

**THÈSE**

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

Spécialité : Mécanique

par

**Sylvain LIGNON**

**APPROCHE ROBUSTE DU RISQUE SISMIQUE**

Soutenue publiquement le 24 Mars 2006 devant le jury :

MM.	<b>B. CAMBOU</b> , Professeur, ECL, Ecully	Examineur
	<b>F. DARVE</b> , Professeur, INPG, Grenoble	Rapporteur
	<b>L. JÉZÉQUEL</b> , Professeur, ECL, Ecully	Directeur de thèse
	<b>D. LE HOUEDÉC</b> , Professeur, ECN, Nantes	Rapporteur
	<b>E. VIALLET</b> , Ingénieur de Recherche, EDF-SEPTEN, Villeurbanne	Examineur



# ECOLE CENTRALE DE LYON

## Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

A	ALLARD Bruno	maître de conférences	CEGELY	INSA
	AIT-EL-HADJ Smail	enseignant	GRESTI	ECL
	AURIOL Philippe	professeur	CEGELY	ECL
B	BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
	BATAILLE Jean	professeur	LMFA	UCBL
	BAYADA Guy	professeur	MAPLY	INSA
	BENHADID Hamda	professeur	LMFA	UCBL
	BERGHEAU Jean-Michel	professeur	LTDS	ENISE
	BEROUAL Abderrahmane	professeur	CEGELY	ECL
	BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	BUFFAT Marc	professeur	LMFA	UCBL
	BURAIIS Noël	professeur	CEGELY	UCBL
	BUREAU Jean-Claude	professeur	CEGELY	INSA
C	CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
	CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS
	CHAMBAT Michèle	professeur	MAPLY	UCBL
	CHAMPAGNE Jean-Yves	maître de conférences	LMFA	INSA
	CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur	LMFA	ECL
	CHANTE Jean-Pierre	professeur	CEGELY	INSA
	CHEN Liming	professeur	ICTT	ECL
	CLERC Guy	professeur	CEGELY	UCBL
	CLOAREC Jean-Pierre			
	COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
CREPEL Pierre	chargé de recherche	MAPLY	CNRS	
D	DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
	DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
E	ESCODIE Dany	directeur de recherche	LMFA	CNRS
F	FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS
G	GAFFIOT Frédéric	professeur	LEOM	ECL
	GAGNAIRE Alain	maître de conférences	LEOM	ECL
	GALLAND Marie-Annick	maître de conférences	LMFA	ECL
	GARRIGUES Michel	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	GAY Bernard	professeur	LMFA	UCBL
	GENCE Jean-Noël	professeur	LMFA	UCBL
	GENDRY Michel	chargé de recherche	LEOM	CNRS
	GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
	GODEFERD Fabien			
	GRENET Geneviève	directeur de recherche	LEOM	CNRS

# ECOLE CENTRALE DE LYON

## Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

	GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	IFOS	ECL
H	HAMADICHE Mahmoud	maître de conférences	LMFA	UCBL
	HEIBIG Arnaud	professeur	MAPLY	INSA
	HELLOUIN Yves	maître de conférences	-	ECL
	HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
	HOLLINGER Guy	directeur de recherche	LEOM	CNRS
I	ICHCHOU Mohamed	maître de conférences	LTDS	ECL
J	JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	CEGELY	CNRS
	JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
	JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
	JOSEPH Jacques	professeur	LEOM	ECL
	JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
	JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LMFA	ECL
K	KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS
	KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS
	KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	LEOM	CNRS
L	LACHAL Aimé	PRAG	MAPLY	INSA
	LANCE Michel	professeur	LMFA	UCBL
	LANGLADE-BOMBA Cécile	maître de conférences	LTDS	ECL
	LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS	CNRS
	LE HELLEY Michel	professeur	-	ECL
	LE RIBAUT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS
	LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
	LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	MAPLY	ECL
	LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS
	LYONNET Patrick	professeur	LTDS	ENISE
M	MAITRE Jean-François	professeur émérite	MAPLY	ECL
	MARION Martine	professeur	MAPLY	ECL
	MARTELET Claude	professeur	CEGELY	ECL
	MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
	MARTIN Jean-René	professeur émérite	LEOM	ECL
	MASSON Jean-Pierre	professeur	CEGELY	UCBL
	MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS
	MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
	MIDOL Alain	maître de conférences	LTDS	UCBL
	MOREL Hervé	chargé de recherche	CEGELY	CNRS
	MOREL Robert	professeur	LMFA	INSA
	MOUSSAOUI Mohand	professeur	MAPLY	ECL
	MUSY François	maître de conférences	MAPLY	ECL

# ECOLE CENTRALE DE LYON

## Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

N	NICOLAS Alain	professeur	CEGELY	ECL
	NICOLAS Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS
O	O'CONNOR Ian	maître de conférences	LEOM	ECL
P	PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
	PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
	PHANER-GOUTORBE Magali	maître de conférences	LEOM	ECL
	POUSIN Jérôme	professeur	MAPLY	INSA
	PONSONNET Laurence	maître de conférences	CEGELY	ECL
	PREVOT Patrick	professeur	ICTT	INSA
R	REBOUX Jean-Luc	professeur	LTDS	ENISE
	RETIF Jean-Marie	maître de conférences	CEGELY	INSA
	ROBACH Yves	professeur	LEOM	ECL
	ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
	ROJAT Gérard	professeur	CEGELY	UCBL
	ROUSSEAU Jacques	professeur émérite	LTDS	ENISE
	ROUY Elisabeth	professeur	MAPLY	ECL
S	SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL
	SANDRI Dominique	maître de conférences	MAPLY	UCBL
	SCHATZMAN Michelle	directeur de recherche	MAPLY	CNRS
	SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
	SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
	SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS
	SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	STREMSDOERFER Guy	professeur	LTDS	ECL
	SUNYACH Michel	professeur	LMFA	UCBL
T	TARDY Jacques	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	THOMAS Gérard	professeur	LAGEP UCBL	ECL
	THOUVEREZ Fabrice	professeur	LTDS	ECL
	TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL
	TREHEUX Daniel	professeur	LTDS	ECL
V	VANNES André-Bernard	professeur émérite	LTDS	ECL
	VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	VINCENT Léo	professeur	LTDS	ECL
	VOLLAIRE Christian	maître de conférences	CEGELY	ECL
	VOLPERT Vitaly	directeur de recherche	MAPLY	CNRS
Z	ZAHOUANI Hassan	professeur	LTDS	ENISE
	ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	MAPLY	ECL



# Résumé

A l'heure actuelle, les séismes, qui représentent un risque naturel majeur, ne sont pris en compte que sous forme très simplifiée dans les codes de conception parasismique. En effet, de par sa nature, l'excitation sismique est particulièrement difficile à appréhender. Cependant, il est nécessaire de minimiser le risque d'endommagement des installations sensibles (telles que les centrales nucléaires ou les barrages hydroélectriques) lors d'une secousse sismique.

Dans ce contexte, une analyse robuste de l'endommagement peut s'avérer nécessaire, et il est alors particulièrement intéressant de disposer d'un modèle permettant de représenter l'ensemble des phénomènes mis en jeu dans le processus d'endommagement d'une structure : de la naissance de l'excitation jusqu'à la phase d'endommagement en elle-même. Ces phénomènes peuvent être découplés les uns des autres, ce qui permet une modélisation simplifiée de chacun.

Les structures considérées dans ce travail appartiennent au domaine du génie civil. Une des principales difficultés de l'analyse de leur endommagement est liée au matériau utilisé qui est le béton armé et dont le comportement est fortement non-linéaire. Des indicateurs de dommage spécifiques ont donc été développés. Toutefois, étant donné qu'il est difficile de connaître l'état d'endommagement d'un bâtiment existant, des incertitudes devront naturellement apparaître dans les modèles prédictifs de dommage. De façon à prendre en compte les cas les plus néfastes, les méthodes de type possibiliste sont préférées aux méthodes probabilistes. Le but est ainsi d'avoir un outil permettant de déterminer si une structure peut encore être considérée comme sûre après une secousse sismique.

Concernant l'excitation, la modélisation est scindée en deux parties que sont la naissance du mouvement au niveau du foyer et la propagation de l'onde dans le sol jusqu'à la surface. Ainsi, le mécanisme au foyer peut être considéré comme une instabilité de frottement entre deux solides élastiques. Cette instabilité peut être de type stick-slip ou sprag-slip et fait l'objet d'un modèle original développé ici, baptisé "modèle 3S". La propagation quant à elle fait intervenir les notions de noyaux de Green, de réflexions et transmissions d'ondes planes ou encore la théorie du transport. Le modèle complet regroupant ces deux sous-modèles permet de disposer d'une représentation globale originale du tremblement de terre, et donc de maîtriser les différentes sources d'incertitude pouvant apparaître. Les caractéristiques statistiques des séismes pour une région donnée sont ainsi obtenues.

## Mots Clés :

dynamique des structures, endommagement, incertitudes, frottement, propagation d'ondes.

# Abstract

At present, earthquakes, which represent the greatest natural risk, are taken into account only in very simplified form in the paraseismic codes. However, from its nature, the seismic excitation is particularly difficult to take into account and the sensitive installations (such as nuclear power stations or hydroelectric dams) require a minimum risk consideration as for their potential damage at the time of an earthquake. It can thus prove to be useful to have a model making it possible to represent the whole phenomena appearing in the process of damage of a structure, namely from the birth of the excitation to the damage. These phenomena can be uncoupled the ones from the others, in order to allow a simplified modeling of each one.

The structures considered here being structures of the civil engineering, one of the principal difficulties at the time of the analysis of their damage is related to material used, namely the reinforced concrete, whose behavior is strongly non-linear. Specific indicators of damage were thus developed. However, since it is difficult to know the state of damage of an existing building, uncertainties will have naturally to appear in the predictive models of damage. In order to take into account the most disastrous cases, the possibilistic methods are preferred to probabilistic methods.

Concerning the excitation, modeling is uncoupled between the birth of the movement and the wave propagation in the ground to surface. Thus, the mechanism can be regarded as a friction instability between two elastic solids, this instability being able to be of stick-slip or sprag-slip type. The propagation utilizes the concepts of Green cores, reflexions and transmissions of plane waves or the transport theory. This model makes it possible to have a total representation of the earthquake, and thus to control the various sources of uncertainty being able to appear.

Keywords :

structural dynamics, damage analysis, uncertainties, friction, wave propagation.



*“Ce n’est pas parce que les choses sont difficiles que nous n’osons pas, c’est parce que nous n’osons pas qu’elles sont difficiles”*

Sénèque

Ces travaux de thèse ont été réalisés au sein de l’équipe Dynamique des Systèmes et des Structures du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) de l’Ecole Centrale de Lyon. Ils ont été financés par la Région Rhône-Alpes sous la forme d’une Allocation Doctorale de Recherche. Dans ce cadre, un partenariat a été établi entre le LTDS et le SEPTEN (Service Etudes et Projets Thermiques Et Nucléaires) d’EDF.

Je tiens en premier lieu à remercier M. Louis JÉZÉQUEL, qui m’a accueilli dans son équipe et qui a assuré l’encadrement scientifique et la direction de ces trois années de thèse, en m’accordant sa confiance, son soutien et une grande autonomie dans mes travaux de recherche.

Je remercie le SEPTEN pour m’avoir permis de réaliser cette thèse, et plus particulièrement M. Jean-Pierre TOURET qui a suivi avec intérêt mes travaux et M. Emmanuel VIALLET qui a accepté de participer au jury de thèse malgré le bref délai dont il a disposé pour prendre connaissance de mon travail.

Je remercie vivement M. Bernard CAMBOU, Professeur à l’Ecole Centrale de Lyon, qui m’a fait l’honneur d’accepter la présidence du jury. Je remercie très sincèrement M. Félix DARVE, Professeur au Laboratoire 3S (INPG - Grenoble), et M. Donatien LE HOUEDDEC, Professeur à l’Ecole Centrale de Nantes, pour l’intérêt qu’ils ont porté à mon travail, en acceptant d’être rapporteur de ce mémoire.

Enfin, j’adresse un grand merci à tous mes collègues chercheurs, thésards, techniciens, à la secrétaire Isabelle TIXIER, pour la bonne ambiance, les facilités de travail et les échanges fructueux tout au long de ces années, avec une pensée particulière pour Marie-Maud, Isabelle, Olivier, Patrick pour leur soutien et leurs encouragements dans les moments difficiles, sans oublier bien évidemment les périodes plus festives... Je n’oublierai pas de mentionner ma famille, mes amis proches, qui ont contribué à la réussite de mes dernières années d’étude sur les plans professionnels, personnels et humains.



# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexte et problématique</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction à la tectonique des plaques . . . . .	3
1.2 Etude préliminaire : modèle complet éléments finis . . . . .	5
1.2.1 Présentation du modèle . . . . .	5
1.2.2 Algorithme de résolution . . . . .	7
1.2.3 Résultats . . . . .	7
1.3 Hypothèse de découplage des différents phénomènes . . . . .	10
1.4 Illustrations de l'endommagement de structures en béton armé . . . . .	10
1.5 Conclusion . . . . .	11
<b>2 Réponse et endommagement de bâtiments</b>	<b>13</b>
2.1 Analyse non-linéaire de structures en béton armé . . . . .	13
2.1.1 Types de structures étudiés . . . . .	14
2.1.2 Modèles éléments-finis . . . . .	15
2.1.3 Conclusion . . . . .	21
2.2 Caractérisation de l'endommagement . . . . .	21
2.2.1 Notion d'indicateur de dommage . . . . .	22
2.2.2 Classification du dommage . . . . .	22
2.2.3 Exemples d'indicateurs de dommage . . . . .	23
2.2.4 Echelles de modélisation . . . . .	27
2.2.5 Dégradation des caractéristiques modales . . . . .	27

2.3	Outils de prise en compte des incertitudes . . . . .	28
2.3.1	Méthodes probabilistes . . . . .	28
2.3.2	Méthodes possibilistes . . . . .	31
2.4	Application du calcul par intervalles . . . . .	36
2.5	Application de l'analyse convexe à l'estimation de l'endommagement . . . . .	41
2.5.1	Cadre de l'étude . . . . .	42
2.5.2	Prise en compte d'incertitudes sur l'excitation . . . . .	44
2.5.3	Prise en compte d'incertitudes sur la structure . . . . .	48
2.5.4	Prise en compte d'incertitudes sur l'excitation et la structure . . . . .	50
2.5.5	Comparaison avec des tirages de Monte Carlo . . . . .	51
2.5.6	Application : modèle avec prise en compte de la chute de fréquence . . . . .	52
2.5.7	Extension des résultats aux systèmes à plusieurs degrés de liberté . . . . .	56
2.5.8	Conclusion . . . . .	60
2.6	La $\mu$ -synthèse . . . . .	60
2.6.1	Traitement des incertitudes . . . . .	61
2.6.2	$\mu$ -synthèse . . . . .	64
2.6.3	Conclusion . . . . .	66
2.7	Conclusion . . . . .	66
<b>3</b>	<b>La source des tremblements de terre : le mécanisme au foyer</b>	<b>69</b>
3.1	Ordres de grandeur . . . . .	69
3.2	Phénomène de stick-slip : les modèles classiques . . . . .	70
3.2.1	Le stick-slip . . . . .	70
3.2.2	Le modèle de Burridge-Knopoff . . . . .	71
3.2.3	Les modèles analytiques . . . . .	74
3.2.4	Les modèles éléments finis . . . . .	75
3.3	Phénomène de sprag-slip : présentation . . . . .	77
3.4	Modèle analytique de glissement de deux couches superposées . . . . .	78
3.4.1	Modélisation . . . . .	78
3.4.2	Résultats . . . . .	80

---

3.5	Modèle éléments-finis . . . . .	82
3.6	Construction du modèle . . . . .	84
3.6.1	Réduction du modèle . . . . .	84
3.6.2	Application numérique . . . . .	86
3.7	Modèle d'excitation sismique : le modèle 3S . . . . .	89
3.7.1	Guide d'ondes - Méthode propagative . . . . .	89
3.7.2	Phases de glissements-recollements . . . . .	93
3.7.3	Validation de la loi de Gutenberg-Richter . . . . .	94
3.7.4	Simulation d'un cas réaliste . . . . .	95
3.8	Conclusion . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Transmission de l'excitation à travers le sol</b>	<b>97</b>
4.1	Les bases de la propagation d'ondes . . . . .	97
4.1.1	Les différents types d'ondes sismiques . . . . .	97
4.1.2	Vitesses de propagation . . . . .	99
4.1.3	Atténuation des ondes . . . . .	101
4.2	Noyaux de Green . . . . .	102
4.2.1	Noyau de Green pour excitation en force . . . . .	103
4.2.2	Moment sismique . . . . .	107
4.2.3	Noyau de Green pour une excitation en moment . . . . .	109
4.3	Les ondes de surface . . . . .	112
4.3.1	Rappels sur les ondes de surface . . . . .	112
4.3.2	Propagation dans les milieux stratifiés . . . . .	115
4.3.3	Noyaux de Green . . . . .	119
4.3.4	Ondes de Love et de Rayleigh correspondant à une source en moment . . . . .	123
4.4	Génération du champ par réflexions et transmissions d'ondes planes . . . . .	124
4.4.1	Réflexions et transmission à une interface solide-solide . . . . .	125
4.4.2	Réflexions sur une surface libre . . . . .	126
4.4.3	Parcours des ondes . . . . .	127
4.5	Propagation d'ondes en milieux inhomogènes . . . . .	129

4.5.1	Principe des rayons . . . . .	129
4.5.2	Illustration dans le cas d'une variation linéaire avec la profondeur . . . . .	130
4.6	Propagation d'ondes en milieux aléatoires . . . . .	131
4.6.1	Phénomènes caractéristiques . . . . .	131
4.6.2	La théorie du transport . . . . .	132
4.6.3	Approximation hautes fréquences . . . . .	134
4.6.4	Applicabilité . . . . .	138
4.7	Conclusion . . . . .	138
<b>5</b>	<b>Application - Synthèse</b>	<b>139</b>
5.1	Cadre d'application . . . . .	139
5.2	Résultats au niveau de la source . . . . .	140
5.2.1	Mise en œuvre du modèle 3S . . . . .	140
5.2.2	Résultats statistiques . . . . .	141
5.3	Propagation des ondes jusqu'à la surface . . . . .	143
5.3.1	Relations de dispersion . . . . .	143
5.3.2	Résultats en surface . . . . .	145
5.3.3	Synthèse . . . . .	149
5.4	Conclusion . . . . .	151
	<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES</b>	<b>153</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>155</b>

# Introduction

Les séismes sont les risques naturels majeurs les plus meurtriers dans le monde, généralement associés à des dégâts considérables. Ils correspondent à une rupture superficielle ou profonde de roches résistantes. Au moment de la rupture, de l'énergie est libérée sous forme d'ondes élastiques qui se propagent à l'intérieur de la terre, ce qui se traduit en surface par des vibrations du sol.

La prédiction de l'endommagement de structures au cours de tremblements de terre est donc un problème majeur dans les zones sismiques, en particulier pour les structures qualifiées de sensibles, telles que les centrales nucléaires ou les installations hydro-électriques. Ce type d'étude est particulièrement intéressant pour une entreprise comme EDF, au travers de son service SEPTEN (Service Etudes et Projets Thermiques Et Nucléaires), partenaire de ce travail.

Toutefois, une telle étude se heurte à plusieurs difficultés. La première est liée à la nature même de l'excitation considérée : le tremblement de terre. En effet, il apparaît particulièrement difficile de quantifier une telle excitation, de par son caractère aléatoire. On peut certes connaître quelques informations telles que l'énergie du signal grâce aux enregistrements effectués dans les stations équipées d'accélérographes, mais cela reste insuffisant pour déterminer le degré d'endommagement d'une structure. La deuxième difficulté porte sur le type de structures considéré ici : on s'intéresse à des structures de génie civil, donc bien souvent des modèles uniques, ne permettant aucun retour d'expériences précis, et qui, de par leur processus de fabrication (pour les structures en béton armé), peuvent présenter de larges incertitudes vis à vis du cahier des charges. Une analyse robuste de l'endommagement des bâtiments va donc nécessiter la prise en compte d'aléas à tous les niveaux de la modélisation.

Le travail rapporté dans ce mémoire porte donc sur une analyse globale du processus lié à l'endommagement de structures au cours de tremblements de terre, en proposant une modélisation de l'ensemble des phénomènes mis en jeu, de la source de l'excitation au niveau du foyer jusqu'à l'endommagement de la structure en surface.

Ainsi, le premier chapitre propose une présentation globale de la problématique en s'attachant à la mise en évidence des principales difficultés liées à une telle modélisation. Pour cela, les bases de la géotechnique sont abordées de façon à illustrer le cadre d'étude considéré. Puis le principe de découplage des différents phénomènes sur lequel s'appuie la suite du mémoire

est présenté.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des bâtiments et plus précisément à leur processus d'endommagement. La difficulté mise en évidence à ce niveau porte sur le matériau utilisé, qui est classiquement le béton armé. Différents types d'architecture générique sont étudiés et les notions relatives à la quantification du dommage d'une structure sont définies. La prise en compte d'incertitudes lors de l'évaluation de l'endommagement est traitée par le biais d'outils spécifiques, faisant appel aux notions d'analyse probabiliste et d'analyse possibiliste.

Les chapitres trois et quatre portent sur la modélisation de l'excitation sismique. Cette étude est scindée en deux parties qui correspondent à chacun des deux chapitres : la source sismique et la propagation des ondes dans le sol.

La modélisation de la source sismique, c'est à dire du mécanisme conduisant à la naissance d'une onde au niveau de la zone de foyer, est réalisée dans le troisième chapitre. Cette source est liée à des instabilités de glissement avec frottement entre deux couches élastiques en contact. Un modèle original est alors proposé, baptisé "modèle 3S". Les résultats issus de ce modèle serviront d'entrée aux modèles de propagation.

La propagation est ensuite traitée en se basant sur le modèle de source. Un milieu stratifié est alors considéré pour représenter le sol. Différentes méthodes d'analyse sont présentées pour déterminer la plus adaptée à l'application étudiée.

Les chapitres trois et quatre se focalisant sur les aspects théoriques, le cinquième et dernier chapitre présente une synthèse des résultats issus des différents modèles dans un cas particulier de faille sismique. Les statistiques correspondant à l'initiation des mouvements sont alors obtenues, et le modèle de propagation permet d'établir les principales caractéristiques des accélérogrammes correspondant à cette source.

La synthèse de l'ensemble de ces résultats aboutit à la détermination de statistiques sur les caractéristiques d'un séisme dans une région donnée.



# Chapitre 1

## Contexte et problématique

L'objectif de ce chapitre est de présenter le contexte de l'étude proposée dans ce mémoire et de comprendre comment la problématique a été abordée. En effet, dans le but d'étudier l'endommagement de bâtiments au cours de tremblements de terre, il est indispensable de maîtriser aussi bien ce qui se passe au niveau de la structure que de la source d'excitation qu'est le séisme. Nous allons donc voir ici de façon très générale et sans approfondissement les principaux phénomènes qu'il faudra prendre en compte dans le cadre d'une analyse d'endommagement sous séisme.

Pour cela, on commence par présenter les fondements de la tectonique des plaques, en définissant les différents termes associés, puis on propose un premier modèle de faille sismique. Une présentation imagée des dégradations de structure en béton armé lors de séisme, permettant de se rendre compte de la complexité de l'endommagement, clôt ce chapitre.

### 1.1 Introduction à la tectonique des plaques

Les séismes d'origine tectonique qui nous intéressent ici sont le résultat de la dérive des plaques tectoniques en mouvement sur le magma et des contraintes qu'elle génère. On distingue trois grands types de déplacements relatifs des plaques tectoniques (cf. fig. 1.1 et 1.2) :

- les failles normales ou rifts océaniques : zone en extension, les deux plaques s'écartent l'une de l'autre, laissant remonter le magma ;
- les décrochements ou failles transformantes : zone en cisaillement, les deux plaques coulisent l'une contre l'autre ;
- les failles inverses ou zones de subduction : zone en compression, les deux plaques se rapprochent, forçant l'une à passer sous l'autre.

Dans ce travail, nous allons nous intéresser en particulier au cas de la zone de subduction, et nous allons essayer de modéliser le glissement avec frottement de deux plaques en contact. On parle également de faille inverse du fait que la déformation entraîne un raccourcissement des terrains initiaux.

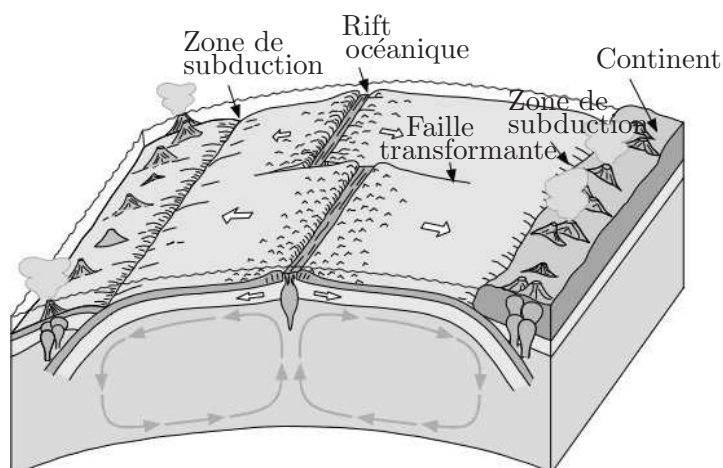


FIG. 1.1 – Tectonique des plaques

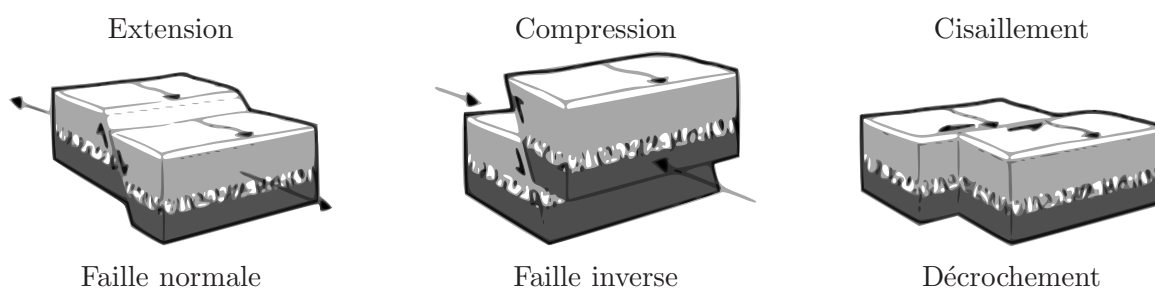


FIG. 1.2 – Les trois types principaux de failles

La faille est le résultat de la rupture d'un ensemble rocheux sous l'effet des contraintes auxquelles il est soumis. C'est H. Reid qui a formulé le premier modèle mécanique, cohérent avec les observations de terrain, de la source sismique. Sa théorie, dite du *rebond élastique*, attribue les vibrations du sol à la rupture brutale de la liaison entre deux plaques tectoniques qui libère en un temps très court les contraintes accumulées par la déformation tectonique. Ce phénomène est illustré sur la figure 1.3.

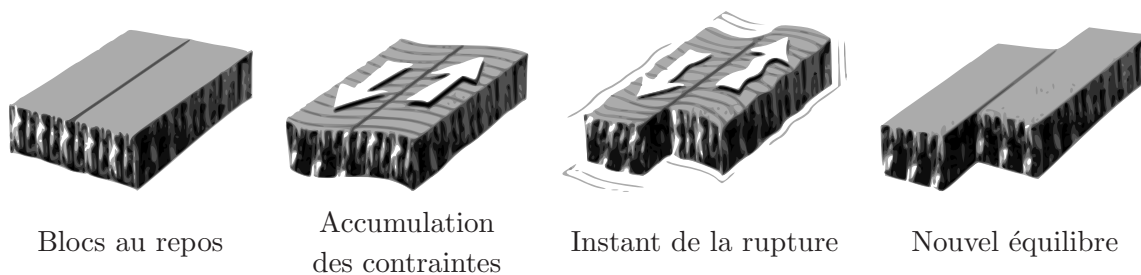


FIG. 1.3 – Les quatre phases du rebond élastique

L'un des buts du travail rapporté dans ce mémoire est de modéliser ce rebond élastique.

### Illustrations de failles émergentes

Sur les photos présentées sur les figures 1.4 et 1.5, on peut voir des glissements tectoniques atteignant la surface terrestre ; les glissements se traduisent alors par un déplacement vertical faisant apparaître une marche ou par un cisaillement du sol. Ces photos permettent de se rendre compte des amplitudes de déplacements susceptibles d'apparaître lors d'un glissement entre deux plaques tectoniques et laissent présager de l'énergie libérée lors d'un tel glissement.

## 1.2 Etude préliminaire : modèle complet éléments finis

A partir de maintenant, on se focalisera sur l'étude d'une faille correspondant à une zone de subduction (glissement d'une plaque sous une autre - cf. fig. 1.6). Le but est alors de s'intéresser au déclenchement d'un séisme dans une telle zone.

### 1.2.1 Présentation du modèle

Dans un premier temps, l'étude de la modélisation de l'excitation sismique est effectuée en se basant sur un modèle éléments finis complet, c'est à dire permettant de représenter l'ensemble du système, du comportement du sol au niveau de la faille jusqu'à la secousse ressentie en surface. Ce modèle intègre donc l'ensemble des caractéristiques linéaires (propriétés élastiques du milieu) et non-linéaires (frottement) des phénomènes mis en jeu. En particulier, la prise en compte du frottement sous la forme d'une loi de Coulomb fait apparaître de fortes non-linéarités. Nous verrons par la suite que ce modèle s'avère inadapté, et nous n'entrerons donc pas dans les détails.

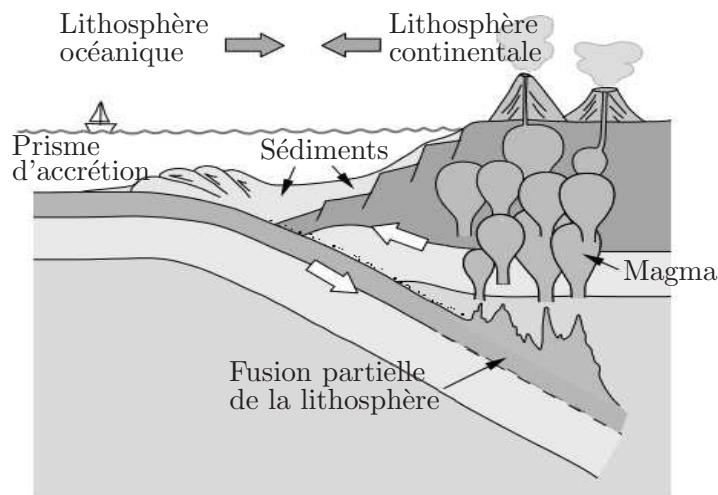


FIG. 1.6 – Zone de subduction

On modélise un triangle de sol reposant sur un milieu parfaitement rigide et faisant intervenir un coefficient de frottement  $\mu_f$  au niveau de l'interface. Ce modèle est représenté sur la figure 1.7. De façon à représenter sous forme simplifiée la zone de subduction, la zone de contact avec frottement est inclinée (angle  $\theta$ ), la surface libre est prise horizontale et un déplacement



FIG. 1.4 – Séisme de Chi-Chi (Taiwan) du 21 septembre 1999



FIG. 1.5 – Déformation localisée de rails après le séisme de Tangshan (Chine) du 28 juillet 1976

$d$  est imposé sur la face droite au travers de ressorts de raideur  $k_{sol}$ . Ce déplacement imposé correspond à la poussée liée au mouvement d'ensemble de la plaque tectonique. L'introduction des raideurs  $k_{sol}$  traduit l'élasticité du sol.

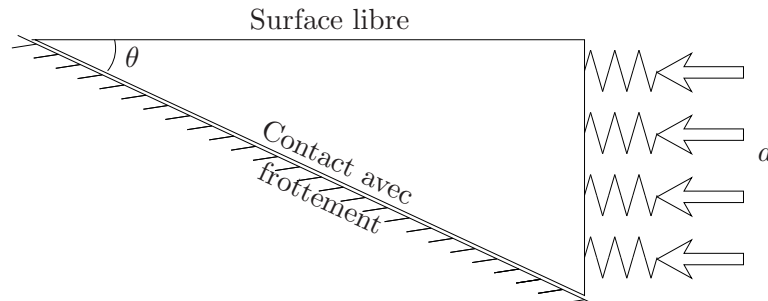


FIG. 1.7 – Zone de subduction

Lors du maillage du modèle, une contrainte importante est à prendre en compte au niveau de la taille des mailles du modèle éléments finis : notre but est ici d'étudier la propagation des ondes entre la zone de frottement et la surface libre. Pour cela, il faudra alors que la longueur d'une maille soit au moins dix fois inférieure à la plus petite longueur d'onde entrant en jeu dans le système. La plus petite longueur d'onde correspond à l'onde se propageant le plus lentement et avec la fréquence la plus élevée. Notre modèle étant bidimensionnel, les ondes susceptibles d'apparaître sont les ondes de volume (P et S) et les ondes de Rayleigh. Les ondes de Love faisant intervenir un mouvement hors plan, elles seront inexistantes ici. L'onde la plus lente est alors l'onde de Rayleigh qui se propage à environ 5km/s. De plus, les fréquences sismiques étant classiquement comprises entre 1 et 10Hz, on retiendra des mailles d'une longueur maximale de 50m.

### 1.2.2 Algorithme de résolution

De façon à pouvoir gérer la non-linéarité liée au frottement, un algorithme de résolution temporelle spécifique doit être utilisé. On utilise ici un algorithme prédicteur-correcteur : pour déterminer l'état du système à l'instant  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , un calcul linéaire est effectué en supposant que chacun des points de contact reste dans le même état qu'à l'instant  $t_n$ . Si ce calcul révèle que pour un point bloqué à l'instant  $t_n$ , la contrainte horizontale dépasse le seuil de glissement, alors la deuxième boucle de calcul le considérera comme glissant. Inversement, si un point glisse à l'instant  $t_n$  mais que sa vitesse s'annule ou change de signe à l'instant  $t_{n+1}$ , alors ce point doit être considéré comme collé. Cet algorithme est résumé sur la figure 1.8. Pour les résolutions linéaires, un schéma d'intégration directe de Newmark est utilisé en appliquant un algorithme d'accélération moyenne.

Cet algorithme sera utilisé dans toutes les parties de ce travail nécessitant une résolution temporelle d'un système avec frottement.

