et  $f$  par leurs interpolants  $u_h^k$  et  $f_h^k$  dans l'équation du problème discrétisé (2.14) (pour les détails des calculs, voir [59]) :

$$\begin{cases} C_{ijmn}^k u_{mn}^k = B_{ijmn}^+ f_{mn}^k \\ C_{ijmn}^k = A_{ijmn}^k - \lambda^2 B_{ijmn}^+ \\ A_{ijmn}^k = -\tilde{\nabla}_{ijpq} \cdot \bar{B}_{pqrs}^k \cdot \tilde{\nabla}_{rsmn} \\ B_{ijmn}^{\pm} = |J_{pq}^k|^{\pm 1} B_{pim}^k \cdot B_{qjn}^k \end{cases} \quad (2.24)$$

où l'on a :

$$B_{ijk} = \int_{-1}^1 H^i(s) H^j(s) H^k(s) \, ds \quad (2.25)$$

La matrice globale du système  $C$  s'obtient par assemblage des matrices élémentaires :

$$\{C\} = \sum_k [C^k] \quad (2.26)$$

Le système global à résoudre s'écrit finalement :

$$\{C\}\{u\} = \sum_k [B^k][f^k] \quad (2.27)$$

### 2.2.1 Présentation du type de maillage utilisé

Sur la figure (2.2), nous rappelons la configuration étudiée et repérons en particulier les plans  $L_v$ ,  $L_h$ , l'axe  $H_t$  et le point  $O'$ . Ces derniers sont définis comme suit :

- $O'$  représente le centre de la cavité.
- $L_v$  représente le plan médian longitudinal vertical.
- $L_h$  représente le plan médian longitudinal horizontal.
- $H_t$  représente l'axe médian horizontal transverse.

Sur la figure (2.3(a)) est représenté le maillage dans un plan  $(xy)$  du cylindre découpé en douze macro-éléments comprenant chacun  $9 \times 9$  points de collocation. La distribution des points du maillage (extrema des polynômes de Legendre) dans le plan  $L_h$  (et aussi le plan  $L_v$ ) est donnée sur la figure 2.3(b).

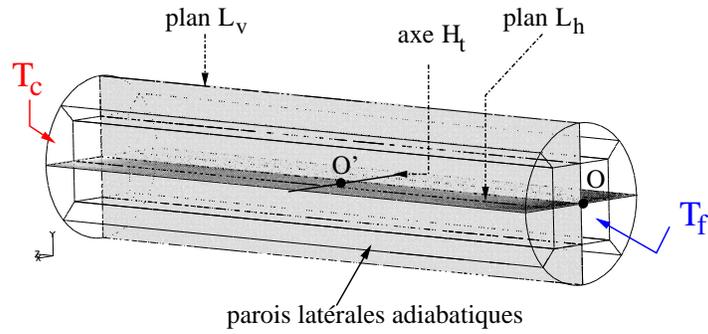
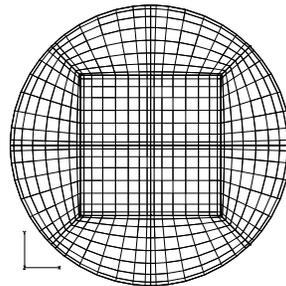
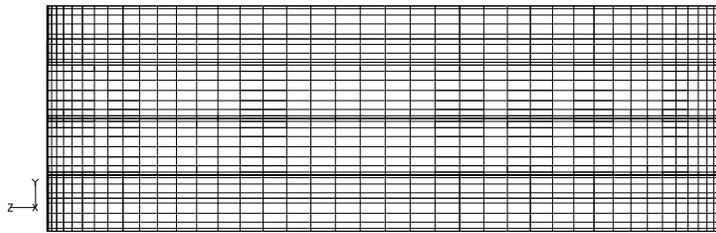


FIG. 2.2 – Découpage du cylindre en 12 éléments, 4 centraux et 8 périphériques. Représentation du plan longitudinal vertical  $L_v$ , du plan longitudinal horizontal  $L_h$ , de l'axe transverse horizontal  $H_t$  et du centre de la cavité  $O'$ .



(a) dans un plan  $xy$



(b) dans les plans  $L_v$  ou  $L_h$

FIG. 2.3 – Répartition des points de discrétisation dans une section dans le plan  $(xy)$  (fig.2.3(a)) (pour chaque élément,  $n_x + 1 = n_y + 1 = 9$ ) et dans les plans  $L_v$  ou  $L_h$  (fig.2.3(b)) (pour chaque élément,  $n_x + 1 = n_y + 1 = 9, n_z + 1 = 43$ ).

## 2.3 Méthode de discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle des équations de conservation est réalisée par une méthode de découpage dite méthode 'Splitting' [60].

### 2.3.1 Présentation générale

Considérons les équations d'incompressibilité et de conservation de la quantité de mouvement. Elles peuvent s'écrire d'une manière générale sous la forme :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -V_I(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \nabla p + V_D \nabla^2 \vec{v} + \vec{force} \quad (2.29)$$

avec  $V_I$  et  $V_D$  des constantes réelles résultant de l'adimensionnement choisi. On pose pour la suite :

$$NL(\vec{v}) = -1/2V_I[(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla \cdot (\vec{v} \vec{v})] \quad (2.30)$$

$$L(\vec{v}) = V_D \nabla^2 \vec{v} \quad (2.31)$$

Si on intègre cette équation sur un pas de temps  $dt$  ( $dt = t_{n+1} - t_n$ ), on a alors :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt = -V_I \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p dt + V_D \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla^2 \vec{v} dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{force} dt \quad (2.32)$$

– Pour le terme de gauche, on utilise un schéma implicite de discrétisation temporelle d'ordre  $j_i$  :

$$\frac{\partial \vec{v}^{n+1}}{\partial t} = \frac{\gamma_0 \vec{v}^{n+1} - \sum_{q=0}^{j_i-1} \alpha_q \vec{v}^{n-q}}{dt} \quad (2.33)$$

avec  $\vec{v}^n$  valeur discrétisée du vecteur  $\vec{v}$  à l'instant  $t_n = n \cdot dt$

– Pour le terme non-linéaire, on utilise un schéma explicite de la famille Adams-Bashforth d'ordre  $j_e$  :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} NL(\vec{v}) dt = dt \cdot \sum_{q=0}^{j_e-1} \beta_q \cdot NL(\vec{v}^{n-q}) \quad (2.34)$$

– En ce qui concerne le terme linéaire, pour des raisons de stabilité, on choisit un schéma implicite de la famille Adams-Moulton d'ordre  $j_i$  :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} L(\vec{v}) dt = dt \cdot \sum_{q=0}^{j_i-1} \gamma_q \cdot L(\vec{v}^{n+1-q}) \quad (2.35)$$

– Le terme de pression est pour sa part approximé par :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p dt = dt \cdot \nabla p^{n+1} \quad (2.36)$$

Coefficient	ordre 1	ordre2	ordre3
$\gamma_0$	1	3/2	11/6
$\alpha_0$	1	2	3
$\alpha_1$	0	-1/2	-3/2
$\alpha_2$	0	0	1/3
$\beta_0$	1	2	3
$\beta_1$	0	-1	-3
$\beta_2$	0	0	1

TAB. 2.1 – Valeurs des coefficients d'intégration  $\gamma_0, \alpha_k$  et  $\beta_k$  selon l'ordre des schémas choisis ( $j_i$  et  $j_e$ ).

Les coefficients  $\alpha_q, \beta_q$  et  $\gamma_q$  sont des poids appropriés et sont donnés dans le tableau (2.1) suivant l'ordre d'intégration temporel choisi.

On partage l'intégration temporelle en trois étapes de temps. Ceci implique l'introduction de deux instants intermédiaires  $t^{n+1/3} = (n + 1/3)dt$  et  $t^{n+2/3} = (n + 2/3)dt$  auxquels on associe respectivement les champs  $\vec{v}^{n+1/3}$  et  $\vec{v}^{n+2/3}$ .

- La première étape consiste tout d'abord à traiter le terme non-linéaire avec le schéma explicite d'ordre  $j_e$  plus le terme force :

$$\frac{\vec{v}^{n+1/3} - \sum_{q=0}^{j_e-1} \alpha_q \vec{v}^{n-q}}{dt} = \sum_{q=0}^{j_e-1} \beta_q NL(\vec{v}^{n-q}) + \vec{force}^{n+1} \quad (2.37)$$

- On considère ensuite le terme de pression :

$$\frac{\vec{v}^{n+2/3} - \vec{v}^{n+1/3}}{dt} = -\nabla p^{n+1} \quad (2.38)$$

- Finalement, pour le terme linéaire, on adopte le schéma implicite d'ordre  $j_i$  :

$$\frac{\gamma_0 \vec{v}^{n+1} - \vec{v}^{n+2/3}}{dt} = L(\vec{v}^{n+1}) \quad (2.39)$$

Ainsi, le champ final de vitesse  $\vec{v}^{n+1}$  peut être obtenu en résolvant un problème de Helmholtz en prenant en compte les conditions aux limites. Pour le calcul de la pression à l'étape (n+1), nous imposons deux conditions supplémentaires :

- la première est que le champ  $\vec{v}^{n+2/3}$  satisfasse la contrainte d'incompressibilité :

$$\nabla \cdot \vec{v}^{n+2/3} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2.40)$$

- la deuxième est que ce même champ satisfasse la condition au limite. Dans le cas d'une vitesse normale nulle à la frontière ( $\vec{n}$  est la normale à la frontière) :

$$\vec{v}^{n+2/3} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (2.41)$$

Si on applique la divergence à l'équation (2.38) et en utilisant (2.40), on a alors :

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \vec{v}^{n+1/3}}{dt} \text{ dans } \Omega \quad (2.42)$$

On obtient de cette manière un problème de Poisson, avec des conditions aux limites qui peuvent être déduites de (2.29).

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \left[ -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + NL(\vec{v}) + L(\vec{v}) + \vec{force} \right] \cdot \vec{n} \quad (2.43)$$

Afin d'améliorer la prise en compte de la condition  $\nabla \cdot \vec{v}^{n+1} = 0$  dans le calcul de la pression, à l'instar de Karniadakis et al. [60], le terme linéaire est décomposé en un terme rotationnel et un autre irrotationnel :

$$L(\vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (2.44)$$

En imposant la condition  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  et les conditions aux limites, nous obtenons les conditions aux limites sur la pression qui s'écrivent :

$$\nabla p \cdot \vec{n} = [NL(\vec{v}) + \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) + \vec{force}] \cdot \vec{n} \quad (2.45)$$

Le terme  $NL(\vec{v})$  est nul sur les frontières où existe une condition limite de type Dirichlet. Etant donné que le champ  $\vec{v}^{n+1}$  est à divergence nulle, les conditions aux limites de Neumann sur la pression s'écrivent :

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = \left[ -\sum_{q=0}^{j_e-1} \beta_q (\nabla \times (\nabla \times \vec{v}^{n-q})) + \vec{force}^{n+1} \right] \cdot \vec{n} \quad (2.46)$$

### 2.3.2 Application à l'équation de la conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit sous sa forme générale :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + T_I (\vec{v} \cdot \nabla) T = T_D \nabla^2 T \quad (2.47)$$

avec :

$$\begin{cases} T_I = \sqrt{Gr} \\ T_D = \frac{1}{Pr} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} NL(T) = T_I (\vec{v} \cdot \nabla) T \\ L(T) = T_D \nabla^2 T \end{cases} \quad (2.48)$$

La première étape prend en compte le terme non-linéaire :

$$T^{n+1/2} = T^n + dt T_I \sum_{q=0}^{j_e-1} \beta_q [(\vec{v} \cdot \nabla) T]^{n-q} \quad (2.49)$$

Il est à noter que nous utilisons une discrétisation temporelle d'ordre 3 (i.e.  $j_e = j_i = 3$ ) adaptée aux phénomènes instationnaires.

La deuxième étape prend en compte le terme linéaire :

$$\frac{\gamma_0 T^{n+1} - T^{n+1/2}}{dt} = T_D \nabla^2 T^{n+1} \quad (2.50)$$

En se basant sur l'équation (2.50), on peut écrire en regroupant les termes en  $T^{n+1}$  d'une part et les autres d'autre part :

$$\frac{\gamma_0 T^{n+1}}{dt} - T_D \cdot \nabla^2 T^{n+1} = \frac{T^{n+1/2}}{dt} \quad (2.51)$$

Appliquons alors la formulation variationnelle en nous limitant à un exemple monodimensionnel sur un domaine comprenant  $N + 1$  points. On peut écrire que :

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^N \phi_k h_k(x) \quad T^{n+1}(x) = \sum_{j=0}^N T_j^{n+1} h_j(x) \quad \text{et} \quad T^{n+1/2}(x) = \sum_{j=0}^N T_j^{n+1/2} h_j(x) \quad (2.52)$$

En multipliant l'équation (2.51) par la fonction test  $\phi$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient alors :

$$\frac{\gamma_0}{dt \cdot T_D} \int_{\Omega} T^{n+1}(x) \phi(x) dx - \int_{\Omega} \nabla^2 T^{n+1} \phi(x) dx = \frac{1}{dt \cdot T_D} \int_{\Omega} T^{n+1/2} \phi(x) dx \quad (2.53)$$

De plus, on peut écrire que :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 T^{n+1}(x) \phi(x) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial T^{n+1}(x)}{\partial n} \phi(x) d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla T^{n+1}(x) \nabla \phi(x) dx \quad (2.54)$$

Or, on a des parois adiabatiques donc  $\int_{\Gamma} \frac{\partial T^{n+1}(x)}{\partial n} \phi(x) dx = 0$  et :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 T^{n+1}(x) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla T^{n+1}(x) \nabla \phi(x) dx \quad (2.55)$$

En décomposant de plus  $\phi$ ,  $T^{n+1}$  et  $T^{n+1/2}$  selon les relations (2.52), on a alors :

$$\frac{\gamma_0}{dt \cdot T_D} \int_{\Omega} \sum_{j=0}^N T_j^{n+1} h_j(x) \sum_{k=0}^N \phi_k h_k(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{j=0}^N T_j^{n+1} \frac{dh_j(x)}{dx} \sum_{k=0}^N \phi_k \frac{dh_k(x)}{dx} dx = \quad (2.56)$$

$$\frac{1}{dt \cdot T_D} \int_{\Omega} \sum_{j=0}^N T_j^{n+1/2} h_j(x) \sum_{k=0}^N \phi_k h_k(x) dx \quad (2.57)$$

ce qui équivaut à écrire :

$$\frac{\gamma_0}{dt \cdot T_D} \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N T_j^{n+1} \phi_k \int_{\Omega} h_j(x) h_k(x) dx + \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N T_j^{n+1} \phi_k \int_{\Omega} \frac{dh_j(x)}{dx} \frac{dh_k(x)}{dx} dx = \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{dt \cdot T_D} \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N T_j^{n+1/2} \phi_k \int_{\Omega} h_j(x) h_k(x) dx \quad (2.59)$$

Cette équation est valable quelque soit la valeur des  $\phi_k$ . On obtient par conséquent  $N+1$  équations, qui en utilisant la notation d'Einstein, peuvent se mettre sous la forme :

$$\left[ \frac{\gamma_0}{dt \cdot T_D} B_{kj} - A_{kj} \right] T_j^{n+1} = \frac{1}{dt \cdot T_D} B_{kj} T_j^{n+1/2} \quad (2.60)$$

avec :

$$A_{kj} = - \int_{\Omega} \frac{dh_j(x)}{dx} \frac{dh_k(x)}{dx} dx \quad (2.61)$$

et

$$B_{kj} = \int_{\Omega} h_j(x) h_k(x) dx \quad (2.62)$$

## Proper Orthogonal Decomposition (P.O.D)

L'application de la Proper Orthogonal Decomposition à l'écoulement instationnaire d'un fluide permet l'extraction des principaux modes caractéristiques de cet écoulement. En utilisant la projection de Galerkin des équations de notre système sur ces principaux modes, un modèle dynamique de faible dimension (système d'équations différentielles ordinaires) peut être construit. Nous présentons ici la méthode POD dite "méthode des snapshots" et basons ensuite la construction du système dynamique en adoptant deux méthodes différentes. La première appelée méthode- $\alpha$  se base sur une prise en compte commune du champ de vitesse et de température tout en les pondérant d'un coefficient  $\alpha$  défini comme le rapport entre énergie cinétique et thermique fluctuantes. La seconde, dite méthode des variables séparées (ou méthode-VT) s'appuie pour sa part sur une prise en compte séparée des champs de vitesse et température.

### 3.1 Introduction

Depuis les travaux initiaux de Lumley [61], la "Proper Orthogonal Decomposition" (P.O.D.) a été largement appliquée à l'analyse des écoulements [62-79]. En particulier, après que Sirovich [64] a proposé la méthode appelée "méthode des snapshots", l'utilisation de la P.O.D pour l'étude des écoulements complexes est devenue faisable. Les simulations numériques directes des écoulements complexes nécessitent usuellement des temps de calcul très longs et des ressources informatiques conséquentes. En revanche, à partir de la résolution du système d'équations différentielles ordinaires (E.D.O) obtenu par la P.O.D., il est possible d'obtenir des informations fiables sur le comportement du système et cette démarche s'avère très attrayante d'autant plus que le coup en temps de calcul est nettement plus faible. Par conséquent, de gros efforts ont été consentis afin de construire des systèmes d'E.D.O. fiables. Néanmoins, beaucoup de ces efforts ont été restreints soit à un écoulement forcé comme en turbulence ou à de la pure conduction thermique, autrement dit à des problèmes d'écoulement sans couplage avec un scalaire notamment la température. Pour les problèmes de convection thermique, même si Sirovich ([64], [65]) a décrit une approche de construction des E.D.O. traitant de la vitesse et de la température dans la même voie sans se soucier de leur propriétés différentes, les articles basés sur une telle approche ne sont pas nombreux. Ces dernières années, Gunes et al. ([67], [69]) ont présenté des résultats de l'application de la P.O.D. à de la convection thermique bi-dimensionnelle en traitant la vitesse et la température de façon différente ; cependant, ils n'ont pas analysé l'exactitude de leur traitement et la fiabilité des E.D.O. construites. Dans ce chapitre, nous présentons donc les fondements de la méthode P.O.D.

ainsi que deux méthodes pour la construction de systèmes réduits fiables, que nous appliquons à la résolution d'un problème de convection thermique tri-dimensionnel.

## 3.2 Présentation générale de la méthode P.O.D.

L'idée fondamentale de la P.O.D. est de trouver une base de  $N$  modes  $\sigma^n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) qui, en comparaison à toutes les autres décompositions possibles en  $N$  "structures", est celle qui capture le plus d'énergie turbulente de l'écoulement considéré. Dans "l'espace physique", le champ aléatoire  $u(x)$  et la fonction  $\sigma^n(x)$ , intégrables en énergie, appartiennent à l'espace des fonctions de carré sommable.

Le problème se pose donc dans l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega)$ . Pour deux fonctions  $f$  et  $g$  de cet espace, on peut donc définir un produit interne  $(f, g)$  :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f_i^*(x)g_i(x) dx = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^k f_i^*(x)g_i(x) \right) dx \quad (3.1)$$

Le nombre  $k$  indique le nombre de composantes utilisées pour la décomposition. La norme d'une fonction  $f \in L^2(\Omega)$  est donnée quant à elle par :

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

La détermination de la fonction  $\sigma^n$  revient à rechercher sur l'ensemble des réalisations de  $u$  la réalisation  $\sigma^n$  qui ressemble le plus en moyenne aux  $u$ . Cela revient également à dire qu'à partir d'une réalisation d'un champ de vitesse, nous cherchons à projeter le champ aléatoire  $u(x)$  sur une structure test  $\sigma^n$ , et à choisir la structure  $\sigma^n$  qui maximise cette projection. Du point de vue mathématique, ce concept se traduit par la recherche de la fonction  $\sigma^n$  qui maximise au sens des moindres carrés la projection :

$$\gamma = \frac{(\sigma^n, u)}{(\sigma^n, \sigma^n)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.3)$$

Le but est donc de chercher la structure  $\sigma^n$  qui est la mieux corrélée avec le champ aléatoire, intégrable en énergie. Pour être plus précis, à partir d'un ensemble de réalisations du champ, l'objectif est de trouver la structure qui est la mieux corrélée avec tous les éléments de l'ensemble. Ainsi, nous voulons maximiser une mesure statistique de l'amplitude de  $\gamma$  qui peut être les moindres carrés de sa valeur absolue  $\langle |\gamma|^2 \rangle$  où  $\langle . \rangle$  représente une moyenne d'ensemble. Pour un nombre de réalisations égal à  $M$  (où  $u_j^{(m)}(x)$  correspond à la  $m^{\text{ième}}$  réalisation du champ  $u_j(x)$ ),  $\langle |\gamma|^2 \rangle$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$\Gamma = \langle |\gamma|^2 \rangle = \frac{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left( \sum_{j=1}^k \int_{\Omega} \sigma_j^{n*}(x) u_j^{(m)}(x) dx \right)^2}{\sum_{j=1}^k \int_{\Omega} \sigma_j^{n*}(x) \sigma_j^n(x) dx} \quad (3.4)$$

La maximisation du problème suivant la direction  $i$  s'écrit alors :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_i^n} = 0 \quad (3.5)$$

Le calcul des variations réduit le problème de maximisation à une équation de Fredholm de second type qui s'écrit de la manière suivante :

$$\int_{\Omega} R_{ij}(x, x') \sigma_j^n(x') dx' = \lambda_n \sigma_i^n(x) \quad (3.6)$$

avec  $R_{ij}$  matrice d'autocorrélation définie par :

$$R_{ij}(x, x') = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M u_i^{(m)}(x) u_j^{(m)}(x') = \langle u_i(x) u_j(x') \rangle \quad (3.7)$$

La théorie de Hilbert-Schmidt nous donne alors les propriétés de cette équation intégrale. Il existe ainsi un ensemble dénombrable de fonctions propres  $\sigma_i^n$  formant un ensemble complet et orthogonal qui permet de reconstruire le champ fluctuant de la manière suivante :

$$u_i(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sigma_i^n(x) \quad (3.8)$$

où :

$$\begin{cases} n \text{ repère le numéro du mode } (n = 1, \dots, N) \\ i \text{ représente la } i\text{-ème composante du vecteur } \sigma^n \text{ } (i = 1, \dots, k) \end{cases}$$

et

$$(\sigma^n, \sigma^m) = \delta_{nm} \quad (3.9)$$

si les fonctions propres sont normalisées.

On a par conséquent :

$$a_n = (\sigma^n, u) \quad (3.10)$$

Récrivons l'équation de Fredholm (3.6) en extension :

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \left\{ \left[ \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M u_i^{(m)}(x) u_j^{(m)}(x') \right] \sigma_j^n(x') \right\} dx' = \lambda_n \sigma_i^n(x) \quad (3.11)$$

ou

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \{ \langle u_i(x) u_j(x') \rangle \sigma_j^n(x') \} dx' = \lambda_n \sigma_i^n(x) \quad (3.12)$$

Reprenons pour l'écriture de  $u_i(x)$  et  $u_j(x)$  :

$$u_i(x) = \sum_{n'=1}^N a_{n'} \sigma_i^{n'}(x) \quad (3.13)$$

et

$$u_j(x') = \sum_{n''=1}^N a_{n''} \sigma_j^{n''}(x') \quad (3.14)$$

On a donc pour  $\sigma_i^n$  :

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \left\{ \langle \sum_{n'=1}^N a_{n'} \sigma_i^{n'}(x) \sum_{n''=1}^N a_{n''} \sigma_j^{n''}(x') \rangle \right\} \sigma_j^n(x') dx' = \lambda_n \sigma_i^n(x) \quad (3.15)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{n'=1}^N \sigma_i^{n'}(x) \sum_{n''=1}^N \langle a_{n'} a_{n''} \rangle > \sigma_j^{n''}(x') \right\} \sigma_j^n(x') dx' = \lambda_n \sigma_i^n(x) \quad (3.16)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n'=1}^N \sigma_i^{n'}(x) \sum_{n''=1}^N \langle a_{n'} a_{n''} \rangle > \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \sigma_j^{n''}(x') \sigma_j^n(x') dx' = \lambda_n \sigma_i^n(x) \quad (3.17)$$

Or

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \sigma_j^{n''}(x') \sigma_j^n(x') dx' = (\sigma^{n''}, \sigma^n) = \delta_{n''n} \quad (3.18)$$

d'où :

$$\sum_{n'=1}^N \sigma_i^{n'}(x) \langle a_{n'} a_n \rangle = \lambda_n \sigma_i^n(x) \quad (3.19)$$

et on aboutit ainsi à la relation :

$$\langle a_{n'} a_n \rangle = \lambda_n \delta_{nn'} \quad (3.20)$$

Cherchons maintenant à exprimer l'énergie cinétique de fluctuation. Celle-ci est définie par la relation :

$$K = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \langle u_j(x) u_j^*(x) \rangle dx \quad (3.21)$$

Or en utilisant pour  $u_j(x)$  et  $u_j^*(x)$  les expressions :

$$u_j(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sigma_j^n(x) \quad \text{et} \quad u_j^*(x) = \sum_{m=1}^N a_m \sigma_j^{m*}(x) \quad (3.22)$$

on obtient pour l'expression de  $K$  :

$$K = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \langle \sum_{n=1}^N a_n \sigma_j^n(x) \sum_{m=1}^N a_m \sigma_j^{m*}(x) \rangle dx \quad (3.23)$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^N \sigma_j^n(x) \sum_{m=1}^N \langle a_n a_m \rangle > \sigma_j^{m*}(x) dx \quad (3.24)$$

Or, on a vu que  $\langle a_n a_m \rangle = \lambda_n \delta_{nm}$  d'où :

$$K = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^N \lambda_n \sigma_j^n(x) \sigma_j^{n*}(x) dx \quad (3.25)$$

$$= \sum_{n=1}^N \lambda_n \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \sigma_j^n(x) \sigma_j^{n*}(x) dx \quad (3.26)$$

Vu que

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \sigma_j^n(x) \sigma_j^{n*}(x) dx = (\sigma^n, \sigma^n) = 1 \quad (3.27)$$

on a donc finalement :

$$K = \sum_{n=1}^N \lambda_n \quad (3.28)$$

Chaque valeur propre  $\lambda_n$  est ainsi égale à l'énergie cinétique moyenne dans la "direction" de la fonction de base  $\sigma^n$  correspondante. L'énergie cinétique fluctuante totale est, en moyenne, donnée par la somme des valeurs propres.

### 3.2.1 Approximation des fonctions de base pour la méthode des snapshots

La simulation numérique directe nous permet d'obtenir des champs (vitesse, température,..) en différents temps . Nous nous intéressons donc maintenant au cas où les réalisations correspondent à des états du problème à différents temps (méthode des snapshots). On peut écrire de ce fait :

$$u^{(m)}(x) = u(x, t_m) \quad (3.29)$$

Avec un problème discrétisé en  $N$  points, la matrice est au moins de taille  $(3N)^2$  si l'on ne considère que les fluctuations de vitesse. La matrice correspondante peut ainsi devenir rapidement très grande et les ressources de calcul insuffisantes. L'idée serait d'avoir une matrice bien plus petite qui soit liée désormais non pas au nombre de points du maillage mais au nombre de réalisations (snapshots) pris à différents instants. En fait, on peut s'appuyer sur le fait que la matrice d'autocorrélation  $R_{ij}$  est dégénérée et qu'une fonction propre  $\sigma^i(x)$  peut avoir la représentation suivante :

$$\sigma^i(x) = \sum_{n=1}^M q_n^i u^{(n)}(x) \quad (3.30)$$

(avec  $M$  : nombre de snapshots enregistrés) c'est-à-dire que chaque fonction propre  $\sigma^i(x)$  peut être vue comme un mélange des champs stockés à différents temps pondérés par des coefficients  $q_n^i$  à déterminer. Revenons ainsi à l'équation de Fredholm donnée par (3.11) :

$$\int_{x'} \sum_j \left\{ \left[ \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M u_i^{(m)}(x) u_j^{(m)}(x') \right] \sigma_j^k(x') \right\} dx' = \lambda_k \sigma_i^k(x) \quad (3.31)$$

On a donc en utilisant l'écriture précédente pour  $\sigma^i$  :

$$\int_{x'} \sum_j \left\{ \left[ \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M u_i^{(m)}(x) u_j^{(m)}(x') \right] \sum_{n=1}^M q_n^k u_j^{(n)}(x') \right\} dx' = \lambda_k \sum_{m=1}^M q_m^k u_i^{(m)}(x) \quad (3.32)$$

$$\iff \sum_{m=1}^M u_i^{(m)}(x) \left\{ \sum_{n=1}^M \left[ \frac{1}{M} \sum_j \int_{x'} u_j^{(m)}(x') u_j^{(n)}(x') dx' \right] q_n^k \right\} = \sum_{m=1}^M u_i^{(m)}(x) \lambda_k q_m^k \quad (3.33)$$

Par identification, on a donc pour  $m = 1, \dots, M$  :

$$\sum_{n=1}^M \left[ \frac{1}{M} \sum_j \int_{x'} u_j^{(m)}(x') u_j^{(n)}(x') dx' \right] q_n^k = \lambda_k q_m^k \quad (3.34)$$

Soit en écrivant que :

$$C_{mn} = \frac{1}{M} \sum_j \int_{x'} u_j^{(m)}(x') u_j^{(n)}(x') dx' \quad (3.35)$$

$$= \frac{1}{M} (u^{(m)}, u^{(n)}) \quad (3.36)$$

on a donc :

$$\sum_{n=1}^M C_{mn} q_n^k = \lambda_k q_m^k \quad (3.37)$$

d'où pour  $q^k$  de composantes  $(q^k(1), q^k(2), \dots, q^k(M))$ , on a le système :

$$Cq^k = \lambda_k q^k \quad (3.38)$$

### 3.2.2 Détermination des coefficients $a_p^{(m)}$ par la P.O.D.

Le problème aux valeurs propres (3.38) nous a donné l'équation suivante :

$$Cq^k = \lambda_k q^k \quad (3.39)$$

Si l'on considère de manière générale le problème non normalisé de valeur propre  $\lambda_k$  et de vecteur propre non normalisé  $q^k$ , la relation (3.38) s'écrit :

$$Cq'^k = \lambda_k q'^k \quad (3.40)$$

D'après (3.30), nous pouvons écrire pour la fonction  $\sigma'^i(x)$  associé au vecteur propre  $q'^i$  :

$$\sigma'^i(x) = \sum_{n=1}^M q_n'^i u^{(n)}(x) \quad (3.41)$$

$\sigma'^i(x)$  n'est pas normalisé. Effectuons sa normalisation :

$$\sigma^i(x) = \frac{\sigma'^i(x)}{|\sigma'^i(x)|} = \sum_{n=1}^M q_n^i u^{(n)}(x) = \sum_{n=1}^M \frac{q_n'^i}{|\sigma'^i(x)|} u^{(n)}(x) \quad (3.42)$$

Projetons désormais  $\sigma^i(x)$  sur  $u^{(m)}(x)$  :

$$(u^{(m)}(x), \sigma^i(x)) = \sum_{n=1}^M q_n^i (u^{(m)}(x), u^{(n)}(x)) \quad (3.43)$$

En s'inspirant de la relation (3.8), posons l'égalité :

$$u^{(m)}(x) = \sum_{q=1}^M a_q^{(m)} \sigma^q(x) \quad (3.44)$$

En remarquant d'après (3.36) que :

$$(u^{(m)}(x), u^{(n)}(x)) = M.C_{mn} \quad (3.45)$$

(3.43) s'écrit en utilisant (3.44) et (3.45) :

$$\sum_{q=1}^M a_q^{(m)}(\sigma^q(x), \sigma^i(x)) = M \sum_{n=1}^M C_{mn} q_n^i \quad (3.46)$$

Or, d'après (3.9) et (3.37), on sait que :

$$(\sigma^q(x), \sigma^i(x)) = \delta_{iq} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^M C_{mn} q_n^i = \lambda_i q_m^i \quad (3.47)$$

d'où on peut enfin déterminer la valeur du coefficient  $a_i^{(m)}$  :

$$a_i^{(m)} = M \lambda_i q_m^i \quad (3.48)$$

Connaissant ainsi les coefficients  $a_i^{(m)}$ , il est alors aisé de reconstruire également la fluctuation  $u^{(m)}(x)$  :

$$u^{(m)}(x) = \sum_{i=1}^M M \lambda_i q_m^i \sigma^i(x) \quad (3.49)$$

### 3.3 Construction du système réduit

Reprenons les équations du système (1.37). Celles-ci s'écrivent sous la forme :

– équation de conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.50)$$

– équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + T_I (\vec{v} \cdot \nabla) T = T_D \nabla^2 T \quad (3.51)$$

avec :

$$\begin{cases} T_I = \sqrt{Gr} \\ T_D = \frac{1}{Pr} \end{cases}$$

– équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + V_I (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + V_D \nabla^2 \vec{v} + V_{BT} \cdot T \vec{e}_y \quad (3.52)$$

avec :

$$\begin{cases} V_I = \sqrt{Gr} \\ V_D = 1 \\ V_{BT} = \sqrt{Gr} \end{cases}$$

La projection des trois équations de conservation (3.50), (3.51) et (3.52) sur les modes  $\sigma^i$  de l'écoulement fournit un système d'équations différentielles ordinaires (E.D.O.). Ces modes  $\sigma^i$ , du fait que nous sommes en présence de fluctuations de vitesse et de température, doivent inclure une "partie vitesse" et une "partie température". Deux approches sont présentées pour tenir compte

de l'importance relative des contributions des fluctuations dans la matrice de corrélation. La première de ces approches appelée "méthode-alpha" (que nous noterons aussi souvent méthode- $\alpha$ ) prend en compte une seule matrice de corrélation incluant simultanément les fluctuations de vitesse et de température. Néanmoins, afin de pondérer l'influence des effets thermiques et des effets hydrodynamiques, il est nécessaire d'introduire un coefficient  $\alpha$ , rapport entre les énergie cinétique et thermique de fluctuation.

La deuxième méthode, nommée "méthode-VT" considère deux matrices de corrélation : l'une portant uniquement sur les fluctuations de vitesse et l'autre basée pour sa part sur les fluctuations de température. Les deux problèmes aux valeurs propres associés nous génèrent la construction d'une base de modes-vitesse  $\sigma_v^i$  et d'une base de modes-température  $\sigma_T^i$ .

### 3.3.1 Méthode-alpha

Soit  $(u, v, w)$  le champ de vitesse instantané et  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  le champ moyen de vitesse suivant les trois directions  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  de l'espace. On considère que  $(u', v', w')$  représente la fluctuation temporelle du champ de vitesse total  $(u, v, w)$  par rapport à cet écoulement moyen. De même,  $T'$  symbolise la fluctuation du champ thermique total  $T$  par rapport au champ thermique moyen  $\bar{T}$ . Décomposons de façon usuelle le vecteur  $U = (\vec{v}, T)$  suivant sa valeur moyenne et sa partie fluctuante :

$$U = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} + u' \\ \bar{v} + v' \\ \bar{w} + w' \\ \bar{T} + T' \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Introduisons les quantités suivantes :

$$N(U) = \begin{pmatrix} V_I(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \\ T_I(\vec{v} \cdot \nabla) T \end{pmatrix} \quad L(U) = \begin{pmatrix} V_D \nabla^2 \vec{v} \\ T_D \nabla^2 T \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \nabla p \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} V_{BT} \cdot T \vec{e}_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Nous pouvons alors réécrire les équations d'évolution du système sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -N(U) - P + L(U) + G \quad (3.55)$$

Etant donné que la dynamique du système dépend à la fois de la température et de la vitesse, la matrice de corrélation doit donc faire intervenir les fluctuations de vitesse  $(u', v', w')$  et de température  $T'$ . Pour tenir compte de la différence des contributions, nous introduisons, à l'instar de B.Podvin & P. Le Quéré [20] un coefficient  $\alpha$  défini par le rapport entre les énergies cinétique et thermique de fluctuation :

$$\alpha = \frac{\text{énergie cinétique turbulente}}{\text{énergie thermique turbulente}} \quad (3.56)$$

$$\iff \alpha = \frac{\int_{\Omega} \sum_{i=1}^M u'^{(i)}(x) u'^{(i)}(x) + v'^{(i)}(x) v'^{(i)}(x) + w'^{(i)}(x) w'^{(i)}(x) dx}{\int_{\Omega} \sum_{i=1}^M T'^{(i)}(x) T'^{(i)}(x) dx} \quad (3.57)$$

La matrice de corrélation du système s'écrit de ce fait :

$$R_{i,j} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M [u'^{(i)}(x) u'^{(j)}(x) + v'^{(i)}(x) v'^{(j)}(x) + w'^{(i)}(x) w'^{(j)}(x) + \alpha T'^{(i)}(x) T'^{(j)}(x)] dx \quad (3.58)$$

La recherche des valeurs propres  $\lambda_i$  et des vecteurs propres  $q_n^i$  associés à cette matrice de corrélation nous permet d'accéder selon la relation (3.30) aux modes  $\sigma^i$  de l'écoulement :

$$\sigma^i(x) = \sum_{n=1}^M q_n^i U'^{(n)}(x) \quad (3.59)$$

Chaque structure  $\sigma^i$  se décompose suivant :

$$\sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma_V^i \\ \sigma_T^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^i \\ \sigma_v^i \\ \sigma_w^i \\ \sigma_T^i \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

où  $(\sigma_u^i, \sigma_v^i, \sigma_w^i)$  représentent les composantes du mode-vitesse  $\sigma_V^i$  dans les trois directions  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  de l'espace.  $\sigma_T^i$  symbolise quant à lui le mode-température. La projection d'un quadrivecteur  $f = (f_u, f_v, f_w, f_T)$  sur un vecteur de la base  $\{\sigma^i\}$  s'écrit ainsi :

$$(\sigma^i, f) = \int_{\Omega} (\sigma_u^i(x) f_u(x) + \sigma_v^i(x) f_v(x) + \sigma_w^i(x) f_w(x) + \alpha \sigma_T^i(x) f_T(x)) dx \quad (3.61)$$

De ce fait, la norme du vecteur  $\sigma^i = (\sigma_u^i, \sigma_v^i, \sigma_w^i, \sigma_T^i)$  est définie par :

$$|\sigma^i| = \sqrt{(\sigma^i, \sigma^i)} = \sqrt{\int_{\Omega} (\sigma_u^i{}^2(x) + \sigma_v^i{}^2(x) + \sigma_w^i{}^2(x) + \alpha \sigma_T^i{}^2(x)) dx} \quad (3.62)$$

Considérons alors la décomposition  $U = \bar{U} + U'$  avec  $U' = \sum_{i=1}^M a_i(t) \sigma^i(x)$ . On projette les équations d'évolution du système sur la base  $\{\sigma^i\}$  suivant le produit scalaire défini précédemment. On obtient un système d'équations différentielles ordinaires portant sur les coefficients  $a_i(t)$  et dont la forme est la suivante :

$$-\frac{da_i}{dt} = A_{i,j,k} a_j a_k + B_{i,j} a_j + C_i \quad (3.63)$$

Il est à noter que pour l'obtention d'un tel système, on a tenu compte du fait que  $\nabla \cdot \sigma^i = 0$  et également du fait que les  $\sigma^i$  vérifient les conditions aux limites. Pour être plus explicite quant à la constitution des trois matrices  $A_{i,j,k}$ ,  $B_{i,j}$  et  $C_i$  de ce système, nous allons considérer tour à tour les équations de conservation de notre système et voir leur différente contribution dans l'élaboration du système d'équations différentielles ordinaires.

### Equation de conservation de l'énergie

En tout premier lieu, on rappelle que sur un domaine  $\Omega$ , si  $a = a(\Omega)$  est une fonction scalaire et  $\vec{A} = \vec{A}(\Omega) = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$  une fonction vectorielle, nous pouvons écrire :

$$\int_{\Omega} a(\nabla \cdot \vec{A}) d\Omega = \int_{\Gamma} a(\vec{n} \cdot \vec{A}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla a \cdot \vec{A}) d\Omega \quad (3.64)$$

où  $\Gamma$  est la surface du domaine  $\Omega$  et  $\vec{n}$  le vecteur normal à  $\Gamma$ .

Considérons la projection du terme linéaire  $(\alpha \sigma_T^i, \nabla^2 T)$ . En appliquant la relation (3.64) avec  $a = \alpha \sigma_T^i$  et  $\vec{A} = \nabla T$ , on aboutit à :

$$(\alpha \sigma_T^i, \nabla^2 T) = \int_{\Gamma} \alpha \sigma_T^i [(\vec{n} \cdot \nabla) T] d\Gamma - \int_{\Omega} \alpha (\nabla \sigma_T^i) \cdot (\nabla T) d\Omega \quad (3.65)$$

Le premier terme du second membre de (3.65) prend en considération les conditions aux limites thermiques de notre étude. Or, étant donné que les parois sont adiabatiques, on a donc :

$$(\vec{n} \cdot \nabla)T = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (3.66)$$

d'où la contribution du terme linéaire se résume à :

$$(\alpha \sigma_T^i, \nabla^2 T) = - \int_{\Omega} \alpha (\nabla \sigma_T^i) \cdot (\nabla T) d\Omega = -\alpha (\nabla \sigma_T^i, \nabla T) \quad (3.67)$$

On applique alors la décomposition habituelle  $T = \bar{T} + T'$  avec  $T' = \sum_{j=1}^M a_j(t) \sigma_T^j(x)$  que l'on introduit dans (3.67). La contribution finale du terme linéaire s'écrit ainsi :

$$(\alpha \sigma_T^i, \nabla^2 T) = -\alpha (\nabla \sigma_T^i, \nabla \bar{T}) - \alpha \sum_{j=0}^N a_j (\nabla \sigma_T^i, \nabla \sigma_T^j) \quad (3.68)$$

En respectant la même démarche, nous sommes en mesure de trouver les différentes contributions du terme non-linéaire  $T_I(\vec{V} \cdot \nabla)T$ . Les contributions des termes non-linéaire et linéaire dans les matrices du système dynamique (3.63) sont résumées dans le tableau (3.1) ci-après :

<b>Equation de la chaleur</b>		
	terme non-linéaire $T_I(\vec{V} \cdot \nabla)T$	terme linéaire $T_D \nabla^2 T$
$A_{i,j,k}$	$\alpha T_I(\sigma_T^i, \nabla(\sigma_T^j \sigma_V^k))$	0
$B_{i,j}$	$\alpha T_I(\nabla \sigma_T^i, \nabla(\bar{T} \sigma_V^j + \sigma_T^j \bar{V}))$	$\alpha T_D(\nabla \sigma_T^i, \nabla \sigma_T^j)$
$C_i$	$\alpha T_I(\sigma_T^i, \nabla(\bar{T} \bar{V}))$	$\alpha T_D(\nabla \sigma_T^i, \nabla \bar{T})$

TAB. 3.1 – Contribution des termes linéaire et non-linéaire de l'équation de la chaleur aux matrices  $A_{i,j,k}$ ,  $B_{i,j}$  et  $C_i$

### Equation de Navier-Stokes

Cherchons tout d'abord à évaluer la contribution du terme de pression  $(\sigma_V^i, \nabla p)$  :

$$(\sigma_V^i, \nabla p) = \int_{\Omega} \sigma_V^i \nabla p \, d\Omega \quad (3.69)$$

On utilise toujours la relation (3.64). En considérant maintenant  $a = p$  et  $\vec{A} = \sigma_V^i$ , on peut donc écrire :

$$(\sigma_V^i, \nabla p) = \int_{\Gamma} p(\vec{n} \cdot \sigma_V^i) \, d\Gamma - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \sigma_V^i) \, d\Omega \quad (3.70)$$

En outre, au niveau des parois, on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.71)$$

On applique la décomposition habituelle  $\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}'$  avec  $\vec{v}' = \sum_{k=1}^M a_k(t) \sigma_V^k(x)$  que l'on insère dans (3.71). On a ainsi :

$$\bar{\vec{v}} \cdot \vec{n} + \sum_{k=1}^M a_k [\vec{n} \cdot \sigma_V^k] = 0 \quad (3.72)$$

On considère par ailleurs que  $\bar{\vec{v}} \cdot \vec{n} = 0$  donc pour tout entier  $k$ , on a :

$$\vec{n} \cdot \sigma_V^k = 0 \quad (3.73)$$

En considérant que  $\nabla \cdot \sigma_V^k = 0$ , nous obtenons finalement :

$$(\sigma_V^i, \nabla p) = 0 \quad (3.74)$$

La contribution du terme de pression au système d'E.D.O. est donc nulle. Les contributions des autres termes sont résumées dans le tableau (3.2).

Equation de Navier-Stokes			
	terme non-linéaire $Z_I(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$	terme linéaire $Z_D \nabla^2 \vec{V}$	terme force $Z_{BT} \cdot T \vec{e}_y$
$A_{i,j,k}$	$Z_I(\sigma_V^i, \nabla(\sigma_V^j \sigma_V^k))$	0	0
$B_{i,j}$	$Z_I(\sigma_V^i, \nabla(\vec{V} \sigma_V^j + \sigma_V^j \vec{V}))$	$Z_D(\nabla \sigma_V^i, \nabla \sigma_V^j)$	$Z_{BT}(\sigma_v^i, \sigma_T^j)$
$C_i$	$Z_I(\sigma_V^i, \nabla(\bar{V} \bar{V}))$	$Z_D(\nabla \sigma_V^i, \nabla(\bar{T} \bar{V}))$	$Z_{BT}(\sigma_v^i, \bar{T})$

TAB. 3.2 – Contribution des termes linéaire, non-linéaire et du terme force de l'équation de Navier-Stokes aux matrices  $A_{i,j,k}$ ,  $B_{i,j}$  et  $C_i$

### 3.3.2 Méthode des variables séparées

Afin de considérer séparément l'effet de la thermique et l'effet hydrodynamique, on écrit les fluctuations de vitesse  $\vec{v}'$  et de température  $T'$  de la manière suivante :

$$\vec{v}' = \sum_{i=1}^M a_i(t) \sigma_V^i(x) \quad \text{et} \quad T' = \sum_{l=1}^M b_l(t) \sigma_T^l(x) \quad (3.75)$$

Le problème se ramène désormais au calcul de deux matrices de corrélation. La première, notée  $R_{V_{i,j}}$ , ne fait intervenir que les fluctuations de vitesse. Elle s'écrit :

$$R_{V_{i,j}} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M [u^{(i)}(x) u'^{(j)}(x) + v^{(i)}(x) v'^{(j)}(x) + w^{(i)}(x) w'^{(j)}(x)] dx \quad (3.76)$$

La recherche des valeurs propres  $\lambda_{V_i}$  et des vecteurs propres  $q_{V_i}^i$  associés à cette matrice de corrélation nous permet d'accéder selon la relation (3.30) aux modes-vitesse  $\sigma_V^i$  de l'écoulement :

$$\sigma_V^i(x) = \sum_{n=1}^M q_{V_n}^i u'^{(n)}(x) \quad (3.77)$$

Chaque structure-vitesse se décompose suivant :

$$\sigma_V^i = \begin{pmatrix} \sigma_u^i \\ \sigma_v^i \\ \sigma_w^i \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

où  $(\sigma_u^i, \sigma_v^i, \sigma_w^i)$  représentent toujours les composantes du mode-vitesse  $\sigma_V^i$  dans les trois directions  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  de l'espace. La projection d'un vecteur  $f = (f_u, f_v, f_w)$  sur un vecteur de la base  $\{\sigma_V^i\}$

s'écrit ainsi :

$$(\sigma_V^i, f) = \int_{\Omega} (\sigma_u^i(x) f_u(x) + \sigma_v^i(x) f_v(x) + \sigma_w^i(x) f_w(x)) dx \quad (3.79)$$

De ce fait, la norme du vecteur  $\sigma_V^i = (\sigma_u^i, \sigma_v^i, \sigma_w^i)$  est définie par :

$$|\sigma_V^i| = \sqrt{(\sigma_V^i, \sigma_V^i)} = \sqrt{\int_{\Omega} (\sigma_u^i{}^2(x) + \sigma_v^i{}^2(x) + \sigma_w^i{}^2(x)) dx} \quad (3.80)$$

La deuxième matrice de corrélation  $R_{T_{i,j}}$  prend en compte pour sa part uniquement les fluctuations de température. Elle s'écrit :

$$R_{T_{i,j}} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M T'^{(i)}(x) T'^{(j)}(x) dx \quad (3.81)$$

De la même manière que pour la matrice d'autocorrélation-vitesse  $R_{V_{i,j}}$ , on évalue ses valeurs propres  $\lambda_{T_i}$  et les vecteurs propres associés  $q_{T_n}^i$ . Les modes-température  $\sigma_T^i$  sont alors évalués selon l'expression :

$$\sigma_T^i(x) = \sum_{n=1}^M q_{T_n}^i T'^{(n)}(x) \quad (3.82)$$

Le produit scalaire entre  $\sigma_T^i$  et une fonction  $f = (f_T)$  s'écrit :

$$(\sigma_T^i, f) = \int_{\Omega} \sigma_T^i(x) f_T(x) dx \quad (3.83)$$

Autrement dit, la norme de  $\sigma_T^i$  est donnée par :

$$|\sigma_T^i| = \sqrt{(\sigma_T^i, \sigma_T^i)} = \sqrt{\int_{\Omega} \sigma_T^i(x)^2 dx} \quad (3.84)$$

Considérons désormais la relation (3.85) :

$$\vec{v}' = \sum_{i=1}^{M_V} a_i(t) \sigma_V^i(x) \quad \text{et} \quad T' = \sum_{l=1}^{M_T} b_l(t) \sigma_T^l(x) \quad (3.85)$$

où  $M_V$  représente le nombre de modes-vitesse retenus ( $M_V \leq M$ ) et  $M_T$  le nombre de modes-température retenus ( $M_T \leq M$ ). En opérant la projection de l'équation de Navier-Stokes sur la base  $\{\sigma_V^i\}$  et celle de l'énergie sur la base  $\{\sigma_T^i\}$ , on obtient deux systèmes d'équations différentielles ordinaires, chacun d'eux faisant intervenir les coefficients  $a_i$  ( $i = 1, \dots, M_V$ ) et  $b_l$  ( $l = 1, \dots, M_T$ ).

Leur forme est la suivante :

$$\begin{aligned}
 -\frac{da_i}{dt} &= T_I.C_{nl_i} + T_D.C_{ln_i} + T_{BT}.C_{forceT_i} \\
 &+ T_I.B_{nl_{i,j}}a_j + T_D.B_{ln_{i,j}}a_j \\
 &+ T_{BT}.B_{forceT_{i,m}}b_m \\
 &+ T_I.A_{i,j,k}a_ja_k
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{db_l}{dt} &= T_I.CT_{nl_l} + T_D.CT_{ln_l} \\
 &+ T_I.BT_{nl1_{l,m}}b_m + T_I.BT_{nl2_{l,j}}a_j \\
 &+ T_D.BT_{ln_{l,m}}b_m \\
 &+ T_I.AT_{l,j,m}a_jb_m
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

Les expressions des contributions des différents termes de l'équation de Navier-Stokes et de l'énergie pour les matrices intervenant dans les deux systèmes d'E.D.O (3.86) et (3.87) sont données dans les deux tableaux (3.3) et (3.4). Pour l'équation de l'énergie, on reprend notamment l'expression du terme non-linéaire  $N(T) = 1/2[(\vec{v}.\nabla)T + \nabla.(T\vec{v})]$  utilisée pour la D.N.S.

	Equation de la chaleur	
	terme non-linéaire $(\vec{V} \cdot \nabla)T$	terme linéaire $\nabla^2 T$
$AT_{l,j,m}$	$\frac{1}{2}(\sigma_T^l, (\sigma_V^j \cdot \nabla)\sigma_T^m + \nabla \cdot (\sigma_T^m \sigma_V^j))$	0
$BT_{nl1_{l,m}}$	$\frac{1}{2}(\sigma_T^l, (\vec{V} \cdot \nabla)\sigma_T^m + \nabla \cdot (\sigma_T^m \vec{V}))$	0
$BT_{nl2_{l,j}}$	$\frac{1}{2}(\sigma_T^l, (\sigma_V^j \cdot \nabla)\bar{T} + \nabla \cdot (\bar{T} \sigma_V^j))$	0
$BT_{ln_{l,m}}$	0	$(\nabla \sigma_T^l, \nabla \sigma_T^m)$
$CT_{nl_l}$	$\frac{1}{2}(\sigma_T^l, (\vec{V} \cdot \nabla)\bar{T} + \nabla \cdot (\bar{T} \vec{V}))$	0
$CT_{ln_l}$	0	$(\nabla \sigma_T^l, \nabla \bar{T})$

TAB. 3.3 – Contribution des termes linéaire et non-linéaire de l'équation de la chaleur aux matrices  $AT, BT_{nl1}, BT_{nl2}, BT_{ln}, CT_{nl}$  et  $CT_{ln}$ .

	Equation de Navier-Stokes		
	terme non-linéaire $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$	terme linéaire $\nabla^2 \vec{V}$	terme force $T \vec{e}_y$
$A_{i,j,k}$	$\frac{1}{2}(\sigma_V^i, (\sigma_V^j \cdot \nabla) \sigma_V^k + \nabla \cdot (\sigma_V^k \sigma_V^j))$	0	0
$B_{nl_{i,j}}$	$\frac{1}{2}(\sigma_V^i, (\vec{V} \cdot \nabla) \sigma_V^j + \nabla \cdot (\sigma_V^j \vec{V}))$ $\frac{1}{2}(\sigma_V^i, (\sigma_V^j \cdot \nabla) \vec{V} + \nabla \cdot (\vec{V} \sigma_V^j))$	0	0
$B_{ln_{i,j}}$	0	$(\nabla \sigma_V^i, \nabla \sigma_V^j)$	0
$B_{forceT_{i,m}}$	0	0	$(\sigma_v^i, \sigma_T^m)$
$C_{nl_i}$	$\frac{1}{2}(\sigma_V^i, (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}))$	0	0
$C_{ln_i}$	0	$(\nabla \sigma_V^i, \nabla \vec{V})$	0
$C_{forceT_i}$	0	0	$(\sigma_v^i, \bar{T})$

TAB. 3.4 – Contribution des termes linéaire, non-linéaire et du terme force de l'équation de Navier-Stokes aux matrices  $A$ ,  $B_{nl}$ ,  $B_{ln}$ ,  $B_{forceT}$ ,  $C_{nl}$ ,  $C_{ln}$  et  $C_{forceT}$ .

# Chapitre 4 Simulation Numérique Directe

Dans ce chapitre, nous introduisons les méthodes employées pour la détermination des seuils critiques  $Gr_c$  à partir des résultats des simulations numériques directes (D.N.S). Les fluides considérés sont caractérisés par un faible nombre de Prandtl  $0 \leq Pr \leq 0.075$ . Nous nous focalisons ensuite sur le cas ( $Pr = 0.026, A = 2$ ) en spécifiant tout d'abord les particularités de l'écoulement stationnaire obtenu et notamment la mise en évidence d'une bifurcation stationnaire. Enfin, nous nous penchons sur l'apparition de l'instabilité oscillatoire en déterminant sa nature et les caractéristiques de sa structure.

## 4.1 Méthodes de localisation du seuil critique $Gr_C$

Au moyen de la simulation numérique directe (D.N.S.), plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour la localisation du seuil critique  $Gr_c$  de transition entre les écoulements permanents et les écoulements dépendant du temps. La méthode la plus simple est de cadrer la valeur du  $Gr_c$  par des calculs avec des valeurs du nombre de Grashof se situant de part et d'autre du seuil. Cette méthode de cadrage pour déterminer  $Gr_c$  est longue et onéreuse en temps de calcul. Dans le cas où l'on considère de faibles rapports de forme ( $A = 1.5$  et  $A = 2$ ), les calculs pour une valeur de  $Gr$  sont rapides ( $\sim 24$  heures) et cette manière de procéder est efficace et précise. Le problème se corse quand le rapport de forme  $A$  devient plus élevé (i.e.  $A \geq 3$ ). En effet, en partant de la solution stationnaire, le déclenchement de l'instabilité se révèle souvent très long et les temps de calculs élevés. De ce fait, même si certains seuils ont été trouvés en adoptant cette méthode pour des cavités de rapport de forme intermédiaires ou allongées (pour  $A = 6$  par exemple, plus de 40 jours de calcul ont été nécessaires pour une seule valeur de  $Gr$  au voisinage du seuil critique afin d'obtenir le développement de l'instabilité et la saturation de son amplitude!), il convient de trouver d'autres moyens de localiser le seuil de l'instabilité oscillatoire.

Notons de plus que cette méthode de cadrage qui peut être relativement efficace lorsque la bifurcation est surcritique s'avère plus complexe à appliquer lorsque la bifurcation est sous-critique. En effet, dans le type de problèmes que nous étudions, deux sous-cas se présentent suivant la criticité de la bifurcation :

- la bifurcation de Hopf est surcritique. En diminuant progressivement la valeur de  $Gr$ , le fait de voir si l'oscillation perdure ou a contrario s'atténue pour finalement disparaître permet de déterminer  $Gr_c$ .
- la bifurcation de Hopf est sous-critique. Il sera possible de cette manière de déterminer la valeur du turning-point  $Gr_{tp}$ , mais quid de la valeur de  $Gr_c$  ?

Néanmoins, rien de nous renseigne a priori sur la nature sous-critique ou surcritique de la bifurcation. Pour l'ensemble des couples de paramètres  $(Pr, A)$  étudiés, il est donc nécessaire de mener, le plus judicieusement possible différentes campagnes de calculs en introduisant des perturbations initiales différentes. Parmi les moyens qu'on peut utiliser pour accélérer l'apparition des instabilités, on note l'introduction d'une perturbation ponctuelle ou générale dans la solution de départ. Celle-ci peut être un champ stationnaire ou un champ instationnaire d'une solution oscillatoire obtenue pour une valeur de  $Gr > Gr_c$ . Suivant le genre de perturbations introduit, il est en outre possible, pour une même valeur de  $Gr$ , d'obtenir une solution différente. Si un tel cas se produit, cela signifie tout simplement l'existence d'une autre branche de solution voisine. En conclusion, la détermination par D.N.S. du seuil  $Gr_c$  et de la criticité de la bifurcation, pour chaque couple  $(Pr, A)$  nécessite de ce fait une multitude de calculs et requiert des ressources informatiques en temps de calcul et en espace mémoire très conséquentes.

Nous verrons plus loin que nous pouvons, à l'aide de la méthode P.O.D. et la résolution des systèmes réduits, obtenir les valeurs des seuils critiques avec plus de facilité.

**Remarque 2** : si l'on a déterminé le caractère surcritique d'une bifurcation, pour évaluer  $Gr_c$ , nous utiliserons la relation  $|A_{amp}|^2 \alpha(Gr - Gr_c)$  avec  $A_{amp}$  l'amplitude de l'oscillation pour la valeur de  $Gr$  calculée. Effectivement, en traçant et en extrapolant la droite  $|A_{amp}|^2 = f(Gr - Gr_c)$ , son intersection avec l'axe des abscisses  $(Gr - Gr_c)$  nous donnera la valeur de  $Gr_c$ .

Après cette introduction générale traitant de la manière à adopter dans la détermination de  $Gr_c$ , il semble intéressant de nous pencher sur des valeurs précises de rapport de forme étudié  $A$  pour une même valeur du nombre de Prandtl  $Pr$  égale d'abord à 0.026. Nous allons tout d'abord considérer le cas  $A = 2$ .

## 4.2 Étude du rapport de forme $A = 2$

### 4.2.1 Influence du choix du maillage

Afin de choisir un maillage adapté à la simulation de l'écoulement pour le rapport de forme  $A = 2$ , il est nécessaire d'évaluer la variation de trois quantités physiques significatives du problème en fonction du raffinement du maillage, autrement dit en fonction des trois paramètres  $nx(= ny)$  et  $nz$ . Parmi ces trois quantités, on distingue :

- $|w_{max}|$  : valeur absolue du maximum de la composante horizontale (et principale) de la vitesse suivant l'axe du cylindre.
- $Nu$  : le nombre de Nusselt représentant le rapport entre flux advectif et flux conductif de chaleur. Il est calculé à l'extrémité froide du cylindre et est défini par :

$$Nu = \int_{z=0} \frac{\partial T}{\partial z} dS \quad (4.1)$$

- $K$  : énergie cinétique globale du système définie par :

$$K = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{v}^2 d\Omega \quad (4.2)$$

Les différents maillages présentés sont définis par leur nombre de points par élément sous la forme  $((nx+1) \times (ny+1) \times (nz+1))$ ;  $nsg$  représente quant à lui le nombre total de points du maillage. Les

tableaux (4.1) et (4.2) résument cette étude. On note que, pour l'ensemble des maillages considérés, les quantités  $|w_{max}|$ ,  $Nu$  et  $K$  ne varient que très peu par rapport à leur valeur respective de référence (choisie pour le maillage le plus raffiné, i.e.  $(nx + 1) \times (ny + 1) \times (nz + 1) = 9 \times 9 \times 29$ ); la quantité  $K$  étant celle manifestant l'erreur la moins petite. Ainsi, un raffinement dans la section  $(xy)$  de  $7 \times 7 \times 29$  points par élément à  $9 \times 9 \times 29$  conduit à une variation relative de l'erreur qui devient 1.4% pour  $K$ . Selon la direction  $z$ , l'erreur relative sur  $K$  entre les deux maillages  $9 \times 9 \times 29$  et  $9 \times 9 \times 23$  n'est que de 0.03%. Afin d'obtenir une bonne discrétisation spatiale quant aux trois directions de l'écoulement et un bon compromis "précision des résultats - temps de calcul", il est choisi de retenir le maillage  $9 \times 9 \times 27$  par élément répondant à ces deux exigences.