### 1.2.3 Résultats

La résolution temporelle doit alors être conduite sur un laps de temps permettant, à partir d'un état de départ déterminé de façon à ce que tous les points de contact soient au repos

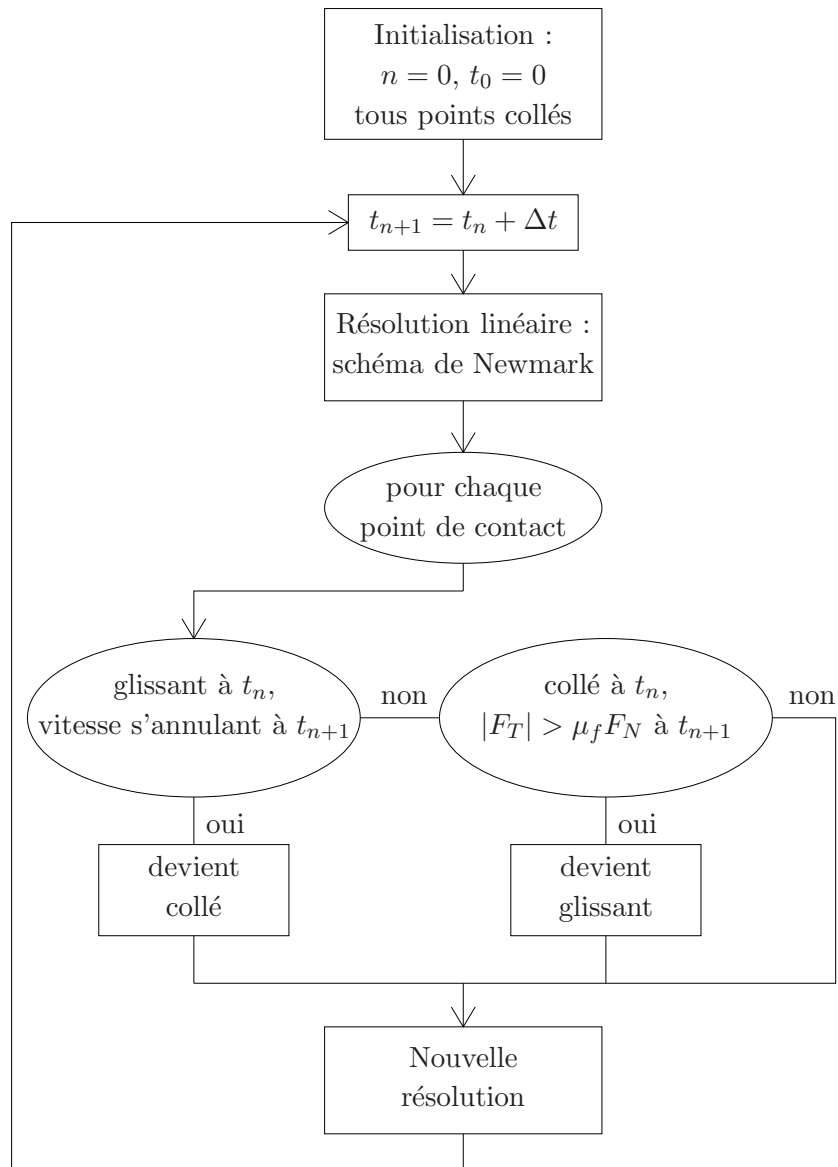


FIG. 1.8 – Algorithme de résolution avec prise en compte du frottement

(contrainte tangentielle  $F_T$  nulle à  $t = 0$ ), de simuler un nombre de glissements suffisant de façon à ce que les conditions initiales aient une influence aussi faible que possible.

Les figures 1.9 et 1.10 présentent respectivement un accélérogramme type obtenu grâce à ce modèle et le spectre de Fourier correspondant pour une faille inclinée de  $30^\circ$  par rapport à l'horizontal, un bloc de 5 km de haut et une taille de mailles de 50 m. On peut constater que le résultat obtenu est tout à fait réaliste.

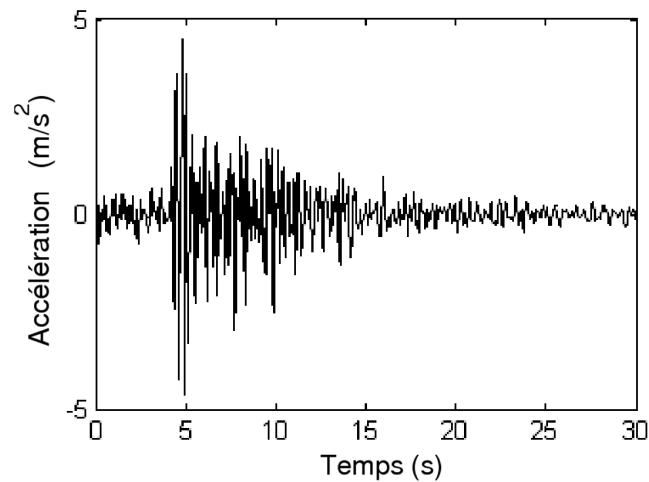


FIG. 1.9 – Accélérogramme type obtenu en surface

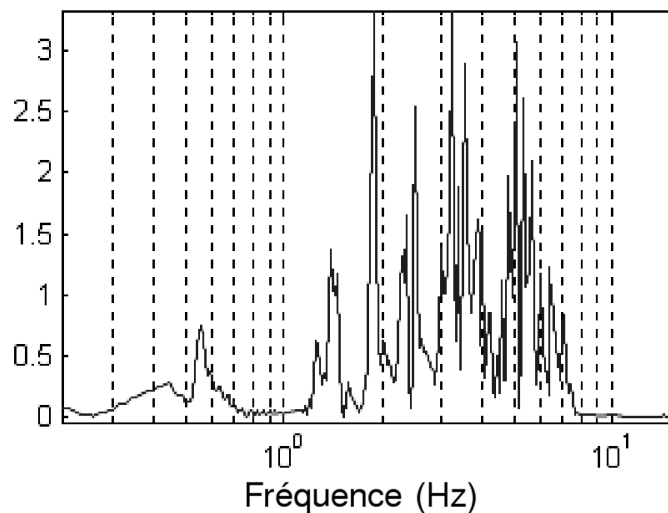


FIG. 1.10 – Spectre type

Toutefois, étant donné la taille du modèle à gérer (grand nombre de degrés de liberté) et le comportement non-linéaire à gérer (lié au frottement), cette modélisation s'avère particulièrement coûteuse en termes de temps de calcul et d'espace mémoire nécessaire. Ce modèle présente donc l'avantage de représenter de façon globale l'ensemble des phénomènes liés à

l'excitation sismique, à savoir la génération des ondes au niveau de la zone de foyer et la propagation à travers le sol jusqu'à la surface.

En conséquence, il n'est pas envisageable d'effectuer une étude statistique des générations de séismes à partir de ce modèle. L'un des objectifs du travail rapporté ici sera donc de proposer une modélisation plus adéquate du système en vue d'obtenir des lois statistiques.

### 1.3 Hypothèse de découplage des différents phénomènes

L'idée est alors de voir s'il est possible de découpler le problème en deux sous-problèmes indépendants. Nous étudierons alors d'un côté le déclenchement du glissement entre les plaques tectoniques correspondant à la zone du foyer du séisme (cf. fig. 1.11), puis nous analyserons la propagation des ondes à travers le sol en cherchant à introduire des incertitudes dans les caractéristiques des différentes couches traversées.

L'avantage recherché dans ce découplage est la simplification des modèles, ce qui devrait permettre de réduire considérablement les temps de calcul.

Les différentes études correspondant à chacun de ces sous problèmes seront abordées dans les chapitres 4 et 5 de ce mémoire.

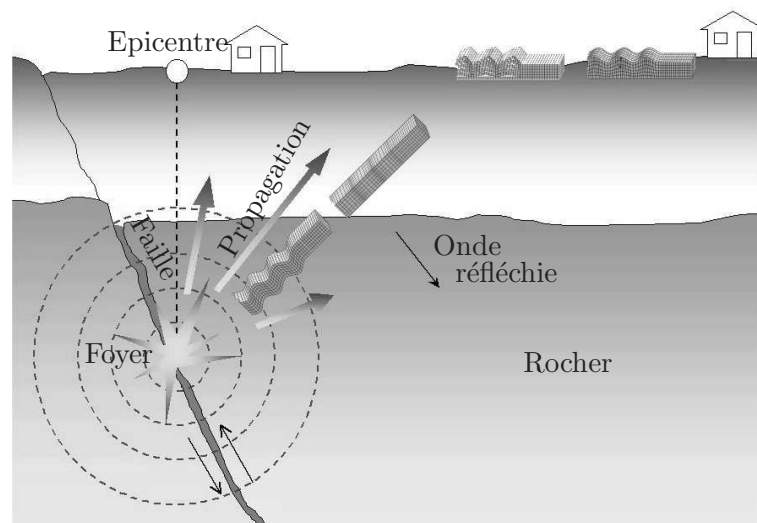


FIG. 1.11 – Les différentes phases du séisme

### 1.4 Illustrations de l'endommagement de structures en béton armé

Avant d'aborder en détails l'étude de l'endommagement des structures en béton armé, il est intéressant de voir quel type de dommage peut être subi par une telle structure. Les figures 1.12 à 1.14 présentent ainsi des photos de bâtiments détruits ou ayant subis de graves dommages au cours de tremblements de terre. On peut y voir que les processus d'endommagement sont



particulièrement complexes, avec un éclatement du béton mettant à nu le ferrailage. Nous verrons dans le chapitre 2 comment ce type d'endommagement peut être pris en compte.



FIG. 1.12 - Rupture d'une liaison poutre/poteau - séisme d'Izmit (Turquie, 17 août 1999)

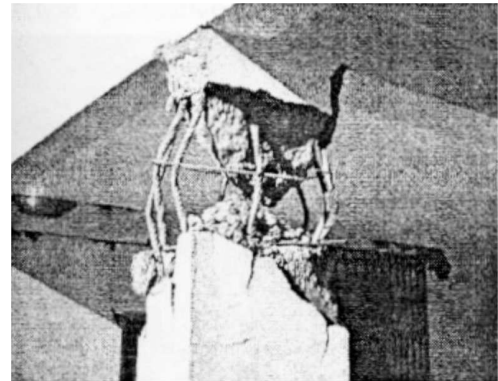


FIG. 1.13 - Détail rupture de poteau - séisme de Bhuj (Inde, 26 janvier 2001)



FIG. 1.14 - Dommages sur élément en béton - séisme au Salvador (13 janvier 2001)

## 1.5 Conclusion

Les problématiques principales liées à une approche robuste du risque sismique ayant été présentées de façon succinctes, elles vont maintenant être développées successivement des les chapitres qui suivent.



## Chapitre 2

# Réponse et endommagement de bâtiments

L'enjeu de la conception parasismique est de permettre à un bâtiment de résister aux secousses sismiques. Toutefois, plusieurs difficultés se présentent lors de cette phase de conception, et nous allons dans ce chapitre aborder certains points indispensables dans le cadre du génie parasismique.

Tout d'abord, si on considère les structures du génie civil dans un cadre général, on prend rapidement conscience de la difficulté majeure liée à la diversité des structures susceptibles d'être rencontrées. En effet, au niveau architectural, chaque structure est plus ou moins unique, ce qui rend relativement difficile une étude générique. Nous ferons donc le choix de nous limiter à certaines géométries simples, mais représentatives de la majorité des structures industrielles, à savoir des structures de type poutres/poteaux, portiques ou encore simple mur.

Le deuxième point porte sur le matériau utilisé. La majorité des bâtiments est construite en béton armé, ce qui n'est pas sans poser de nombreux problèmes en termes de conception parasismique. En effet, il s'agit d'un matériau au comportement fortement non-linéaire et donc difficile à modéliser sans faire appel à un modèle spécifique.

Enfin, une dernière difficulté à laquelle nous nous intéresserons concerne les incertitudes à prendre en compte lors de la modélisation du comportement du système. En effet, entre la phase de conception d'un bâtiment et son comportement réel en cours de vie, les caractéristiques prédites peuvent varier. Cette variabilité est due à la fois aux incertitudes inhérentes au processus de construction en lui-même (mauvaise qualité de béton, défauts de soudure...) mais aussi à l'évolution des caractéristiques au cours du temps, cette évolution pouvant être liée à un vieillissement du matériau ou à un endommagement préalable, comme on le verra dans ce chapitre.

### 2.1 Analyse non-linéaire de structures en béton armé

Dans cette première partie, on montre la complexité du comportement d'un matériau tel que le béton armé. Cette complexité est liée à la présence combinée de béton et d'armatures en acier, ce qui rend le processus de dégradation difficile à modéliser.

### 2.1.1 Types de structures étudiés

Les structures étudiées dans cette partie sont de type portique en béton armé, c'est à dire composées de poutres (dénomination donnée aux parties horizontales) supportées par des poteaux (éléments verticaux). Ce choix a été fait en se basant sur le fait qu'en pratique, ce type de structure représente la base de nombreux ouvrages réels. Par ailleurs, nous nous contenterons ici d'une étude du système en 2D.

Les caractéristiques des portiques retenus sont celles des structures testées lors de la campagne d'essais menée au CEA (Commissariat à l'Energie Atomique) en 1978 par Gauvin. Ces essais furent les premiers essais sur table vibrante supervisés par le SEPTEN (Service Etudes et Projet Thermique et Nucléaire d'EDF) ; ils concernent une série de 11 poteaux et 7 portiques en béton armé. Les portiques testés lors de ces essais représentent en fait ceux d'un bâtiment réel à l'échelle 1/3.

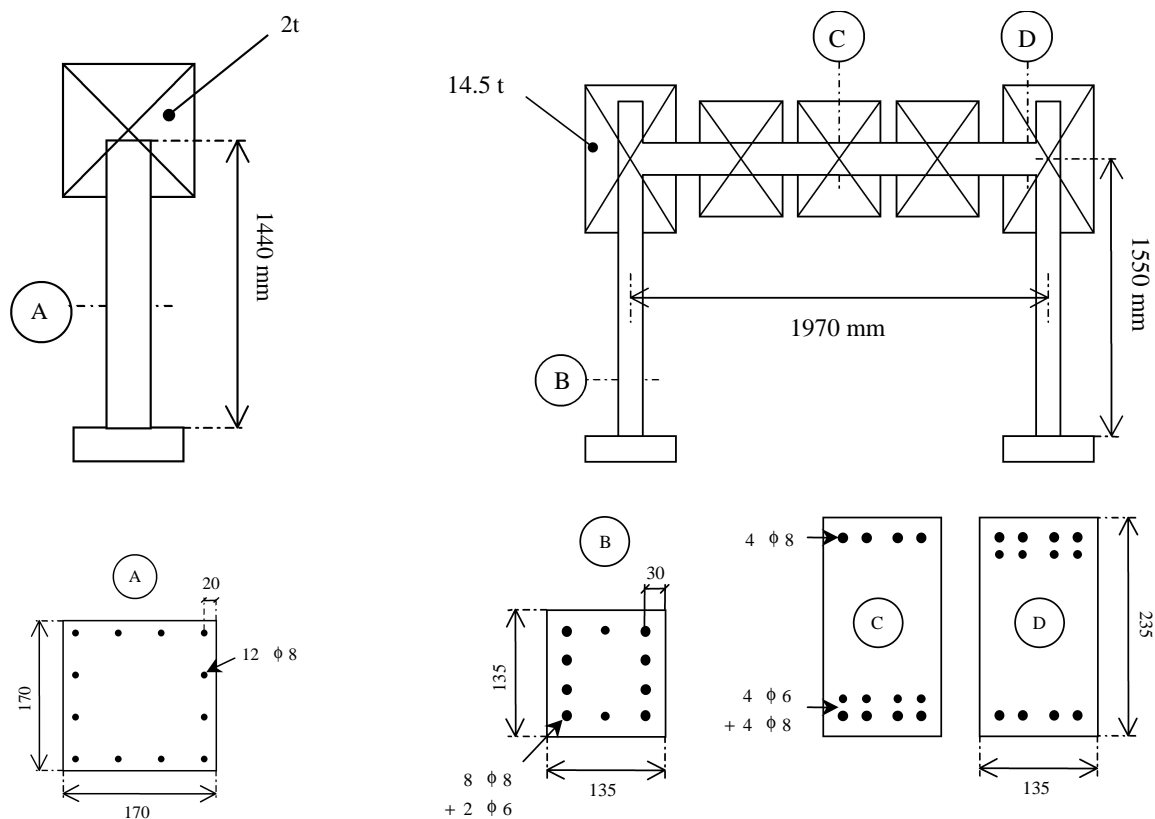


FIG. 2.1 – Structures testées lors des essais Gauvin (1978)

Nous nous intéresserons ici en particulier au cas d'un simple poteau chargé en tête et d'un portique à un étage, tels qu'ils sont représentés sur la figure 2.1.

Bien que le béton soit un matériau plastique, une première étude est faite en se limitant au domaine élastique du matériau afin de déterminer les modes de vibration de chacun des systèmes. On modélise pour cela la structure en utilisant des éléments élastiques et en faisant

appel à un module d'Young équivalent à l'ensemble béton-acier.

Dans un deuxième temps, un modèle plus complexe intégrant les propriétés non-linéaires du béton armé est construit, de façon à comprendre les modes de dégradation d'un tel matériau.

### 2.1.2 Modèles éléments-finis

#### Analyse modale - Modèle élastique

On s'intéresse dans cette première partie à l'analyse modale des deux structures poteau et portique présentées précédemment. Pour cela, on crée un modèle éléments-finis du système considéré sous ANSYS en se limitant à un système à deux dimensions constitué de poutres élastiques. On retient alors pour ces poutres un module d'Young équivalent  $E$  de 30 000 MPa, qui correspond, comme on le verra dans la suite, à l'élasticité du matériau dans son domaine linéaire.

Les fréquences propres et les déformées correspondantes sont présentées dans le tableau 2.1 et les figures 2.2 et 2.3.

	Poteau	Portique
1 <sup>er</sup> mode	5 Hz	3 Hz
2 <sup>ème</sup> mode	84 Hz	16 Hz
3 <sup>ème</sup> mode	194 Hz	39 Hz

TAB. 2.1 – Premières fréquences propres

On constate ici que dans chacun des deux cas, et particulièrement dans le cas du poteau, la deuxième fréquence propre de la structure est sensiblement éloignée de la première. Lors d'un séisme, on aura donc vraisemblablement uniquement une excitation sur le premier mode.

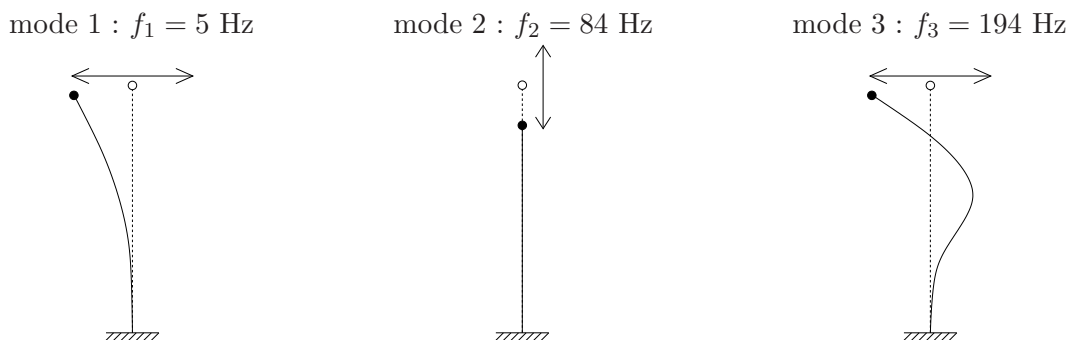


FIG. 2.2 – Poteau - premiers modes propres

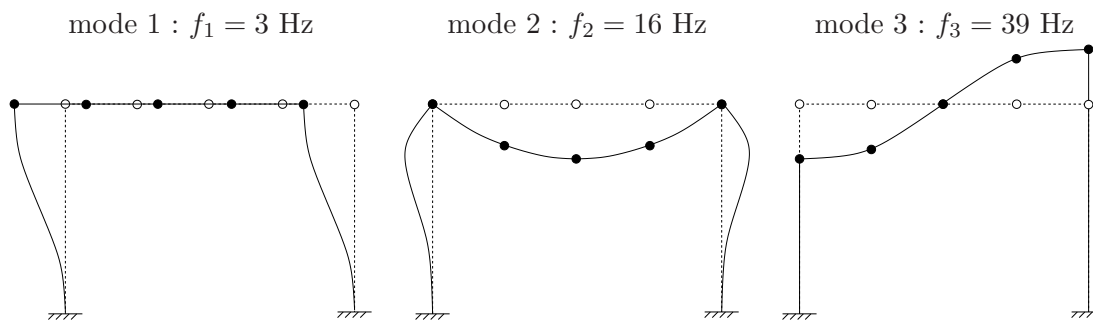


FIG. 2.3 – Portique - premiers modes propres

### Modèle de béton armé sous ANSYS

Dans le but de modéliser le comportement des structures en béton armé en prenant en compte les non linéarités du matériau, on construit un modèle incluant toutes les particularités du béton. Le modèle éléments-finis de la structure en béton armé est alors réalisé en utilisant l'élément SOLID65 du code éléments finis ANSYS.

Cet élément permet de modéliser des solides en béton en trois dimensions avec ou sans armature métallique. De plus, il intègre les notions d'écrasement (contraintes de compression) et de fissuration (contraintes de traction) et permet ainsi de traiter les propriétés non linéaires du matériau. Par ailleurs, ce modèle permet d'obtenir en résultat le déplacement de chacun des nœuds, ainsi que les contraintes internes dans le matériau pour une sollicitation donnée.

Par simplicité lors du maillage, les armatures d'acier ont été placées au coin de chacun des poteaux et poutres. De plus, une approximation est faite en utilisant les mêmes nœuds pour définir les éléments béton et acier, alors que cela sous-entend une adhérence parfaite entre les deux matériaux (cf. figure 2.4). Il faut toutefois noter que le type d'élément utilisé impose de modéliser la structure en 3D. Notre étude se limitant au cadre 2D, il convient de limiter les déplacements possibles dans le plan de la structure.

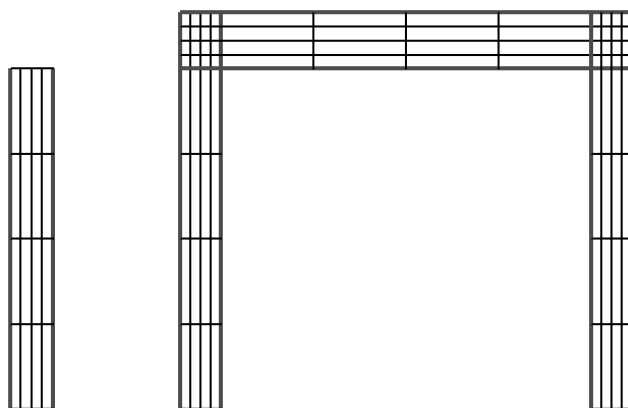


FIG. 2.4 – Maillage des structures sous ANSYS

Les différents paramètres retenus pour les éléments béton et acier sont les suivants :

- Pour le béton :
  - Module d'Young : 23 500 MPa
  - Coefficient de Poisson : 0,2
  - Résistance en traction : 3 MPa
  - Résistance en compression : 30 MPa
  
- Pour l'acier :
  - Module d'Young : 200 000 MPa
  - Coefficient de Poisson : 0,3

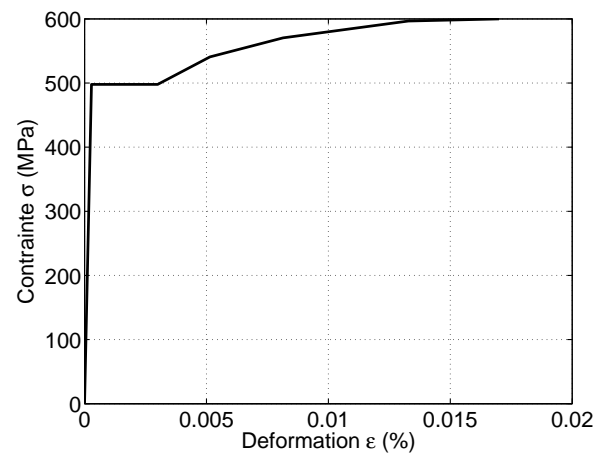
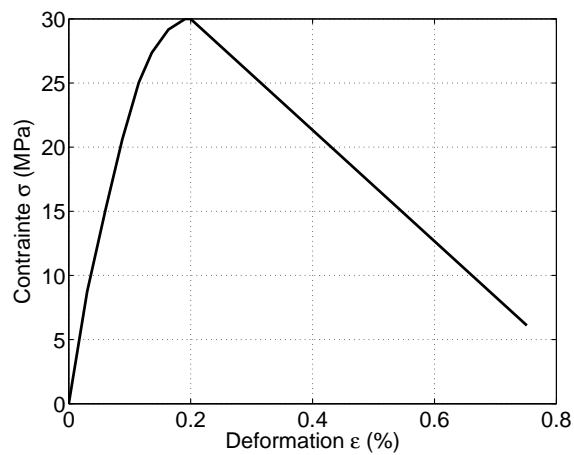


FIG. 2.5 – Loi de comportement du béton

FIG. 2.6 – Loi de comportement de l'acier

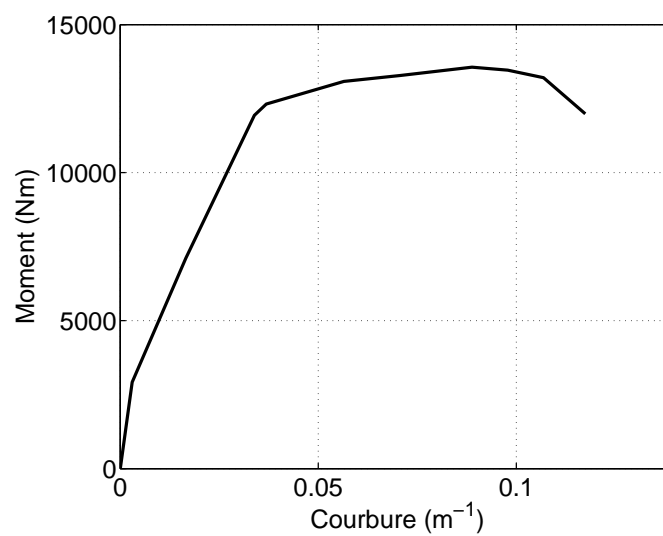


FIG. 2.7 – Exemple de loi moment/courbure pour un poteau en béton armé

Les figures 2.5 et 2.6 présentent respectivement les lois de comportement du béton et de l'acier retenues pour les applications qui suivent. Les lois moment/courbure correspondant à l'assemblage de ces deux matériaux peuvent alors être obtenues à partir de ces lois de comportement en faisant appel au logiciel ANSYS. Un exemple de loi moment/courbure correspondant à un poteau en béton armé est donné sur la figure 2.7. On peut y observer la dégradation successive des différents matériaux : dans un premier temps, la courbe est linéaire, jusqu'à l'apparition de la fissuration du béton ; Les dégradations suivantes sont liées à la plastification des aciers travaillant en traction.

### Analyse statique

On réalise ici une étude statique de la structure soumise à un chargement latéral. Pour cela, on s'intéresse au déplacement horizontal résultant à l'application d'une force donnée en tête de poteau (cf. figures 2.8 et 2.9). Cette approche s'apparente à l'analyse PUSH-OVER qui consiste à charger la structure statiquement de manière incrémentale jusqu'à rupture. Les résultats obtenus lors de cette étude sont présentés sur les figures 2.10 et 2.11.

Sur ces courbes, on observe un domaine élastique pour de faibles déplacements, caractérisé par une partie linéaire, mais très vite, on entre dans une phase plastique avec une importante perte de rigidité de la structure.

Ne disposant pas de résultats expérimentaux, il est difficile de vérifier la validité de ces résultats. Toutefois, on peut contrôler que dans le domaine élastique, la pente de la courbe correspond bien à une valeur du module d'Young cohérente avec les propriétés des matériaux modélisés.

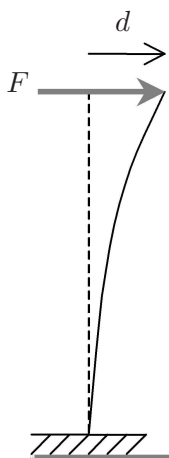


FIG. 2.8 – Poteau - sollicitation push-over

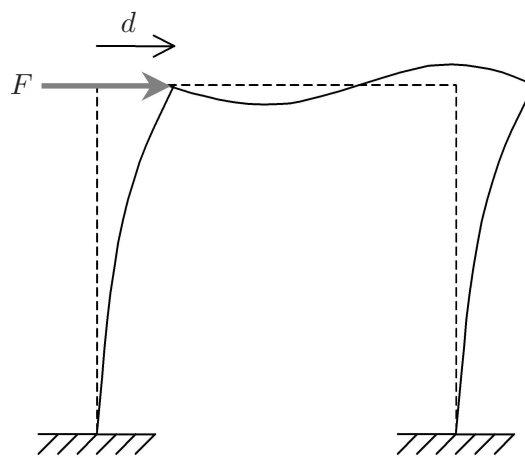


FIG. 2.9 – Portique - sollicitation push-over



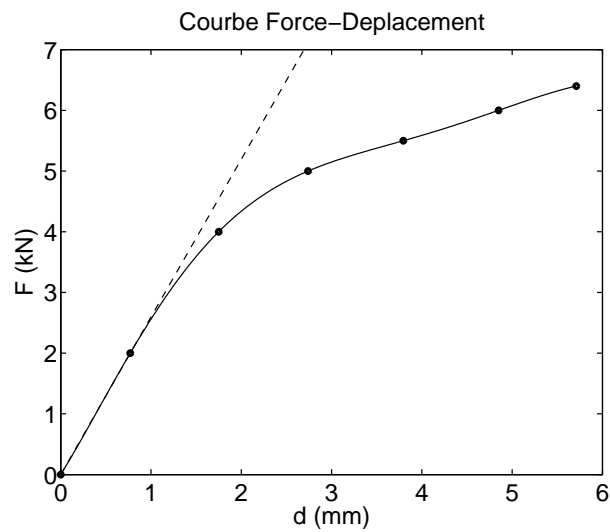


FIG. 2.10 – Poteau - courbe de réponse force/déplacement

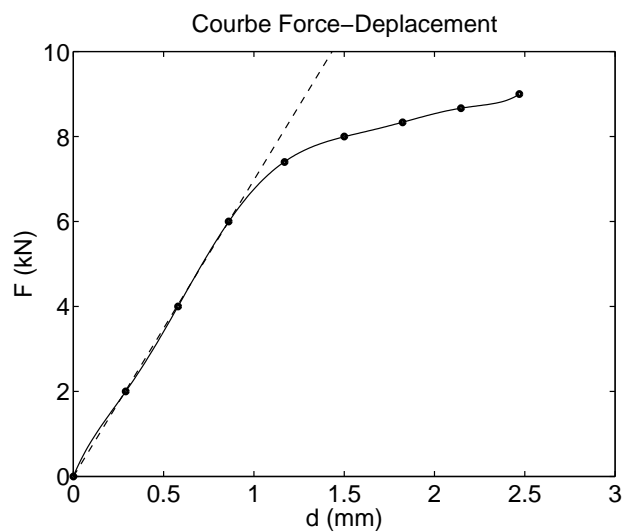


FIG. 2.11 – Portique - courbe de réponse force/déplacement

En effet, dans le cas du poteau, on peut approcher la courbe dans sa phase élastique par une droite d'équation :

$$F = \frac{3EI_{zz}}{L^3}.d \quad (2.1)$$

avec une telle approximation, on trouve un module d'Young pour la phase élastique égal à :  $E = 32000$  MPa. Cet ordre de grandeur correspond tout à fait à la valeur retenue pour l'analyse modale précédente.

Sur les figures 2.12 à 2.15, on a tracé les contraintes verticales dans chacune des structures successivement dans les phases élastique (avant fissuration - figures 2.12 et 2.13) et plastique (après fissuration - figures 2.14 et 2.15).

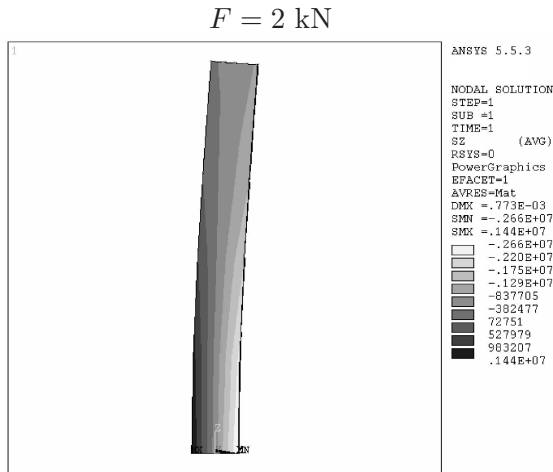


FIG. 2.12 – Poteau - contraintes dans le domaine élastique

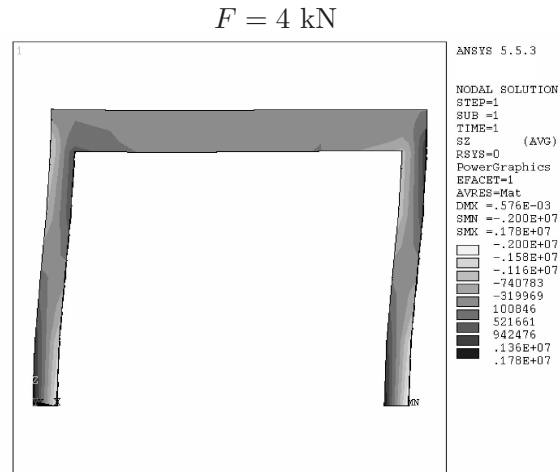


FIG. 2.13 – Portique - contraintes dans le domaine élastique

La première observation qui peut être faite sur les figures 2.12 et 2.13 correspondant au domaine élastique est que les contraintes de traction les plus importantes sont en pied de poteau, donc c'est à cet endroit que l'on a le plus de risque de rupture. Toutefois, dans le cas du portique, on observe qu'au niveau de la connexion poteau/poutre, de fortes contraintes de traction apparaissent également, soit une autre localisation éventuelle de fissuration.

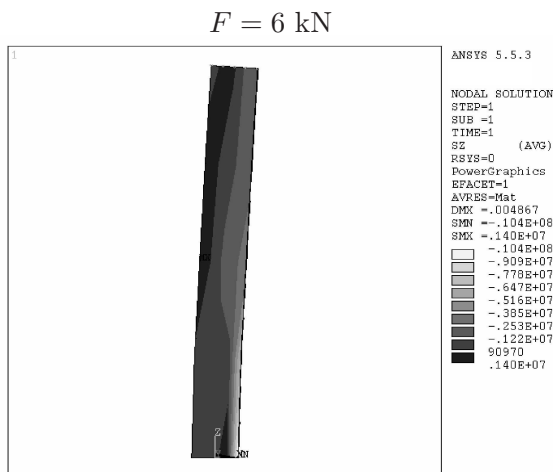


FIG. 2.14 – Poteau - contraintes dans le domaine plastique

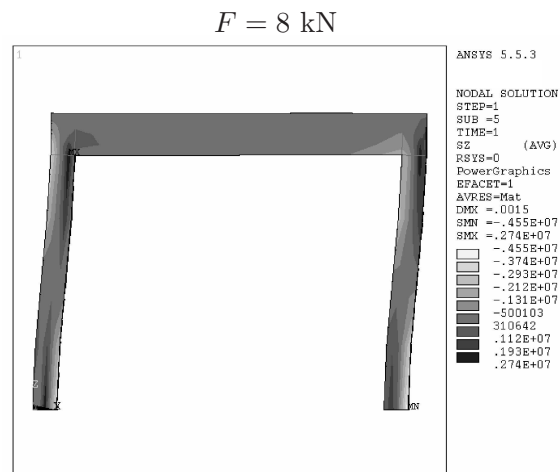


FIG. 2.15 – Portique - contraintes dans le domaine plastique

Lorsque la limite élastique est dépassée (figures 2.14 et 2.15), on observe une forte redistribution des contraintes au sein de la structure. Ainsi, la zone de plus forte traction se retrouve

déportée à l'intérieur même de la structure, ce qui correspond à une fissuration de la partie extérieure.

Par ailleurs, les zones de fissuration se situent effectivement à la base pour le poteau, et au niveau des pieds de poteaux et des connexions poteau/poutre pour le portique, comme on pouvait s'y attendre à la vue des résultats précédents (dans la phase élastique).

Toutefois, concernant le portique, bien que l'on se soit jusque là simplement intéressé à la flexion des poteaux, il convient de s'assurer que la poutre n'atteindra pas un niveau excessif de flexion lorsque les charges supplémentaires lui seront appliquées. A l'inverse, ayant testé le poteau avec et sans charge en tête, on a pu constater qu'une augmentation de l'effort normal permet d'augmenter la résistance à la flexion : il s'agit en fait du principe de la précontrainte.