Rapport de forme $A = 2$ , $Gr = 230000$ (12 éléments)					
$(nx + 1) \times (ny + 1) \times (nz + 1)$ par élément	$nsg$	$ w_{max} $	$\frac{  w_{max}  -  w_{max9929}  }{ w_{max9929} }$ (en %)	$Nu = \int_{z=A} \frac{\partial T}{\partial z} dS$	$\frac{ Nu - Nu_{9929} }{Nu_{9929}}$ (en %)
$7 \times 7 \times 21$	9597	0.958904	$1.8 \cdot 10^{-1}$	1.62617	$1.5 \cdot 10^{-1}$
$7 \times 7 \times 23$	10511	0.962626	$2.1 \cdot 10^{-1}$	1.63257	$5.5 \cdot 10^{-1}$
$7 \times 7 \times 25$	11425	0.957844	$2.9 \cdot 10^{-1}$	1.62599	$1.4 \cdot 10^{-1}$
$7 \times 7 \times 27$	12339	0.961033	$4.1 \cdot 10^{-2}$	1.62874	$3 \cdot 10^{-1}$
$7 \times 7 \times 29$	13253	0.957718	$3 \cdot 10^{-1}$	1.62492	$7 \cdot 10^{-2}$
$9 \times 9 \times 21$	16821	0.959019	$1.7 \cdot 10^{-1}$	1.62596	$1.3 \cdot 10^{-1}$
$9 \times 9 \times 23$	18423	0.962203	$1.6 \cdot 10^{-1}$	1.62325	$3.2 \cdot 10^{-2}$
$9 \times 9 \times 25$	20025	0.964032	$1.4 \cdot 10^{-1}$	1.62546	$2.9 \cdot 10^{-2}$
$9 \times 9 \times 27$	21627	0.959898	$7.6 \cdot 10^{-2}$	1.62373	$2.5 \cdot 10^{-5}$
$9 \times 9 \times 29$	23229	0.960635	0	1.62377	0

TAB. 4.1 – Effet du raffinement du maillage sur la valeur absolue du maximum de la composante horizontale de la vitesse  $|w_{max}|$  et sur la valeur du nombre de Nusselt  $Nu$  (écoulement stationnaire  $A = 2$ ,  $Pr = 0.026$ ,  $Gr = 230000$ ).

Rapport de forme $A = 2$ , $Gr = 230000$		
$(nx + 1) \times (ny + 1) \times (nz + 1)$ par élément	$K = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{v}^2 d\Omega$	$\frac{ K - K_{9929} }{K_{9929}}$ (en %)
$7 \times 7 \times 21$	0.179155	$8 \cdot 10^{-1}$
$7 \times 7 \times 23$	0.178925	$9.1 \cdot 10^{-1}$
$7 \times 7 \times 25$	0.178645	1.1
$7 \times 7 \times 27$	0.177685	1.6
$7 \times 7 \times 29$	0.178081	1.4
$9 \times 9 \times 21$	0.182160	$8.8 \cdot 10^{-1}$
$9 \times 9 \times 23$	0.180448	$8 \cdot 10^{-2}$
$9 \times 9 \times 25$	0.180813	$1.2 \cdot 10^{-1}$
$8 \times 9 \times 27$	0.180534	$3 \cdot 10^{-2}$
$9 \times 9 \times 29$	0.180585	0

TAB. 4.2 – Effet du raffinement du maillage sur l'énergie cinétique globale  $K$  du système (écoulement stationnaire  $A = 2$ ,  $Pr = 0.026$ ,  $Gr = 230000$ ).

### 4.2.2 Écoulement stationnaire

Pour  $Gr = 220000$  (fig.4.1), l'écoulement obtenu est stationnaire. Il vérifie toutes les symétries du problème, à savoir une symétrie de réflexion ( $S_p$ ) par rapport au plan médian longitudinal vertical  $L_v$ , une symétrie axiale ( $S_a$ ) vis-à-vis de l'axe médian transverse horizontal  $H_t$ . La combinaison de ces deux symétries donne également une symétrie centrale ( $S_c$ ) par rapport au centre de la cavité.

L'écoulement dans le cylindre correspond à une circulation principale (reliquat de la cellule de Hadley qui existe à faible nombre de Grashof) se déplaçant dans la partie supérieure de la paroi chaude vers la paroi froide et vice-versa dans la partie inférieure. A l'intérieur de cette circulation principale, on note l'existence de circulations secondaires dans une région avoisinant les extrémités du cylindre. Finalement, de faibles recirculations apparaissent également au niveau du coin supérieur de la paroi chaude et du coin inférieur de la paroi froide. En raison d'un fort confinement ( $A = 2$ ), la coexistence et l'interaction de ces différentes circulations avec la cellule principale provoquent une inclinaison de l'écoulement qui s'atténuera pour des valeurs de rapport de forme plus élevées.

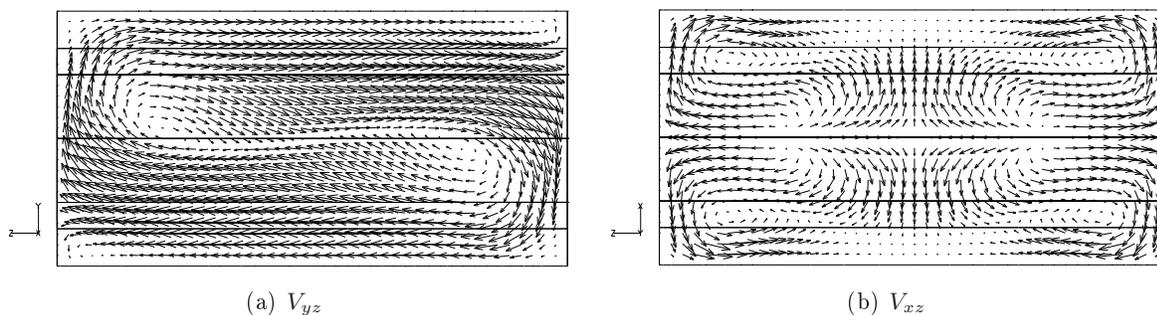


FIG. 4.1 – Champs de vitesse  $V_{yz}$  (fig.4.1(a)) et  $V_{xz}$  (fig.4.1(b)) de l'écoulement stationnaire obtenu pour  $A = 2$ ,  $Gr = 220000$ ,  $Pr = 0.026$ .

En observant les isothermes dans les plans  $L_v$  (fig.4.2(a)) et  $L_h$  (fig.4.2(b)), on relève que le champ thermique (initialement diffusif donc constitué d'isothermes verticales et parallèles) est modifié par l'écoulement convectif. Néanmoins, en raison de la bonne conductivité thermique du fluide ( $Pr = 0.026$ ), ces isothermes restent moins déformées que pour des valeurs de  $Pr$  plus élevées. Nous reviendrons sur cet aspect lorsque nous considérerons de telles valeurs de  $Pr$  ( $Pr = 0.055$  et  $0.075$ ).

Si l'on augmente progressivement la valeur de  $Gr$  jusqu'à  $Gr_{bs} = 230000$ , on observe alors un changement dans le comportement de l'écoulement stationnaire. En effet, l'évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse en un point  $x_1$  du maillage (situé au voisinage du plan médian vertical) (fig.4.3) laisse apparaître deux régimes stationnaires distincts, notés respectivement  $\mathbf{u}_{stat_1}$  et  $\mathbf{u}_{stat_2}$  (avec  $\mathbf{u}_{stat_i} = (u, v, w, T)_{stat_i}$ ). En se focalisant sur la représentation du champ de vitesse  $V_{xz}$  dans le plan horizontal ( $xz$ ) pour chaque régime stationnaire rencontré (fig.4.4), on constate que la symétrie  $S_a$  (et donc  $S_c$ ) est brisée pour la solution  $\mathbf{u}_{stat_2}$ . Pour sa part,  $\mathbf{u}_{stat_1}$  appartenant à la même famille des solutions stationnaires que celle rencontrée pour de faibles valeurs de  $Gr$ , elle possède toutes les symétries du problème. Pour des temps relativement longs, la structure de l'écoulement pour  $Gr_{bs} = 230000$  a donc changé tout en restant stationnaire ; nous sommes en

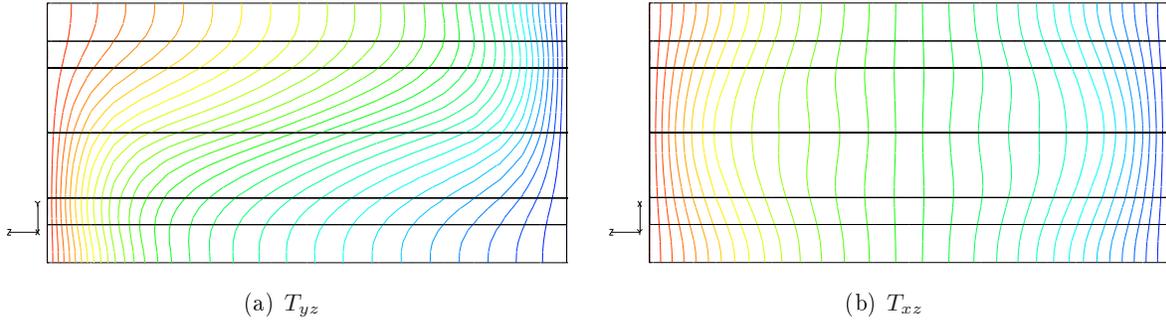


FIG. 4.2 – Isothermes  $T_{yz}$  (fig.4.2(a)) et  $T_{xz}$  (fig.4.2(b)) de l'écoulement stationnaire obtenu pour  $A = 2, Gr = 220000, Pr = 0.026$ .

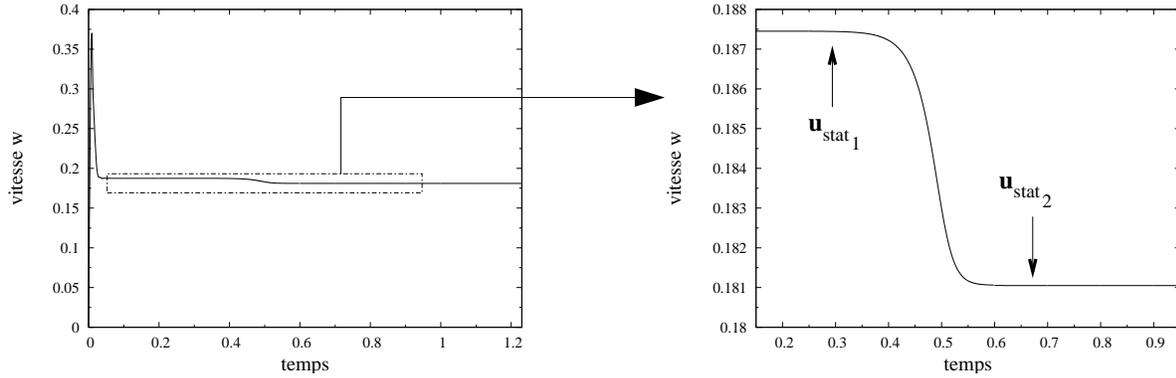


FIG. 4.3 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage ( $A = 2, Gr = 230000, Pr = 0.026$ ).

présence d'une bifurcation stationnaire.

Appelons  $H_{t_2}$  l'axe transverse horizontal décalé d'une distance  $l$  par rapport à  $H_t$  ( $l$  représente la longueur significative avec laquelle  $\mathbf{u}_{stat_2}$  s'est déplacé de  $\mathbf{u}_{stat_1}$  dans le plan  $(Oxz)$ ). Sans que  $H_{t_2}$  ne représente un axe de symétrie de  $\mathbf{u}_{stat_2}$ , on peut considérer que l'écoulement  $\mathbf{u}_{stat_2}$  est relativement bien "organisé" autour de cet axe dans  $(Oxz)$ .

Lors de cette bifurcation stationnaire, la solution stationnaire symétrique  $\mathbf{u}_{stat_1}$  laisse donc place à la solution stationnaire  $\mathbf{u}_{stat_2}$ . En outre, il semble intéressant d'étudier si cette bifurcation n'engendre pas aussi une solution stationnaire  $\mathbf{u}_{stat_3}$ , symétrique de  $\mathbf{u}_{stat_2}$  par la symétrie  $S_{p_2}$  définie pour une solution  $\mathbf{u}(x,y,z)$  par :

$$S_{p_2}\mathbf{u}(x, y, z) = -\mathbf{u}(-x, -y, A - z) \quad (4.3)$$

si bien que l'on ait :

$$\mathbf{u}_{stat_3}(x, y, z) = S_{p_2}\mathbf{u}_{stat_2}(x, y, z) = -\mathbf{u}_{stat_2}(-x, -y, A - z) \quad (4.4)$$

Pour cela, on choisit de partir de la solution  $\mathbf{u}'_{stat_1}(x, y, z) = S_{p_2}\mathbf{u}_{stat_1}(x, y, z)$ . Ce choix est justifié par le fait qu'étant donné que l'on obtient  $\mathbf{u}_{stat_2}$  en partant de  $\mathbf{u}_{stat_1}$ , il est probable

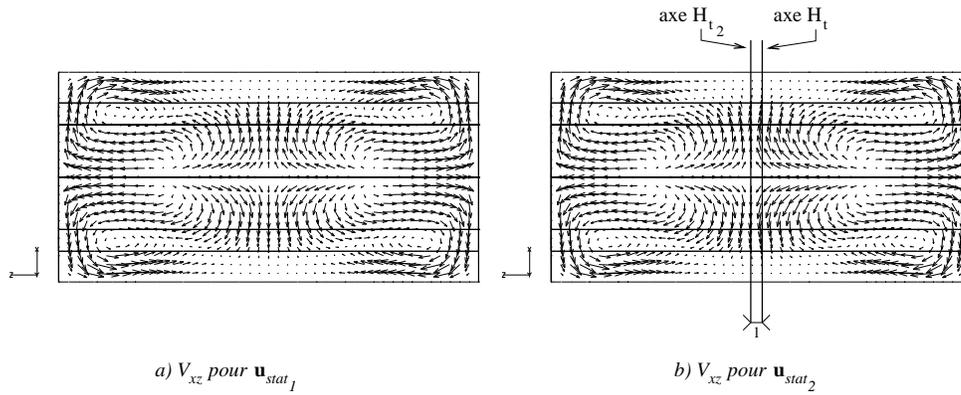


FIG. 4.4 – Comparaison des champs de vitesse  $V_{xz}$  pour les solutions stationnaires  $\mathbf{u}_{stat_1}$  (fig.a) et  $\mathbf{u}_{stat_2}$  (fig.b) pour  $Gr = 230000$ .

que l'on obtienne  $\mathbf{u}_{stat_3} = S_{p_2}\mathbf{u}_{stat_2}$  en partant de la solution  $\mathbf{u}'_{stat_1} = S_{p_2}\mathbf{u}_{stat_1}$ . La figure 4.6 représentant l'évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage fait ainsi de nouveau apparaître l'existence de deux régimes stationnaires différents  $\mathbf{u}'_{stat_1} \simeq \mathbf{u}_{stat_1}$  et  $\mathbf{u}_{stat_3}$ . La représentation du champ de vitesse  $V_{xz}$  dans le plan horizontal ( $xz$ ) pour la solution  $\mathbf{u}_{stat_3}$  (fig.4.5) confirme que  $\mathbf{u}_{stat_3}$  est l'image de  $\mathbf{u}_{stat_2}$  par  $S_{p_2}$ .

En conclusion, la figure 4.7 révèle que l'occurrence de cette bifurcation stationnaire sépare une solution stationnaire symétrique  $\mathbf{u}_{stat_1}$  en deux solutions stationnaires  $\mathbf{u}_{stat_2}$  et  $\mathbf{u}_{stat_3}$  telles que  $\mathbf{u}_{stat_3}(x, y, z) = -\mathbf{u}_{stat_2}(-x, -y, A-z)$ . Les simulations réalisées pour des valeurs de  $Gr < Gr_{bs} = 230000$  en partant de  $\mathbf{u}_{stat_2}$  ou  $\mathbf{u}_{stat_3}$  obtenues pour  $Gr_{bs}$  conduisent à la solution  $\mathbf{u}_{stat_1}$ . La bifurcation stationnaire est donc surcritique.

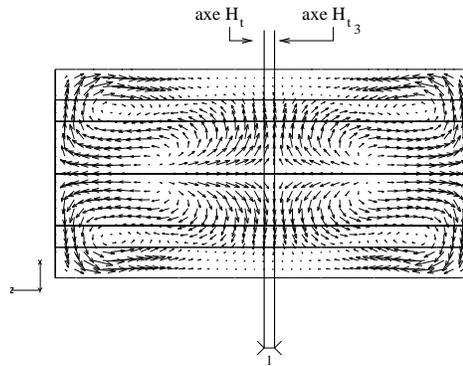


FIG. 4.5 – Champ de vitesse  $V_{xz}$  pour la solution stationnaire  $\mathbf{u}_{stat_3}$  pour  $Gr = 230000$ .

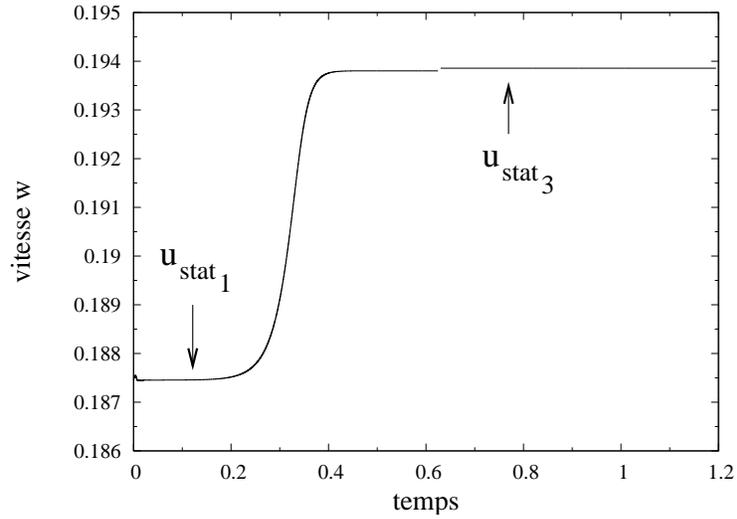


FIG. 4.6 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage en prenant pour solution initiale  $\mathbf{u}'_{stat_1} = S_{p_2} \mathbf{u}_{stat_1}$  ( $A = 2, Gr = 230000, Pr = 0.026$ ).

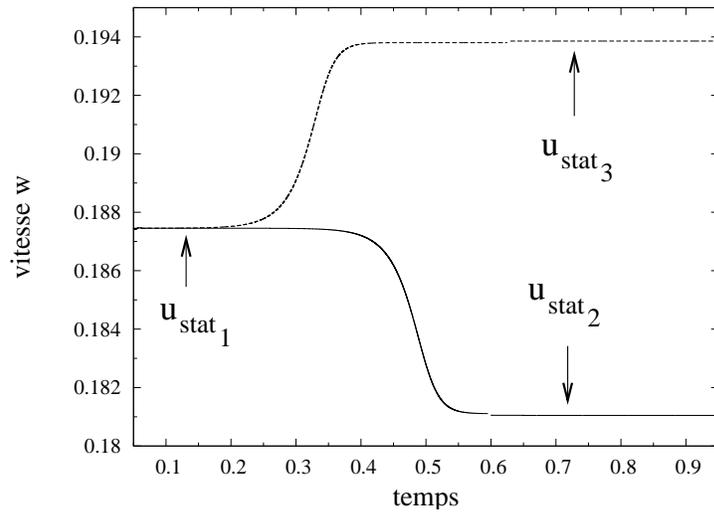


FIG. 4.7 – Résumé des trois régimes stationnaires  $\mathbf{u}_{stat_1}, \mathbf{u}_{stat_2}$  et  $\mathbf{u}_{stat_3}$  rencontrés au cours de la bifurcation stationnaire pour  $A = 2, Gr = Gr_{bs} = 230000, Pr = 0.026$ .

### 4.2.3 Moment Angulaire Normé

La représentation des champs de vitesse dans des sections ou des plans du cylindre est un premier outil pour visualiser la structure de l'écoulement. En marge de ceux-ci, l'emploi de la méthode N.A.M. (*Normalized Angular Momentum*) est un moyen complémentaire efficace pour bien repérer les tourbillons et ainsi bien détailler la structure de l'écoulement. Mise au point par Michard (*et al.*[80],[81]) son idée de base repose sur le fait que les lignes de courant sont fermées au voisinage du centre d'un tourbillon si l'on se place dans le repère se déplaçant avec celui-ci. Sur la figure 4.8, si le point  $M$ , situé à une distance  $\vec{r}$  d'un point  $P$  à l'intérieur du tourbillon, se déplace sur une ligne de courant, le sinus de l'angle  $\alpha$ , qui correspond à la valeur algébrique de  $\vec{r} \wedge \vec{U}(M)$ , garde toujours le même signe. Sa valeur moyenne est soit positive soit négative suivant le sens de rotation du tourbillon. Michard *et al.*[80] ont généralisé cette idée pour un tourbillon tridimensionnel en définissant, pour un domaine  $\nu$ , la fonction vectorielle  $\vec{\Gamma}$  définie au point  $P$  par :

$$\vec{\Gamma}(P) = \frac{1}{\nu} \int_{\nu} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_p) \wedge (\vec{U}(\vec{x}) - \vec{U}(\vec{x}_p))}{|\vec{x} - \vec{x}_p| |\vec{U}(\vec{x}) - \vec{U}(\vec{x}_p)|} d\vec{x} \quad (4.5)$$

Dans la pratique, les champs de vitesse sont discrets et on utilise la définition suivante :

$$\vec{\Gamma}(P) = \frac{1}{N} \sum_i \frac{\overrightarrow{PM}_i \wedge (\vec{U}(M_i) - \vec{U}(P))}{|\overrightarrow{PM}_i| |\vec{U}(M_i) - \vec{U}(P)|} \quad (4.6)$$

$\vec{\Gamma}$  permet ainsi la localisation des limites des vortex. Ici, le point  $P$  décrit tout le domaine de calcul et la fonction n'est calculée que sur un nombre restreint de points autour de  $P$ . On définit  $N_c$  comme le nombre de "couches" de points constituant le domaine restreint et  $N$  comme le nombre de points total de ce domaine. Si l'on connaît a priori l'orientation privilégiée des tourbillons, on peut ne calculer que la composante du moment angulaire concernée. C'est le cas notamment de l'écoulement en canal où les tourbillons sont orientés selon la direction de l'écoulement moyen. On utilise dans ce cas un sous-domaine à  $N_c$  (ex :  $N_c = 4$ ) couches situé dans le plan perpendiculaire à cette direction.

Dans notre cas, l'écoulement est assez complexe en raison notamment du fort confinement. Par ailleurs, la discrétisation spatiale utilisée ne permet pas d'obtenir un sous-domaine de taille identique en chaque point du maillage. Malgré ces obstacles apparents, nous choisissons d'appliquer cette méthode à notre problème; la figure 4.9 symbolise la technique employée en considérant un sous-domaine à deux couches situé dans le plan perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement, à savoir  $\vec{z}$ . Au niveau des éléments périphériques, afin d'éviter de prendre en compte les vitesses nulles sur les parois, on décide de ne pas considérer les points  $P$  contenus dans les  $nx - N_c$  dernières couches. Pour la même raison, au niveau des extrémités du cylindre, on ne prend pas en compte les points  $P$  contenus dans les plans  $(xy)$  repérés par leur index  $k$  suivant  $\vec{z}$  vérifiant  $k = 0, \dots, N_c$  et  $k = n_z - N_c, \dots, n_z$ . Le résultat présenté sur la figure 4.10 utilise toujours un modèle à  $N_c = 2$  couches. Des tests ont été également réalisés avec d'autres modèles. Nous avons ainsi considéré un modèle à une couche mais également un modèle à "globalement"  $N_c = 2$  couches sauf pour les points d'intersection entre éléments où  $N_c = 3$  afin de tenter de niveler la taille de chaque sous-domaine. Les différences observées sont très faibles et les résultats obtenus sont quasiment similaires à la figure 4.10. Sur cette dernière, on visualise ainsi la composante principale  $\Gamma_z$  de  $\vec{\Gamma}$  dans le plan médian transverse vertical à laquelle on superpose le champ de vitesse

total  $\vec{v}$ . Les isosurfaces de deux valeurs opposées et proches des extrema de  $\Gamma_z$  sont également représentées. Ces résultats valident l'application du N.A.M. à notre étude. En effet, le fluide se déplace de la paroi chaude vers la paroi froide en s'enroulant autour de deux vortex longitudinaux contrarotatifs dans la partie supérieure de l'écoulement. Dans la partie inférieure de la cavité, du fait de la symétrie du problème, on vérifie bien que le fluide revient vers la paroi chaude en adoptant le même comportement.

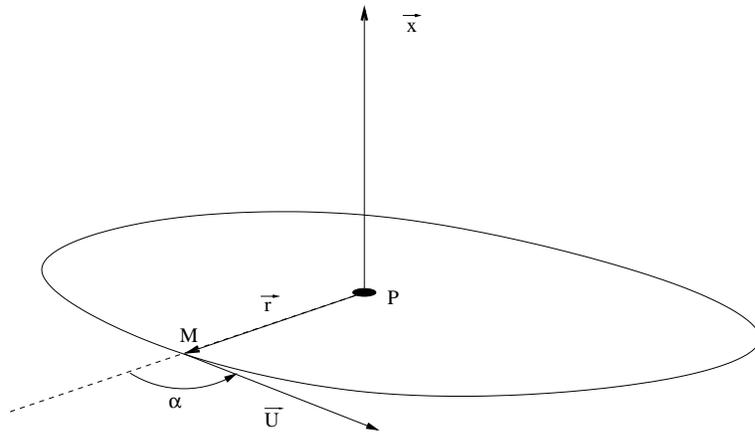


FIG. 4.8 – Schéma de calcul du moment angulaire

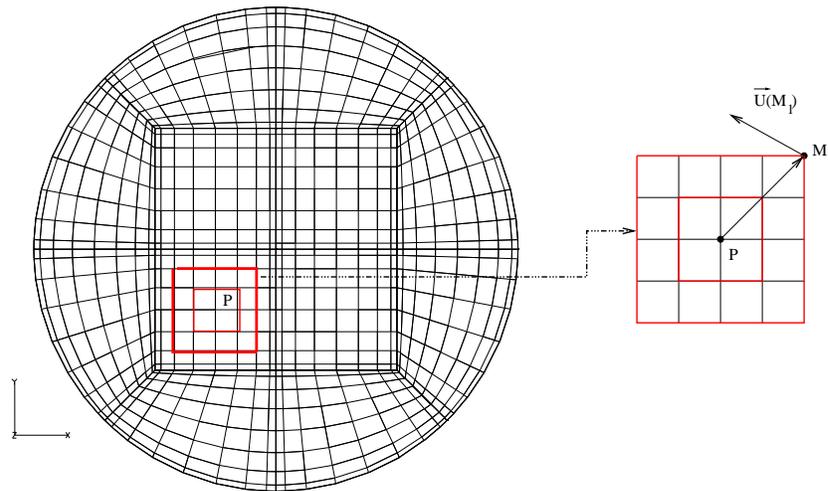


FIG. 4.9 – Calcul discret réduit à deux couches de la composante selon  $\vec{z}$  du moment angulaire normé.

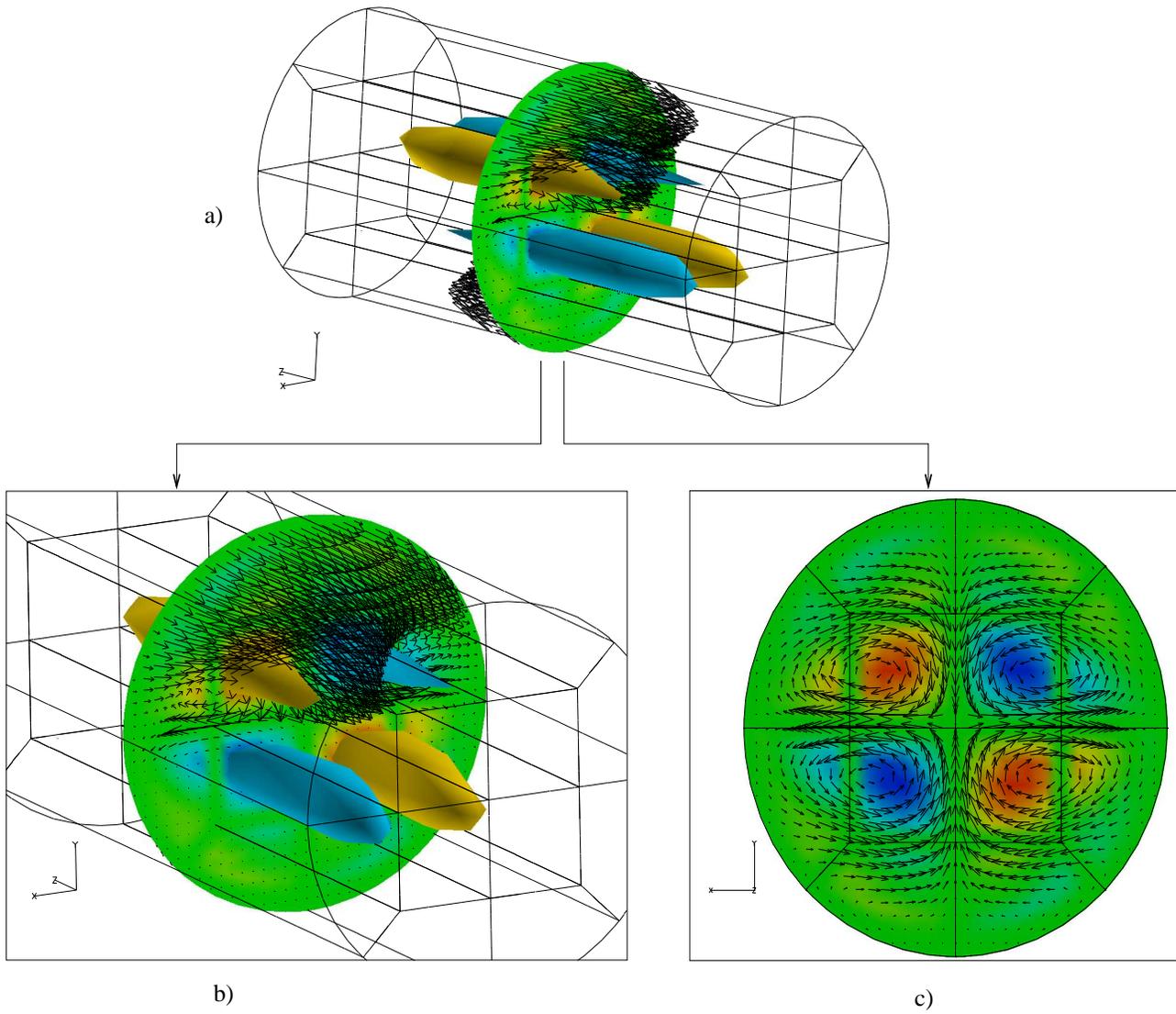


FIG. 4.10 – Représentation du champ total de vitesse  $\vec{v}$  et de la composante  $\Gamma_z$  de  $\Gamma$  dans le plan  $(O'xy)$  et de deux isosurfaces de  $\Gamma_z$  (figure a)). Zoom de cette même représentation sur la figure b). La figure c) représente la projection du champ de vitesse et la valeur de  $\Gamma_z$  dans le plan  $(O'xy)$  ( $A = 2, Gr = 230000, Pr = 0.026$ ).

#### 4.2.4 Écoulement instationnaire

En partant d'une solution stationnaire, la simulation numérique directe met en évidence l'existence d'une instabilité oscillatoire à partir de  $Gr = 234400 \simeq Gr_c$ . L'évolution temporelle de  $w$  au point  $x_1$  (fig.4.11) parcourt tout d'abord la solution stationnaire  $\mathbf{u}_{stat_1}$  puis lors de l'occurrence de la bifurcation stationnaire, saute sur  $\mathbf{u}_{stat_2}$  où prend naissance l'instabilité oscillatoire au passage d'une bifurcation de Hopf pour  $Gr_c$ .

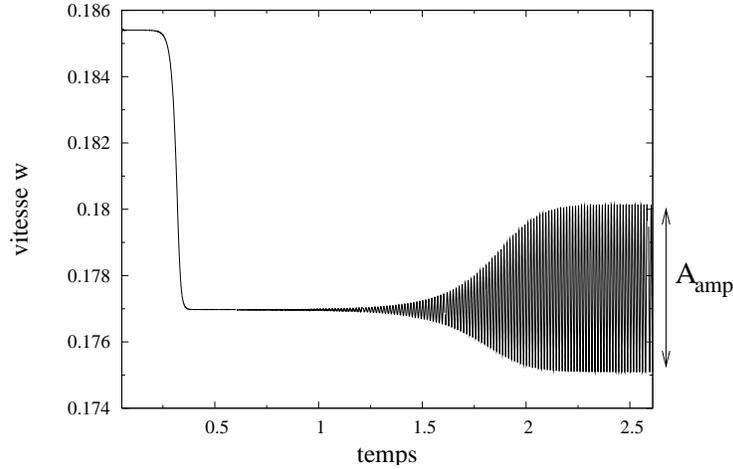


FIG. 4.11 – Évolution temporelle de la vitesse  $w$  au point  $x_1$  du maillage ( $Pr = 0,026$ ,  $A = 2$ ,  $Gr = 234400$ ).

Sur la branche de solutions oscillatoires émanant à  $Gr_c$  et dans un voisinage assez proche de  $Gr_c$ , différentes simulations sont alors réalisées pour des valeurs croissantes de  $Gr$ . Afin de déterminer le caractère sous-critique ou surcritique de la bifurcation, il est nécessaire de parcourir la branche oscillatoire en sens "inverse". Pour y parvenir, on part ainsi de solutions précédemment calculées et localisées sur la branche oscillatoire (pour des valeur  $Gr = Gr_1$ ) et on réalise la simulation pour des valeurs de  $Gr_2$  telles que  $Gr_2 < Gr_c < Gr_1$ . La figure 4.12(a) illustre cette étude en prenant  $Gr_1 = 235000$  et  $Gr_2 = 233000$ . On constate ainsi que pour  $Gr_2 = 233000$ , l'oscillation s'atténue et le régime redevient stationnaire tandis que si l'on réalise la même étude avec  $Gr_c < Gr_2 < Gr_1$  (ex :  $Gr_2 = 234500$  (fig.4.12(b))), l'oscillation est maintenue. En réitérant ces opérations au voisinage de  $Gr_c$ , on relève que la solution oscillatoire n'existe que pour des valeurs de  $Gr$  supérieures à  $Gr_c$  : la bifurcation est donc surcritique.

Dans le but d'obtenir une valeur très précise de  $Gr_c$ , il est utile de tracer la courbe  $A_{amp}^2 \alpha(Gr - Gr_c)$  valable pour une bifurcation surcritique où  $A_{amp}$  désigne l'amplitude d'un signal oscillatoire (ex : vitesse  $w$  en un point) pour une valeur  $Gr$  donnée. La relation  $A_{amp}^2 \alpha(Gr - Gr_c)$  supposant  $A_{amp}$  constant pour une valeur de  $Gr$  donnée, il en résulte que l'on doit choisir des points sur la branche oscillatoire au voisinage de  $Gr_c$  afin d'éviter par exemple tout effet de modulation d'amplitude. En se basant sur les points de la branche oscillatoire précédemment cités et obtenus dans un voisinage proche de  $Gr_c$ , le tracé de  $A_{amp}^2 \alpha(Gr - Gr_c)$  (fig.4.13) nous donne une valeur  $Gr_c = 234000$  pour le Grashof critique.

Durant cette bifurcation oscillatoire, aucune brisure de symétrie supplémentaire par rapport

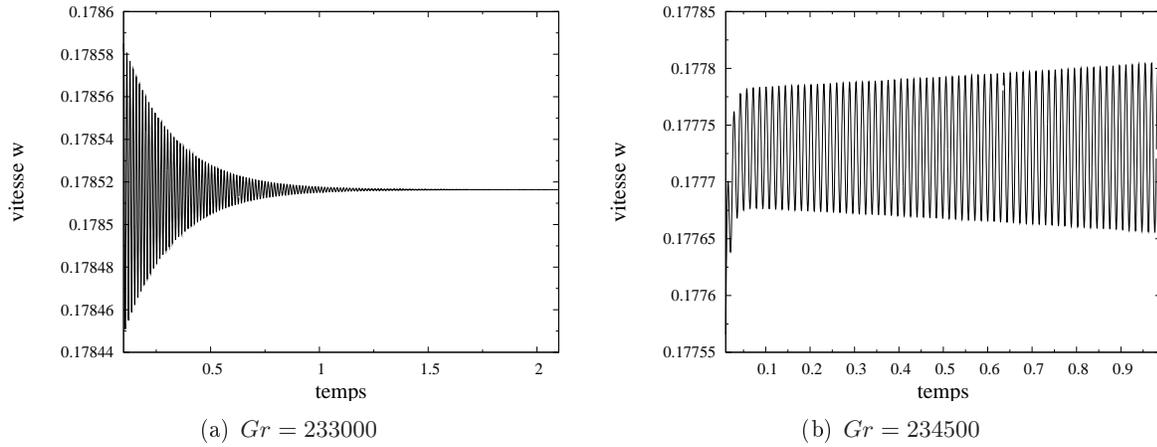


FIG. 4.12 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  pour  $Gr = 233000$  (fig.4.12(a)) et  $Gr = 234500$  (fig.4.12(b)) en partant de la même solution initiale oscillatoire obtenue pour  $Gr = 235000$ .

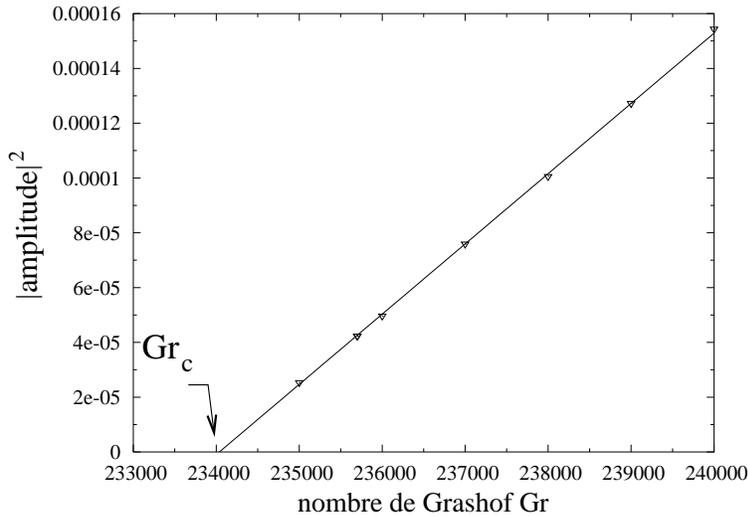


FIG. 4.13 – Tracé du carré de l'amplitude de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  en fonction du nombre de Grashof  $Gr$ . Détermination du Grashof critique  $Gr_c$  pour  $A = 2$ .

à  $\mathbf{u}_{stat_2}$  n'est observée : seule  $S_p$  est donc conservée. En se focalisant sur l'observation du champ de vitesse  $V_{xz}$  sur une période  $T$  (fig.4.14), on observe en effet une oscillation caractérisée par un mouvement de faible amplitude de part et d'autre de  $H_{t_2}$ .

En complément à la représentation des champs de vitesse oscillatoires, il semble également intéressant de nous pencher sur l'évolution au cours d'une période des profils des trois composantes de la vitesse, de la température ainsi que de leurs fluctuations respectives suivant un axe principal du repère. La figure 4.15 retrace cette étude pour  $Gr = 236000$  suivant l'axe  $H_t (= (O'x))$ . Au vu

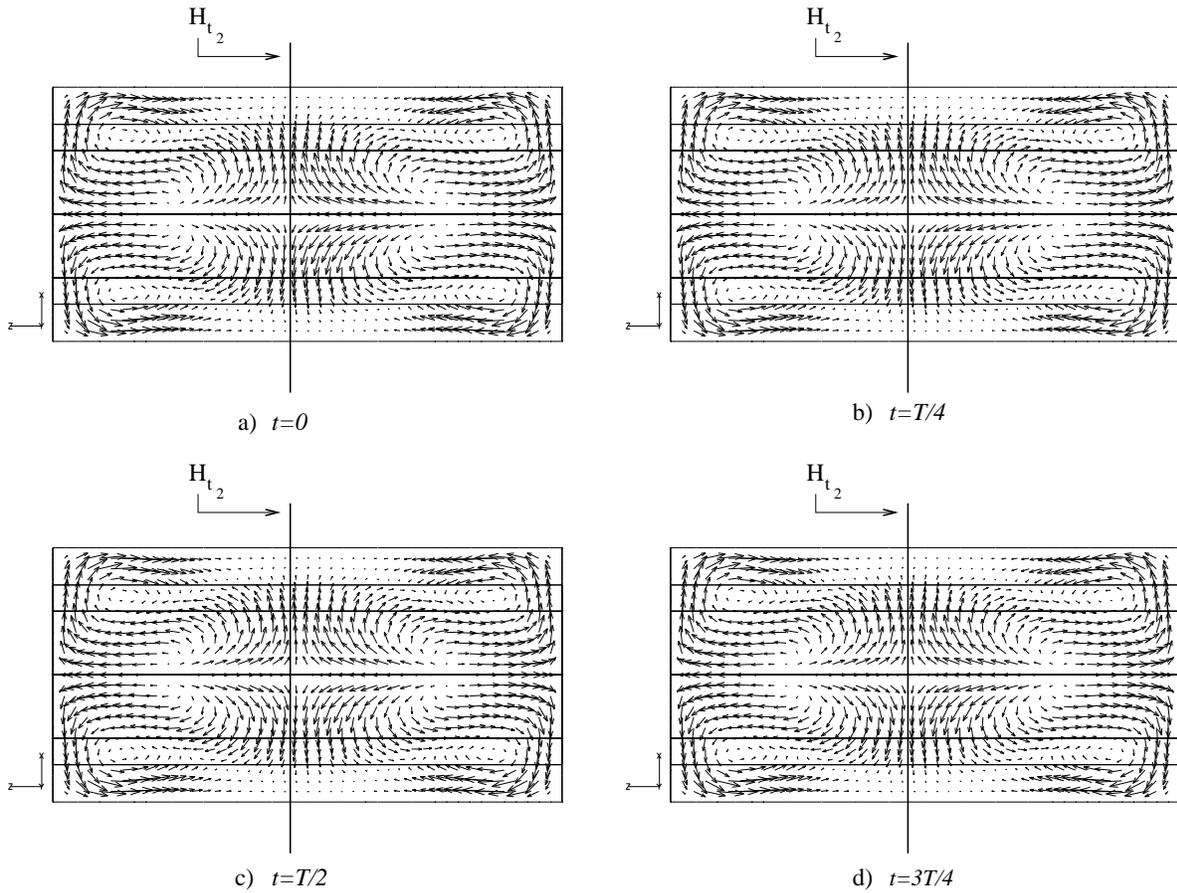


FIG. 4.14 – Champ de vitesse  $V_{xz}$  au cours d'une période  $T$  correspondant à la solution instationnaire obtenue pour  $Gr = 236000$ .

de l'allure de  $u, v, w$  et  $T$ , nous pouvons confirmer que la symétrie  $S_p$  est conservée. Par ailleurs, en remarquant que les composantes  $v$  et  $w$  n'oscillent pas autour de la valeur nulle, nous pouvons assurer que l'oscillation de l'écoulement ne s'effectue pas de part et d'autre de  $H_t$ . Le profil de la température confirme cette remarque. En effet, la température du champ diffusif, évoluant linéairement entre  $-A/2$  (en  $z = 0$ ) et  $A/2$  (en  $z = A$ ), devrait varier autour de 0 sur  $H_t$  si l'écoulement oscillait autour de ce même axe. Tel n'est pas le cas : l'écoulement oscille donc effectivement autour d'un axe  $H_{t_2}$  décalé d'une distance  $l$  suivant  $\vec{e}_z$  par rapport à  $H_t$ . En outre, bien que  $u$  soit la contribution principale de la vitesse sur l'axe ( $O'x$ ), ses fluctuations sont faibles de même que celles de  $v$ . Elles sont supplantées dans la partie centrale de la cavité (et donc aussi de ( $O'x$ )) par les fluctuations  $w'$  de la composante principale  $w$  de l'écoulement. Les fluctuations de température  $T'$ , également représentées sur la figure 4.16, sont assujetties à l'évolution de cette même composante principale de l'écoulement  $w$  et adoptent ainsi un profil proche de celui de  $w'$ .

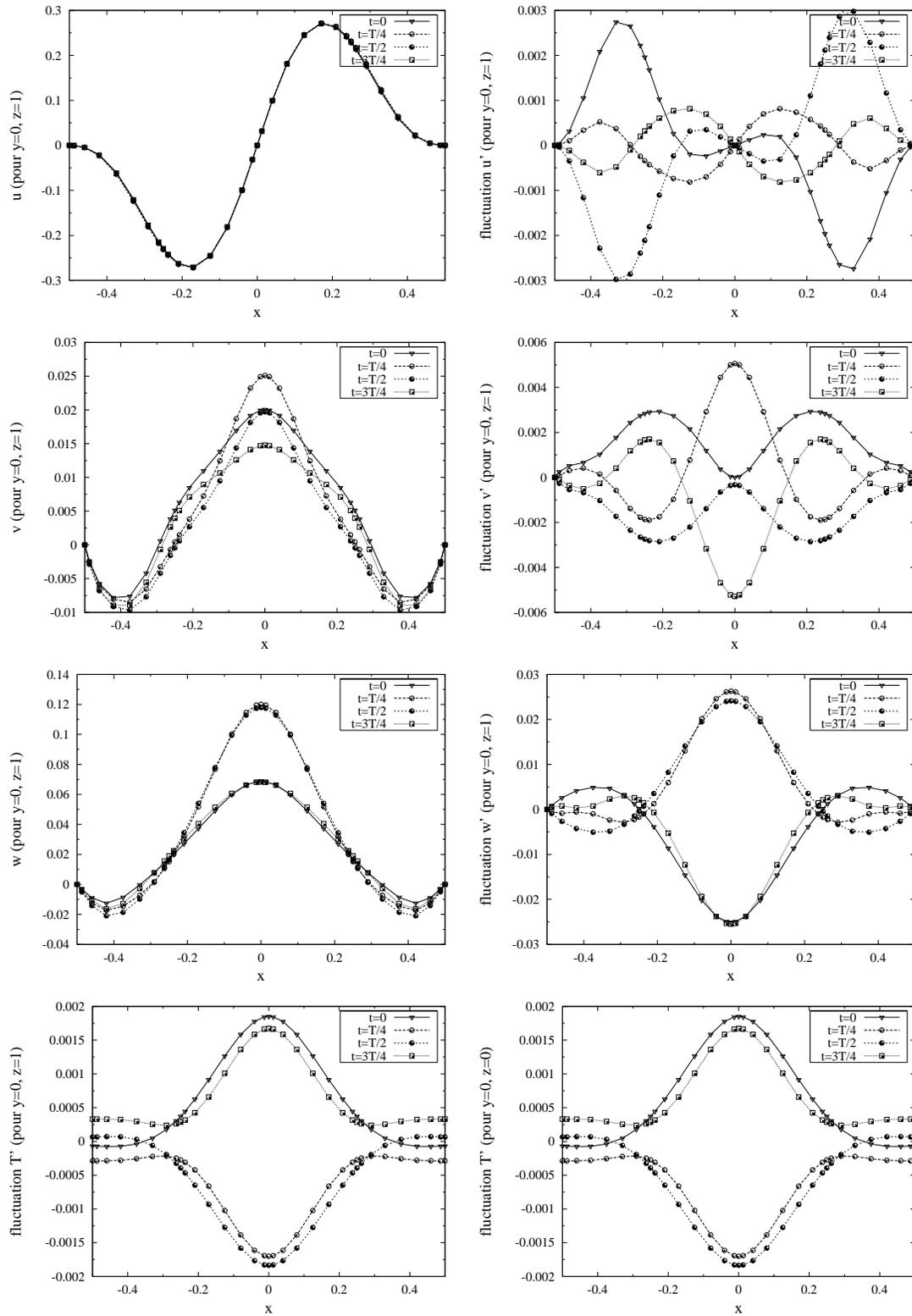


FIG. 4.15 – Profils des composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de la vitesse, de la température  $T$  ainsi que des fluctuations associées  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  et  $T'$  le long de l'axe  $(O'x) = H_t$  sur une période ( $A = 2, Gr = 236000, Pr = 0.026$ ).

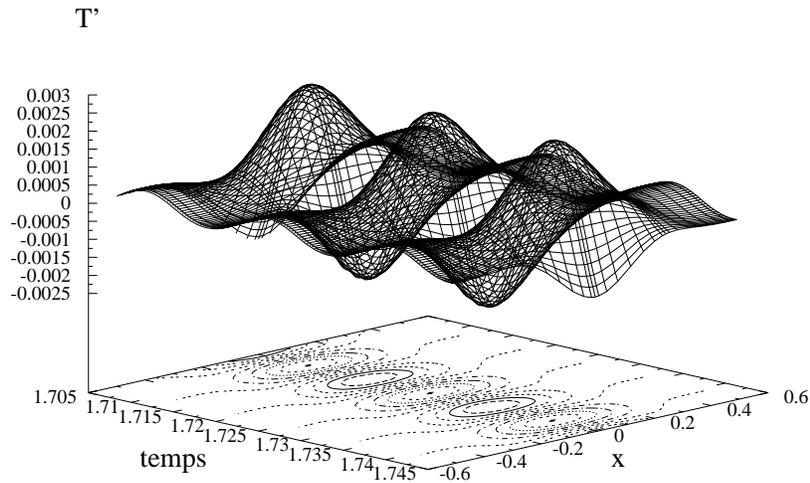


FIG. 4.16 – Évolution temporelle suivant l'axe médian transversal horizontal  $H_t$  de la fluctuation  $T'$  de la température ( $A = 2, Gr = 236000, Pr = 0.026$ ).

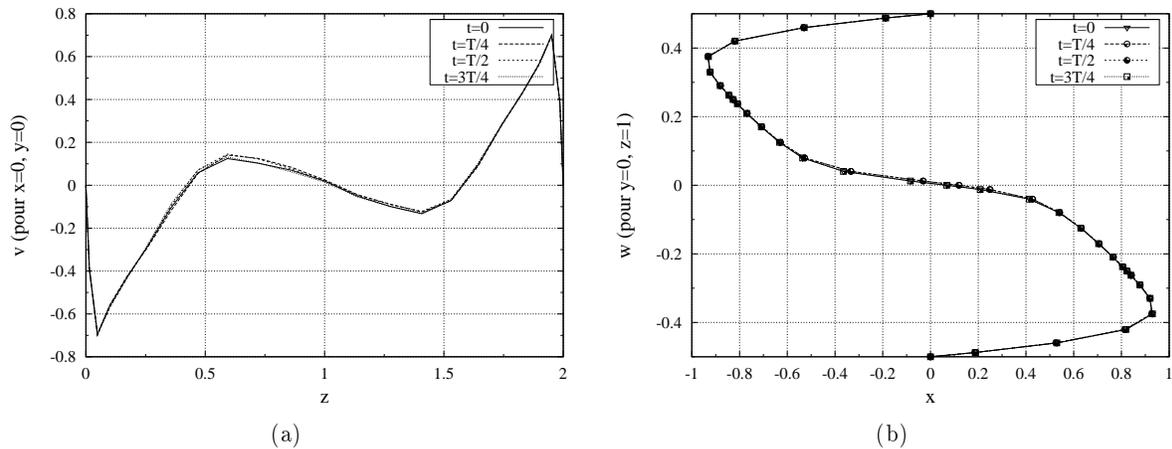


FIG. 4.17 – Profils de la composante  $v$  de la vitesse le long de l'axe ( $Oz$ ) (fig.4.17(a)) et de la composante  $w$  de la vitesse le long de l'axe ( $O'y$ ) (fig.4.17(b)) sur une période ( $A = 2, Gr = 236000, Pr = 0.026$ ).

Si l'on se penche sur l'évolution de  $v$  suivant l'axe  $(Oz)$  (fig.4.17(a)), il est possible de localiser les centres des vortex secondaires. Ceux-ci correspondent aux points où la composante  $v$  s'annule. Le centre du premier vortex secondaire se situe à  $z_1 \simeq 0.44$  et le centre du second à  $z_2 \simeq 1.56$ . Deux zones de fort gradient  $\frac{\partial v}{\partial z}$  apparaissent : la première au niveau des extrémités en raison du passage d'une vitesse finie à nulle et la seconde au niveau des vortex secondaires. Pour sa part, le profil de  $w$  suivant l'axe  $(O'y)$  (fig.4.17(b)) révèle l'allure en "S" habituelle. Cependant, l'interaction des vortex secondaires avec la circulation principale étant plus faible dans les parties inférieure et supérieure de l'écoulement que dans son coeur, la composante  $w$  est moins entravée dans ces deux régions où elle atteint son maximum non loin des parois latérales. Deux zones de fort cisaillement  $\frac{\partial w}{\partial y}$  se distinguent : la première, de faible épaisseur, au niveau des parois due comme précédemment à l'annulation progressive de  $w$  et la seconde au niveau de  $y = 0$ , lieu de séparation des deux écoulements de sens opposé. Nous reviendrons ultérieurement lors de l'analyse énergétique sur le rôle et l'importance des gradients de vitesse dans l'apparition de l'instabilité oscillatoire.

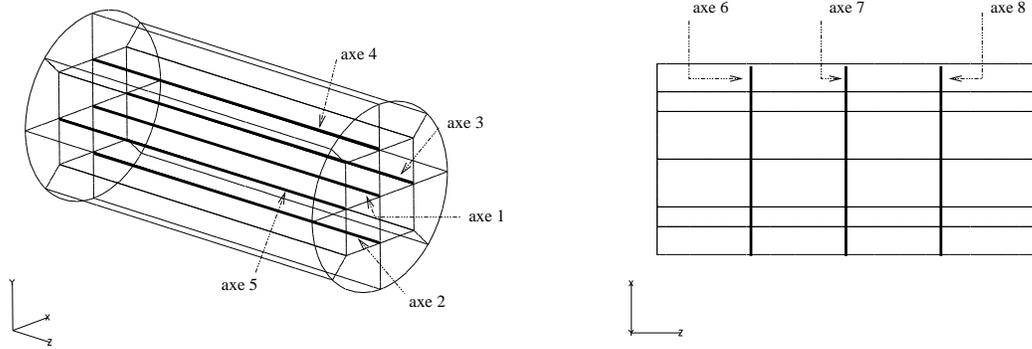
### Analyse fréquentielle

L'utilisation de l'analyse fréquentielle s'avère utile pour la détermination de la fréquence fondamentale  $f_0$  et des éventuelles sous-harmoniques caractéristiques de l'instabilité. Pour cela, nous calculons la densité spectrale du signal au moyen d'une transformée de Fourier rapide en douze axes caractéristiques du cylindre (fig. 4.18). Ces douze axes nous permettent d'avoir ainsi une relativement bonne couverture spatiale du cylindre. La figure 4.19 représente le spectre des fréquences suivant l'axe n°7 (ou axe  $H_t$ ) en se basant successivement sur la composante  $w$  de la vitesse puis sur la température  $T$ . Les résultats concordent pour les douze axes (nous nous abstenons de tous les représenter) : la fréquence fondamentale vaut  $f_0 = 69.7$ . Nous n'obtenons pas de sous-harmoniques d'influence notable.

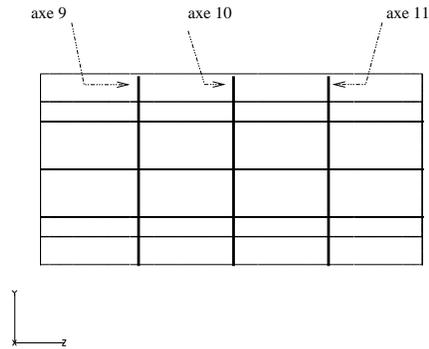
Dans le but de localiser les zones de l'écoulement les plus affectées par ces oscillations de fréquence fondamentale  $f_0$ , nous avons calculé la dépendance spatiale de la densité spectrale  $\hat{T}$  et  $\hat{w}$  associées respectivement à la température et à la vitesse  $w$ .  $\hat{T}$  et  $\hat{w}$  sont respectivement définies par :

$$\hat{T}(x, y, z, f_0) = \int_t T(x, y, z, t) e^{-i2\pi t f_0} dt \quad \text{et} \quad \hat{w}(x, y, z, f_0) = \int_t w(x, y, z, t) e^{-i2\pi t f_0} dt \quad (4.7)$$

Elles sont basées sur la corrélation entre le signal de température  $T$  pour  $\hat{T}$  (de vitesse  $w$  pour  $\hat{w}$ ) et le signal périodique fondamental de fréquence  $f_0$ . Les résultats, présentés dans le plan  $(L_v)$  (fig.4.20(a) et 4.20(b)) montrent que les zones de forte densité spectrale, aussi bien pour  $\hat{T}$  que pour  $\hat{w}$ , se situent le long de la zone de cisaillement principal  $\frac{\partial w}{\partial y}$ . Enfin, si l'on se place dans le plan horizontal  $(L_h)_2$  parallèle à  $(L_h)$  et passant par les zones maximales de  $\hat{T}$  et  $\hat{w}$  repérées précédemment dans le plan vertical  $(L_v)$ , on constate par ailleurs que ces zones maximales de densité spectrale se situent au voisinage de  $(L_v)$ . En première approche, nous pensons donc que l'instabilité oscillatoire s'apparente à une instabilité de cisaillement dû au cisaillement principal  $\frac{\partial w}{\partial y}$  et qu'elle se cantonne dans une région voisine du plan  $L_v$ . L'analyse énergétique ultérieure précisera les mécanismes sous-jacents.



(a) Repérage des axes longitudinaux  $n^\circ i$  ( $i = 1, \dots, 5$ )    (b) Repérage des axes transversaux horizontaux  $n^\circ i$  ( $i = 6, 7, 8$ )



(c) Repérage des axes transversaux verticaux  $n^\circ i$  ( $i = 9, 10, 11$ )

FIG. 4.18 – Repérage des axes  $n^\circ i$  ( $i = 1, \dots, 12$ ) du cylindre.

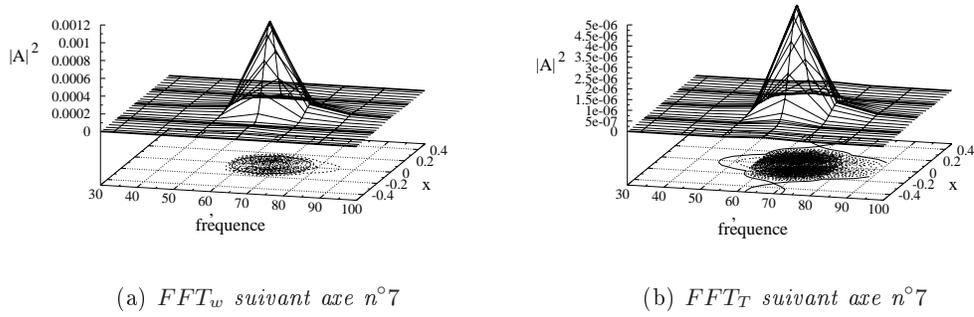


FIG. 4.19 – Évolution du spectre des fréquences le long de l'axe n°7 transversal horizontal (ou axe  $H_t$ ). Sur la colonne de gauche, F.F.T réalisée à partir de la composante  $w$  de la vitesse  $\vec{v}$ . Sur la colonne de droite, F.F.T réalisée à partir de la température  $T$ . En ordonnée, le spectre est exprimé en utilisant le carré de l'amplitude ( $A = 2, Pr = 0.026, Gr = 236000$ ).

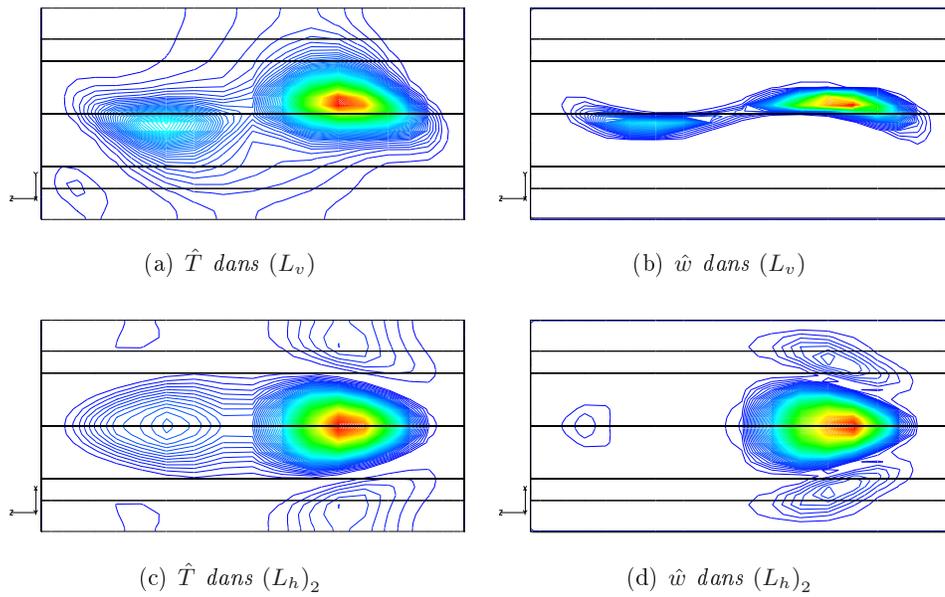


FIG. 4.20 – Dépendance spatiale des densités spectrales  $\hat{T}$  et  $\hat{w}$  dans les plans  $(L_v)$  et  $(L_h)_2$  ( $A = 2, Gr = 236000, Pr = 0.026$ ).



# Chapitre 5

## Proper Orthogonal Decomposition - Résultats

Les résultats obtenus par la méthode P.O.D. sont ici présentés et comparés avec ceux donnés par la simulation numérique directe (D.N.S). Ces résultats concernent le cas  $Pr = 0.026$  et  $A = 2$ . Les facteurs influençant la robustesse du modèle dynamique de faible dimension tels que la longueur de référence du signal, le nombre de modes retenus pour la projection de Galerkin, la vitesse caractéristique et les développements choisis pour la vitesse et la température sont discutés. Nous verrons que le modèle dynamique peut reproduire fidèlement les résultats obtenus par la DNS aux “conditions désignées” ou de référence (i.e. pour le nombre de Grashof  $Gr_0$  auquel les modes ont été extraits). Le modèle peut également correctement approcher les résultats de la D.N.S dans un domaine plus ou moins large autour de  $Gr_0$ .

### 5.1 P.O.D. sous forme locale au voisinage du seuil $Gr_c$

#### 5.1.1 Emploi de la méthode-VT

En utilisant la relation  $A_{amp}^2 \alpha(Gr - Gr_c)$  (où nous rappelons que  $A_{amp}$  est l’amplitude du signal oscillatoire) valable pour  $A = 2$ , la simulation numérique directe donne une valeur de  $Gr_c$  égale à 234000. Lorsqu’on s’éloigne du seuil  $Gr_c$ , le signal oscillatoire obtenu pour  $Gr = 240000$  une fois sa phase de croissance terminée, présente l’allure de la figure 5.1(a). Le signal de la figure 5.1(b), représentatif du signal global sur un nombre de périodes restreint, constitue pour sa part la fenêtre sur laquelle on enregistre 250 snapshots ( $nsnap = 250$ ) du champ de vitesse et de température en choisissant un pas de stockage de 20 pas de temps ( $ipsnap = 20$ ).

La première étape de l’étude P.O.D. consiste à calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associés des deux matrices de corrélation, basées respectivement sur les fluctuations de vitesse et sur les fluctuations de température. On obtient de ce fait les modes-vitesse  $\sigma_V^i$  de l’écoulement ainsi que le pourcentage de l’énergie cinétique fluctuante  $K$  qu’ils capturent. De même, on obtient les modes-température  $\sigma_T^i$  de l’écoulement ainsi que le pourcentage de l’énergie thermique fluctuante  $\Theta$  qu’ils capturent. Les tableaux 5.1 récapitulent les pourcentages d’énergie cinétique et thermique fluctuante des six premiers modes.

A la lecture de ces deux tableaux, on constate qu’il suffit de deux modes, vitesse et température, pour capturer plus de 99% de l’énergie fluctuante. Si l’on pousse jusqu’à considérer les six premiers modes, il est clair que presque toute l’énergie fluctuante est capturée. Désormais, au regard de ces deux tableaux, il nous est possible de déterminer le nombre  $M_V$  de modes-vitesse et  $M_T$  de modes-température à considérer pour construire et résoudre le système dynamique. Les résultats

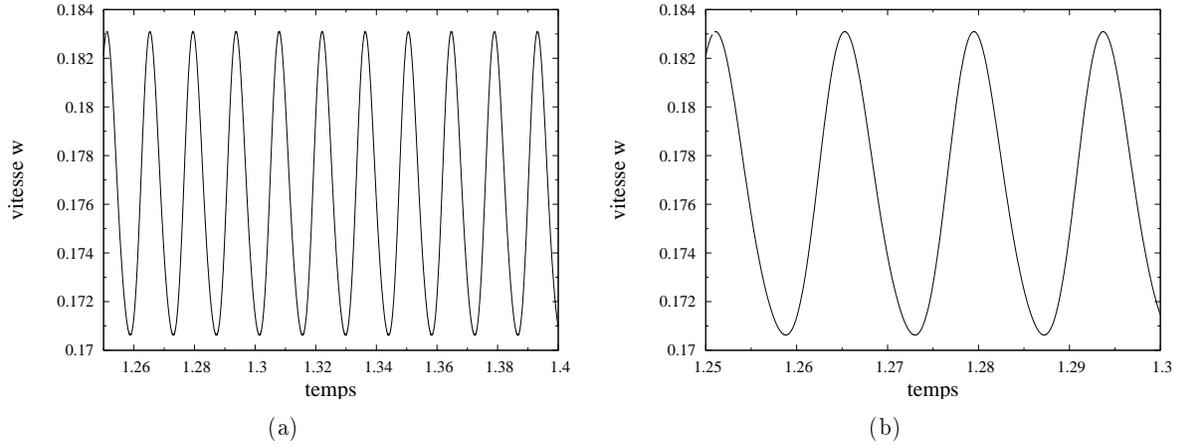


FIG. 5.1 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage (fig.5.1(a)). Fenêtre de stockage pour l'étude POD (fig.5.1(b)) ( $A = 2, Gr = 240000, Pr = 0.026$ ).

	Modes-Vitesse $\sigma_V^i$			Modes-Température $\sigma_T^i$	
	%age du mode	%age cumulé		%age du mode	%age cumulé
mode n°1	62.8201	62.8201	mode n°1	60.1568	60.1568
mode n°2	36.6363	99.4564	mode n°2	39.5929	99.7497
mode n°3	0.2900	99.7464	mode n°3	0.1376	99.8873
mode n°4	0.2451	99.9915	mode n°4	0.1108	99.9981
mode n°5	0.0043	99.9958	mode n°5	0.0010	99.9991
mode n°6	0.0042	~ 100.0000	mode n°6	0.0009	~ 100.0000

TAB. 5.1 – Pourcentage d'énergie cinétique et thermique fluctuante capturée par chaque mode  $\sigma_V^i$  et  $\sigma_T^i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) et pourcentage cumulé ( $A = 2, Gr = 240000, n_{snap} = 250, i_{psnap} = 20$ ).

représentés sur la figure 5.2 sont basés sur  $M_V = M_T = 6$ . Ceux-ci montrent les trois premiers coefficients temporels  $a_i(t)$  (associés à la fluctuation du champ de vitesse) calculés, d'une part analytiquement grâce à l'équation 3.48 ("DNS" sur les courbes), et d'autre part évalués par la résolution du système d'équations différentielles ordinaires ("POD" sur les courbes). On représente de façon similaire les trois premiers coefficients temporels  $b_i(t)$  (associés à la fluctuation du champ de température). On constate ainsi la bonne correspondance entre les résultats fournis par la DNS et la POD. La figure 5.3 représente pour sa part les portraits de phase des coefficients temporels  $a_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 6$ ). Elle constitue une autre manière de remarquer la bonne concordance entre POD et DNS. Pour des temps courts, cette correspondance est très bonne. Pour des temps longs, l'allure est tout à fait respectée mais un phénomène d'amplification de l'amplitude des coefficients apparaît.

### 5.1.2 Effets des paramètres numériques sur la P.O.D

#### L'effet du nombre de modes

Des tests sur l'effet du nombre de modes choisis ont été réalisés afin de déterminer le comportement du système d'EDO. Nous ne présentons pas les figures correspondant à ces tests mais nous limitons à leurs conclusions. Le choix précédemment effectué,  $M_V = M_T = 6$ , reproduit correctement la DNS à l'instar du choix  $M_V = M_T = 4$ . Cependant, si l'on choisit  $M_V = M_T = 3$ , un problème apparaît : les deux premiers coefficients temporels ( $i = 1, 2$ ) sont correctement reproduits mais avec une amplification de l'amplitude non négligeable. On retrouve bien la fréquence correspondant au troisième mais son allure ne respecte pas celle de la DNS. Ainsi, même dans ce dernier cas où l'on regroupe  $\simeq 99,75\%$  de l'énergie cinétique fluctuante et  $\simeq 99,88\%$  de l'énergie thermique fluctuante, le signal est correctement reproduit mais présente quelques imprécisions. Si l'on choisit par contre ( $M_V = 4, M_T = 2$ ), POD et DNS correspondent de nouveau, ce qui est moins le cas pour ( $M_V = 2, M_T = 4$ ).

Il est ainsi nécessaire de prendre en compte au moins 4 modes-vitesse et 2 modes-température pour avoir superposition des signaux DNS et POD. Le fait connu de la grande sensibilité des EDO vis-à-vis du nombre de modes retenus se confirme ; il est donc primordial de réaliser plusieurs tests afin de déterminer leur nombre minimal.

#### L'effet de la longueur de la fenêtre de stockage et du pas de stockage

Nous avons choisi d'effectuer notre stockage sur une fenêtre couvrant environ quatre périodes en prenant  $nsnap = 250$  et  $ipsnap = 20$ . En gardant cette même valeur de  $ipsnap$ , nous avons également couvert 2 et 16 périodes. Etant donné l'allure relativement simple du signal, nous avons vérifié que les résultats sur ces trois fenêtres concordent. En faisant varier  $ipsnap$  de 5 à 30 sur une fenêtre de deux périodes, nous obtenons les mêmes conclusions.

#### Le meilleur choix pour la vitesse caractéristique

Pour un problème de convection naturelle, le choix de la vitesse caractéristique dépend de la nature de l'écoulement. Pour des écoulements où les forces d'inertie dominant, il est usuel de choisir comme vitesse caractéristique  $v_{ref_1} = \nu\sqrt{Gr}/D$ . Lorsque les effets visqueux sont prépondérants, il est préférable de choisir  $v_{ref_2} = \nu/D$ . Afin de montrer les avantages du choix de la vitesse de référence, un système d'E.D.O. a été construit et testé en optant pour le deuxième choix de vitesse caractéristique. Nous avons utilisé la même fenêtre de stockage, le même pas de stockage (donc un nombre de snapshots identiques) et le même nombre de modes. La projection de Galerkin devrait ainsi s'appliquer maintenant aux équations qui gouvernent notre système :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \nabla^2 \vec{v} + Gr.T\vec{e}_y \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = Pr^{-1} \nabla^2 T \quad (5.2)$$

On trouve que le système d'E.D.O. donne des résultats identiques pour une P.O.D. locale, mais les résultats ne correspondent plus lorsqu'on change le nombre de Grashof (donc en méthode prédictive). Ce désaccord peut être expliqué par le manque de modification de la valeur moyenne de

la vitesse lorsque le nombre de Grashof est changé. En effet, les valeurs moyennes varient avec le nombre de Grashof et le système dynamique devrait en tenir compte. La valeur de Grashof pour laquelle l'étude a été menée se situe dans une plage où les valeurs moyennes dimensionnelles évoluent proportionnellement à  $\sqrt{Gr}$  (situations convectives avec effets inertiels). En réalité, les systèmes dynamiques sont basés sur des valeurs moyennes constantes pour la vitesse adimensionnelle. Ceci indique que si  $v_{ref} = \nu\sqrt{Gr}/D$  est utilisée, les valeurs moyennes de la vitesse dimensionnelle sont effectivement proportionnelles à  $\sqrt{Gr}$  alors que si l'on opte pour  $v_{ref} = \nu/D$ , ces valeurs moyennes sont constantes quelque soit la valeur du nombre de Grashof. De ce fait, dans notre problème, le choix de  $v_{ref} = \nu\sqrt{Gr}/D$  comme vitesse caractéristique améliore la validité du système dynamique.

En outre, nous tenons à mentionner que lors de la construction du système dynamique, nous utilisons strictement les mêmes procédures de calcul que celles utilisées dans le code DNS (pour évaluer par exemple un gradient,...) afin de ne pas introduire des termes d'erreur.

Nous reviendrons ultérieurement, pour des signaux oscillatoires beaucoup plus chahutés, sur l'influence de ces paramètres pour construire un système d'EDO valide et robuste.

En se focalisant sur les figures 5.4(a) et 5.3, on peut dire que les coefficients temporels associés à la vitesse apparaissent par paires, respectivement  $(a_1, a_2)$  et  $(a_3, a_4)$ . Les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  ont la même période  $T$  ( $= T$  période correspondant à la fréquence fondamentale  $f_0$  de l'instabilité oscillatoire) mais sont déphasés de  $\frac{T}{4}$ . De même  $a_3$  et  $a_4$  ont la même fréquence fondamentale  $f_0$  (avec une première harmonique plus forte  $f_1 = 2f_0$ ) mais sont déphasés de  $\frac{T_1}{4} = \frac{T}{8}$ . Il en est de même pour les coefficients liés à la température, soit  $(b_1, b_2)$  et  $(b_3, b_4)$  (fig.5.4(b)). Au vu des figures 5.4(c) et 5.4(d), nous pouvons également constater que les paires  $(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$  sont en phase alors que les paires  $(a_3, a_4)$  et  $(b_3, b_4)$  sont déphasées de  $\frac{T}{8}$ .

Pour leur part, les modes  $\sigma_V^i$  et  $\sigma_T^i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) sont représentés sur la figure 5.5. Les deux modes les plus énergétiques ( $i = 1, 2$ ) contiennent les caractéristiques de grande échelle de chaque champ fluctuant tandis que les modes plus élevés ( $i = 3, 4$ ) capturent celles de plus petite échelle. Ainsi, si l'on compare la répartition spatiale de la densité spectrale  $\hat{T}$  déjà évoquée (fig.4.20(a)) à celle de  $\sigma_T^1$  dans le plan  $(L_v)$  (fig.5.5(b)), plan majeur du déclenchement de l'instabilité comme précisé en §4.2.4, on constate une similarité dans la position notamment du maximum de  $\hat{T}$  et de  $\sigma_T^1$ . Les modes les plus énergétiques sont donc bien positionnés de façon à ce qu'ils coïncident avec les lieux où le champ fluctuant est le plus élevé. En outre, si l'on se réfère par exemple au premier mode (fig.5.5(a) et 5.5(b)), on constate que les modes-température suivent globalement l'allure des modes-vitesse.

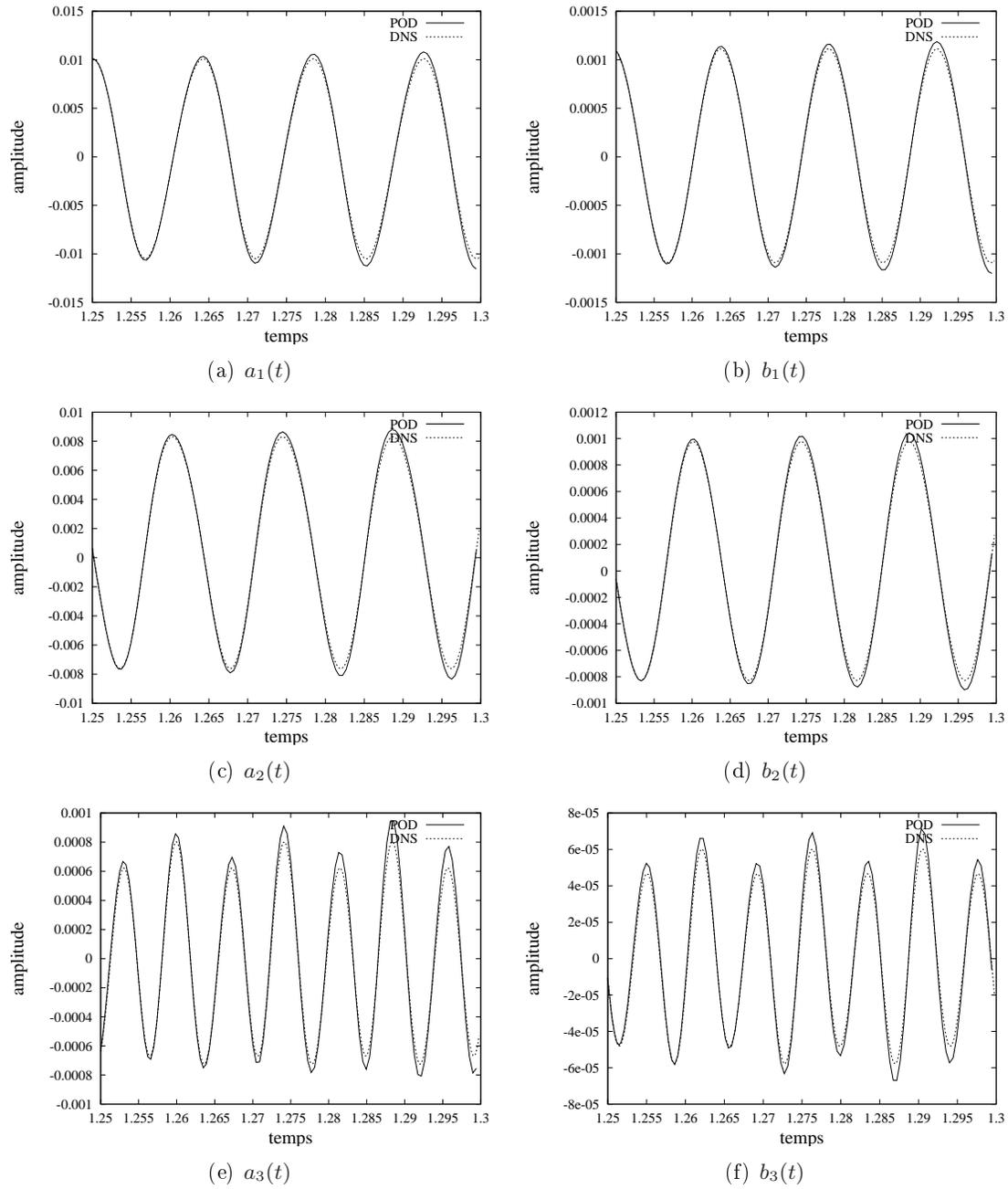


FIG. 5.2 – Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients  $a_i(t)$  et  $b_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) évalués à partir des résultats DNS et par résolution du système dynamique réduit obtenu par la projection sur  $M_V = M_T = 6$  modes ( $A = 2, Pr = 0.026, Gr = 240000, nsnap = 250, ipsnap = 20$ ).

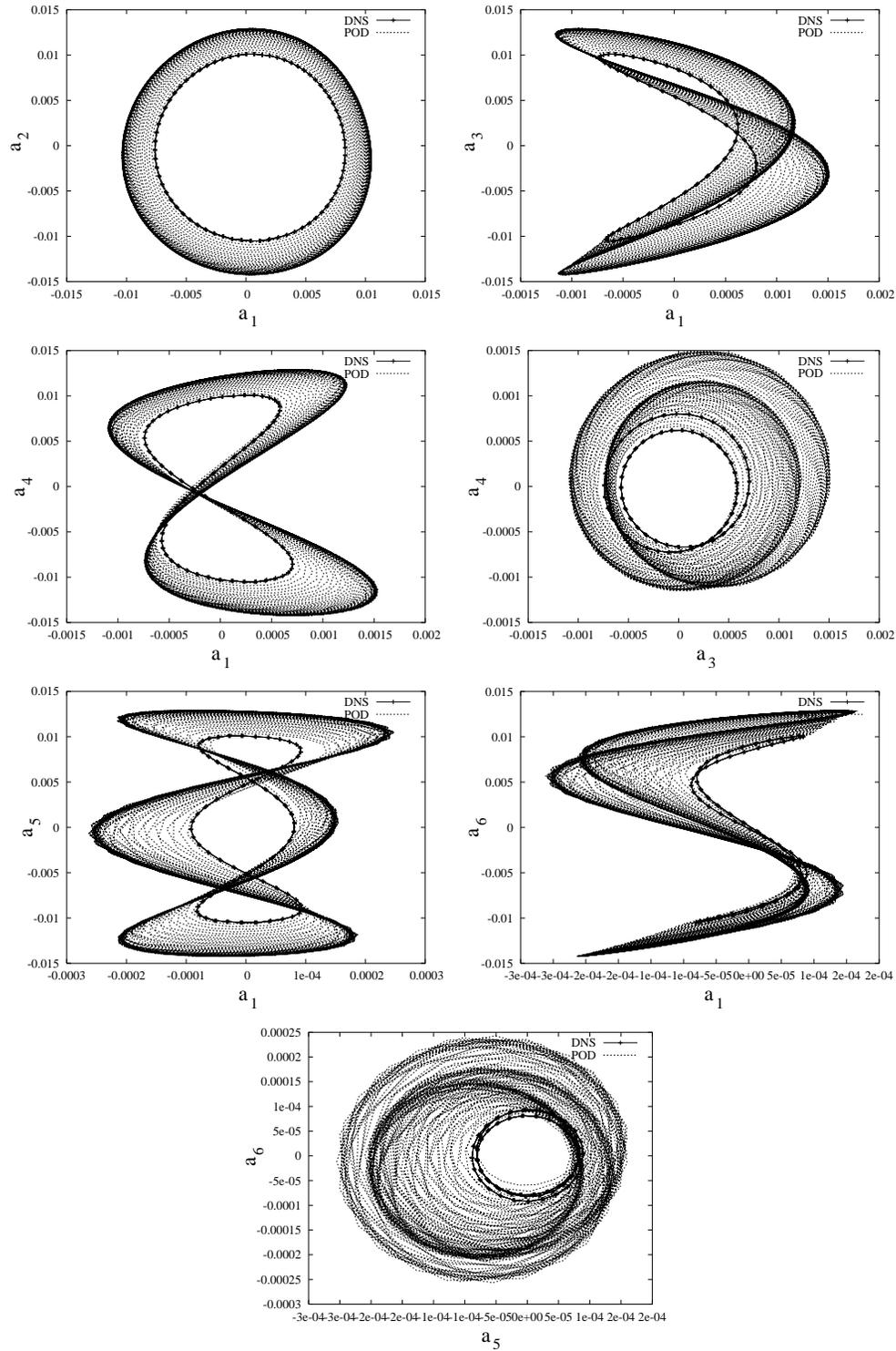


FIG. 5.3 – Portraits de phase des coefficients temporels  $a_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) évalués à partir des résultats DNS et par résolution sur des temps longs du système dynamique réduit obtenu par la projection sur  $M_V = M_T = 6$  modes ( $A = 2, Pr = 0.026, Gr = 240000, n_{snap} = 250, ip_{snap} = 20$ ).

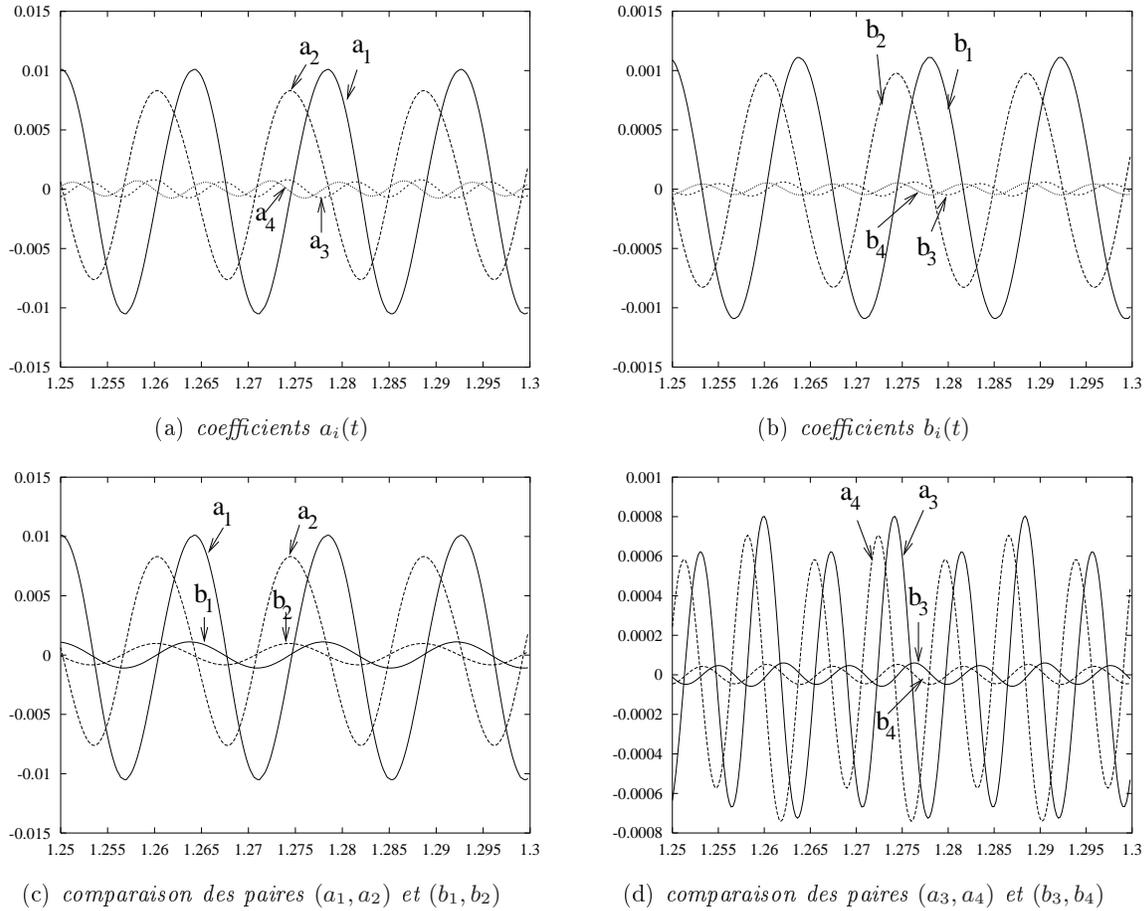


FIG. 5.4 – Évolution temporelle des coefficients  $a_i(t)$  et  $b_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) calculés par la projection directe des snapshots sur les vecteurs propres ( $A = 2, Pr = 0.026, Gr = 240000, n_{snap} = 250, ipsnap = 20$ ).

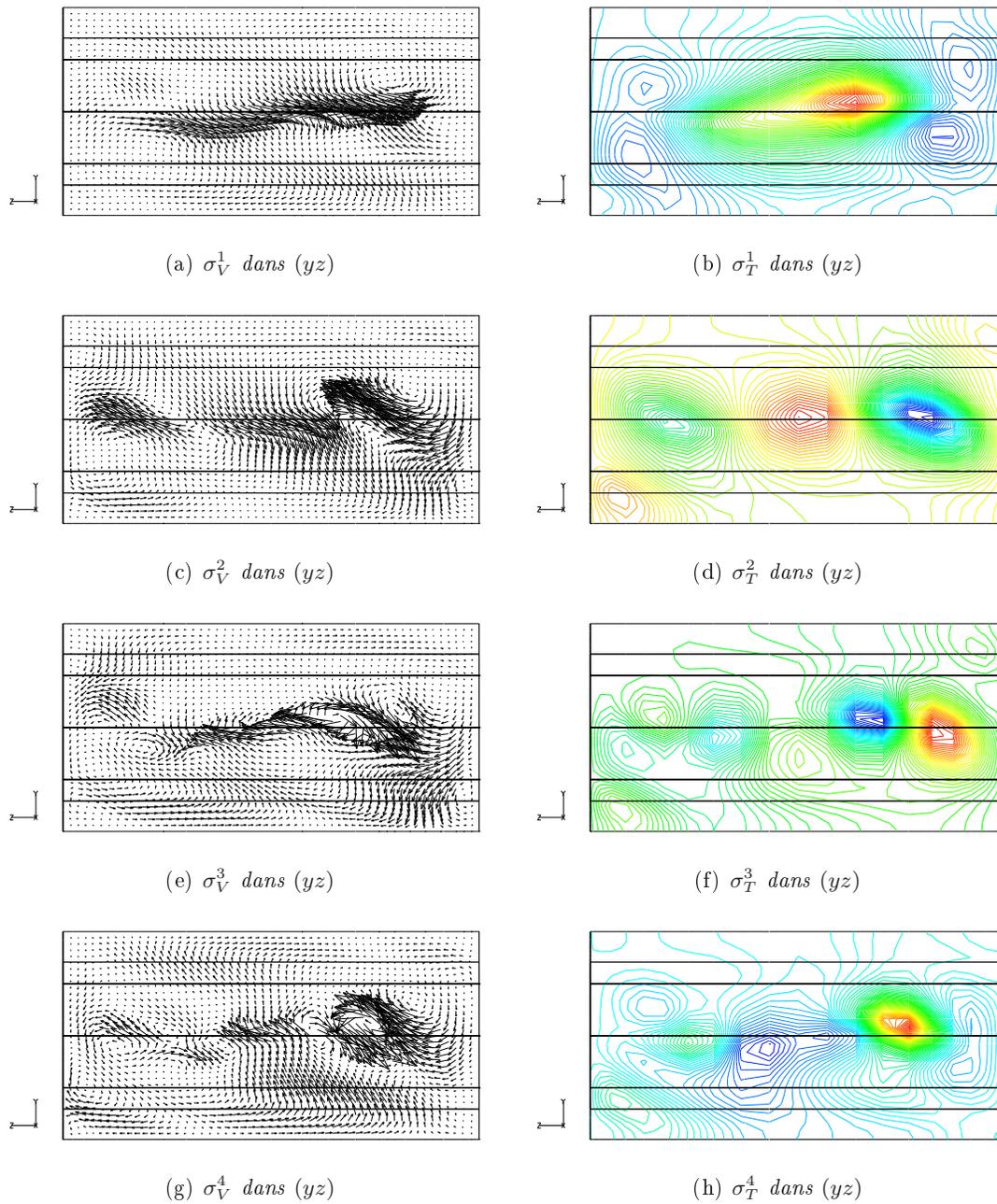


FIG. 5.5 – Représentation dans le plan  $(L_v)$  des quatre premiers modes-vitesse  $\sigma_V^i$  et température  $\sigma_T^i$  ( $A = 2, Pr = 0.026, Gr = 240000$ ).

## 5.2 P.O.D. sous forme locale éloignée du seuil $Gr_c$

### 5.2.1 Emploi de la méthode-VT

Le choix est fait de tester la P.O.D. pour un régime instationnaire complexe, c'est-à-dire nécessitant pour sa reconstruction un nombre élevé de modes. La correspondance POD-DNS précédemment rencontrée est-elle de nouveau possible ? Quelle influence joue le nombre de modes  $M_V$  et  $M_T$  dans l'obtention d'un système d'EDO fiable ? La méthode- $\alpha$  est-elle ou non plus robuste que la méthode de séparation des variables ? Telles sont les questions auxquelles nous allons tenter de répondre en effectuant une étude POD sur un signal dont l'allure générale est représentée sur la figure 5.6(a).

Le signal de la figure 5.6(b), représentatif du signal global sur un nombre de périodes restreint, constitue pour sa part la fenêtre sur laquelle on enregistre 1000 snapshots du champ de vitesse et de température régulièrement espacés ( $ipsnap = 5$ ). De la même manière que dans l'étude pour  $Gr = 240000$ , nous utilisons la méthode-VT et les tableaux 5.2 récapitulent respectivement les pourcentages d'énergie cinétique et thermique fluctuante capturées par les dix premiers modes puis par les modes n°20, 30, 40 pour la température auxquels on ajoute les n°50 et 60 pour la vitesse. On note qu'à la différence du cas  $Gr = 240000$ , l'énergie fluctuante se répartit sur un nombre beaucoup plus élevé de modes et donne une importance aux modes d'ordre plus élevé. Si l'on se base par exemple sur les modes-vitesse, les deux premiers modes concentrent  $\sim 50\%$  de l'énergie cinétique fluctuante  $K$  alors qu'ils représentaient plus de 99% de  $K$  pour le cas  $Gr = 240000$ . Afin de prendre en compte toutes les échelles du problème, nous décidons dans un premier temps de construire le système dynamique en projetant les équations du système sur  $M_V = 50$  modes-vitesse et  $M_T = 40$  modes-température. En visualisant la reproduction des coefficients  $a_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 10$  puis  $i = 20, 30, 40, 50$ ) (fig.5.7) et  $b_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 10$  puis  $i = 20, 30, 40$ ) (fig.5.8) par la résolution du système d'EDO et en la comparant aux résultats fournis par la DNS, on constate une excellente reproduction même pour les coefficients d'indice élevés relatifs aux modes capturant très peu d'énergie fluctuante. Nous avons décidé de les représenter sur un intervalle de temps  $\Delta t \simeq \frac{1}{2}\Delta t_{sto}$  (où  $\Delta t_{sto}$  est l'intervalle de la fenêtre de stockage) afin de bien visualiser la correspondance même pour les indices élevés.

### L'effet du nombre de modes

De nombreux tests ont été réalisés pour différentes valeurs du couple  $(M_V, M_T)$  afin de déterminer la correspondance ou non entre la simulation numérique directe et la POD sur un intervalle de temps  $\Delta t = \Delta t_{sto}$ . Pour cela, on compare les évolutions temporelles de la vitesse  $w$  au point  $x_1$  données respectivement par la résolution du système dynamique et la DNS. La figure 5.9(a), où  $M_V = M_T = 10$ , révèle que malgré la capture d'environ 98% de  $K$  et 99.5% de  $\Theta$ , la similarité DNS-POD n'est pas parfaitement assurée. Il en va de même, à une échelle tout de même moindre, pour  $M_V = M_T = 20$  (fig.5.9(b)) où, pourtant, plus de 99,9% de  $K$  et  $\Theta$  sont pris en compte par les modes concernés. La correspondance DNS-POD, sur un intervalle de temps  $\Delta t = \Delta t_{sto}$ , ne devient satisfaisante qu'à partir de la prise en considération des trente premiers modes-vitesse et température. Parmi les différents couples vérifiant cette condition, la résolution du système d'EDO pour  $(M_V = 50, M_T = 40)$  (fig.(5.9(c))) permet d'obtenir cette bonne reproduction.

Cependant, qu'advient-il si nous considérons un intervalle de temps plus élevé ? Pour cela, nous considérons désormais  $\Delta t \sim 3\Delta t_{sto}$ . Nous constatons ainsi que parmi les couples  $(M_V, M_T)$  satisfaisant le critère de correspondance DNS-POD sur  $\Delta t = \Delta t_{sto}$ , seuls désormais les couples vérifiant  $M_V > 40$  et  $M_T > 40$  permettent une assez bonne reproductibilité DNS-POD sur un temps plus long. Les figures 5.10(a) et 5.10(b) où respectivement,  $(M_V = M_T = 40)$  et  $(M_V = 50, M_T = 40)$  corroborent cette remarque.

En conclusion, afin d'avoir un système d'EDO valide, il est nécessaire au préalable de vérifier, au stade local ( $Gr_{POD} = Gr_{DNS}$ ), que la concordance entre POD et DNS soit valable pour des temps courts et plus longs. Il semble nécessaire de ce fait, de prendre en considération les modes les plus énergétiques, mais aussi de ne pas forcément omettre les plus faibles.

Les systèmes d'EDO étant très sensibles au nombre de modes, il faut effectuer de nombreux tests avec différentes valeurs de  $M_V$  et  $M_T$  afin de déterminer celui qui peut être le plus adapté au cas étudié.

### Note pratique sur la démarche en trois étapes de la POD

Afin d'optimiser l'étude POD, la démarche adoptée peut être divisée en trois temps :

- Tout d'abord, à partir des *nsnap* snapshots récoltés par la DNS, on se borne à calculer les matrices de corrélation basées sur les fluctuations de vitesse et de température. On extrait ainsi les valeurs propres et les vecteurs propres associés d'où l'obtention des modes-vitesse et température de l'écoulement (de même que le pourcentage d'énergie fluctuante  $K$  et  $\Theta$  capturée par chacun d'eux). De plus, cette étape nous permet d'obtenir le champ moyen  $(\bar{v}, \bar{T})$  de l'écoulement nécessaire à la construction du système d'EDO intervenant dans la deuxième étape. Enfin, on détermine aussi de façon théorique d'après l'équation (3.48) les coefficients temporels  $a_i(t)$  et  $b_i(t)$ . Ces derniers nous donnent en particulier les valeurs initiales  $a_i(0)$  et  $b_i(0)$  nécessaires à la future résolution du système d'EDO réalisée dans la troisième étape.
- La seconde étape procède à la construction de toutes les matrices du système d'EDO. En regardant auparavant les pourcentages de capture de  $K$  et  $\Theta$  par les différents modes  $\sigma_V^i$  et  $\sigma_T^i$ , on se fixe une valeur  $M_V$  et  $M_T$  pour cette construction. Il ne faut pas hésiter à considérer les très petites structures, c'est-à-dire prendre des valeurs  $(M_{Vmax}, M_{Tmax})$  du couple  $(M_V, M_T)$  élevées.
- En effet, et ceci constitue la dernière étape, une fois obtenu le système global d'EDO pour  $M_{Vmax}$  et  $M_{Tmax}$  modes, nous n'avons qu'à choisir le nombre de modes retenus avec  $M_V \leq M_{Vmax}$  et  $M_T \leq M_{Tmax}$  : la résolution est alors rapide même pour  $M_V$  et  $M_T$  élevés.

On adoptera une démarche similaire pour la méthode- $\alpha$ .

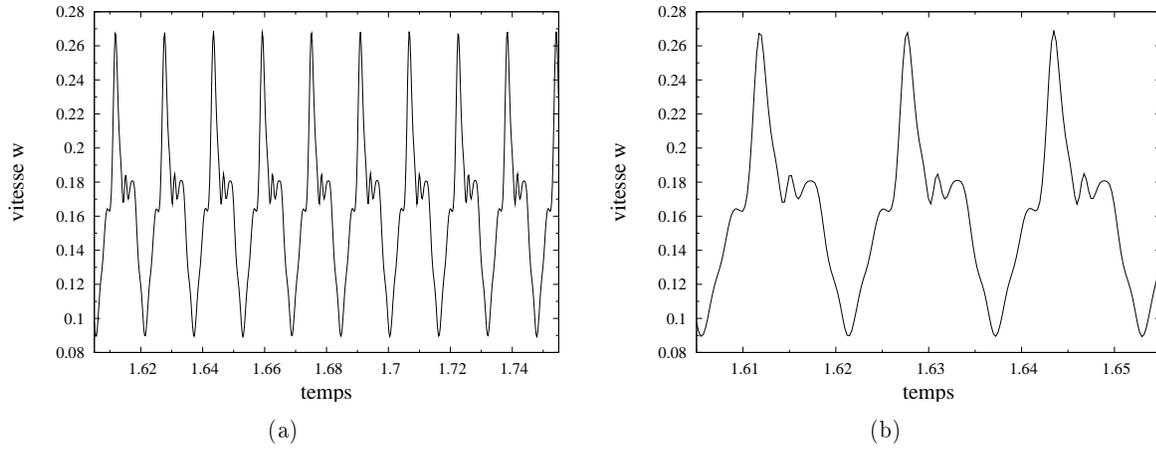


FIG. 5.6 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage (fig. 5.6(a)). Fenêtre de stockage pour l'étude POD (fig. 5.6(b)) ( $A = 2, Gr = 440000, Pr = 0.026$ ).

	Modes-Vitesse $\sigma_V^i$			Modes-Température $\sigma_T^i$	
	%age du mode	%age cumulé		%age du mode	%age cumulé
mode n°1	33.8900	33.8900	mode n°1	39.6235	39.6235
mode n°2	16.9491	50.8391	mode n°2	21.5289	61.1524
mode n°3	15.9724	66.8114	mode n°3	15.5222	76.6746
mode n°4	8.8238	75.6352	mode n°4	6.7679	83.4425
mode n°5	5.8855	81.5208	mode n°5	5.5453	88.9878
mode n°6	5.6122	87.1330	mode n°6	3.6674	92.6552
mode n°7	3.6043	90.7373	mode n°7	2.8250	95.4802
mode n°8	3.4603	94.1976	mode n°8	2.0839	97.5641
mode n°9	2.0673	96.2649	mode n°9	1.1406	99.5554
mode n°10	1.9281	98.1930	mode n°10	0.8507	99.5554
mode n°20	0.0253	99.9373	mode n°20	0.0017	99.9964
mode n°30	0.0008	99.9965	mode n°30	0.0001	99.9998
mode n°40	0.0001	99.9995	mode n°40	0.0000	100.0000
mode n°50	.0000	99.9999			
mode n°60	.0000	100.0000			

TAB. 5.2 – Pourcentage d'énergie cinétique et thermique fluctuante capturée par chaque mode  $\sigma_V^i$  ( $i = 1, \dots, 10$  puis  $i = 20, 30, 40, 50, 60$ ) et  $\sigma_T^i$  ( $i = 1, \dots, 10$  puis  $i = 20, 30, 40$ ) et pourcentage cumulé ( $A = 2, Gr = 440000, n_{snap} = 1000, i_{psnap} = 5$ ).

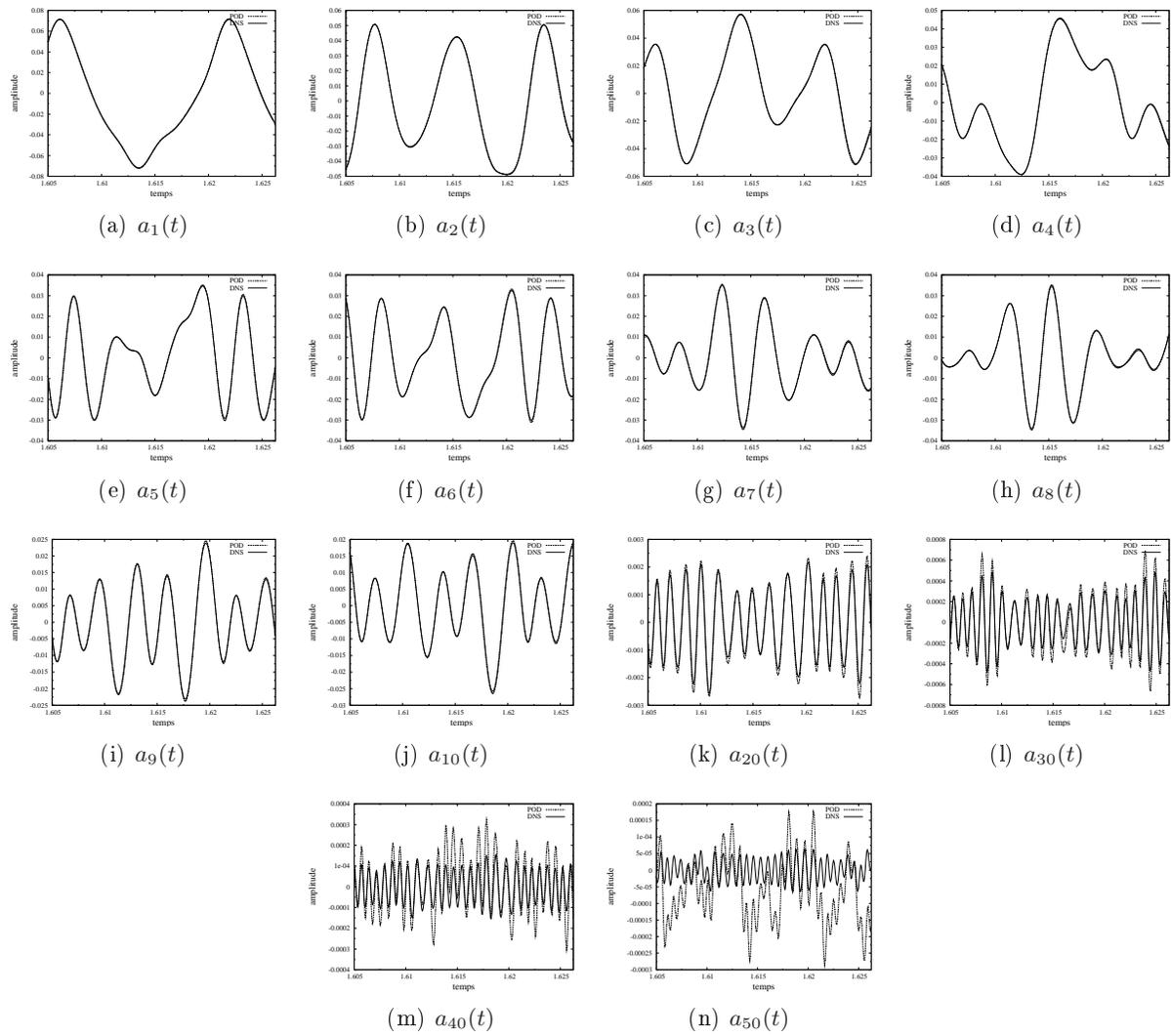


FIG. 5.7 – Évolution temporelle des coefficients  $a_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 10$  puis  $i = 20, 30, 40, 50$ ) évalués à partir des résultats DNS et par résolution du système dynamique réduit obtenu par la projection sur ( $M_V = 50, M_T = 40$ ) modes ( $A = 2, Pr = 0.026, Gr = 440000, n_{snap} = 1000, ipsnap = 5$ ).

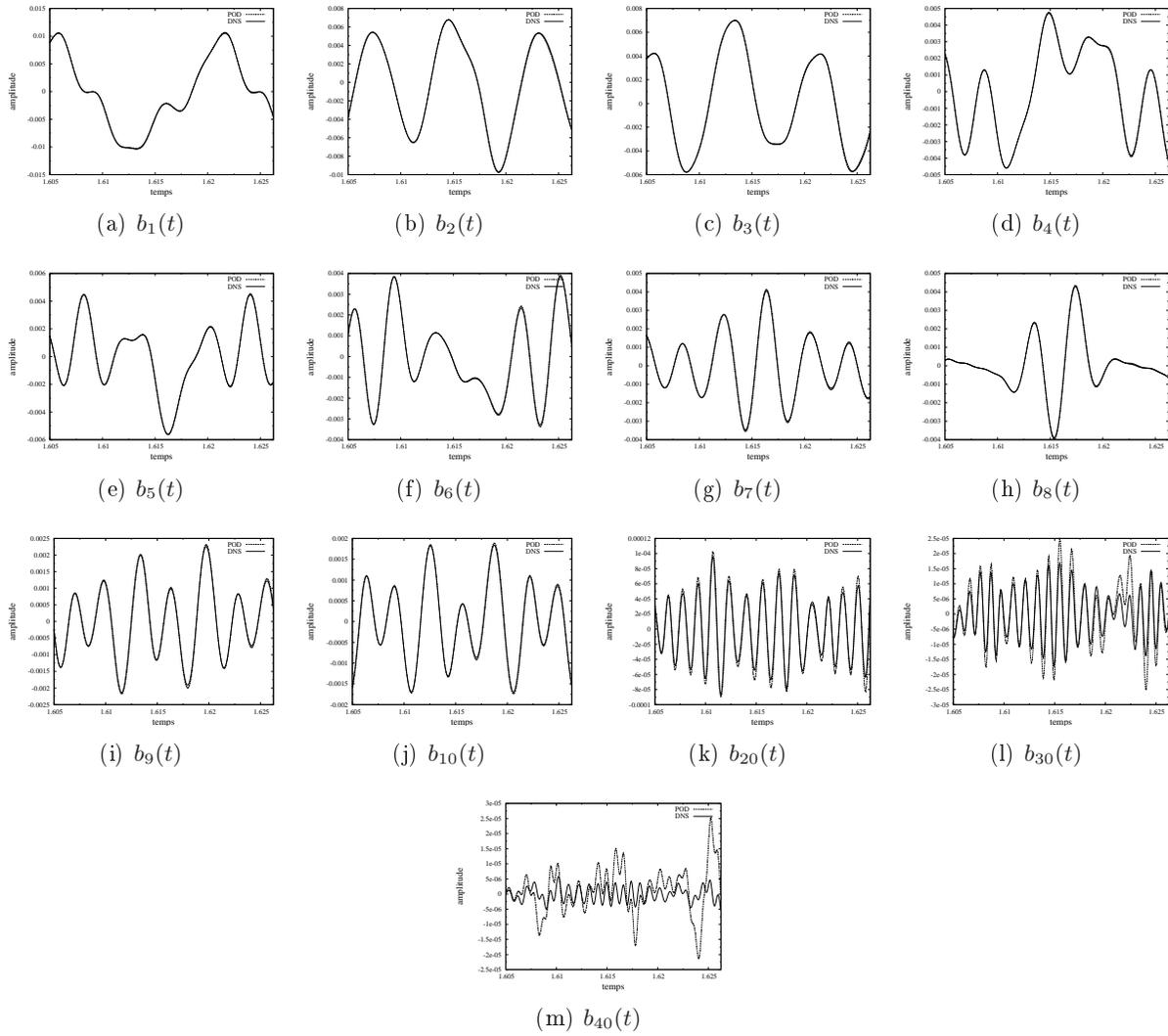


FIG. 5.8 – Évolution temporelle des coefficients  $b_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 10$  puis  $i = 20, 30, 40$ ) évalués à partir des résultats DNS et par résolution du système dynamique réduit obtenu par la projection sur ( $M_V = 50, M_T = 40$ ) modes ( $A = 2, Pr = 0.026, Gr = 440000, n_{snap} = 1000, ipsnap = 5$ ).

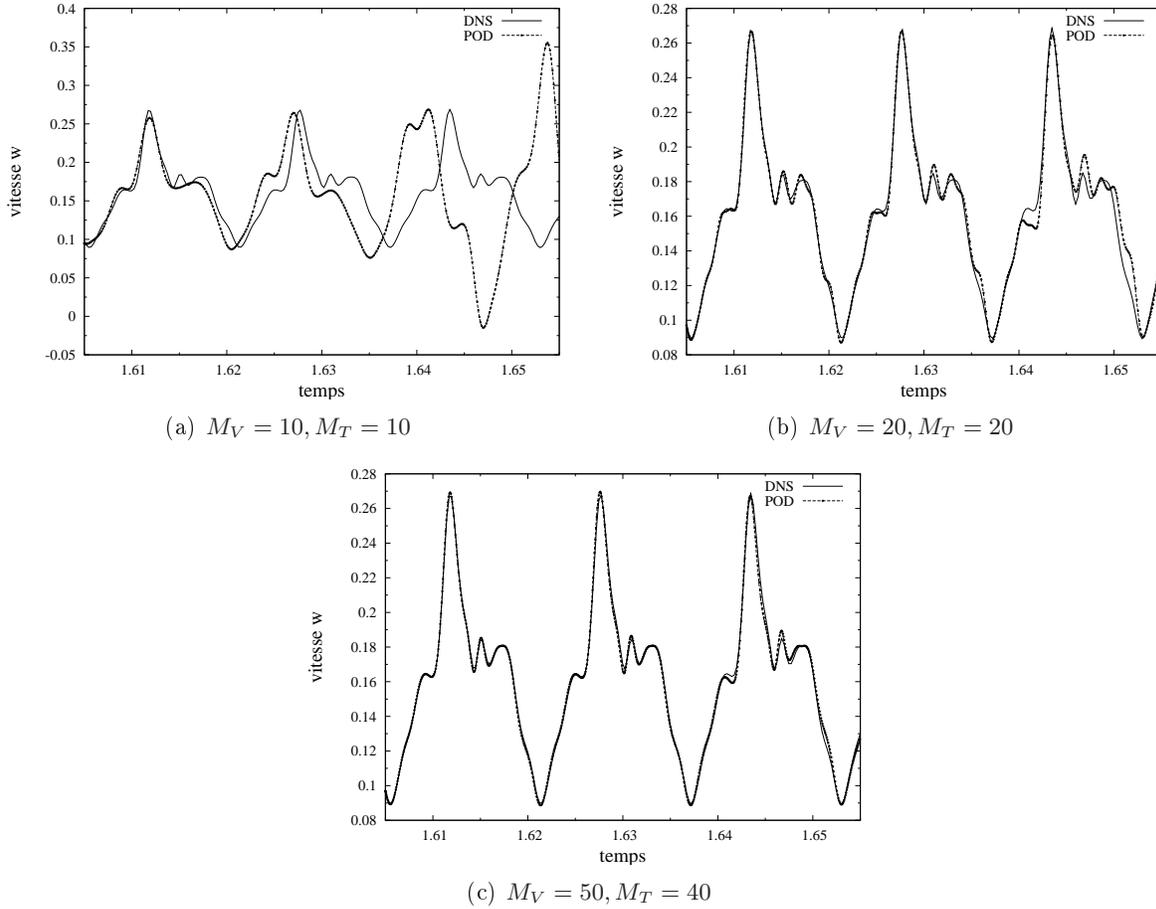


FIG. 5.9 – Évolutions temporelles sur  $\Delta t = \Delta t_{sto}$  de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage évaluées à partir des résultats DNS et par résolution du système dynamique réduit obtenu par la projection sur  $(M_V = 10, M_T = 10)$  (fig. 5.9(a)),  $(M_V = 20, M_T = 20)$  (fig. 5.9(b)) et  $(M_V = 50, M_T = 40)$  (fig. 5.9(c)) modes ( $A = 2, Pr = 0,026, Gr = 440000, n_{snap} = 1000, i_{psnap} = 5$ ).

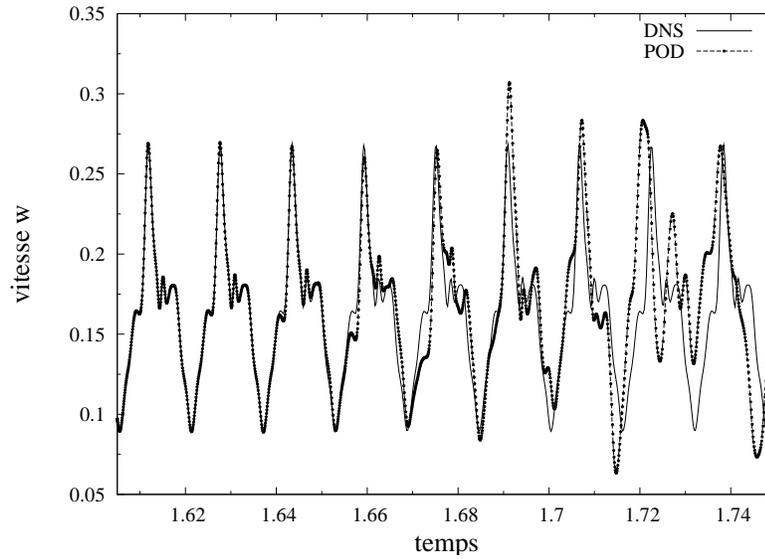
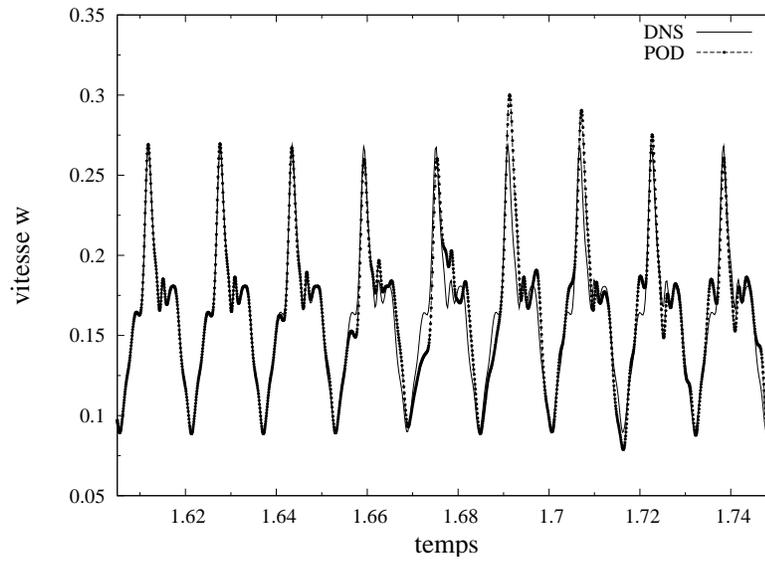

 (a)  $M_V = 40, M_T = 40$ 

 (b)  $M_V = 50, M_T = 40$ 

FIG. 5.10 – Évolutions temporelles sur  $\Delta t \sim 3\Delta t_{sto}$  de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage évaluées à partir des résultats DNS et par résolution du système dynamique réduit obtenu par la projection sur  $(M_V = 40, M_T = 40)$  (fig.5.10(a)) et  $(M_V = 50, M_T = 40)$  (fig.5.10(b)) modes ( $A = 2, Pr = 0.026, Gr = 440000, nsnap = 1000, ipsnap = 5$ ).

### 5.2.2 Emploi de la méthode- $\alpha$

Dans le but de déterminer une comparaison possible entre méthode-VT et méthode- $\alpha$ , nous considérons de nouveau le cas étudié précédemment. Le tableau 5.3 récapitule le pourcentage d'énergie fluctuante des dix premiers modes ainsi que des modes n°20, 30, 40 et 50.

	Modes $\sigma^i$	
	pourcentage du mode	pourcentage cumulé
mode n°1	35.9569	35.9569
mode n°2	18.9719	54.9288
mode n°3	15.6083	70.5371
mode n°4	8.2225	78.7596
mode n°5	5.6992	84.4588
mode n°6	4.9585	89.4173
mode n°7	3.2569	3.2569
mode n°8	2.8881	95.5622
mode n°9	1.7505	97.3127
mode n°10	1.5169	98.8297
mode n°20	0.0138	99.9660
mode n°30	0.0004	99.9978
mode n°40	0.0001	99.9997
mode n°50	0.0000	$\sim 100.0000$

TAB. 5.3 – Pourcentage d'énergie fluctuante capturée par chaque mode  $\sigma^i$  ( $i = 1, \dots, 10$  puis  $i = 20, 30, 40, 50$ ) et pourcentage cumulé - méthode- $\alpha$  - ( $A = 2, Gr = 440000, n_{snap} = 1000, ipsnap = 5$ ).

Afin de considérer toutes les échelles du problème, nous décidons dans un premier temps de construire le système dynamique en projetant les équations du système sur  $M = 50$  modes. Si l'on compare l'évolution temporelle des coefficients  $a_i(t)$  donnée par la DNS d'une part et par la POD d'autre part, on constate sur la figure 5.11 de nouveau une très bonne similarité sur un intervalle de temps  $\Delta t = \Delta t_{sto}$  et ce même pour des coefficients temporels d'indice  $i$  élevés. À l'instar de la méthode-VT, on constate que si l'on capture plus de 98,8% de l'énergie fluctuante avec  $M = 10$  (fig.5.12(a)) et même plus de 99,5% en prenant  $M = 20$  (fig.5.12(b)), l'allure globale de la composante  $w$  de la vitesse est certes correctement reproduite mais il demeure quelques imperfections. Nous obtenons, sur  $\Delta t = \Delta t_{sto}$ , une excellente reproduction en considérant de nouveau au minimum les trente premiers modes (sur fig.5.12(c),  $M = 50$ ). Notre choix doit encore s'affiner si l'on considère un temps plus long tel que  $\Delta t \sim 3\Delta t_{sto}$ . Effectivement, la reconstruction de  $w$  pour  $M = 40$  (fig.5.13(a)) est similaire à la DNS pour des temps courts mais pour des temps plus longs, elle présente simultanément des variations d'amplitude et surtout de fréquence. Seule la considération d'au moins  $M = 50$  modes (fig.5.13(b)) permet une bonne similarité des signaux DNS et POD et ce malgré un léger déphasage et une croissance de l'amplitude avec le temps. Ainsi, au regard de la reproduction *DNS – POD* pour des temps courts, nous ne pouvons établir de comparatif sur l'usage des deux méthodes POD utilisées. Le distingo se réalise sur une évolution

temporelle plus longue : en se focalisant sur les figures 5.13(b) et 5.10(b), la méthode-VT s'avère plus robuste que la méthode- $\alpha$ .

Doit-on pour autant conclure définitivement que la méthode-VT est "meilleure" que la méthode- $\alpha$  (relativement à la reconstruction temporelle) et délaisser cette dernière ? Nous verrons dans des exemples ultérieurs que tel n'est pas forcément le cas. En effet, suivant notamment le rapport de forme  $A$  de la cavité, nous relèverons que ce distingo parfois s'amenuise, voire s'inverse.

Avant de tester les capacités prédictives de la POD, nous nous sommes assurés au préalable de sa robustesse au niveau local. Nous allons désormais nous atteler à l'étude de sa capacité prédictive, autrement dit dans quelle mesure et sous quelles conditions pouvons-nous prédire l'évolution d'un écoulement pour une valeur de paramètre, ici le nombre de Grashof  $Gr$ , différente de celle pour laquelle nous avons obtenu les modes de l'écoulement ?

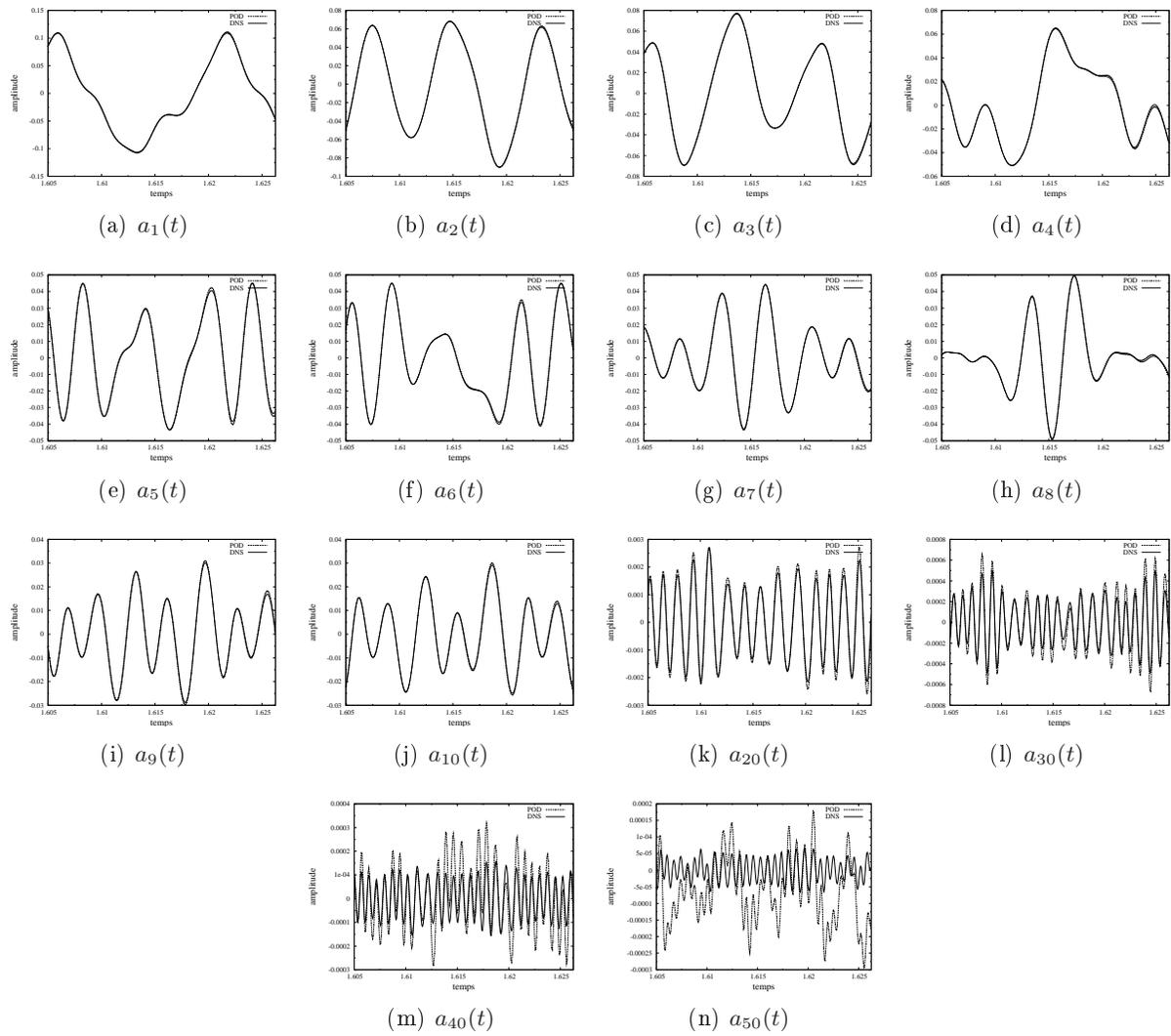


FIG. 5.11 – Évolution temporelle des coefficients  $a_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 10$  puis  $i = 20, 30, 40, 50$ ) évalués à partir des résultats DNS et par résolution du système dynamique réduit obtenu par la projection sur  $M = 50$  modes- méthode- $\alpha$  ( $A = 2, Pr = 0,026, Gr = 440000, n_{snap} = 1000, ip_{snap} = 5$ ).