### 2.1.3 Conclusion

Cette première approche du comportement d'un matériau complexe tel que le béton armé laisse présager de la difficulté de prédiction de l'endommagement d'une structure. C'est pourquoi, dans le but de caractériser cet endommagement, un certains nombres de critères ont été mis au point, et une sélection en est présenté dans la partie qui suit de façon à déterminer les plus adaptés.

## 2.2 Caractérisation de l'endommagement

Les codes utilisés en construction parasismique se basent sur une évaluation du dommage de la structure pour un séisme de dimensionnement de faible probabilité d'occurrence. Pour ce séisme, le dommage ne doit pas dépasser un certain seuil. Pour les séismes de probabilité d'occurrence plus importante, les dommages générés doivent rester limités. En vue d'estimer les performances d'une structure, il est donc nécessaire de disposer de moyens de quantification du dommage : on parlera d'indicateurs de dommage.

Dans ces travaux de thèse, on s'intéresse spécifiquement à l'endommagement de structures du Génie Civil lors de tremblements de terre. Bien que le concept de dommage soit un élément clef de la protection parasismique, les évaluations objectives du dommage subi par les structures du Génie Civil lors d'un évènement destructeur soulèvent encore aujourd'hui de nombreuses difficultés. De telles structures étant le plus souvent réalisées en béton armé, on s'intéresse ici plus particulièrement à l'endommagement d'un tel matériau. Généralement, le dommage observé sur les éléments en béton armé est en premier lieu lié à la fissuration du béton dans la zone soumise à une contrainte de traction, puis, dans une phase ultérieure, à la plastification des aciers. Dans les cas les plus critiques, une ruine en compression du béton suit.

De nombreux travaux se sont focalisés sur le problème de la quantification du dommage de structures. Ainsi, les travaux de Kappos [44] et de Williams *et al.* [78] proposent différentes approches concernant la quantification du dommage qui seront synthétisées dans la suite de cette partie.

### 2.2.1 Notion d'indicateur de dommage

Dans cette partie, un certain nombre de termes liés au dommage sont définis. On introduira ainsi les notions d'indicateur de dommage et de variables ou paramètres de dommage. L'indicateur de dommage, noté  $D$ , est une variable normalisée, égale à 0 pour un dommage nul et égale à 1 quand la structure est considérée comme ruinée, les valeurs intermédiaires traduisant l'état d'endommagement de la structure. La variable (ou paramètre) de dommage, notée  $d$ , est quant à elle une grandeur physique (déplacement, force, énergie...) qui traduit directement l'état de dommage du système. On a ainsi, dans un cas très général :

$$\begin{cases} D = 0 \text{ pour } d < d_e \\ D = 1 \text{ pour } d > d_u \end{cases} \quad (2.2)$$

où :

- $d_e$  désigne une valeur seuil de la variable de dommage en dessous de laquelle le dommage est considéré comme nul ;
- $d_u$  désigne la valeur ultime de la variable de dommage à partir de laquelle la structure est supposée ruinée.

La forme de la fonction  $D = f(d)$  doit être calibrée à partir de résultats expérimentaux. En l'absence de données suffisantes, Powell et Allabhadi [64] proposent une relation relativement générale permettant de relier l'indicateur de dommage  $D$  à la variable de dommage  $d$ . Cette fonction s'apparente à une fonction puissance de la forme :

$$D = f(d) = \begin{cases} 0 & \text{pour } d < d_e \\ \left( \frac{d - d_e}{d_u - d_e} \right)^\alpha & \text{pour } d_e \leq d \leq d_u \\ 1 & \text{pour } d > d_u \end{cases} \quad (2.3)$$

où le coefficient  $\alpha$  permet de gouverner la forme de la relation et est généralement déterminé expérimentalement.  $\alpha$  peut être déterminé par des données expérimentales, mais si cela s'avère impossible, il est conseillé de prendre la valeur de l'unité par défaut. Toutefois, une puissance  $\alpha$  supérieure à l'unité refléterait de façon plus physique l'évolution du dommage. En effet, l'évolution de la détérioration s'accroîtrait au fur et à mesure que l'on s'approche de la valeur ultime  $d_u$ , et l'évolution de dommage au voisinage de la valeur seuil  $d_e$  serait quant à elle peu sensible.

La difficulté majeure apparaissant dans le cas de la protection parasismique réside alors dans la définition de la valeur ultime  $d_u$ , souvent très subjective, du fait de la difficulté de définition de la ruine et de sa variabilité suivant la structure considérée. Toutefois, outre les valeurs seuil  $d_e$  et  $d_u$ , les variables intermédiaires de la variable de dommage sont particulièrement intéressantes pour l'ingénieur, car elles fournissent une information capitale dans l'aide à la décision dans les cas de réhabilitation de structures endommagées, d'études de fiabilité vis à vis de scénarios sismiques ou encore d'évaluation de la performance à la tenue aux séismes de nouvelles structures.

### 2.2.2 Classification du dommage

Les indicateurs de dommage sont, dans la littérature, classifiés principalement en fonction de la grandeur physique à la base de l'indicateur de dommage, de l'échelle de pertinence et de

la nature du processus d'endommagement.

### Grandeurs physiques

Les indicateurs peuvent, de façon générale, s'exprimer en termes de déformations, de déplacements, de forces, d'énergie, de rigidité ou de caractéristiques dynamiques. Certaines définitions couplent plusieurs grandeurs physiques de natures différentes.

### Echelles de pertinence

Divers niveaux de prise en compte du dommage peuvent être considérés. On parlera d'indicateur matériel, d'indicateur local et d'indicateur global pour un dommage se référant respectivement au matériau, à un élément de la structure ou à la structure dans sa globalité. Si les indicateurs sont déduits d'analyses dynamiques, la classification devient totalement dépendante de l'échelle de modélisation de la structure. Les indicateurs matériels seront ainsi liés à une modélisation faisant appel à la mécanique des milieux continus, tandis qu'une modélisation plus globale ne pourra fournir qu'un indicateur lui aussi plus global.

### Nature du processus d'endommagement

Deux types d'indicateur sont distingués en fonction de leur processus d'endommagement : les indicateurs de type cumulatif et les indicateurs de type non-cumulatif. Selon DiPasquale et Cakmak [31], ces deux natures de dommage sont liées aux matériaux constitutifs de la structure. Ainsi, dans le cas d'une structure en béton armé :

- le béton se comporte de façon fragile en traction. Le processus de fissuration sera donc convenablement décrit par un indicateur basé simplement sur la plus grande déformation, donc un indicateur de type non cumulatif ;
- l'acier a un comportement ductile. Un phénomène de fatigue apparaît, lié aux cycles de chargement de la structure. Un indicateur de dommage de type cumulatif sera donc nécessaire pour décrire son endommagement, de façon à prendre en compte l'historique du chargement.

Dans la suite de cette étude, on s'appuiera sur les résultats de Brun [14] concernant l'étude de l'endommagement de voiles en béton fortement armé au cours de séismes.

### 2.2.3 Exemples d'indicateurs de dommage

On présente dans cette partie une liste non exhaustive d'indicateurs de dommage susceptibles d'être utilisés dans le cadre de l'évaluation du dommage d'une structure en béton armé.

#### Indicateurs non cumulatifs basés sur la ductilité

Il s'agit de l'approche du dommage la plus simple et la plus ancienne. La ductilité peut être définie à plusieurs niveaux : elle peut être définie au niveau du matériau même, au niveau local, c'est à dire d'une partie élémentaire de structure, ou encore au niveau global, donc relative à une sous-structure.

Pour un matériau donné, la définition de la ductilité matérielle s'exprime sous la forme du rapport suivant :

$$\mu = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_y} \quad (2.4)$$

où  $\varepsilon_m$  est la déformation maximale atteinte au cours de la sollicitation et  $\varepsilon_y$  est la déformation à la limite élastique pour un chargement monotone.

Bien sûr, ce concept n'a pas de sens pour un matériau non homogène tel que le béton armé. On utilise alors la ductilité locale relative à un élément de structure. En termes de déplacement, elle s'écrit :

$$\mu_\delta = \frac{\delta_m}{\delta_y} \quad (2.5)$$

où  $\delta_m$  est le déplacement maximum au cours de la sollicitation et  $\delta_y$  est le déplacement à la plastification des aciers. Par ailleurs, la ductilité locale, exprimée ici comme un rapport entre deux déplacements, peut aussi être définie comme un rapport entre des rotations ou des courbures.

Une déficience majeure de la ductilité pour traduire le dommage subi au cours d'une sollicitation réside dans le fait qu'elle ne prend pas en compte l'histoire de la sollicitation, seul l'état final compte. On parlera donc d'indicateur de type non cumulatif. Malgré cette hypothèse simplificatrice, la ductilité reste largement utilisée, du fait de sa simplicité et de sa facilité d'interprétation vis à vis du dommage.

### Indicateurs non cumulatifs basés sur la raideur

La raideur d'une structure se détériore au cours des cycles de chargement sismique. Ainsi, la dégradation de la rigidité des structures en béton armé lors de séismes ou d'essais sur tables vibrantes est un phénomène largement constaté. C'est pourquoi Banon *et al.* [7] proposent un indicateur de dommage, nommé Flexural Damage Ratio (*FDR*), qui quantifie la dégradation de rigidité et s'écrit :

$$FDR = \frac{k_0}{k_m} \quad (2.6)$$

où  $k_0$  est la rigidité initiale et  $k_m$  est la rigidité sécante finale (cf. figure 2.16).

Une forme modifiée de cet indicateur a été proposée par Roufaiel et Meyer [65], faisant intervenir la rigidité sécante à la ruine et s'exprimant sous la forme :

$$MFDR = \frac{k_f}{k_m} \frac{k_m - k_0}{k_f - k_0} \quad (2.7)$$

où  $k_f$  représente la rigidité sécante à la ruine. La valeur du *MFDR* est prise comme la valeur maximale relative au demi-cycle positif et au demi-cycle négatif de chargement. Cet indicateur semble exhiber une bonne corrélation avec des essais de flexion, pouvant inclure des chargements axiaux ou de cisaillement.

Cet indicateur est classé comme étant de type non cumulatif. Toutefois, bien que le cumul de dommage n'apparaisse pas explicitement, l'effet cumulatif du dommage est pris en compte implicitement.

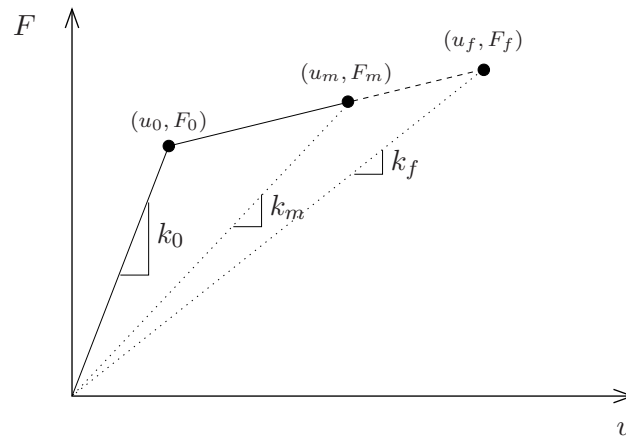


FIG. 2.16 – Définition des raideurs sécantes

### Indicateurs de type cumulatifs basés sur les déplacements

Les indicateurs précédemment présentés ne prenant pas en compte l'aspect cumulatif du dommage (ou du moins pas de façon explicite), ils ne permettent pas de traiter les problèmes de fatigue des matériaux. C'est pourquoi des indicateurs basés sur le cumul du dommage ont été introduits dès les années vingt par Palmgreen, puis repris par Miner dans les années quarante. Ce concept présuppose que chaque cycle de chargement génère un certain dommage, et que les dommages se cumulent linéairement.

La formulation de la loi de Miner sur le cumul du dommage s'écrit :

$$D = \sum_i \frac{n_i}{n_{f,i}} \quad (2.8)$$

où  $n_i$  correspond au nombre de cycles à un niveau de ductilité  $\mu_i$  et  $n_{f,i}$  correspond au nombre de cycles à ce même niveau conduisant à la ruine.

Cette loi de cumul linéaire du dommage semble bien adaptée aux métaux, mais Chung *et al.* [24] notent qu'elle semble moins adaptée aux structures en béton armé. En effet, elle ne prend pas en compte l'influence sur le dommage de l'historique du chargement, chaque cycle est considéré indépendamment des autres. C'est pourquoi de nombreux auteurs définissent de nouveaux indicateurs de dommage permettant cette fois de prendre en compte la plastification des aciers, en s'inspirant de la loi de Miner [8, 73, 75, 76].

### Indicateurs énergétiques

L'aspect cumulatif du dommage peut également être pris en compte de manière énergétique. Ainsi, Gosain *et al.* [39] furent les premiers à adopter l'énergie absorbée comme indicateur de dommage pour les structures en béton armé. Cette théorie semble prometteuse car en adéquation avec la physique du phénomène : au cours d'une sollicitation, la structure résiste en dissipant une partie de l'énergie induite par l'excitation au travers de l'hystérésis du matériau.

La formulation proposée par Gosain prend la forme d'une loi cumulative :

$$D = \sum_i \frac{F_i \delta_i}{F_y \delta_y} \quad (2.9)$$

où seuls les cycles  $i$  tels que  $F_i/F_y > 0.75$  sont comptabilisés,  $\delta_i$  et  $F_i$  représentant respectivement le déplacement et la force atteints au cours du cycle  $i$ , et  $\delta_y$  et  $F_y$  le déplacement et la force à la plastification des aciers.

Une formulation plus précise réside dans le calcul de l'énergie dissipée au moyen des aires des boucles d'hystérésis. Cette énergie est déterminée par l'intégration des courbes moment-courbure (flexion) ou force-déplacement (cisaillement) :

$$\int dE = \int M(\phi)d\phi = \int F(u)du \quad (2.10)$$

Banon et Veneziano [8] en tirent un indicateur, appelé énergie dissipée normalisée, en utilisant une forme adimensionnelle obtenue en divisant l'aire cumulée des boucles d'hystérésis par l'énergie élastique maximale (énergie stockée) :

$$E_n = \frac{\int dE}{\frac{1}{2}M_y\phi_y} \quad (2.11)$$

Des formulations plus complexes basées sur des considérations énergétiques ont également été développées [35, 53].

### Indices combinés

Les indicateurs précédemment présentés sont répertoriés en deux catégories : indicateurs de type cumulatif ou non-cumulatif. En pratique, on peut considérer que le dommage généré au sein d'une structure est de deux natures distinctes et couplées. La première est liée au maximum d'une variable de dommage (déformation, déplacement, rotation) atteint au cours de l'excitation. Elle caractérise entièrement le dommage subi par un matériau parfaitement fragile (donc bien adapté au béton seul, non armé). La seconde nature du dommage est cumulative et caractérise le phénomène d'endommagement de matériaux ductiles tels que l'acier dont la capacité de dissipation est importante. Dans le cas du béton armé, il semble donc logique que ces deux natures d'endommagement se trouvent couplées. Il apparaît donc naturel d'introduire des indicateurs de dommage traduisant les deux phénomènes de façon combinée.

Le plus courant de ces indicateurs combinés est celui de Park en Ang [62], qui s'écrit sous la forme :

$$D = \frac{\delta_m}{\delta_y} + \beta \frac{\int dE}{F_y \delta_u} \quad (2.12)$$

Le premier terme correspond à la définition de la ductilité de déplacement, tandis que le second représente l'énergie dissipée normalisée par une énergie correspondant au produit de la force à plastification des aciers avec le déplacement à la rupture sous chargement monotone. Le coefficient  $\beta$  est un terme de pondération, déterminé de façon expérimentale. En pratique, les calibrations effectuées lors d'essais sur des structures en béton armé [35] montrent que la contribution du terme énergétique est très faible (de l'ordre de 5 à 10%). Malgré tout, cet indicateur, largement utilisé par de nombreux auteurs, présente l'avantage d'avoir fait l'objet de calibrations à partir d'essais expérimentaux et de prédire la ruine de manière satisfaisante.

Divers auteurs ont proposé d'autres indicateurs combinés sur la base de celui de Park et Ang. On citera celui de Kunnath *et al.* [47] adapté au cas de la flexion, ainsi que ceux de Fardis [35] et de Banon et Veneziano [8].



### 2.2.4 Echelles de modélisation

Lors de la modélisation d'une structure, plusieurs échelles sont disponibles, chacune d'entre elles étant basée sur une idéalisation de la structure et de son comportement.

#### Echelle locale

L'échelle la plus fine employée dans les analyses dynamiques de structures, appelée échelle locale, concerne la modélisation macroscopique des matériaux. Cette modélisation s'appuie donc sur la mécanique des milieux continus et décrit aussi précisément que possible les lois de comportement des matériaux acier et béton. Les théories à la base de ces modèles locaux pourront être trouvées dans de nombreux ouvrages tels que ceux de Lemaitre et Chaboche [48] ou Chen [23]. Ces modèles sont considérés comme des outils prédictifs fiables et performants pour l'estimation numérique des grandeurs aussi bien locales que globales de la réponse dynamique, telles que les déplacements ou les efforts. Ils assureront donc la fiabilité de l'estimation de la plupart des indicateurs de dommage. En contre-partie, ces modèles, par leur finesse, s'avéreront particulièrement gourmands en temps de calcul. De plus, bien que le dommage soit exprimé explicitement au niveau du matériau à l'aide de variables de dommage, le passage à l'échelle supérieure est particulièrement complexe (Carvalho et Coelho [19]).

#### Echelle semi-locale

Les modèles semi-locaux, tels que ceux à fibres ou à couches, s'appuient sur une cinématique simplifiée de type poutre ou plaque (planéité des sections) avec une rhéologie locale. Ces modèles sont particulièrement adaptés pour les structures sollicitées par des efforts de flexion couplés à des efforts de cisaillement, tout en limitant les temps de calcul. Le comportement de chaque fibre associée à un même matériau est décrit par des lois phénoménologiques.

#### Echelle globale

L'échelle globale est la plus couramment adoptée pour l'estimation numérique des indicateurs de dommage. Ces modèles, appelés modèles globaux ou modèles hystérétiques, sont exprimés en termes de variables généralisées, relatives à une intégration des variables locales sur une section. Le terme de modèle hystérétique sera préféré à celui de modèle global de façon à éviter toute confusion avec les échelles des indicateurs de dommage. En effet, un modèle hystérétique traduisant le comportement global d'un élément de structure permet l'évaluation numérique des variables de dommage en termes de force-déplacement ou de moment-courbure, à partir desquelles la plupart des indicateurs de dommage locaux sont calculés.

### 2.2.5 Dégradation des caractéristiques modales

Une conséquence bien connue de l'endommagement de structures est la dégradation des caractéristiques dynamiques du système. Cette observation a été confirmée lors d'essais en laboratoire. Ainsi, le dommage subi par une structure au cours d'un tremblement de terre altère de façon notable la rigidité d'ensemble ainsi que la fréquence propre de cette structure. Afin d'estimer la dégradation des fréquences modales, une méthode d'identification est appliquée aux résultats expérimentaux et aux prédictions par éléments-finis. Le système identifié est alors considéré comme linéaire sur une fenêtre temporelle et les dégradations des fréquences modales sont corrélées à la progression du dommage. La dégradation est surtout sensible sur le mode

fondamental, où, pour des structures en acier, la chute peut atteindre 10% de la fréquence propre initiale. Pour les structures en béton armé, la chute de fréquence propre peut être bien supérieure (près de 70% dans certains cas).

Toutefois, les indicateurs de dommage basés sur la fréquence propre sont relatifs à une échelle globale. Il ne faut donc pas s'attendre à ce qu'ils fournissent des informations précises sur la localisation du dommage. L'examen de la forme des modes supérieurs s'avérera indispensable pour localiser cet endommagement. Chen *et al.* [22] se sont ainsi intéressés à ce problème pour des poutres métalliques et se sont heurtés à de nombreuses difficultés liées aux trop faibles modifications de la forme des modes. En effet, l'identification des caractéristiques des modes supérieurs nécessite une trop grande précision des résultats, qu'ils soient numériques ou expérimentaux.

## 2.3 Outils de prise en compte des incertitudes

Le but de ce travail étant de déterminer l'endommagement de structures dans le cas de l'excitation assez particulière qu'est le tremblement de terre, il s'avère indispensable de pouvoir prendre en compte des incertitudes dans la modélisation du système. En effet, comme on le verra plus en détails par la suite, des incertitudes apparaissent aussi bien au sein de la structure qu'au niveau de l'excitation. Il convient donc dans un premier temps de déterminer les outils à notre disposition pour mener à bien une telle étude. Dans cette section, un certain nombre de méthodes est donc présenté, divisé en deux grandes familles, les méthodes probabilistes d'une part et les méthodes possibilistes d'autre part. Davantage de détails concernant ces méthodes pourront être trouvés dans les travaux de Dessombz [28].

### 2.3.1 Méthodes probabilistes

Les méthodes probabilistes sont dans un cadre général les plus employées pour l'étude d'incertitudes. Elles consistent à prendre en compte une loi de probabilité donnée pour chacune des variables incertaines d'entrée, puis à déterminer la loi de probabilité de la sortie. Différentes méthodes existent, mais nous nous contenterons ici d'en présenter un petit échantillonnage, directement exploitable dans l'application considérée dans ce travail, à savoir la détermination de la réponse dynamique de structures.

#### 2.3.1.1 Méthode des perturbations

La méthode des perturbations est une méthode basée sur une expansion en séries de Taylor du problème à résoudre faisant intervenir des paramètres stochastiques. Cette technique est très couramment utilisée dans le cadre des éléments-finis stochastiques. Elle peut être utilisée dans de nombreux cas de figure : problèmes linéaires ou non, statiques ou dynamiques [50, 49].

Toutefois, le recours à une expansion en séries de Taylor, de par les conditions d'existence qu'elle impose (voir [38]), limite l'application aux cas de variables incertaines variant relativement peu. Certaines méthodes, telles que celle de He [41] ou les approximants de Padé [12], permettent malgré tout d'augmenter ce domaine de validité.

### Calcul de modes propres

La méthode des perturbations est particulièrement bien adaptée au calcul des modes propres aléatoires d'un système incertain modélisé par éléments-finis. Ainsi, on considère l'équation suivante correspondant à la définition du  $i^{\text{ème}}$  mode :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\phi_i = 0 \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  représentent respectivement les matrices de raideur et de masse du système. Ces deux matrices sont ici supposées dépendre d'un vecteur de paramètres incertains qui sera noté  $\mathbf{r}$ . On note alors  $\bar{\mathbf{r}}$  le vecteur correspondant aux paramètres moyens et  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}$ .

Avec ces notations, le développement en séries de Taylor des différentes variables, limité à l'ordre 2 dans un cadre général, s'écrit :

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \mathbf{K}(\bar{\mathbf{r}}) + \sum_k \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_k} \right|_{\bar{\mathbf{r}}} \tilde{r}_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \left. \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial r_k \partial r_l} \right|_{\bar{\mathbf{r}}} \tilde{r}_k \tilde{r}_l \quad (2.14)$$

et de même pour  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ ,  $\omega_i(\mathbf{r})$  et  $\phi_i(\mathbf{r})$ .

En introduisant cette décomposition dans l'équation 2.13, et en regroupant les termes de même ordre, on obtient pour chaque mode  $i$  trois équations correspondant respectivement aux termes d'ordre 0, 1 et 2.

L'équation d'ordre 0 est simplement la forme déterministe de l'équation 2.13 et permet de déterminer de façon classique les pulsations propres  $\omega_i(\bar{\mathbf{r}})$  et les vecteurs propres  $\phi_i(\bar{\mathbf{r}})$  associés. Pour les équations correspondant aux ordres 1 et 2, quelques manipulations matricielles sont nécessaires afin de déterminer les termes d'ordre 1 et 2 de  $\omega_i$  et  $\phi_i$ . On trouvera des renseignements concernant ces calculs dans les travaux de Humbert [42], Nelson [58], et Fox *et al.* [36].

### Résolution de problèmes linéaires

L'expansion en série de Taylor peut également être appliquée à la résolution de problèmes dynamiques linéaires. On considère pour cela le problème écrit sous la forme :

$$(\mathbf{L} + \mathbf{\Pi}(r))\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.15)$$

où  $\mathbf{L}$  correspond à la partie déterministe de l'opérateur différentiel et  $\mathbf{\Pi}(r)$  est fonction du paramètre aléatoire  $r$  ( $r$  est ici choisi sous la forme d'un simple scalaire de façon à simplifier les notations).

De même que dans le cas du calcul des modes propres, on écrit la décomposition en série de Taylor de  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{U}$  (en se limitant ici à l'ordre 2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &\approx \mathbf{U}_0 + \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r} \right|_{\bar{r}} dr + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial r^2} \right|_{\bar{r}} dr^2 \\ \mathbf{L} + \mathbf{\Pi}(r) &\approx \mathbf{L} + \left. \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial r} \right|_{\bar{r}} dr + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial r^2} \right|_{\bar{r}} dr^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

et, en égalisant les termes de même ordre, on obtient les termes de la série de  $\mathbf{U}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 &= \mathbf{L}^{-1} \mathbf{F} \\ \mathbf{U}_1 &= \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r} \right|_{\bar{r}} = -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_2 &= \left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial r^2} \right|_{\bar{r}} = -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{U}_1 - \mathbf{L}^{-1} \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{U}_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

De cette façon, on peut obtenir le développement en série de Taylor de toute réponse  $\mathbf{U}$  d'un problème linéaire.

### 2.3.1.2 Méthode de Neumann

On s'intéresse à nouveau à la résolution du problème linéaire présenté sur les séries de Taylor et écrit sous la forme :

$$(\mathbf{L} + \mathbf{\Pi}(r))\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.18)$$

La méthode de Neumann consiste alors à écrire la solution  $\mathbf{U}$  sous la forme d'une série  $\mathbf{U} = \text{disp} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{U}_n$  et à déterminer les valeurs de  $\mathbf{U}_n$  de façon itérative.

Pour cela, on note :

$$\mathbf{U}^{(N)} = \sum_{n=0}^N \mathbf{U}_n \quad (2.19)$$

et on réécrit l'équation différentielle sous la forme :

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{\Pi}\mathbf{U} \quad (2.20)$$

On en tire ainsi la relation de récurrence suivante :

$$\mathbf{U}^{(N+1)} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{\Pi}\mathbf{U}^{(N)} \quad (2.21)$$

L'approximation au premier ordre  $\mathbf{U}_0$  est la solution du problème sans  $\mathbf{\Pi}$  :

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{F} \quad (2.22)$$

et en utilisant la relation de récurrence, on obtient les différents termes  $\mathbf{U}_n$  de façon itérative :

$$\mathbf{U}_{n+1} = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{\Pi}\mathbf{U}_n \quad (2.23)$$

D'où finalement l'expression de  $\mathbf{U}$  :

$$\mathbf{U} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{\Pi})^n \mathbf{U}_0 \quad (2.24)$$

En pratique, cette somme infinie est évidemment tronquée lors d'utilisation de méthodes numériques.

Pour comparer ce résultat avec celui issu de l'expansion en série de Taylor, on écrit le problème sous la forme  $(\mathbf{L} + \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_2)\mathbf{U} = \mathbf{F}$ , et on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 &= \mathbf{L}^{-1}\mathbf{F} \\ \mathbf{U}_1 &= -\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_2)\mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_2 &= -\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_2)\mathbf{U}_1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

### 2.3.1.3 Chaos polynomial

La méthode du chaos polynomial étant relativement complexe, on se contentera ici d'en présenter les grandes lignes. Cette méthode repose sur une projection des solutions stochastiques sur une base de polynômes orthogonaux dont les variables sont des gaussiennes orthonormales. Les propriétés de cette base de polynômes sont utilisées pour générer un système d'équations linéaires au moyen de projections. La résolution de ce système conduit à une expansion de la solution sur la base polynomiale, qu'on peut utiliser pour trouver de manière soit analytique, soit numérique, la moyenne, l'écart-type ou la distribution de la solution aléatoire.

Cette méthode a été assez largement développée par Dessombz [28, 29, 30], et on se référera à ses travaux pour plus de détails.

### 2.3.1.4 Simulations de Monte-Carlo

La méthode de simulations de Monte-Carlo est la plus simple des méthodes permettant de gérer des paramètres stochastiques dans la modélisation d'un système, mais aussi la plus coûteuse en termes de temps de calcul. Elle consiste à résoudre les équations du système considéré comme déterministe pour un grand nombre de jeux de valeurs de paramètres stochastiques, ces valeurs étant choisies aléatoirement, mais de façon à respecter les lois de probabilité de chacun des paramètres. Il en résulte un grand nombre de réalisations des variables de sortie dont on peut aisément tirer les propriétés statistiques telles que la moyenne, l'écart type ou encore la répartition statistique. L'avantage principal de cette méthode repose sur sa fiabilité. Elle peut ainsi être utilisée comme référence pour valider d'autres méthodes de calcul.

## 2.3.2 Méthodes possibilistes

Dans le cas des approches probabilistes de modélisation des incertitudes, l'espace contenant les événements possibles est considéré dans sa globalité. Cela signifie que tous les événements possibles sont bien entendu pris en compte, mais aussi des événements dont la probabilité d'occurrence est nulle. C'est cette mesure de probabilité qui va déterminer la fréquence relative des différents événements. A l'inverse, les approches possibilistes se limitent à la prise en compte des seuls événements susceptibles de se produire, encore appelés événements possibles, sans aucune notion de probabilité. L'arithmétique des intervalles ainsi que des méthodes d'optimisation adaptées sont alors utilisées pour déterminer les ensembles de réponses possibles. On présente ici quelques méthodes susceptibles d'être utilisées.

### 2.3.2.1 Analyse par intervalles

**Présentation** Les paramètres physiques utilisés pour décrire une structure sont souvent incertains, ceci résultant soit d'incertitudes physiques ou géométriques, soit des imprécisions des modèles. Les paramètres incertains sont généralement identifiés comme des variables aléatoires, et introduits dans une approche stochastique des problèmes. Différentes méthodes existent et sont utilisées pour résoudre ces problèmes stochastiques. Toutefois, dans un cas réel, les variables sont bornées, ce qui n'est pas le cas de la plupart des variables stochastiques. Il semble alors judicieux d'utiliser l'arithmétique des intervalles dans le cadre de la résolution de

problèmes mécaniques. On va donc appliquer celle-ci sur des problèmes discrets ou modélisés par éléments-finis.

**Formulation adaptée aux éléments-finis** On s'intéresse ici à la résolution des systèmes linéaires correspondant à deux grandes classes de problèmes mécaniques.

La première correspond aux problèmes statiques, qu'on peut exprimer matriciellement sous la forme :

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (2.26)$$

où  $\mathbf{K}$  est une matrice de raideur,  $\mathbf{d}$  un déplacement et  $\mathbf{f}$  un vecteur force.

La deuxième classe est celle du calcul des fonctions de transfert, et donc des problèmes dynamiques dont l'équation simplifiée est :

$$(\mathbf{K}(1 + i\eta) - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{H} = \mathbf{I} \quad (2.27)$$

où  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont respectivement les matrices de raideur et de masse,  $\eta$  l'amortissement hystérétique,  $\omega$  la pulsation d'excitation et  $\mathbf{I}$  la matrice identité.

On définit alors l'ensemble  $\Sigma_{\exists\exists}(\mathbf{K}, \mathbf{f})$ , correspondant au problème dans lequel la matrice de raideur est connue dans un intervalle  $\mathbf{K}$  et la force est imposée, connue dans un intervalle  $\mathbf{f}$  et où on veut connaître la déflexion maximale susceptible d'apparaître en tenant compte de ces incertitudes sous forme intervalle, par :

$$\Sigma_{\exists\exists}(\mathbf{K}, \mathbf{f}) = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \mathbf{K} \in \mathbf{K}), (\exists \mathbf{f} \in \mathbf{f}) / \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}\} \quad (2.28)$$

Pour adapter la formulation intervalle aux problèmes mécaniques, la dépendance entre les termes doit être prise en compte. En effet, beaucoup de termes dans les matrices éléments-finis dépendent des mêmes paramètres. Par exemple, si pour un système quelconque le module d'Young varie dans l'intervalle  $\mathbf{E}$ , la matrice de raideur pourra formellement être écrite :

$$\mathbf{E} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

ce qui n'est pas la même chose que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}k_{11} & \mathbf{E}k_{12} \\ \mathbf{E}k_{21} & \mathbf{E}k_{22} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

qui est traité comme :

$$\begin{bmatrix} E_1k_{11} & E_2k_{12} \\ E_3k_{21} & E_4k_{22} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

avec  $E_1, E_2, E_3$  et  $E_4$  variant dans l'intervalle  $\mathbf{E}$  indépendamment les uns des autres.

Lorsqu'on inclut les paramètres intervalles dans les termes des matrices et des vecteurs, la taille de  $\Sigma_{\exists\exists}(\mathbf{K}, \mathbf{f})$  augmente de façon substantielle.

Dans le cas où on travaille avec des modèles éléments-finis dans lesquels les paramètres physiques peuvent varier sur des plages importantes, on formule le problème de la façon suivante :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \sum_{n=1}^N \mathbf{e}_n \mathbf{K}_n \quad (2.32)$$

$N$  étant le nombre de paramètres incertains à prendre en compte lors de la construction de la matrice  $\mathbf{K}$ . Les  $\mathbf{e}_n$  sont des intervalles centrés indépendants, qu'on prend généralement égaux à  $[-1, 1]$ .  $\mathbf{K}_0$  correspond à la matrice construite pour les valeurs moyennes des paramètres.

Cette formulation permet de garder la forme particulière des matrices. A chaque valeur de  $e_n$  dans  $\mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{K}$  reste une matrice de raideur, symétrique définie positive, qui correspond au problème physique modélisé.

#### Remarque importante :

De façon générale, pour un problème de mécanique statique écrit  $(\mathbf{K}_0 + \mathbf{e}\mathbf{K}_1)\mathbf{d} = \mathbf{f}$ , où  $\mathbf{K}_0$  est la matrice de raideur moyenne et  $\mathbf{K}_1$  la variation, avec  $\mathbf{K}_0 + e\mathbf{K}_1$  symétrique définie positive pour tout  $e \in \mathbf{e}$ , on peut montrer qu'on peut toujours trouver un vecteur  $\mathbf{f}$  tel que les bornes de l'ensemble solution de  $(\mathbf{K}_0 + \mathbf{e}\mathbf{K}_1)\mathbf{d} = \mathbf{f}$  ne correspondent pas aux bornes de  $\mathbf{e}$ .

#### Algorithme de Rump modifié

L'algorithme de Rump modifié proposé par Dessombz [28] permet de résoudre un problème écrit sous la forme :

$$(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A}_1)\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \alpha \in \alpha \quad (2.33)$$

où  $\alpha$  est un intervalle centré. On note alors  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A}_1$ . L'algorithme de résolution est présenté sur la figure 2.17. Cet algorithme est ainsi adapté aussi bien à la résolution de problèmes statiques que dynamiques. En particulier, il nous permettra de déterminer l'enveloppe des fonctions de transfert d'un système donné présentant des incertitudes.

Toutefois, la convergence de cet algorithme nécessite certaines conditions en particulier sur le rayon spectral de la matrice du système. Or, dans le cas dynamique, une telle condition peut être difficile à obtenir lorsque la fréquence d'excitation est proche de celle d'un mode propre et que les paramètres intervalles sont de grande taille. Pour éviter ce problème, on peut découper l'intervalle de départ contenant le paramètre incertain de façon à ce que pour chacun des sous-intervalles, la condition soit respectée. La solution finale est obtenue comme l'union des solutions correspondant à chacun des sous-intervalles.

#### 2.3.2.2 Analyse convexe

**Présentation** L'analyse convexe est en quelque sorte une extension de l'analyse par intervalles, cette dernière n'en représentant qu'un cas particulier. En effet, il existe des cas de figures où les variables incertaines peuvent être ramenées à des ensembles convexes, mais ne peuvent pas être traitées par la théorie des intervalles.