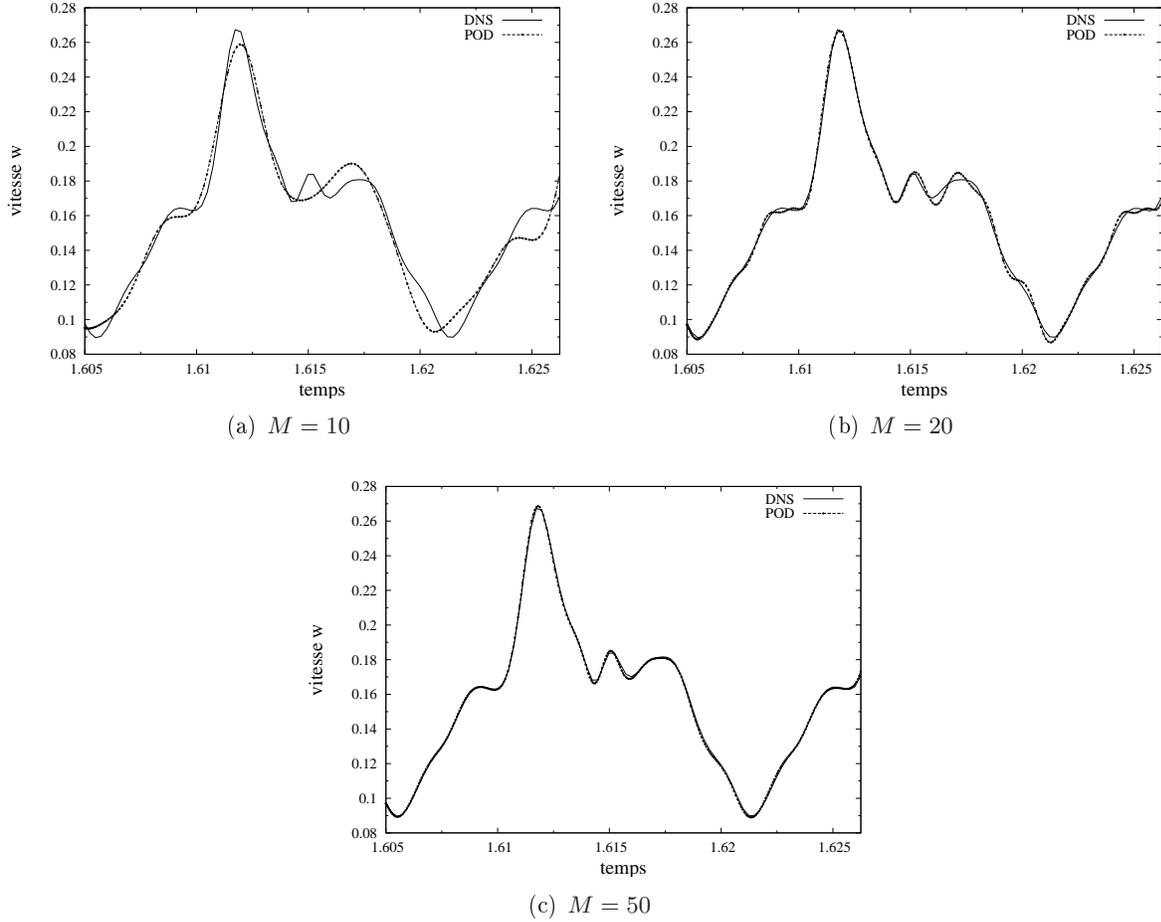


FIG. 5.12 – Évolutions temporelles sur  $\Delta t = \Delta t_{sto}$  de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage évaluées à partir des résultats DNS et par résolution du système dynamique réduit obtenu par la projection sur  $M = 10$  modes (fig.5.12(a)),  $M = 20$  modes (fig.5.12(b)) et  $M = 50$  (fig.5.12(c)) ( $A = 2$ ,  $Pr = 0,026$ ,  $Gr = 440000$ ,  $nsnap = 1000$ ,  $ipsnap = 5$ ).

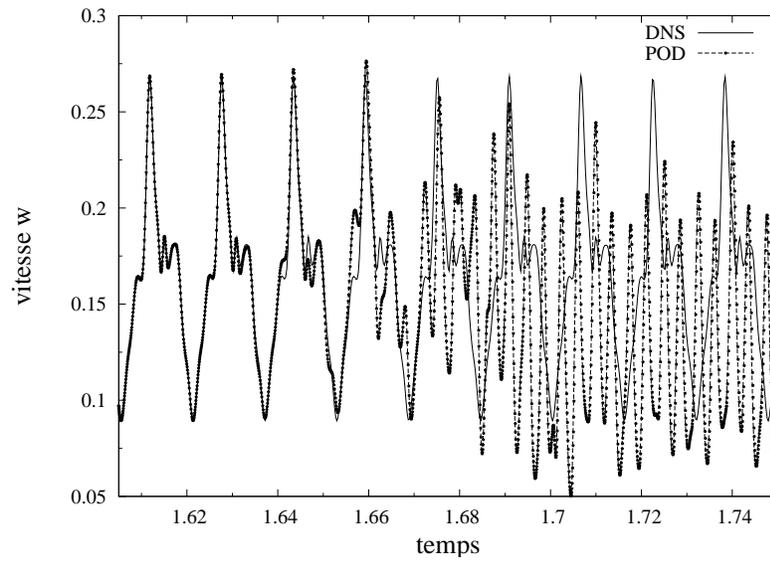
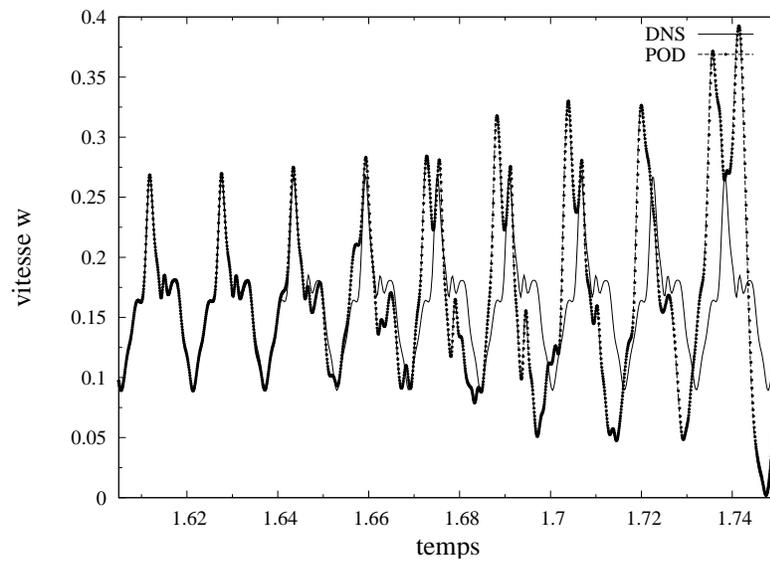
(a)  $M = 40$ (b)  $M = 50$ 

FIG. 5.13 – Évolutions temporelles sur  $\Delta t \sim 3\Delta t_{sto}$  de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage évaluées à partir des résultats DNS et par résolution du système dynamique réduit obtenu par la projection sur  $M = 40$  (fig. 5.13(a)) et  $M = 50$  (fig. 5.13(b)) modes ( $A = 2, Pr = 0,026, Gr = 440000, n_{snap} = 1000, ip_{snap} = 5$ ).

### 5.3 Capacités prédictives de la P.O.D.

#### 5.3.1 Détermination de la dynamique de l'écoulement pour $Gr \neq Gr_0$

Nous choisissons tout d'abord de construire le système d'ODE à partir des résultats DNS obtenus pour le cas  $Gr_0 = 280000$  (nous rappelons que  $Gr_0$  est le cas référence). La considération de  $M_V = M_T = 9$  modes-vitesse et température permet de capturer plus de 99,99% de  $K$  et  $\Theta$ . Sur la figure 5.14 est représentée la vitesse prédite par le système d'ODE pour  $Gr = 262000$  pour  $M_V = M_T = 6$ . En la comparant aux résultats DNS, nous pouvons constater que le système d'ODE peut reproduire le comportement DNS. En effet, le comportement oscillatoire ainsi que les fréquences sont bien reproduites, seule demeure une erreur sur l'amplitude. La figure 5.15 prouve que la prédiction par les ODE se maintient pour un temps éloigné du temps initial et ne subit pas d'altération d'amplitude ou de fréquence pour des temps longs.

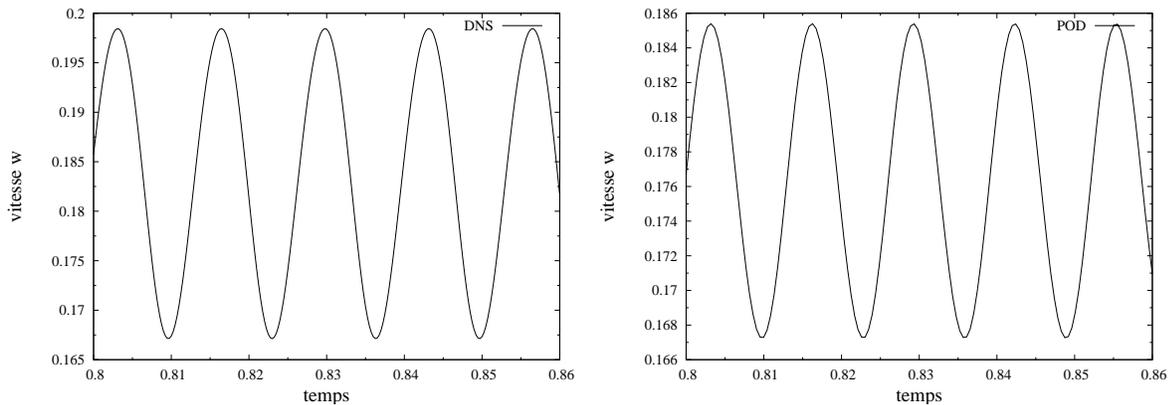


FIG. 5.14 – Évolution temporelle de la composante de la vitesse  $w$  au point  $x_1$  évaluée par la DNS et prédite par le système d'ODE pour le cas  $Gr = 262000$ . Le système d'ODE est construit à partir du cas référence  $Gr_0 = 280000$ .

La prédiction, à partir d'un système d'ODE construit pour un cas oscillatoire de référence  $Gr_0$  assez régulier, s'avère tout à fait correcte. Nous considérons maintenant un cas de référence présentant un régime oscillatoire plus complexe (fig.5.16),  $Gr_0 = 320000$ . Le tableau 5.4 récapitule le pourcentage de  $K$  capturé par les cinq premiers modes-vitesse puis par les modes n°20, 30, 40 et 50. Bien que l'on ait toujours deux modes principaux qui concentrent plus de 88% de  $K$ , on constate qu'il est nécessaire de considérer plus de 30 modes pour avoir plus de 99,95% de  $K$ . Pour le cas de la température, plus de 15 modes sont nécessaires pour capturer la même proportion de  $\Theta$ . Sur la figure 5.16, nous nous sommes également assurés au préalable que la reconstruction locale ( $Gr = Gr_0$ ) par le système d'ODE était correcte ( $M_V = 30, M_T = 20$ ) aussi bien pour la vitesse que pour la température. Une étude sur l'influence du nombre de modes nécessaires pour reproduire cette similarité DNS-POD sur des temps longs révèle qu'il faut au moins considérer  $M_V = 14$  et  $M_T = 14$ .

Désormais, à partir du système dynamique construit pour  $Gr_0 = 320000$ , nous allons tenter de reproduire l'écoulement pour  $Gr = 280000$ . A partir de ( $M_V = 10, M_T = 10$ ), le compor-

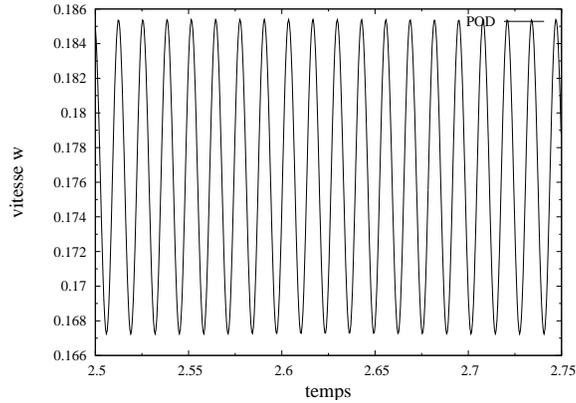


FIG. 5.15 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  prédite par le système d'ODE pour le cas  $Gr = 262000$  pour des temps longs. Le système d'ODE est construit à partir du cas référence  $Gr_0 = 280000$ .

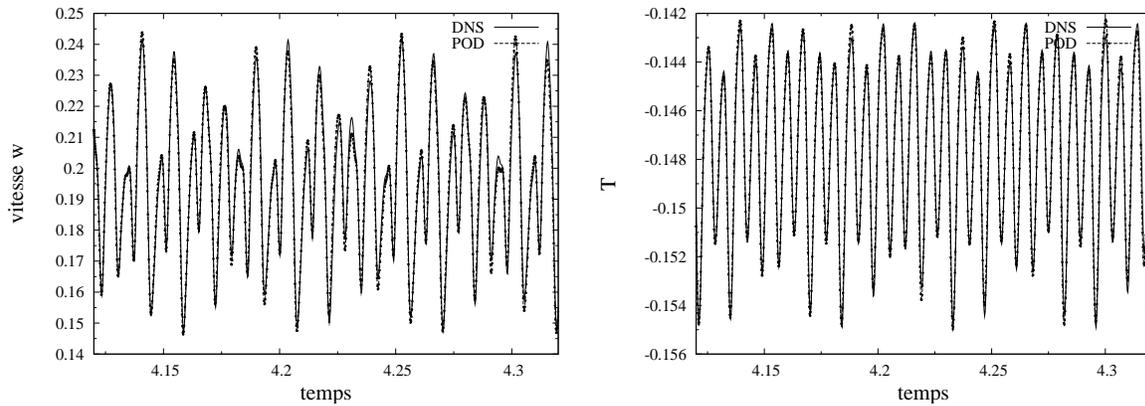


FIG. 5.16 – Évolutions temporelles de la composante  $w$  de la vitesse et de la température  $T$  au point  $x_1$  évaluées par la DNS et prédite par le système d'ODE pour le cas  $Gr = 320000$  ( $M_V = 30, M_T = 20$ ). Le système d'ODE est construit à partir du cas référence  $Gr_0 = 320000$ .

tement oscillatoire observé par la POD est comparable à la DNS. Les figures 5.17 et 5.18 pour ( $M_V = 20, M_T = 20$ ), comparant l'évolution temporelle de la vitesse et de la température entre DNS et POD illustrent cette similarité des comportements et en particulier au niveau de la fréquence ; seule la prédiction des amplitudes notamment de la vitesse demeure relativement imprécise. Si l'on considère un nombre de modes plus élevé , à partir de  $M_V = M_T = 30$ , le système d'ODE devient instable. les problèmes d'amplitude s'accroissent. Pour un nombre de modes encore plus élevé comme ( $M_V = 60, M_T = 60$ ), le système d'ODE conduit même à une solution stationnaire.

La prédiction du cas  $Gr = 280000$  peut-elle être encore améliorée en considérant de nouvelles voies possibles ? En effet, nous sommes en droit de nous interroger s'il n'est pas possible d'améliorer la reproduction des amplitudes. Notre première idée consiste à changer de champ moyen : nous

	Modes-Vitesse $\sigma_V^i$			Modes-Température $\sigma_T^i$	
	%age du mode	%age cumulé		%age du mode	%age cumulé
mode n°1	48.6769	48.6769	mode n°1	49.1553	49.1553
mode n°2	40.1852	88.8621	mode n°2	43.8659	93.0212
mode n°3	4.7540	93.6161	mode n°3	3.1654	96.1866
mode n°4	2.9123	96.5284	mode n°4	2.0991	98.2857
mode n°5	0.2911	97.2227	mode n°5	0.6681	98.9538
mode n°10	0.0175	99.5106	mode n°10	0.0827	99.8736
mode n°20	0.0026	99.9180	mode n°20	0.0015	99.9901
mode n°30	0.0006	99.9824	mode n°30	0.0004	99.9985
mode n°40	0.0002	99.9946	mode n°40	0.0001	99.9996
mode n°50	0.0001	99.9982			

TAB. 5.4 – Pourcentage d'énergie cinétique et thermique fluctuante capturée par chaque mode  $\sigma_V^i$  ( $i = 1, \dots, 5$  puis  $i = 20, 30, 40, 50$ ) et  $\sigma_T^i$  ( $i = 1, \dots, 10$  puis  $i = 20, 30, 40$ ) et pourcentage cumulé ( $A = 2, Gr = 320000, nsnap = 1000, ipsnap = 20$ ).

allons reconstruire les matrices de notre système réduit en considérant toujours les modes obtenus pour  $Gr = 320000$  mais en faisant intervenir le champ moyen évalué pour sa part à  $Gr = 280000$ . Les figures 5.19 et 5.20 comparent respectivement la vitesse et la température données par la DNS et la POD. On constate que le changement du champ moyen n'a pas d'impact significatif sur la correction de l'amplitude.

Une autre voie envisageable est la façon de calculer les termes linéaires faisant intervenir l'évaluation du terme  $\langle \sigma_V^i, \nabla^2 \sigma_V^j \rangle$ . Ce terme est calculé de la manière suivante :

$$\langle \sigma_V^i, \nabla^2 \sigma_V^j \rangle = \langle \nabla \sigma_V^i, \nabla \sigma_V^j \rangle \quad (5.3)$$

Considérons désormais le fait que :  $\nabla^2 \sigma_V^j = \nabla(\nabla \cdot \sigma_V^j) - \nabla \times \nabla \times \sigma_V^j$ . L'évaluation du terme précédent, en tenant compte que  $\nabla \cdot \sigma_V^j = 0$ , se réduit désormais à :

$$\langle \sigma_V^i, \nabla^2 \sigma_V^j \rangle = - \langle \sigma_V^i, \nabla \times \nabla \times \sigma_V^j \rangle \quad (5.4)$$

Les figures 5.21 et 5.22 montrent que cette modification n'apporte de nouveau pas d'amélioration significative quant à la correction sur l'amplitude.

Jusqu'ici, nous avons utilisé la méthode-VT pour évaluer les prédictions de la POD. Une étude similaire a été réalisée pour tester les capacités prédictives de la méthode- $\alpha$  sur les cas précédents, à savoir les cas de référence  $Gr_0 = 280000$  et  $Gr_0 = 320000$ . L'emploi de la méthode- $\alpha$ , en tant qu'outil prédictif, est réalisable mais sur une plage de nombre de Grashof plus restreinte qu'avec la méthode-VT.

Dans la même optique, il s'avère intéressant d'utiliser le système d'ODE afin de déterminer la dynamique de notre système autrement dit de déterminer le diagramme de bifurcation correspondant.

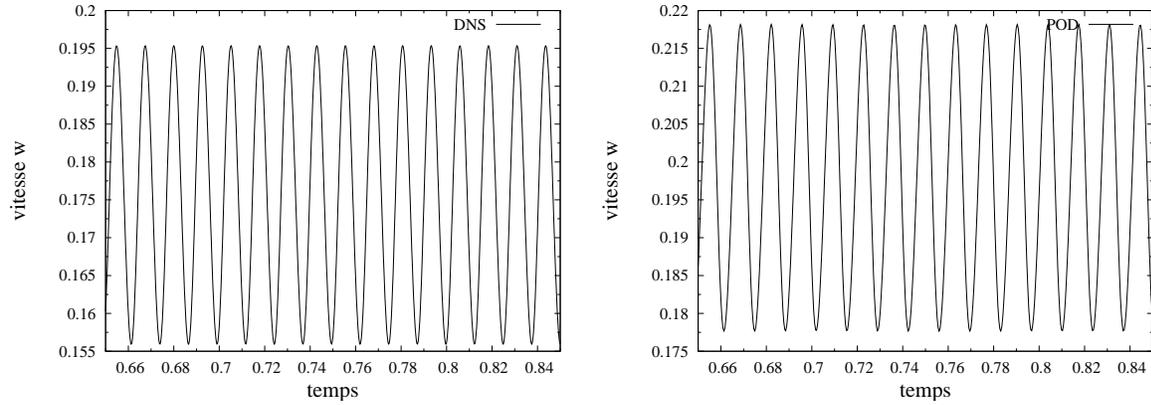


FIG. 5.17 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  évaluée par la DNS et prédite par le système d'ODE pour le cas  $Gr = 280000$  ( $M_V = 20, M_T = 20$ ). Le système d'ODE est construit à partir du cas référence  $Gr_0 = 320000$ .

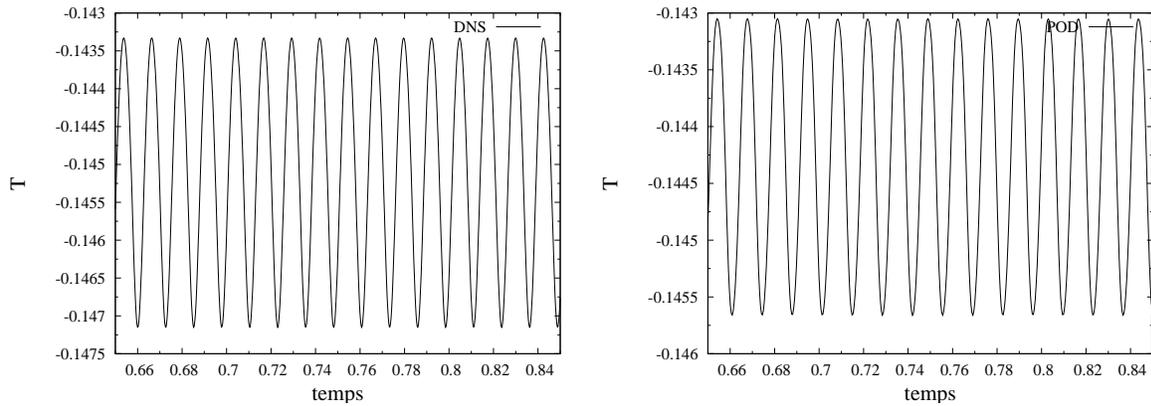


FIG. 5.18 – Évolution temporelle de la température  $T$  au point  $x_1$  évaluée par la DNS et prédite par le système d'ODE pour le cas  $Gr = 280000$  ( $M_V = 20, M_T = 20$ ). Le système d'ODE est construit à partir du cas référence  $Gr_0 = 320000$ .

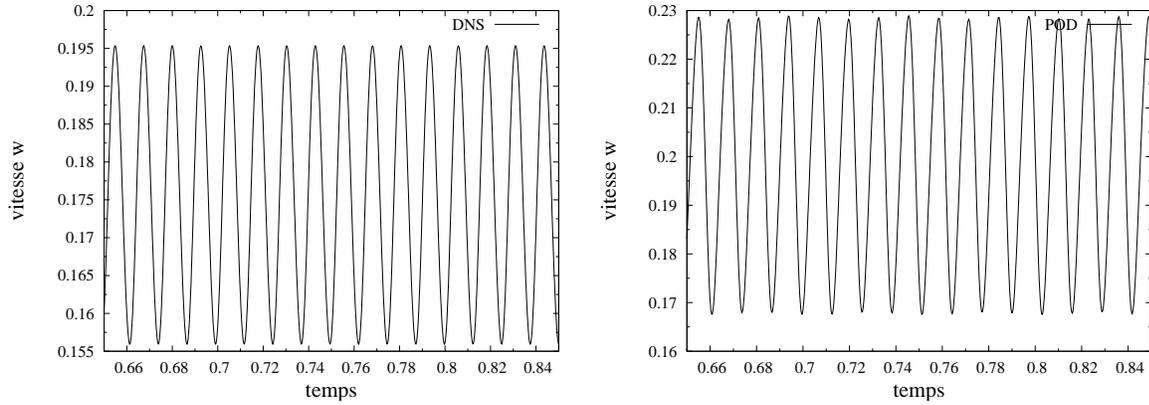


FIG. 5.19 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  évaluée par la DNS et prédite par le système d'ODE pour le cas  $Gr = 280000$  ( $M_V = 20, M_T = 20$ ). Le système d'ODE est construit à partir du cas référence  $Gr_0 = 320000$  mais avec le champ moyen de  $Gr = 280000$ .

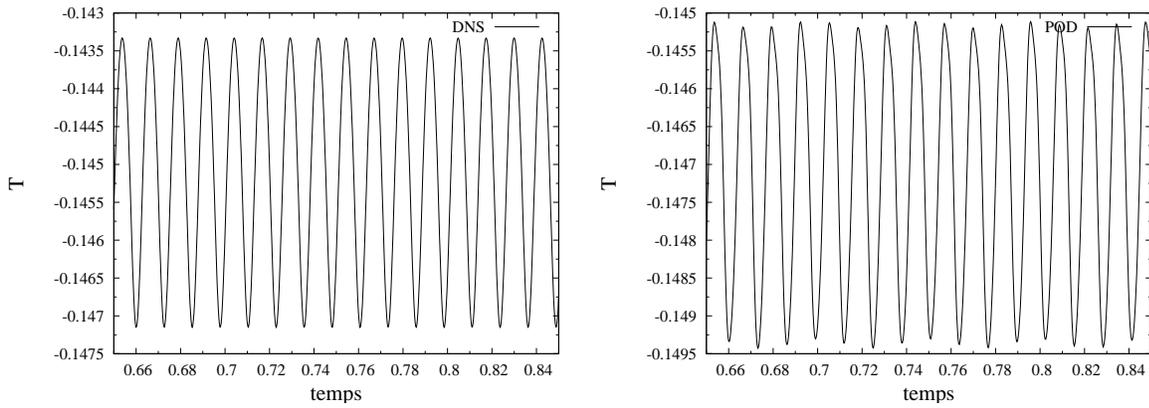


FIG. 5.20 – Évolution temporelle de la température  $T$  au point  $x_1$  évaluée par la DNS et prédite par le système d'ODE pour le cas  $Gr = 280000$  ( $M_V = 20, M_T = 20$ ). Le système d'ODE est construit à partir du cas référence  $Gr_0 = 320000$  mais avec le champ moyen de  $Gr = 280000$ .

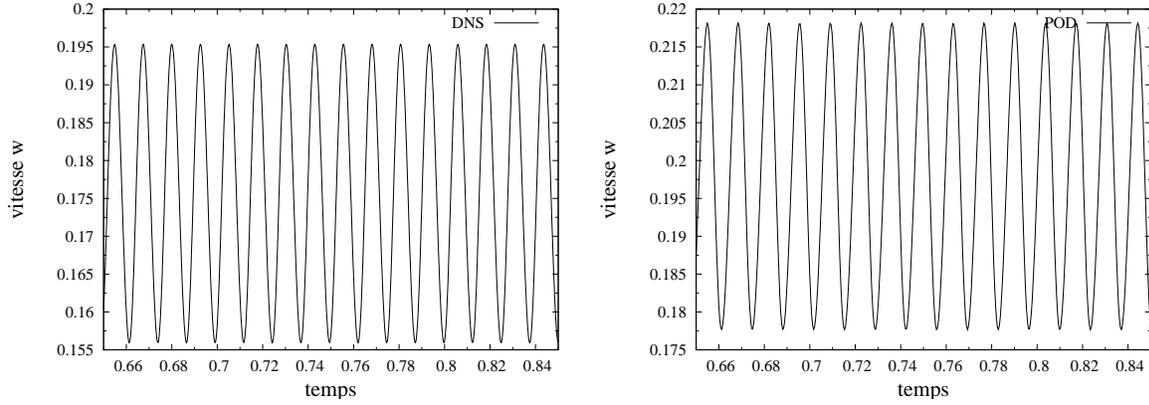


FIG. 5.21 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  évaluée par la DNS et prédite par le système d'ODE pour le cas  $Gr = 280000$  ( $M_V = 20, M_T = 20$ ). Le système d'ODE est construit à partir du cas référence  $Gr_0 = 320000$  en considérant la décomposition du terme linéaire  $\nabla^2 \sigma_V^j = \nabla(\nabla \cdot \sigma_V^j) - \nabla \times \nabla \times \sigma_V^j$ .

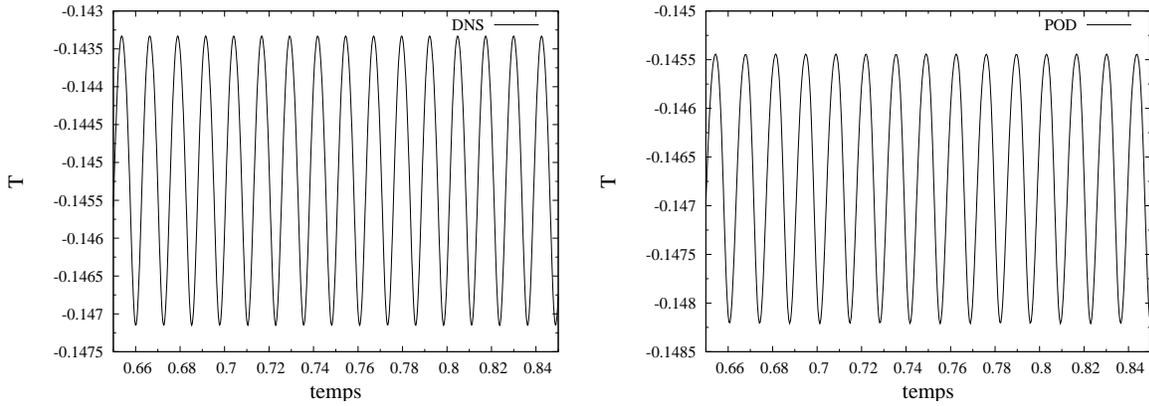


FIG. 5.22 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  évaluée par la DNS et prédite par le système d'ODE pour le cas  $Gr = 280000$  ( $M_V = 20, M_T = 20$ ). Le système d'ODE est construit à partir du cas référence  $Gr_0 = 320000$  en considérant la décomposition du terme linéaire  $\nabla^2 \sigma_V^j = \nabla(\nabla \cdot \sigma_V^j) - \nabla \times \nabla \times \sigma_V^j$ .

### 5.3.2 Diagramme de bifurcation

A cette fin, nous utilisons le logiciel AUTO (recherche par la méthode de continuation des seuils d'instabilités à partir de la résolution du système d'EDO et obtention du diagramme de bifurcation) et considérons le système dynamique construit à  $Gr_0 = 240000$  pour  $(M_V = 6, M_T = 6)$ . La représentation du diagramme de bifurcation est donnée sur la figure 5.23. On note l'émergence d'une solution stable oscillatoire à partir d'une solution stable stationnaire à travers une bifurcation de Hopf dont le seuil de déclenchement est estimé à  $Gr_{c_{ODE}} = 235625$ . Cette valeur de  $Gr_c$  est à rapprocher de celle de la DNS où l'on avait obtenu  $Gr_{c_{DNS}} = 234000$ . Le pourcentage d'erreur relative par rapport à la DNS est donc de l'ordre de 0,7%. L'accès aux valeurs propres nous permet d'obtenir la pulsation  $\omega_c$  (partie imaginaire de la valeur propre) de l'instabilité oscillatoire. On obtient  $\omega_c = 439.9$  ce qui correspond à une fréquence  $f_{0_{ODE}} = \omega_c/2\pi = 70.01$ . La DNS nous a fourni  $f_{0_{DNS}} = 69.7$ ; le pourcentage d'erreur relative est de  $\sim 0,5\%$  et s'avère très faible.

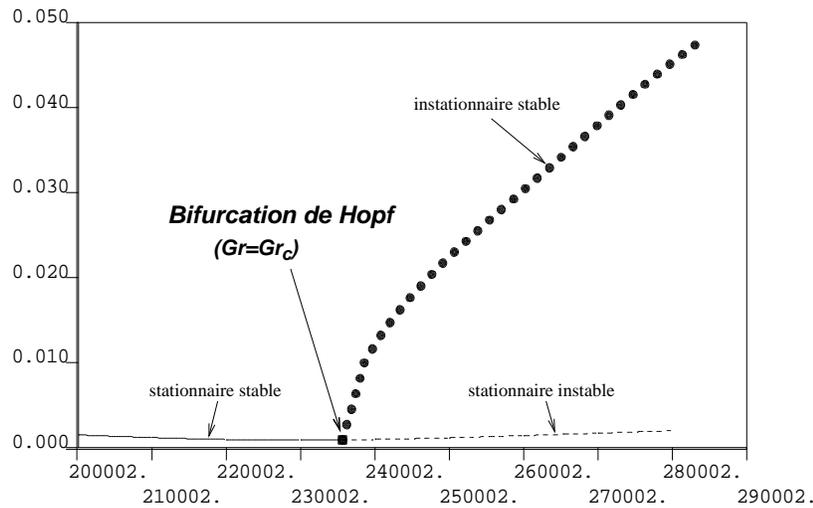


FIG. 5.23 – Diagramme de bifurcation obtenu pour le cas  $(A = 2, Pr = 0.026)$ .



## Influence du rapport de forme

L'étude par D.N.S et P.O.D. de la convection naturelle dans un cylindre rempli d'un fluide caractérisé par  $Pr = 0.026$  s'est bornée jusqu'à présent au seul rapport de forme  $A = 2$ . Nous considérons à présent l'influence de ce paramètre en nous focalisant tout d'abord sur l'étude du cas  $A = 4$ . Par la suite, nous distinguons trois types de rapports de forme  $A$  : modéré ( $A \leq 3$ ), intermédiaire ( $4 \leq A \leq 6$ ) et grand ( $7 \leq A \leq 10$ ). Notre approche par la DNS a pour objectif la détermination des seuils de transition  $Gr_c$  ainsi qu'une caractérisation précise en leur voisinage de la nature et de la structure des régimes d'écoulement.

Ainsi, l'évolution de  $Gr_c$  suivant la valeur de  $A$  devrait a priori, vus les résultats des études bidimensionnelles, décroître de façon monotone en raison d'un confinement moindre avec l'augmentation de  $A$ . Les résultats obtenus révèlent en fait un comportement différent et bien plus complexe et se traduit notamment par l'existence d'écoulements à faible ou haute fréquence suivant la valeur de  $A$ .

### 6.1 D.N.S. pour le rapport de forme $A = 4$

#### 6.1.1 Détermination du seuil critique $Gr_c$

Pour  $A = 4$ , nous nous basons sur un maillage comprenant  $9 \times 9 \times 43$  points par élément (soit au total 34443 points de maillage). Préalablement, nous notons que les différentes simulations réalisées ne nous donnent pas l'existence de bifurcation stationnaire pour ce rapport de forme et ce même pour des temps longs. La bifurcation de Hopf va donc émerger directement de la solution stationnaire présentant les trois symétries du problème. La méthode employée pour trouver la valeur du seuil critique  $Gr_c$  diffère quelque peu de celle utilisée pour  $A = 2$ . La première étape de nos efforts vise, en partant de la solution nulle  $\vec{v} = 0$ , à encadrer la valeur de  $Gr_c$  par une limite inférieure correspondant à un écoulement stationnaire et une limite supérieure correspondant à un écoulement instationnaire. Dans une seconde étape, en initialisant les calculs par une solution instationnaire précédemment évaluée, nous trouvons des solutions oscillatoires pour des valeurs de  $Gr$  inférieures mais proches de la première estimation du seuil. La bifurcation rencontrée est sous-critique ; elle révèle l'existence d'un point tournant pour un nombre de Grashof  $Gr_{tp}$ . La méthode d'extrapolation  $|A_{amp}|^2 \alpha(Gr - Gr_c)$ , valable uniquement pour une bifurcation surcritique et utilisée pour le cas  $A = 2$ , n'est donc plus valide ici en vue de déterminer  $Gr_c$ . Finalement, la réalisation de nombreuses simulations, partant soit de solutions stationnaires ou instationnaires

nous indiquent que les valeurs de  $Gr_c$  et  $Gr_{tp}$  sont très proches. Une bonne approximation du seuil critique est  $Gr_c \sim 179700$ .

Une fois franchi le seuil critique et dans son proche voisinage, le signal oscillatoire est très régulier. Ainsi, pour  $Gr = 180000$ , son amplitude est constante (fig.6.3) et sa fréquence est  $f_0 = 62.25$ . La bifurcation de Hopf rencontrée s'accompagne de la brisure de la symétrie  $S_a$  et donc  $S_c$ . Dans le plan horizontal ( $L_h$ ), ce phénomène instationnaire se manifeste par une très faible oscillation de l'écoulement de part et d'autre de l'axe médian horizontal  $H_t$ . La figure 6.4 représente cet écoulement instationnaire tous les  $\delta t = T/4$  sur une période  $T$ . Pour corroborer cette oscillation autour de l'axe  $H_t$ , nous représentons également l'évolution de la température et de la composante  $w$  de la vitesse ainsi que de leurs fluctuations respectives sur ce même axe au cours d'une période (fig.6.5). On relève que les valeurs instantanées de ces deux quantités physiques sont quasiment superposables à leurs fluctuations pour un temps donné. Les valeurs moyennes  $\bar{w}$  et  $\bar{T}$  sont donc nulles sur l'axe  $H_t$  : le fluide oscille de part et d'autre de cet axe. Nous notons ici une différence avec le cas  $A = 2$  où l'occurrence d'une bifurcation stationnaire pour  $Gr_{bs}$  organise un nouvel écoulement stationnaire autour d'un axe  $H_{t_2}$ . Sur cette nouvelle branche stationnaire émane pour  $Gr_c > Gr_{bs}$  une instabilité oscillatoire se manifestant par une oscillation autour de  $H_{t_2}$ . Par conséquent et pour conclure, l'oscillation de part et d'autre de  $H_t$  pour  $A = 4$  entraîne la similitude de  $w$  et  $w'$  (ainsi que  $T$  et  $T'$ ) sur cet axe, ce qui n'est pas le cas pour  $A = 2$  oscillant de part et d'autre de  $H_{t_2}$ .

Concernant la structure de l'écoulement, elle est représentée par les figures 6.1 et 6.2 dans les plans ( $L_v$ ) et ( $L_h$ ) de la cavité pour le cas stationnaire  $Gr = 170000$ . Nous remarquons sur la figure 6.1 que les centres des vortex secondaires ne sont pas, à la différence du rapport de forme  $A = 2$ , situés sur l'axe ( $Oz$ ) mais qu'ils sont localisés de part et d'autre de cet axe. Toutefois, ce décalage n'est pas trop accentué et il reste possible d'estimer à partir de la figure 6.6(a) la position des vortex secondaires en localisant les abscisses  $z$  où  $v$  est nulle excepté le centre de la cavité. On obtient  $z_1 \simeq 0.54$  ( $z_1/A \simeq 0.135$ ) et  $z_2 \simeq 3.46$  ( $z_2/A \simeq 0.865$ ). En comparant les abscisses relatives ( $z_i/A$ ) ( $i = 1, 2$ ) pour  $A = 2$  et  $A = 4$ , on note que les vortex secondaires, en raison d'un moindre confinement pour  $A = 4$ , se décalent vers les extrémités du cylindre. Leur interaction avec la circulation principale s'affaiblit ce qui explique la diminution du gradient  $(\frac{\partial v}{\partial z})_{(x=0, y=0)}$ . La figure 6.6(b), en la comparant à la figure 4.17(b) pour le cas  $A = 2$ , relève encore l'importance de l'effet de confinement : plus on augmente le rapport de forme, plus l'interaction vortex secondaires-écoulement principal est faible, l'écoulement est moins "entravé" et de ce fait la vitesse  $w$  augmente sur l'axe ( $Oy$ ).

### 6.1.2 Analyse fréquentielle

Comme il a été précédemment évoqué, la fréquence fondamentale de l'oscillation vaut  $f_0 = 62.25$ . Les figures 6.7(a) et 6.7(b), représentant la FFT sur l'axe  $H_t$  réalisée respectivement sur  $w$  et  $T$  confirment cette valeur. Dans le plan ( $L_v$ ), les densités spectrales  $\hat{T}$  et  $\hat{w}$  (fig.6.8(a) et 6.8(b)) associées à cette fréquence  $f_0$  atteignent leur maximum sur la ligne de cisaillement principal  $\frac{\partial w}{\partial y}$  et représentent les zones où les fluctuations  $T'$  et  $w'$  sont les plus conséquentes. Dans le plan ( $L_h$ ) (fig.6.8(c) et 6.8(d)),  $\hat{T}$  et  $\hat{w}$  sont non négligeables uniquement dans le proche voisinage de ( $L_v$ ). En conclusion, pour  $A = 4$  comme pour  $A = 2$  mais de manière encore plus accentuée, la localisation des zones principales de fluctuation de l'écoulement se situe au voisinage de ( $L_v$ ) le long de la ligne de cisaillement vertical de la composante horizontale de la vitesse. Cependant, la répartition de la densité spectrale ne nous donne pas encore toutes les informations nécessaires pour déterminer l'origine de l'instabilité oscillatoire. Nous verrons ultérieurement en réalisant une

étude par analyse énergétique que les scénarii entre  $A = 4$  et  $A = 2$  sont effectivement légèrement différents.

### 6.1.3 Effet du nombre de Grashof

A la différence du rapport de forme  $A = 2$ , une faible variation du nombre de Grashof  $Gr$  entraîne une forte déstabilisation de l'écoulement. Ainsi, sur la figure 6.9 représentant respectivement l'évolution temporelle de la vitesse  $w$  et de la température pour  $Gr = 181000$ , le signal ne manifeste plus d'amplitude  $A_{amp}$  constante. Une analyse fréquentielle (fig.6.10) confirme, en plus de la fréquence fondamentale  $f_0$ , l'apparition de l'harmonique  $f_1 = f_0/2$ . En visualisant l'allure de la fluctuation  $T'$  le long de l'axe  $H_t$  (fig.6.11), on constate en effet que pour  $Gr = 181000$ , la température passe par la même valeur tous les  $\Delta t = 2T$ . En augmentant le nombre de Grashof jusqu'à  $Gr = 187000$ , le signal oscillatoire ne comporte plus de motif périodique sans toutefois qu'il n'y ait brisure de la symétrie  $S_p$ .

Au moyen de la POD, nous allons pouvoir identifier les principaux modes émergeant lors de l'apparition de l'instabilité oscillatoire et voir s'il est possible de déterminer la dynamique de ce système, qui en première apparence, semble complexe.

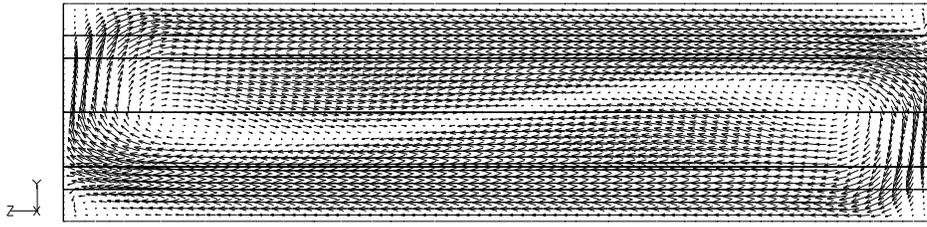


FIG. 6.1 – Champ de vitesse  $V_{yz}$  de l'écoulement stationnaire obtenu pour le cas  $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 170000$ .

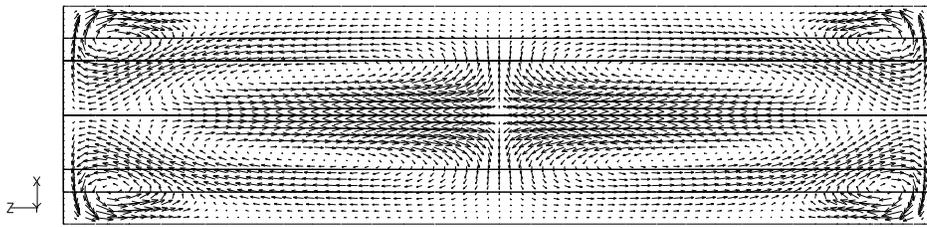


FIG. 6.2 – Champ de vitesse  $V_{xz}$  de l'écoulement stationnaire obtenu pour le cas  $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 170000$ .

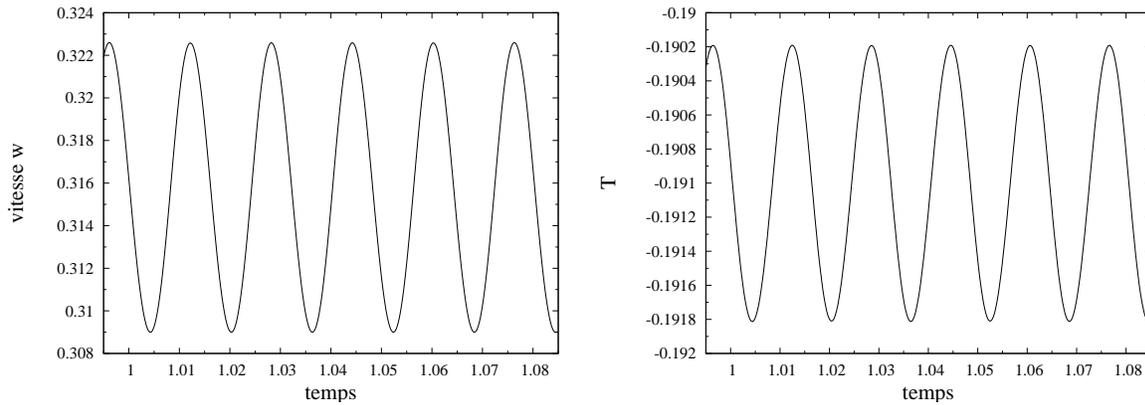


FIG. 6.3 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse et de la température  $T$  au point  $x_1$  du maillage ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 180000$ ).

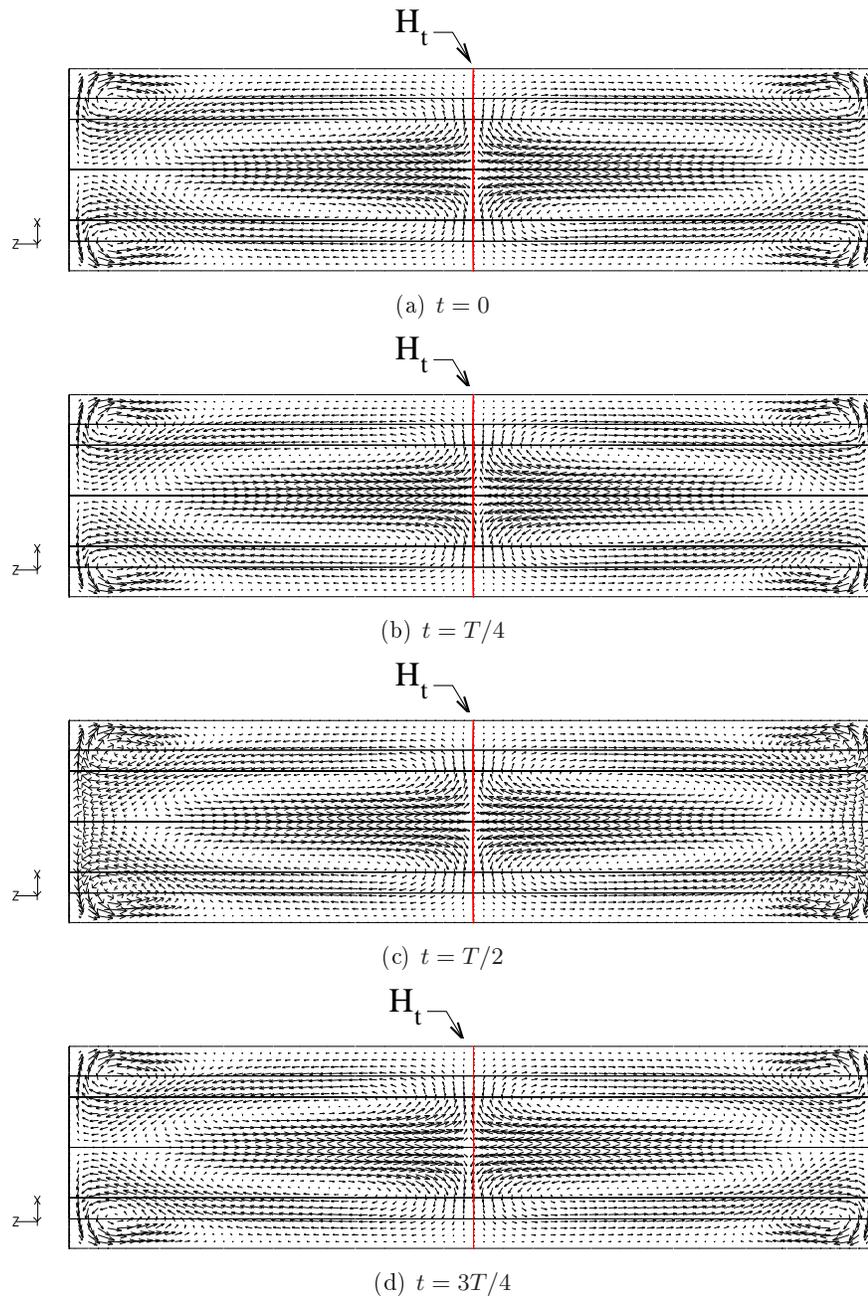


FIG. 6.4 – Champ de vitesse  $V_{xz}$  au cours d'une période  $T$  obtenu pour la solution instationnaire ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 180000$ )

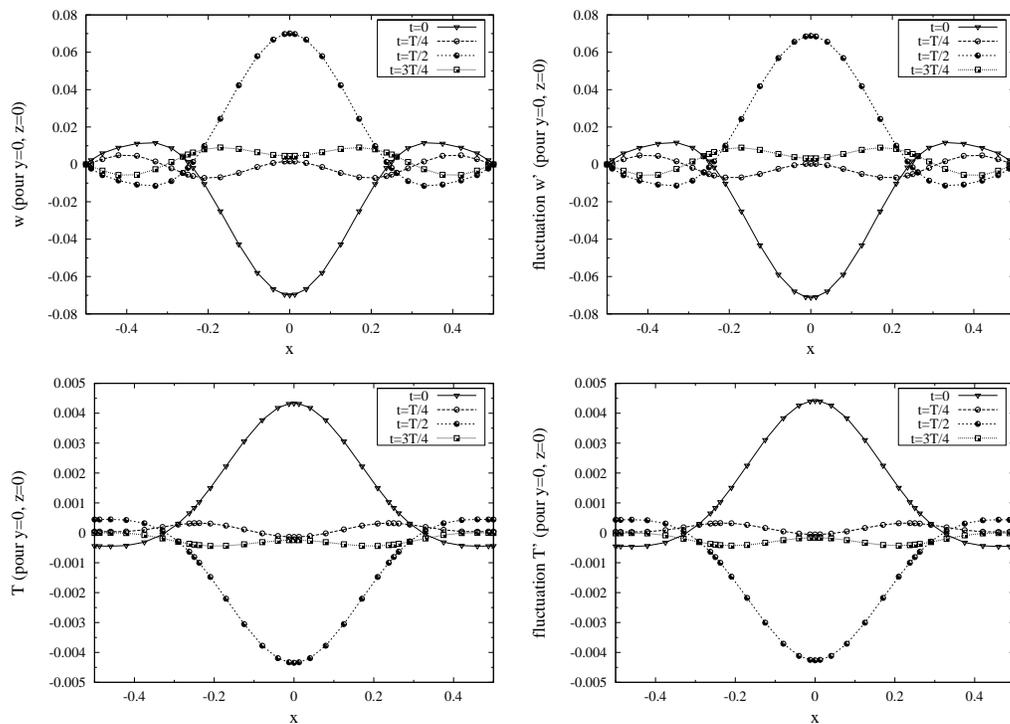


FIG. 6.5 – Profils de la composante  $w$  de la vitesse et de la température  $T$  ainsi que des fluctuations associées  $w'$  et  $T'$  le long de l'axe  $H_t$  sur une période ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 180000$ ).

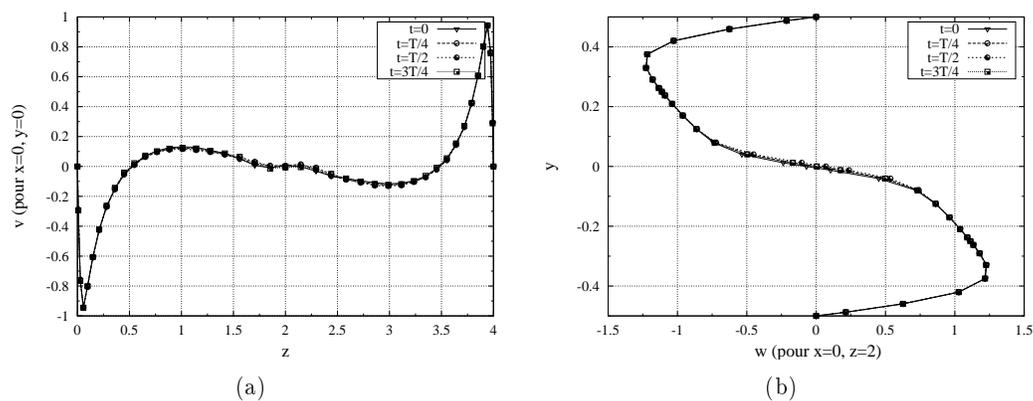


FIG. 6.6 – Profils de la composante  $v$  de la vitesse le long de l'axe ( $Oz$ ) (fig.6.6(a)) et de la composante  $w$  de la vitesse le long de l'axe ( $O'y$ ) (fig.6.6(b)) sur une période ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 180000$ ).

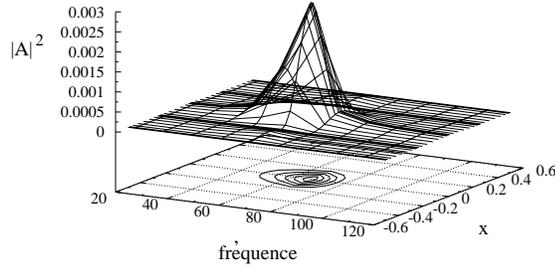
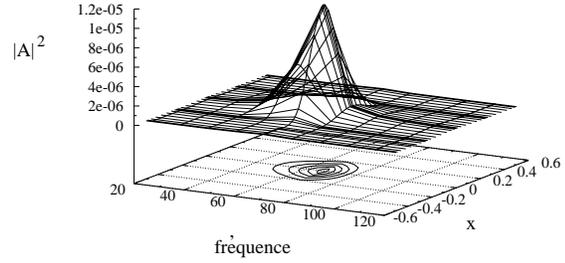

 (a)  $FFT_w$  suivant axe n°7 (axe  $H_t$ )

 (b)  $FFT_T$  suivant axe n°7 (axe  $H_t$ )

FIG. 6.7 – Évolution du spectre des fréquences le long de l'axe  $H_t$ . Sur la figure de gauche, F.F.T réalisée à partir de la composante  $w$  de la vitesse  $\vec{v}$ . Sur la figure de droite, F.F.T réalisée à partir de la température  $T$ . En ordonnée, le spectre est exprimé en utilisant le carré de l'amplitude ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 180000$ ).

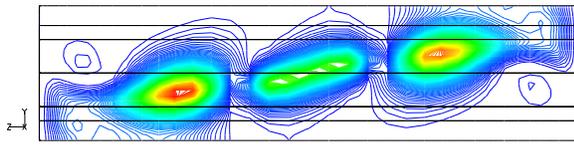
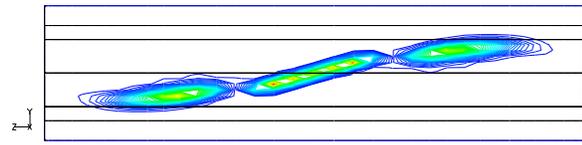
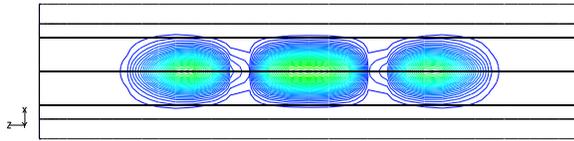
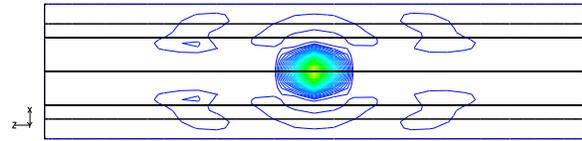

 (a)  $\hat{T}$  dans  $(L_v)$ 

 (b)  $\hat{w}$  dans  $(L_v)$ 

 (c)  $\hat{T}$  dans  $(L_h)$ 

 (d)  $\hat{w}$  dans  $(L_h)$ 

FIG. 6.8 – Dépendance spatiale des densités spectrales  $\hat{T}$  et  $\hat{w}$  dans les plans  $(L_v)$  et  $(L_h)$  ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 180000$ ).

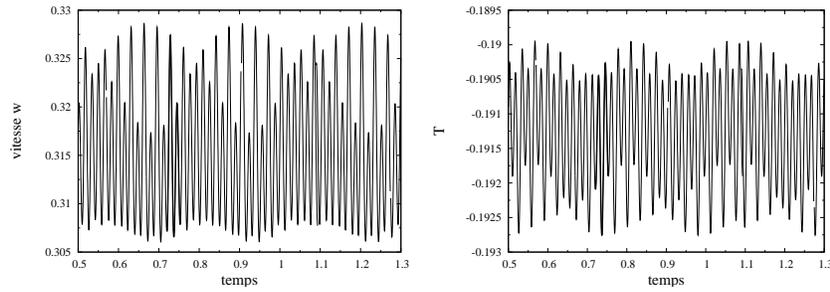


FIG. 6.9 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse et de la température  $T$  au point  $x_1$  du maillage ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 181000$ ).

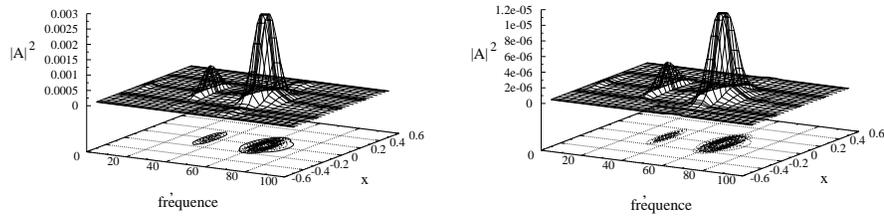
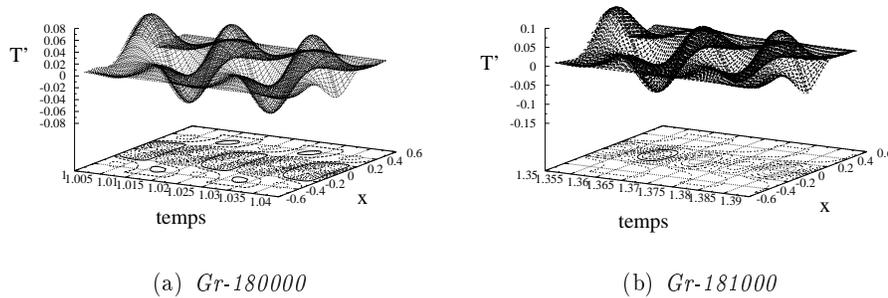


FIG. 6.10 – Évolution du spectre des fréquences le long de l'axe  $H_t$ . Sur la figure de gauche, F.F.T réalisée à partir de la composante  $w$  de la vitesse  $\vec{v}$ . Sur la figure de droite, F.F.T réalisée à partir de la température  $T$  ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 181000$ )



(a)  $Gr=180000$

(b)  $Gr=181000$

FIG. 6.11 – Comparaison de l'évolution temporelle suivant l'axe médian transversal horizontal  $H_t$  de la fluctuation  $T'$  de la température pour  $Gr = 180000$  et  $Gr = 181000$  ( $A = 4, Pr = 0.026$ ).

## 6.2 P.O.D. pour le rapport de forme $A = 4$

### 6.2.1 Méthode-VT

Nous avons vu que la valeur du nombre critique de Grashof estimée par DNS est  $Gr_c \sim 179700$ . L'étude POD se base sur l'écoulement obtenu pour une valeur voisine du seuil, à savoir  $Gr_0 = 180000$ . Le signal oscillatoire obtenu (fig.6.3) est régulier et présente notamment une amplitude d'oscillation  $A_{amp}$  constante. Différents tests ont été réalisés en considérant des couples (nombre de snapshots  $nsnap$ , pas de stockage  $ipsnap$ ) ayant pour valeur ( $nsnap = 700, ipsnap = 4$ ), ( $nsnap = 700, ipsnap = 10$ ), ( $nsnap = 700, ipsnap = 20$ ), ( $nsnap = 700, ipsnap = 30$ ) et ( $nsnap = 400, ipsnap = 4$ ). Les résultats obtenus sont sensiblement les mêmes compte tenu de la régularité du signal oscillatoire étudié. Nous choisissons de présenter ceux obtenus avec le cas estimé le plus précis en comparaison avec les résultats de la DNS, c'est-à-dire le cas ( $nsnap = 700, ipsnap = 4$ ).

La première étape de la POD permet, de façon similaire à l'étude menée pour le cas  $A = 2$ , l'obtention des différents modes-vitesse  $\sigma_V^i$  et modes-température  $\sigma_T^i$  associés respectivement aux fluctuations de vitesse et de température. Le tableau 6.1 résume les pourcentages d'énergie cinétique et thermique fluctuantes capturées par chacun des six premiers modes.

	Modes-Vitesse $\sigma_V^i$			Modes-Température $\sigma_T^i$	
	%age du mode	%age cumulé		%age du mode	%age cumulé
mode n°1	62.8201	62.8201	mode n°1	64.0594	64.0594
mode n°2	36.6363	99.4564	mode n°2	35.8634	99.9227
mode n°3	0.2900	99.7464	mode n°3	0.0465	99.9692
mode n°4	0.2451	99.9915	mode n°4	0.0287	99.9980
mode n°5	0.0043	99.9958	mode n°5	0.0018	99.9997
mode n°6	0.0042	$\sim 100.0000$	mode n°6	0.0002	99.9999

TAB. 6.1 – Pourcentage d'énergie cinétique et thermique fluctuante capturée par chaque mode  $\sigma_V^i$  et  $\sigma_T^i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) et pourcentage cumulé ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 180000, nsnap = 700, ipsnap = 4$ ).