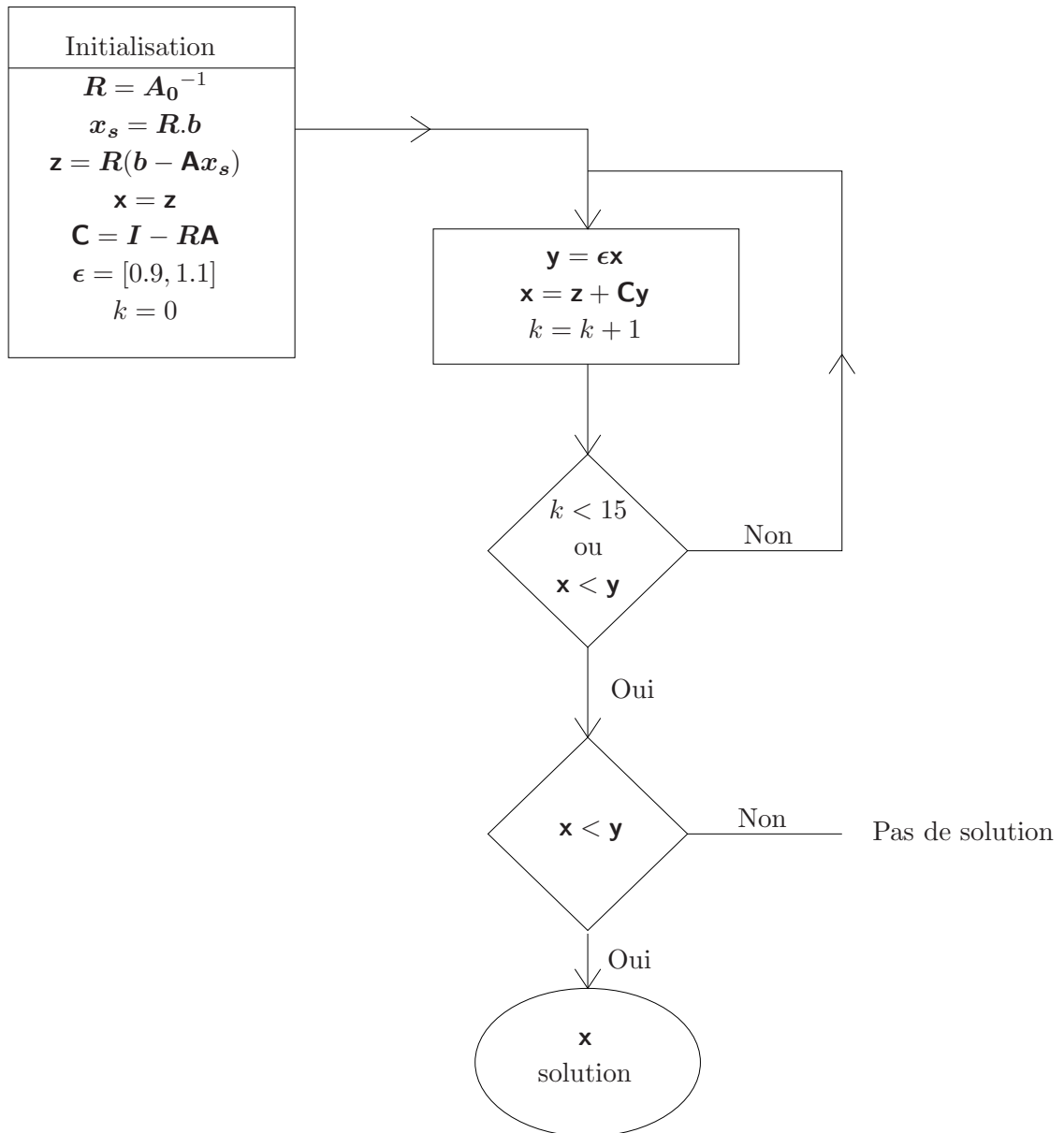


FIG. 2.17 – Algorithme de Rump modifié



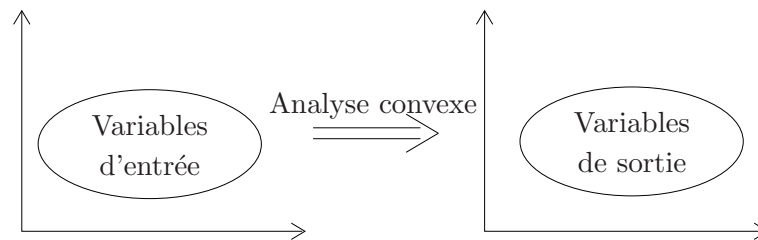


FIG. 2.18 – Principe théorique de l'analyse convexe

La phase de résolution d'un problème d'analyse convexe passe par la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes consistant en la détermination des bornes extrêmes de la réponse du système, sachant que les paramètres d'entrée sont dans un ensemble convexe. La figure 2.18 illustre de façon schématique cette théorie.

On peut ainsi citer quatre exemples d'ensembles convexes représentant un large éventail de possibilités de représentations d'incertitudes :

- le paramètre incertain  $x$  est borné (cas type de l'analyse par intervalles) :

$$|x| \leq a$$

- la fonction incertaine  $x(t)$  est bornée :

$$x_l(t) \leq x(t) \leq x_u(t)$$

où  $x_l(t)$  et  $x_u(t)$  sont des fonctions déterministes qui délimitent les variations de  $x(t)$ .

- l'intégrale du carré de la fonction incertaine  $x(t)$  est bornée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \leq a$$

ce qui peut être assimilé à une limitation de l'énergie du système.

- les coefficients de Fourier  $\mathbf{A}$  de la fonction incertaine  $x(t) = \sum A_n \exp(i\omega_n t)$  sont dans un ensemble elliptique défini par la matrice  $\mathbf{W}$  et le paramètre  $a$  :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \leq a^2$$

Les deux derniers types d'ensembles convexes seront utilisés dans la suite de ce rapport, dans le cadre de l'étude de la réponse d'une structure incertaine à une excitation sismique.

**Exemple d'application : résolution d'un problème mécanique statique** De façon à visualiser plus concrètement le principe de l'analyse convexe, on propose ici de présenter le cas d'un problème mécanique a priori simple : la résolution d'un problème mécanique statique. On s'intéresse donc ici à l'évaluation dans un cadre général de la réponse statique de structures dont certains paramètres sont incertains, mais bornés. Ces paramètres incertains sont regroupés dans

le vecteur  $\mathbf{b}$ , ils peuvent intervenir aussi bien au niveau de la matrice de raideur (incertitude concernant la structure) qu'au niveau de la force (incertitude concernant l'excitation).

On écrit l'équation d'équilibre sous la forme :

$$\mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{b}) \quad (2.34)$$

où  $\mathbf{U}$  est le vecteur déplacement,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur du système et  $\mathbf{F}$  le vecteur des forces exercées sur le système.

On va alors rechercher l'ensemble des déplacements admissibles, en supposant que les paramètres incertains  $\mathbf{b}$  sont compris dans l'ensemble convexe  $B$ . On note alors  $\Gamma$  l'ensemble solution. Dans ce cas,  $\Gamma$  est défini par :

$$\Gamma = \{\mathbf{U} : \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{b}), \mathbf{b} \in B\} \quad (2.35)$$

et on obtient donc finalement un intervalle minimum  $\mathbf{U}^I$  contenant tous les déplacements possibles lorsque les paramètres varient :

$$\mathbf{U}^I = [\mathbf{U}_{\min}, \mathbf{U}_{\max}] \quad (2.36)$$

$$\mathbf{U}_{\min} = \min_{\mathbf{b} \in B} \{(\mathbf{K}(\mathbf{b}))^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{b})\}, \quad \mathbf{U}_{\max} = \max_{\mathbf{b} \in B} \{(\mathbf{K}(\mathbf{b}))^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{b})\} \quad (2.37)$$

La détermination de  $\mathbf{U}_{\min}$  et  $\mathbf{U}_{\max}$  devra alors passer par un processus d'optimisation adapté au problème, dépendant grandement de la forme prise par l'ensemble  $B$ .

**Conclusion** L'intérêt de cette analyse convexe est de permettre la détermination d'ensembles solution "sûrs", c'est à dire contenant 100% des valeurs possibles prises par les paramètres solution concernés, ce qui s'avère très intéressant en terme de fiabilité, car cela permet d'atteindre le zéro défaut.

Toutefois, les résultats risquent d'être "trop" conservatifs au sens où l'on risque d'être amené à surdimensionner la structure si l'on souhaite tenir compte des limites extrêmes obtenues. De façon à réduire ce conservatisme, il est impératif de prendre un soin très particulier lors de la définition de l'ensemble convexe contenant les valeurs possibles des différents paramètres incertains. On cherchera donc à prendre en compte un maximum d'informations sur ces paramètres.

## 2.4 Application du calcul par intervalles

On reprend ici l'étude de la structure de type portique de la figure 2.1, mais on va cette fois s'intéresser à sa fonction de transfert dans le domaine élastique. Plus précisément, on propose ici d'étudier l'influence d'un module d'Young connu uniquement sous la forme d'un intervalle, c'est à dire dont on connaît les valeurs minimale et maximale. Cette donnée incertaine traduit le fait que le béton peut présenter des caractéristiques différentes de celles du cahier des charges initial ou encore que la structure a déjà subi un dommage préalable ayant altéré ses propriétés dynamiques.

Les résultats présentés dans la suite correspondent à la fonction de transfert collocalisée correspondant au degré de liberté horizontal du coin supérieur gauche du portique. On se

limitera ici à l'étude de cette fonction de transfert dans une gamme de fréquence proche de la première fréquence propre (3 Hz), car la fréquence suivante ne fait pas intervenir ce degré de liberté et les fréquences suivantes sont suffisamment élevées pour ne pas être excitées lors d'une secousse sismique.

Les figures 2.19 et 2.20 présentent respectivement les parties réelle et imaginaire de la fonction de transfert. Dans chacun des deux cas, les traits plains représentent l'enveloppe de la fonction de transfert déterminée par l'algorithme de Rump modifié, et les traits pointillés représentent les fonctions de transfert pour trois valeurs du module d'Young : la valeur minimale, la valeur maximale et la valeur moyenne. On a ici retenue comme intervalle un intervalle centré sur la valeur prise en compte dans l'analyse faite en début de chapitre, soit 30 MPa et un écart de  $\pm 10$  MPa autour de cette valeur, soit l'intervalle suivant :

$$E \in \mathbf{E} = [20 \text{ MPa}, 40 \text{ MPa}] \quad (2.38)$$

Ces figures permettent de voir que l'algorithme proposé abouti à priori effectivement à un enveloppe englobante des fonctions de transfert, et que de plus, on surestime certes la réponse maximale, mais avec relativement peu d'erreur, ce qui est très intéressant en termes de conception. En effet, une surestimation grossière pourrait conduire à un surdimensionnement abusif de la structure.

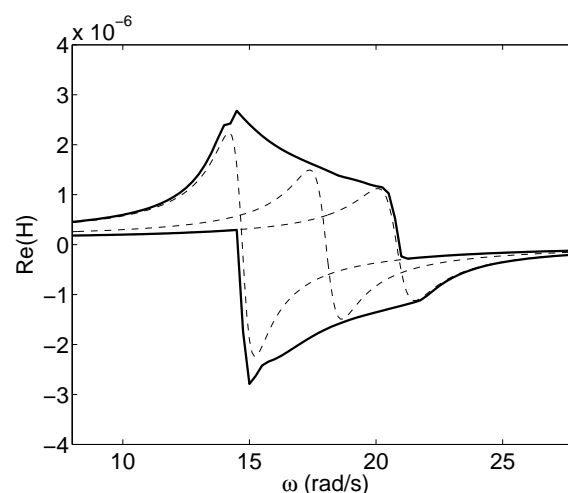


FIG. 2.19 – Portique - Enveloppe de la partie réelle de la fonction de transfert et réalisations pour les valeurs extrêmes et moyenne

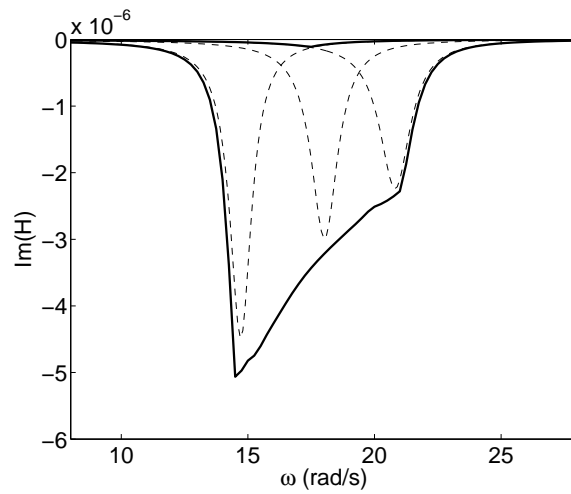


FIG. 2.20 – Portique - Enveloppe de la partie imaginaire de la fonction de transfert et réalisations pour les valeurs extrêmes et moyenne

Concernant le module de la fonction de transfert, il n'est pas possible de l'exprimer sous la forme d'une dépendance linéaire de paramètre incertain qu'est le module d'Young. L'algorithme de Rump se montre inadapté au calcul de son enveloppe. On se limite donc ici de la calculer à partir des résultats sur les parties réelles et imaginaires. Toutefois, lors de cette manipulation, la dépendance des parties réelles et imaginaires n'est pas prise en compte, ce qui aboutit à une surestimation plus importante de l'enveloppe que dans les cas précédents. Ce résultat est visible sur la figure 2.21.

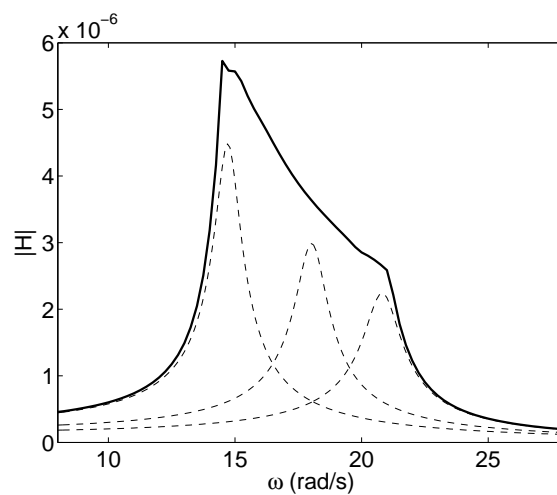


FIG. 2.21 – Portique - Enveloppe du module de la fonction de transfert et réalisations pour les valeurs extrêmes et moyenne

### Comparaison avec une analyse probabiliste

L'analyse par intervalles permet d'obtenir une enveloppe de la fonction de transfert de laquelle on est sûr qu'aucune valeur ne pourra sortir à partir du moment où le module d'Young ne dépassera effectivement pas les limites fixées. Toutefois, on peut penser que dans un cas comme celui étudié ici portant sur un module d'Young incertain, les valeurs extrêmes auront très peu de probabilité d'occurrence. Il convient donc de fixer aussi précisément que possible les bornes de l'intervalle si on ne veut pas surestimer ou sous-estimer les cas extrêmes.

C'est pourquoi on propose ici de comparer les résultats obtenus par l'analyse par intervalles à des résultats issus d'une analyse probabiliste basée sur la méthode de Monté Carlo. On choisit pour cela une loi de répartition statistique de type normale, de valeur moyenne 30 GPa et d'écart type 3 GPa (cf. figure 2.22). De cette façon, l'intervalle choisi précédemment représente plus de 99% des valeurs possibles du module d'Young.

4000 tirages de Monté Carlo sont réalisés. Les figures 2.23 à 2.25 présentent les résultats respectivement pour les parties réelles et imaginaires et le module de la fonction de transfert sous la forme d'une courbe en pointillé correspondant à l'enveloppe obtenue par la méthode par intervalles et d'une surface colorée représentant le nombre d'occurrences d'une amplitude donnée pour une fréquence donnée (les couleurs les plus sombres correspondant aux plus grandes probabilités d'occurrence).

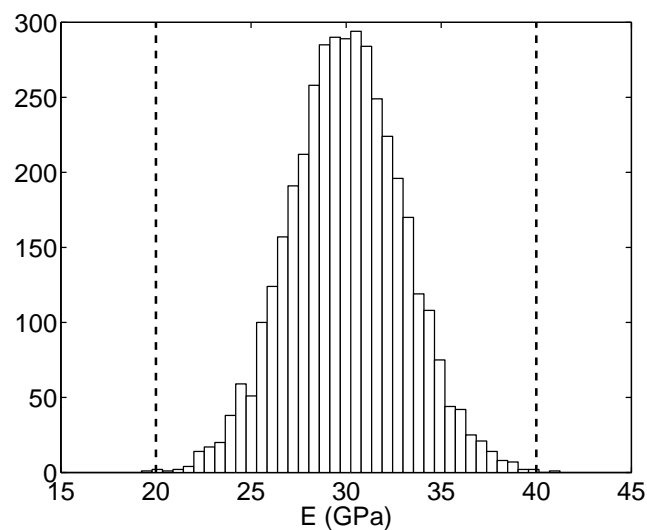


FIG. 2.22 – Loi normale choisie pour le module d'Young  $E$  - 4000 tirages

Ces résultats mettent en évidence le fait que la méthode d'analyse par intervalles fournit une enveloppe dont les valeurs peuvent avoir une très faible probabilité d'occurrence. Ce résultat peut être un avantage par rapport aux méthodes probabilistes, car pour des structures particulièrement sensibles, les cas les plus improbables doivent être pris en compte. À l'inverse, dans certains cas, cela va conduire à sous-estimer les possibilités d'une structure.

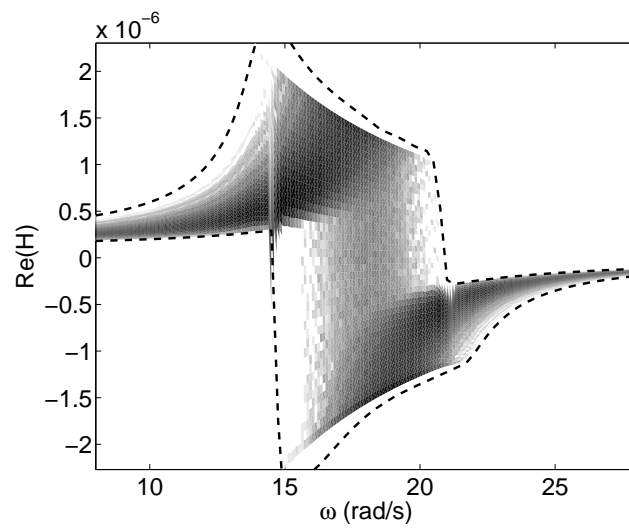


FIG. 2.23 – Portique - Enveloppe de la partie réelle de la fonction de transfert et tirages de Monte Carlo

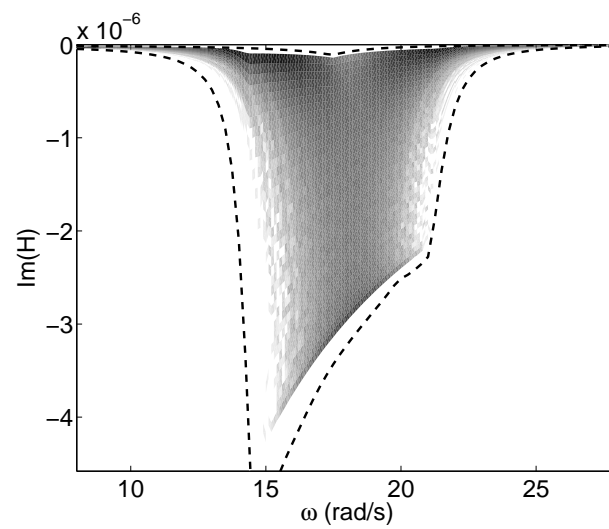


FIG. 2.24 – Portique - Enveloppe de la partie imaginaire de la fonction de transfert et tirages de Monte Carlo

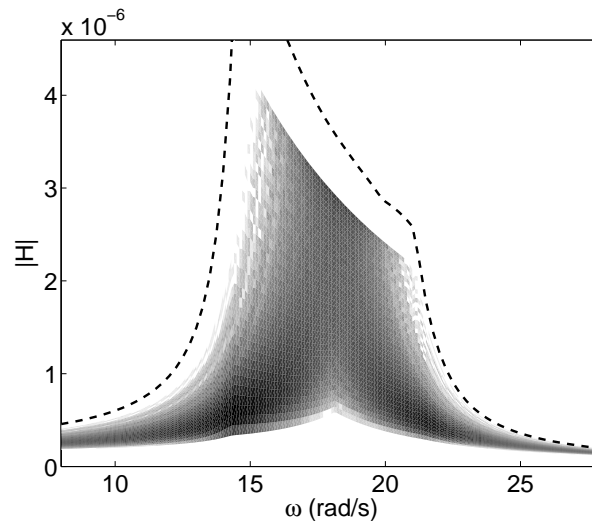


FIG. 2.25 – Portique - Enveloppe du module de la fonction de transfert et tirages de Monte Carlo

## 2.5 Application de l'analyse convexe à l'estimation de l'endommagement

L'étude de l'endommagement de structures lors de séismes est, comme on l'a déjà vu, particulièrement difficile, du fait de la diversité des bâtiments susceptibles d'être rencontrés, mais aussi du caractère particulièrement aléatoire de l'excitation. En effet, pour une géométrie de bâtiments donnée, de faibles erreurs au niveau de la réalisation, que ce soit au niveau de la géométrie ou des propriétés des matériaux utilisés, peuvent entraîner un comportement très variable lors d'une excitation donnée. Concernant l'excitation sismique, la simple observation d'un accélérogramme suffit à comprendre la difficulté d'intégration de ce type d'excitation dans une phase de conception de structure.

A l'heure actuelle, les secousses sismiques sont le plus souvent caractérisées par la notion de *spectre enveloppe* : on détermine le déplacement maximum au cours du temps d'excitation d'un système à un degré de liberté pour une large gamme de fréquences propres de ce système. Ceci permet de déterminer, dans une certaine mesure, le risque encouru par une structure en fonction de sa première fréquence propre lors d'une excitation donnée. L'inconvénient de cette technique est qu'elle est bien évidemment limitée aux cas de comportements linéaires, ce qui ne permet pas de prendre en compte l'endommagement. La prise en compte de cet endommagement est complexe, car elle impose des modèles relativement coûteux en termes de moyens de calcul, car non-linéaires. C'est pourquoi le développement de modèles simplifiés permettant de prendre en compte cet endommagement s'avère particulièrement intéressant. Ainsi, dans cette partie, nous utiliserons le modèle simplifié développé par Brun [15]. Ce modèle simplifié représente un voile en béton armé (représentatif de l'architecture nucléaire) et propose d'introduire la non linéarité liée à l'endommagement sous la forme d'une dépendance de la

fréquence propre du système en fonction d'un critère d'endommagement.

Le but de ce chapitre est de voir comment réaliser une analyse convexe des incertitudes intervenant dans un problème d'endommagement sous séisme, et de comparer les résultats obtenus avec ceux issus d'une analyse plus classique de Monte Carlo. Des techniques d'analyse robuste, permettant de prendre en compte des incertitudes dans la modélisation de systèmes et de déterminer les réponses extrêmes, ont déjà été développées par de nombreux auteurs : Ben-Haim et Elishakoff [11], Ben-Haim *et al.* [10], Au *et al.* [4], Shinozuka [69]. L'application de l'analyse convexe au cas de l'excitation sismique a été étudiée par Baratta et Elishakoff [9] et nous proposons ici une extension de ces travaux.

## 2.5.1 Cadre de l'étude

### 2.5.1.1 Présentation du système

On s'intéressera dans toute cette partie à un système masse-ressort-amortisseur à un degré de liberté, soumis à une accélération de sa base  $\ddot{u}(t)$ , tel que représenté sur la figure 2.5.1.1. Ce système a été choisi, car malgré son apparente simplicité, il est suffisamment représentatif de la dynamique d'un bâtiment lors d'un séisme : en effet, la gamme de fréquences rencontrée ne permettra généralement d'exciter que le premier mode de la structure, comme on le verra plus loin sur un exemple précis.

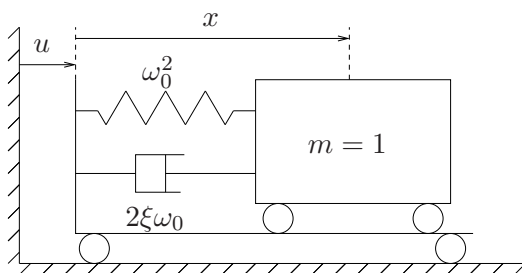


FIG. 2.26 – Système masse-ressort

L'équation du mouvement d'un tel système s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = -\ddot{u}(t) \quad (2.39)$$

avec  $x(t)$  la réponse en déplacement du système,  $\ddot{u}(t)$  l'excitation en accélération,  $\omega_0$  la première fréquence propre de la structure et  $\xi$  le coefficient d'amortissement. Par ailleurs, on choisira dans tous les cas les conditions initiales suivantes :

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique de ce système en prenant successivement en compte des incertitudes au niveau de l'excitation, de la structure et des deux regroupés. Dans tous les cas, on recherche une enveloppe de la réponse permettant de déterminer le déplacement maximum du système. Cette donnée est en effet prépondérante dans le cadre



de l'étude de structures en béton armé car elle correspond directement à l'endommagement de la structure : un déplacement important correspond à la fissuration du béton. Pour cette raison, on parlera dans la suite indifféremment de déplacement maximum ou de dommage :

$$\begin{array}{ccc} D & = & X_{max} \\ \text{dommage} & & \text{déplacement maximum} \end{array} \quad (2.40)$$

On s'intéresse aussi à l'accélération globale du système  $\ddot{x} = \ddot{x} + \ddot{u}$ , importante vis à vis des équipements embarqués : de fortes accélérations transversales peuvent être particulièrement nocives pour certains appareils sensibles.

Dans un premier temps, cette étude est faite dans un cadre relativement général, le système à un degré de liberté choisi ici pouvant représenter n'importe quelle structure, puis, dans un deuxième temps, une application plus précise sera développée.

### 2.5.1.2 Notations de calcul

Le problème est résolu en décomposant l'excitation en série de Fourier. On définit pour cela les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{A_0 T} \int_0^T \ddot{u}(t) dt \\ a_n = \frac{2}{A_0 T} \int_0^T \ddot{u}(t) \cos(\phi_n t) dt \text{ pour } n \geq 1 \\ b_n = \frac{2}{A_0 T} \int_0^T \ddot{u}(t) \sin(\phi_n t) dt \text{ pour } n \geq 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\phi_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad A_0^2 = \frac{2}{T} E_0^2 \quad (2.42)$$

où  $T$  est la durée totale de l'excitation et  $E_0^2 = \int_0^T \ddot{u}^2(t) dt$  représente l'énergie totale apportée par le signal. Dans toute la suite, on se limitera à la série de Fourier tronquée en conservant  $N$  termes. On définit également les notations vectorielles suivantes :

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \\ b_0 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} A_0 \cos(\varphi_0 t) \\ \vdots \\ A_0 \cos(\varphi_N t) \\ A_0 \sin(\varphi_0 t) \\ \vdots \\ A_0 \sin(\varphi_N t) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

De cette façon, on peut écrire l'excitation sous la forme :

$$\ddot{u}(t) = \sum_{n=1}^{2N+2} c_n y_n(t) = \mathbf{y}^T \mathbf{c} \quad (2.44)$$

La division par  $A_0$  introduite dans la définition des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  a pour but de normaliser l'énergie des signaux  $Y_i(t)$  à  $E_0$ . On a ainsi :

$$\int_0^T y_n^2(t) dt = E_0^2 \quad \text{pour } n \in [1, 2N + 2] \quad (2.45)$$

La réponse du système peut alors s'écrire :

$$x(t) = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{H}^T \mathbf{c} \quad (2.46)$$

où  $\mathbf{H}$  est une matrice traduisant la fonction de transfert du système et  $\mathbf{z}(t)$  correspond à  $\mathbf{y}(t)$  modifié de façon à prendre en compte le régime transitoire :

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} A_0 \cos(\varphi_0 t) - A_0 e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \\ \vdots \\ A_0 \cos(\varphi_N t) - A_0 e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \\ \hline A_0 \sin(\varphi_0 t) - A_0 \frac{\varphi_0}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \\ \vdots \\ A_0 \sin(\varphi_N t) - A_0 \frac{\varphi_N}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \text{Re}(H(\varphi_0)) & 0 & 0 & | & -\text{Im}(H(\varphi_0)) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & | & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \text{Re}(H(\varphi_N)) & | & 0 & 0 & -\text{Im}(H(\varphi_N)) \\ \hline \text{Im}(H(\varphi_0)) & 0 & 0 & | & \text{Re}(H(\varphi_0)) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & | & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \text{Im}(H(\varphi_N)) & | & 0 & 0 & \text{Re}(H(\varphi_N)) \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

avec  $\text{Re}(\cdot)$  et  $\text{Im}(\cdot)$  représentant respectivement les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe et  $H(\omega)$  défini par :

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega} \quad (2.49)$$

## 2.5.2 Prise en compte d'incertitudes sur l'excitation

### 2.5.2.1 Présentation de la méthode

Dans un premier temps, la structure est considérée comme déterministe, c'est à dire connue sans incertitude. Son comportement sera supposé linéaire. Par contre, l'excitation est introduite de façon incertaine : on suppose ici que l'on connaît l'énergie apportée par le signal ainsi que le contenu fréquentiel sous la forme d'une enveloppe autour d'un spectre donné, directement lié au site étudié.

L'hypothèse sur l'énergie a déjà été utilisée par Drenick [34] dès 1970. Elle consiste à écrire que l'intégrale du carré de l'accélération subie par la structure est bornée et peut donc s'écrire sous la forme  $\int_0^T \ddot{u}^2(t) dt \leq E_0^2$ . Toutefois, cette seule donnée conduirait à une surestimation évidente de la réponse maximum du système, car elle ne prendrait aucunement en compte le fait qu'il s'agit ici d'une excitation sismique. L'introduction d'une hypothèse sur le contenu fréquentiel semble donc indispensable. Barrata *et al.* [9] proposent d'introduire cette information fréquentielle en se basant sur le spectre d'un accélérogramme qui sera qualifié par la suite d'accélérogramme de référence ou nominal. Cet accélérogramme sera choisi en fonction du site étudié et à partir de l'historique des données sismiques de ce site. L'expansion en série de Fourier de l'excitation est alors particulièrement adaptée pour ce type d'étude. L'accélérogramme

de référence sera alors caractérisé par les coefficients de Fourier  $\mathbf{c}_0$  :  $\ddot{u}_0(t) = \mathbf{y}(t)^T \mathbf{c}_0$  (avec  $\mathbf{c}_0^T \mathbf{c}_0 = 1$  de façon à respecter la contrainte sur l'énergie).

Le séisme de El-Centro (Imperial Valley, 1940) sera utilisé comme référence dans les exemples qui suivent (figures 2.27 et 2.28). Ce choix est basé sur la richesse de documentation concernant ce séisme. L'incertitude consistera alors à supposer que les spectres des signaux possibles seront inclus dans une enveloppe autour de ce spectre de référence ; le paramètre  $\theta$  caractérise la largeur de cette enveloppe.

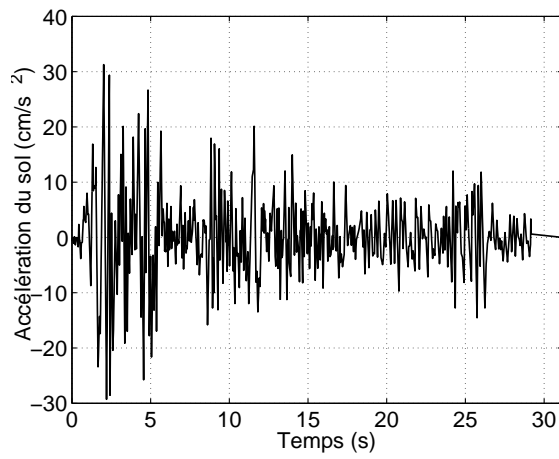


FIG. 2.27 – Séisme de El-Centro :  $\ddot{u}_0$

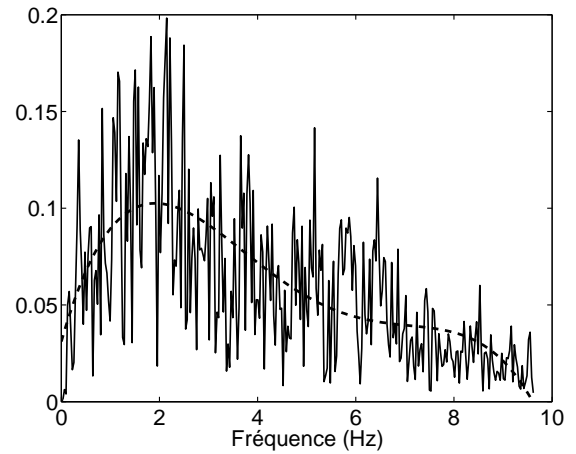


FIG. 2.28 – Spectre de Fourier du séisme de El-Centro

Les différentes hypothèses concernant l'incertitude sur l'excitation peuvent alors être résumées sous la forme :

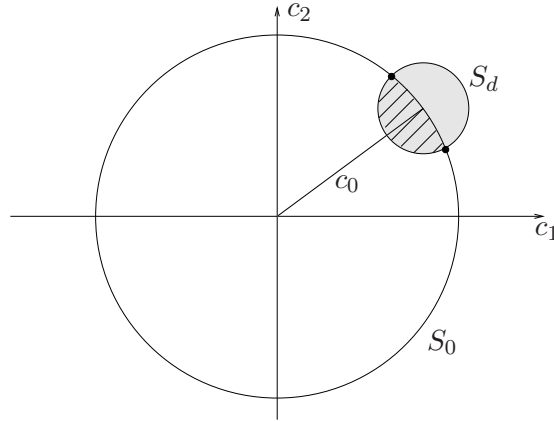
- l'énergie totale du signal est fixée :

$$\mathbf{c}^T \mathbf{c} = \sum_{n=1}^{2N+2} c_n^2 = 1 \quad (2.50)$$

- le spectre de Fourier du signal est compris dans une enveloppe autour d'un spectre de référence :

$$(\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)^T (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) = \sum_{n=1}^{2N+2} (c_n - c_{0n})^2 \leq \theta^2 \quad (2.51)$$

L'ensemble des coefficients  $\mathbf{c}$  admissibles peut alors être illustré par la figure 2.29, où  $S_0$  correspond à la limite associée à l'hypothèse sur l'énergie et  $S_d$  est lié à l'hypothèse fréquentielle.

FIG. 2.29 – Coefficients  $\mathbf{c}$  admissibles

De plus, le système étudié étant linéaire et le domaine admissible pour l'excitation étant convexe, on sait que la solution du problème d'optimisation se trouve sur les bornes du domaine. Les inégalités employées précédemment peuvent donc être remplacées par des égalités, et le problème que l'on cherche à résoudre peut finalement s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \text{pour tout } t, \text{ trouver } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{2N+2}, \\ \text{maximisant } x(t) = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{H}^T \mathbf{c} \\ \text{avec } \mathbf{c}^T \mathbf{c} = 1 \text{ et } (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)^T (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) = \theta^2 \end{cases} \quad (2.52)$$

La dernière contrainte peut aussi s'écrire, en tenant compte de la contrainte sur l'énergie ( $\mathbf{c}_0^T \mathbf{c}_0 = 1$ ), sous la forme :

$$\mathbf{c}_0^T \mathbf{c} = 1 - \theta^2/2 = a \quad (2.53)$$

La résolution d'un tel problème d'optimisation sous contrainte se fait par la méthode de Lagrange. On aboutit ainsi à une enveloppe temporelle de la réponse, mais on se contentera ici de retenir pour chaque instant  $t$  la réponse maximale obtenue entre l'instant initial et l'instant courant  $X_{max}(t) = \max_{T \in [0, t]} |x(T)|$ .