Au vu de ces deux tableaux, on constate que les deux premiers modes-vitesse et température sont les contributions majeures du champ fluctuant puisqu'ils capturent plus de 99% de l'énergie fluctuante. La considération de deux modes supplémentaires ( $M_V = M_T = 4$ ) permet d'englober la quasi totalité ( $> 99,99\%$ ) de cette énergie. Intéressons-nous tout d'abord à l'évolution des quatre premiers coefficients temporels  $a_i(t)$  et  $b_i(t)$  ainsi qu'à l'allure spatiale des modes correspondants. Nous nous attacherons ensuite à tester la robustesse du système dynamique rencontré quant à ses capacités de reconstruction.

### Résolution du système dynamique

En construisant le système dynamique sur  $M_V = M_T = 6$  modes, nous pouvons constater sur la figure 6.12 la bonne correspondance entre les coefficients  $a_i(t)$  donnés par la DNS et la résolution du système d'EDO pour les indices  $i = 1$  et  $i = 2$ , donc pour les coefficients associés aux deux

modes les plus énergétiques. Il en va de même (nous nous abstenons de les représenter) pour les coefficients  $b_i(t)$ . Pour les deux modes suivants ( $i = 3, 4$ ), ne capturant qu'une infime proportion de l'énergie fluctuante, l'allure des coefficients  $a_i(t)$  et  $b_i(t)$  est bien reproduite malgré de légères différences d'amplitude. La reconstruction du champ fluctuant et par suite du champ total par la POD, grâce à la résolution du système d'EDO, est bonne même pour des temps longs. Les figures 6.14 et 6.15 donnent une vision globale de cette correspondance dans le plan  $L_v$ . Si l'on considère le champ fluctuant obtenu sur une période  $T$  après résolution du système d'EDO sur des temps longs, on constate que la reproduction des isolignes de la fluctuation  $w'$  de la vitesse est en bon accord avec la DNS. Les portraits de phase (fig.6.13) sont un autre moyen de comparaison entre DNS et POD. Ils indiquent que ces voies concordent pour des temps courts. Pour des temps longs, l'allure globale des portraits de phase est tout à fait respectée. La démarcation observée traduit simplement le fait qu'une croissance de l'amplitude apparaît avec le temps avant de se stabiliser sur une valeur limite pour des temps très longs.

### Structures spatio-temporelles

La représentation superposée de l'évolution temporelle des quatre premiers coefficients  $a_i(t)$  (fig.6.16(a)) montre qu'ils apparaissent par paires, à savoir  $(a_1, a_2)$  et  $(a_3, a_4)$ . A l'intérieur de chaque paire, l'amplitude du premier coefficient est supérieure à celle du deuxième mais reste d'un ordre de grandeur voisin. Au niveau fréquentiel,  $a_1$  et  $a_2$  ont la même fréquence correspondant à la fréquence fondamentale  $f_0$  de l'écoulement oscillatoire. Ils manifestent cependant un déphasage de  $T/4$ . Les coefficients  $a_3$  et  $a_4$  ont eux aussi la même fréquence fondamentale  $f_0$  (avec, comme pour le cas  $A = 2$ , une première harmonique plus forte  $f_1 = 2f_0$ ) et sont déphasés de  $T_1/4 = T/8$ . On aboutit aux mêmes conclusions en considérant les paires de coefficients temporels liés aux fluctuations de température, à savoir  $(b_1, b_2)$  et  $(b_3, b_4)$  (fig.6.16(b)). Les figures 6.16(c) et 6.16(d) nous renseignent finalement que les paires  $(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$  sont en phase ainsi que les paires  $(a_3, a_4)$  et  $(b_3, b_4)$ .

Penchons-nous désormais sur la structure spatiale des quatre premiers modes-vitesse  $\sigma_V^i$  et température  $\sigma_T^i$ . En ce qui concerne les modes-vitesse  $\sigma_V^i$ , ils sont donnés sur la figure 6.17 dans le plan  $L_v$  sous forme vectorielle et aussi par les isovaleurs de leur composante principale  $\sigma_w^i$ . La figure 6.18 les représente pour sa part dans le plan  $L_h$ . La première différence avec l'étude du rapport de forme  $A = 2$  repose sur le caractère "symétrique" des perturbations par rapport à l'axe horizontal transversal  $H_t$ . En effet, nous rappelons que pour  $A = 2$ , l'occurrence d'une bifurcation stationnaire provoque tout d'abord l'organisation de l'écoulement autour de l'axe  $H_{t_2}$ , translaté de l'axe  $H_t$  dans le plan médian horizontal d'une longueur  $l$ . Ensuite, lors de la bifurcation de Hopf, l'écoulement se met à osciller autour de cet axe  $H_{t_2}$  et les fluctuations de vitesse et de température n'ont de ce fait aucune symétrie par rapport à  $H_t$ . Pour  $A = 4$ , nous n'observons pas au préalable ce phénomène de bifurcation stationnaire et la bifurcation de Hopf rencontrée fait osciller l'écoulement autour de  $H_t$  ce qui donne ce caractère symétrique des fluctuations.

Par ailleurs, en se focalisant sur la représentation des isolignes de  $\sigma_w$ , on remarque le caractère antisymétrique des deux premiers modes contrairement aux deux suivants. Si l'on revient à un problème plus général de stabilité, la recherche des valeurs propres de notre système s'accompagne de la recherche des vecteurs propres associés. Ce sont ces derniers qui indiquent alors le caractère symétrique ou antisymétrique de la perturbation qui se développe. Pour le cas présent, on constate donc que la perturbation oscillatoire qui se développe dans la cavité est antisymétrique.

Les quatre modes-vitesse pris en compte sont répartis sur la ligne de cisaillement principal de

l'écoulement, confirmant l'importance de cette zone (cf §6.1.2) dans la naissance de l'instabilité. Les deux premiers modes capturent les zones de fluctuations de niveaux d'énergie cinétique fluctuante les plus élevés. Pour leur part, les deux suivants repèrent les zones fluctuantes où le niveau d'énergie cinétique fluctuante est plus faible. A l'instar des coefficients temporels  $(a_1, a_2)$  et  $(a_3, a_4)$ , les modes-vitesse apparaissent par paires, respectivement  $(\sigma_V^1, \sigma_V^2)$  et  $(\sigma_V^3, \sigma_V^4)$ . A l'intérieur de chacune de ces paires, on note un déphasage spatial d'environ un quart de longueur d'onde  $\lambda$ . Or, chaque produit  $a_i \sigma_V^i$  constitue une onde stationnaire étant donné que  $a_i(t)$  est une fonction temporelle périodique et  $\sigma_V^i(x)$  une fonction uniquement spatiale. Par ailleurs, nous devons nous rappeler que la rencontre de deux ondes stationnaires déphasées d'un quart de période dans le temps et l'espace forme une "traveling wave". C'est précisément le scénario présent entre les ondes stationnaires  $a_1 \sigma_V^1$  et  $a_2 \sigma_V^2$  :  $a_1$  et  $a_2$  sont déphasés de  $T/4$  et  $\sigma_V^1$  et  $\sigma_V^2$  sont déphasés de  $\lambda/4$ . Il apparaît ainsi une première "traveling wave" que nous appelons aussi structure spatio-temporelle ou structure cohérente de vitesse que nous notons  $\phi_1(x, t)$ . Une seconde apparaît également en considérant l'appariement des ondes stationnaires  $a_3 \sigma_V^3$  et  $a_4 \sigma_V^4$ . Nous pouvons continuer le même appariement par paires avec les coefficients et modes d'ordre plus élevé mais leur influence sur l'écoulement oscillatoire sera faible. On observe les mêmes conclusions pour les modes-température  $\sigma_T^i$  (fig.6.19) et les coefficients temporels  $b_i(t)$  : on peut donc procéder à des appariements identiques et créer ainsi des structures cohérentes de température notées  $\psi_m(x, t)$  en faisant intervenir les fonctions spatiales  $\sigma_T^i$  et les coefficients temporels  $b_i(t)$ . Les structures cohérentes de vitesse  $\phi_m(x, t)$  et de température  $\psi_m(x, t)$  pour  $m = 1$  et 2 sont donc définies par les relations suivantes :

$$\phi_1(x, t) = \sum_{i=1}^2 a_i(t) \sigma_V^i(x) \quad (6.1)$$

$$\phi_2(x, t) = \sum_{i=3}^4 a_i(t) \sigma_V^i(x) \quad (6.2)$$

$$\psi_1(x, t) = \sum_{i=1}^2 b_i(t) \sigma_T^i(x) \quad (6.3)$$

$$\psi_2(x, t) = \sum_{i=3}^4 b_i(t) \sigma_T^i(x) \quad (6.4)$$

Concernant les capacités prédictives, l'utilisation du code AUTO (cf. tab.6.3) donne des valeurs de  $Gr_{c_{edo}}$  et  $f_{0_{edo}}$  respectivement égales à 178325 et 61.87 ce qui nous assure un pourcentage d'erreur relative par rapport à la DNS inférieur à 1% pour ces deux quantités. L'étude POD par la méthode- $\alpha$  a également été réalisée pour le même cas de référence. L'emploi de AUTO (cf. tab.6.3) sur le système dynamique réduit obtenu pour cette méthode nous donne de nouveau des pourcentages d'erreur relative sur  $Gr_c$  et  $f_0$  inférieurs à 1%. Dans ce cas  $A = 4$  et à la différence du cas  $A = 2$ , les deux méthodes, méthode- $\alpha$  et méthode-VT, donnent des résultats pour  $Gr_c$  et  $f_0$  très proches et d'erreur relative de moins de 1% par rapport à la DNS.

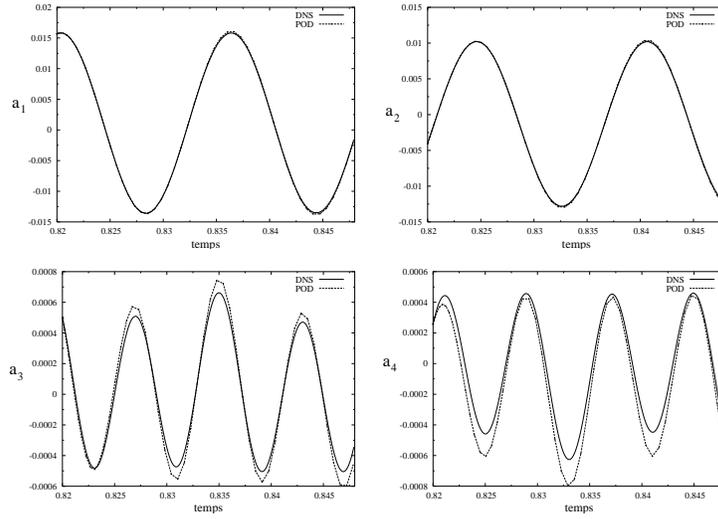


FIG. 6.12 – Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients  $a_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) évalués à partir des résultats DNS et par résolution du système dynamique réduit obtenu par la projection sur  $M_V = M_T = 6$  modes ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 180000, n_{snap} = 700, i_{psnap} = 4$ ).

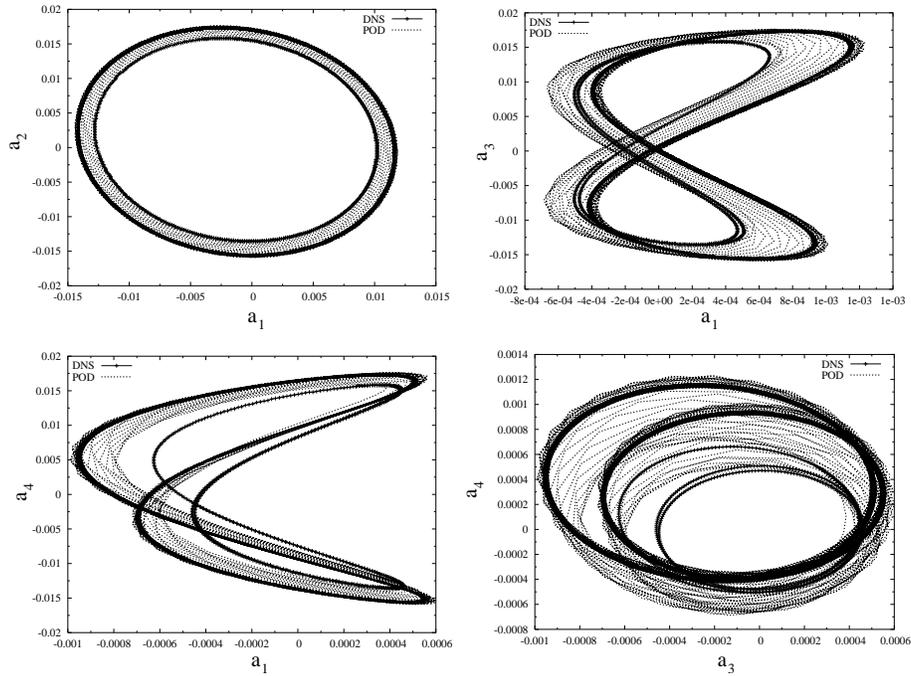


FIG. 6.13 – Portraits de phase des coefficients temporels  $a_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) évalués à partir des résultats DNS et par résolution sur des temps longs du système dynamique réduit obtenu par la projection sur  $M_V = M_T = 6$  modes ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 180000, n_{snap} = 700, i_{psnap} = 4$ ).

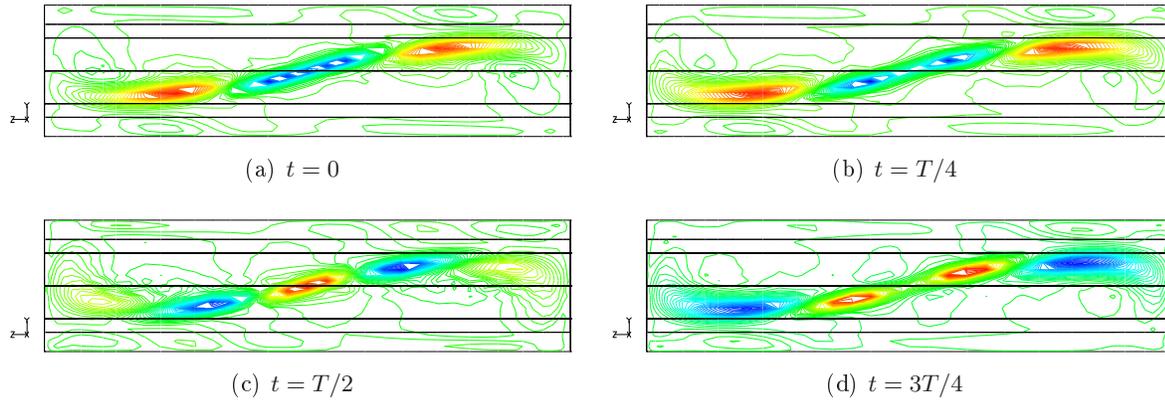


FIG. 6.14 – Représentation dans le plan  $(L_v)$  des isolignes de la fluctuation  $w'$  de la vitesse sur une période  $T$  obtenue par résolution sur des temps longs du système dynamique réduit construit par la projection sur  $M_V = M_T = 6$  modes - méthode-VT - ( $A = 4, Pr = 0,026, Gr = 180000$ ).

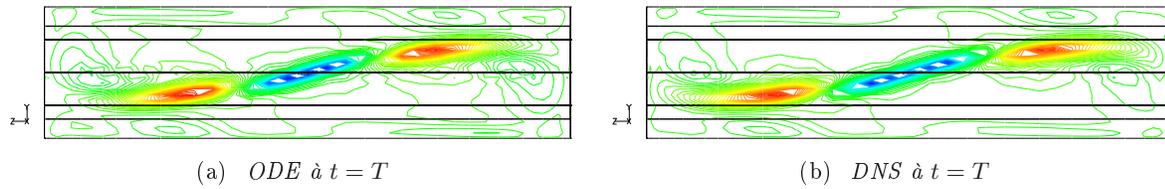


FIG. 6.15 – Représentation dans le plan  $(L_v)$  des isolignes de la fluctuation  $w'$  de la vitesse à un instant  $t = T$  obtenue par résolution sur des temps longs du système dynamique réduit construit par la projection sur  $M_V = M_T = 6$  modes - méthode-VT - (a) et par DNS (b) ( $A = 4, Pr = 0,026, Gr = 180000$ ).

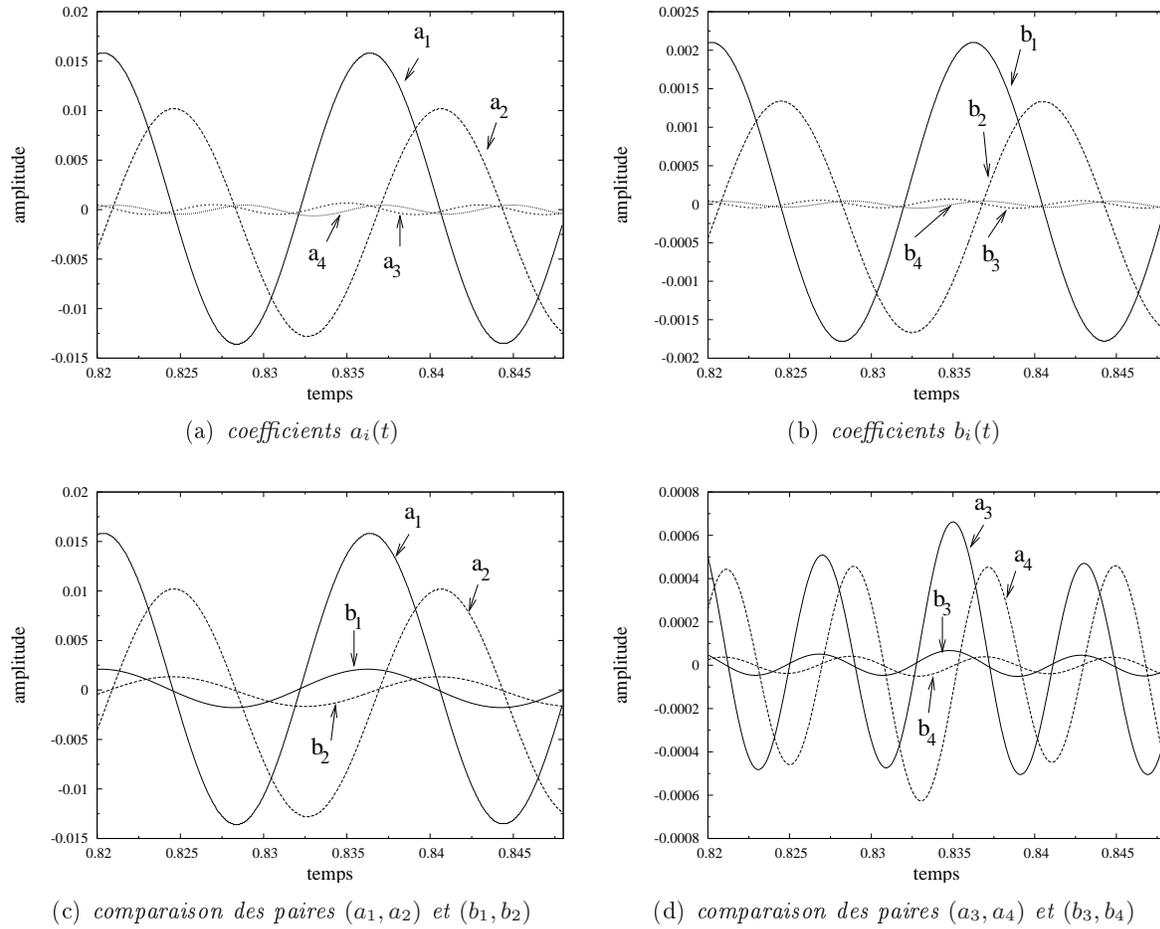


FIG. 6.16 – Évolution temporelle des coefficients  $a_i(t)$  et  $b_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) calculés par la projection directe des snapshots sur les vecteurs propres ( $A = 4, Pr = 0,026, Gr = 180000, n_{snap} = 700, ipsnap = 4$ ).

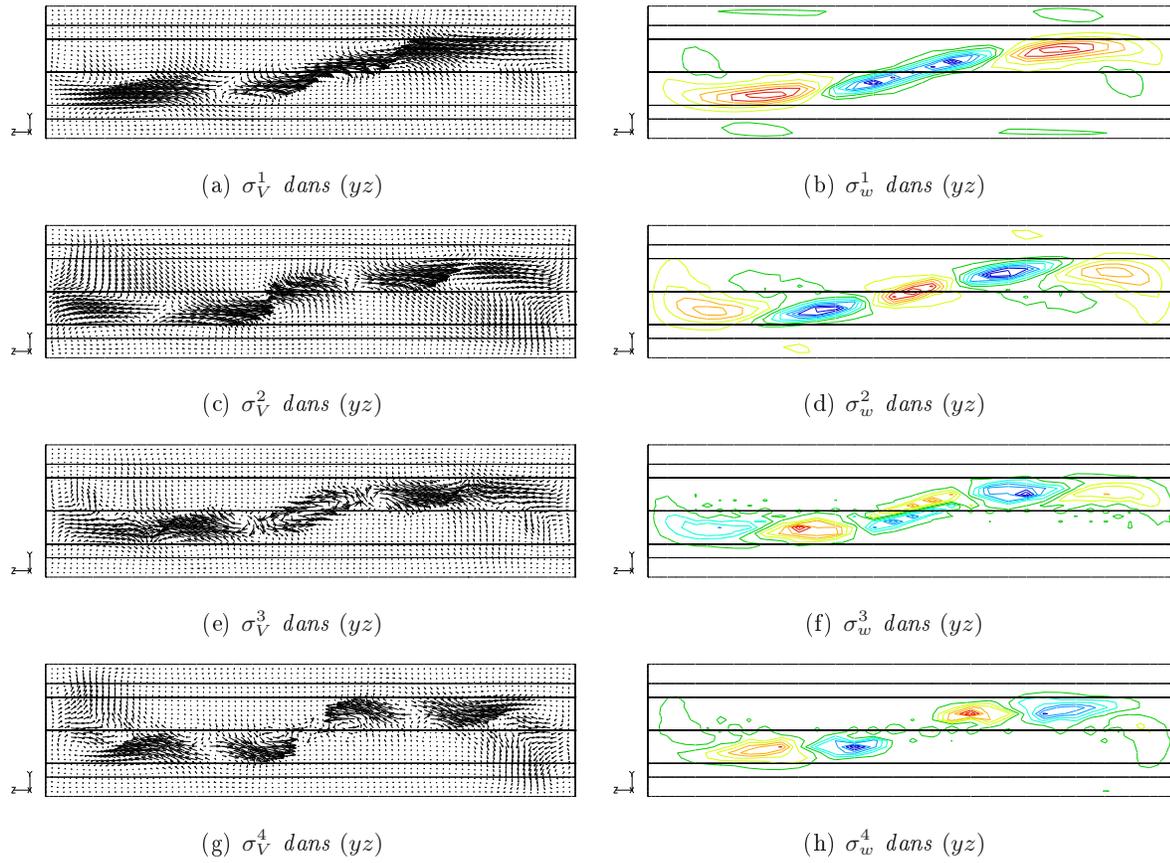


FIG. 6.17 – Représentation dans le plan  $(L_v)$  des quatre premiers modes-vitesse  $\sigma_V^i$  ainsi que des isolignes de  $\sigma_w^i$  - méthode-VT - ( $A = 4, Pr = 0,026, Gr = 180000$ ).

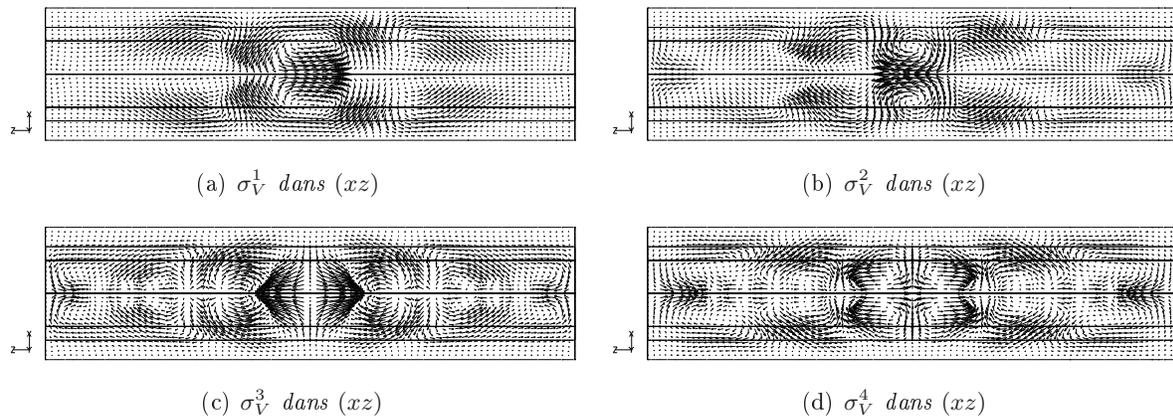


FIG. 6.18 – Représentation dans le plan  $(L_h)$  des quatre premiers modes-vitesse  $\sigma_V^i$  - méthode-VT - ( $A = 4, Pr = 0,026, Gr = 180000$ ).

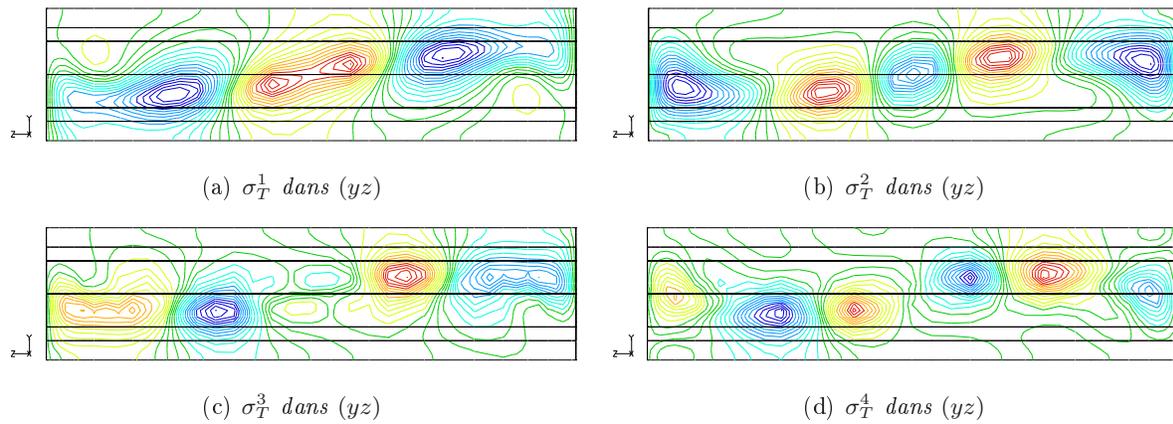


FIG. 6.19 – Représentation dans le plan  $(L_v)$  des quatre premiers modes-température  $\sigma_T^i$  - méthode-VT - ( $A = 4, Pr = 0,026, Gr = 180000$ ).

### 6.3 Effets du rapport de forme

Nous avons jusqu'ici présenté les résultats pour deux valeurs du rapport de forme  $A$ , à savoir  $A = 2$  et  $A = 4$ , en considérant la valeur du nombre de Prandtl  $Pr = 0.026$ . Une étude similaire a été réalisée pour huit autres valeurs de  $A$  comprises entre  $A = 1.5$  et  $A = 10$ . Les résultats seront présentés en distinguant trois catégories de rapport de forme :  $A \leq 3$ ,  $4 \leq A \leq 6$  catégorie dite intermédiaire et  $A \geq 7$  dite catégorie des grands rapports de forme. Ce regroupement en trois catégories est essentiellement basé sur une similarité du comportement du système au voisinage de la bifurcation oscillatoire. Nous tenons à insister sur le fait que nous ne présenterons pas ici une étude détaillée de chaque rapport de forme (à l'instar des cas  $A = 2$  et  $A = 4$ ). Nous soulignerons les ressemblances ou dissemblances constatées afin de justifier ce classement en trois catégories. D'un point de vue pratique, nous insisterons, lorsque cela se justifie, sur la difficulté et notamment les temps de calcul souvent très longs que la simulation numérique directe requiert afin de localiser les seuils critiques.

#### 6.3.1 Cavités cylindriques de rapport de forme modéré ( $A \leq 3$ )

Trois rapports de forme ont été étudiés pour de tels cylindres, à savoir  $A = 1.5, 2$  et  $3$ . Pour chacun des trois rapports de forme, le tableau 6.2 résume le maillage considéré par élément, le nombre total de points du maillage  $nsg$  et les brisures de symétrie relevées lors de l'apparition de l'instabilité oscillatoire (le symbole  $\times$  indique que la symétrie considérée est brisée tandis que le symbole  $\circ$  indique qu'elle est conservée). Il indique de plus la valeur du seuil critique  $Gr_c$  et la fréquence fondamentale  $f_0$  correspondante obtenues par simulation numérique directe. Les paramètres  $Gr_{cedo}$  et  $f_{0edo}$  indiquent pour leur part la valeur du nombre de Grashof critique  $Gr_c$  et la fréquence fondamentale  $f_0$  obtenues à partir du système dynamique lors de l'étude P.O.D. Pour cette dernière étape, nous avons utilisé le logiciel AUTO (1997 ou 2000). De manière générale, c'est-à-dire pour cette catégorie de cylindre mais aussi pour les deux suivantes, cette étude P.O.D n'a pu être menée pour tous les rapports de forme considérés. Aussi, lorsqu'elle a été envisagée, nous relaterons les valeurs  $Gr_{cedo}$  et  $f_{0edo}$  obtenues et lorsqu'elle n'a pas été réalisée, nous lui associerons le symbole @.

Pour  $A = 1.5$ , compte tenu du grand confinement de la cavité, le seuil de transition doit se situer à une valeur du nombre de Grashof élevée. Des calculs préliminaires utilisant un maillage comprenant  $9 \times 9 \times 17$  points par élément (soit  $nsg = 13617$ ) nous permettent de situer approximativement la valeur du seuil critique aux alentours de  $Gr_c \sim 900000$ . L'utilisation d'un maillage plus raffiné ( $9 \times 9 \times 27$  points par élément soit  $nsg = 21627$ ) permet d'obtenir la valeur du  $Gr_c = 930000$ .

Le rapport de forme  $A = 3$  se révèle un cas complexe, par ailleurs très sensible aux petites variations de  $Gr$  dans le voisinage du seuil critique. Pour  $Gr = 156300$ , l'écoulement est stationnaire et la symétrie  $S_a$  (et donc  $S_c$ ) est déjà brisée. Pour ce rapport de forme, nous trouvons que la bifurcation de Hopf est précédée d'une bifurcation stationnaire se manifestant à  $Gr_{bs}$  plus faible. Compte tenu des temps de calculs très longs, il ne nous a pas été possible de déterminer avec précision la valeur de  $Gr_{bs}$ ; nous pouvons toutefois l'encadrer par une valeur inférieure correspondant à un écoulement stationnaire présentant toutes les symétries du problème et une valeur supérieure où l'écoulement est stationnaire avec rupture de la symétrie  $S_a$ . Nous obtenons ainsi  $155750 \leq Gr_{bs} \leq 156300$ . Le régime oscillatoire apparaît pour  $Gr_c \sim 156500$ .

L'étude P.O.D par méthode-VT s'est révélée riche en enseignements. Nous avons réalisé cette étude à partir de  $Gr_0 = 160000$  dont le signal est représenté sur la figure 6.21. L'écoulement

présente des oscillations complexes et il est nécessaire de considérer pas moins de  $M_V = 27$  modes-vitesse et  $M_T = 26$  modes-température pour capturer 99,9997% de  $K$  et  $\Theta$ . Outre la très bonne reproduction de l'écoulement à  $Gr = Gr_0$  et une reproduction correcte (allure globale du signal et fréquence) pour  $Gr \neq Gr_0$  dans un proche voisinage de  $Gr_0$ , il est intéressant d'étudier le système d'EDO avec le logiciel AUTO afin de mieux comprendre la dynamique du système au voisinage du seuil. L'originalité de ce test réside ici dans la prise en compte d'un nombre élevé de modes-vitesse et température ( $M_V + M_T = 53$ ) et nous permet donc de tester le système dynamique pour un nombre élevé d'inconnues  $a_i$  et  $b_i$ . L'utilisation du logiciel AUTO nous permet de trouver une valeur du seuil critique  $Gr_{cedo} = 158873$  ce qui nous assure une différence relative par rapport à la DNS d'environ 1.5%. On obtient la même conclusion en comparant les fréquences fondamentales  $f_0$  et  $f_{0_{edo}}$ . En revanche, à l'instar du cas  $A = 4$ , le logiciel AUTO échoue dans sa tentative de déterminer le diagramme de bifurcation total du système. Il parvient à déceler la nature sous-critique de la bifurcation de Hopf mais bute dans l'obtention de la branche stable qui émerge d'un point tournant localisé pour une valeur de Grashof  $Gr_{tp} < Gr_c$ . La modification des différents paramètres internes à AUTO par des valeurs moins contraignantes mais toujours situées dans l'intervalle des tolérances admises ; la considération d'un système dynamique de taille plus réduite (tout en vérifiant au préalable sa validité par reconstruction pour  $Gr = Gr_0$  et  $Gr \neq Gr_0$ ) n'ont pas permis l'obtention de meilleurs résultats. Toujours est-il que nous pouvons localiser la valeur du point tournant pour une valeur proche de  $Gr_{tp} = 144500$ , région pour laquelle la courbe  $y = f(Gr)$  devient verticale.

Enfin, nous soulignons le fait que même pour des systèmes dynamiques de grande taille comme ici, nous sommes parvenus, avec le logiciel AUTO, à obtenir avec une très bonne précision les valeurs des paramètres critiques de l'instabilité oscillatoire, à savoir son seuil critique d'apparition  $Gr_c$  et sa fréquence fondamentale  $f_0$ .

### 6.3.2 Cavités cylindriques de rapport de forme intermédiaire ( $4 \leq A \leq 6$ )

En ce qui concerne les cylindres de rapports de forme intermédiaires, nous avons réalisé l'étude pour trois rapports de forme distincts, à savoir  $A = 4, 5$  et  $6$  (cf tab.6.3).

Pour  $A = 5$ , le seuil critique de bifurcation est localisé à  $Gr_c = 275000$ . Les solutions stationnaires observées pour  $Gr < Gr_c$  ne présentent pas de brisure de symétrie. De plus, la solution instationnaire obtenue pour  $Gr_c = 275000$  n'est pas précédée par une solution stationnaire présentant de brisure de symétrie.

Pour le cas  $A = 6$ , nous obtenons  $Gr_c = 675000$ . La phase de croissance de l'instabilité oscillatoire est ici très lente ce qui requiert un temps de calcul souvent très long avant que la phase de croissance de l'instabilité ne se stabilise. Pour ordre d'idée, l'obtention d'un signal oscillatoire d'amplitude constante pour ce cas précis a requis pas moins de 40 jours de calcul sur le calculateur IBM SP3 du Cines... L'obtention d'un seuil critique se révèle donc souvent une entreprise très coûteuse en ressources informatiques et notamment en temps de calcul. Il n'est pas rare que l'obtention d'un seuil critique pour un rapport de forme donné  $A$  dans de telles configurations tridimensionnelles puisse ainsi nécessiter plusieurs mois de calculs.

Concernant la POD, son étude a été également réalisée pour  $A = 5$ . On souligne de nouveau la bonne correspondance entre valeurs trouvées par la DNS et la POD (plus exactement l'utilisation du logiciel AUTO basé sur le système d'EDO obtenu par POD). Par ailleurs, nous relevons que la méthode-VT a permis d'obtenir des résultats plus proches de ceux de la DNS que ceux obtenus

par la méthode- $\alpha$ .

### 6.3.3 Cavités cylindriques de grand rapport de forme ( $7 \leq A \leq 10$ )

Dans cette catégorie de rapport de forme, nous avons considéré quatre rapports de forme à savoir  $A = 7, 8, 9$  et  $10$ . Les résultats de l'étude sont résumés dans le tableau 6.4. L'analyse rapide de ces résultats montre que malgré la valeur relativement élevée du nombre  $Gr_c$  en comparaison avec celle des rapports de forme  $A = 4, 5$  et  $6$ , la valeur de la fréquence fondamentale est beaucoup plus faible. Dans cette catégorie de rapport de forme ( $7 \leq A \leq 10$ ), on observe désormais une décroissance de la valeur du seuil critique lorsque  $A$  augmente. La figure 6.20 présente les valeurs de  $Gr_c$  en fonction du rapport de forme dans la plage  $1.5 \leq A \leq 10$ . Elle montre trois comportements distincts :  $A \leq 3$  où la valeur de  $Gr_c$  décroît rapidement,  $3 \leq A \leq 8$  où la valeur de  $Gr_c$  croît mais pas de façon monotone puis une dernière partie  $A \geq 8$  où  $Gr_c$  décroît de façon monotone.

**Remarque 3** : Il est important de souligner qu'avant de statuer sur la nature stationnaire ou instationnaire d'un écoulement, il est nécessaire de bien attendre que le résidu des calculs soit le plus petit possible. En effet, et cela fut rencontré à plusieurs reprises (notamment pour  $(Pr = 0.026, A = 10)$  et les cas ultérieurs  $(Pr = 0.055, A = 4)$  et  $(Pr = 0.075, A = 4)$ ), les calculs transitoires peuvent s'afficher pendant longtemps comme tendant vers un écoulement stationnaire (auquel cas le résidu de la DNS tendait vers  $10^{-6}$ ) puis très lentement ce résidu se met à augmenter jusqu'à ce que l'écoulement manifeste finalement un caractère instationnaire. Nous avons rencontré de tels scenarii pour lesquels ce faux-semblant d'écoulement stationnaire a pu durer plus de dix jours de calcul, malgré l'introduction de perturbation, avant que ne se déclenche l'instabilité oscillatoire.

Par ailleurs, on remarque que le rapport de forme  $A = 7$  se situe à la frontière où deux types d'instabilités de fréquence différente dominant. Afin de mieux comprendre la nature de l'instabilité pour la valeur  $A = 7$ , nous avons réalisé les calculs suivants. Nous partons d'une solution oscillatoire obtenue pour  $Gr = 900000$  à partir d'une solution initiale nulle. Pour  $Gr = 800000$ , on observe alors un comportement très particulier reflété sur la figure 6.22 : on obtient une première partie de signal à fréquence élevée puis au cours du temps, ce signal transitionne vers un signal à basse fréquence caractéristique des grands rapports de forme. Il semble donc que pour  $Gr = 800000$ , on ait deux branches oscillatoires différentes voisines : une à haute fréquence et l'autre à basse fréquence. Si l'on parcourt cette nouvelle branche à basse fréquence, nous arrivons finalement à situer le seuil critique de l'instabilité oscillatoire aux environs de  $Gr_c \sim 775000$ . La longueur des calculs ne nous a pas permis pas contre de statuer sur la sous-criticité ou sur-criticité de la bifurcation de Hopf rencontrée. L'instabilité du cas  $A = 7$  s'affiche donc plutôt comme une instabilité typique des écoulements à basse fréquence présents pour les cavités allongées mais l'étude de ce cas manifeste également l'existence d'une autre branche oscillatoire voisine de fréquence élevée.

Finalement, l'instabilité oscillatoire présente pour le cas  $A = 10$  se caractérise, comme pour le cas  $A = 6$ , par une absence de brisure de symétrie. Si l'on se place dans le plan horizontal  $L_h$ , l'écoulement se partage en deux parties symétriques l'une de l'autre par rapport à  $H_t$ . Les oscillations de chacune de ces deux parties se manifestent de part et d'autre de l'axe  $H_t$  par un mouvement d'ensemble en phase avec son homologue symétrique.

**Conclusion 1** L'évolution du nombre de Grashof critique  $Gr_c$  en fonction du rapport de forme  $A$  pour  $Pr = 0.026$  ne suit donc pas une allure décroissante et monotone comme pourrait le laisser penser à première vue un confinement moindre. En effet, en augmentant  $A$  de 1.5 à 3, le seuil présente une décroissance prononcée avant d'augmenter fortement jusqu'à  $A = 8$  et de finalement décroître pour des valeurs de  $A$  plus élevées. De plus, nous obtenons pour les grands rapports de forme une fréquence fondamentale faible au regard de celle obtenue pour les cavités de rapport de forme modéré (à l'exception de  $A = 3$ ) et intermédiaire. Le confinement est donc loin d'être le seul facteur influant dans l'apparition de l'instabilité et les mécanismes de transition sous-jacents semblent complexes. Afin de tenter de les élucider, l'emploi de l'analyse énergétique dans le chapitre suivant semblera à ce stade nécessaire. Nous tenons à insister sur le fait qu'au vu de la somme et de l'ampleur des DNS réalisées pour l'obtention de la "courbe"  $Gr_c = f(A)$ , nous avons pu mettre en évidence, de manière un peu "naturaliste", les traits majeurs des instabilités oscillatoires rencontrés. Une présentation encore plus détaillée pour chaque rapport de forme nécessiterait des développements et parfois aussi des calculs supplémentaires (pour statuer par exemple sur la criticité de la bifurcation de Hopf pour certains grands rapports de forme, notamment  $A = 7$ ).

Pour sa part, la P.O.D constitue un outil complémentaire à la DNS. En premier lieu, elle permet une détermination précise des modes dominants constituant la partie fluctuante de l'écoulement. Par ailleurs, dans une plage autour du cas de référence  $Gr_0$ , elle permet une reproduction fidèle (pour  $Gr \neq Gr_0$ ) de l'écoulement si l'on s'attache préalablement à construire un système dynamique fiable et robuste. Enfin, le système ODE réduit, qu'on peut obtenir à partir de la POD, permet d'obtenir rapidement les paramètres critiques de l'instabilité oscillatoire tels que le seuil  $Gr_c$  et la fréquence qui lui est associée  $f_0$ . Ainsi, nous pourrions, après avoir préalablement repéré par DNS un intervalle du nombre de Grashof  $Gr$  dont la borne inférieure  $Gr_{stat}$  équivaut à un écoulement stationnaire et la borne supérieure  $Gr_{osc}$  à un écoulement instationnaire, appliquer la POD au cas  $Gr_0 = Gr_{osc}$  et déterminer ainsi  $Gr_c$  et  $f_0$ . La POD agit, dans ce sens, comme un "économisateur" substantiel de DNS et procure un gain conséquent de temps. Enfin, dans notre configuration, l'obtention du diagramme complet de bifurcation constitue une de limites de la POD car nous nous heurtons dans ce cas à une trop grande sensibilité des EDO que nous ne pouvons à l'heure actuelle résoudre.

	Rapport de forme $A$		
	$A = 1.5$	$A = 2$	$A = 3$
$(nx + 1) \times (ny + 1) \times (nz + 1)$	$9 \times 9 \times 27$	$9 \times 9 \times 27$	$9 \times 9 \times 43$
$nsg$	21627	21627	34443
$S_p$	o	o	o
$S_a$	×	×	×
$S_c$	×	×	×
$Gr_c$	930000	234000	156500
$f_0$	145.7	69.7	5.12
$Gr_{c_{edo}}$ (méthode-VT)	@	235625	158873
$f_{0_{edo}}$ ( " )	@	70.01	5.23
$Gr_{c_{edo}}$ (méthode- $\alpha$ )	@	239253	157470
$f_{0_{edo}}$ ( " )	@	73.4	5.45

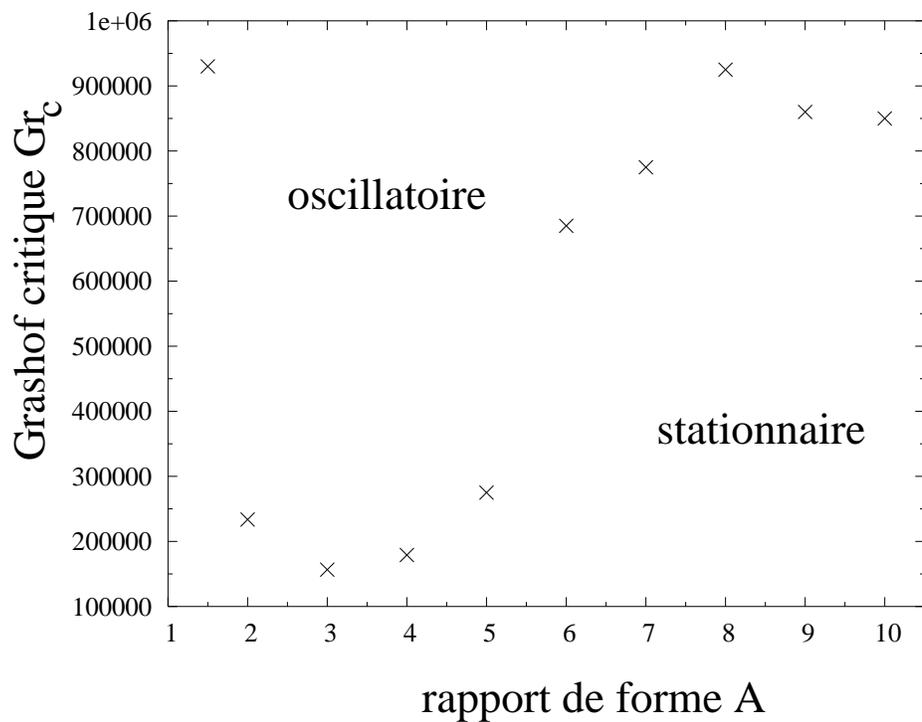
TAB. 6.2 – Nombre de points  $(nx+1) \times (ny+1) \times (nz+1)$  par élément, nombre total  $nsg$  de points du maillage, brisure des symétries (× :brisure o :conservation), valeur du nombre de Grashof critique  $Gr_c$  et fréquence fondamentale  $f_0$  pour les cylindres de rapport de forme modéré.  $Gr_{c_{edo}}$  et  $f_{0_{edo}}$  représentent respectivement le Grashof critique et la fréquence fondamentale trouvées par la POD en utilisant le logiciel AUTO (suivi de bifurcation). Le symbole @ spécifie que l'étude POD n'a pas été réalisée pour le rapport de forme correspondant.

	Rapport de forme $A$		
	$A = 4$	$A = 5$	$A = 6$
$(nx + 1) \times (ny + 1) \times (nz + 1)$	$9 \times 9 \times 43$	$9 \times 9 \times 49$	$9 \times 9 \times 49$
$nsg$	34443	39249	39249
$S_p$	o	o	o
$S_a$	×	×	o
$S_c$	×	×	o
$Gr_c$	179700	275000	675000
$f_0$	62.25	101.1	436.7
$Gr_{c_{edo}}$ (méthode-VT)	178325	269179	@
$f_{0_{edo}}$ ( " )	61.87	105.3	@
$Gr_{c_{edo}}$ (méthode- $\alpha$ )	180174	@	@
$f_{0_{edo}}$ ( " )	61.67	@	@

TAB. 6.3 – Même tableau que tab.6.2 mais pour les cylindres de rapport de forme intermédiaire.

	Rapport de forme $A$			
	$A = 7$	$A = 8$	$A = 9$	$A = 10$
$(nx + 1) \times (ny + 1) \times (nz + 1)$	$9 \times 9 \times 51$	$9 \times 9 \times 55$	$9 \times 9 \times 59$	$9 \times 9 \times 61$
$nsg$	40851	44055	47259	48861
$S_p$	o	o	o	o
$S_a$	x	x	x	o
$S_c$	x	x	x	o
$Gr_c$	775000	925000	875000	$\sim 845000$
$f_0$	10.3	2.3	11.4	15.38
$Gr_{cedo}$ (méthode-VT)	@	@	@	859959
$f_{0edo}$ ( " )	@	@	@	16.76

TAB. 6.4 – Même tableau que tab.6.2 mais pour les cylindres de grand rapport de forme.

FIG. 6.20 – Évolution du nombre de Grashof critique  $Gr_c$  suivant le rapport de forme  $A$  pour  $Pr = 0.026$ .

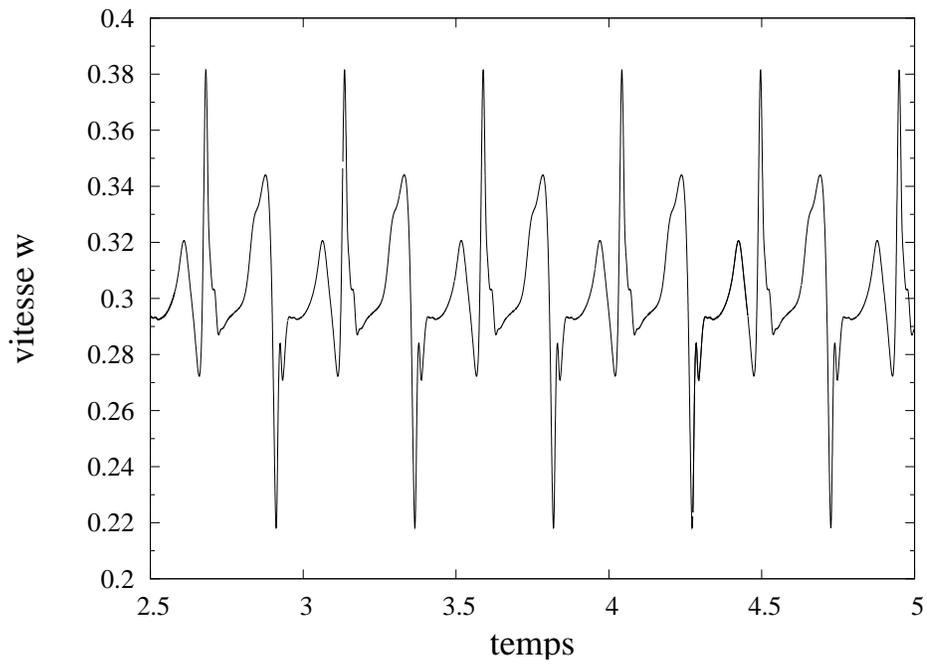


FIG. 6.21 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage ( $A = 3$ ,  $Pr = 0.026$ ,  $Gr = 160000$ ).

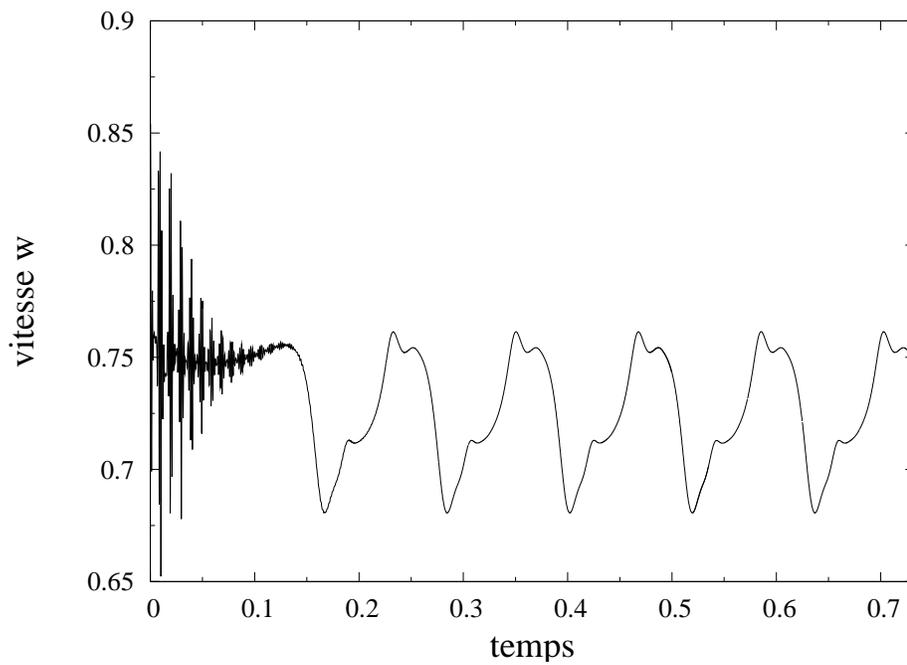


FIG. 6.22 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage ( $A = 7$ ,  $Pr = 0.026$ ,  $Gr = 800000$ ).



# Détermination de l'origine de l'instabilité

Afin de déterminer les mécanismes sous-jacents au déclenchement des instabilités, nous développons dans ce chapitre une étude par analyse énergétique. Les analyses montrent que l'instabilité oscillatoire est une instabilité de cisaillement mais qu'elle adopte des schémas différents suivant la valeur du rapport de forme  $A$ .

## 7.1 Equations de Orr-Reynolds

### 7.1.1 Termes productifs et termes dissipatifs

Afin de mieux comprendre les mécanismes physiques responsables de la transition vers les écoulements oscillatoires, il est souvent intéressant de calculer le bilan de l'énergie cinétique fluctuante et de voir quelles contributions tendent à stabiliser ou déstabiliser l'écoulement stationnaire. Soient  $\bar{u}_i$  et  $\bar{T}$  les valeurs moyennes et  $u'_i$ ,  $T'$  les fluctuations pour respectivement les composantes de la vitesse et la température. On obtient  $u_i = \bar{u}_i + u'_i$  et  $T = \bar{T} + T'$ . Le taux de variation de l'énergie cinétique totale fluctuante  $K$  est obtenu en multipliant l'équation de Navier-Stokes 1.36 par  $u'_i$  suivi de l'intégration sur le volume  $\Omega$  du cylindre. En tenant compte des conditions aux limites, l'équation d'énergie de Orr-Reynolds obtenue s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial u_i'^2}{\partial t} d\Omega = \underbrace{\int_{\Omega} -\sqrt{Gr} u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} d\Omega}_{E_{cpf}} + \underbrace{\int_{\Omega} -\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega}_{E_{cdv}} + \underbrace{\int_{\Omega} \sqrt{Gr} u'_i T' \vec{e}_y d\Omega}_{E_{cbuoy}} \quad (7.1)$$

D'une façon similaire, en multipliant l'équation de la chaleur 1.34 par  $T'$  et en intégrant sur le volume  $\Omega$  du cylindre, nous obtenons le taux de variation de l'énergie thermique fluctuante  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$  :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial T'^2}{\partial t} d\Omega = \underbrace{\int_{\Omega} -\sqrt{Gr} T' u'_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} d\Omega}_{E_{tpf}} - \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial T'}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega}_{E_{td}} \quad (7.2)$$

Nous pouvons noter que le taux de variation de l'énergie cinétique fluctuante comporte trois termes  $E_{cpf}$ ,  $E_{cdv}$  et  $E_{cbuoy}$  qui représentent respectivement : la production par le cisaillement du champ moyen, la dissipation visqueuse et la contribution de la poussée d'Archimède. Ce dernier terme se trouve être dissipatif pour tous les rapports de forme étudiés. Le taux de variation de l'énergie thermique fluctuante  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$  a seulement deux termes  $E_{tpf}$  et  $E_{td}$  symbolisant respectivement

la production par le transport des gradients de température moyenne et la dissipation par les effets de conduction. Pour tous les rapports de forme étudiés, une rapide comparaison des valeurs de  $\frac{\partial K}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$  (fig.7.2 pour  $A = 4$ ) tend à montrer que la principale production d'énergie fluctuante est due aux effets hydrodynamiques. De ce fait, dans notre analyse de la transition de l'écoulement, nous nous concentrons plus sur la contribution de l'énergie cinétique fluctuante. Par ailleurs, étant donné que tous les signaux sont périodiques temporellement, nous définissons des valeurs moyennées sur une période et les normalisons par la production totale moyennée (sur une période également) due au cisaillement  $I_m$  définie par :

$$I_m = \langle E_{cpf} \rangle . \quad (7.3)$$

Cependant, vu le fait que le taux de variation moyenné de l'énergie cinétique fluctuante  $\langle \frac{\partial K}{\partial t} \rangle$  est égal à zéro,  $I_m$  est aussi égal à  $|D_1 + D_2|$  avec  $D_1$  et  $D_2$  définis par :

$$D_1 = \langle E_{cdv} \rangle , \quad D_2 = \langle E_{cbuoy} \rangle . \quad (7.4)$$

On notera dans la suite  $D_{1m}$  et  $D_{2m}$  les valeurs normalisées respectivement de  $D_1$  et  $D_2$ . Dans ce qui suit, parmi les neuf composantes de  $I_m$ , nous noterons  $I_{1m}$ ,  $I_{2m}$  et  $I_{3m}$  les contributions reliées à la composante principale de l'écoulement  $\bar{w}$ .  $I_{1m}$ ,  $I_{2m}$  et  $I_{3m}$  ainsi que leur valeur temporelle instantanée respective  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont donc définies par :

$$I_{1m} = \langle I_1 \rangle = \left\langle \int_{\Omega} -\sqrt{Gr} w' u' \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} d\Omega \right\rangle , \quad I_{2m} = \langle I_2 \rangle = \left\langle \int_{\Omega} -\sqrt{Gr} w' v' \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} d\Omega \right\rangle \quad (7.5)$$

$$I_{3m} = \langle I_3 \rangle = \left\langle \int_{\Omega} -\sqrt{Gr} w' w' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} d\Omega \right\rangle \quad (7.6)$$

De même, si l'on a affaire à la composante verticale de l'écoulement  $\bar{v}$ , nous lui associons les contributions  $II_{im}$  et si l'on traite de  $\bar{u}$ , nous lui associons similairement  $III_{im}$ .  $II_{im}$  et  $III_{im}$  ainsi que leur valeur instantanée respective  $II_i$  et  $III_i$  sont donc définies par :

$$II_{im} = \langle II_i \rangle = \left\langle \int_{\Omega} -\sqrt{Gr} v' u'_i \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} d\Omega \right\rangle \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \quad (7.7)$$

$$III_{im} = \langle III_i \rangle = \left\langle \int_{\Omega} -\sqrt{Gr} u' u'_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} d\Omega \right\rangle \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \quad (7.8)$$

### 7.1.2 Mécanisme de production d'énergie cinétique fluctuante

Nous tenons ici à justifier de manière simple l'appellation de terme de production donnée au terme  $E_{cpf}$ . Nous allons considérer pour cela un exemple simple d'écoulement cisailé comme on peut en rencontrer dans notre étude.

Penchons-nous sur ce cas (fig.7.1) en considérant un point de côte  $y_0$  de l'écoulement où  $\bar{U} = \bar{U}(y_0)$ . On suppose qu'à l'instant  $t$ , un volume de fluide en provenance d'une région  $y > y_0$  passe en ce point. Ce volume de fluide, en raison du profil de vitesse moyenne  $\bar{U}(y)$ , présente une très forte probabilité de "survitesses" vis-à-vis de  $\bar{U}(y_0)$ . Ainsi, le passage en  $y_0$  d'un tel paquet se traduit par des fluctuations de vitesse  $v'$  et  $w'$  négatives. La corrélation  $w'v'$  est alors positive. Multipliée par un gradient de vitesse  $\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  négatif (attention à l'orientation des axes) et un coefficient  $-V_I$  négatif, le terme  $-V_I w'v' \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  est positif et confirme son qualificatif de terme productif. Par

un raisonnement symétrique, si l'on considère un paquet de fluide venant d'une région  $y < y_0$ , on aboutit à une corrélation  $w'v'$  toujours positive et le terme  $-V_I w'v' \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  reste positif et participe donc à l'accroissement de l'énergie cinétique de fluctuation. En conséquence, le terme  $E_{cpf}$ , dont la principale contribution, (sous forme schématique comme ici évoquée) est  $-V_I w'v' \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  est positif. Il produit donc de l'énergie cinétique fluctuante  $K$  et se révèle déstabilisant pour l'écoulement.

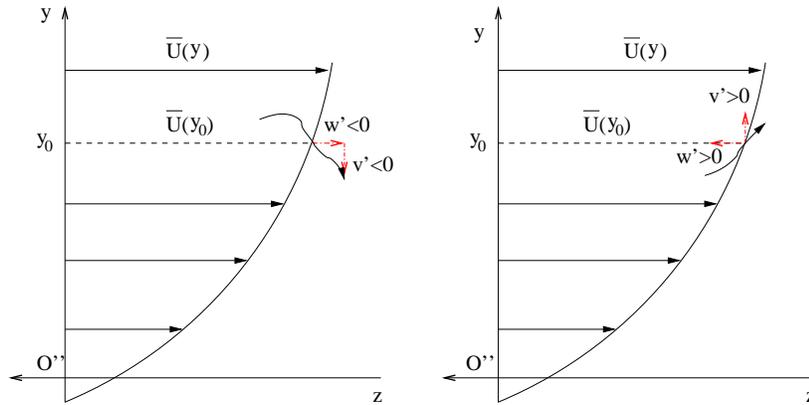


FIG. 7.1 – Schéma sur la statistique du produit  $v'w'$  de l'écoulement pour un écoulement cisailé.

## 7.2 Naissance de l'instabilité oscillatoire

L'examen des valeurs des différentes contributions au bilan de l'énergie cinétique fluctuante, résumée dans le tableau 7.1 pour trois valeurs de  $A$ , montre que l'effet déstabilisant est principalement produit par les termes de cisaillement dus à la composante de la vitesse  $\bar{w}$ . La contribution des trois termes à la production totale est supérieure à 93%, alors que les termes relatifs aux deux autres composantes  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  n'ont que de faibles contributions. Dans le même ordre d'idée, la plupart de la dissipation de l'énergie cinétique fluctuante est due au terme visqueux  $D_{1_m}$  avec cependant une contribution croissante du terme de la poussée d'Archimède avec l'augmentation du rapport de forme  $A$ . Les influences respectives de  $I_{1_m}$ ,  $I_{2_m}$  et  $I_{3_m}$  sont plutôt complexes.  $I_{2_m}$ , relié au gradient vertical de  $\bar{w}$ , est généralement le principal terme déstabilisant, sauf pour  $A = 4$  où il est supplanté par  $I_{3_m}$ . Il est intéressant de noter que  $I_{3_m}$  peut avoir un effet stabilisant ou déstabilisant suivant la valeur du rapport de forme : il est légèrement négatif et donc légèrement stabilisant pour  $A = 2$  et  $A = 10$ , alors qu'il se révèle positif et donc déstabilisant pour  $A = 4$ . Concernant  $I_{1_m}$ , il est toujours déstabilisant et son effet se trouve accru lorsque la valeur de  $A$  augmente.

	Rapport de forme $A$		
	$A = 2$	$A = 4$	$A = 10$
$I_{1_m}$	0.07246	0.14072	0.37065
$I_{2_m}$	0.89761	0.34473	0.67082
$I_{3_m}$	-0.03909	0.48216	-0.09538
$I_{1_m} + I_{2_m} + I_{3_m}$	0.93098	0.96761	0.94609
$D_{1_m}$	-0.93782	-0.92786	-0.83243
$D_{2_m}$	-0.06217	-0.07209	-0.16756

TAB. 7.1 – Principales contributions moyennées au bilan de l'énergie cinétique fluctuante :  $I_{1_m}$ ,  $I_{2_m}$  et  $I_{3_m}$ , contributions du cisaillement reliées respectivement à  $\partial\bar{w}/\partial x$ ,  $\partial\bar{w}/\partial y$  et  $\partial\bar{w}/\partial z$  ;  $D_{1_m}$  et  $D_{2_m}$ , contributions dissipatives reliées respectivement aux effets visqueux et à la poussée d'Archimède.

Nous décomposerons maintenant les principaux termes  $I_{2_m}$  et  $I_{3_m}$  en deux facteurs, l'un relié aux champs fluctuants et l'autre au cisaillement de l'écoulement moyen, et nous quantifierons leur influence respective. Dans ce but, nous écrivons :

$$I_{2_m} = \int_{\Omega} S_{2_m} d\Omega = \int_{\Omega} \langle S_2 \rangle d\Omega = \int_{\Omega} S_{21} S_{22} d\Omega \text{ où } S_{21} = \langle -\sqrt{Gr} w' v' \rangle \text{ et } S_{22} = \frac{\partial\bar{w}}{\partial y} \quad (7.9)$$

$$I_{3_m} = \int_{\Omega} S_{3_m} d\Omega = \int_{\Omega} \langle S_3 \rangle d\Omega = \int_{\Omega} S_{31} S_{32} d\Omega \text{ où } S_{31} = \langle -\sqrt{Gr} w' w' \rangle \text{ et } S_{32} = \frac{\partial\bar{w}}{\partial z}. \quad (7.10)$$

Notons que  $S_{21}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{31}$  et  $S_{32}$  ne sont pas moyennées dans l'espace et dépendent donc des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Nous pouvons nous attendre à ce que les fortes valeurs de  $I_{2_m}$  et  $I_{3_m}$  soient localisées dans les endroits où les quantités  $S_{i1}$  et  $S_{i2}$  ( $i = 2, 3$ ) ont des valeurs élevées mais aussi

spatialement corrélées. La représentation graphique de chacune de ces quantités va nous montrer le caractère tridimensionnel complexe de la structure de l'écoulement.

### 7.2.1 Cas $A = 4$

L'analyse pour ce cas est donnée sur la figure 7.4. Sur la figure 7.4(a), nous avons premièrement représenté les termes  $S_{31}$  (isosurface colorée) et  $S_{32}$  ("meshed" isosurface) qui se rapportent au terme de cisaillement  $I_{3_m}$ . Afin que  $I_{3_m}$  ait une contribution non nulle,  $S_{31}$  et  $S_{32}$  doivent être spatialement corrélés. C'est le cas ici (dans la partie centrale de la cavité) et ainsi, même si  $S_{32}$  (terme de gradient) n'est pas fortement négatif ( $(S_{32})_{plot} = -0.35742$ ),  $S_{31}$  (terme des fluctuations) est aussi négatif ( $(S_{31})_{plot} = -0.10174$ ) et la bonne corrélation donne finalement une influence déstabilisante assez forte pour  $I_{3_m}$ . Ceci est confirmé par l'isosurface positive représentée pour  $S_3$  (produit de  $S_{31}$  par  $S_{32}$ ) sur la figure 7.4(c).

Une approche identique est adoptée pour le terme de cisaillement  $I_{2_m}$  sur la figure 7.4(b).  $S_{22}$  (terme de gradient) est représenté par une "meshed" isosurface ( $(S_{22})_{plot} = -7.91522$ ). Pour leur part, deux types d'isosurfaces de  $S_{21}$  (terme des fluctuations) sont également représentées. Une isosurface positive ( $(S_{21})_{plot_p} = 0.02402$ ) se situe au centre de la cavité alors que deux isosurfaces négatives ( $(S_{21})_{plot_n} = -0.03965$ ) sont localisées à mi-chemin entre le centre et les extrémités du cylindre. Le fait que les domaines où  $(S_{22})_{plot}$  et  $(S_{21})_{plot_n}$  se trouvent intersectés induit une isosurface positive pour  $S_2$  (figure.7.4(c)) indiquant une zone de production d'énergie cinétique fluctuante. De la même façon,  $(S_{22})_{plot}$  et  $(S_{21})_{plot_p}$  conduisent à une isosurface négative pour  $S_2$  (figure.7.4(c)) indiquant une zone de dissipation d'énergie cinétique fluctuante. L'effet global de ces zones stabilisante et déstabilisante correspond à une contribution déstabilisante pour  $I_{2_m}$ , mais qui est inférieure à la contribution déstabilisante de  $I_{3_m}$ .

La principale déstabilisation de l'écoulement pour le rapport de forme  $A = 4$  est ainsi due au transport du gradient  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$  par le produit de fluctuations  $-\sqrt{Gr} w' w'$ . L'importance de ce terme  $I_{3_m}$  pour  $A = 4$  est tout d'abord connectée à l'existence d'un gradient  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$  dans le centre de la cavité. Ce gradient provient du fait que les écoulements provenant des extrémités du cylindre (de l'extrémité chaude dans la partie supérieure et de l'extrémité froide dans la partie inférieure) interagissent dans le centre de la cavité (ce ne serait pas le cas si l'écoulement était parallèle). Cependant, la partie du gradient restant petite dans  $I_{3_m}$  comparée à celle dans  $I_{2_m}$ , la prépondérance de  $I_{3_m}$  sur  $I_{2_m}$  est reliée à la contribution beaucoup plus forte de la partie fluctuante  $S_{31}$  comparée à  $S_{21}$ . En réalité,  $S_{31}$  basée sur le produit  $-w' w'$  a un signe uniformément négatif tandis que  $S_{21}$  basée sur  $-v' w'$  peut avoir un signe positif ou négatif. Par ailleurs, les fluctuations  $v'$  sont petites en comparaison des fluctuations  $w'$ .

### 7.2.2 Cas $A = 2$

L'analyse pour ce cas est donnée sur la figure 7.5. On se penche tout d'abord sur les termes  $S_{31}$  et  $S_{32}$  représentés sur la figure 7.5(a). Dans la région de valeurs significatives (négatives) de  $S_{31}$  (partie des fluctuations, "meshed" isosurface), deux isosurfaces de  $S_{32}$  (partie du gradient, isosurfaces colorées) de signe opposé interagissent avec  $S_{31}$ . On obtient ainsi différents domaines de signe opposé pour  $S_3$  comme cela peut être vu au travers de deux isosurfaces significatives de  $S_3$  représentées sur la figure 7.5(c). La contribution globale sur le domaine tout entier est finalement négative conduisant à un effet stabilisant de  $I_{3_m}$ . Concernant  $I_{2_m}$ , nous pouvons voir sur la figure 7.5(b) une isosurface  $S_{22}$  négative ("meshed" isosurface) interagissant fortement avec

une isosurface  $S_{21}$  négative (isosurface bleue). L'autre isosurface  $S_{21}$ , positive, n'interagit pas avec  $S_{22}$ . Il en résulte finalement que la contribution globale de  $I_{2m}$  est positive et donc déstabilisante. L'instabilité oscillatoire est donc pour  $A = 2$  principalement due au cisaillement habituel  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  à travers la création de perturbations le long de la surface séparant les écoulements supérieur et inférieur de sens opposé.

### 7.2.3 Cas $A = 10$

Pour  $A = 10$ ,  $S_{32}$  est significatif uniquement dans des domaines situés au proche voisinage des extrémités de la cavité et l'interaction avec  $S_{31}$  ne s'effectue que pour des valeurs positives de  $S_{32}$  (fig. 7.6(c)). Cela conduit à une contribution globalement stabilisante de  $I_{3m}$ . Concernant  $I_{2m}$  (fig. 7.6(a) et 7.6(b)), à la différence des cas  $A = 2$  et  $A = 4$ , la région de cisaillement principal  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  n'est pas dans le plan  $L_v$  mais s'est déplacée de part et d'autre de ce plan. Néanmoins, l'apparition des perturbations dans cette région de fort cisaillement est, à l'instar du cas  $A = 2$ , à l'origine de l'instabilité.

### 7.2.4 Effets du rapport de forme dans la naissance de l'instabilité

La figure 7.3 reflète l'évolution des différentes contributions  $I_{1m}$ ,  $I_{2m}$  et  $I_{3m}$  de  $I$  dans la production d'énergie cinétique fluctuante suivant le rapport de forme  $A$  pour  $Pr = 0.026$ . On relève que  $I_{1m}$  est toujours déstabilisant mais ne s'affiche jamais comme le facteur déstabilisant principal. Pour sa part,  $I_{2m}$  est toujours déstabilisant et se révèle comme le facteur le plus déstabilisant pour l'ensemble des rapports de forme étudiés à l'exception de  $A = 4$  et  $A = 5$ . On a alors affaire à une instabilité de cisaillement habituel. Par contre, pour  $A = 4$  et  $A = 5$ ,  $I_{3m}$  est le facteur le plus déstabilisant et l'on a affaire à une instabilité de cisaillement que l'on peut qualifier de "compression". Pour les autres rapports de forme,  $I_{3m}$  n'est que peu déstabilisant et voire même stabilisant pour plusieurs rapports de forme.

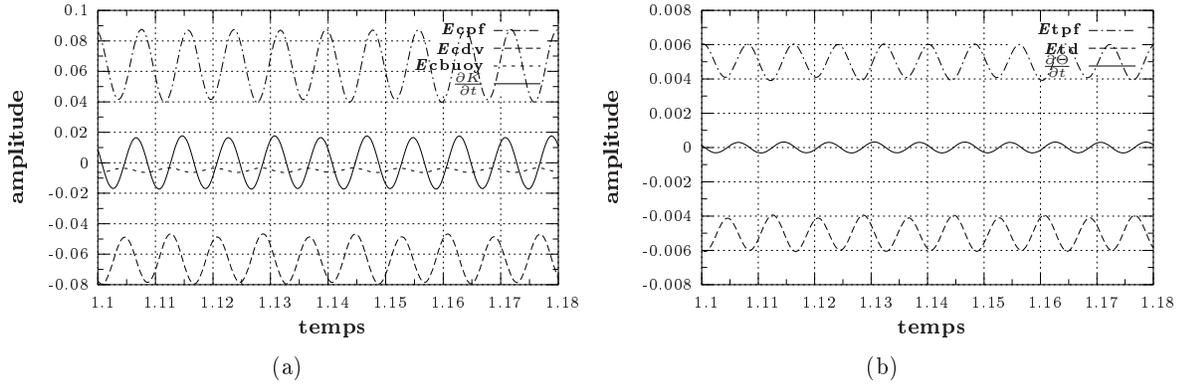


FIG. 7.2 – Évolution temporelle du taux d'énergie cinétique fluctuante  $\frac{\partial K}{\partial t}$  (fig.(7.2(a))) et du taux d'énergie thermique fluctuante  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$  (fig.(7.2(b))) ainsi que de leurs différentes contributions ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 1.8 \cdot 10^5$ ).

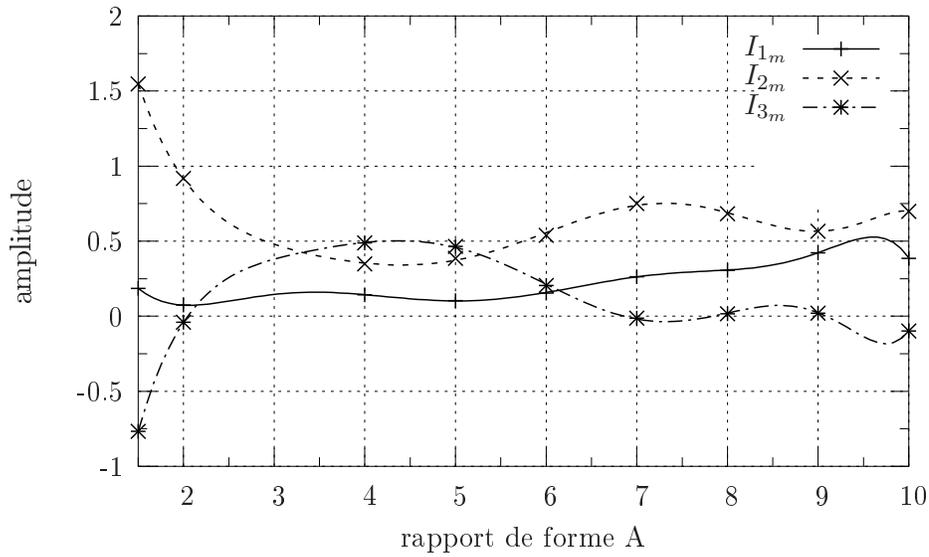
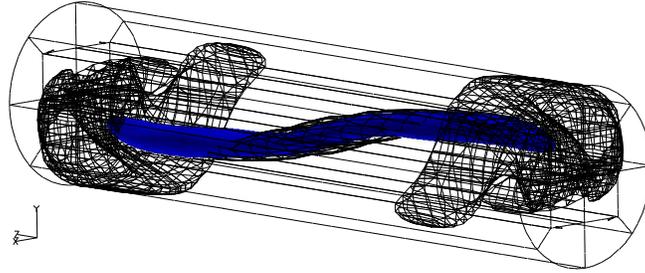
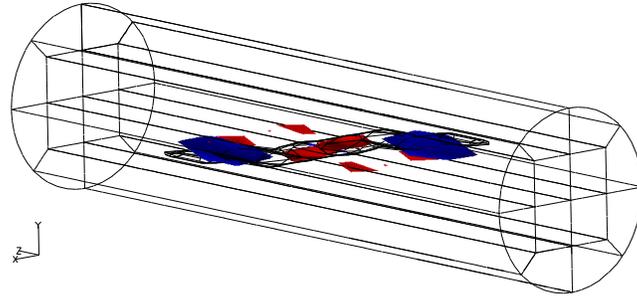


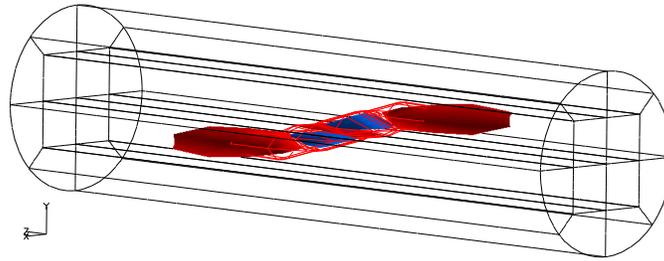
FIG. 7.3 – Évolution et contribution des trois composantes  $I_{1m}, I_{2m}$  et  $I_{3m}$  de  $I$  dans la production d'énergie cinétique fluctuante suivant le rapport de forme  $A$  pour  $Pr = 0.026$ .



(a) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}w'w' \rangle$  ( $< 0$ ) et  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$  ( $< 0$ , "meshed" isosurface)

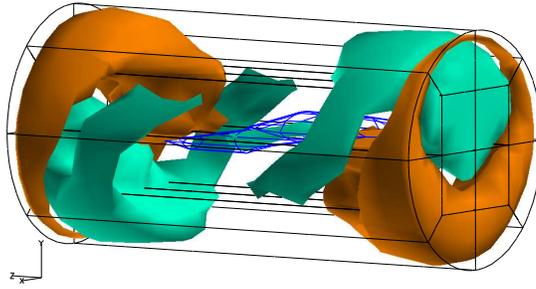


(b) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle$  ( $< 0$  et  $> 0$ ) et  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  ( $< 0$ , "meshed" isosurface)

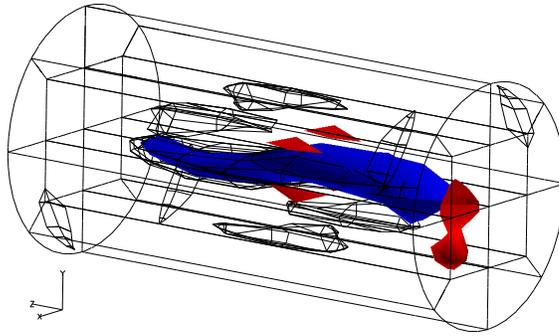


(c) superposition des isosurfaces résultantes  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \rangle$  ( $< 0$  et  $> 0$ ) et  $\langle -\sqrt{Gr}w'w' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \rangle$  ( $> 0$ , "meshed" isosurface)

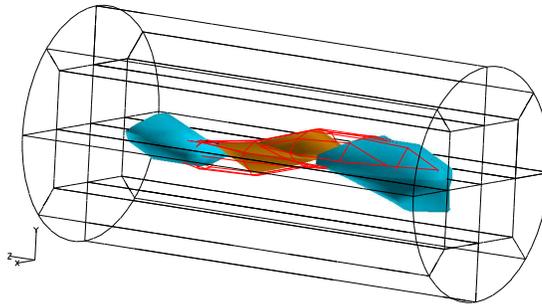
FIG. 7.4 - Isosurfaces représentatives respectivement des termes  $\langle -\sqrt{Gr}w'w' \rangle, \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$ ;  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle, \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$ ;  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \rangle$  et  $\langle -\sqrt{Gr}w'w' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \rangle$  ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 180000$ ).



(a) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}w'w' \rangle$  ( $< 0$ , "meshed" isosurface) et  $\langle \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \rangle$  ( $< 0$  et  $> 0$ )

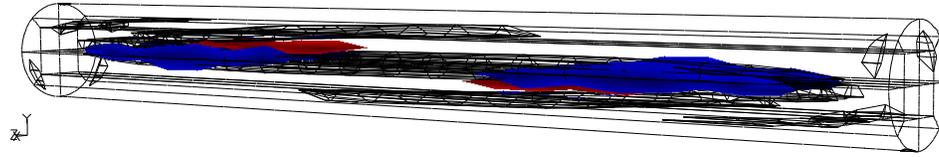


(b) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle$  ( $< 0$  et  $> 0$ ) et  $\langle \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \rangle$  ( $< 0$ , "meshed" isosurface)

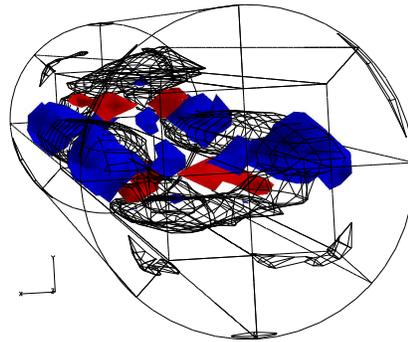


(c) superposition des isosurfaces résultantes  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \rangle$  ( $> 0$ , "meshed" isosurface) et  $\langle -\sqrt{Gr}w'w' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \rangle$  ( $< 0$  et  $> 0$ )

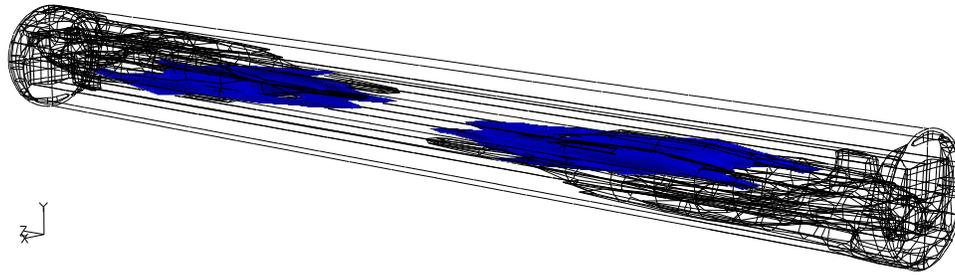
FIG. 7.5 - Isosurfaces représentatives respectivement des termes  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle$ ,  $\langle \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \rangle$ ;  $\langle -\sqrt{Gr}w'w' \rangle$ ,  $\langle \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \rangle$ ;  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \rangle$  et  $\langle -\sqrt{Gr}w'w' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \rangle$  ( $A = 2, Pr = 0.026, Gr = 236000$ ).



(a) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle$  ( $< 0$  et  $> 0$ ) et  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  ( $< 0$ , "meshed" isosurface)



(b)



(c) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}w'w' \rangle$  ( $< 0$ ) et  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$  ( $> 0$ , "meshed" isosurface)

FIG. 7.6 – Isosurfaces représentatives respectivement des termes  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle$ ,  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$ ; (fig. 7.6(a) et fig. 7.6(b) vue sous un autre angle);  $\langle -\sqrt{Gr}w'w' \rangle$ ,  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$ ; ( $A = 10$ ,  $Pr = 0.026$ ,  $Gr = 850000$ ).

## Influence du nombre de Prandtl

L'étude par D.N.S, P.O.D. et analyse énergétique s'est cantonnée jusqu'à présent aux écoulements d'un fluide caractérisé par un nombre de Prandtl  $Pr = 0.026$  dans des cavités de rapport de forme différents. Nous envisageons désormais l'influence du nombre de Prandtl  $Pr$ . Tout d'abord, nous étudions l'écoulement pour  $Pr = 0$  où les effets thermiques sont totalement absents. Ensuite, nous nous penchons sur les cas  $Pr = 0.055$  et  $Pr = 0.075$  où les effets thermiques jouent désormais un rôle majeur au travers de l'existence de couches limites thermiques au niveau des extrémités du cylindre.

### 8.1 Étude du cas $Pr = 0$

Nous avons vu, à l'aide de l'équation (1.24), que le nombre de Prandtl  $Pr$  représente le rapport des temps  $\tau_{diff_T}/\tau_{diff_v}$  où  $\tau_{diff_T} = \frac{L^2}{\kappa}$  et  $\tau_{diff_v} = \frac{L^2}{\nu}$  sont respectivement les temps caractéristiques de diffusion des fluctuations de température et de vitesse sur une longueur caractéristique de l'écoulement notée  $L$ . Ainsi, en considérant le cas limite où la diffusivité thermique est infinie, on obtient un temps caractéristique de diffusion de la chaleur  $\tau_{diff_T}$  qui tend vers zéro (et ainsi  $Pr \approx 0$ ). Physiquement, cela veut dire que la moindre perturbation  $\theta$  de température est instantanément diffusée et le transport de chaleur par convection est par conséquent absent. Si nous considérons l'équation de la chaleur (1.34) en prenant  $Pr = 0$ , cela se traduit dans l'équation de Navier-Stokes (1.36) par une valeur constante dans le temps (mais pas dans l'espace) du terme de poussée d'Archimède. Les équations de Navier-Stokes et de l'énergie deviennent alors découplées.

#### 8.1.1 Écoulement stationnaire

Le rapport de forme étudié est  $A = 3$  et le maillage considéré comporte  $9 \times 9 \times 43$  points pour chacun des douze éléments de la cavité cylindrique (soit  $nsg = 34443$ ). Pour  $Gr = 76000$ , l'écoulement obtenu est stationnaire et possède les trois symétries du problème, à savoir ( $S_p$ ), ( $S_a$ ) et ( $S_c$ ). Les figures 8.1(a) et 8.1(b) représentent l'écoulement dans les plans  $L_v$  et  $L_h$ . En comparaison des résultats obtenus pour  $Pr = 0.026$  et un rapport de forme identique, on note tout d'abord la faiblesse de l'intensité de l'écoulement dans sa partie centrale. Les vortex secondaires que l'on pouvait observer dans la région située à mi-distance entre le centre de la cavité et les extrémités du cylindre ont quasiment disparu ; leur interaction avec la cellule principale est très faible d'où la faible inclinaison de l'écoulement. Seules subsistent les recirculations au niveau des extrémités du cylindre dont l'intensité est non négligeable.

L'application de la méthode du Moment Angulaire Normé (M.A.N.) à cet écoulement stationnaire confirme cette observation. Nous visualisons sur la figure 8.2 les isosurfaces de deux valeurs opposées de la composante principale  $\Gamma_z$  de  $\vec{\Gamma}$ , en choisissant pour les isosurfaces de  $\Gamma_z$  des valeurs proches de ses extrema. La vorticité de l'écoulement se révèle désormais très faible dans la zone centrale du cylindre et les vortex principaux se localisent au voisinage des extrémités de la cavité. Enfin, on note l'importance grandissante des recirculations au niveau même des extrémités.

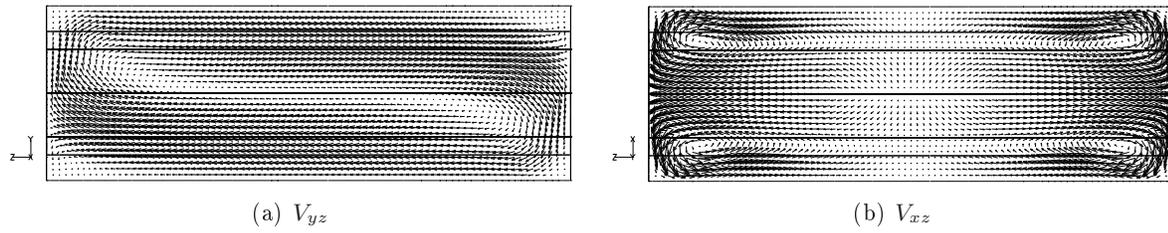


FIG. 8.1 – Champs de vitesse  $V_{yz}$  (fig.8.1(a)) et  $V_{xz}$  (fig.8.1(b)) de l'écoulement stationnaire obtenu pour  $A = 3, Gr = 76000, Pr = 0$ .

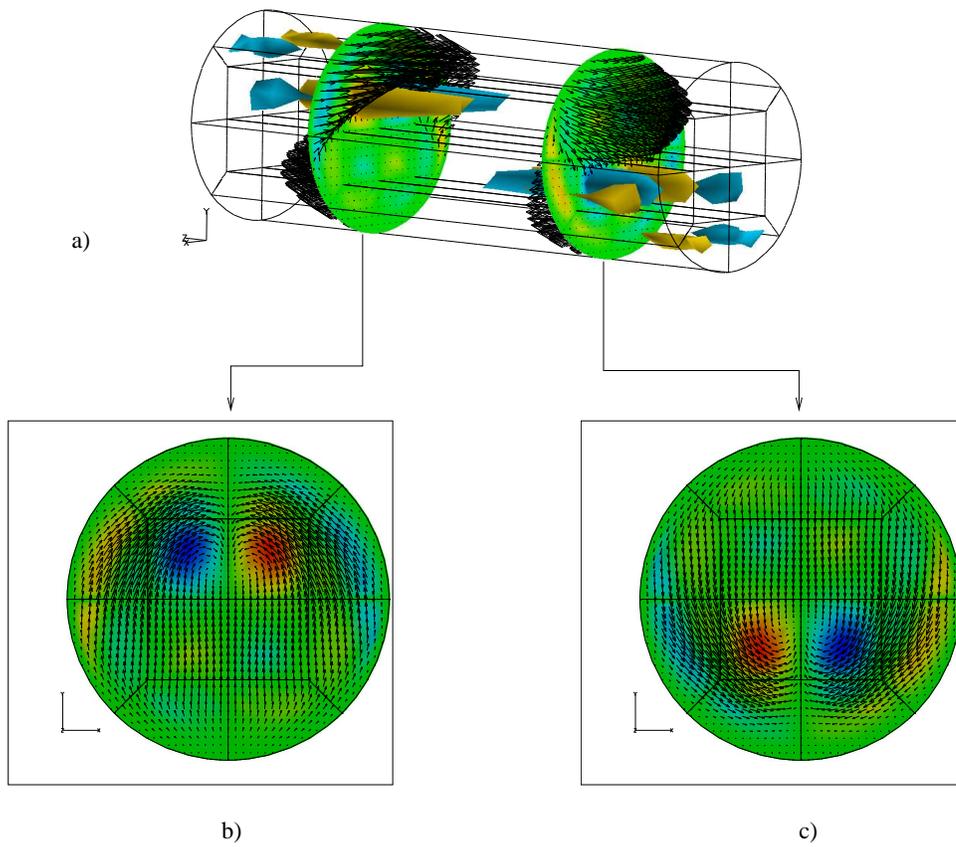


FIG. 8.2 – Représentation du champ total de vitesse  $\vec{v}$  et de la composante  $\Gamma_z$  de  $\Gamma$  dans les plan  $z_1 = 0.75$  et  $z_2 = 2.25$  et de deux isosurfaces de  $\Gamma_z$  ( $A = 3, Pr = 0, Gr = 76000$ )

### 8.1.2 Écoulement instationnaire

Le premier objectif se situe dans la localisation du seuil critique  $Gr_c$  à partir duquel l'écoulement manifeste un comportement oscillatoire. A l'instar du cas ( $A = 4, Pr = 0.026$ ), nous optons d'encadrer la valeur de  $Gr_c$  par une limite inférieure correspondant à un écoulement stationnaire et une limite supérieure correspondant à un écoulement instationnaire. Les calculs se révèlent très longs avant de pouvoir remarquer l'émergence ou non d'un régime oscillatoire. Afin d'accélérer la transition vers l'instationnarité, nous perturbons les calculs par une solution stationnaire. La valeur à partir de laquelle naît l'instabilité se situe à  $Gr = Gr_c = 95000$ . L'évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  (fig.8.3) du maillage pour  $Gr_c$  symbolise parfaitement la croissance très lente de l'instabilité oscillatoire pour  $Pr = 0$ . Ainsi, à titre d'exemple, pour un maillage de 34443 points et un pas de temps  $dt = 10^{-5}$ , le temps de calcul pour  $1 < t < 6$  est de 25 jours sur un IBM SP3 du Cines. Le temps de calcul global est d'environ 40 jours pour l'ensemble de la figure 8.3, temps au bout duquel le régime oscillatoire présente une saturation de son amplitude. La fréquence fondamentale de l'oscillation est de  $f_0 = 33.2$ .

La perturbation du système par des solutions oscillatoires ne permet pas de trouver des solutions instationnaires pour  $Gr < Gr_c$  : la bifurcation de Hopf pour ( $Pr = 0, A = 3$ ) est surcritique.

Au vu de la figure 8.4 représentant l'évolution temporelle du champ de vitesse  $V_{xz}$  et fluctuant  $V_{xz}'$  au cours d'une période  $T$ , on relève que cette bifurcation de Hopf s'accompagne de la brisure de la symétrie  $S_p$  et donc  $S_c$  mais conserve  $S_a$ . De cette manière, dans le plan horizontal ( $L_h$ ), ce phénomène se manifeste par une oscillation de l'écoulement de part et d'autre du plan médian vertical ( $L_v$ ). A la différence par exemple des cas ( $A = 4, Pr = 0.026, Gr = 180000$ ) ou ( $A = 2, Pr = 0.026, Gr = 236000$ ) où l'oscillation se caractérise par une faible intensité, le cas présent manifeste une oscillation de forte amplitude. Afin d'illustrer cette brisure de symétrie, il semble également intéressant de nous pencher sur l'évolution de la composante  $u$  de la vitesse ainsi que de ses fluctuations  $u'$  le long de l'axe ( $O'x$ ) et ( $Oz$ ) (fig.8.5). Le long de l'axe ( $O'x$ ), on constate en effet que pour deux points symétriques de part et d'autre du centre de la cavité, les valeurs de  $u$  ne sont pas opposées à un instant donné. La symétrie  $S_c$  est donc brisée et de ce fait  $S_p$ . Par ailleurs, le long de l'axe ( $Oz$ ), on constate qu'à tout instant, la valeur de  $u$  est superposable à sa fluctuation. On en déduit que la valeur moyenne  $\bar{u}$  est nulle sur l'axe ( $Oz$ ) : le fluide oscille de part et d'autre de cet axe.

L'allure de la composante  $v$  le long de l'axe ( $Oz$ ) (fig.8.6(a)) montre une différence singulière vis-à-vis du cas équivalent pour  $Pr = 0.026$ . En effet, on constate la présence d'un seul point de l'axe ( $Oz$ ), en l'occurrence le centre de la cavité, à composante  $v$  nulle. Cela confirme le fait qu'il n'y a pas de vortex secondaires venant interagir avec la cellule principale de Hadley.

Contrairement au cas  $Pr = 0.026$  pour les rapports de forme compris entre 1.5 et 6 où le plan ( $L_v$ ) constitue le lieu géométrique principal où se développe l'instabilité oscillatoire, le cas présent, de par la brisure de symétrie de ( $L_v$ ) semble indiquer un scénario tout autre. Il s'avère utile d'étudier cet écoulement par P.O.D afin de déterminer notamment les modes principaux reliés à l'instabilité oscillatoire.

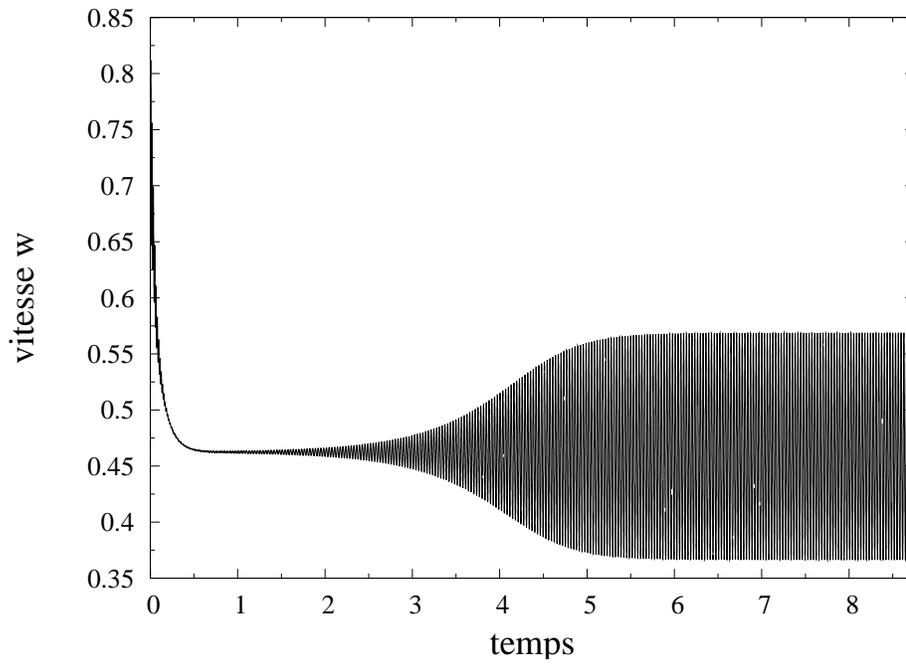


FIG. 8.3 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage ( $A = 3, Pr = 0, Gr = 95000$ ).

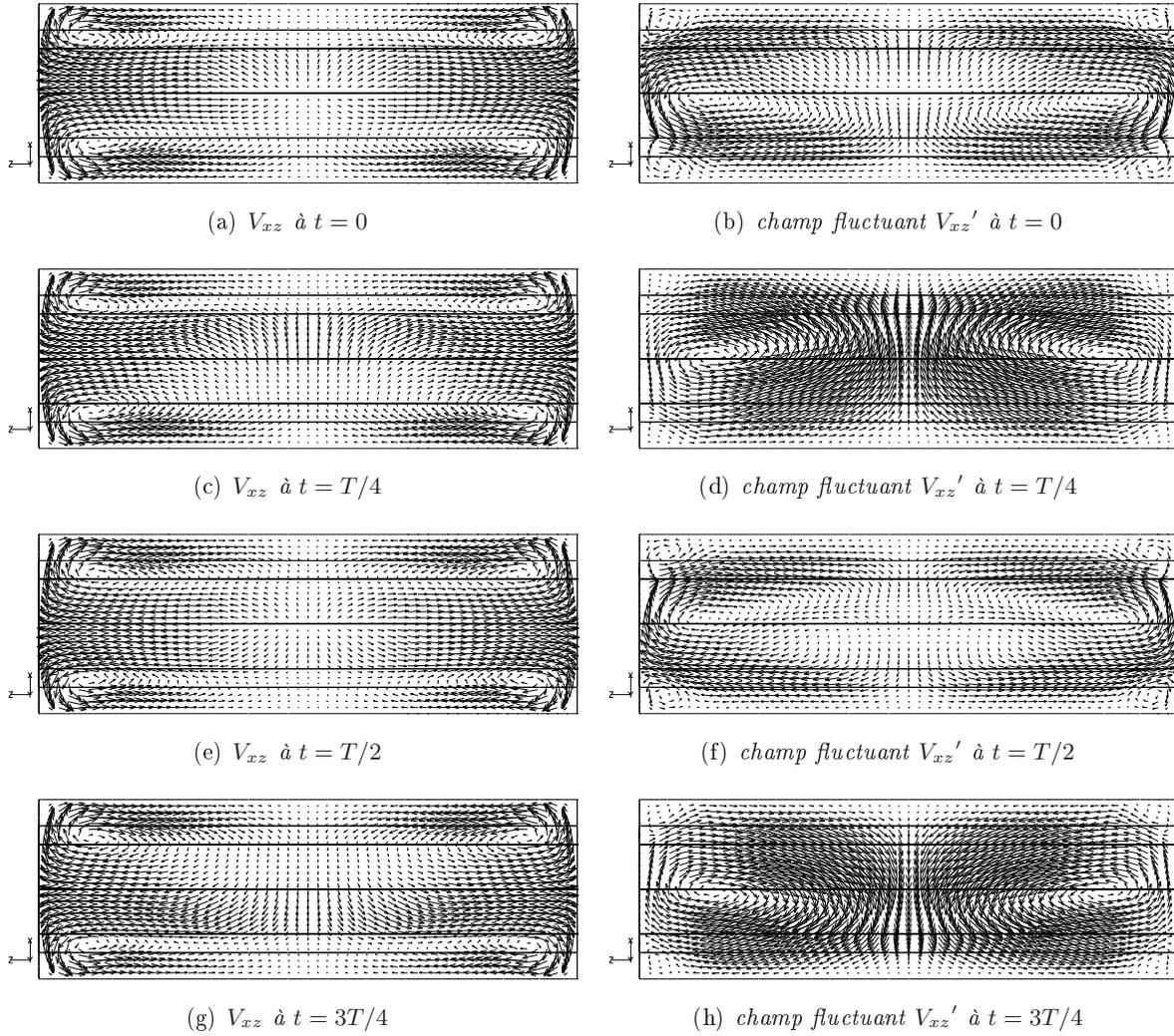


FIG. 8.4 – *Champ de vitesse  $V_{xz}$  et fluctuant  $V_{xz}'$  au cours d'une période  $T$  obtenus pour la solution instationnaire ( $A = 3, Pr = 0, Gr = 95000$ ).*

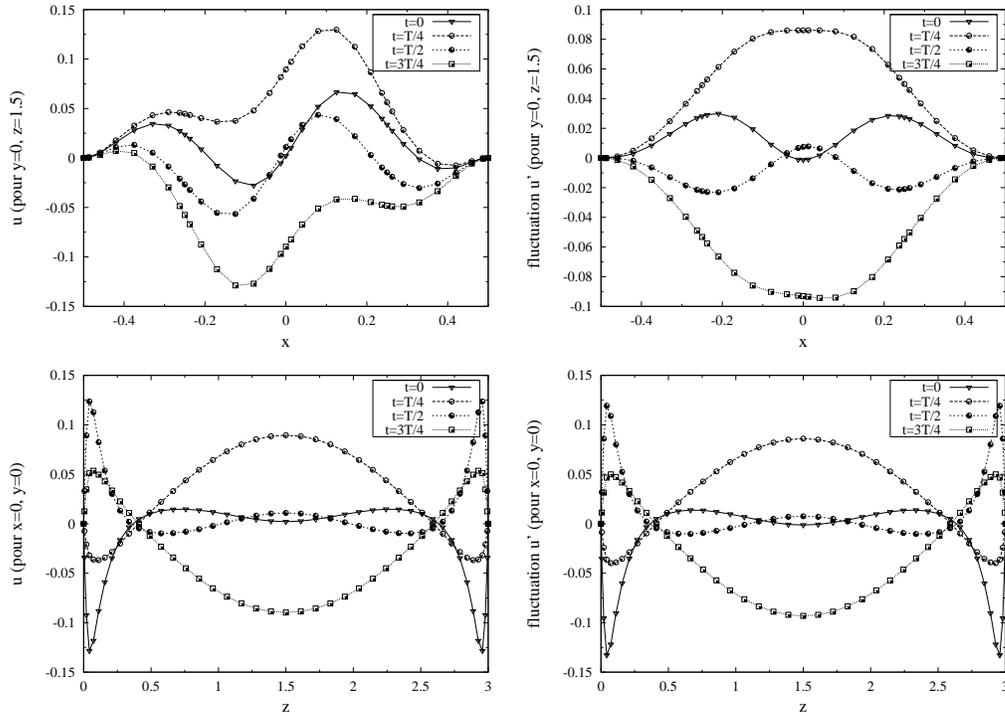


FIG. 8.5 – Profils de la composante  $u$  de la vitesse ainsi que des fluctuations associées  $u'$  le long de l'axe ( $Ox$ ) et le long de l'axe ( $Oz$ ) sur une période ( $A = 3, Pr = 0, Gr = 95000$ ).

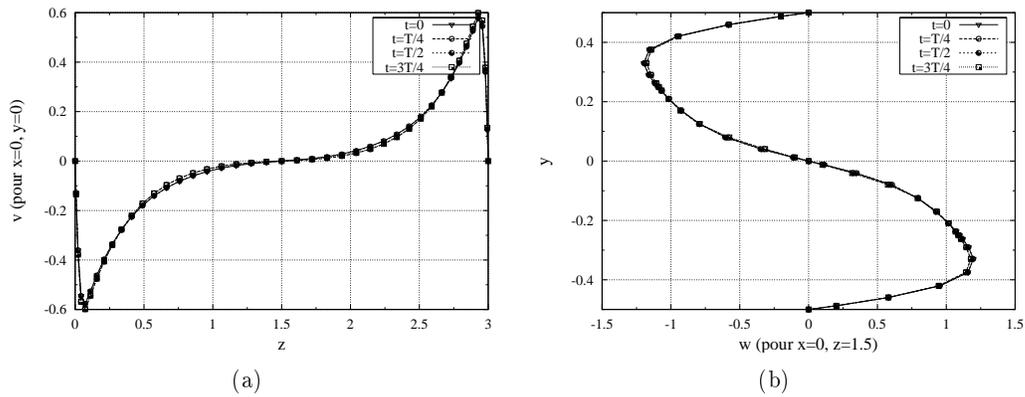


FIG. 8.6 – Profils de la composante  $v$  de la vitesse le long de l'axe ( $Oz$ ) (fig.8.6(a)) et de la composante  $w$  de la vitesse le long de l'axe ( $O'y$ ) (fig.8.6(b)) sur une période ( $A = 3, Gr = 95000, Pr = 0$ ).

### 8.1.3 Étude de l'écoulement oscillatoire par P.O.D.

Nous considérons l'écoulement obtenu pour  $Gr_c = 95000$  et une fenêtre de stockage, éloignée de la phase de croissance de l'instabilité, où l'amplitude du signal  $A_{amp}$  est constante. L'enregistrement de 1000 snapshots avec un pas  $ipsnap = 10$  permet de couvrir environ trois périodes du signal. Compte tenu du fait que  $Pr = 0$ , l'écoulement manifeste uniquement des fluctuations de vitesse. Le tableau 8.1 résume le pourcentage d'énergie cinétique fluctuante capturée par les huit premiers modes de l'écoulement obtenus lors de la première étape de la POD.

	Modes-Vitesse $\sigma_V^i$	
	%age du mode	%age cumulé
mode n°1	59.4121	59.4121
mode n°2	39.4216	98.8338
mode n°3	0.6013	99.4350
mode n°4	0.5313	99.9663
mode n°5	0.0202	99.9865
mode n°6	0.0125	99.9990
mode n°7	0.0006	99.9995
mode n°8	0.0005	100.0000

TAB. 8.1 – Pourcentage d'énergie cinétique fluctuante capturée par chaque mode  $\sigma_V^i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) et pourcentage cumulé ( $A = 3, Pr = 0, Gr = 95000, nsnap = 1000, ipsnap = 10$ ).

On remarque, comme dans les cas précédents, que la prise en compte des deux premiers modes permet de contenir plus de 98% de l'énergie cinétique fluctuante. La projection des équations du système sur un nombre de modes  $M$  fournit un système dynamique dont la résolution va nous permettre de comparer DNS et POD. Nous nous attacherons par la suite à analyser la structure spatiale des modes et voir s'il est possible de définir des structures spatio-temporelles.

#### Résolution du système dynamique

Nous avons choisi  $M = 10$  modes pour la construction du système dynamique. Les portraits de phase permettent de juger de la bonne reconstruction locale entre simulation numérique directe et résolution du système dynamique et ce même en considérant des modes d'indice élevé. Il est à noter la quasi-exacte concordance pour les sept premiers portraits de phase (fig.8.9 et 8.10), les premières différences n'apparaissant qu'à partir du huitième coefficient temporel associé à un mode ne capturant qu'environ 0.0005% de l'énergie cinétique fluctuante. Par ailleurs, le phénomène d'amplification de l'amplitude avec le temps observé précédemment dans certains cas est ici absent : même pour des temps assez longs, la reproduction est quasiment exacte.

La ségrégation des modes par la fréquence fait apparaître, à l'instar des cas précédents, des paires de coefficients à savoir  $(a_1, a_2)$ ,  $(a_3, a_4)$ ,... avec un déphasage respectif de  $T/4$ ,  $T/8$ ,... . Regardons la structure spatiale des deux premiers modes de l'écoulement (fig. 8.7 et 8.8) pour voir si, en les associant avec leur coefficient temporel respectif, il sera de nouveau possible de définir des structures spatio-temporelles.

## Structure spatiale des deux premiers modes

La première remarque concerne la localisation des perturbations. En comparaison de l'étude pour  $Pr = 0.026$  et pour un rapport de forme similaire, le plan ( $L_v$ ) n'est plus l'endroit où naissent les fluctuations. Désormais, la naissance des fluctuations les plus importantes se situe dans des zones au voisinage des plans  $x_1 = -0.25$  et  $x_2 = 0.25$ . Outre ce déplacement dans la localisation des perturbations, il est très important de comprendre que celles-ci ont désormais une répartition tridimensionnelle et que les plans  $x_1$  et  $x_2$  ne symbolisent que des plans de repérage autour desquels les fluctuations se développent. Nous présentons sur les figures 8.7(a), 8.7(b), 8.8(a) et 8.8(b) les isosurfaces significatives des fluctuations  $\sigma_w^i$  et  $\sigma_v^i$  ( $i = 1, 2$ ). Par isosurface significative, nous appelons isosurface dont la valeur est proche d'un extremum, positif ou négatif. Ainsi, sur la figure 8.7(a), les isosurfaces rouges correspondent à des zones de fortes fluctuations positives  $\sigma_{w_p}^1$  de  $\sigma_w^1$  tandis que les isosurfaces bleues correspondent à des zones de fortes fluctuations négatives  $\sigma_{w_n}^1$  de  $\sigma_w^1$ . Sur cette figure, nous avons choisi  $\sigma_{w_n}^1 = -\sigma_{w_p}^1$ . Nous n'avons toujours pas jugé utile (comme pour l'analyse énergétique) de fournir une échelle graduée de couleur : à chaque fois qu'une isosurface sera représentée, sa valeur sera proche d'un extremum et sa couleur (respectant le spectre habituel des couleurs) représentera son signe. Si l'on cherche à comparer deux isosurfaces de quantité physique différente (par exemple  $\sigma_w^1$  et  $\sigma_v^1$ ), on choisira une représentation de couleur appropriée. Ainsi, sur la figure 8.7(b), les isosurfaces positives de  $\sigma_v^1$  sont représentées en orange indiquant que leur valeur associée  $\sigma_{v_p}^1$  est inférieure à  $\sigma_{w_p}^1$  représentée en rouge sur la figure 8.7(a) (donc  $0 < \sigma_{v_p}^1 < \sigma_{w_p}^1$ ). On raisonne similairement pour des isosurfaces négatives.

Au vu des figures 8.7 et 8.8 représentant les deux premiers modes, nous pouvons tout d'abord noter le caractère antisymétrique de la perturbation oscillatoire. D'un point de vue spatial, le premier mode est constitué de deux rouleaux contrarotatifs autour d'un d'axe vertical  $\vec{e}_y$  représentant les zones de grandes fluctuations capturant en majorité l'énergie cinétique fluctuante. En raison du confinement de la cavité, ces rouleaux contrarotatifs subissent une déformation dans la région avoisinant les parois latérales "inférieure" et "supérieure". L'axe  $\vec{e}_y$  des rouleaux doit donc plutôt être considéré comme une direction principale autour de laquelle les rouleaux s'organisent. Le caractère tridimensionnel des perturbations est encore plus marqué si l'on regarde le mode n°2. Dans une zone proche du plan  $x = 0.25$ , le champ fluctuant de vitesse s'organise sous la forme d'un rouleau d'axe ( $O'x$ ) et présente une légère inclinaison. On trouve son homologue contrarotatif dans la région avoisinant le plan  $x = -0.25$ . Dans la zone intermédiaire de ces deux plans, l'allure du mode est beaucoup plus complexe avec notamment une forte déformation de chaque rouleau selon ( $Oz$ ).

Finalement, il ne semble pas possible pour ce cas de définir un déphasage spatial entre le mode n°1 et le mode n°2. Par conséquent, nous ne pouvons parler de structure spatio-temporelle pour le cas  $Pr = 0$ .

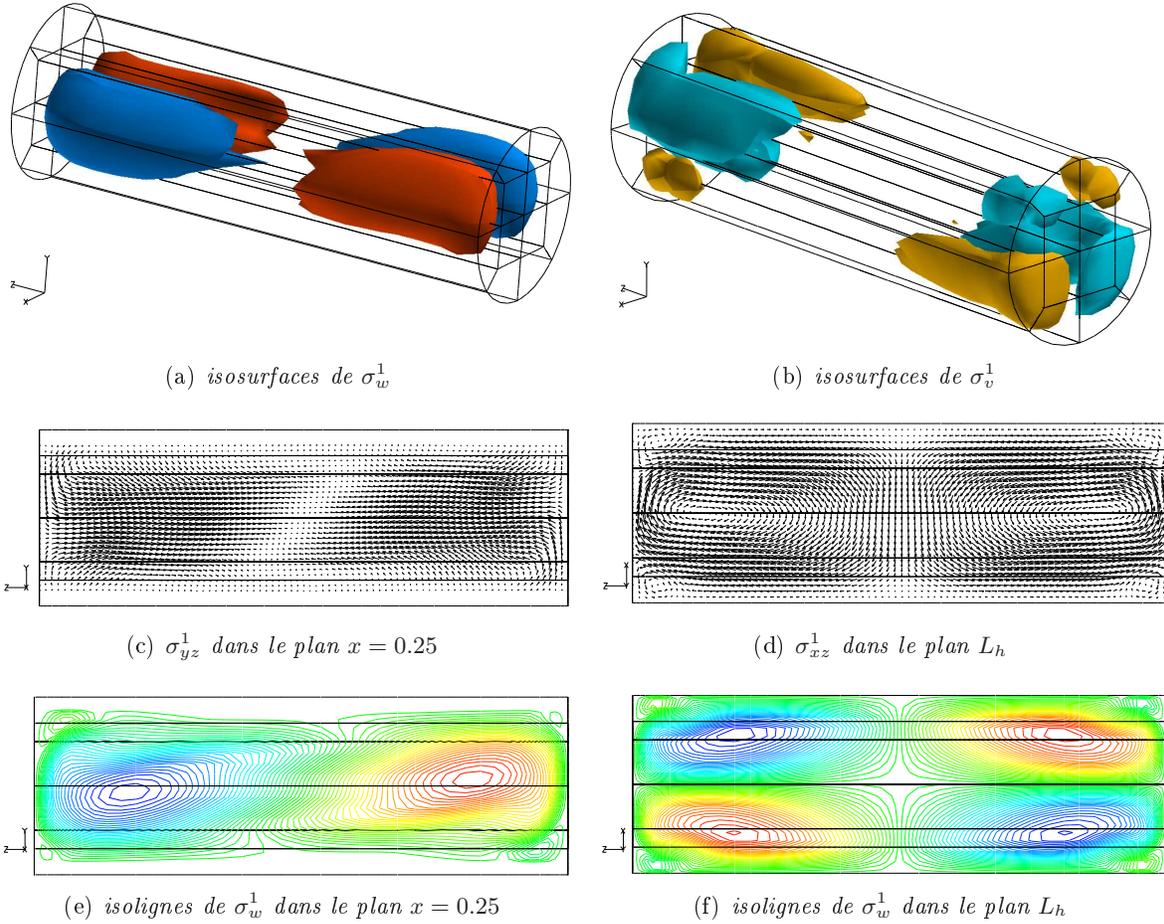


FIG. 8.7 – Représentation du mode n°1. Sur la première ligne, représentation de deux isosurfaces caractéristiques de  $\sigma_w^1$  (fig.8.7(a)) et de  $\sigma_v^1$  (fig.8.7(b)). Sur la deuxième ligne, représentation de  $\sigma_{yz}^1$  dans le plan  $x = 0.25$  (fig.8.7(c)) et de  $\sigma_{xz}^1$  dans le plan  $L_h$  (fig.8.7(d)). Sur la troisième ligne, représentation des isolignes de  $\sigma_w^1$  dans le plan  $x = 0.25$  (fig.8.7(e)) et dans le plan  $L_h$  (fig.8.7(f)) ( $A = 3, Pr = 0, Gr = 95000, n_{snap} = 1000, ip_{snap} = 10$ ).

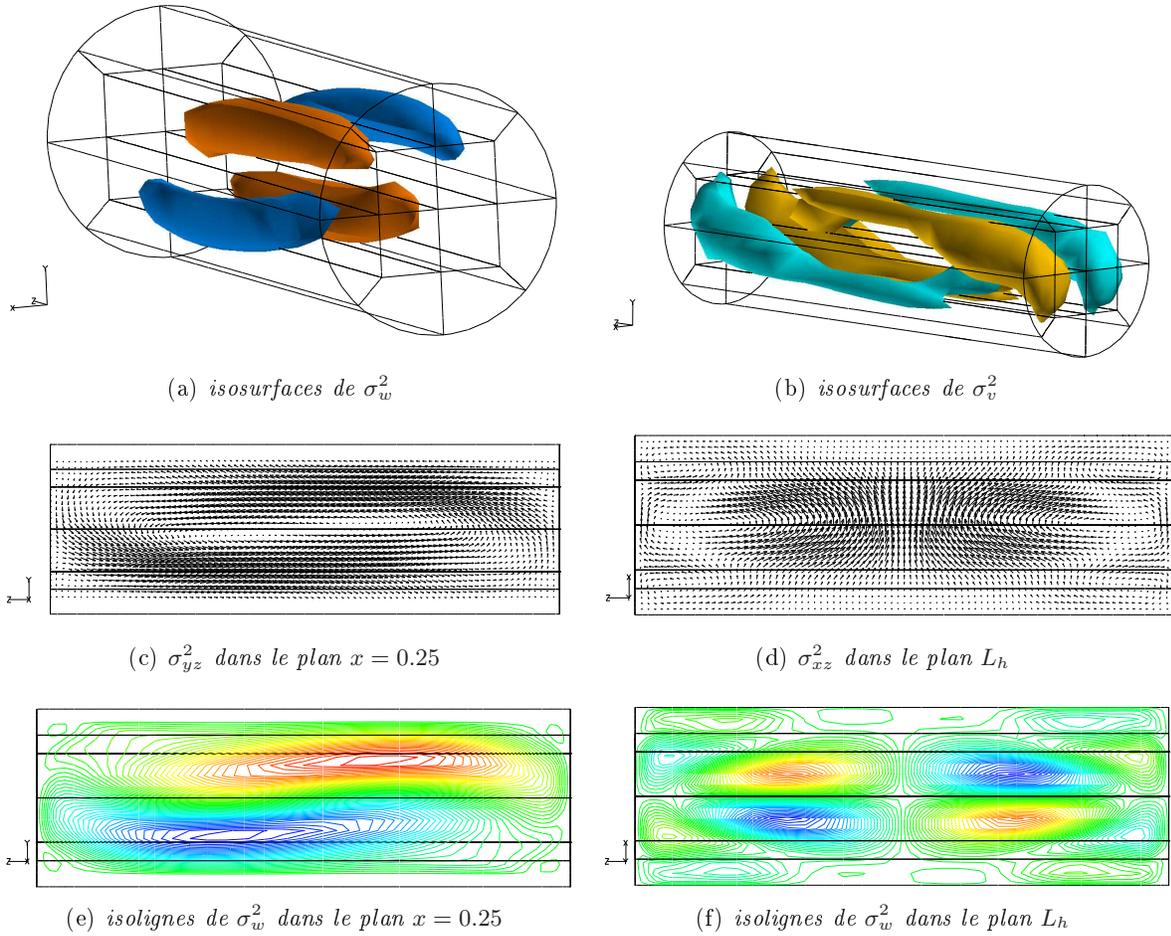


FIG. 8.8 – Représentation du mode n°2. Sur la première ligne, représentation de deux isosurfaces caractéristiques de  $\sigma_w^2$  (fig.8.8(a)) et de  $\sigma_v^2$  (fig.8.8(b)). Sur la deuxième ligne, représentation de  $\sigma_{yz}^2$  dans le plan  $x = 0.25$  (fig.8.8(c)) et de  $\sigma_{xz}^2$  dans le plan  $L_h$  (fig.8.8(d)). Sur la troisième ligne, représentation des isolignes de  $\sigma_w^2$  dans le plan  $x = 0.25$  (fig.8.8(e)) et dans le plan  $L_h$  (fig.8.8(f)) ( $A = 3, Pr = 0, Gr = 95000, n_{snap} = 1000, ipsnap = 10$ ).

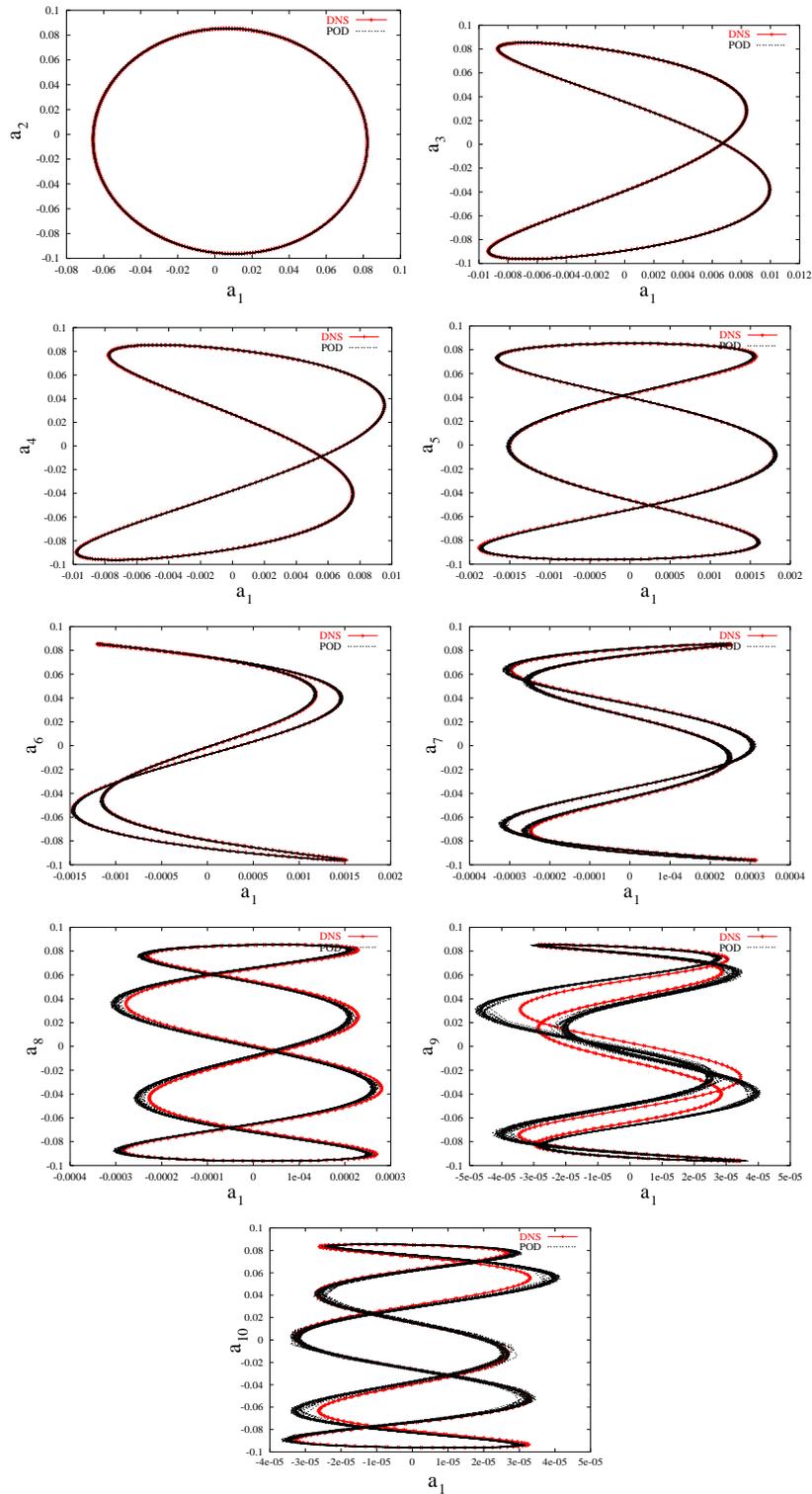


FIG. 8.9 – Portraits de phase des coefficients temporels  $a_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 10$ ) évalués à partir des résultats DNS et par résolution sur des temps longs du système dynamique réduit obtenu par la projection sur  $M_V = 10$  modes ( $A = 3, Pr = 0, Gr = 95000$ ).