On considère le Lagrangien suivant :

$$L(\mathbf{c}, r) = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{H}^T \mathbf{c}(t) + r_1 (\mathbf{c}^T(t) \mathbf{c}(t) - 1) + r_2 (\mathbf{c}_0^T \mathbf{c}(t) - a) \quad (2.54)$$

On a alors :

$$\text{grad}_{\mathbf{c}} L = \mathbf{H} \mathbf{z}(t) + 2r_1 \mathbf{c}(t) + r_2 \mathbf{c}_0 = 0 \quad (2.55)$$

En notant  $b = \mathbf{z}^T \mathbf{H}^T \mathbf{c}_0$  et  $4U^2 = \mathbf{z}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{z}$  et en tenant compte des contraintes  $\mathbf{c}^T \mathbf{c} = 1$  et  $\mathbf{c}_0^T \mathbf{c} = 1 - \theta^2/2 = a$ , on a finalement :

$$r_1 = \pm \sqrt{\frac{4U^2 - b^2}{4(1 - a^2)}} \quad r_2 = -(2r_1 a + b) \quad (2.56)$$

et le vecteur  $\mathbf{c}_{opt}(t)$  correspondant à la réponse extrême à l'instant  $t$  est donné par :

$$\mathbf{c}_{opt}(t) = -\frac{1}{2r_1} (r_2 \mathbf{c}_0 + \mathbf{H} \mathbf{z}(t)) \quad (2.57)$$

Tout ceci aboutit finalement à la détermination du déplacement maximum à tout instant  $t$  :

$$x_{max}(t) = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{H}^T \mathbf{c}_{opt}(t) \quad (2.58)$$

### 2.5.2.2 Résultats sur un exemple numérique

On introduit ici les valeurs numériques suivantes :

pour la structure :

-  $\omega_0 = 2\pi f_0$  avec  $f_0 = 2$  Hz

-  $\xi = 5$  %

pour l'excitation :

-  $\ddot{u}_0(t)$  : séisme de El-Centro

-  $N = 300$

-  $\theta = 0.1$

La figure 2.30 représente la réponse temporelle du système excité par l'accélérogramme nominal (trait pointillé) et le déplacement maximum entre l'instant initial et l'instant courant avec prise en compte de l'incertitude sur l'excitation  $X_{max}(t) = \max_{T \in [0,t]} |x(T)|$  (trait plein), résultat de l'analyse convexe conduite ici. On peut observer sur cette figure que le déplacement maximum est très rapidement atteint, ce qui tend à dire que la phase la plus critique d'un séisme apparaît dès les premières secondes (résultat assez général).

L'influence du paramètre  $\theta$  sur le déplacement maximum est illustrée sur la figure 2.31. Ce paramètre traduit la largeur de l'enveloppe autour du spectre de référence, et, comme on peut le comprendre géométriquement sur la figure 2.29, il a pour valeur maximale  $\sqrt{2}$ , car si  $\theta \geq \sqrt{2}$ , les intersections des surface  $S_d$  et  $S_0$  ne sont plus cohérentes.

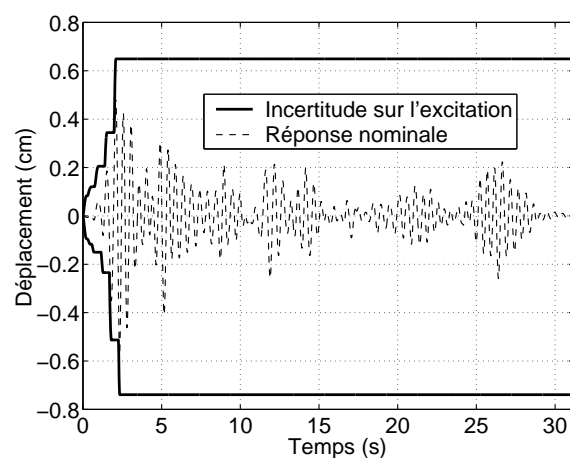


FIG. 2.30 – Enveloppe temporelle de la réponse avec incertitude sur l'excitation

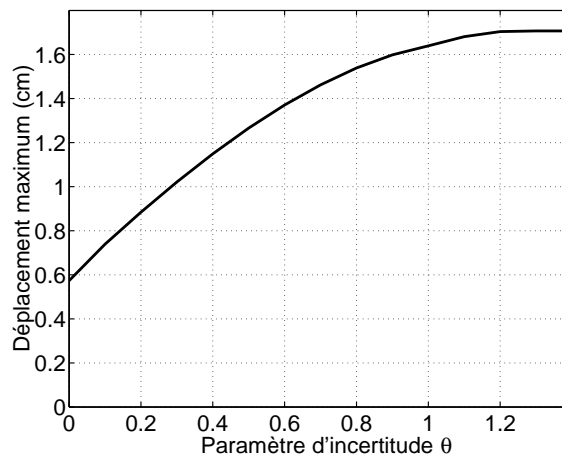


FIG. 2.31 – Influence du paramètre  $\theta$  sur le déplacement maximum

La même résolution que celle effectuée sur le déplacement est menée pour l'accélération. On s'intéressera toutefois ici plus particulièrement à l'accélération globale  $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{u}}$  correspondant à celle ressentie par les équipements installés sur la structure. Avec les notations utilisées précédemment,  $\ddot{\mathbf{x}}$  s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \left( \ddot{\mathbf{Z}}^T(t) \mathbf{H}^T + \mathbf{Y}^T(t) \right) \mathbf{c} \quad (2.59)$$

L'écriture de  $\ddot{\mathbf{x}}$  sous cette forme permet d'utiliser le même algorithme de résolution que pour l'enveloppe du déplacement. Pour cela, une nouvelle fonction de Lagrange  $L'$  est introduite :

$$L'(\mathbf{c}, r') = \left( \ddot{\mathbf{z}}^T(t) \mathbf{H}^T + \mathbf{y}^T(t) \right) \mathbf{c}(t) + r'_1(\mathbf{c}^T(t) \mathbf{c}(t) - 1) + r'_2(\mathbf{c}_0^T \mathbf{c}(t) - a) \quad (2.60)$$

Le résultat correspondant à l'enveloppe de l'accélération est présenté sur la figure 2.32.

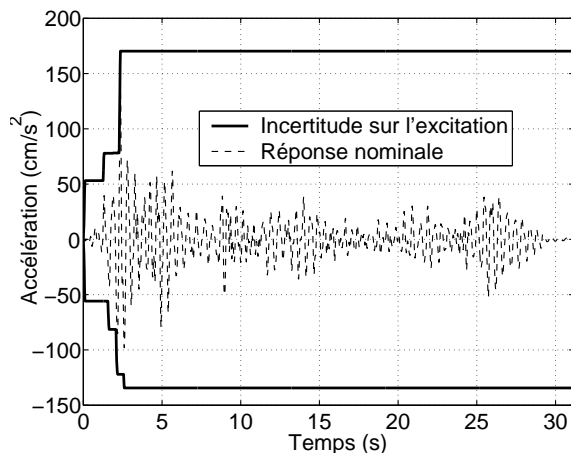


FIG. 2.32 – Enveloppe temporelle de l'accélération avec incertitude sur l'excitation

La méthode de résolution analytique utilisée ici permet d'affirmer que l'enveloppe obtenue englobe bien tous les maxima possibles du déplacement, mais également qu'il existe une combinaison des paramètres  $\mathbf{c}$  conduisant à un déplacement égal à celui obtenu lors de la résolution.

### 2.5.3 Prise en compte d'incertitudes sur la structure

#### 2.5.3.1 Présentation de la méthode

Dans cette deuxième partie, on se propose d'étudier l'endommagement de la structure en supposant cette fois que l'excitation est déterministe, mais que la structure est incertaine. On introduit pour cela une incertitude au niveau de la raideur, se traduisant par une incertitude sur la première fréquence propre de la structure. Physiquement, cette incertitude peut traduire un défaut de construction (mauvaise qualité du béton par exemple) ou un endommagement préalable méconnu.

Le problème que l'on cherche à résoudre peut donc s'écrire mathématiquement sous la forme :

$$\begin{cases} \text{pour tout } t, \text{ trouver } \omega_0 \in \mathbb{R}, \\ \text{maximisant } x(t) = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{H}(\omega_0)^T \mathbf{c}_0 \\ \text{avec } \omega_{\min} < \omega_0 < \omega_{\max} \end{cases} \quad (2.61)$$

Dans le cas présent, le déplacement que l'on cherche à calculer et à optimiser ne dépend pas linéairement du paramètre incertain  $\omega_0$ . Un calcul analogue à celui utilisé pour l'incertitude sur l'excitation n'est donc pas applicable. On choisit donc ici de réaliser un plan d'expériences très simple en réalisant un certain nombre de tirages de  $\omega_0$  répartis aléatoirement dans l'intervalle de valeurs considéré pour trouver grossièrement les extrêmes. A partir de ces valeurs, un algorithme de gradient permet d'affiner le résultat.

### 2.5.3.2 Résultats sur un exemple numérique

Les valeurs numériques choisies ici sont les suivantes :

pour la structure :

-  $\omega_0 = 2\pi f_0$  avec  $f_0 = 2$  Hz

-  $\xi = 5$  %

-  $\Delta\omega_0/\omega_0 = 20$ %

pour l'excitation :

-  $\ddot{u}_0(t)$  : séisme de El-Centro

-  $N = 300$

On a ainsi tracé sur la figure 2.33 la variation du déplacement maximum en fonction de la première fréquence propre. La figure 2.34 présente quant à elle l'influence sur le déplacement maximum du système du pourcentage d'incertitude sur la valeur moyenne de la fréquence propre (ici égale à  $2Hz$ ).

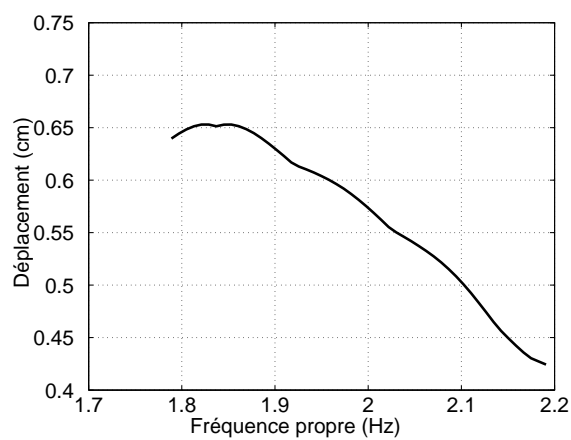


FIG. 2.33 – Influence de la première fréquence propre sur le déplacement maximum

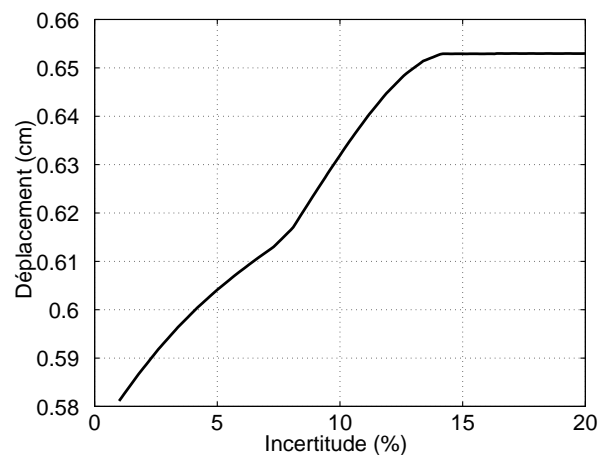


FIG. 2.34 – Influence de l'incertitude en pourcentage

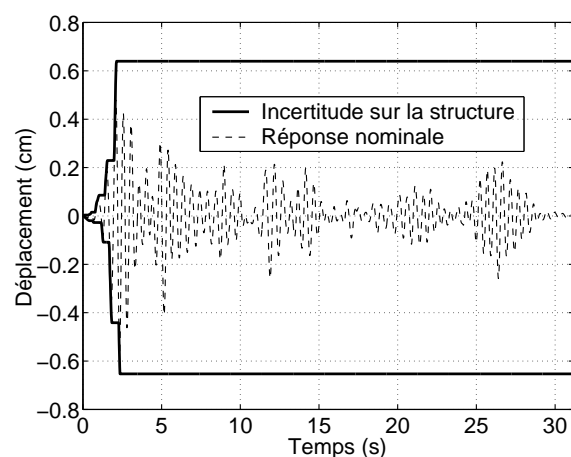


FIG. 2.35 – Enveloppe du déplacement avec incertitude sur la structure ( $\Delta k/k = 20$ %)

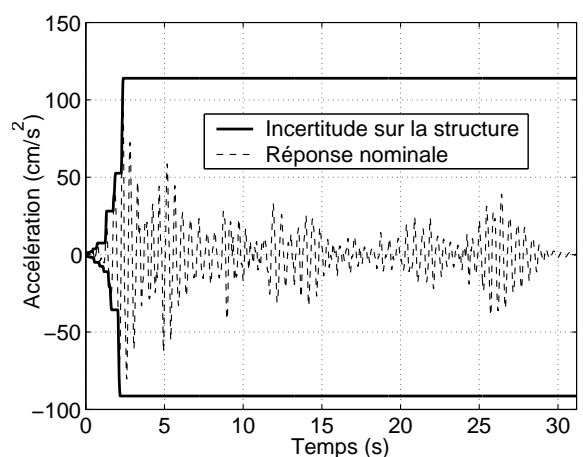


FIG. 2.36 – Enveloppe de l'accélération avec incertitude sur la structure ( $\Delta k/k = 20$ %)

De cette façon, on peut déterminer un résultat similaire à celui obtenu dans le cas de

l'incertitude sur l'excitation, c'est à dire une borne absolue du déplacement et de l'accélération. Ces résultats sont présentés sur les figures 2.35 et 2.36.

La méthode d'optimisation utilisée ici est donc totalement différente de la précédente, mais elle permet d'aboutir à des résultats comparables en termes de quantification du dommage, à savoir une estimation du cas le plus défavorable pour la structure.

## 2.5.4 Prise en compte d'incertitudes sur l'excitation et la structure

### 2.5.4.1 Présentation de la méthode

On regroupe cette fois les deux types d'incertitudes précédemment étudiés de façon dissociée. Mathématiquement, le problème s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } t, \text{ trouver } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{2N+2} \text{ et } \omega_0 \in \mathbb{R}, \\ \text{maximisant } x(t) = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{H}(\omega_0)^T \mathbf{c} \\ \text{avec } \mathbf{c}^T \mathbf{c} = 1 \text{ et } (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)^T (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) = \theta^2 \\ \text{et } \omega_{\min} < \omega_0 < \omega_{\max} \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Le principe de résolution mis en œuvre pour résoudre le problème d'optimisation est un couplage des méthodes utilisées pour les deux incertitudes prises séparément. On va ainsi effectuer un certain nombre de tirages aléatoires de la fréquence propre de la structure, et pour chacun de ces tirages, on résout le problème d'optimisation présenté dans la partie 2.5.2.

Cette méthode de résolution, bien que relativement lourde numériquement permet d'obtenir une enveloppe aussi fiable que possible de l'endommagement.

### 2.5.4.2 Résultats sur un exemple numérique

Les valeurs numériques choisies ici sont les suivantes :

pour la structure :	pour l'excitation :
- $\omega_0 = 2\pi f_0$ avec $f_0 = 2$ Hz	- $\ddot{u}_0(t)$ : séisme de El-Centro
- $\xi = 5$ %	- $N = 300$
- $\Delta\omega_0/\omega_0 = 20$ %	- $\theta = 0.1$

La figure 2.37 illustre la variation du dommage maximum en fonction de chacune des incertitudes :  $\theta$  et  $\Delta\omega_0/\omega_0$ .

La figure 2.39 donne une comparaison des résultats obtenus pour les différentes prises en compte d'incertitude. On peut y constater que, naturellement, le groupement des deux types d'incertitude conduit à une augmentation de l'endommagement maximum.



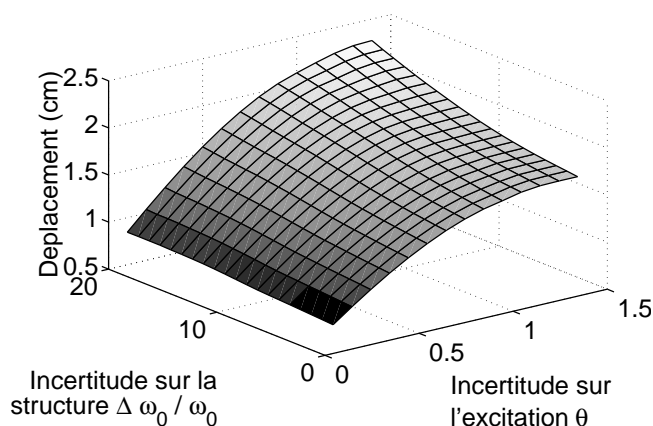


FIG. 2.37 – Influence de chacun des deux types d'incertitudes

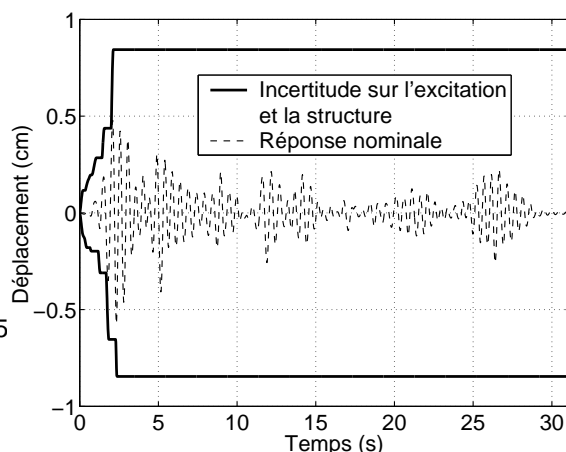


FIG. 2.38 – Enveloppe du déplacement avec incertitude sur l'excitation et la structure

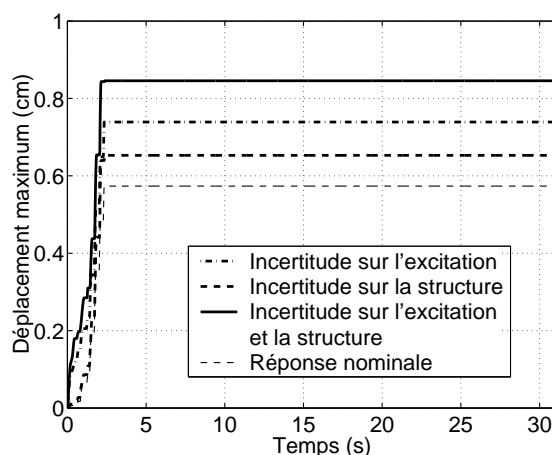


FIG. 2.39 – Comparaison des enveloppes du dommage pour les différentes hypothèses d'incertitude

### 2.5.5 Comparaison avec des tirages de Monte Carlo

De façon à évaluer le conservatisme des résultats obtenus par l'analyse convexe effectuée ici, des simulations de Monte Carlo sont réalisées de façon à comparer l'enveloppe convexe avec la répartition statistique de la réponse. Toutefois, la méthode des tirages de Monte Carlo nécessite d'introduire des lois statistiques concernant les paramètres incertains. De façon à couvrir au mieux les domaines définis dans le cas de l'analyse convexe, on choisit de prendre pour la fréquence propre  $\omega$  une loi uniforme avec les mêmes bornes que pour l'analyse convexe, et pour l'excitation, on écrit les paramètres  $\mathbf{c}$  sous la forme  $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{c}_0 + \beta \mathbf{U}$ , où  $\mathbf{U}$  est un vecteur dont chaque terme respecte une loi uniforme dans l'intervalle  $[-1 \ 1]$ , et où les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont déterminés de façon à respecter les contraintes  $\mathbf{c}^T \mathbf{c} = 1$  et  $(\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)^T (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) = \theta^2$ .  $\alpha$  et

$\beta$  sont ainsi donnés par :

$$\beta = \sqrt{\frac{a^2 - 1}{(c_0^T U)^2 - U^T U}} \quad (2.63)$$

$$\alpha = a - \beta c_0^T U \quad (2.64)$$

Sur la figure 2.40, l'enveloppe correspondant aux résultats de l'analyse convexe est représentée par un trait plein et la répartition statistique des simulations de Monte Carlo correspond à la surface grisée. La comparaison des résultats permet de voir que l'enveloppe convexe englobe les résultats des tirages de Monte Carlo, ce qui prouve le conservatisme de la méthode, mais met aussi en évidence le fait que cette enveloppe correspond à un cas de figure présentant une très faible probabilité d'occurrence, donc qui n'aurait pas pu être déterminé par une méthode statistique.

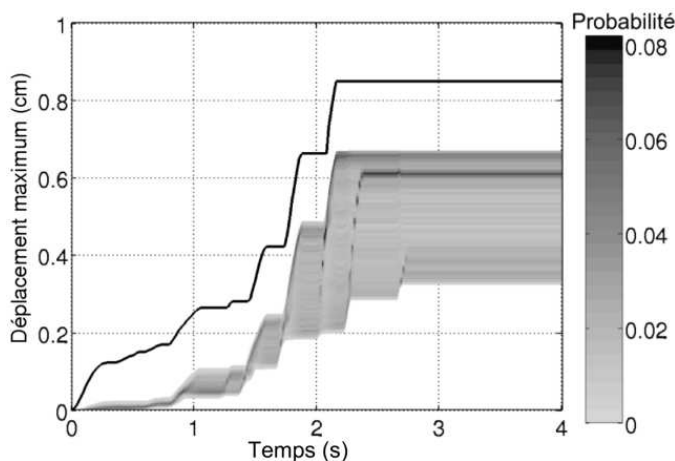


FIG. 2.40 – Analyse convexe (trait plein) et simulation de Monte Carlo (surface grisée)

## 2.5.6 Application : modèle avec prise en compte de la chute de fréquence

### 2.5.6.1 Présentation de la structure

On va maintenant appliquer le raisonnement précédent sur une structure particulière : un voile en béton armé. En effet, les voiles fortement armés constituent un pourcentage important du bâti existant dans le domaine de la construction nucléaire. Le voile considéré ici a été testé lors d'essais réalisés au laboratoire européen ELSA, dont la géométrie est représentée sur la figure 2.41. Un premier travail de modélisation de cette structure et de simplification a déjà été effectué par Brun [15]. Les résultats obtenus sont directement utilisés ici : il s'agit de modéliser le voile par un système à un degré de liberté correspondant au déplacement en tête du voile, mais avec une fréquence propre variable en fonction du degré d'endommagement (cf. figure 2.42). Une telle simplification est rendue possible par le fait que la structure répond principalement sur son premier mode propre au cours d'un séisme.

Le système s'écrit alors simplement sous la forme d'une équation différentielle dont les paramètres sont variables :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0(X_{max})\dot{x} + \omega_0(X_{max})^2x = -\ddot{u}(t) \quad (2.65)$$

avec :

$$X_{max} = \max_{\tau \in [0, t]} |x(\tau)| \quad (2.66)$$

La résolution déterministe se fait ainsi en utilisant un schéma d'intégration temporelle classique de Newmark et en actualisant la valeur de la fréquence propre  $\omega_0$  à chaque pas de temps.

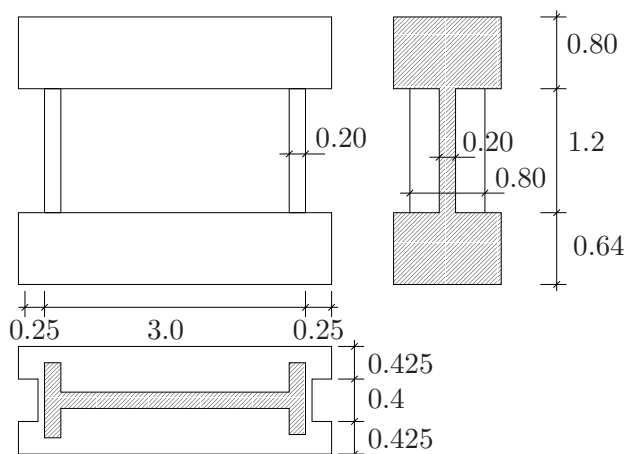


FIG. 2.41 – Géométrie du voile (dimensions en mètres)

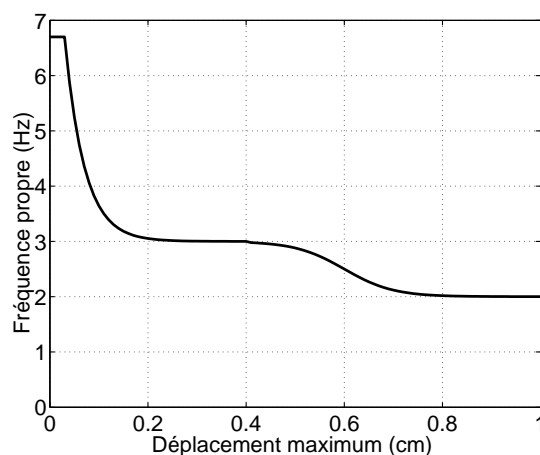


FIG. 2.42 – Modélisation de la chute de fréquence avec l'endommagement

Pour cette structure, comme on peut le voir sur la figure 2.42, la fréquence propre peut varier entre 2 et 6.7Hz en fonction du degré d'endommagement (un endommagement égal à 1, équivalent à un déplacement de 1cm, correspondant à la ruine de la structure).

Dans un premier, l'influence du dommage initial (dommage préalable à l'excitation considérée) sur le comportement de la structure est étudiée, de façon à illustrer la complexité des phénomènes liés aux non-linéarités mises en jeu au cours de tremblement de terre. Dans un deuxième temps, une analyse convexe telle que présentée précédemment est menée en prenant comme incertitude sur la fréquence propre les variations possibles liées à l'endommagement.

### 2.5.6.2 Influence du dommage initial

Une des difficultés rencontrées dans l'évaluation du dommage consécutif à un tremblement de terre réside dans la méconnaissance de l'état d'endommagement de la structure avant la secousse. En effet, il est difficile de maîtriser l'historique des dommages successifs subis par une structure. Or, comme on va le voir ici, cet état d'endommagement joue de façon très importante sur le comportement de la structure au cours du séisme.

De façon à illustrer l'influence de cet endommagement préalable, on calcule la réponse du voile pour un échantillonnage assez large d'enregistrements de séismes réels. Cette réponse est calculée pour différentes valeurs de l'endommagement à  $t = 0$ . De façon à rendre les résultats

plus facilement comparables, l'amplitude des différents signaux sismiques est modulée de façon à ramener toutes les énergies au même niveau.

Les courbes de la figure 2.43 montrent la complexité des phénomènes mis en jeu. En effet, on constate que suivant le niveau d'endommagement de la structure avant le séisme, la structure pourra subir des dommages très variables. Ainsi, si sur l'exemple (a) de la figure 2.43, le dommage final est une fonction croissante du dommage initial, on constate que sur les exemples (b) et (c), la courbe est loin d'être monotone. Ainsi, une structure préalablement plus endommagée pourra, dans certains cas, mieux résister qu'une structure intacte.

On peut constater également, en particulier sur l'exemple (b), que le dommage final est susceptible de varier très rapidement en fonction du dommage initial. Ainsi, une structure ayant un dommage quantifié à 0.58 ne connaîtra pas d'endommagement supplémentaire, alors qu'une structure dont le dommage serait de 0.62 serait totalement ruinée ( $D = 1$  en fin de simulation).

### 2.5.6.3 Application des résultats précédents

On reprend donc ici l'analyse réalisée dans le cas du couplage des deux types d'incertitudes (section 2.5.4), en conservant la même définition des incertitudes sur l'excitation et en prenant pour la structure une fréquence propre incertaine comprise dans l'intervalle  $[2 \text{ } 6.7]$  Hz. Deux types d'analyse sont alors conduites : d'un côté une analyse convexe permettant de déterminer une enveloppe extrême du dommage et de l'autre des tirages de Monte Carlo pour lesquels l'incertitude sur l'excitation est introduite de la même façon que dans la section 2.5.5 tandis que la fréquence propre suit la loi de chute liée à l'endommagement et illustrée sur la figure 2.42.

La figure 2.44 présente la répartition statistique du déplacement maximum en fin de simulation ainsi que la limite déterminée par l'analyse convexe (trait pointillé). La figure 2.45 présente le même résultat mais sur l'ensemble du domaine temporel. On observe que malgré la non prise en compte de la non-linéarité, l'enveloppe obtenue englobe les résultats issus des tirages aléatoires.

De plus, le résultat des tirages permet de visualiser l'influence de la fréquence propre initiale (ou du dommage initial) sur le déplacement maximum en cours de simulation : figure 2.46 et 2.47. On peut constater que pour des valeurs de dommages initiales supérieures à 0.2 correspondant à des fréquences propres inférieures à 3 Hz, le déplacement maximum en cours de simulation n'entraîne pas d'augmentation du dommage.

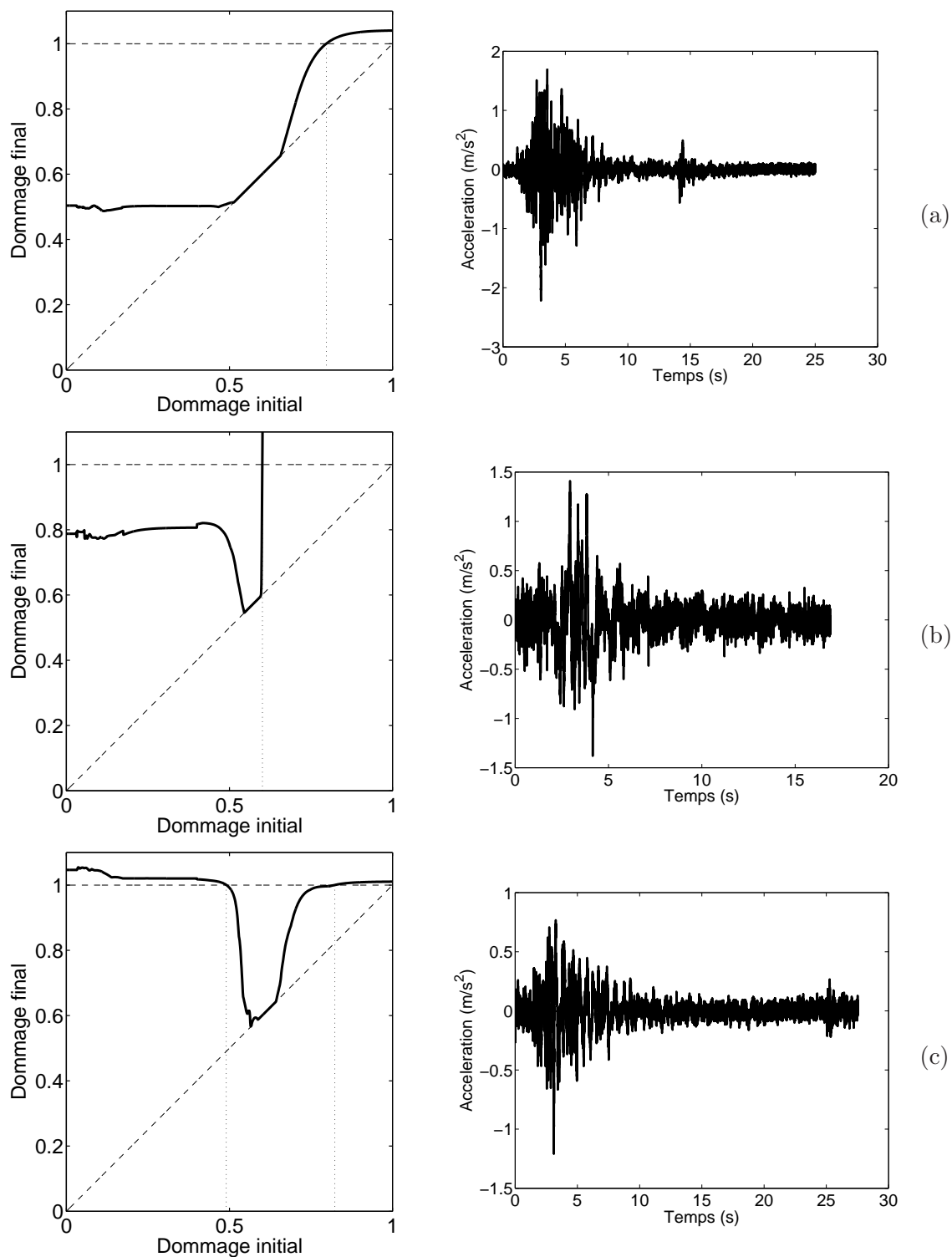


FIG. 2.43 – Influence du dommage initial sur le dommage en fin d'excitation (les figures de droite représentent les accélérogrammes correspondant à chacune des figures de gauche)

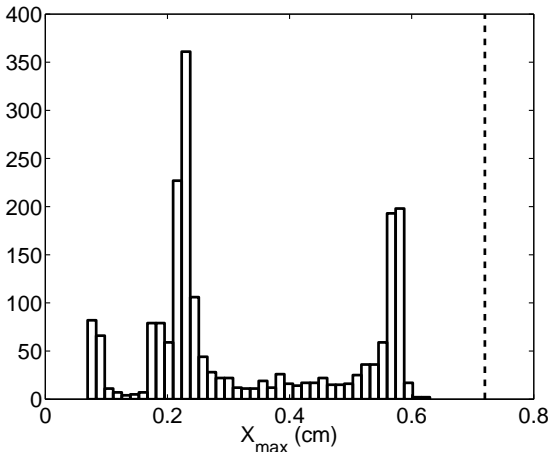
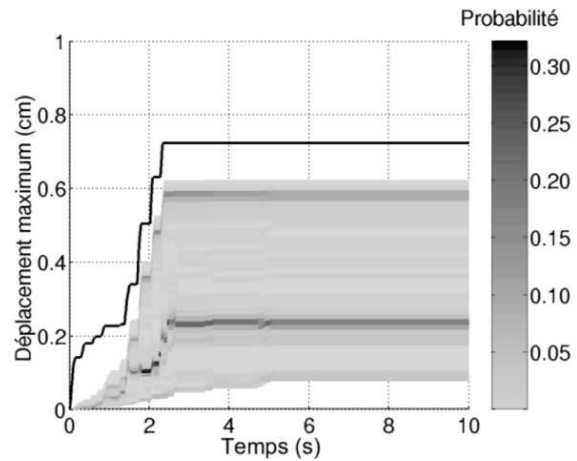
FIG. 2.44 – Répartition statistique de  $X_{max}$ 

FIG. 2.45 – Enveloppe temporelle du déplacement (trait continu) et répartition statistique (surface grisée)

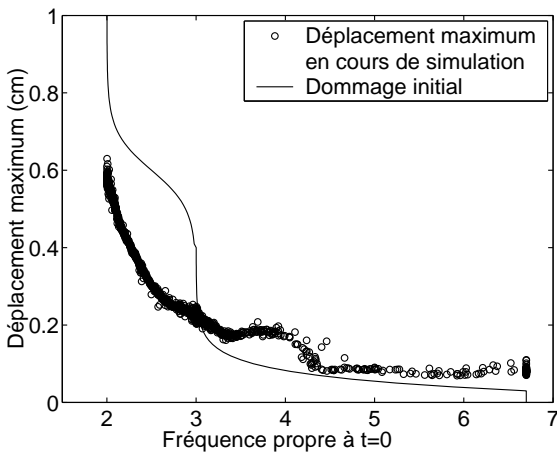


FIG. 2.46 – Influence de la fréquence propre initiale

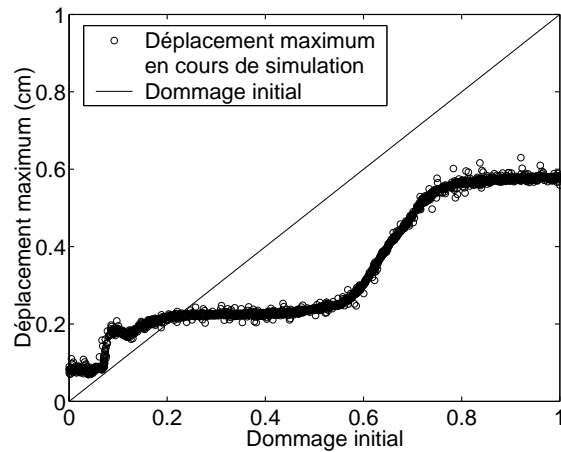


FIG. 2.47 – Influence du dommage initial

Ces résultats montrent donc que la prise en compte d'une fréquence incertaine dans un système linéaire permet de représenter le comportement d'un système non-linéaire.

## 2.5.7 Extension des résultats aux systèmes à plusieurs degrés de liberté

### 2.5.7.1 Principe

Les résultats présentés dans tout le début de ce chapitre se limitaient à des systèmes à un degré de liberté. On montre ici que la même technique peut être appliquée quelque soit le nombre de degrés de liberté. En effet, si pour une structure, les premières fréquences propres sont proches les unes des autres, on ne pourra pas approximer la réponse de la structure en ne considérant que la réponse sur le premier mode. Cette extension passe par une décomposition de la réponse du système dans la base modale.

A partir de maintenant, on considère donc la réponse d'un système à  $N$  degrés de liberté, dont on écrit l'équation du mouvement sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (2.67)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur,  $\mathbf{x}$  est le vecteur déplacement et  $\mathbf{f}$  est le vecteur des forces extérieures agissant sur le système.

On note alors  $\phi_i$  le vecteur propre associé à la fréquence propre  $\omega_{0i}$  (on parlera ici de fréquence propre, bien que  $\omega$  fasse référence à une pulsation). Le vecteur déplacement  $\mathbf{x}(t)$  peut alors être écrit sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i q_i(t) \quad (2.68)$$

où les fonctions  $q_i(t)$  sont les participations modales.

Ainsi, en introduisant l'expression 2.68 dans l'équation 2.67 et en utilisant la propriété d'orthogonalité des modes propres, l'équation du mouvement 2.67 devient :

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i \ddot{q}_i + \phi_i^T \mathbf{C} \phi_i \dot{q}_i + \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i q_i = \phi_i^T \mathbf{f} \quad (2.69)$$

où :

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_{0i} \dot{q}_i + \omega_{0i}^2 q_i = \gamma_i \quad (2.70)$$

avec :

$$\omega_{0i}^2 = \frac{\phi_i^T \mathbf{K} \phi_i}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} \quad 2\xi_i \omega_{0i} = \frac{\phi_i^T \mathbf{C} \phi_i}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} \quad \gamma_i = \frac{\phi_i^T \mathbf{f}}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} \quad (2.71)$$

Par ailleurs, étant donné qu'on s'intéresse ici au cas des excitations sismiques de structures, l'excitation du système intervient donc sous la forme d'une excitation de sa base. Le vecteur force  $\mathbf{f}$  peut donc être écrit sous la forme :

$$\mathbf{f} = -\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda}\ddot{u} \quad (2.72)$$

où  $\boldsymbol{\lambda}$  est un vecteur contenant des 1 sur les lignes correspondant aux degrés de liberté horizontaux et des 0 ailleurs.

A partir de cette écriture de  $\mathbf{f}$ , on reprend la décomposition en série de Fourier de l'accélération  $\ddot{u} = \mathbf{z}^T(t)\mathbf{c}$  et  $\gamma_i$  est alors obtenu sous la forme :

$$\gamma_i = \mathbf{Z}_{.i}^T \mathbf{c} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Z}_{.i}^T = -\frac{\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{1}_{N \times 1} \mathbf{z}^T}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} \quad (2.73)$$

où  $\mathbf{Z}_{.i}$  correspond à la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $\mathbf{Z}$ .

De façon à retrouver un résultat similaire à celui de l'équation 2.46 correspondant au système à un degré de liberté, on remplace la matrice  $\mathbf{H}$  définie dans l'équation 2.48 par une nouvelle matrice  $\mathbf{H}_i$ , construite en remplaçant  $\omega_0$  par  $\omega_{0i}$  dans l'expression 2.48. Ainsi, on obtient l'expression du résultat de la même façon qu'à l'équation 2.46 :

$$q_i = \mathbf{Z}_{.i}^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{c} \quad (2.74)$$

ce qui permet d'écrire le vecteur déplacement en fonction du vecteur  $\mathbf{c}$  :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i q_i(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i \mathbf{Z}_i^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{c} \quad (2.75)$$

où :

$$\mathbf{x}(t) = \left[ \sum_{i=1}^N \phi_i \mathbf{Z}_i^T \mathbf{H}_i^T \right] \mathbf{c} \quad (2.76)$$

et si on s'intéresse à la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{x}$  :

$$x_j(t) = \left[ \sum_{i=1}^N \phi_{ji} \mathbf{Z}_i^T \mathbf{H}_i^T \right] \mathbf{c} \quad (2.77)$$

A partir de cette expression dans laquelle  $\mathbf{x}$  dépend linéairement de  $\mathbf{c}$ , on peut appliquer exactement les mêmes méthodes de résolution que dans le cas du système à un degré de liberté, de façon à déterminer les déplacements maximaux de chacun des degrés de liberté, ou des combinaisons linéaires de ces degrés de liberté, comme on le verra dans l'exemple qui suit.

### 2.5.7.2 Exemple

Une application naturelle de ces résultats concernant les systèmes à plusieurs degrés de liberté consiste en l'étude des structures de type portique. En effet, ce type d'architecture est très courant dans le domaine du génie civil, où les structures sont souvent constituées de poteaux et poutres porteurs et d'un "habillage" extérieur. De plus, pour ce type de structures, le dommage peut être directement relié au déplacement inter-étages, c'est-à-dire au déplacement relatif de deux étages successifs.

L'exemple que l'on étudie ici est un portique à deux étages, tel que représenté sur la figure 2.48. Cette structure est une structure type, testée lors des essais Gauvin au CEA et est supposée être représentative d'une structure réelle à l'échelle 1/3. Dans notre étude, on ne prend en compte que les effets de la flexion, le comportement en traction-compression est négligé. Ceci implique que seuls deux degrés de liberté sont à prendre en compte : les déplacements horizontaux de chacun des deux étages, tel que schématisé sur la figure 2.49.

La méthodologie présentée précédemment est alors appliquée de façon à déterminer le cisaillement maximum de chacun des étages :  $x_1$  pour le premier étage et  $x_2 - x_1$  pour le second. Ne possédant pas les données nécessaires à une prise en compte de l'incertitude sur la structure, on ne s'intéressera ici qu'à une incertitude portant sur l'excitation. Les valeurs numériques prises en compte seront alors les mêmes que dans la partie 2.5.2 (séisme de El-Centro avec  $\theta = 0.1$ ).



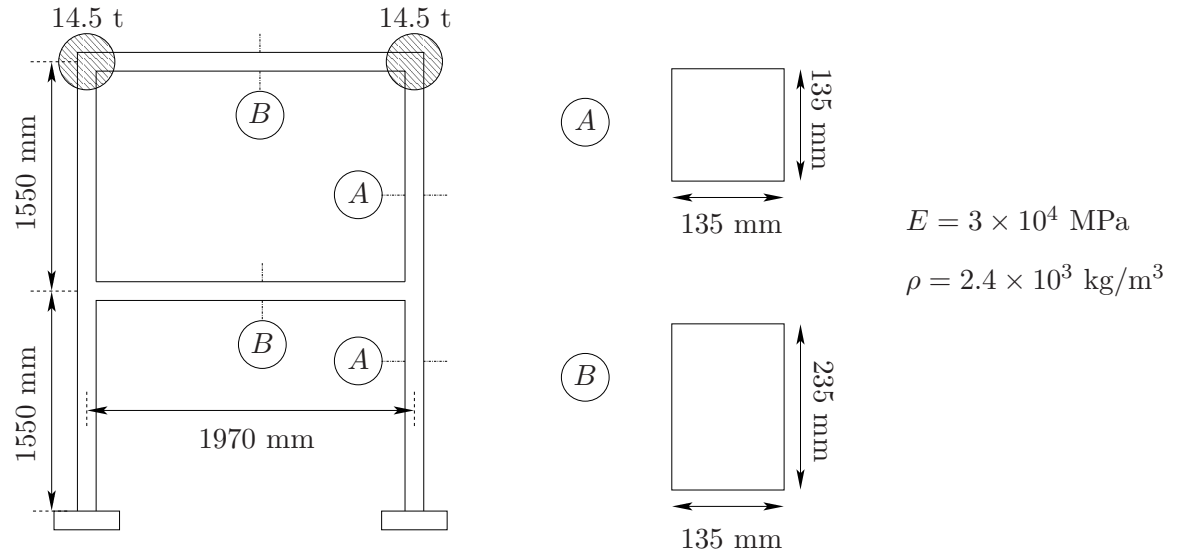


FIG. 2.48 – Description du portique à deux étages

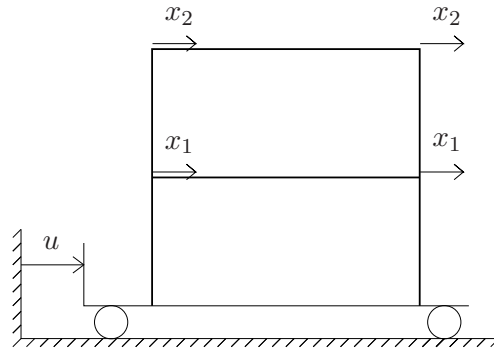


FIG. 2.49 – Excitation de la structure et définition des degrés de liberté

En notant  $\phi_{ji}$  la  $j^{\text{ème}}$  composante du vecteur propre associé à la fréquence propre  $\omega_{0i}$ , on a les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{1}^{\text{er}} \text{ étage : } x_1(t) &= \left[ \sum_{i=1}^N \phi_{1i} \mathbf{Z}_{.i}^T \mathbf{H}_i^T \right] \mathbf{c} \\ \text{2}^{\text{ème}} \text{ étage : } x_2(t) - x_1(t) &= \left[ \sum_{i=1}^N (\phi_{2i} - \phi_{1i}) \mathbf{Z}_{.i}^T \mathbf{H}_i^T \right] \mathbf{c} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Les limites extrêmes du déplacement, liées à l'analyse convexe, sont alors déterminées en remplaçant  $\mathbf{z}^T \mathbf{H}^T$  dans l'expression de la fonction de Lagrange 2.54 par  $\sum_{i=1}^N \phi_{1i} \mathbf{Z}_{.i}^T \mathbf{H}_i^T$

et  $\sum_{i=1}^N (\phi_{2i} - \phi_{1i}) \mathbf{Z}_{.i}^T \mathbf{H}_i^T$  respectivement pour les premier et deuxième étages. Les résultats

obtenus sont présentés sur la figure 2.50.

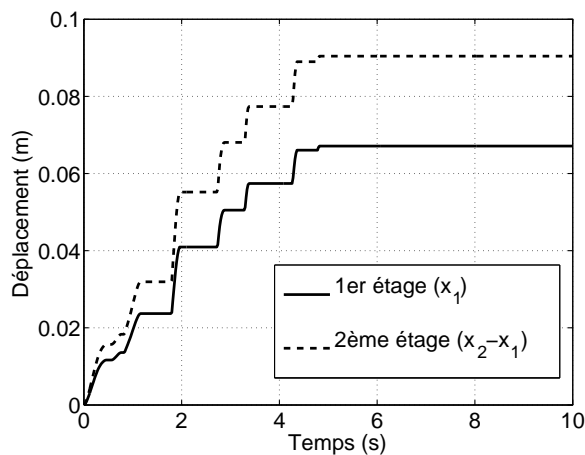


FIG. 2.50 – Déplacement relatif maximum de chaque étage

### 2.5.8 Conclusion

Cette méthodologie permet ainsi de traiter n'importe quelle structure qui aura été préalablement modélisée en éléments-finis et dont on connaîtra les matrices de masse, de raideur et d'amortissement. Toutefois, la difficulté concernant le traitement de l'incertitude sur la structure reposera toujours sur la détermination de la loi d'endommagement ou, dans une moindre mesure, sur la détermination des bornes des fréquences propres de la structure.

## 2.6 La $\mu$ -synthèse

La  $\mu$ -synthèse peut être considérée comme une “vision automatique” de la prise en compte d'incertitudes. Cette théorie a été initialement introduite par Doyle [32] en 1982 et est rapidement devenue un outil standard pour l'analyse robuste de systèmes linéaires. Elle consiste en un contrôle actif de structures contenant des incertitudes, ce contrôle permettant d'assurer en parallèle la stabilité et la performance robuste du système. Ce type de contrôle peut s'avérer particulièrement intéressant dans la sécurité anti-sismique des bâtiments, car on peut envisager de l'appliquer sur les structures dans les zones à risque. On se contentera toutefois ici d'en présenter la théorie.

Dans un premier temps, on présente les conventions et notations concernant l'introduction des incertitudes dans un système automatique, puis le principe de la  $\mu$ -synthèse est exposé.

## 2.6.1 Traitement des incertitudes

### 2.6.1.1 Présentation du système initial

Dans tout ce chapitre, on s'intéressera au système différentiel général, correspondant à un système automatique avec contrôle actif, écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B_1u_1 + B_2u_2 \\ Y_1 = C_1X + D_{11}u_1 + D_{12}u_2 \\ Y_2 = C_2X + D_{21}u_1 + D_{22}u_2 \end{cases} \quad (2.79)$$

Ce système sera alors représenté par la matrice :

$$\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Les variables apparaissant dans ce système sont définies comme suit :

- $X$  : vecteur d'état du système ;
- $u_1$  : vecteur de contrôle ;
- $u_2$  : vecteur de perturbation (entrée extérieure) ;
- $Y_1$  : vecteur de sorties pour l'établissement du contrôle ;
- $Y_2$  : vecteur d'observation.

Le système actif peut alors être représenté par un diagramme tel qu'illustré sur la figure 2.51.

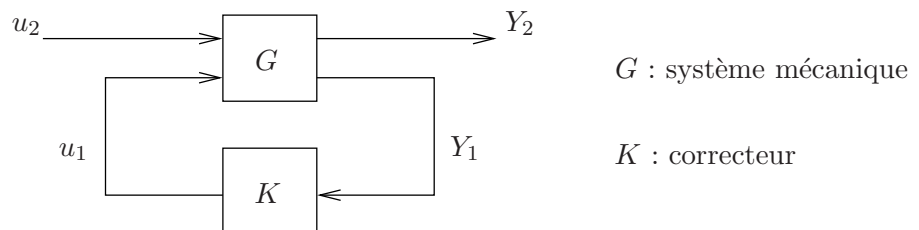


FIG. 2.51 – Système actif

Les incertitudes susceptibles d'apparaître au sein d'un tel système peuvent alors être divisées en deux groupes : les incertitudes structurées et les incertitudes non-structurées. Dans la suite, chacune de ces deux catégories est présentée.

### 2.6.1.2 Les incertitudes non structurées

Les incertitudes non structurées représentent généralement des éléments variant en fonction de la fréquence. On peut citer à ce titre les modes de système continu non pris en compte dans le modèle ou encore les saturations des actionneurs et des transducteurs de puissance. L'appellation "incertitudes non structurées" signifie qu'elles sont indépendantes de la structure

du modèle, dans le sens où elles sont caractérisées par une condition de gain (un majorant). C'est pourquoi l'approche fréquentielle apparaît la mieux adaptée à la représentation de ce type d'incertitudes.

D'un point de vue algébrique, ces incertitudes peuvent être représentées soit sous forme additive, soit sous forme multiplicative. On note  $G$  le processus initial,  $\tilde{G}$  celui avec incertitudes. Ces deux types d'incertitudes non structurées sont représentés sur les figures 2.52 et 2.53.

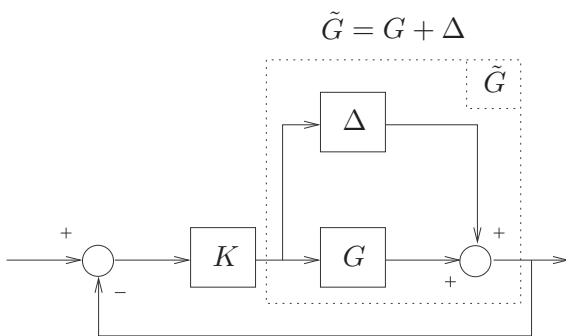


FIG. 2.52 – Forme additive

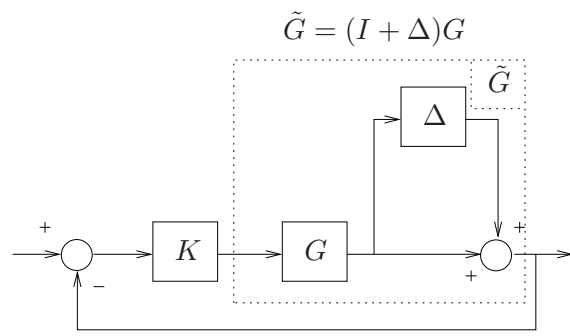


FIG. 2.53 – Forme multiplicative

Ce type d'incertitude n'étant pas celui qui sera traité dans notre cas, on ne rentrera pas plus dans les détails le concernant.

### 2.6.1.3 Les incertitudes structurées

Les incertitudes structurées permettent de décrire concrètement les intervalles de variations relatifs à des constantes physiques. Elles représentent des variations paramétriques dans le système dynamique. On peut citer les incertitudes dans la représentation espace-état et donc les incertitudes dans le placement des pôles et des zéros, les incertitudes dans les gains et les phases. Elles traduisent une mauvaise connaissance des paramètres de masse, de raideur, d'amortissement ou encore de frottement. Ces incertitudes sont définies par un domaine dans l'espace paramétrique. Ces domaines ne sont pas toujours connus avec une très grande précision. De plus, le choix de la valeur des paramètres pour le modèle nominal reste un problème délicat souvent lié à l'identification paramétrique. Par conséquent pour décrire le modèle réel on décrit le système par une famille de modèles, définie comme un polytope autour du modèle nominal.

D'un point de vue algébrique, ces incertitudes peuvent être représentées à partir des schémas des figures 2.54 et 2.55, la première représentant le système nominal, tandis que la seconde introduit les incertitudes sous forme d'un bloc  $\Delta$ .

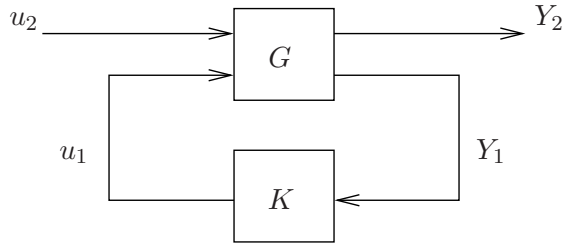


FIG. 2.54 – Système actif nominal

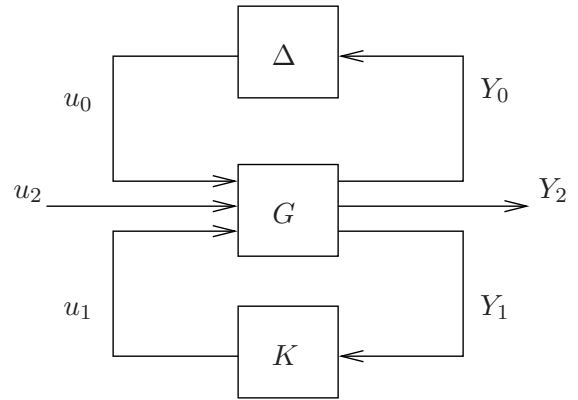


FIG. 2.55 – Système avec incertitudes structurées

Les équations différentielles associées au système actif avec incertitudes sont :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B_0u_0 + B_1u_1 + B_2u_2 \\ Y_0 = C_0X + D_{00}u_0 + D_{01}u_1 + D_{02}u_2 \\ Y_1 = C_1X + D_{10}u_0 + D_{11}u_1 + D_{12}u_2 \\ Y_2 = C_2X + D_{20}u_0 + D_{21}u_1 + D_{22}u_2 \end{cases} \quad (2.81)$$

avec de plus deux autres équations liées aux blocs  $K$  et  $\Delta$  :

- équation liée aux incertitudes :  $u_0 = \Delta Y_0$ , avec  $\Delta$  matrice d'incertitudes ;
- équation liée au contrôle :  $u_1 = KY_1$ .

La représentation du système contrôlé sous forme matricielle devient alors :

$$\begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & D_{00} & D_{01} & D_{02} \\ C_1 & D_{10} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{20} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

*Remarque* : il est préférable de rechercher le schéma sous la forme  $D_{01} = 0$ ,  $D_{02} = 0$ , de manière à limiter au maximum les participations de l'incertitude sur la seule variable  $Y_0 = D_{00}u_0$ .

#### 2.6.1.4 Conclusion

L'introduction d'incertitudes dans le schéma nominal entraîne une modification des équations et des schémas de représentation.

Cette nouvelle formulation peut être utilisée pour l'analyse de la stabilité de l'ensemble, une fois le contrôle défini pour un système nominal, ou être utilisée pour la synthèse d'un nouveau contrôleur, pour ce schéma modifié de représentation. La  $\mu$ -synthèse est une méthode particulièrement recommandée dans ces situations.

### 2.6.2 $\mu$ -synthèse

La  $\mu$ -synthèse est un outil permettant d'analyser la robustesse, aussi bien en terme de stabilité que de performance, d'un système soumis à des perturbations. Elle fait pour cela appel à la valeur singulière structurée  $\mu$ . On pourra trouver un certain nombre de travaux présentant la théorie de la  $\mu$ -synthèse, dont ceux de Packard *et al.* [60], Venini [74], Balas *et al.* [6] ou encore Markerink *et al.* [51].

On présente donc ici dans un premier temps cette valeur singulière structurée, puis les principes de calcul du contrôleur associé à la  $\mu$ -synthèse seront abordés. Toute cette théorie est présentée dans le cas d'incertitudes structurées.

#### 2.6.2.1 La valeur singulière structurée

Le but de la théorie de la valeur singulière structurée est la définition d'un critère de stabilité et de performance robuste. Pour cela, on va introduire un ensemble d'incertitudes  $\Delta$  très général sous la forme :

$$\Delta = \{\text{diag} [\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F]\} \quad (2.83)$$

où les  $\delta_i$  sont des complexes et où les  $\Delta_j$  sont des matrices à coefficients complexes, de dimensions  $m_j$ . L'ensemble  $\Delta$  contient donc des matrices définies par blocs, le premier de ces blocs étant diagonal. Cette forme générale permet de regrouper la totalité des incertitudes structurées.

On notera  $B_\Delta$  l'ensemble des matrices  $\Delta$  appartenant à  $\Delta$  et satisfaisant l'inégalité  $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ , où  $\bar{\sigma}(\cdot)$  représente la plus grande valeur singulière d'une matrice.

$$B_\Delta = \{\Delta \in \Delta : \bar{\sigma} \leq 1\} \quad (2.84)$$

Par définition, la valeur singulière structurée associée à la structure  $\Delta$ , notée  $\mu_\Delta$ , se calcule par :

$$\mu_\Delta(M) = \frac{1}{\min_{\Delta \in \Delta} \{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M\Delta) = 0\}} \quad (2.85)$$

avec  $\mu_\Delta = 0$  si  $I - M\Delta$  est non singulière pour tout  $\Delta \in \Delta$ . Une interprétation physique de  $\mu_\Delta$  peut être obtenue au travers de la figure 2.56.

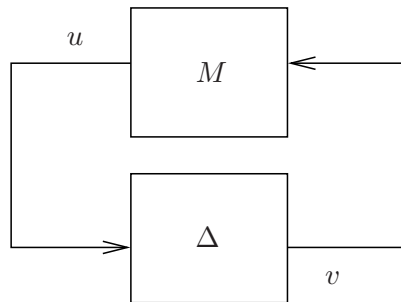


FIG. 2.56 – Système bouclé

On peut aisément constater par une interprétation de cette figure qu'une condition pour l'existence de solutions non triviales est :  $\det(I - M\Delta) = 0$ .  $\mu_{\Delta}$  peut ainsi être interprété comme une mesure du plus petit  $\Delta$  causant l'instabilité du système.

On peut de plus établir l'encadrement suivant :

$$\rho(M) \leq \mu_{\Delta} \leq \bar{\sigma}(M) \quad (2.86)$$

où  $\rho(\cdot)$  désigne le rayon spectral et  $\bar{\sigma}(\cdot)$  la plus grande valeur singulière. Cet encadrement sera particulièrement intéressant pour la suite des opérations concernant la  $\mu$ -synthèse.

### 2.6.2.2 Encadrement de $\mu$

On vient de voir (équation 2.86) que  $\mu$  peut être encadré par  $\rho(M)$  et  $\bar{\sigma}(M)$ . Toutefois, cet encadrement peut s'avérer très large en pratique et ne permet donc pas d'avoir une valeur précise de  $\mu$  qui est en lui-même particulièrement difficile à calculer. On va donc chercher à "resserrer" cet encadrement, de façon à pouvoir évaluer un ordre de grandeur pour  $\mu$ . On introduit pour cela deux ensembles supplémentaires  $Q_{\Delta}$  et  $D_{\Delta}$  définis par :

$$Q_{\Delta} = \{Q \in \Delta : Q^*Q = I_n\} \quad (2.87)$$

$$D_{\Delta} = \{diag [D_1, \dots, D_S, d_1 I_{m_1}, \dots, d_{F-1} I_{m_{F-1}}, I_{m_F}] : D_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j \in \mathbf{R}^+\} \quad (2.88)$$

où l'étoile correspond au conjugué de la transposée.

Les éléments des ensembles  $Q_{\Delta}$  et  $D_{\Delta}$  présentent la caractéristique suivante :

$$\mu_{\Delta}(M) = \mu_{\Delta}(MU) = \mu_{\Delta}(UM) = \mu_{\Delta}(DMD^{-1}) \quad (2.89)$$

ce qui permet de réécrire l'encadrement 2.86 comme suit :

$$\max_{Q \in Q_{\Delta}} \rho(QM) \leq \mu_{\Delta} \leq \inf_{D \in D_{\Delta}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (2.90)$$

La borne inférieure peut être considérée comme une égalité, mais s'avère difficile à calculer, car la fonction  $\rho(QM)$  présente de nombreux minima locaux qui entraînent des problèmes dans les techniques d'optimisation.

Par contre, la borne supérieure peut être trouvée en résolvant un problème convexe qui devrait conduire à une unique solution. Toutefois, on a ici peu de chances d'obtenir une égalité, et on devra en général se contenter de l'inégalité écrite précédemment. Une condition suffisante pour avoir égalité est que  $2S + F > 3$  ( $S$  et  $F$  représentant les nombres de blocs de chaque nature apparaissant dans la définition de l'ensemble  $D_{\Delta}$ ). On pourra trouver davantage de détails concernant le calcul de la valeur singulière structurée dans [59].

### 2.6.2.3 Principe de la $\mu$ -synthèse

Nous allons maintenant présenter l'intérêt de  $\mu$  dans la détermination de la stabilité et de la performance robuste d'un système. On revient donc à l'étude du système de la figure

2.55. Dans ce système, le but de la  $\mu$ -synthèse est de déterminer le contrôleur  $K$  permettant d'assurer la stabilité du système en présence des incertitudes introduites par le bloc  $\Delta$ .

Tout d'abord, concernant la stabilité robuste,  $\frac{1}{\max_{\omega} \mu_{\Delta}(M(j\omega))}$  peut être considéré comme une marge de stabilité du système en boucle fermée vis à vis de l'ensemble  $\Delta$ , d'où l'intérêt de minimiser la valeur du maximum.

Concernant la performance robuste, définie comme le fait que le système respecte des performances minimales quelque soit l'incertitude considérée, elle va être vérifiée en se ramenant à un test de stabilité robuste vis à vis de la matrice de perturbation augmentée  $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_F \end{bmatrix}$  du système associé tel que représenté sur la figure 2.57.

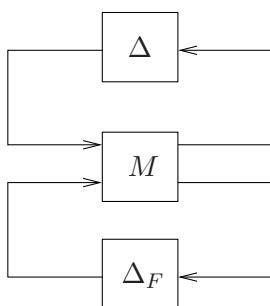


FIG. 2.57 – Robustesse en performance

Le principe de résolution est alors une méthode itérative. Cette méthode, appelée méthode des itérations D-K, consiste à fixer alternativement  $D$  et  $K$  et à résoudre un problème d'optimisation sur l'autre variable. Ces itérations sont conduites jusqu'à l'obtention d'un  $K$  pour lequel  $\mu < 1$ . En effet, une valeur de  $\mu$  inférieure à 1 permet d'assurer la stabilité robuste du système (c'est à dire en présence d'incertitudes).

### 2.6.3 Conclusion

Contrairement à la majeure partie des contrôleurs "classiques", la  $\mu$ -synthèse permet de contrôler à la fois la stabilité et la performance robuste d'un système. On dispose donc d'un outil mathématique permettant de déterminer un contrôleur actif dans le but de rendre un système fiable et performant même en présence d'incertitudes. La potentialité d'une telle méthode en vue du contrôle de bâtiments en zone sismique est particulièrement intéressante.

## 2.7 Conclusion

Le béton armé est donc un matériau dont l'endommagement est particulièrement difficile à gérer. En effet, son comportement s'avère fortement non-linéaire. Cette non-linéarité a ici été prise en compte sous la forme d'un système linéaire à paramètres incertains. Au final, cette technique a permis d'obtenir une enveloppe du dommage. Toutefois, il apparaît que pour mener



une analyse robuste de cet endommagement, il est indispensable de maîtriser les incertitudes à prendre en compte lors de la modélisation du système.

De façon à disposer d'un outil permettant de définir l'incertitude sur l'excitation, on propose dans les chapitres qui suivent une modélisation globale du tremblement de terre, sous la forme de modèles simplifiés sur lesquels il sera relativement facile d'introduire les incertitudes.



## Chapitre 3

# La source des tremblements de terre : le mécanisme au foyer

Dans cette partie, on va s'intéresser à la naissance des tremblements de terre, c'est à dire au mécanisme conduisant à l'apparition d'un mouvement au niveau du foyer. En effet, la source d'excitation responsable des tremblements de terre est liée aux frottements des plaques tectoniques qui couissent les unes contre les autres du fait de la dérive des continents. Le foyer correspond alors à l'endroit où le glissement apparaît de façon brutale. Pour comprendre plus précisément ce qui se passe au niveau du foyer lors d'un séisme, il convient donc d'étudier les instabilités apparaissant entre deux solides élastiques en contact avec frottement. En effet, les plaques tectoniques seront ici, dans un premier temps, assimilées à des solides élastiques. C'est pourquoi on va chercher à développer un modèle simplifié de la zone de contact permettant de représenter les différents phénomènes liés au frottement. Pour cela, les différentes sources d'instabilité, qui seront qualifiées de stick-slip et de sprag-slip, sont mises en évidence, puis le modèle est progressivement construit. Dans un premier temps, quelques modèles existants, basés sur le phénomène de stick-slip, sont passés en revue, puis le phénomène de sprag-slip est introduit. On aboutira ainsi au modèle baptisé *modèle 3S* pour les différents types d'instabilité qu'il reproduit : stick-sprag-slip.

### 3.1 Ordres de grandeur

Lorsque l'on parle de la zone de foyer d'un tremblement de terre, il n'est pas toujours facile d'avoir en tête les ordres de grandeur à prendre en compte. C'est pourquoi nous commençons ici par rappeler certains d'entre eux.

#### Profondeur du foyer

Les foyers des séismes peuvent être localisés à des profondeurs très variables. On distingue toutefois en général trois grands types de séismes :

- les séismes de foyer superficiel : hypocentre jusqu'à 60 km de profondeur ; on les retrouve autant aux frontières divergentes qu'aux frontières convergentes
- les séismes de foyer intermédiaire : entre 60 et 300 km ; on les retrouve uniquement au voisinage des limites convergentes

- les séismes de foyer profond : au dessous de 300 km ; on les retrouve exclusivement au voisinage des limites convergentes

Dans notre cas, nous nous intéresserons plus particulièrement aux séismes superficiels, qui sont les plus dévastateurs en termes de dommages causés aux structures.

### Surface de rupture

D’après les relevés effectués suite à des tremblements de terre réels, une relation statistique a pu être établie entre la surface de rupture et la magnitude d’un séisme. Cette relation est non linéaire, et le tableau 3.1 en donne quelques ordres de grandeur.

Magnitude	Surface de rupture
3	0.1 km <sup>2</sup>
6	100 km <sup>2</sup>
9	20000 km <sup>2</sup>

TAB. 3.1 – Ordres de grandeur entre surface de rupture et magnitude

On retrouve cette différence d’échelle au niveau du glissement moyen observé sur la surface de rupture (tableau 3.2).

Magnitude	Glissement
3	0.002 m
6	0.2 m
9	15 m

TAB. 3.2 – Ordres de grandeur entre glissement et magnitude

## 3.2 Phénomène de stick-slip : les modèles classiques

### 3.2.1 Le stick-slip

Le phénomène de stick-slip (littéralement “collé-glissé”) a été utilisé dès 1955 pour expliquer les vibrations dans les systèmes frottants (travaux de Sinclair [70]). Le stick-slip peut être étudié à partir d’un simple système à un degré de liberté, composé d’une masse  $M$  soumise à une force normale  $N$ , et poussée par l’intermédiaire d’un ressort de raideur  $k$ , tel qu’illustré sur la figure 3.1(a). La masse  $M$  est posée sur une surface fixe, et le contact se fait avec frottement (coefficient de frottement  $\mu_f$ ). Lorsque l’on impose à déplacement à vitesse constante  $V$  à l’extrémité libre du ressort  $k$ , on observe alors un mouvement saccadé de la masse, avec des phases successives collées ou glissantes, tel que schématisé sur la figure 3.1(b).

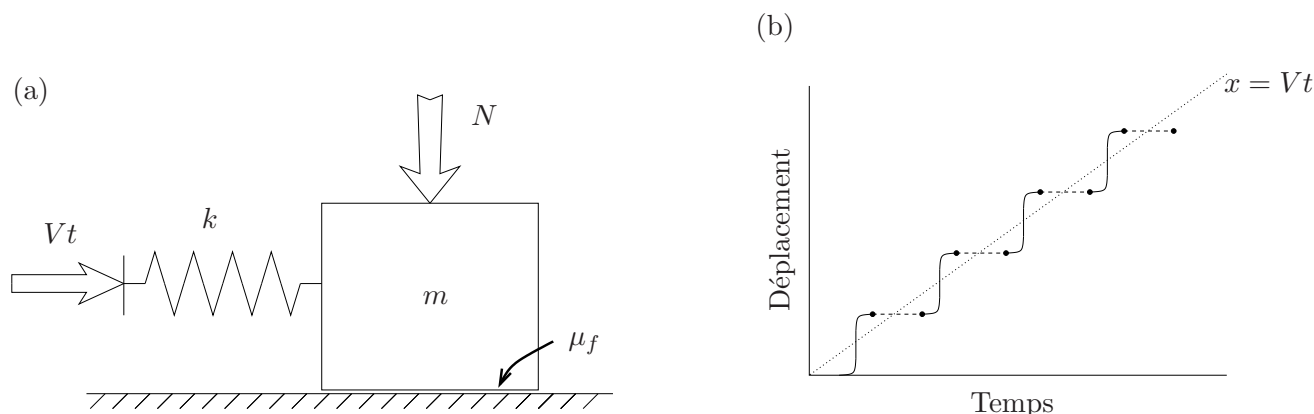


FIG. 3.1 – Modélisation du stick-slip

Cette dynamique saccadée est due aux variations du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement. Ainsi, diverses lois de frottement peuvent conduire à ce type de comportement. La plus simple consiste à supposer qu'il existe deux valeurs : un coefficient de frottement statique  $\mu_s$  et un coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$ , avec une discontinuité entre les deux (figure 3.2(a)). Des lois plus complexes donnent le coefficient de frottement  $\mu_f$  comme une fonction continue de la vitesse de glissement (figure 3.2(b)).