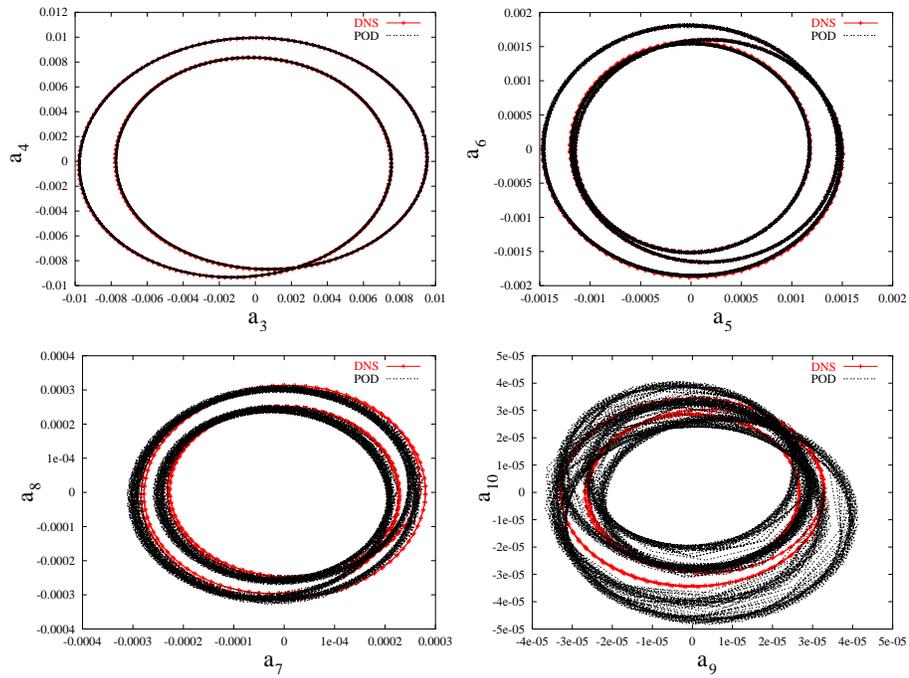


FIG. 8.10 – Portraits de phase des coefficients temporels  $a_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 10$ ) évalués à partir des résultats DNS et par résolution sur des temps longs du système dynamique réduit obtenu par la projection sur  $M_V = 10$  modes ( $A = 3, Pr = 0, Gr = 95000$ )

### 8.1.4 Détermination de l'origine de l'instabilité

Afin de déterminer le mécanisme de transition de l'écoulement, nous avons de nouveau recours à l'emploi de l'analyse énergétique. Compte tenu du champ purement diffusif de la température, l'instabilité ne peut être dans ce cas que purement hydrodynamique. Concernant l'équation de Orr-Reynolds obtenue à partir de l'équation de Navier-Stokes, elle est identique à l'équation (7.1) avec le terme dû à la poussée d'Archimède  $E_{cbuoy} = 0$ . Si l'on se penche sur l'évolution temporelle du taux d'énergie cinétique fluctuante  $\frac{\partial K}{\partial t}$  (fig.8.11), on note que l'effet déstabilisant est bien entendu dû au terme de cisaillement et plus précisément dû en très grande partie au cisaillement de la composante principale  $\bar{w}$  du champ moyen (fig.8.12). Ainsi, parmi ses trois composantes, celle relative au cisaillement suivant la direction verticale,  $I_2$ , est prépondérante. Cependant, afin d'approfondir cette notion d'instabilité de cisaillement, nous utilisons, comme à l'accoutumée, les notations  $S_{21}$  et  $S_{22}$  déjà définies (eq.7.9) pour  $I_{2_m}$  et nous nous aidons dans notre analyse des différentes représentations d'isosurfaces de la figure 8.13.

Nous avons représenté sur les figures 8.13(a) et 8.13(b) deux isosurfaces de  $S_{21}$ , l'une négative  $(S_{21})_{plot_n} = -0.25$  (isosurface bleue) et l'autre positive  $(S_{21})_{plot_p} = 0.075$  (isosurface orange). La différence entre ces deux figures réside dans le signe du gradient  $S_{22}$ . Il est négatif (fig.8.13(a)) dans les zones où la vitesse  $\bar{w}$  augmente (en valeur absolue) lorsqu'on s'éloigne du plan  $L_h$  : cette zone correspond au coeur de l'écoulement. A l'opposé, en se rapprochant des parois latérales, l'intensité de  $\bar{w}$  diminue pour s'annuler au niveau des parois ;  $S_{22}$  est alors positif (fig.8.13(b)). Cette dernière zone correspond à la couche limite. Sur la figure 8.13(a), afin de situer les zones de production d'énergie, nous cherchons donc à localiser les zones où  $S_{21} < 0$  (i.e.  $\langle w'v' \rangle$  est positif). Pour cela, nous allons tenter de donner une explication en nous basant sur l'allure des deux premiers modes précédemment évalués par la POD. Nous considérons que ces deux premiers modes représentent globalement le champ fluctuant. Trois cas se profilent :

- le mode n°1 "interagit" avec lui-même.

Pour ce cas, le fait d'avoir deux rouleaux centrosymétriques contrarotatifs inclinés d'un angle  $\alpha$  au niveau des "coins" supérieur gauche et inférieur droit de la cavité induit un produit  $\langle w'v' \rangle$  fort et positif (i.e.  $S_{21} < 0$ ) car les fluctuations  $w'$  et  $v'$  sont toujours de même signe en ces zones de la cavité. Le scénario est différent dans les coins inférieur gauche et supérieur droit où l'inclinaison est plus faible. En effet, les fluctuations  $w'$  et  $v'$  y sont de signe opposé d'où un produit  $\langle w'v' \rangle$  fort et négatif uniquement dans ces zones délimitées au très proche voisinage des extrémités en raison de la faiblesse de l'angle d'inclinaison. Ces dernières zones correspondent donc en partie aux isosurfaces orangées (i.e.  $S_{21} > 0$ ) des figures 8.13(a) et 8.13(b).

- le mode n°2 "interagit" avec lui-même.

Pour ce mode, en observant le rouleau situé au voisinage du plan  $x = -0.25$  et de sens direct, les fluctuations  $w'$  et  $v'$  sont de même signe d'où  $\langle w'v' \rangle$  positif (i.e.  $S_{21} < 0$ ). Par centrosymétrie, il en va de même pour le rouleau symétrique situé au voisinage de  $x = 0.25$ .

- le mode n°1 interagit avec le mode n°2. Dans ce cas-là, les corrélations de fluctuations de vitesse  $u'_i u'_j$  font intervenir le produit  $a_1(t)a_2(t)\sigma_1(x)\sigma_2(x)$  et il faut donc prendre en compte le facteur temporel  $a_1(t)a_2(t)$  ce qui n'était pas le cas pour les deux cas précédents car l'on avait respectivement  $a_1(t)^2$  et  $a_2(t)^2$  forcément positifs. Cependant, étant donné le déphasage de  $T/4$  entre  $a_1(t)$  et  $a_2(t)$ , nous pouvons dire, qu'en moyennant sur une période, le produit  $\langle a_1(t)a_2(t) \rangle$  est positif. Ainsi, on peut à nouveau adopter une démarche parallèle aux deux précédentes. Dans ce cas, les fluctuations horizontales  $w'$  des rouleaux du

mode 1 interagissent avec les fluctuations verticales  $v'$  de signe identique du mode 2 dans le voisinage des extrémités ( $S_{21} < 0$ ). En revanche, en raison d'une très faible corrélation spatiale entre fluctuations horizontales  $w'$  du mode 2 et fluctuations verticales  $v'$  du mode 1, nous pouvons noter que la contribution  $S_{21}$  est dans ce cas minime.

Ainsi, les isosurfaces  $S_{21} < 0$  précédemment énumérées interagissent avec celles où  $S_{22} < 0$  (fig.8.13(a)) dans le coeur de l'écoulement au niveau des plans  $x = -0.25$  et  $x = 0.25$  et contribuent à déstabiliser l'écoulement. Une seconde contribution à cette déstabilisation provient de la couche limite où,  $S_{22}$  étant positif, il cohabite avec des valeurs de  $S_{21}$  également positives provenant de l'interaction entre fluctuations  $v'$  et  $w'$  du mode 1 au niveau des extrémités inférieure gauche et supérieure droite du cylindre.

Nous pouvons enfin, même si sa part est moindre dans la production de l'instabilité, nous pencher sur le terme faisant intervenir le gradient horizontal de  $\bar{w}$ ,  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$ . Le produit des fluctuations  $w'w'$  étant toujours positif, une isosurface caractéristique de  $S_{31}$  ( $< 0$ ) montre ainsi le rouleau correspondant au mode 2 avec, à mi-chemin entre le centre de la cavité et les extrémités, un renflement dû à la prise en compte des effets des deux rouleaux du mode 1 et de l'interaction entre modes 1 et 2. Concernant  $S_{32}$ , ses valeurs extrémales se concentrent au niveau des extrémités de la cavité où le fluide passe soit d'une vitesse nulle à une valeur finie ( $S_{32} > 0$ ), soit l'inverse ( $S_{32} < 0$ ). On comprend désormais le fait que sur la courbe 8.12, la contribution correspondante  $I_3$  alterne entre valeurs positives et négatives. Au cours d'une période, la distribution spatiale des fluctuations  $w'w'$  varie : elle est soit plus en corrélation avec les zones de gradient  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$  positif auquel cas l'intégrale correspondante  $I_3$  est négative, soit plus en corrélation avec les zones de gradient  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$  négatif auquel cas  $I_3$  est positive. Cependant, en moyennant  $I_3$  sur une période, on constate que  $I_{3m}$  est positif et que son effet s'avère donc déstabilisant.

En conclusion, nous observons sur la figure 8.13(d) la répartition spatiale, pour un instant donné, du taux d'énergie cinétique fluctuante  $\frac{\partial K}{\partial t}$  avec ses zones de production (en rouge) et ses zones de dissipation (en bleu). La production de  $\frac{\partial K}{\partial t}$  est assurée par un mécanisme de transfert d'énergie de l'écoulement moyen vers les fluctuations. On a noté la prépondérance du terme relatif au gradient vertical de vitesse horizontale  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  dans la production de l'énergie cinétique de fluctuation. Cette production d'énergie est ensuite convectée par l'écoulement au niveau non seulement des couches limites mais aussi des régions centrales avant d'y être dissipée par les effets visqueux.

L'étude du cas limite  $Pr = 0$  nous a permis d'analyser l'origine des instabilités purement hydrodynamiques. Par ailleurs, nous avons vu dans l'analyse de l'origine des instabilités que même pour  $Pr = 0.026$ , les fluctuations du champ thermique et leurs contributions à l'instabilité restent négligeables. Afin de mieux comprendre le rôle que peuvent jouer les fluctuations thermiques lorsque les transferts thermiques par convection sont importants, nous considérons le cas de deux fluides à nombre de Prandtl plus élevé, à savoir  $Pr = 0.055$  et  $Pr = 0.075$ .

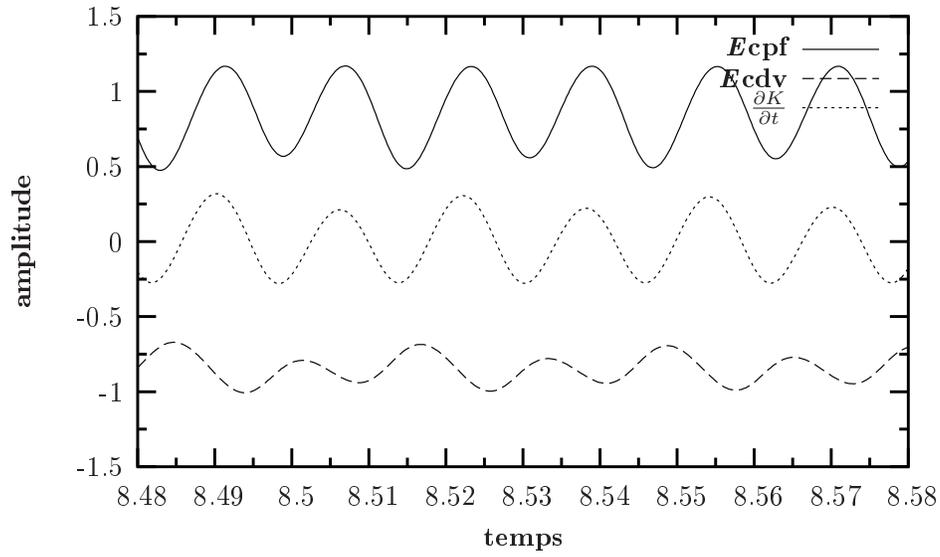


FIG. 8.11 – Évolution temporelle du taux d'énergie cinétique fluctuante  $\frac{\partial K}{\partial t}$  ainsi que de ses différentes contributions ( $A = 3, Pr = 0, Gr = 95000$ ).

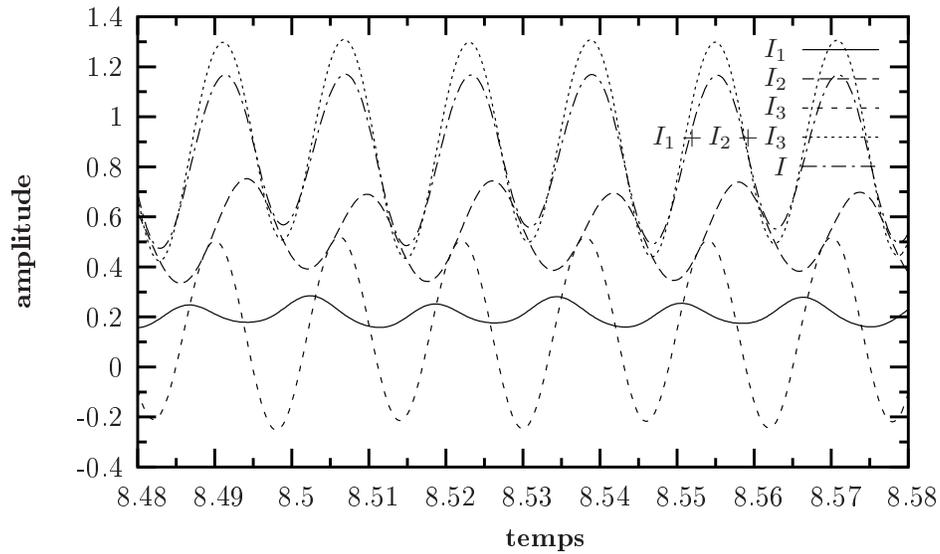
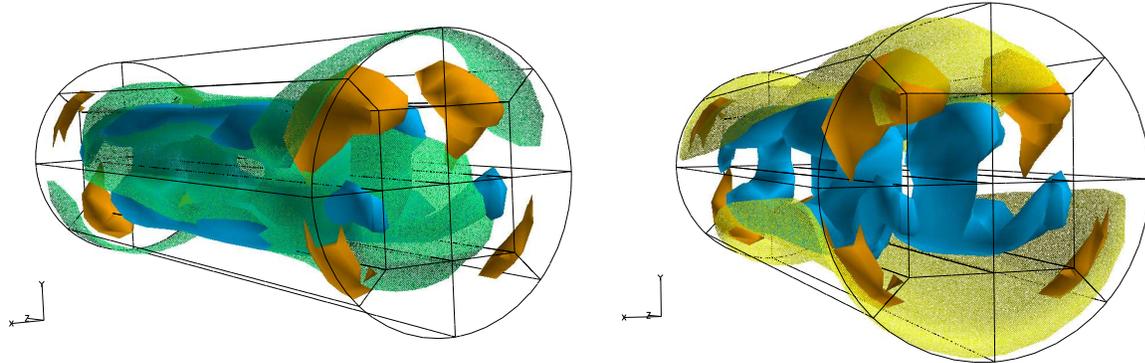
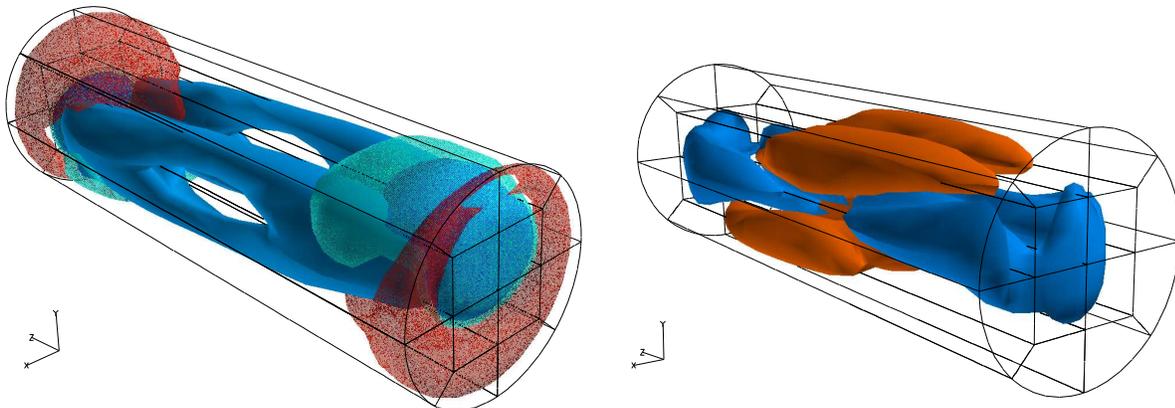


FIG. 8.12 – Évolution temporelle et contribution des trois composantes  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  de  $I$  ainsi que de leur somme dans la production d'énergie cinétique fluctuante ( $A = 3, Pr = 0, Gr = 95000$ ).



(a) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle$  ( $< 0$  et  $> 0$ ) et  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  ( $< 0$ , isosurface tamisée) (b) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle$  ( $< 0$  et  $> 0$ ) et  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  ( $> 0$ , isosurface tamisée)



(c) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}w'w' \rangle$  ( $< 0$ ) et  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$  (isosurfaces tamisées,  $< 0$  et  $> 0$ ) (d) isosurfaces de  $\frac{\partial K}{\partial t}$  ( $< 0$  et  $> 0$ ) à un instant donné

FIG. 8.13 – Isosurfaces représentatives respectivement des termes  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle$ ,  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  ( $< 0$ );  $\langle -\sqrt{Gr}w'w' \rangle$ ,  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$  ainsi que de  $\frac{\partial K}{\partial t}$  à un instant donné ( $A = 3, Pr = 0, Gr = 9.5 \cdot 10^4$ ).

## 8.2 Étude du cas $Pr = 0.055$

### 8.2.1 Structure de l'écoulement et détermination de $Gr_c$

Le rapport de forme étudié est  $A = 4$  et le maillage considéré comporte  $9 \times 9 \times 43$  points pour chacun des douze éléments de la cavité cylindrique. Pour  $Gr = 4.35 \cdot 10^6$ , l'écoulement est toujours stationnaire et présente les trois symétries du problème. Les figures 8.14(a) et 8.14(b) représentent le champ de vitesse de l'écoulement dans les plans respectifs  $L_v$  et  $L_h$ . On note que l'écoulement dans les couches limites est relativement de forte intensité à la différence de son coeur où le champ de vitesse est plus faible. Concernant le champ thermique (fig. 8.14(c)), son allure dans le plan  $L_v$  suit celle du champ de vitesse comme nous l'avons déjà observé pour  $Pr = 0.026$ . Toute la partie centrale est stratifiée verticalement alors qu'au voisinage des parois latérales, d'épaisses couches limites thermiques se forment. D'un point de vue physique et en reprenant un raisonnement parallèle à celui invoqué pour  $Pr = 0$ , si l'on considère une particule fluide appartenant initialement à une couche de fluide de température  $T_1$ , la convection l'achemine un instant plus tard dans une couche de fluide de température  $T_2$  avec  $T_2 \neq T_1$ . Cependant, compte tenu désormais de la valeur de  $Pr$ , l'échelle de temps relative au mécanisme de diffusion de la chaleur n'est pas assez petite pour gommer la fluctuation de température.

L'apparition de l'instabilité oscillatoire se situe au voisinage de  $Gr = 4.8 \cdot 10^6$  (fig.8.15). En suivant la branche oscillatoire née en  $Gr_c \sim 4.8 \cdot 10^6$ , nous trouvons des solutions oscillatoires pour des valeurs de  $Gr$  inférieures à  $Gr_c$  : la bifurcation de Hopf est sous-critique. Au vu de la figure 8.16 représentant le champ de vitesse dans le plan médian ( $xy$ ) au cours d'une période, on observe que la symétrie  $S_p$  est brisée. Compte tenu du fait qu'il est parfois difficile d'observer la brisure de la symétrie  $S_a$  à la seule vision des champs de vitesse dans le plan  $L_h$  en raison de la faible intensité des oscillations, nous choisissons ici de comparer les profils de la composante  $w$  le long de deux axes horizontaux transversaux symétriques (fig.8.17). On observe une parfaite symétrie entre les profils pris sur les axes  $k = 10$  et  $k = n_z - 10$  (avec  $n_z = 42$ ),  $k$  symbolisant l'indice des points de collocation choisis suivant l'axe  $\vec{z}$ . La symétrie  $S_a$  est donc conservée. En conclusion, l'émergence de l'instabilité oscillatoire s'accompagne de la brisure des symétries  $S_p$  et  $S_c$ .

Si l'on revient sur la structure de l'écoulement, le profil de la composante  $v$  le long de l'axe ( $Oz$ ) (fig.8.18(a)) renseigne sur l'inclinaison quasi-nulle de l'écoulement le long de cet axe. L'existence des couches limites est clairement visible sur le profil de la composante  $w$  de la vitesse le long de l'axe médian vertical ( $O'y$ ) (fig.8.29(b)).

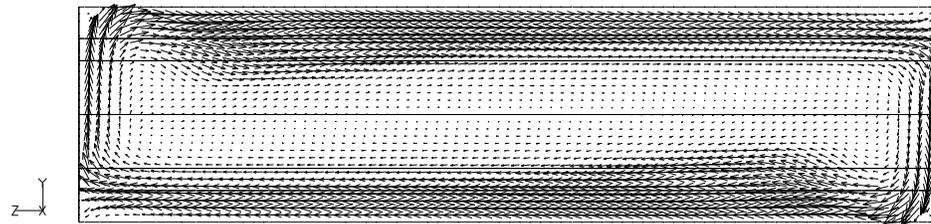
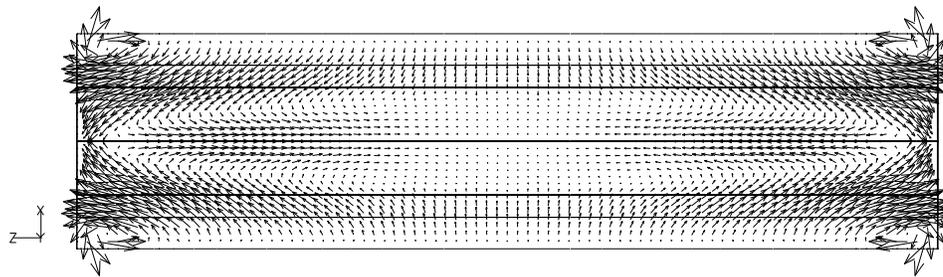
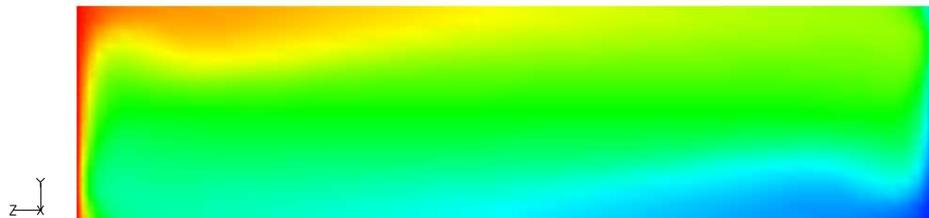
(a)  $V_{yz}$ (b)  $V_{xz}$ (c)  $T_{yz}$ 

FIG. 8.14 – Champ de vitesse  $V_{yz}$  (fig.8.14(a)),  $V_{xz}$  (fig.8.14(b)) et de température (fig.8.14(c)) de l'écoulement stationnaire obtenu pour le cas ( $A = 4$ ,  $Pr = 0.055$ ,  $Gr = 4.35.10^6$ ).

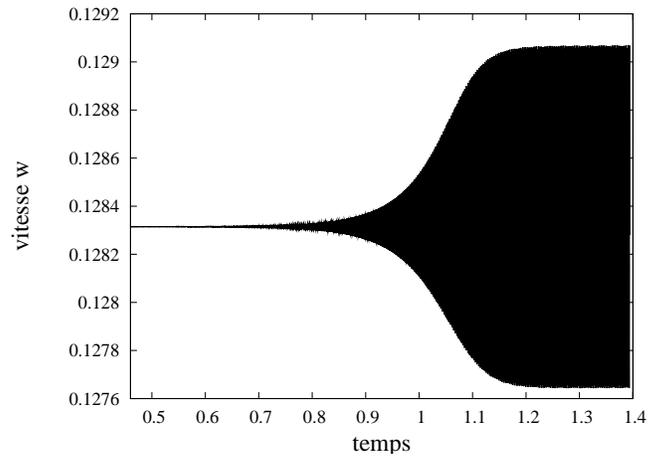


FIG. 8.15 – Évolution temporelle de la composante  $w$  de la vitesse au point  $x_1$  du maillage ( $A = 4, Pr = 0.055, Gr = 4.8 \cdot 10^6$ ).

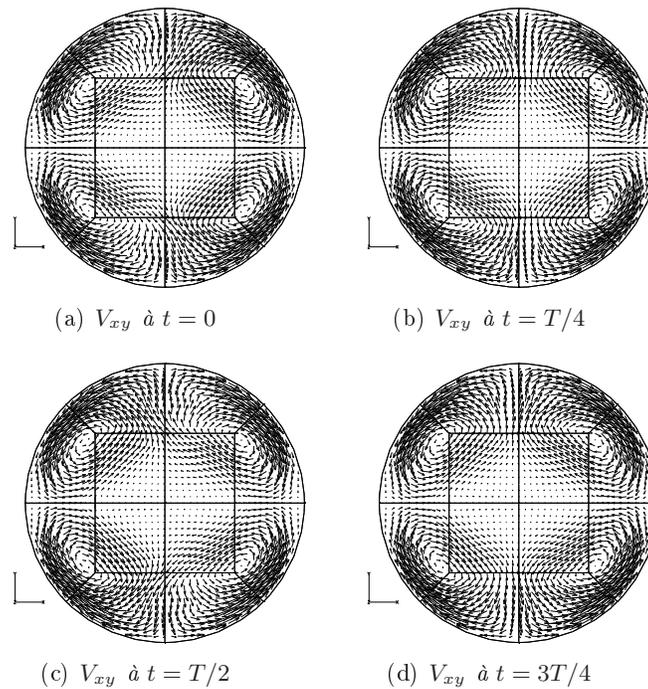


FIG. 8.16 – Champ de vitesse  $V_{xy}$  au cours d'une période  $T$  obtenu pour la solution instationnaire ( $A = 4, Pr = 0.055, Gr = 4.8 \cdot 10^6$ ).

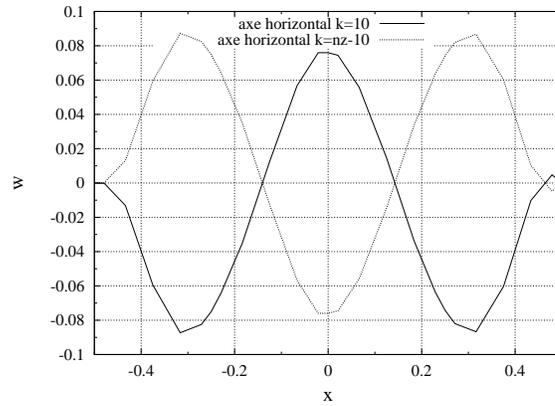


FIG. 8.17 – Profils de la composante  $w$  de la vitesse le long de deux axes horizontaux transversaux symétriques ( $Ox_k$ ) (avec  $k = 10$  et  $n_z - 10$ ) (fig.8.17) ( $A = 4, Pr = 0.055, Gr = 4.8.10^6$ ).

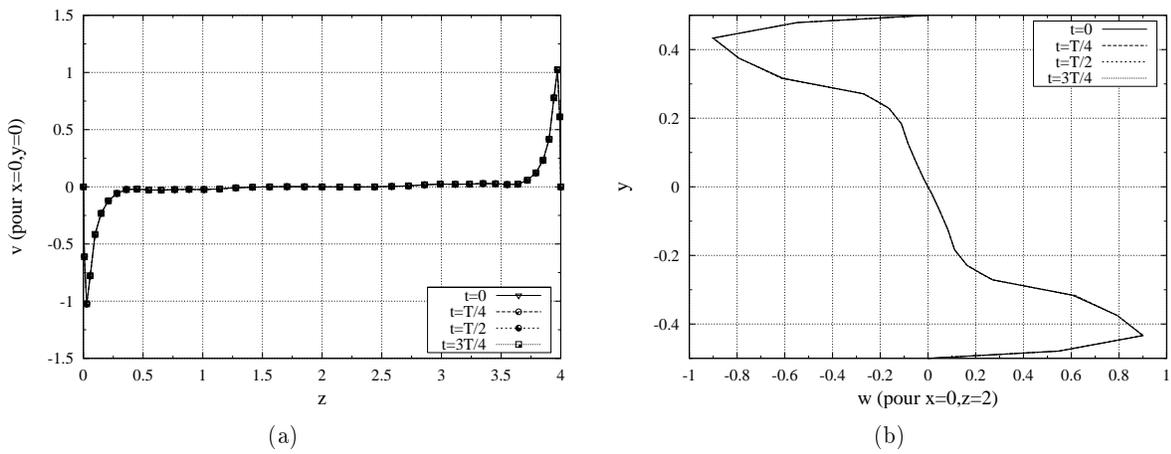


FIG. 8.18 – Profils de la composante  $v$  de la vitesse le long de l'axe ( $Oz$ ) (fig.8.18(a)) et de la composante  $w$  de la vitesse le long de l'axe ( $O'y$ ) (fig.8.18(b)) sur une période ( $A = 4, Pr = 0.055, Gr = 4.8.10^6$ ).

### 8.2.2 Étude de l'écoulement oscillatoire par P.O.D.

Pour l'étude P.O.D., nous nous basons sur l'écoulement instationnaire précédemment obtenu pour  $Gr_c = 4.8.10^6$ . Le tableau 8.2 résume le pourcentage d'énergie fluctuante capturé par les dix premiers modes de l'écoulement obtenus en utilisant la méthode- $\alpha$ . Nous précisons que l'emploi de la méthode-VT a également été utilisé mais que les distinctions observées sont faibles dans ce cas.

	Modes $\sigma^i$	
	%age du mode	%age cumulé
mode n°1	54.2632	54.2632
mode n°2	42.6768	96.9401
mode n°3	1.5120	98.4520
mode n°4	1.4611	99.9131
mode n°5	.0424	99.9555
mode n°6	0.0415	99.9970
mode n°10	$1.10^{-5}$	100.00

TAB. 8.2 – Pourcentage d'énergie fluctuante capturée par les dix premiers modes  $\sigma^i$  et pourcentage cumulé ( $A = 4$ ,  $Pr = 0.055$ ,  $Gr = 4.8.10^6$ ,  $nsnap = 300$ ,  $ipsnap = 5$ ).

Etant donné que la majorité de l'énergie fluctuante est concentrée dans les deux premiers modes (plus de 96%), nous nous concentrons sur leur étude. A l'image du cas ( $Pr = 0$ ,  $A = 3$ ), les zones de fortes fluctuations ne se situent pas dans un plan unique mais présente un fort caractère tridimensionnel. Pour le mode n°1 (fig.8.19), les fluctuations de vitesse s'organisent au voisinage des parois latérales autour des plans  $x = \pm 1/6$ . Elles sont symétriques vis-à-vis de l'axe  $H_t$ . Les fluctuations de température sont quant à elles prépondérantes dans les couches limites thermiques situées au niveau des extrémités du cylindre. Elles persistent, tout en étant de moindre intensité, le long des parois latérales où elles coexistent avec les fluctuations de vitesse. Le mode n°2 (fig.8.20) suit pour sa part, la même distribution spatiale mais capture les zones fluctuantes de plus petite taille. À la différence du cas précédent, il est possible de remarquer un déphasage spatial de  $\lambda/4$  entre les deux modes.

Comme précédemment, les coefficients temporels apparaissent toujours par paires avec à l'intérieur de chaque paire le déphasage déjà évoqué. Nous ne donnons pas les figures correspondantes car elles correspondent à des situations déjà rencontrées. En reprenant les explications fournies pour l'étude du cas ( $Pr = 0.026$ ,  $A = 4$ ), le déphasage temporel de  $T/4$  entre les coefficients temporels  $a_1$  et  $a_2$  et le déphasage spatial de  $\lambda/4$  entre les deux premiers modes implique la naissance dans la cavité d'une onde progressive ou structure spatio-temporelle notée  $\phi_1(x, t)$  et qui vaut, rappelons-le :

$$\phi_1(x, t) = \sum_{i=1}^2 a_i(t) \sigma_V^i(x) \quad (8.1)$$

**Remarque 4** : Nous ne nous attardons pas ici sur la résolution du système dynamique et sur la reconstruction POD-DNS. En effet, celle-ci est réalisée et nous préférons ne pas nous y attarder.

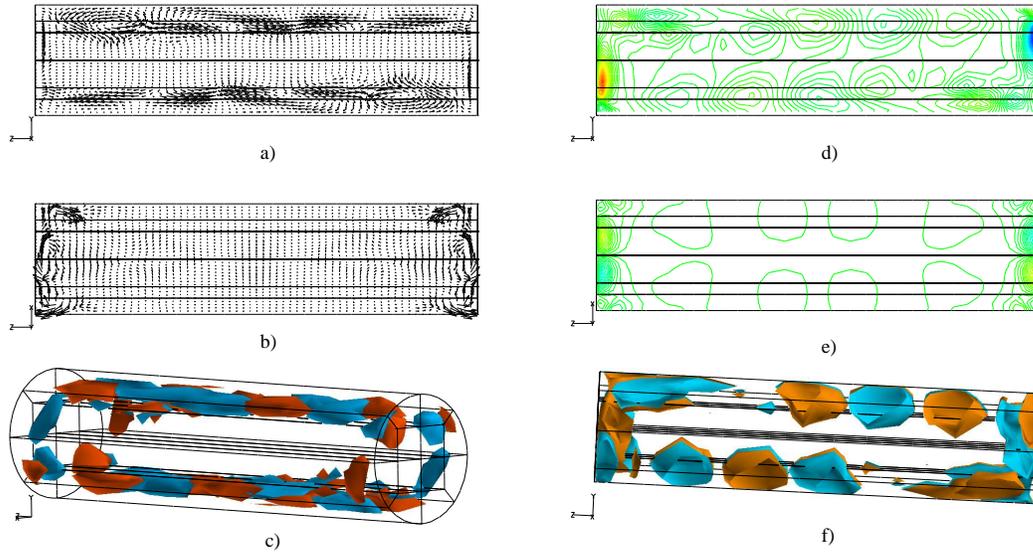


FIG. 8.19 – Représentation du mode n°1. Sur la colonne de gauche, représentation du mode vitesse dans le plan  $x = 1/6$  (fig.a) et dans le plan  $(Oxz)$  (fig.b). La figure c représente deux isosurfaces caractéristiques de  $\sigma_w^1$ . Sur la colonne de droite, représentation dans les mêmes plans (fig. d et e) du mode température  $\sigma_T^1$ . La figure f représente deux isosurfaces de  $\sigma_T^1$  ( $A = 4, Pr = 0.055, Gr = 4.8.10^6$ ).

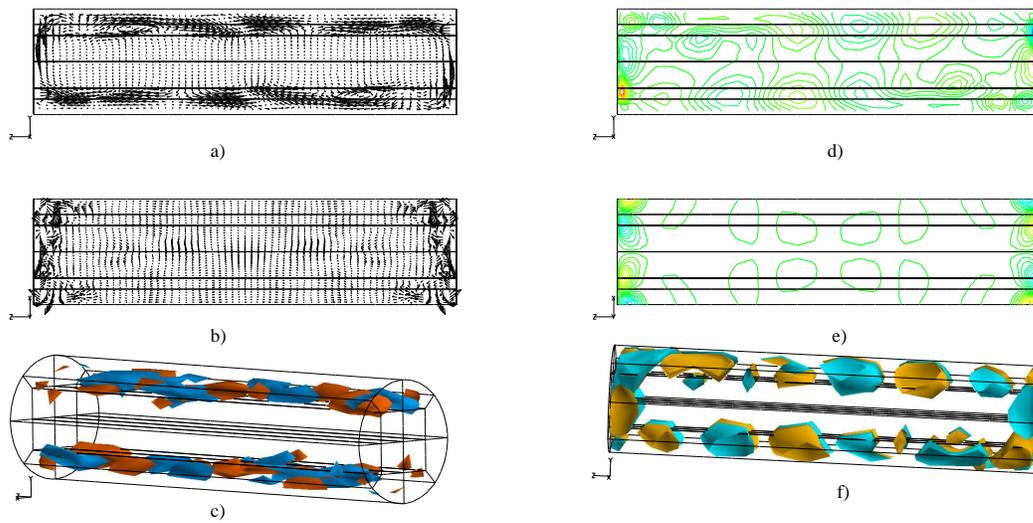


FIG. 8.20 – Représentation similaire à la figure 8.19 du mode n°2.

### 8.2.3 Détermination de l'origine de l'instabilité

En observant l'évolution temporelle du taux d'énergie cinétique et thermique de fluctuation (fig. 8.22(a)) et 8.22(b)), nous pouvons constater que leurs valeurs minimale et maximale respectives sont du même ordre de grandeur. Désormais, nous ne pouvons donc plus négliger dans l'analyse de l'origine des instabilités les effets thermiques comme ce fut le cas pour  $Pr = 0$  et  $Pr = 0.026$ . A l'inverse, l'instabilité n'est pas d'origine purement thermique : elle se profile comme une juxtaposition d'effets hydrodynamiques et thermiques. A l'aide de la figure (fig.8.22(b)), on rappelle que la production d'énergie thermique fluctuante  $\Theta$  est entièrement due au terme  $E_{tpf}$  appelé terme de production par le gradient de température moyenne. Pour plus de lisibilité, nous choisissons les notations suivantes :

$$J_{1m} = \langle J_1 \rangle = \left\langle \int_{\Omega} -\sqrt{Gr} T' u' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} d\Omega \right\rangle, \quad J_{2m} = \langle J_2 \rangle = \left\langle \int_{\Omega} -\sqrt{Gr} T' v' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} d\Omega \right\rangle \quad (8.2)$$

$$J_{3m} = \langle J_3 \rangle = \left\langle \int_{\Omega} -\sqrt{Gr} T' w' \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} d\Omega \right\rangle \quad (8.3)$$

Par ailleurs, de manière équivalente aux relations 7.9 et 7.10 précédemment évoquées, nous introduisons les termes  $T_{2m}, T_2, T_{21}, T_{22}, T_{3m}, T_3, T_{31}$  et  $T_{32}$  définis par :

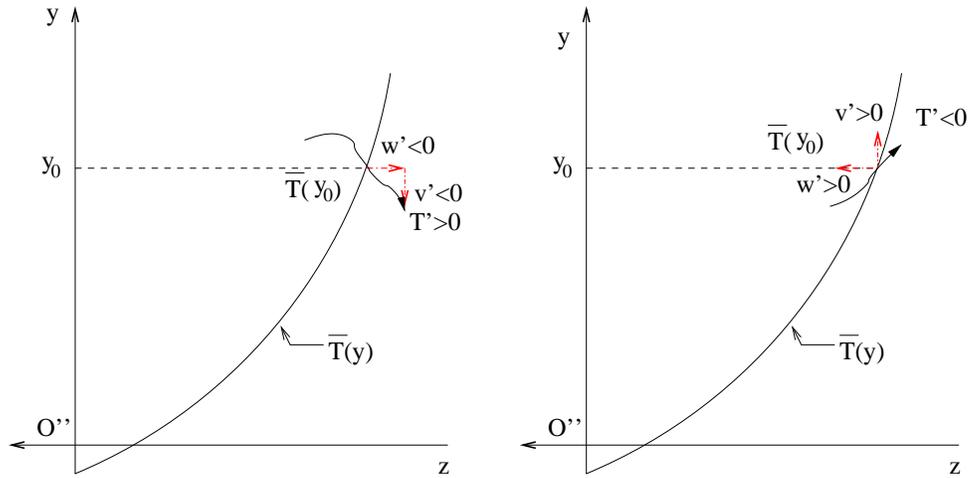
$$J_{2m} = \int_{\Omega} T_{2m} d\Omega = \int_{\Omega} \langle T_2 \rangle d\Omega = \int_{\Omega} T_{21} T_{22} d\Omega \quad \text{où } T_{21} = \langle -\sqrt{Gr} v' T' \rangle \quad \text{et } T_{22} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (8.4)$$

$$J_{3m} = \int_{\Omega} T_{3m} d\Omega = \int_{\Omega} \langle T_3 \rangle d\Omega = \int_{\Omega} T_{31} T_{32} d\Omega \quad \text{où } T_{31} = \langle -\sqrt{Gr} w' T' \rangle \quad \text{et } T_{32} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}. \quad (8.5)$$

### Mécanisme de production d'énergie thermique fluctuante

Afin d'exposer brièvement le mécanisme de production d'énergie thermique fluctuante attribuée au terme  $E_{tpf}$ , nous adoptons une démarche équivalente à celle entreprise lors de l'explication du mécanisme de production d'énergie cinétique fluctuante. Considérons donc un écoulement cisailé présentant un champ de température moyen  $\bar{T}(y)$  suivant l'allure du champ de vitesse  $\bar{U}(y)$  (fig.8.21).

Plaçons-nous en un point de côte  $y_0$  de l'écoulement où  $\bar{T} = \bar{T}(y_0)$ . On suppose alors qu'à l'instant  $t$ , un paquet de fluide en provenance d'une région  $y > y_0$  passe en ce point. Ce paquet de fluide, en raison à la fois du profil de vitesse moyenne  $\bar{U}(y)$  et de température moyenne  $\bar{T}(y)$ , présente une très forte probabilité de "survitesse" et de "surtempérature" vis-à-vis de  $\bar{U}(y_0)$  et  $\bar{T}(y_0)$ . Par conséquent, le passage en  $y_0$  d'un tel paquet se traduit par une fluctuation de vitesse  $v'$  négative et par une fluctuation de température  $T'$  positive. La corrélation  $v'T'$  est alors négative. Multipliée par un gradient de température  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$  positif et un coefficient  $-T_I$  négatif, le terme  $T_2$  est positif et est donc un terme de production. Par un raisonnement symétrique, si l'on considère un paquet de fluide venant d'une région  $y < y_0$ , on aboutit à une corrélation  $v'T'$  toujours négative et le terme  $T_2$  reste déstabilisant. Si l'on prend en compte maintenant la corrélation  $w'T'$ , on constate qu'elle est toujours négative : le terme  $T_3$  est déstabilisant.

FIG. 8.21 – Schéma sur la statistique du produits  $v'T'$ 

### Influence des différents termes dans le déclenchement de l'instabilité

Nous revenons maintenant, à l'aide des figures 8.23(a) et 8.23(b) sur les termes les plus influents dans le déclenchement de l'instabilité. L'effet hydrodynamique le plus déstabilisant reste le cisaillement de la composante  $\bar{w}$  de l'écoulement moyen avec une prépondérance de son cisaillement vertical. Ensuite, on observe la contribution du cisaillement latéral de  $\bar{w}$ . On remarque enfin l'apparition de l'effet déstabilisant du terme  $II_3$  dû au gradient longitudinal de la vitesse verticale,  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$ . Pour sa part, l'effet thermique le plus déstabilisant réside dans le gradient longitudinal de température suivi du gradient vertical de température.

Nous avons présenté les termes essentiels, tant sur le plan hydrodynamique que thermique, qui participent au déclenchement de l'instabilité oscillatoire. Il est donc intéressant de pouvoir maintenant localiser spatialement dans la cavité les zones correspondantes afin de mieux appréhender cette transition dans l'écoulement.

### Effets hydrodynamiques

Sur les deux figures 8.24(a) et 8.24(c) sont représentées deux isosurfaces de  $S_{21}$  de valeur opposée. Sur la figure 8.24(a),  $S_{22}$  est fortement négatif en s'éloignant du plan  $L_h$ , dans une zone où la vitesse  $w$  augmente et atteint son maximum. Par contre,  $S_{22}$  devient positif au tout proche voisinage des parois latérales en raison de la condition de non-glissement (fig.8.24(c)).

A la différence du cas  $Pr = 0$  où les structures constituant les deux premiers modes, bien que tridimensionnelles, sont localisables; dans le cas présent, les structures sont bien plus complexes et il apparaît difficile de déterminer l'intensité et le signe de  $S_{21}$  au vu de l'allure des deux premiers modes. Cependant, nous pouvons remarquer que dans les "coins" supérieur gauche et inférieur droit, la corrélation entre fluctuations  $v'$  et  $w'$  de signe opposé est plus importante qu'entre celles de même signe. Par conséquent, dans ces régions, le produit  $w'v'$  est majoritairement négatif d'où  $S_{21}$  est majoritairement positif. Son produit avec un gradient  $S_{22}$  positif donne une contribution déstabilisante (fig.8.24(c)). Par contre, dans la région intermédiaire de la cavité (mais toujours dans la couche limite) où  $S_{22}$  est négatif, la corrélation entre fluctuations  $v'$  et  $w'$  de même signe est

la plus forte, le produit  $w'v'$  est majoritairement positif d'où  $S_{21}$  est majoritairement négatif. Son produit avec un gradient  $S_{22}$  négatif donne une contribution toujours déstabilisante (fig.8.24(a)). La figure 8.24(g) résume la distribution du taux d'énergie cinétique fluctuante  $\frac{\partial K}{\partial t}$  dans le plan  $x = 1/6$  à un instant donné. Elle se compose comme une alternation de zones de production et de dissipation. Les zones de production de l'énergie cinétique de fluctuation d'origine hydrodynamique sont localisées tout le long des parois latérales au niveau des couches limites. La production "hydrodynamique" de l'instabilité est donc due en priorité aux effets de cisaillement de la composante  $\bar{w}$  de la vitesse se déroulant dans la couche limite visqueuse.

### Effets thermiques

Nous analysons maintenant les effets thermiques en observant l'influence des deux principaux termes  $J_2$  et  $J_3$  au travers de leur distribution spatiale respective (moyennée sur une période),  $T_{2m}$  et  $T_{3m}$  définies selon les relations 8.4 et 8.5.

La figure 8.24(b) donne une représentation spatiale du terme  $T_{2m}$ . Le gradient vertical de température  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$  est quasiment toujours positif. Cependant, au niveau du coin supérieur droit et du coin inférieur gauche, il s'avère négatif. Par conséquent, les régions corrélées avec  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} > 0$  et où  $T_{21}$  est positif donnent un produit positif et contribuent à la production d'instabilité. Ces régions sont situées au niveau des coins supérieur gauche et inférieur droit.

Enfin, nous nous intéressons à l'effet du gradient horizontal de température qui, comme nous l'avons déjà observé sur la figure 8.23(b), est le facteur thermique le plus déstabilisant. Son intensité est beaucoup plus élevée que celle du gradient vertical mais elle est localisée sur des domaines beaucoup plus restreints, à savoir les couches limites thermiques au voisinage des extrémités. Il est à noter que, malgré la faible étendue des zones où  $T_{31}$  et  $T_{32}$  sont corrélées, leur produit et leur intégration sur ces zones s'affiche comme un facteur bien plus déstabilisant que les effets combinés, pourtant beaucoup plus spatialement étendus mais d'intensité plus faible des facteurs  $T_{21}$  et  $T_{22}$ . La figure 8.24(f) résume la distribution spatiale du terme de production  $E'_{tpf}(x, t) = -\sqrt{Gr}\theta' u'_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}$  dans le plan  $x = 1/6$  à un instant donné. On observe bien le rôle capital de la production de  $\Theta$  par le terme  $T_3$  au niveau des couches limites thermiques au voisinage des extrémités. Le rôle de production joué par le terme  $T_2$  est également visible dans les coins supérieur gauche et droit mais son intensité est plus faible. On note, au proche voisinage de ces zones de production la présence, bien que de faible intensité, du terme de production négative dû au terme  $T_2$ .

En résumé, l'énergie thermique de fluctuation est produite principalement dans la couche limite aux extrémités et elle est dissipée dans la couche limite au voisinage des parois latérales supérieure et inférieure.

**Conclusion 2** : L'instabilité rencontrée pour  $Pr = 0.055$  est le produit d'effets hydrodynamiques couplés à des effets thermiques. Les facteurs déstabilisants hydrodynamiques se situent dans les couches limites situées au niveau des parois inférieure et supérieure et relèvent majoritairement du cisaillement de la composante  $\bar{w}$  de la vitesse suivant la direction verticale. Les couches limites thermiques, se développant pour leur part au niveau des extrémités de la cavité, sont le siège de forts gradients horizontaux de température dans lesquels se génère principalement l'énergie thermique fluctuante. Il est à souligner que les effets hydrodynamiques et thermiques participent tous les deux à la déstabilisation du système et qu'on peut s'attendre à ce que la contribution du

champ thermique à la déstabilisation de l'écoulement augmente lorsque la valeur du nombre de Prandtl augmente.

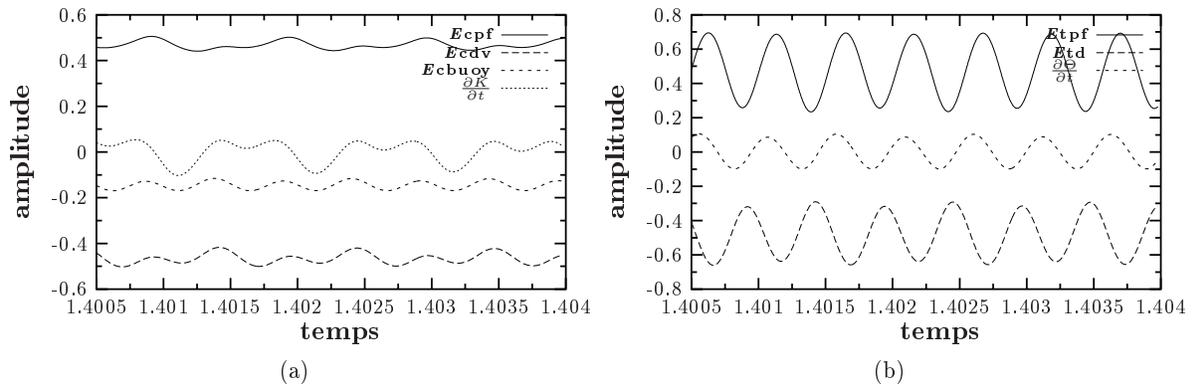


FIG. 8.22 – Évolution temporelle du taux d'énergie cinétique fluctuante  $\frac{\partial K}{\partial t}$  (fig.(8.22(a))) et du taux d'énergie thermique fluctuante  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$  (fig.(8.22(b))) ainsi que de leurs différentes contributions ( $A = 4, Pr = 0.055, Gr = 4.8 \cdot 10^6$ ).

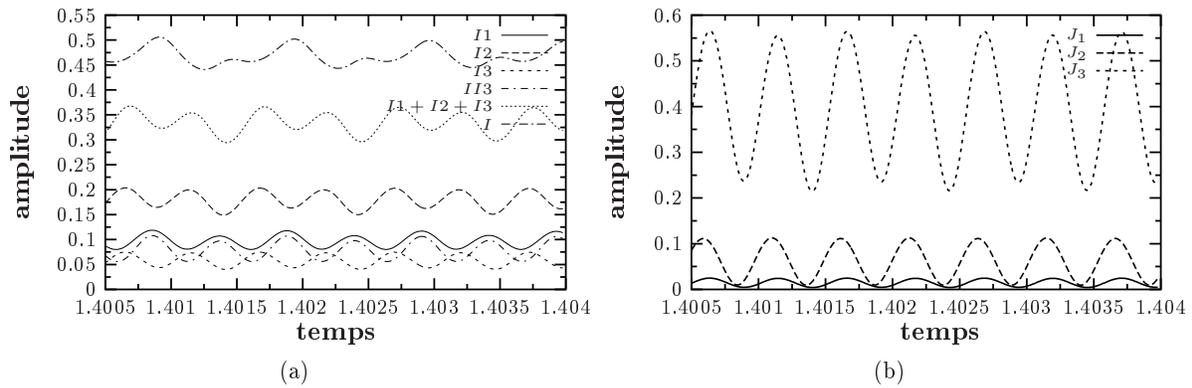
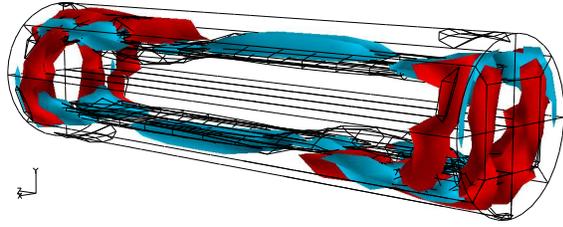
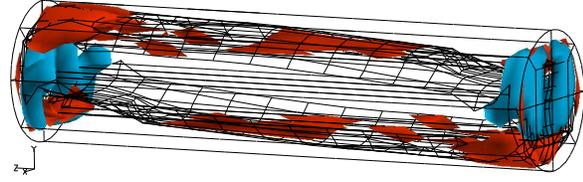


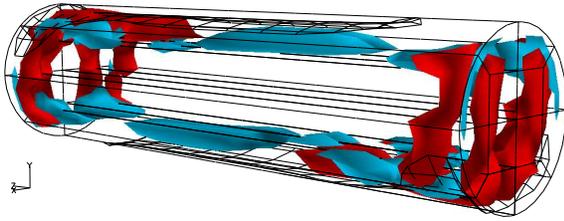
FIG. 8.23 – Évolution temporelle et contribution des composantes  $I_1, I_2, I_3$  de  $I$  et  $II_3$  (de  $II$ ) ainsi que de la somme  $I_1 + I_2 + I_3$  dans la production d'énergie cinétique fluctuante (fig.(8.23(a))). Sur la figure 8.23(b), évolution temporelle et contribution des trois composantes  $J_1, J_2$  et  $J_3$  de  $J$  dans la production d'énergie thermique fluctuante ( $A = 4, Pr = 0.055, Gr = 4.8 \cdot 10^6$ ).



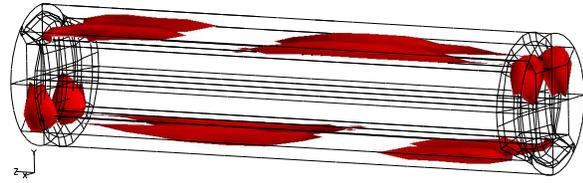
(a) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle$  ( $< 0$  et  $> 0$ ) et  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  ( $< 0$ , "meshed" isosurface)



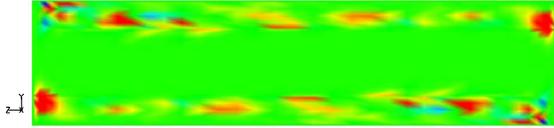
(b) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}v'T' \rangle$  ( $< 0$  et  $> 0$ ) et  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$  ( $> 0$ , "meshed" isosurface)



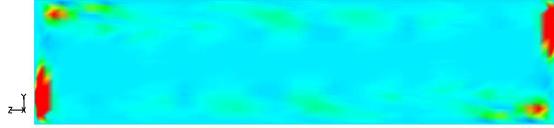
(c) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle$  ( $< 0$  et  $> 0$ ) et  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  ( $> 0$ , "meshed" isosurface)



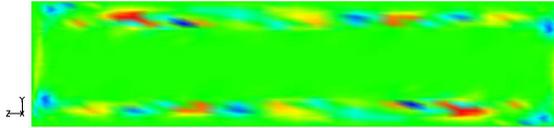
(d) isosurfaces de  $\langle -\sqrt{Gr}v'T' \rangle$  ( $> 0$ ) et  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$  ( $> 0$ , "meshed" isosurface)



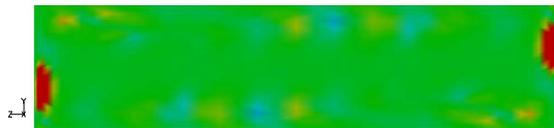
(e)  $E'_{cpf}$  dans le plan  $x = 1/6$



(f)  $E'_{tpf}$  dans le plan  $x = 1/6$



(g)  $\frac{\partial K}{\partial t}$  dans le plan  $x = 1/6$



(h)  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$  dans le plan  $x = 1/6$

FIG. 8.24 – Isosurfaces représentatives respectivement des termes  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle$ ,  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  ( $< 0$ );  $\langle -\sqrt{Gr}v'T' \rangle$ ,  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ ;  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle$ ,  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$ . De plus, représentation de  $E'_{cpf}$ ,  $E'_{tpf}$ ,  $\frac{\partial K}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$  dans le plan  $x = 1/6$  à un instant donné ( $A = 4$ ,  $Pr = 0.055$ ,  $Gr = Gr = 4.8 \cdot 10^6$ ).

### 8.3 Étude du cas $Pr = 0.075$

#### 8.3.1 Structure de l'écoulement et détermination de $Gr_c$

Nous considérons encore le rapport de forme  $A = 4$  et utilisons le même maillage comportant  $9 \times 9 \times 43$  points par élément. L'écoulement stationnaire, comme pour les cas précédents, possède les trois symétries du problème. Les figures 8.25(a) et 8.25(b) représentent les champs de vitesse d'un tel écoulement (pour  $Gr = 4.88 \cdot 10^6$ ) dans les plans respectifs  $L_v$  et  $L_h$ . La figure 8.26 représente pour sa part le champ thermique dans le plan  $L_v$ .

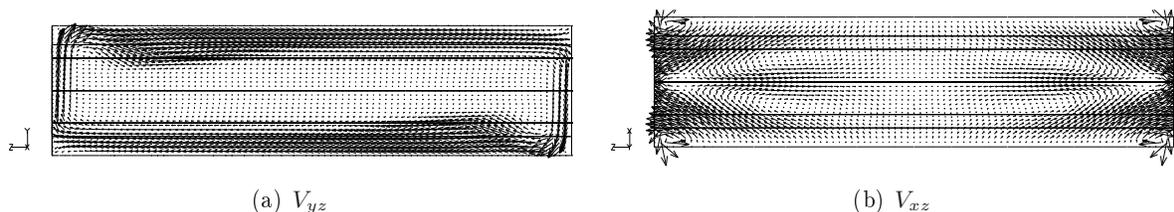


FIG. 8.25 – Champ de vitesse  $V_{yz}$  et  $V_{xz}$  de l'écoulement stationnaire obtenu pour le cas ( $A = 4, Pr = 0.075, Gr = 4.88 \cdot 10^6$ ).

Les caractéristiques du champ stationnaire sont voisines de celles observées pour  $Pr = 0.055$ . En comparaison au cas  $Pr = 0.055$ , on note cependant l'élargissement de la zone centrale où l'écoulement est de faible intensité et par conséquent le rétrécissement des couches hydrodynamiques apparaissant au niveau des parois.

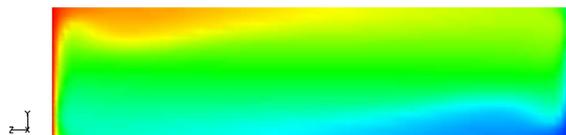


FIG. 8.26 – Champ de température  $T_{yz}$  de l'écoulement stationnaire obtenu pour le cas ( $A = 4, Pr = 0.075, Gr = 4.88 \cdot 10^6$ ).

On observe par ailleurs dans les coins supérieur gauche et inférieur droit une sorte de déformation dans le champ de vitesse (visible également dans le champ de température) que nous qualifions de ressaut et observé généralement pour les fluides à faible nombre de Prandtl. Le calcul du nombre de Nusselt  $Nu$  confirme le rôle grandissant de la thermique. Nous trouvons ainsi  $Nu = 20.51$  alors qu'il valait  $Nu = 1.63$  pour  $Pr = 0.026$  et  $Nu = 17.67$  pour  $Pr = 0.055$  en gardant bien évidemment le même rapport de forme.

Nous avons représenté sur la figure 8.27 le moment angulaire normé. La visualisation de la composante principale  $\Gamma_z$  de  $\Gamma$  nous montre qu'au voisinage des extrémités (plans  $z_1 = 0.75$  et  $z_3 = 2.25$ ), l'écoulement s'organise principalement en deux rouleaux contrarotatifs situés au niveau de la paroi supérieure (pour le plan  $z_1$ ) et inférieure (pour le plan  $z_3$ ) de la cavité. Si l'on se place maintenant au centre de la cavité, on relève que l'écoulement se concentre sur les parois latérales

sous forme toujours de rouleaux contrarotatifs et que son intensité est faible dans le coeur de la cavité. On constate également une forte densité d'isosurfaces de  $\Gamma_z$  au voisinage des extrémités. Cela confirme la forte intensité du champ de vitesse dans cette zone et la complexité avec lequel il s'organise pour longer les extrémités du cylindre. Rappelons toutefois que le N.A.M. est évalué en calculant une intégrale sur des sections du cylindre et qu'il rend surtout compte de l'organisation de l'écoulement dans les régions intermédiaires des deux extrémités, c'est-à-dire dans les régions où la composante  $w$  de la vitesse est la principale. En nous plaçant au niveau des extrémités, la composante  $w$  n'est plus la principale et il faudrait prendre davantage en compte les effets de  $v$ . Or, les effets de confinement dans ces zones et la complexité de définir des sections dans la direction  $y$  sont des obstacles ne permettant pas d'obtenir une parfaite description tridimensionnelle de  $\Gamma$ . Même le remplacement d'une intégrale de surface pour le calcul de  $\Gamma$  par une intégrale de volume prenant pour volume élémentaire le cube généré par les deux couches les plus voisines d'un point  $M$  ne nous donne de renseignement supplémentaire.

La recherche du seuil critique pour lequel l'écoulement manifeste un comportement oscillatoire nous donne  $Gr_c \simeq 4.91.10^6$ . La figure 8.28 nous est utile afin de déterminer les possibles brisures de symétrie du champ oscillatoire. La figure 8.28(a) représente ainsi le profil de la composante  $w$  de la vitesse le long de deux axes verticaux symétriques  $Oy_k$  situés aux indices  $k_1 = 10$  et  $k_2 = n_z - 10$ . Le profil de  $w$  pour  $k_1$  est le symétrique de celui obtenu pour  $k_2$ . Cependant, on ne peut dire au regard de cette figure s'il s'agit de la symétrie axiale  $S_a$  ou centrale  $S_c$ . La figure 8.28(b) nous permet de conclure en représentant le profil de la composante  $w$  de la vitesse le long de deux axes horizontaux transversaux symétriques d'indice  $k_1$  et  $k_2$ . On constate ainsi que le profil de  $w$  pour  $k_1$  est le symétrique de celui obtenu pour  $k_2$  par la symétrie centrale de centre le centre de la cavité du cylindre. Par conséquent, l'instabilité oscillatoire rencontrée ne s'accompagne d'aucune brisure de symétrie.