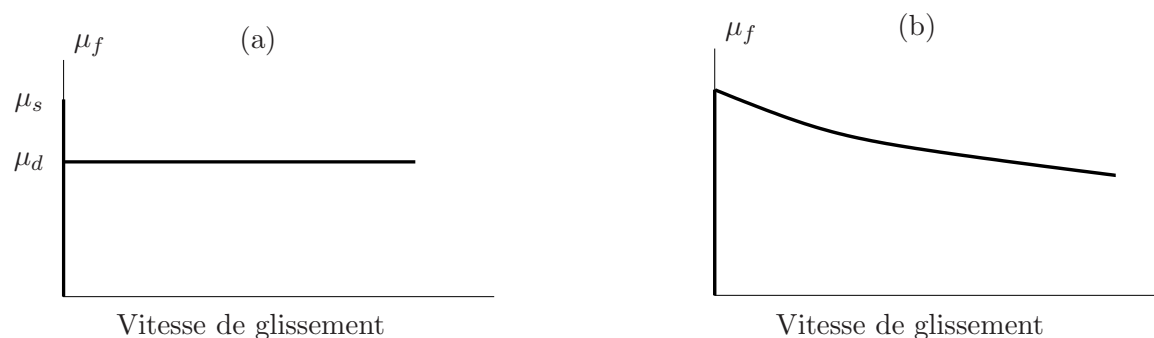


FIG. 3.2 – Exemples de lois de frottement

### 3.2.2 Le modèle de Burridge-Knopoff

Le modèle le plus classiquement utilisé pour représenter la source sismique est celui de Burridge-Knopoff. On peut ainsi trouver de nombreuses études sur le sujet : Galvanetto [37], Cochard *et al.* [25], Brun *et al.* [13], Akishin *et al.* [3], Hahner *et al.* [40], Knopoff *et al.* [46], Nakanishi [57] ou Jonsson *et al.* [43]. Des extensions du modèle, mono-dimensionnel dans sa forme initiale, ont aussi été proposées dans un cas bidimensionnel par Carlson [17], Ryabov *et al.* [66] ou encore Montagne [55]. Le modèle classique de Burridge-Knopoff est représenté sur la figure 3.3. Il est composé d'une chaîne de blocs de masse  $m$  couplés par des ressorts  $k_c$  et reliés à une surface se déplaçant à la vitesse  $V$  par les ressorts  $k_p$ , les raideurs  $k_c$  et  $k_p$  correspondant respectivement au comportement en compression et en cisaillement de la faille.

Ces blocs sont par ailleurs en contact avec frottement sur une surface fixe.

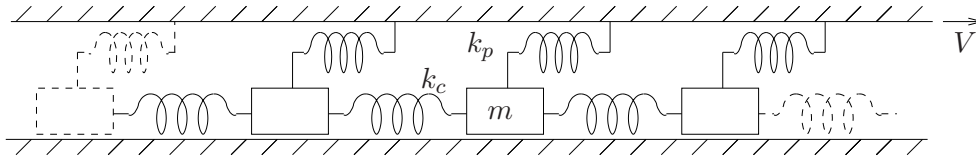


FIG. 3.3 – Modèle de Burridge-Knopoff

Pour chacune des masses, les équations d'équilibre s'écrivent (en notant  $x_n$  le déplacement de la masse  $n$ ) :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_n + k_c(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) + k_p(x_n - Vt) &= F_T \\ F_N &= mg \\ F_T &= \mu_f F_N \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $F_T$  et  $F_N$  représentent respectivement les composantes horizontale et verticale de la réaction de la surface inférieure, et  $\mu_f$  désigne le coefficient de frottement.

La source d'instabilité de ce modèle est introduite par la loi de frottement entre les blocs et la surface fixe : le coefficient de frottement décroît lorsque la vitesse augmente, d'une valeur  $\mu_d$  pour le coefficient de frottement statique à une valeur  $\mu_s$  pour une vitesse de glissement infinie [63] (figure 3.4). Les blocs passent ainsi successivement par des états collés et glissants : il s'agit du phénomène de *stick-slip* présenté précédemment.

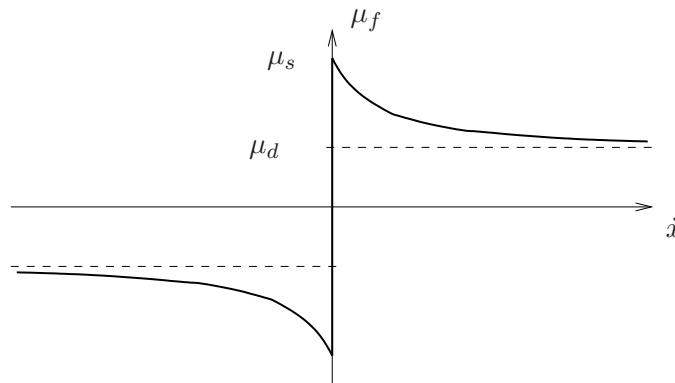


FIG. 3.4 – Loi de frottement utilisée dans le modèle de Burridge-Knopoff

Le modèle de Burridge-Knopokk, bien que d'apparence très simple, laisse apparaître un comportement complexe chaotique. Ainsi, si on considère le système au repos, c'est à dire de façon à ce que les ressorts ne transmettent aucun effort et que l'on écarte les masses de cette position d'équilibre très légèrement, mais aléatoirement, le comportement dynamique du système lors du glissement des différentes masses va engendrer des distributions de contraintes croissantes, comme on peut le voir sur la figure 3.5.

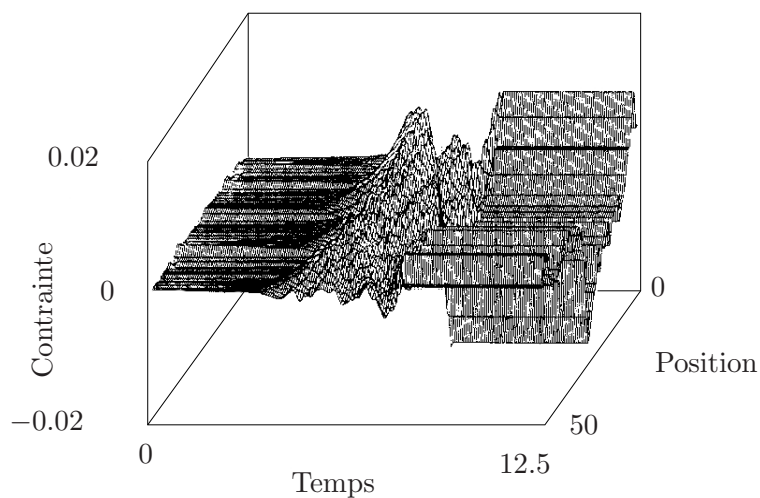


FIG. 3.5 – Caractère chaotique du modèle de Burridge-Knopoff

Ce modèle permet de retrouver la distribution statistique de la loi de Gutenberg-Richter, selon laquelle la fréquence  $F$  des tremblements de terre décroît exponentiellement avec la magnitude  $M$  :

$$F = \alpha e^{-M} \quad (3.2)$$

La figure 3.6 illustre cette loi pour une statistique effectuée à partir d'enregistrements réels. Toutefois, la version la plus simple du modèle fait apparaître un excès de grands événements, comme l'ont montré Carlson et Langer [18]. Une version modifiée de ce modèle a alors été proposée par de Sousa Vieira [27], permettant un meilleur respect de la loi de Gutenberg-Richter. Une étude de cette loi statistique liée au phénomène de stick-slip est aussi proposée par Chakrabarti [20].

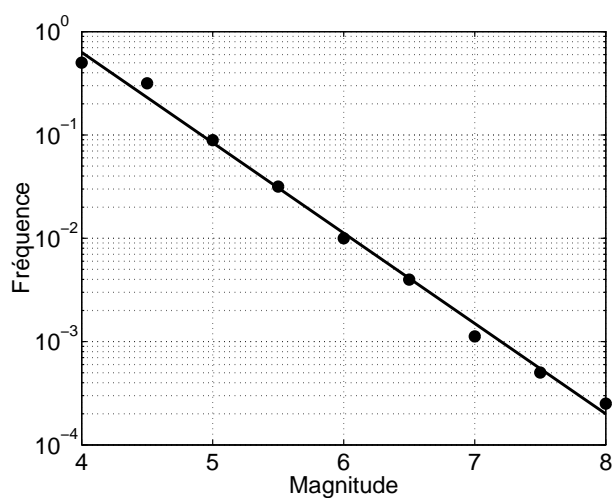


FIG. 3.6 – Illustration de la loi de Gutenberg-Richter

A la fois classique d'utilisation (donc validé) et particulièrement simple (donc peu gourmand en termes de coûts de calcul), le modèle de Burridge-Knopoff a déjà prouvé sa représentativité des caractéristiques statistiques des séismes. Toutefois, il ne permet pas de reproduire tous les phénomènes d'un tremblement de terre réel, et en particulier les phénomènes de répliques. Par ailleurs, ce modèle ignore le comportement volumique du sol et se limite à un comportement surfacique. Le modèle qui sera développé par la suite tentera d'apporter des améliorations à ce modèle en essayant d'en garder au maximum la simplicité.

### 3.2.3 Les modèles analytiques

Une autre modélisation intéressante de l'interface entre deux couches tectoniques représentant une faille consiste en un modèle analytique. Une telle modélisation présente l'avantage de ne pas faire intervenir de discrétisation de l'espace et limite donc le risque d'erreur à ce niveau. Par contre, une modélisation analytique ne peut se faire raisonnablement qu'en introduisant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices dans le système.

Ainsi, par exemple, Campillo *et al.* [16] comparent le comportement de deux systèmes plus ou moins représentatifs d'une interface entre deux plaques tectoniques (fig. 3.7) : un bloc rigide en contact avec frottement avec une fondation rigide et soumis à une force de traction via un ressort de raideur  $K$  (modèle classique servant de base au modèle de Burridge-Knopoff) et un milieu élastique (borné par les plans  $y = 0$  et  $y = h$ ) sur lequel un développement analytique est mené. Plus précisément, cette plaque élastique est en contact avec frottement en  $y = 0$  avec une surface rigide et subit un déplacement imposé à vitesse constante au niveau de la surface en  $y = h$ . L'hypothèse simplificatrice permettant la résolution analytique du problème dynamique consiste à dire que le déplacement dans la direction  $y$  est constant et égal à  $v(x, y, t) = -Ny/(\lambda + 2\mu)$ , où  $N$  est l'effort normal appliqué sur la surface supérieure de la plaque.

Deux cas de figure sont alors étudiés :

- le coefficient de frottement  $\mu_f$  dépend du déplacement au niveau de la surface de contact (fig. 3.8 (1)) ;
- le coefficient de frottement  $\mu_f$  dépend de la vitesse de glissement (fig. 3.8 (2)).

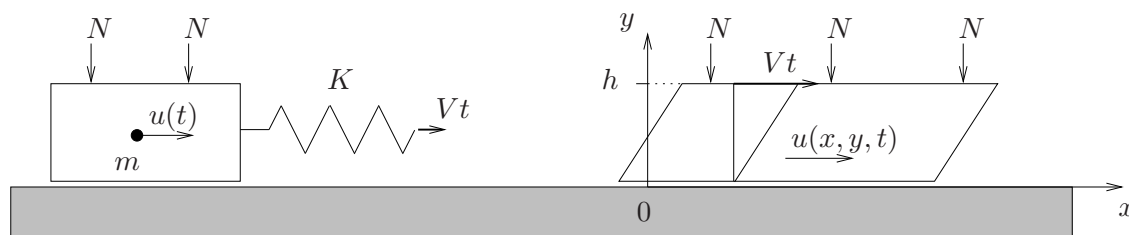


FIG. 3.7 – Description des deux systèmes



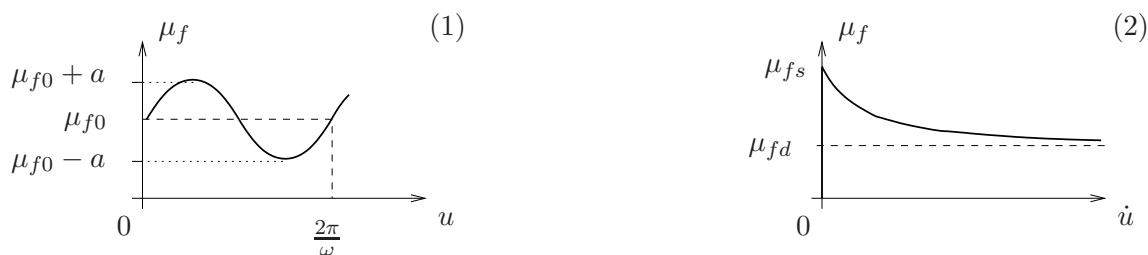


FIG. 3.8 – Coefficient de frottement dépendant du déplacement (1) ou de la vitesse (2)

Ces deux systèmes, particulièrement simples, présentent des comportements dynamiques très divers. En effet, dans le cas du frottement dépendant de la distance de glissement, le bloc rigide glisse d'un coup, lorsque la contrainte de cisaillement dépasse un certain seuil, alors que la plaque élastique se déplace par saccades, le mouvement se décomposant en une succession de phases collées et glissantes. Cette différence significative de comportement est due au rôle important joué par l'inertie de la masse concentrée du bloc rigide. Dans le cas du frottement dépendant de la vitesse de glissement, un autre problème apparaît : en effet, dans ce cas, le problème dynamique ne présente pas une solution unique. Ce problème apparaît par ailleurs également dans le modèle de Burridge-Knopoff présenté précédemment, lié alors à la discrétisation du système.

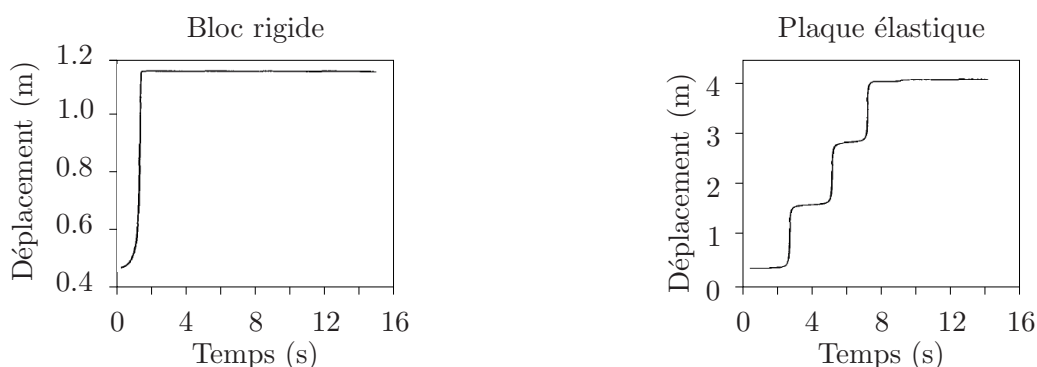


FIG. 3.9 – Comparaison des résultats dans le cas du frottement dépendant du glissement (Campillo *et al.* [16])

Les modèles analytiques sont donc limités par les hypothèses simplificatrices qu'ils imposent, mais ils permettent néanmoins d'illustrer la complexité des phénomènes liés à l'initiation des tremblements de terre.

### 3.2.4 Les modèles éléments finis

Pour combler certaines lacunes des modèles précédemment présentés, des modèles éléments finis plus ou moins fins des couches de sol peuvent être construits. De cette façon, le comportement volumique du sol pourra être pris en compte (lacune du modèle de Burridge-Knopoff),

et le ombre d'hypothèses simplificatrices pourra être limité (inconvéniement des modèles analytiques). Toutefois, ces modèles peuvent être plus ou moins complexes, du fait qu'ils peuvent être bidimensionnels ou tridimensionnels [1]. Nous allons ici nous limiter à l'étude d'un modèle éléments finis en 2D, tel que présenté par Doz et Riera [33].

Le système considéré est un bloc rectangulaire élastique et homogène, reposant sur un plan parfaitement rigide (fig. 3.10). Le contact se fait avec frottement, et on supposera que ce frottement respecte la loi de Coulomb (coefficient de frottement diminuant avec la vitesse relative des deux interfaces). Les faces supérieure et latérales sont libres excepté pour un noeud sur la face gauche où le déplacement est imposé. Ces conditions aux limites sont supposées être proches de la réalité des plaques tectoniques. En effet, les plaques glissent à une vitesse plus ou moins constante et, en un point donné, le déplacement est imposé par la masse environnante.

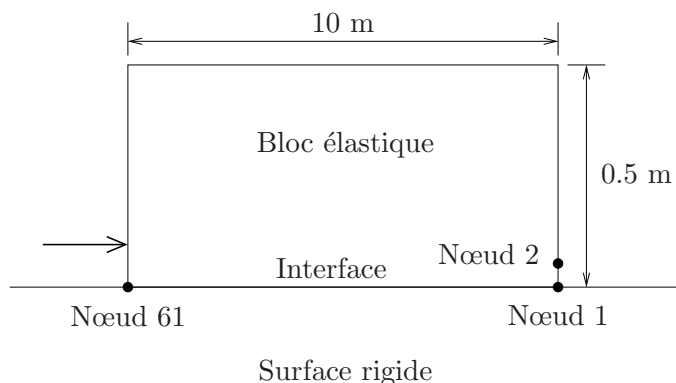


FIG. 3.10 – Bloc élastique homogène frottant soumis à un déplacement imposé

Ce modèle permet de voir assez fidèlement ce qui se passe au niveau d'une interface frottante entre un milieu élastique et un milieu rigide. La figure 3.11 représente l'évolution de la contrainte de cisaillement totale au niveau de l'interface. On peut voir que dans un premier temps, cette contrainte augmente de façon relativement régulière (on suppose qu'à l'instant initial, les contraintes sont nulles), jusqu'à atteindre un certain seuil. A partir de là, la contrainte chute, ce qui correspond à une phase de glissement. La deuxième phase du mouvement se fait avec une succession de phases collées et glissantes, correspondant au phénomène de stick-slip.

Les modèles éléments finis présentent donc un apport supplémentaire par rapport au modèle de Burridge-Knopoff de par la prise en compte du comportement volumique du système. Toutefois, leur utilisation s'avère difficile car ils génèrent très rapidement des coûts de calcul prohibitifs. En effet, la taille des mailles imposée par les caractéristiques mécaniques du matériau et les dimensions à prendre en compte dans notre application aux plaques tectoniques impliquent un nombre de degrés de liberté particulièrement important.

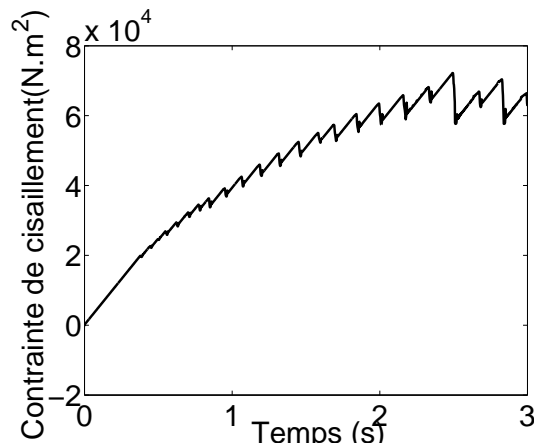


FIG. 3.11 – Evolution temporelle de la contrainte de cisaillement

### 3.3 Phénomène de sprag-slip : présentation

Dans tout ce qui précède, la seule instabilité mise en évidence dans les systèmes frottants était le phénomène de stick-slip se traduisant par des phases successives d'états collés et glissants. Dans cette partie, un nouveau phénomène est introduit : le sprag-slip. La théorie du sprag-slip, introduite par Spurr [72] sur les systèmes de freinage, considère les paramètres géométriques du système comme la source de l'instabilité. Il s'agit d'un couplage entre les modes verticaux et horizontaux de la structure, ce qui implique qu'il ne peut apparaître que pour des systèmes possédant au moins deux degrés de liberté non colinéaires. La différence majeure avec le stick-slip qui est dû à une chute du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement est que le sprag-slip se manifeste pour un coefficient de frottement constant.

La théorie du sprag-slip peut être illustrée par le mécanisme de la figure 3.12 : on considère une barre rigide  $O'P$  pouvant pivoter autour du point  $O'$  et en contact avec une surface mobile  $AB$  (figure 3.12(a)). On peut établir que :

$$F = \frac{\mu_f L}{1 - \mu_f \tan \theta}$$

où  $L$  est la charge au point  $P$  et  $\mu_f$  est le coefficient de frottement, de telle sorte que quand  $\mu_f = \cot \theta$ ,  $F$  devient infinie. Si on ajoute une barre  $O'O''$  rigide (figure 3.12(b)),  $P$  peut se déplacer élastiquement dans la direction du mouvement et  $\theta'$  augmente jusqu'à ce que  $\cot \theta = \mu_f$  : période de *sprag*. Il en résulte alors une chute de la force de frottement  $F$  : période de *slip* p.

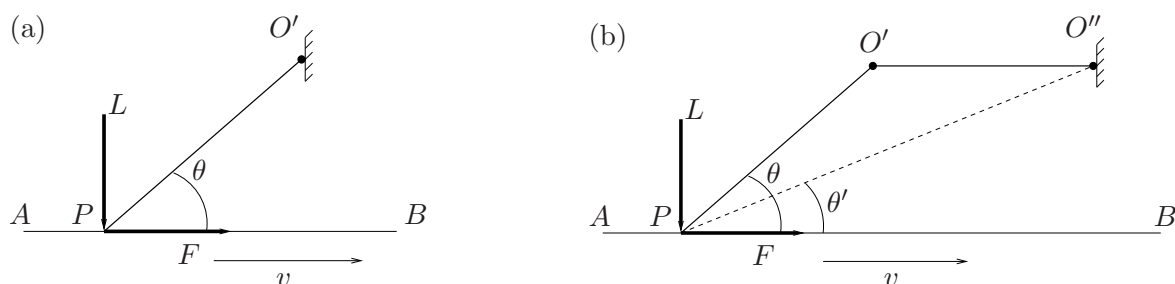


FIG. 3.12 – Schéma de principe du sprag-slip

Ces instabilités ont déjà été étudiées au laboratoire LTDS dans le cadre de l'application aux systèmes de freinage (travaux de Chambrette [21] et de Sinou [71]). Ces travaux sont repris ici dans le cadre d'une application aux plaques tectoniques.

### 3.4 Modèle analytique de glissement de deux couches superposées

Le but est ici de déterminer quelles sont les ondes susceptibles de se propager à l'interface entre deux couches de matériau en contact avec frottement. Ce modèle peut être considéré comme correspondant au frottement des plaques tectoniques lorsque le glissement est initié.

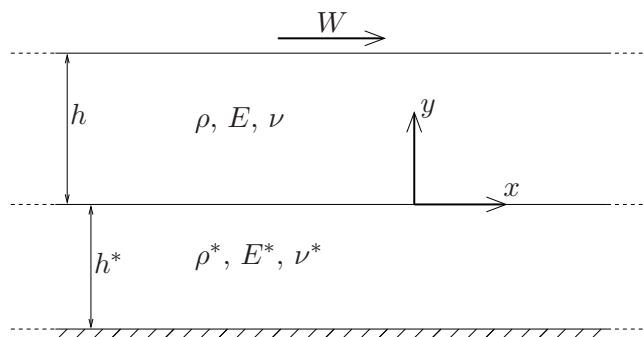


FIG. 3.13 – Glissement de deux couches élastiques en contact

#### 3.4.1 Modélisation

Ce type de modèle est repris de Moirot [54] et Martins [52]. On considère deux couches élastiques de longueur infinie suivant les directions  $x$  et  $z$  et respectivement d'épaisseur  $h$  et  $h^*$  (dans toute la suite, les variables étoilées correspondent à des grandeurs relatives à la couche inférieure - cf. fig. 3.13). La couche supérieure est entraînée à la vitesse  $W$  constante et pressée sur la couche inférieure qui est encastree à sa base. On fait l'hypothèse de déformations planes. L'interface entre les deux couches est régie par une loi de contact unilatéral avec frottement de Coulomb (coefficient de frottement  $\mu_f$ ), et on suppose qu'il y a glissement permanent. Cette hypothèse, bien que non réaliste physiquement sur un grand laps de temps dans le cas des

plaques tectoniques, permet de visualiser ce qui se passe lorsque le glissement est initié.

Pour la couche supérieure, on choisit d'écrire l'équation de propagation dans le repère fixe :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \rho \left( W^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2W \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \quad (3.3)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \rho \left( W^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2W \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \quad (3.4)$$

et pour la couche inférieure, on a des formules analogues en prenant  $W = 0$ .

On a de plus les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u(x, h, t) &= 0 & u^*(x, -h^*, t) &= 0 \\ v(x, h, t) &= \delta \leq 0 & v^*(x, -h^*, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Concernant la gestion de l'interface entre les deux couches, on sépare les conditions en deux catégories :

- contact unilatéral :

- frottement de Coulomb :

$$\begin{aligned} v(x, 0, t) &\geq v^*(x, 0, t) & s &= \frac{\partial u^*}{\partial t} - W \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} \\ \sigma_{yy}(x, 0, t) &= \sigma_{yy}^*(x, 0, t) \leq 0 & |\sigma_{xy}^*(x, 0, t)| &\leq \mu_f \sigma_{yy}^*(x, 0, t) \\ (v(x, 0, t) - v^*(x, 0, t)) \sigma_{yy}(x, 0, t) &= 0 & \sigma_{xy}^*(x, 0, t) s + \mu_f \sigma_{yy}^*(x, 0, t) |s| &= 0 \\ & & \sigma_{xy}(x, 0, t) &= \sigma_{xy}^*(x, 0, t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

On définit les vitesses de propagation suivantes (correspondant respectivement aux vitesses de propagation des ondes de traction-compression et de cisaillement) :

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.7)$$

On s'intéresse alors aux valeurs et modes propres généralisés du problème linéaire obtenu en imposant à l'interface le contact et le glissement. De plus, pour pouvoir faire un calcul analytique en conservant l'hypothèse de longueur infinie suivant  $x$ , on recherche des modes périodiques de période  $1/k$  en  $x$ .

On peut ainsi écrire la solution recherchée sous la forme :

$$\underline{u}(x, y, t) = e^{2i\pi k(x-ct)} \underline{u}(y) \quad (3.8)$$

$$\underline{u}^*(x, y, t) = e^{2i\pi k(x-ct)} \underline{u}^*(y) \quad (3.9)$$

On montre très simplement que les solutions du système d'équations différentielles sont de la forme :

$$\begin{aligned} u(y) &= P^+ e^{2ik\pi y} + P^- e^{-2ik\pi y} - q (Q^+ e^{2ik\pi y} - Q^- e^{-2ik\pi y}) \\ v(y) &= p (P^+ e^{2ik\pi y} - P^- e^{-2ik\pi y}) + Q^+ e^{2ik\pi y} + Q^- e^{-2ik\pi y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

avec :

$$p = \frac{\sqrt{(c-W)^2 - c_P^2}}{c_P} \quad q = \frac{\sqrt{(c-W)^2 - c_S^2}}{c_S} \quad (3.11)$$

Et on a des formules analogues pour  $u^*$  et  $v^*$  avec :

$$p^* = \frac{\sqrt{c^2 - c_P^{*2}}}{c_P^*} \quad q^* = \frac{\sqrt{c^2 - c_S^{*2}}}{c_S^*} \quad (3.12)$$

En choisissant  $p$ ,  $q$ ,  $p^*$  et  $q^*$  à partie imaginaire strictement positive, et en considérant deux couches d'épaisseur infinie, les conditions aux limites s'écrivent sous la forme :

$$\left. \begin{array}{l} u(h) = 0 \\ v(h) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow P^- = Q^- = 0 \quad \left. \begin{array}{l} u^*(-h^*) = 0 \\ v^*(-h^*) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow P^{+*} = Q^{+*} = 0 \quad (3.13)$$

et :

$$\begin{array}{ll} v(0) = v^*(0) & \Leftrightarrow pP^+ + Q^+ = -p^*P^{-*} + Q^{-*} \\ \sigma_{xy}(0) = -\mu_f \sigma_{yy}(0) & \Leftrightarrow 2pP^+ + (1 - q^2)Q^+ = -\mu_f ((q^2 - 1)P^+ + 2qQ^+) \\ \sigma_{xy}(0) = \sigma_{xy}^*(0) & \Leftrightarrow \rho c_S^2 (2pP^+ + (1 - q^2)Q^+) = \rho^* c_S^{*2} (-2p^*P^{-*} + (1 - q^{*2})Q^{-*}) \\ \sigma_{yy}(0) = \sigma_{yy}^*(0) & \Leftrightarrow \rho c_S^2 ((q^2 - 1)P^+ + 2qQ^+) = \rho^* c_S^{*2} ((q^{*2} - 1)P^{-*} - 2q^*Q^{-*}) \end{array} \quad (3.14)$$

On recherche alors  $c$  annulant le déterminant de ce système.

On s'intéressera plus particulièrement au cas où la couche inférieure est infiniment rigide. Dans ce cas, il ne reste que  $P^+$  et  $Q^+$  comme inconnues et les conditions aux limites se réduisent à :

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{xy}(0) = -f \sigma_{yy}(0) \quad (3.15)$$

### 3.4.2 Résultats

- *Premier cas : 2 couches identiques d'épaisseur infinie et  $W = 0$*

Dans le cas de deux couches superposées d'épaisseur infinie sans déplacement relatif imposé, les ondes obtenues pouvant se propager à l'interface entre les deux couches sont les seules ondes de Rayleigh.

Ce résultat était prévisible, car il correspond à un déplacement identique (mais déphasé) pour chacune des deux couches en contact. Il est donc de plus indépendant du coefficient de frottement entre les deux couches.

- *Deuxième cas : 1 couche d'épaisseur infinie sur un plan rigide*

Dans le cas où on considère une couche élastique en glissement permanent sur un plan rigide, on obtient une onde se déplaçant sur l'interface à une vitesse dépendant des propriétés du matériau et du coefficient de frottement entre les deux entités (cf. fig. 3.14 et 3.15).

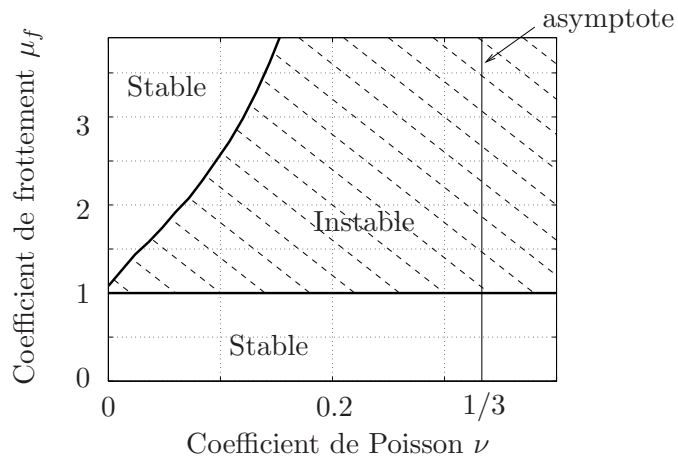


FIG. 3.14 – Influence de  $\mu_f$  et  $\nu$  sur la vitesse de propagation des ondes

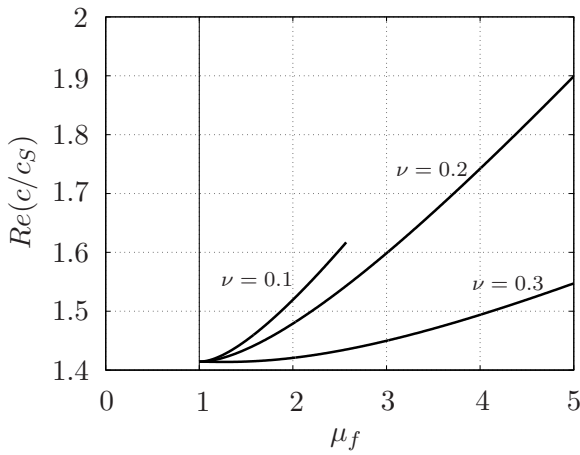


FIG. 3.15 – Variation de  $Re(c)$

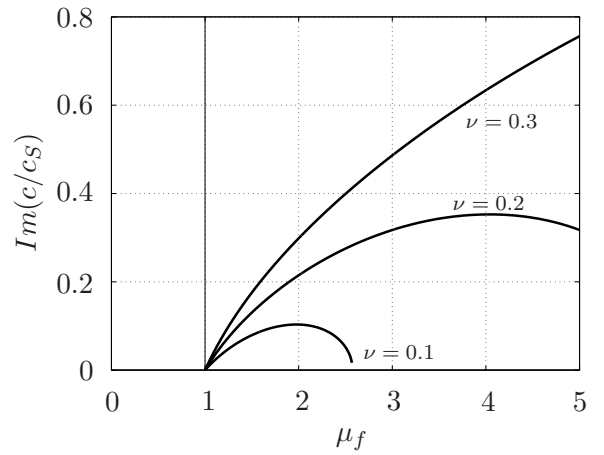


FIG. 3.16 – Variation de  $Im(c)$

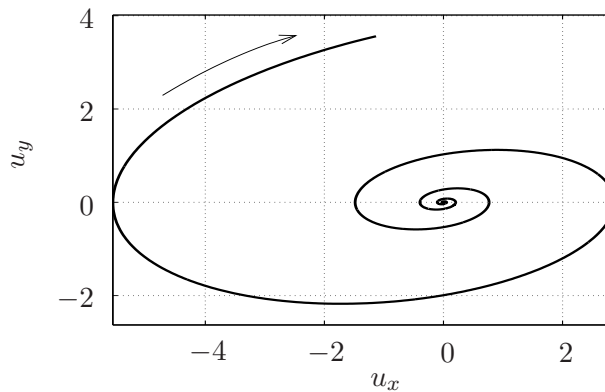


FIG. 3.17 – Orbite d'un point proche de la surface pour  $\nu = 0.3$  et  $\mu_f = 2$

Le résultat obtenu traduit un phénomène d'instabilité : l'orbite d'une particule proche de la surface de contact croît exponentiellement ( $Im(c) > 0$  - cf. fig. 3.16 et 3.17).

### 3.5 Modèle éléments-finis

Des phénomènes instables ayant été mis en évidence dans le cadre du modèle analytique étudié dans la partie précédente, nous allons cette fois voir si le même type d'instabilité apparaît dans le cas d'un modèle éléments-finis, ce qui validerait les résultats. On modélise pour cela deux "blocs" élastiques en contact avec frottement (cf. fig. 3.18).

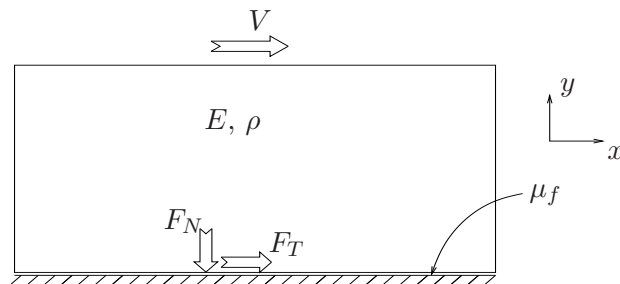


FIG. 3.18 – Modèle éléments-finis

Ce modèle correspond à la transcription du modèle analytique dans le cas d'une couche inférieure infiniment rigide. De façon à rester en accord avec les hypothèses prises pour le modèle analytique, on suppose que le bloc est en glissement permanent avec frottement (pas de recollement), le coefficient de frottement  $\mu_f$  étant pris constant, et qu'il n'y a pas de décollement (perte de contact). Toutefois, l'hypothèse de milieu infini selon l'axe  $x$  ne peut ici pas être reprise, on se limite donc à un bloc de largeur finie.