Enfin, compte tenu des trois valeurs distinctes de  $Pr$  étudiées pour le même rapport de forme  $A = 4$ , il est également intéressant de comparer les profils de la composante  $v$  le long de l'axe  $(Oz)$  (fig.8.29(a)) et de la composante  $w$  le long de l'axe  $(O'y)$  (fig.8.29(b)). On remarque que les profils de  $v$  sont assez similaires pour  $Pr = 0.055$  et  $Pr = 0.075$ , celui pour  $Pr = 0.026$  étant le seul à traduire une inclinaison de l'écoulement et une recirculation interne. Les profils de  $w$  confirment cette ressemblance entre  $Pr = 0.055$  et  $Pr = 0.075$ ; pour  $Pr = 0.075$  l'intensité de  $w$  est légèrement plus faible mais on distingue toujours les couches limites visqueuses à fort taux de cisaillement. Pour  $Pr = 0.026$ , l'écoulement central manifeste une réelle intensité qui diminue fortement lorsque  $Pr$  augmente.

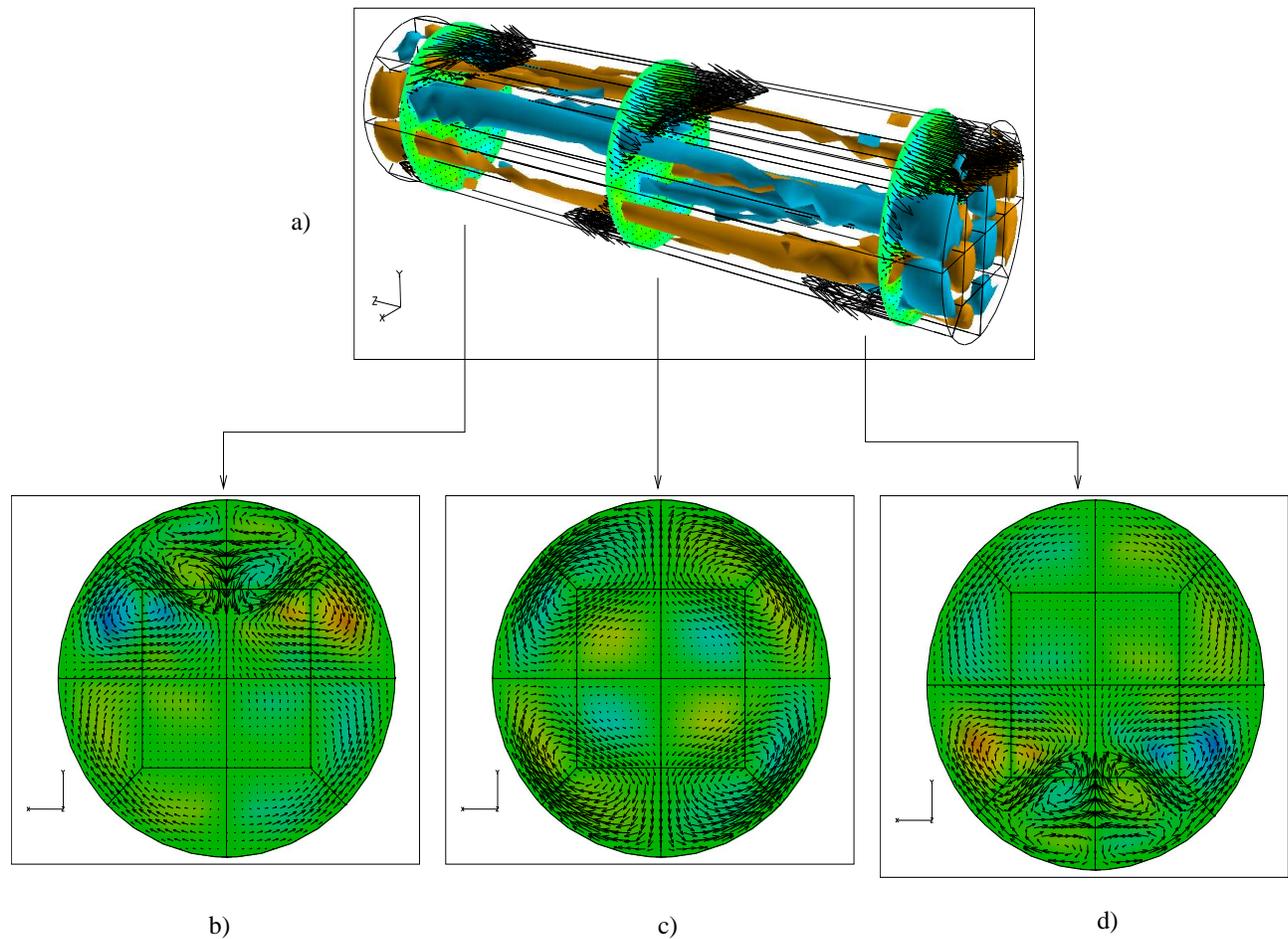


FIG. 8.27 – Représentation du champ total de vitesse  $\vec{v}$  et de la composante  $\Gamma_z$  de  $\Gamma$  dans les plans  $z_1 = 0.75, z_2 = 2$  et  $z_3 = 3.25$  et de deux isosurfaces de  $\Gamma_z$  (figure a)). Les figures b), c) et d) représentent la projection du champ de vitesse et la valeur de  $\Gamma_z$  dans les plans  $z_3, z_2$  et  $z_1$  ( $A = 4, Pr = 0.075, Gr = 4.88 \cdot 10^6$ )

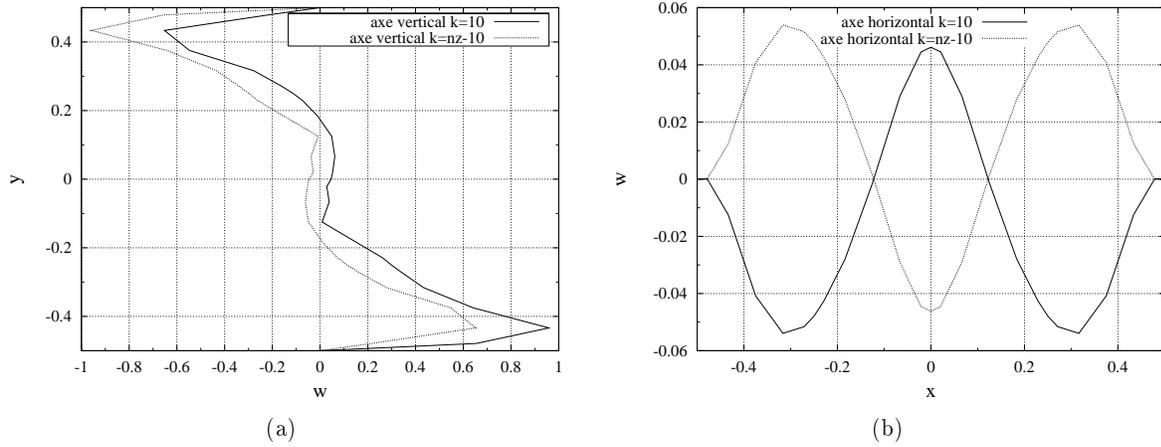


FIG. 8.28 – Profils de la composante  $w$  de la vitesse le long de deux axes verticaux symétriques ( $Oy_k$ ) (avec  $k = 10$  et  $n_z - 10$ ) (fig.8.28(a)) et le long de deux axes horizontaux symétriques ( $Ox_k$ ) (avec  $k = 10$  et  $n_z - 10$ ) (fig.8.28(b)) ( $A = 4$ ,  $Pr = 0.075$ ,  $Gr = 4.91 \cdot 10^6$ ).

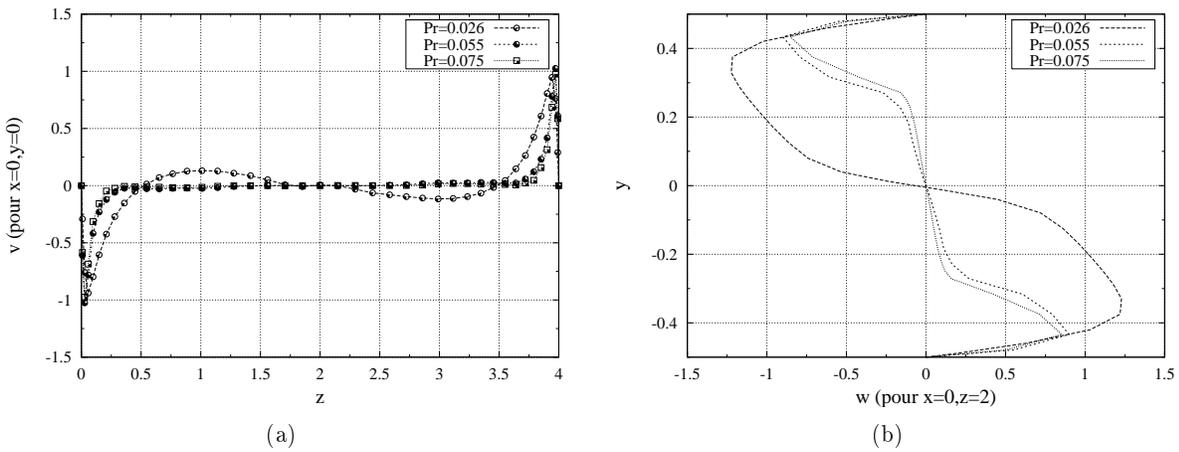


FIG. 8.29 – Profils de la composante  $v$  de la vitesse le long de l'axe ( $Oz$ ) (fig.8.29(a)) et de la composante  $w$  de la vitesse le long de l'axe ( $O'y$ ) (fig.8.29(b)) pour trois valeurs de  $Pr$  ( $Pr = 0.026, 0.055$  et  $0.075$ ) en considérant  $A = 4$ .

Les champs oscillatoires de la vitesse et de la température sont présentés respectivement sur les figures 8.30 et 8.31 durant une période. Le plan  $L_v$ , quelque peu délaissé par l'instabilité oscillatoire pour  $Pr = 0.055$  (en raison de la brisure de  $S_p$ ) au profit de deux plans symétriques par rapport à lui-même, s'affiche désormais comme un plan profondément affecté par l'instabilité. On constate notamment que les fluctuations de vitesse les plus marquées longent les lignes de cisaillement principal  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$ . On s'attend donc, d'ores et déjà, à ce que ces lignes jouent un rôle hydrodynamique majeur dans l'apparition de l'instabilité. Les fluctuations de température se concentrent au niveau des extrémités du cylindre, au niveau des couches limites thermiques. Une contribution moindre se distingue également le long des lignes de cisaillement principal  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$ .

En nous plaçant à  $Gr = Gr_c = 4.91.10^6$ , l'étude P.O.D. nous permet l'extraction des modes principaux de l'écoulement. Soulignons que nous obtenons aussi bien avec la méthode- $\alpha$  qu'avec la méthode-VT, plus de 99,95% de l'énergie fluctuante en considérant les deux premiers modes. Au regard des deux premiers modes, on constate tout d'abord que les fluctuations sont symétriques par rapport au centre  $O'$  de la cavité. La composante principale de  $\sigma_V^i$  est  $\sigma_w^i$  et sa localisation le long de la ligne de cisaillement principale ne correspond pas avec la localisation des fluctuations principales de température  $\sigma_T^i$ . En effet, ces dernières sont majoritaires au niveau des couches limites thermiques alors que les fluctuations de vitesse sont prépondérantes au niveau des parois latérales. Si l'on se penche sur l'allure spatiale des deux premiers modes  $\sigma_T^i$ , on constate qu'ils ont à peu près la même structure dans le voisinage des couches limites visqueuses (avec un déphasage) mais au niveau des couches limites thermiques, le deuxième mode concentre simultanément des zones de fluctuation de signe opposé. Tandis que le premier mode concentre dans sa partie inférieure gauche des fluctuations uniquement positives, le deuxième fait cohabiter une large zone de fluctuations négatives et une plus petite de fluctuations positives.

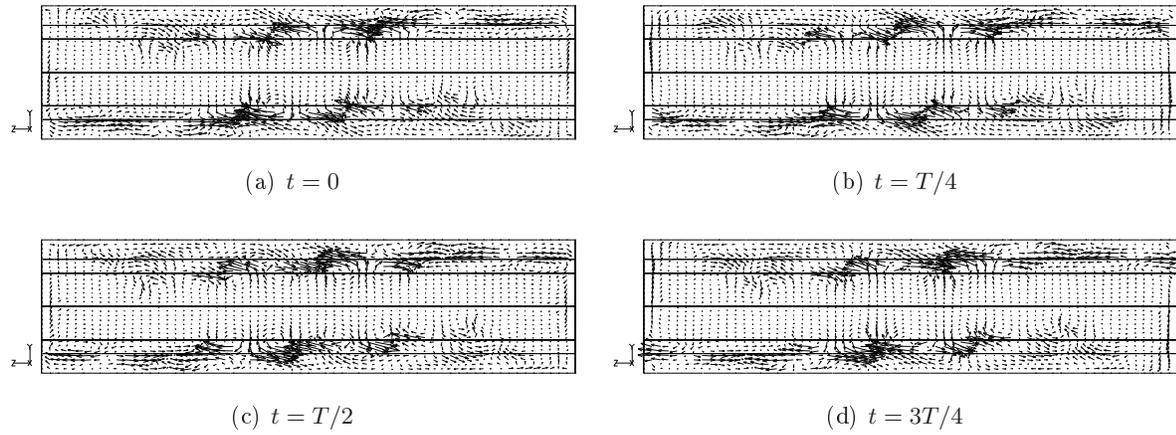


FIG. 8.30 – Champ de vitesse fluctuant  $V_{yz}'$  au cours d'une période  $T$  obtenu pour la solution instationnaire ( $A = 4, Pr = 0.075, Gr = 4.91.10^6$ ).

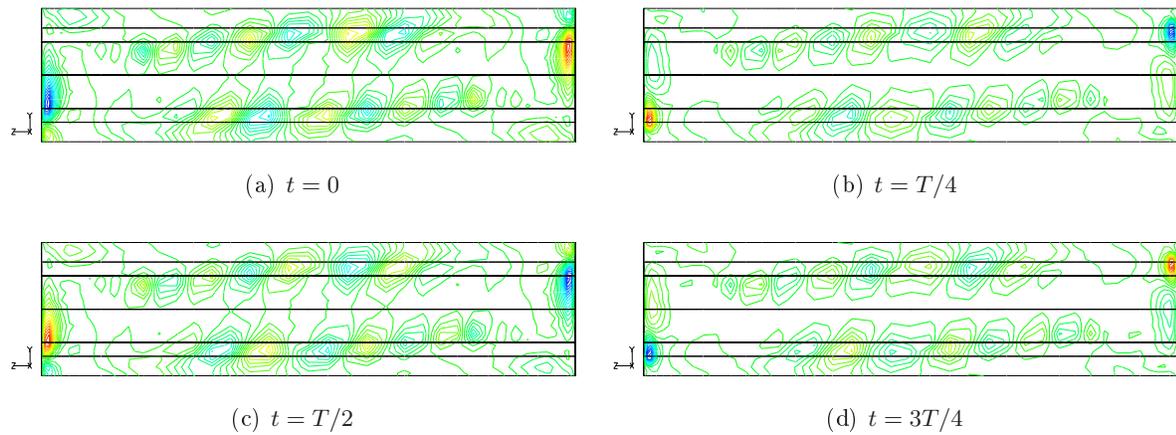


FIG. 8.31 – Champ de température fluctuant  $T_{yz}'$  au cours d'une période  $T$  obtenu pour la solution instationnaire ( $A = 4, Pr = 0.075, Gr = 4.91.10^6$ ).

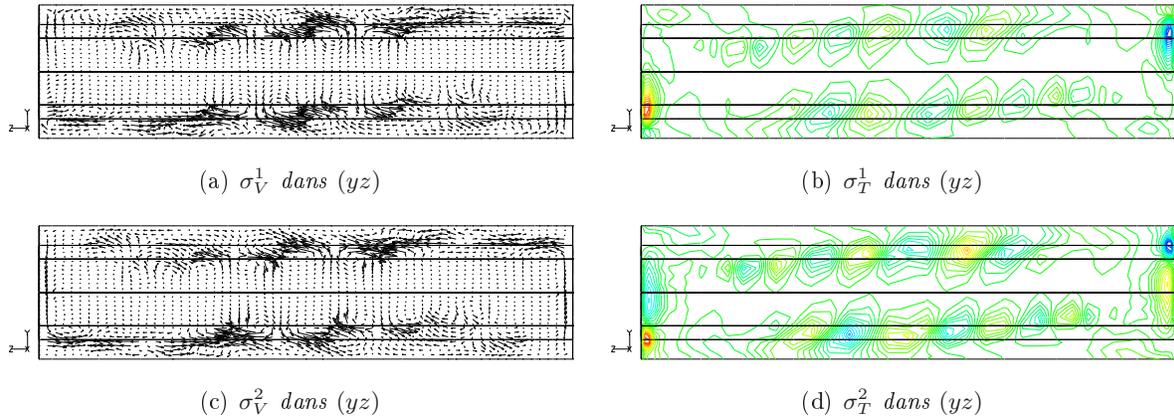


FIG. 8.32 – Représentation dans le plan  $(L_v)$  des deux premiers modes-vitesse  $\sigma_V^i$  ainsi que des isolignes de  $\sigma_T^i$  - méthode- $\alpha$  - ( $A = 4, Pr = 0.075, Gr = 4.91.10^6$ ).

### 8.3.2 Détermination de l'origine de l'instabilité

A l'aide de la figure 8.34(a), nous constatons que le terme le plus déstabilisant reste celui associé au cisaillement de la composante principale  $\bar{w}$ . Cependant, à la différence du cas  $Pr = 0.055$ , la somme des trois contributions correspondantes  $I_1 + I_2 + I_3$  recouvre quasiment l'intégralité du terme de production  $E_{cpf}$ . Désormais, le terme  $II_3$  relatif au cisaillement longitudinal de la vitesse moyenne verticale n'a que très peu d'influence. Le terme de production  $I_2$  reste bien sûr la contribution principale. Pour les effets thermiques, le terme de production  $J_3$  relatif à la production de  $\Theta$  par le gradient longitudinal de température s'affiche toujours comme l'effet thermique le plus déstabilisant. Nous allons désormais nous attacher à localiser ces zones de déstabilisation provoquant la naissance de l'instabilité oscillatoire. Le schéma adopté semble à première vue voisin de celui adopté pour  $Pr = 0.055$ ; c'est la raison pour laquelle nous nous bornerons à établir une comparaison en insistant uniquement sur les dissemblances éventuelles.

#### Effets hydrodynamiques

Regardons tout d'abord l'influence du terme  $S_{2_m}$ . Pour des isosurfaces significatives de signe opposé, nous choisissons de représenter le cas où  $S_{22}$  est négatif puis positif.  $S_{22}$  est fortement négatif dans la région où l'on passe de l'écoulement situé dans le coeur (à faible vitesse) à l'écoulement où la vitesse atteint sa valeur maximale. Dans cette région, caractéristique d'un écoulement cisailé, les fluctuations  $w'$  et  $v'$  sont statistiquement de même signe et de forte intensité : la contribution  $S_{21}$  est négative d'où le terme  $S_{2_m}$  est déstabilisant. On constate sur la figure 8.35(a) que cette région est localisée principalement à mi-distance entre les extrémités. Au proche niveau des parois latérales,  $S_{22}$  est par contre positif (fig.8.35(a)), le mouvement oscillatoire est moins intense que pour le cas  $Pr = 0.055$  : la corrélation entre  $S_{21}$  et  $S_{22}$  est donc plus faible. Nous pouvons observer sur la figure 8.35(e) les zones où la production d'énergie cinétique fluctuante par le terme  $E_{cpf}'$  se situe majoritairement. Celles-ci sont majoritairement localisées sur la ligne de cisaillement principal  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$ .

## Effets thermiques

Nous évaluons tout d'abord les effets thermiques dus à la présence du gradient vertical de température (fig.8.35(b)). On relève une forte corrélation entre fluctuations  $T'$  et  $v'$  le long de la ligne de cisaillement principal  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$ , dans un endroit similaire où les fluctuations de vitesse  $v'$  et  $w'$  étaient déjà fortement corrélées (fig.8.35(a)). Ces fluctuations, globalement de signe opposé, associées à un gradient positif de température conduisent à un effet déstabilisant de  $T_{2m}$  dans cette région. Les effets thermiques au niveau des extrémités dus à la présence de  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$  et de fluctuations  $w'$  et  $T'$  donnent un résultat déstabilisant. L'examen des valeurs des différentes grandeurs montre que les corrélations  $w'T'$  au voisinage des extrémités sont de faible intensité en comparaison des corrélations  $v'T'$  le long de la ligne de cisaillement habituel. Comme nous l'avons vu sur les figures 8.30 et 8.31, les fluctuations de température sont fortes au niveau des couches limites thermiques contrairement aux fluctuations de vitesse. A l'opposé, le long de la ligne de cisaillement principal, les fluctuations de vitesse sont fortes et sont accompagnées de fluctuations de température non négligeables. Il en résulte que les corrélations  $v'T'$  sont plus fortes le long de cette ligne que les corrélations  $w'T'$  dans les couches limites thermiques. Le facteur qui contribue donc à la prédominance de  $J_3$  dans la déstabilisation de l'écoulement vis-à-vis de  $J_2$  constitue donc l'intensité du gradient de température  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ , bien plus élevé au niveau des couches limites thermiques que celle de  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$  dans la zone de cisaillement principal de l'écoulement.

**Conclusion 3** : L'instabilité oscillatoire pour  $Pr = 0.075$  résulte d'effets hydrodynamiques conjugués aux effets thermiques. Les effets hydrodynamiques sont majoritairement dus au terme de production de  $K$  lié au gradient vertical de la composante principale de l'écoulement moyen  $\bar{w}$ . Ils se situent à la frontière entre le coeur de l'écoulement central à basse vitesse et celui des couches limites hydrodynamiques où la vitesse est relativement élevée. Parallèlement, dans cette même zone les effets thermiques dus à la production de  $\Theta$  par le gradient vertical de température moyenne jouent également un rôle déstabilisant. Ces effets thermiques sont encore accentués dans les couches limites thermiques en raison principalement d'un gradient horizontal de température moyenne élevé.

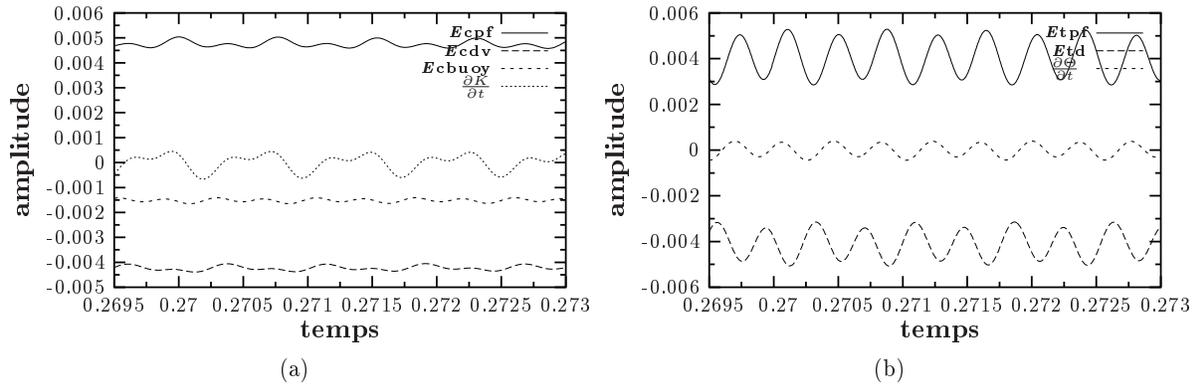


FIG. 8.33 – Évolution temporelle du taux d'énergie cinétique fluctuante  $\frac{\partial K}{\partial t}$  (fig.(8.33(a))) et du taux d'énergie thermique fluctuante  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$  (fig.(8.33(b))) ainsi que de leurs différentes contributions ( $A = 4, Pr = 0.075, Gr = 4.91 \cdot 10^6$ ).

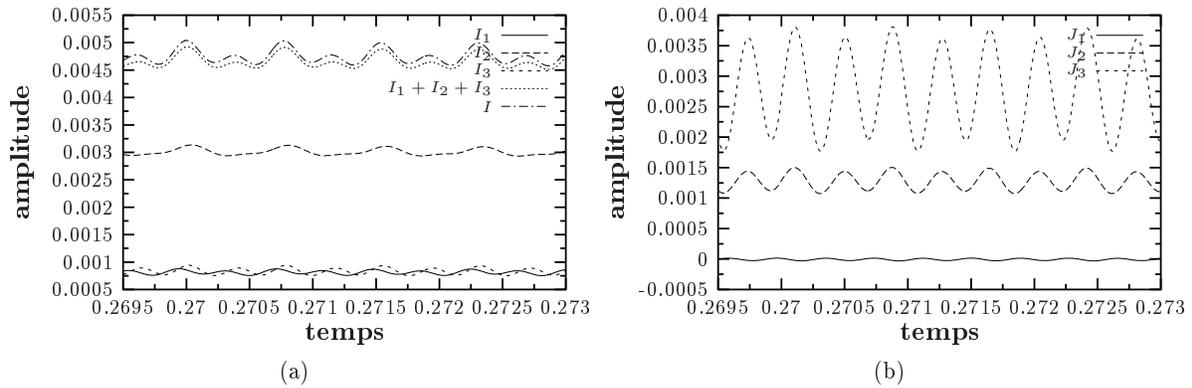


FIG. 8.34 – Évolution temporelle et contribution des trois composantes  $I_1, I_2$  et  $I_3$  de  $I$  ainsi que de leur somme dans la production d'énergie cinétique fluctuante (fig.(8.34(a))). Sur la figure 8.34(b), évolution temporelle et contribution des trois composantes  $J_1, J_2$  et  $J_3$  de  $J$  dans la production d'énergie thermique fluctuante ( $A = 4, Pr = 0.075, Gr = 4.91 \cdot 10^6$ ).

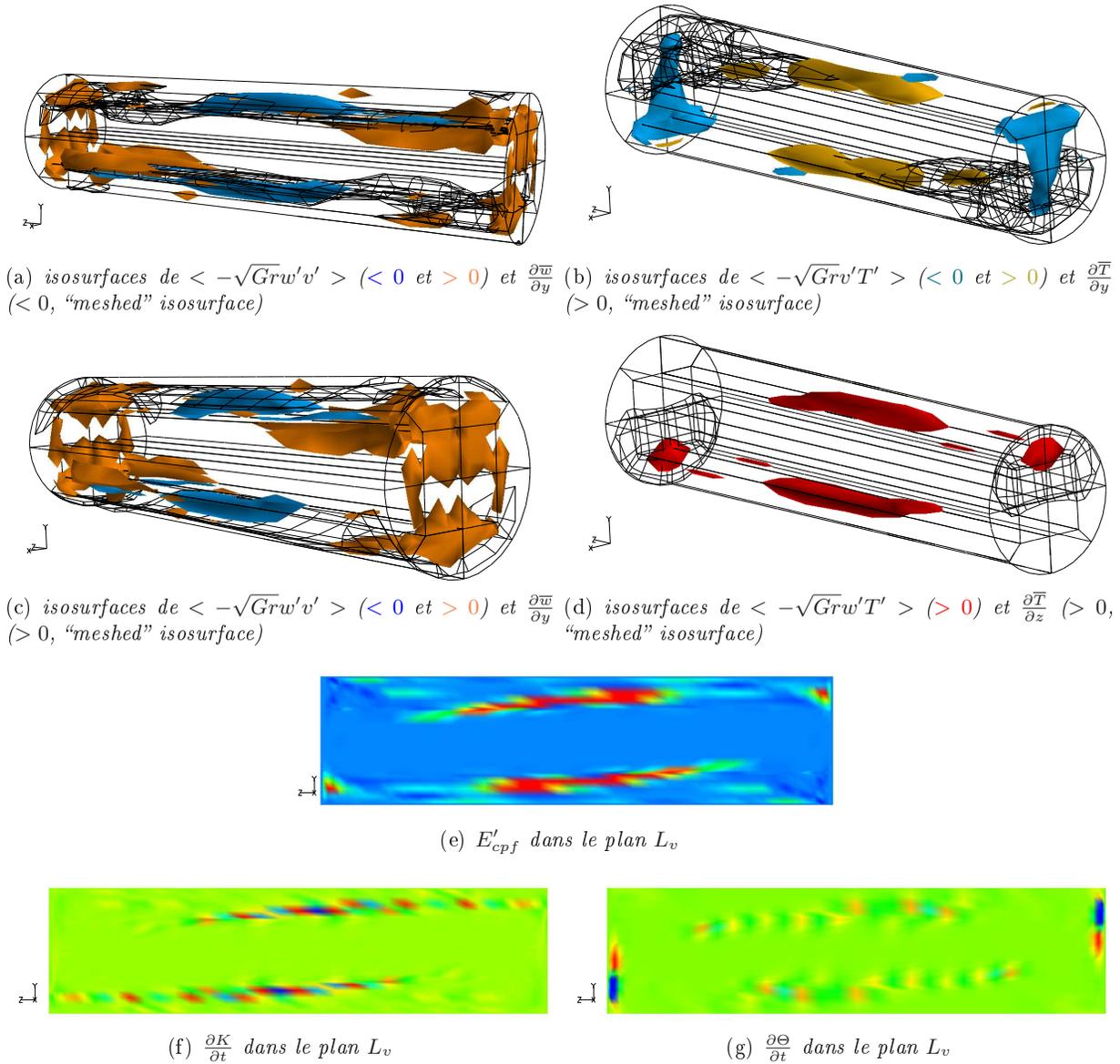


FIG. 8.35 – Isosurfaces représentatives respectivement des termes  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle, \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$  ( $\langle 0 \rangle$ );  $\langle -\sqrt{Gr}v'T' \rangle, \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ ;  $\langle -\sqrt{Gr}w'v' \rangle, \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$ ;  $\langle -\sqrt{Gr}v'T' \rangle, \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ . De plus, représentation de  $E'_{cpf}$ ,  $\frac{\partial K}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$  dans le plan  $L_v$  à un instant donné ( $A = 4, Pr = 0.075, Gr = 4.91 \cdot 10^6$ ).



---

# Conclusion

---

Ce travail de thèse qui concerne l'étude numérique tridimensionnelle des instabilités hydrodynamiques dans une cavité cylindrique circulaire soumis à un gradient horizontal de température a nécessité des ressources informatiques importantes. Les calculs ont fait appel au calcul parallèle et ont nécessité 13 processeurs pour la géométrie avec 12 éléments : un processeur pour chaque élément (fils) et un processeur pour la reconstitution des calculs (père) . Les études que nous avons menées ont montré qu'il est nécessaire d'avoir un maillage relativement fin pour calculer avec précision les seuils d'instabilité. Cependant, le raffinement du domaine de calcul se traduit naturellement par l'augmentation du temps de calcul. Les ressources informatiques dont nous disposons depuis quelques années permettent désormais leur réalisation mais elles sont encore assez peu nombreuses et des efforts continus tant au niveau des moyens qu'au niveau des techniques et des méthodes de parallélisation des calculs (nous avons utilisé la méthode du complément de Schur) sont encore nécessaires.

Le premier fluide considéré s'apparente à du mercure ( $Pr = 0.026$ ). Nous avons considéré une large gamme de rapports de forme  $A$  variant de 1.5 à 10. Afin de rendre compte de la structure tridimensionnelle de l'écoulement, l'emploi de la méthode N.A.M. (Normalized Angular Momentum) pour repérer les tourbillons a prouvé son efficacité. Bien que plus souvent appliquée pour le cas d'écoulements dans des géométries moins confinées, son application à notre étude permet une compréhension plus détaillée de la structure de l'écoulement. Par ailleurs, étant donné la diminution du confinement avec l'augmentation de  $A$ , nous aurions pu penser à première vue que l'évolution du Grashof critique  $Gr_c$  serait monotone et décroissante. Les simulations révèlent un comportement tout autre et bien plus complexe. En effet, le seuil critique d'apparition de l'instabilité oscillatoire ainsi que la fréquence fondamentale de l'écoulement instationnaire ne suivent pas cette évolution mais varient fortement avec le rapport de forme  $A$ . En augmentant  $A$  de 1.5 à 3, le seuil décroît fortement avant d'augmenter de nouveau jusqu'à  $A = 8$  et de finalement décroître pour des valeurs de  $A$  plus élevées. Par ailleurs, nous obtenons pour les grands rapports de forme une fréquence fondamentale faible en comparaison de celle observée pour les cavités de petite taille ou de taille intermédiaire. Ces comportements suggèrent que les mécanismes de transition de l'écoulement dépendent du rapport de forme. Des analyses énergétiques au voisinage du seuil révèlent que pour les faibles rapports de forme, l'instabilité est due au cisaillement vertical de la composante horizontale de la vitesse et se situe dans le plan médian longitudinal vertical dans le coeur de la cavité, le long de la ligne séparant les écoulements de sens opposé dans la partie supérieure et inférieure de la cavité. Cependant, pour  $A = 4$ , le facteur le plus déstabilisant est le cisaillement horizontal de la vitesse horizontale. Cela traduit l'interaction entre les écoulements opposés dans la zone de stagnation au centre de la cavité. Pour les grands rapports de forme, le cisaillement vertical est également le principal facteur d'instabilité. Dans ce cas, l'instabilité se déclenche toujours dans ces régions de cisaillement principal mais ces régions ont migré du plan médian longitudinal vertical vers des plans longitudinaux verticaux symétriques de part et d'autre de celui-ci.

La Décomposition Orthogonale (P.O.D.) appliquée à notre étude a permis tout d'abord la détermination des modes déstabilisant l'écoulement et constituant donc sa partie fluctuante. Ensuite, la projection des équations du système fournit un système dynamique réduit qui peut, dans une plage plus ou moins étendue du nombre de Grashof et sur des temps courts et longs, reproduire fidèlement les simulations numériques. A cet effet, nous avons vu qu'il était au préalable nécessaire de juger de l'influence de plusieurs paramètres (longueur de la fenêtre de stockage, nombre de modes retenus, pas de stockage, vitesse de référence,...) afin d'obtenir un système d'E.D.O. fiable et robuste. Les capacités prédictives de la P.O.D. sont par ailleurs utiles pour la détermination de paramètres essentiels de l'instabilité, à savoir la détermination du seuil critique  $Gr_c$  et la fréquence fondamentale de l'oscillation. En effet, l'emploi du logiciel AUTO (logiciel adapté à la résolution des systèmes dynamiques) utilisant le système d'E.D.O. nous permet de trouver avec précision ces paramètres. Il est par contre difficile d'obtenir dans notre cas le diagramme de bifurcation complet car nous nous heurtons pour cela à une trop grande sensibilité des systèmes d'E.D.O. Soulignons que les travaux utilisant la P.O.D. dans des configurations tridimensionnelles où vitesse et température sont couplées sont très peu nombreux.

La P.O.D. s'affirme donc comme un moyen substantiel d'économies de D.N.S souvent longues et coûteuses en ressources informatiques. Par exemple, à l'heure actuelle où la puissance des calculateurs augmente rapidement, il est donc envisageable de réaliser quelques simulations très précises avec un nombre de points de maillage élevé et de déterminer la dynamique de l'écoulement pour des valeurs de paramètres différentes au moyen de la P.O.D.

Dans une dernière partie, nous avons étudié l'influence du fluide considéré en modifiant la valeur du nombre de Prandtl. Nous avons tout d'abord envisagé le cas d'un fluide où la diffusivité thermique est infinie autrement dit pour lequel  $Pr = 0$ . L'instabilité, purement hydrodynamique est toujours due au gradient vertical de la vitesse horizontale. L'énergie cinétique fluctuante associée est ensuite convectée par l'écoulement au niveau des couches limites et des régions centrales avant d'être dissipée par les effets visqueux. Nous avons ensuite augmenté la valeur du nombre de Prandtl afin de prendre en compte les effets thermiques dans l'apparition de l'instabilité. Pour  $Pr = 0.055$ , l'instabilité est le produit d'effets hydrodynamiques et thermiques. Les effets hydrodynamiques se manifestent dans les couches limites au niveau des parois supérieure et inférieure. Les effets thermiques se situent au niveau des extrémités du cylindre dans des couches limites thermiques sujettes à de forts gradients horizontaux de température. Pour  $Pr = 0.075$ , les effets hydrodynamiques se ressentent à la frontière entre l'écoulement central (à basse vitesse) et celui des couches limites hydrodynamiques (à vitesse plus élevée). A la différence du cas  $Pr = 0.055$ , les effets thermiques dans cette zone dus au gradient vertical de température sont non négligeables et sont un facteur déstabilisant. Les effets thermiques majeurs se situent quand même dans les couches limites thermiques au voisinage des extrémités.

Une perspective très intéressante et naturelle à ce travail serait une étude de stabilité reprenant les caractéristiques de notre étude. En combinant l'emploi de la méthode de Newton et de la méthode d'Arnoldi, il serait intéressant d'approfondir notamment le comportement singulier que présente la courbe  $Gr_c = f(A)$  pour  $Pr = 0.026$  et  $1.5 \leq A \leq 10$  et d'établir une carte de solutions contenant l'ensemble des solutions stables ou instables. En effet, actuellement, la simulation numérique directe nous autorise à deviner l'existence de plusieurs branches de solutions sur lesquelles on observe entre autres des changements de fréquences. En complément à la D.N.S., l'étude de stabilité permettrait l'établissement d'un diagramme de bifurcation et d'avoir une vision plus globale sur ce type complexe d'écoulements thermoconvectifs.

---

## Annexe : Compléments sur les méthodes numériques

---

### Application de la méthode variationnelle à un exemple monodimensionnel

Le but est de trouver  $u \in L^2[-1, 1]$  vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda^2 u = f \text{ sur } [-1, 1] \\ u(1) = u(-1) = 0 \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

Les points de discrétisation du domaine  $[-1, 1]$  sont notés  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , et on note  $(u_0, u_1, \dots, u_n)$  la valeur de  $u$  en ces points ( $u(x_i) = u_i$  pour  $0 \leq i \leq n$ ).

En utilisant l'interpolation lagrangienne, la valeur de  $u$  en tout point  $x$  de  $[-1, 1]$  s'écrit :

$$u(x) = \sum_{j=0}^n H^j(x) u_j \quad (\text{A-2})$$

avec  $H^j(x)$  :  $j$ -ème polynôme de Lagrange défini par :

$$H^j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \left( \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \quad (\text{A-3})$$

$f$  et la fonction test  $v$  sont interpolées sur  $[-1, 1]$  de la même manière que  $u$ .

En reprenant l'équation de départ, en la multipliant par la fonction test  $v$  et en intégrant sur  $[-1, 1]$ , on a :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^2 u}{dx^2} v \, dx - \lambda^2 \int_{-1}^{+1} uv \, dx = \int_{-1}^{+1} f v \, dx \quad (\text{A-4})$$

En faisant une intégration par parties du terme  $\int_{-1}^{+1} \frac{d^2 u}{dx^2} v \, dx$ , on obtient :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^2 u}{dx^2} v \, dx = \left[ \frac{du}{dx} v \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx \quad (\text{A-5})$$

Or, dans ce cas,  $v(-1) = v(1) = 0$  et l'équation devient alors :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx + \lambda^2 \int_{-1}^{+1} uv \, dx = - \int_{-1}^{+1} f v \, dx \quad (\text{A-6})$$

En utilisant l'interpolation lagrangienne suivante :

$$\begin{cases} u(x) = \sum_{j=0}^n H^j(x) u_j, \quad f(x) = \sum_{j=0}^n H^j(x) f_j \\ v(x) = \sum_{k=0}^n H^k(x) v_k \end{cases} \quad (\text{A-7})$$

on peut écrire la relation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \sum_{j=0}^n u_j \frac{dH^j}{dx} \sum_{k=0}^n v_k \frac{dH^k}{dx} dx + \lambda^2 \int_{-1}^{+1} \sum_{j=0}^n H^j(x) u_j \sum_{k=0}^n H^k(x) v_k dx = \\ - \int_{-1}^{+1} \sum_{j=0}^n H^j(x) f_j \sum_{k=0}^n H^k(x) v_k dx \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n u_j v_k \int_{-1}^{+1} \frac{dH^j}{dx} \frac{dH^k}{dx} dx + \lambda^2 \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n u_j v_k \int_{-1}^{+1} H^j(x) H^k(x) dx = \\ - \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n v_k f_j \int_{-1}^{+1} H^j(x) H^k(x) dx \end{aligned}$$

On obtient finalement, vu que cette équation est valable pour toute valeur de  $v_k$ , l'équation ci-après :

$$u_j \int_{-1}^{+1} \frac{dH^j}{dx} \frac{dH^k}{dx} dx + \lambda^2 u_j \int_{-1}^{+1} H^j(x) H^k(x) dx = -f_j \int_{-1}^{+1} H^j(x) H^k(x) dx \quad (\text{A-8})$$

En introduisant les matrices (symétriques) rigidité et masse définies comme suit :

– matrice rigidité :

$$A^{kj} = - \int_{-1}^{+1} \frac{dH^j}{dx} \frac{dH^k}{dx} dx \quad (\text{A-9})$$

– matrice masse :

$$B^{kj} = \int_{-1}^{+1} H^j(x) H^k(x) dx \quad (\text{A-10})$$

on peut réécrire l'équation (A-8) sous la forme :

$$A^{kj} u_j - \lambda^2 B^{kj} u_j = B^{kj} f_j, \quad 0 \leq k \leq n \quad (\text{A-11})$$

En posant finalement :

$$C^{kj} = A^{kj} - \lambda^2 B^{kj} \quad (\text{A-12})$$

le système final à résoudre pour trouver la solution discrétisée du problème (A-1) est le suivant :

$$C^{kj} u_j = B^{kj} f_j, \quad 0 \leq k \leq n \quad (\text{A-13})$$

## Discrétisation du domaine par la méthode de Legendre-Gauss-Lobatto et calcul des matrices $A$ et $B$

Nous présentons ici le type de discrétisation choisi, c'est-à-dire l'ensemble des points du domaine sur lesquels la solution  $u$  du problème (2.9) est représentée par son interpolation lagrangienne. Le type de discrétisation choisi est celui de Legendre-Gauss-Lobatto [82]. Les polymômes de Legendre obéissent à la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \text{ et } L_1(x) = x \\ L_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}xL_k(x) - \frac{k}{k+1}L_{k-1}(x) \text{ pour } k \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A-14})$$

Les points de collocation sur l'intervalle  $[-1, 1]$  sont définis par la relation :  $x_0 = -1$  et  $x_n = 1$  et pour  $1 \leq j \leq n-1$ , les  $x_j$  sont les zéros du polynôme  $L'_n$  que l'on classe par ordre croissant. Afin de calculer les matrices  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$ , nous utilisons la quadrature de Gauss-Lobatto :

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{j=0}^n \Phi(x_j)\Psi(x_j)w_j \quad (\text{A-15})$$

Les coefficients  $w_j$  représentent les poids d'intégration aux points  $x_j$  :

$$w_j = \frac{2}{n(n+1)} \frac{1}{L_n(x_j)^2} \text{ pour } j = 0, 1, \dots, n \quad (\text{A-16})$$

Le calcul des matrices  $A^{ij}$  et  $B^{ij}$  s'écrit alors :

$$A^{ij} = - \int_{-1}^1 \frac{dH^i}{dx} \frac{dH^j}{dx} dx = - \sum_{q=0}^n \frac{dH^i}{dx}(x_q) \frac{dH^j}{dx}(x_q)w_q \quad (\text{A-17})$$

et

$$B^{ij} = \int_{-1}^{+1} H^i(x)H^j(x) dx = \sum_{q=0}^n H^i(x_q)H^j(x_q)w_q = w_i\delta_{ij} \quad (\text{A-18})$$

On constate donc que la matrice  $B^{ij}$  est diagonale. Le calcul de la matrice  $A^{ij}$  nécessite pour sa part l'expression des dérivées  $\frac{dH^j}{dx}$  aux points  $x_i$ . Celles-ci sont données par :

$$\frac{dH^j}{dx}(x_i) = \begin{cases} \frac{L_n(x_i)}{L_n(x_j)(x_i - x_j)} \text{ pour } i \neq j \\ 0 \text{ si } i = j \text{ avec } j \neq 0 \text{ et } j \neq n \\ \frac{-n(n+1)}{4} \text{ si } i = j = 0 \\ \frac{n(n+1)}{4} \text{ si } i = j = n \end{cases} \quad (\text{A-19})$$



---

# Bibliographie

---

- [1] H. Ben Hadid, D. Henry, and R. Touihri. Unsteady three-dimensional buoyancy-driven convection in a circular cylindrical cavity and its damping by magnetic field. *Journal of Crystal Growth*, 180 :433–441, 1997.
- [2] H. Ben Hadid and D. Henry. Numerical study of convection in the horizontal Bridgman configuration under the action of a constant magnetic field. Part 2. Three-dimensional flow. *J. Fluid. Mech.*, 333 :57–83, 1997.
- [3] R. Touihri, H. Ben Hadid, and D. Henry. On the onset of convective instabilities in cylindrical cavities heated from below. part I pure thermal case. *Phys. Fluids*, 11(8) :2078–2088, august 1999.
- [4] L. Davoust, M.D. Cowley, R. Moreau, and R. Bolcato. Buoyancy-driven convection with a uniform magnetic field. Part 2. Experimental investigation. *J. Fluid. Mech.*, 400 :59–90, 1999.
- [5] G. Bardan, E. Knobloch, A. Mojtabi, and H. Khallouf. Natural doubly diffusive convection with vibration. *Fluid Dynamics Research*, 28(3) :159–187, 2001.
- [6] D.V. Lyubimov, P. Lyubimova, R.V. Skuridyn, G. Chen, and B. Roux. Numerical investigation of deformation and flow in an isothermal liquid bridge subject to high frequency vibrations in zero-g condition. *Int. J. Computers and Fluids*, 31(4-7) :663–682, 2002.
- [7] S. Kaddeche and K. Achour. Effect of an acoustic wave on the three-dimensional stationary and oscillatory instabilities. In *Committee on Space Research-COSPAR*, 2004.
- [8] N. Riley. Acoustic streaming. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 10 :349–356, 1998.
- [9] G.N. Kozhemyakin, V.G. Kosushkin, and S.Y. Kurochkin. Growth of Ga-As crystals pulled under the presence of ultrasonic vibrations. *J. Crystal Growth*, 121 :240–242, 1992.
- [10] G.N. Kozhemyakin. Influence of ultrasonic vibrations on the growth of In-Sb crystals. *J. Crystal Growth*, 149 :266–268, 1995.
- [11] G.N. Kozhemyakin and L.G. Kolodyazhnaya. Growth striations in Bi-Sb alloy single crystals pulled in the presence of ultrasonic vibrations. *J. Crystal Growth*, 147 :200–206, 1995.
- [12] J. Hart. Stability of thin non-rotating hadley circulations. *J. Atmos. Sc.*, 29 :687–697, 1972.
- [13] J .E. Hart. A note on the stability of low-Prandtl-number Hadley circulations. *J. Fluid Mech.*, 132 :271–281, 1983.
- [14] D.E. Cormack, L.G. Leal, and J. Imberger. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Part 1. Asymptotic theory. *J. Fluid. Mech.*, 65 :209–229, 1974.
- [15] A. Bejan and C.L. Tien. Laminar natural convection heat convection heat transfer in a horizontal cavity with different end temperatures. *Trans ASME :J. Heat Mass Transfer*, 1978.

- [16] A. Bejan and C.L. Tien. Fully developed natural counterflow in a long horizontal pipe with different end temperatures. *Intl J. Heat Mass Transfer*, 21 :701–708, 1978.
- [17] P. Laure. Study on convective motions in a rectangular cavity with horizontal gradient of temperature. *J. Méc. Théor. Appl.*, 6 :351–382, 1987.
- [18] B. Roux. *Numerical simulation of oscillatory convection in low-Pr fluids*, volume 27 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. Vieweg, 1990.
- [19] H.P. Kuo and S.A. Korpela. Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from a side. *Phys. Fluids*, 31(1) :33–42, 1988.
- [20] B. Podvin and P. Le Quéré. Low-order models for the flow in a differentially heated cavity. *Phys. Fluids*, 13(11), november 2001.
- [21] C.J. Jing, D. Henry, H. Ben Hadid, and N. Imaishi. Three-dimensional numerical simulation of low pr-number fluid flow in a cavity. *Journal of Crystal Growth*, 2003.
- [22] M. Behnia and G. de Vahl Davies. *Finite mesh solutions using stream function -vorticity formulation*, volume 27, pages 11–18. Vieweg, 1990. in Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids.
- [23] M. Behnia, G. de Vahl Davies, F. Stella, and G. Guj. *A comparison of velocity-vorticity and stream function-vorticity formulations for  $Pr=0$* , volume 27, pages 19–24. Vieweg, 1990. in Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids.
- [24] H. Ben Hadid and B. Roux. *Buoyancy-driven oscillatory flows in shallow cavities filled with low-Prandtl number fluids*, volume 27, pages 25–34. Vieweg, 1990. in Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids.
- [25] S. Garrec and J.P. Magnaud. *Numerical simulation of oscillatory convection in low-Prandtl fluids*, volume 27, pages 171–181. Vieweg, 1990. in Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids.
- [26] P. Le Quéré. *Contribution to the GAMM Workshop with a pseudo-spectral Chebyshev algorithm on a staggered grid*, volume 27, pages 227–236. Vieweg, 1990. in Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids.
- [27] E. Crespo del Arco, J.P. Pulicani, and A. Randriamampianina. Complex solutions and hysteresis cycles near the onset of oscillatory convection in a  $pr=0$  liquid submitted to a horizontal temperature gradient. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 309, Série II :1869–1876, 1989.
- [28] B. Roux, H. Ben Hadid, and P. Laure. Hydrodynamical regimes in metallic melts subject to a horizontal temperature gradient. *Eur. J. Mech.*, B8 :375–396, 1989.
- [29] J.P. Pulicani, E. Crespo del Arco, and A. Randriamampianina *et al.*. Spectral simulations of oscillatory convection at low prandtl number. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 10 :481–517, 1990.
- [30] K. Okada and H. Ozoe. The effect of aspect ratio on the critical grashof number for oscillatory natural convection of zero prandtl number fluid; numerical approach. *J. Crystal Growth*, 126 :330–334, 1993.
- [31] J.B. Chabard and P. Lalanne. *Application of the N3S Finite Element Code to simulation of oscillatory convection in low Prandtl fluids*, volume 27, pages 163–170. Vieweg, 1990. in Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids.

- [32] G.P. Extremet, J.P. Fontaine, A. Chaouche, and R.L. Sani. *Two- and three-dimensional finite element simulations of buoyancy-driven convection in a confined  $Pr=0.015$  liquid*, volume 27, pages 171–181. Vieweg, 1990. in Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids.
- [33] C. Gervaisio, A. Bottaro, M. Afrid, and A. Zebib. *Oscillatory natural convection in a long horizontal cavity*, volume 27, pages 136–143. Vieweg, 1990. in Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids.
- [34] M. Afrid and A. Zebib. Oscillatory three-dimensional convection in rectangular cavities and enclosures. *Phys. Fluids A* 2, 8, 1990.
- [35] J.M. Pratte and J.E. Hart. Endwall driven, low prandtl number convection in a shallow rectangular cavity. *J. Crystal Growth*, 102 :54–68, 1990.
- [36] J.E. Hart and J.M. Pratte. *A laboratory study of oscillations in differentially heated layers of mercury*, volume 27. Vieweg, 1990. in Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids.
- [37] M.C. Hung and C.D. Andereck. *Subharmonic transition in a moderately shallow cavity*, volume 27. Vieweg, 1990. in Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids.
- [38] D. Henry and M. Buffat. Two- and three-dimensional numerical simulations of the transition to oscillatory convection in low-prandtl-number fluids. *J. Fluid Mech.*, 374 :145–171, 1998.
- [39] S. Wakitani. Numerical study of three-dimensional oscillatory natural convection at low prandtl number in rectangular enclosures. *J. Heat Transfer*, 128 :77–83, 2001.
- [40] K.H. Winters. Oscillatory convection in liquid metals in a horizontal temperature gradient. *Intl J. Numer. Meth. Engng*, pages 401–414, 1988.
- [41] K.H. Winters. *A bifurcation analysis of oscillatory convection in liquid metals*, volume 27, pages 319–326. Vieweg, 1990. in Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids.
- [42] K.H. Winters and R.O. Jack. Anomalous convection at low prandtl number. *Commun. Appl. Numer. Meth.*, 5 :401–404, 1989.
- [43] M. Wanschura, V.M. Shevtsova, H.C. Kuhlmann, and H.J. Path. Three-dimensional instability of axisymmetric buoyant convection in cylinders heated from below. *J. Fluid Mech.*, 326 :399–415, 1996.
- [44] G.H. Schiroky and F. Rosenberger. Free convection of gases in a horizontal cylinder with differentially heated end walls. *Intl J. Heat Mass Transfer*, 27 :587–598, 1984.
- [45] C. Smutek, P. Bontoux, and B. Roux *et al.*. Three-dimensional convection in horizontal cylinders : numerical solutions and comparison with experimental and analytical results. *Numerical Heat Transfer*, 8 :613–631, 1985.
- [46] P. Bontoux, B. Roux, and G.H. Schiroky *et al.*. Convection in the vertical midplane of a horizontal cylinder. comparison of two-dimensional approximations with three-dimensional results. *Intl J. Heat Mass Transfer*, 29 :227–240, 1986.
- [47] M.G. Braunsfurth and T. Mullin. An experimental study of oscillatory convection in liquid gallium. *J. Fluid. Mech.*, 327 :199–219, 1996.

- [48] M.G. Braunsfurth, A.C. Skeldon, and A. Juel *et al.*. Free convection in liquid gallium. *J. Fluid. Mech.*, 342 :295–314, 1997.
- [49] A. Juel, T. Mullin, H. Ben Hadid, and D. Henry. Three-dimensional free convection in molten gallium. *J. Fluid. Mech.*, 436 :267–281, 2001.
- [50] B. Hof, A. Juel, and L. Zhao *et al.*. Onset of oscillatory convection in molten gallium. *J. Fluid. Mech.*, 2003.
- [51] A.Y. Gelfgat, P.Z. Bar-Yoseph, and A.L. Yarin. Stability of multiple steady states of convection in laterally heated cavities. *J. Fluid. Mech.*, 388 :315–334, 1999.
- [52] C. Bernardi and Y. Maday. Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques. In *Mathématiques & Applications*, volume 10. Springer-Verlag, 1992.
- [53] D.O. Gottlieb and S.A. Orszag. Numerical analysis of spectral methods : Theory and applications. *NFS-CBMS Monograph*, 10 :2237–2245, 1990.
- [54] C. Canuto, M. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag, 1987.
- [55] A.T. Patera. A spectral element method for fluid dynamics laminar flow in channel expansion. *J. Comp. Physics*, 54(3) :468–488, 1984.
- [56] E.M. Ronquist. *Optimal spectral element methods for the unsteady three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1988.
- [57] H. Ma. A spectral element basin model for the shallow water equation. *J. Comp. Physics*, 109 :133–149, 1983.
- [58] M. Bellahcène. *Contribution à l'étude de la méthode des éléments spectraux appliquée à la mécanique des fluides*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1994.
- [59] K.Z. Korczak and A.T. Patera. An isoparametric spectral element method for solution of the navier-stokes equations in complex geometry. *J. Comp. Physics*, 62 :361–382, 1986.
- [60] G.E. Karniadakis, M. Israeli, and S.A. Orszag. High order splitting methods for the incompressible navier-stokes equations. *J. Comp. Physics*, 97 :413–443, 1991.
- [61] J.L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, pages 166–178, 1967.
- [62] A.E. Deane, I.G. Kevrekidis, G.E. Karniadakis, and S.A. Orszag. Low-dimensional models for complex geometry flows : Application to grooved channels and circular cylinders. *Phys. Fluids A* 3, 10 :2337–2354, 1991.
- [63] D. Rempfer and H.F. Fasel. Dynamics of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer. *J. Fluid. Mech.*, 275 :257–283, 1995.
- [64] L. Sirovich. *Turbulence and the dynamics of coherent structures*, volume 65, chapter I,II,III, pages 561–571,573–582,583–590. Quarterly of Applied Mathematics, 1987.
- [65] L.Sirovich and H. Park. Turbulent thermal convection in a finite domain, Part I.Theory, Part II. Numerical results. *Phys. Fluids A* 2, 9 :1649–1668, 1990.
- [66] W. Cazemier and R.W.C.P. Verstappen and A.A.E.P. Veldman. DNS of turbulent flow in a driven cavity and their analysis using proper orthogonal decomposition. In *the 74<sup>th</sup> Fluid Dynamics Symposium on "Application of Direct and Large Eddy Simulation to transition to turbulence"*, Chania, Crete, Greece, april 1994.

- 
- [67] H. Gunes, A. Liakopoulos, and R.A. Sahan. Low-dimensional description of oscillatory thermal convection :The small Prandtl number limit. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 9 :1–16, 1997.
- [68] J.L. Lumley and A. Poje. Low-dimensional models for flows with density fluctuations. *Phys. Fluids*, 9(7), 1997.
- [69] R.A. Sahan, A. Liakopoulos, and H. Gunes. Reduced dynamical models of nonisothermal transitional grooved-channel flow. *Phys. Fluids*, 9(3), 1997.
- [70] H.M. Park and D.H. Cho. Low dimensional modeling of flow reactors. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39(16) :3311–3323, 1996.
- [71] K.S. Ball, L. Sirovich, and L.R. Keefe. Dynamical eigenfunction decomposition of turbulent channel flow. *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 12 :585–604, 1991.
- [72] D. Rempfer and H.F. Fasel. Evolution of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer. *J. Fluid. Mech.*, 260 :351–375, 1994.
- [73] R.A. Sahan, H. Gunes, and A. Liakopoulos. A modeling approach to transitional channel flow. *Computers and Fluids*, 27(1) :121–136, 1998.
- [74] N. Aubry, P. Holmes, J.L. Lumley, and E. Stone. The dynamics of the coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mechanics*, 192 :115–173, 1988.
- [75] F. Kwasniok. The reduction of complex dynamical systems using principal interaction patterns. *Physica D*, 92 :28–60, 1996.
- [76] P.F. Batcho and G.E. Karniadakis. Generalized stokes eigenfunctions : a new basis for the solution of incompressible navier-stokes equations. *J. Computational Physics*, 115 :121–146, 1994.
- [77] G.A. Kopp, J.A. Ferre, and F. Giralt. The use of pattern recognition and proper orthogonal decomposition in identifying the structure of fully-developed free turbulence. *J. Fluids Engineering*, 119/289, 1997.
- [78] W. Cazemier, R.W.C.P. Verstappen, and A.A.E.P. Veldman. Proper orthogonal decomposition and low-dimensional models for driven cavity flows. *Phys. Fluids*, 10(7) :1685–1699, 1998.
- [79] B. Podvin and J. Lumley. A low-dimensional approach for the minimal flow unit. *J. Fluid Mech.*, 362 :121–155, 1998.
- [80] L. Graftieaux, M. Michard, and N. Grosjean. Combining PIV, POD and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows. *Meas. Sci. Technol.*, 12 :1422–1429, 2001.
- [81] M. Michard, L. Graftieaux, L. Lollini, and N. Grosjean. 11<sup>th</sup> conf. on turbulent shear flows. In *Proc.*, Grenoble-France, 1997.
- [82] M.R. Shumack, W. Schultz, and J.P. Boyd. Spectral method solutions of the stokes equations on nonstaggered grids. *J. Comp. Physics*, 94 :30–58, 1991.





---

# Résumé / Abstract

---

Lors des processus de croissance cristalline, le contrôle des instabilités hydrodynamiques dans le bain fondu est primordial afin d'obtenir des cristaux de qualité.

Dans ce travail de thèse, nous étudions la convection naturelle dans un cylindre horizontal chauffé latéralement. La simulation numérique directe (D.N.S.) tridimensionnelle des équations du problème utilise la méthode des éléments spectraux isoparamétriques pour la discrétisation spatiale et un schéma de différences finies pour la discrétisation temporelle. Les fluides considérés s'apparentent aux métaux liquides caractérisés par un faible nombre de Prandtl,  $Pr \sim 10^{-2}$ . L'étude se base sur une large gamme de rapports de forme du cylindre ( $A$ =longueur/diamètre ;  $1.5 \leq A \leq 10$ ) pour  $Pr = 0.026$  et l'influence du nombre de Prandtl est prise en compte. Nous spécifions les particularités de l'écoulement stationnaire avec notamment l'apparition d'une bifurcation stationnaire précédant la bifurcation de Hopf pour ( $A \leq 3, Pr = 0.026$ ). Nous étudions ensuite l'apparition de l'instabilité oscillatoire en déterminant son seuil, sa nature, les caractéristiques de sa structure ainsi que son origine par analyse énergétique.

L'application de la Proper Orthogonal Decomposition (P.O.D.) à l'écoulement instationnaire permet l'extraction des principaux modes de l'écoulement. La projection de Galerkin des équations du système sur ces modes fournit un modèle dynamique de faible dimension. Ce modèle, sous certaines conditions, est capable de reproduire les résultats de la D.N.S. dans un domaine plus ou moins étendu autour du cas de référence et de déterminer les paramètres critiques de l'instabilité.

**Mots-clés** : convection naturelle, simulation numérique, stabilité, P.O.D.

During crystal growth processes, the control of the hydrodynamic instabilities in the melt is primordial in order to obtain good quality crystals.

In this thesis, we study natural convection in a laterally heated horizontal cylinder. The three-dimensional Direct Numerical Simulation (D.N.S.) of the equations of the problem uses isoparametric spectral elements method for spatial discretisation and a finite differences scheme for the temporal discretisation. The considered fluids are connected to liquid metals characterised by a low Prandtl number  $Pr \sim 10^{-2}$ . The study is based on a wide range of the aspect ratio  $A$  of the cylinder ( $A$ =length/diameter ;  $1.5 \leq A \leq 10$ ) for  $Pr = 0.026$  and the influence of the Prandtl number is considered. We specify the details of the stationary flow with particularly the appearance of a stationary bifurcation preceding the Hopf bifurcation ( $A \leq 3, Pr = 0.026$ ). We then study the appearance of the oscillatory instability determining its threshold, nature, the characteristics of its structure and its origin by energetic analysis.

The application of Proper Orthogonal Decomposition (P.O.D.) to instationary flow allows the extraction of the principal modes of the flow. The Galerkin projection of the problem equations on these modes gives a low-ordered dynamic model. This model, under certain conditions, is able to reproduce the D.N.S. results in a more or less wide domain around the reference case and determine the critical parameters of the instability.

**Keywords** : natural convection, computer simulation, stability, P.O.D.