Plusieurs calculs sont menés pour différentes valeurs du coefficient de frottement  $\mu_f$ . Le but recherché est l'étude de la stabilité de la déformée du bloc liée au glissement permanent. On part donc de cet état d'équilibre en situation de glissement et on introduit une perturbation sous la forme d'une impulsion en force au centre de la zone de contact. On analyse alors les réponses temporelle et fréquentielle du système. On utilise ici un schéma d'intégration temporelle de type Newmark.

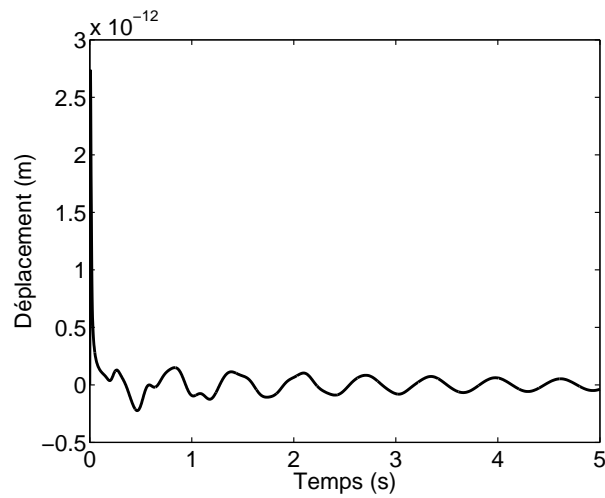
Compte tenu du sens de déplacement du bloc (cf. figure 3.18), la relation entre les forces normales  $F_N$  et tangentielles  $F_T$  au niveau de l'interface s'écrit :

$$F_T = -\mu_f F_N \quad (3.16)$$

- Coefficient de frottement  $\mu_f = 0.5$

La première simulation est effectuée en considérant un coefficient de frottement inférieur à 1, et ici pris égal à  $\mu_f = 0.5$ . La réponse temporelle correspondant au déplacement horizontal d'un point au centre de l'interface (point où l'impulsion perturbatrice est exercée) est illustrée sur la figure 3.19.

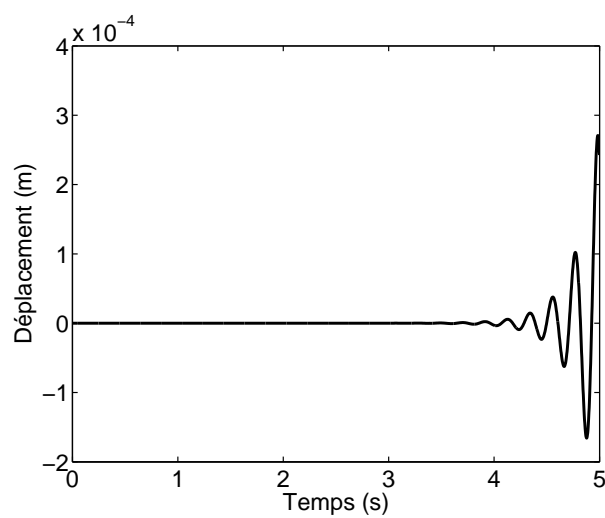


FIG. 3.19 – Déplacement pour  $\mu_f = 0.5$ 

On observe que les oscillations s'amortissent légèrement (amortissement interne faible (0,5%)). L'équilibre de départ semble donc stable.

- **Coefficient de frottement  $\mu_f = 2$**

On considère cette fois un coefficient de frottement supérieur à 1, et, plus précisément,  $\mu_f = 2$ . Dans ce cas, on a vu dans le modèle analytique que le système était instable. La réponse temporelle issue du modèle éléments-finis, présentée sur la figure 3.20, montre que l'instabilité apparaît, avec des oscillations d'amplitude croissant exponentiellement, ce qui correspond bien au résultat du modèle analytique.

FIG. 3.20 – Déplacement pour  $\mu_f = 2$

Si on s'intéresse à l'orbite des points sur la surface de contact (cf. fig. 3.21), on constate que, comme dans le résultat obtenu par le modèle analytique, elle décrit une spirale à croissance exponentielle.

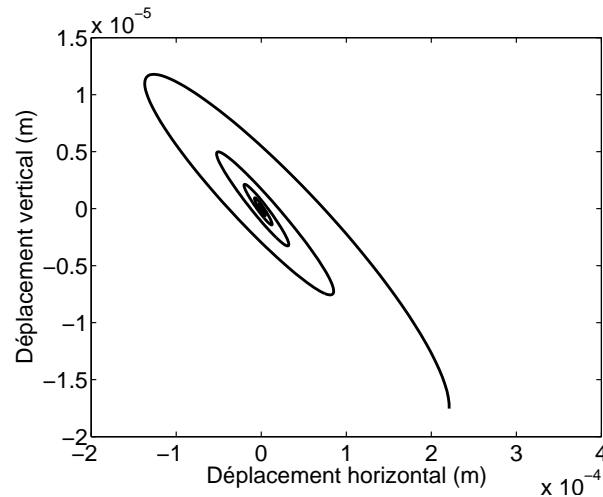


FIG. 3.21 – Orbite d'une particule proche de la surface de contact

### 3.6 Construction du modèle

Nous allons ici chercher à construire un modèle mécanique d'une faille sismique, reposant sur la théorie des éléments-finis. Le but est que le modèle puisse reproduire aussi bien les instabilités de type stick-slip et sprag-slip, tout en étant simplifié au maximum dans l'optique d'une analyse robuste.

La base de travail est donc un modèle éléments-finis d'un rectangle de sol reposant sur une surface rigide, tel que représenté sur la figure 3.22.

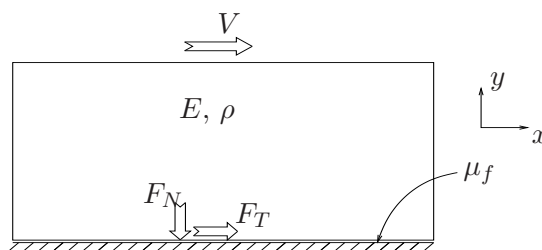


FIG. 3.22 – Modèle éléments-finis

#### 3.6.1 Réduction du modèle

Devant la lourdeur numérique d'un modèle éléments-finis, en particulier dans notre cas où une résolution non-linéaire sera nécessaire pour gérer le frottement, et d'autre part l'objectif étant de caractériser les sources sismiques de façon robuste, une réduction s'impose. Pour cela, on se base sur les résultats obtenus sur le modèle analytique, indiquant que les ondes instables apparaissant au niveau de l'interface sont évanescentes (ondes de surface). Cela signifie qu'un

voisinage de la surface permet de représenter les déformations du bloc, c'est pourquoi une condensation sur les noeuds du maillage proches de l'interface semble appropriée. De plus, étant donnée la faible gamme de fréquences ( $1 - 10Hz$  pour un séisme), une condensation statique de Guyan est effectuée. Toutefois, de façon à conserver suffisamment de degrés de liberté pour que le sprag-slip apparaisse, deux niveaux de noeuds doivent être conservés. Cette condensation est schématisée sur la figure 3.23, et la figure 3.24 présente l'allure des matrices de masse et de raideur après condensation.

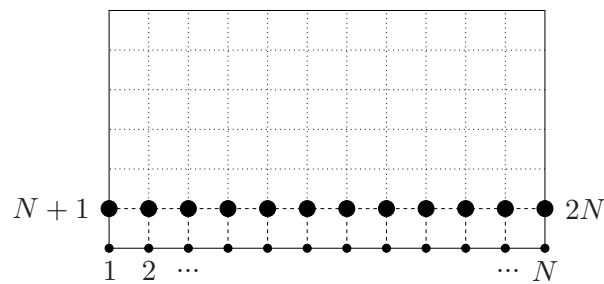


FIG. 3.23 – Condensation de Guyan : numérotation des noeuds

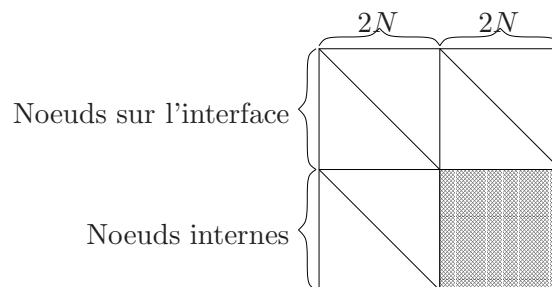


FIG. 3.24 – Termes non nuls des matrices de masse et de raideur après condensation

Par ailleurs, la taille du maillage étant imposée par les longueurs d'onde (au moins 10 mailles par longueur d'onde) le modèle doit conserver un nombre important de noeuds de frontière. De façon à réduire encore les coûts de calcul, on va donc chercher à réduire le remplissage des matrices de masse et de raideur. Pour cela, on élimine l'influence des noeuds qui ne sont pas directement en contact (cf. figure 3.26). Cette manipulation est justifiée par le fait que les termes dominants des matrices se situent autour de la diagonale, comme on peut le voir sur la figure 3.25.

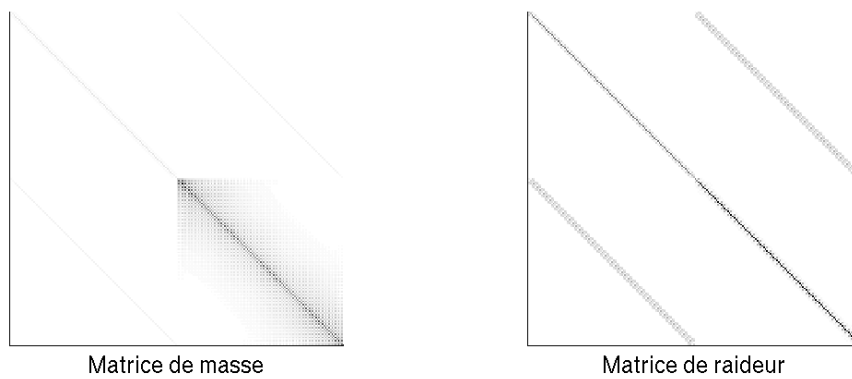


FIG. 3.25 – Matrices de masse et de raideur après condensation de Guyan : mise en évidence des termes prépondérants

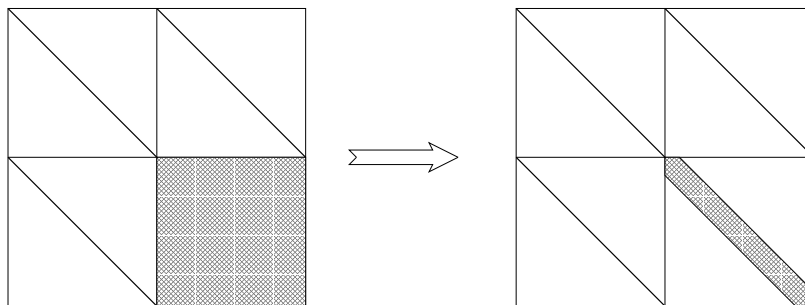


FIG. 3.26 – Réduction de l'influence des noeuds au niveau des matrices de masse et de raideur

Le modèle final obtenu possède une matrice de masse diagonale et une matrice de raideur dans laquelle seuls les termes correspondant à un couplage entre des noeuds en contact direct sont conservés (cf figure 3.27).

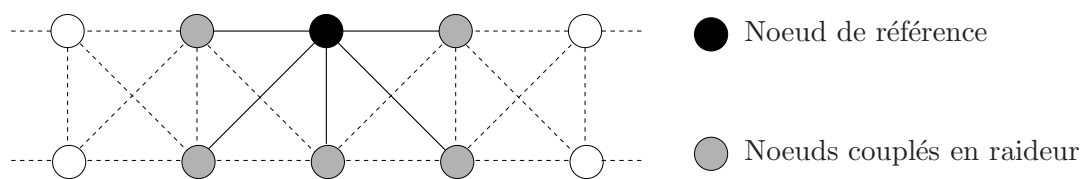


FIG. 3.27 – Illustration des couplages conservés entre noeuds

### 3.6.2 Application numérique

Les propriétés mécaniques du sol considéré ici sont les suivantes :

- module d'Young :  $E = 90 \text{ GPa}$
- densité :  $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$
- coefficient de Poisson :  $\nu = 0.3$

Les vitesses des ondes longitudinales et transversales correspondantes sont alors respectivement :

- $c_P = 6355 \text{ m/s}$

$$- c_S = 3397 \text{ m/s}$$

En considérant alors que la gamme de fréquences rencontrée dans le sol est 1 – 10Hz, et étant donné qu'il faut au moins 10 mailles par longueur d'onde, cela conduit à une taille du maillage de 50m. Par ailleurs, le bloc modélisé ici est large de 2500m et haut de 750m.

De façon à pouvoir faire un rapprochement entre le modèle analytique présenté précédemment et le modèle numérique, on étudie la stabilité de la déformée du bloc glissant sur une surface rigide pour différents coefficients de frottement. On détermine pour cela dans un premier temps la position d'équilibre correspondant à  $F_T = -\mu_f F_N$  (glissement permanent), et on introduit une perturbation au centre de façon à générer des ondes. Dans tous les cas, les mêmes simulations sont effectuées pour chacun des trois modèles suivants : complet, condensation de Guyan et réduction complète.

$$\bullet \mu_f = 0$$

On considère dans un premier temps le bloc glissant sans frottement ( $\mu_f = 0$ ). Dans ce cas, les déplacements sont parfaitement symétriques par rapport au point d'excitation, comme on peut le voir sur la figure 3.28. De plus, les ondes sont très rapidement amorties, ce qui est normal, car sur une interface hybride (déplacement vertical et force horizontale imposés), aucune onde de surface ne peut se propager.

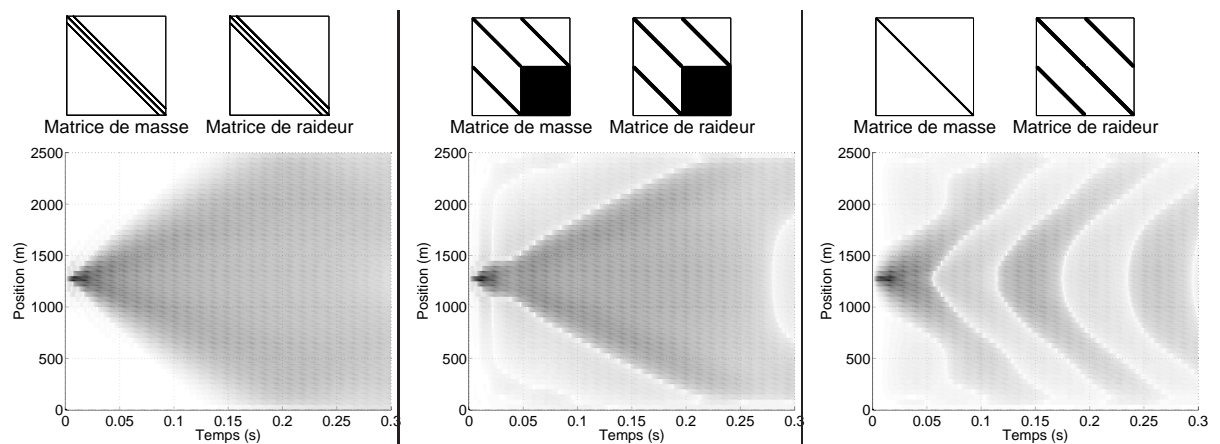


FIG. 3.28 – Réponses temporelles du système;  $\mu_f = 0$  (gauche : modèle complet, milieu : condensation de Guyan, droite : réduction des matrices)

$$\bullet \mu_f = 0.5$$

Avec un coefficient de frottement strictement compris entre 0 et 1, une direction de propagation favorisée apparaît (cf. figure 3.29), correspondant au sens des  $x$  croissants. Il s'agit des ondes se propageant avec une vitesse de même signe que celle imposée en surface du bloc, donc vers la partie avant du bloc. Toutefois, ces ondes sont là encore amorties.

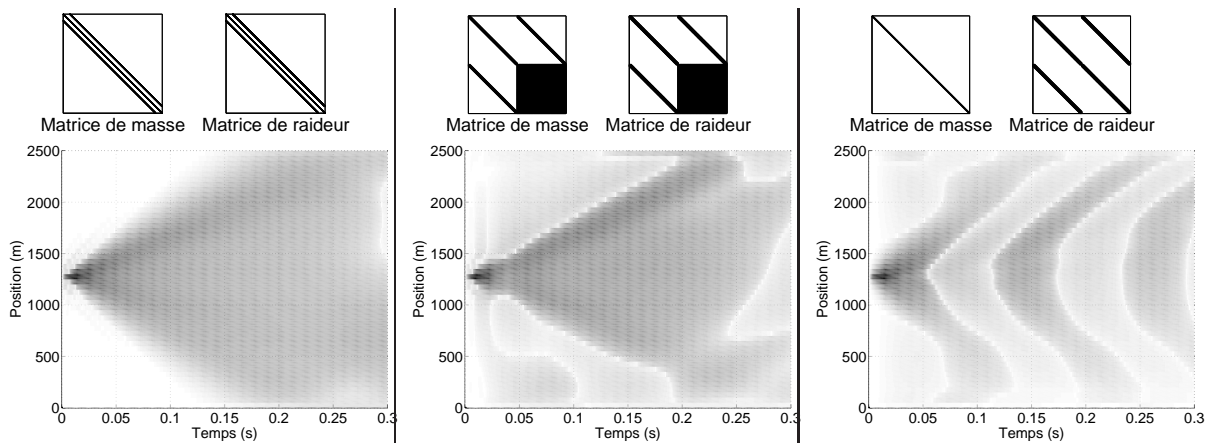


FIG. 3.29 – Réponses temporelles du système;  $\mu_f = 0.5$  (gauche : modèle complet, milieu : condensation de Guyan, droite : réduction des matrices)

•  $\mu_f = 2$

Enfin, lorsque le coefficient de frottement dépasse l'unité, un nouveau phénomène apparaît : les ondes se propageant dans le sens global du mouvement ( $V > 0$ ) ont une amplitude croissant exponentiellement. Ce résultat est bien en accord avec celui obtenu grâce au modèle analytique, dans lequel on avait trouvé  $Re(c) > 0$  et  $Im(c) > 0$ .

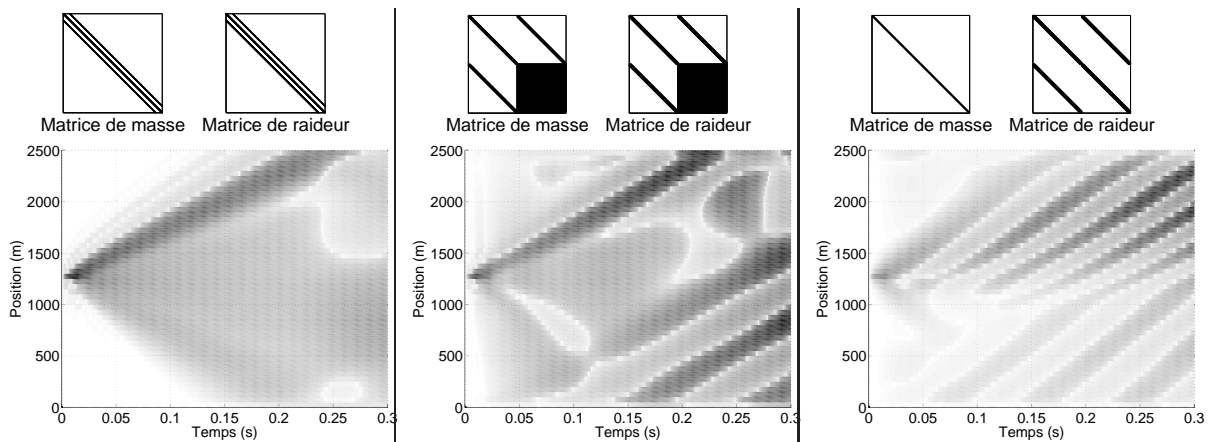


FIG. 3.30 – Réponses temporelles du système;  $\mu_f = 2$  (gauche : modèle complet, milieu : condensation de Guyan, droite : réduction des matrices)

• Comparaison des résultats issus des différents modèles

La comparaison des résultats obtenus avec les différents modèles montre que quel que soit le coefficient de frottement, les résultats sont similaires en termes de stabilité : tant que le coefficient de frottement reste inférieur à 1, les ondes s'atténuent. Par contre, dès que ce coefficient dépasse 1, les ondes créées par la perturbation se propagent avec une amplitude croissante dans le sens de la vitesse d'entraînement. On constate toutefois que dans le cas du modèle avec réduction des matrices, la vitesse des ondes est plus élevée. Cela est lié au fait que la masse globale du système a diminué lors de la diagonalisation, ce qui entraîne une

augmentation de la vitesse de propagation.

### 3.7 Modèle d'excitation sismique : le modèle 3S

Le modèle condensé avec matrices de masse et de raideur réduites qui a été validé dans le cas du glissement permanent dans la partie précédente va maintenant être d'avantage exploité, de façon à montrer que l'introduction des degrés de liberté verticaux permet l'apparition d'autres instabilités : on devrait ici retrouver les phénomènes de stick-slip et de sprag-slip couplés, d'où le nom donné au modèle : le *modèle 3S* - figure 3.31.

Les paramètres retenus pour ce modèle dans les applications qui vont suivre sont résumés dans le tableau 3.3.

Module d'Young	90 GPa
Densité	3000 kg/m <sup>3</sup>
Coefficient de Poisson	0.3
Hauteur du modèle avant condensation	3000 m
Largeur du modèle	5000 m
Taille du maillage	50 m

TAB. 3.3 – Paramètres du modèle 3S

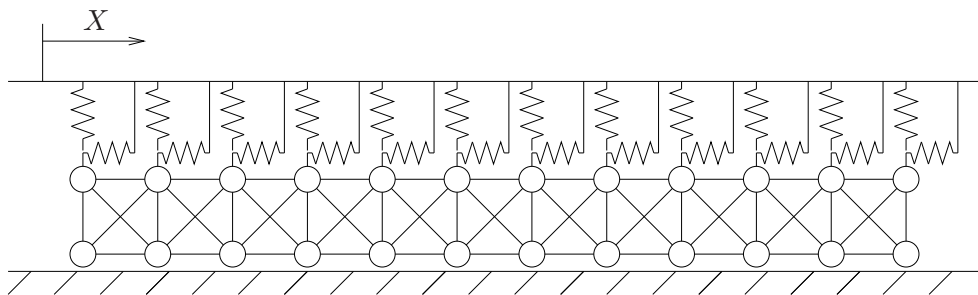


FIG. 3.31 – Le modèle 3S

#### 3.7.1 Guide d'ondes - Méthode propagative

Dans cette section, les instabilités observées précédemment sur le modèle 3S sont illustrées par le biais de la théorie développée pour les modes propagatifs dans les guides d'ondes. Cette théorie va permettre de déterminer les domaines d'instabilité et de justifier les fréquences et longueurs d'ondes observées dans les diverses résolutions temporelles.

Le principe fondamental de la méthode est d'utiliser un modèle mixte pour décrire le mouvement de certaines structures comportant une direction privilégiée de propagation  $x$ .

On reprend donc ici les hypothèses introduites dans le modèle analytique précédent :

- dans la direction  $x$ , une hypothèse de guide d'onde est faite : le champ est supposé être de la forme :

$$u(x, y, z, t) = u_0(y, z)e^{i(\omega t - kx)} \quad (3.17)$$

On retrouve le concept de mode propagatif, où  $u_0(y, z)$  est la déformée du mode et  $k$  le nombre d'onde propagatif correspondant.

- dans les directions  $y$  et  $z$ , le champ est supposé stationnaire, de la forme  $u_0(y, z)$ . La recherche de cette forme, qui est une déformée modale, est effectuée par éléments finis. En effet, cette méthode est tout particulièrement adaptée au formalisme modal.

On applique ici la théorie sur les modes propagatifs des guides d'ondes au modèle 3S. Pour cela, on considère une période spatiale du modèle, représentée par ses matrices de masse  $\mathbf{M}$  et de raideur  $\mathbf{K}$ , et dont les degrés de liberté sont définis sur la figure 3.32.

En notant  $\mathbf{X}$  la déformée élémentaire du modèle, on cherche donc  $\mathbf{X}$  sous la forme :

$$\mathbf{X}(x, t) = \mathbf{X}_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)} \quad (3.18)$$

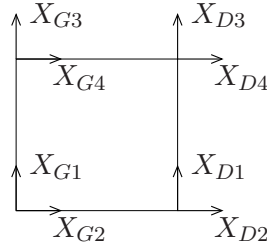


FIG. 3.32 – Définition des degrés de liberté

On note alors :

$$\mathbf{Z} = -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (3.19)$$

où  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{M}$  sont respectivement les matrices de raideur, d'amortissement et de masse.

A partir de maintenant, on note respectivement avec un indice  $G$  et  $D$  les variables faisant référence aux degrés de liberté des faces gauche et droite du modèle. Ainsi, si on considère le système en introduisant les éléments voisins par les efforts  $\mathbf{F}_G$   $\mathbf{F}_D$  exercés respectivement sur les faces gauche et droite, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{GG} & \mathbf{Z}_{GD} \\ \mathbf{Z}_{DG} & \mathbf{Z}_{DD} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}_G \\ \mathbf{X}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_G \\ \mathbf{F}_D \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

L'hypothèse de guide d'onde consiste alors à rechercher les coefficients  $\alpha$  tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_D = \alpha \mathbf{X}_G \\ \mathbf{F}_D = -\alpha \mathbf{F}_G + \mathbf{V}R \end{cases} \quad (3.21)$$

(le signe négatif au niveau de la force provient du principe de réciprocité) avec

$$\alpha = e^{-ik\Delta l} \quad \begin{cases} k_R = \text{Re}(k) = -\frac{\arg(\alpha)}{\Delta l} \\ k_I = \text{Im}(k) = \frac{\ln(|\alpha|)}{\Delta l} \end{cases} \quad (3.22)$$



où  $\Delta l$  est la largeur de l'élément de base du modèle.  $R$  représente la réaction du support sur le noeud inférieur du modèle, et  $\mathbf{V}$  est un vecteur dans lequel on introduit le frottement :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

En introduisant ces notations dans l'équation 3.20, après simplification, le système peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{GG} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{Z}_{DG} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{Z}_{DG1.} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}_G \\ \mathbf{F}_G \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\mathbf{Z}_{GD} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Z}_{DD} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{Z}_{DD1.} & -\mathbf{I} + \mathbf{V} \cdot [1000] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}_G \\ \mathbf{F}_G \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

où  $\mathbf{Z}_{DD1.}$  représente la première ligne de la matrice  $\mathbf{Z}_{DD}$ . On est alors amené à la résolution d'un problème aux valeurs propres.

Dans ces conditions, une onde instable se caractérise par :

$$\begin{cases} Re(k) > 0 \\ Im(k) > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} Re(k) < 0 \\ Im(k) < 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Le domaine instable obtenu dans le plan Fréquence/Coefficient de frottement est représenté sur la figure 3.33. Dans le cas présent, on constate que pour un coefficient de frottement inférieur à 1, le système reste stable. Pour un coefficient de frottement supérieur à 1, seules certaines fréquences deviennent instables, alors que le modèle analytique ne privilégiait pas de fréquences particulières.

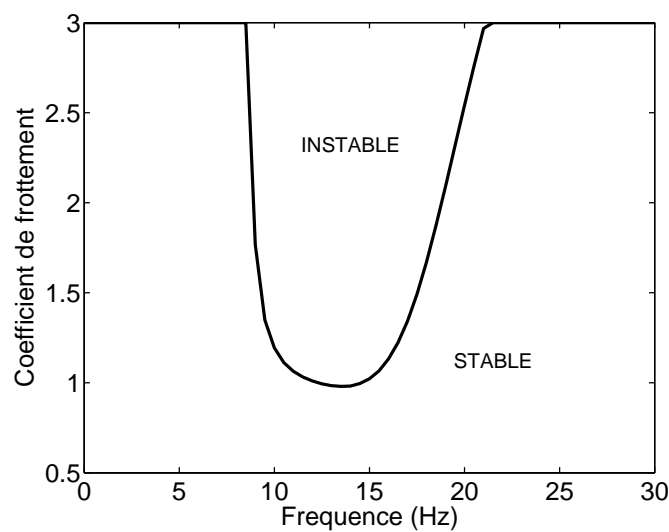


FIG. 3.33 – Domaine d'instabilité dans le plan Fréquence/Frottement

De plus, les parties imaginaires du nombre d'onde  $k$  et parties réelles de la vitesse  $c$  correspondant au domaine instable et représentées sur la figure 3.34 montrent qu'une fréquence privilégiée apparaît aux alentours de 15Hz. On peut aussi vérifier que la vitesse des ondes pour  $\mu_f = 2$  et une fréquence de 15Hz est environ de 8000m/s, ce qui est bien ce qui avait obtenu lors des simulations temporelles présentées précédemment et qui peut être comparé avec la vitesse prévue par le modèle analytique qui était, pour un coefficient de frottement de 2 de l'ordre de 500m/s. On obtient donc une vitesse supérieure, tel que déjà expliqué plus tôt.

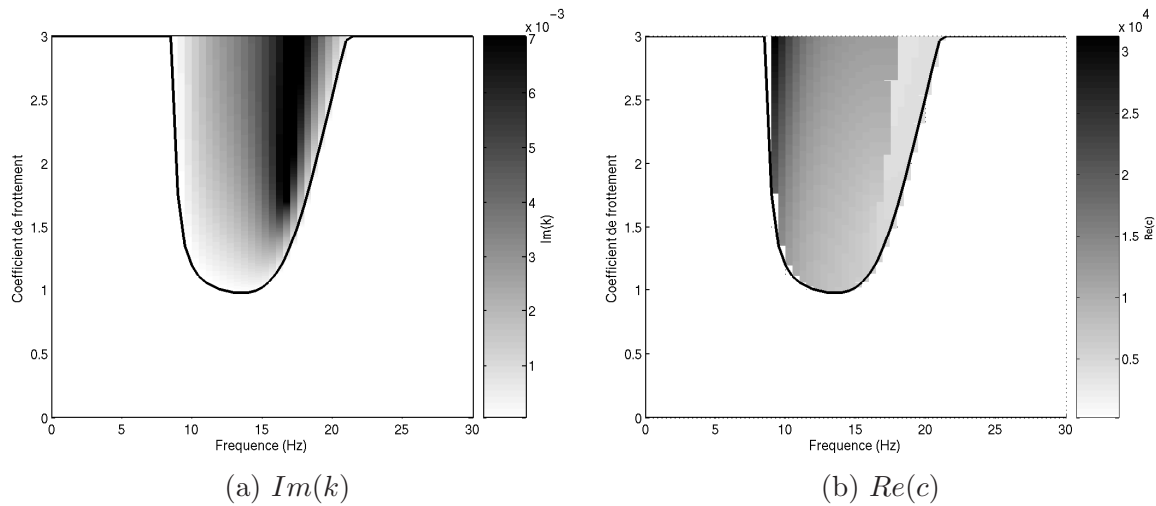


FIG. 3.34 – Evolution du nombre d'onde et de la vitesse dans le plan Fréquence/Frottement

Les figures 3.35 et 3.36 permettent de voir plus précisément l'évolution de  $k$  et  $c$  avec le coefficient de frottement dans le cas d'une fréquence de 15Hz.

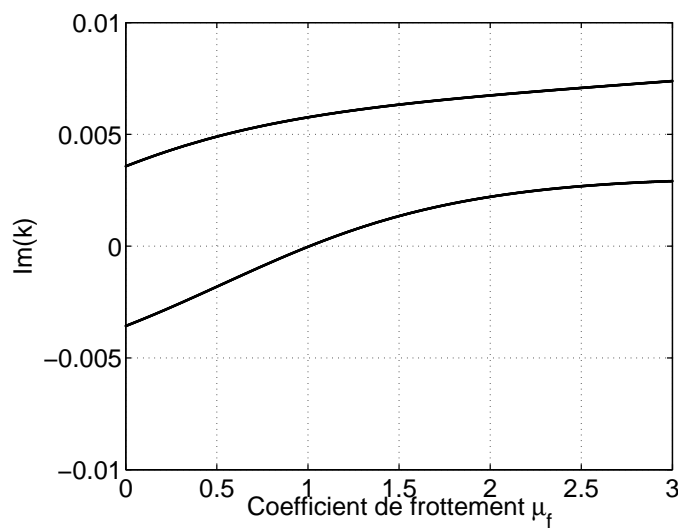
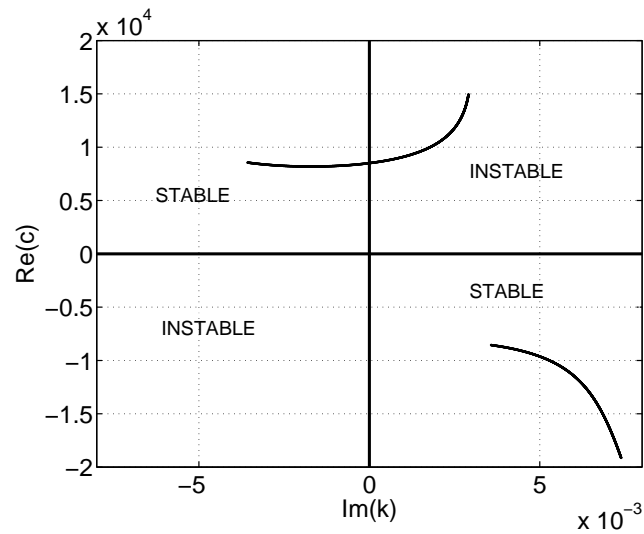


FIG. 3.35 – Variations de  $Im(k)$  avec le frottement pour  $\omega = 15\text{Hz}$

FIG. 3.36 – Evolution de  $\text{Re}(c)$  et  $\text{Im}(k)$  pour  $\omega = 15\text{Hz}$ 

### 3.7.2 Phases de glissements-recollements

Les figures 3.38 et 3.39 représentent la vitesse des différents points à l'interface en fonction du temps lorsque l'on impose un déplacement sous la forme d'un demi sinus en partie supérieure, tel que représenté sur la figure 3.37, respectivement pour  $\mu_f = 0.5$  et  $\mu_f = 2$ . Le choix de ce déplacement imposé a été fait de façon à permettre une simulation au cours de laquelle le bloc est mis en mouvement, puis s'arrête.

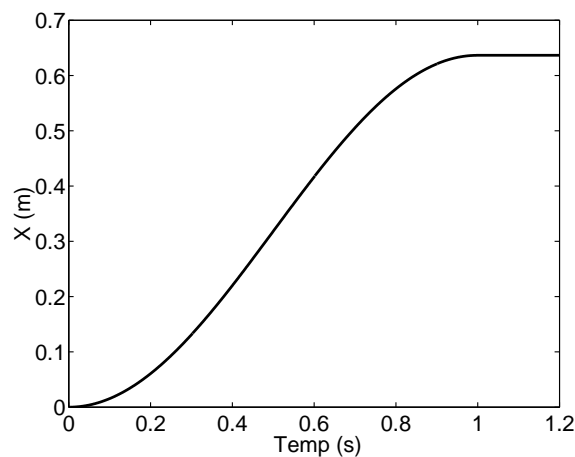


FIG. 3.37 – Déplacement imposé en partie supérieure

Pour chacune des simulations, on peut observer différentes phases. Dans un premier temps, les contraintes sont trop faibles pour qu'un déplacement relatif apparaisse. Quand le glissement se produit, le comportement dépend du coefficient de frottement. Si  $\mu_f < 1$ , le

mouvement se fait de façon régulière, tandis que si  $\mu_f > 1$ , des oscillations de plus en plus marquées apparaissent. Ces oscillations correspondent au phénomène d'instabilité mis en évidence précédemment, mais cette fois, leur amplitude est limitée par le recollement : la vitesse ne devient jamais négative.

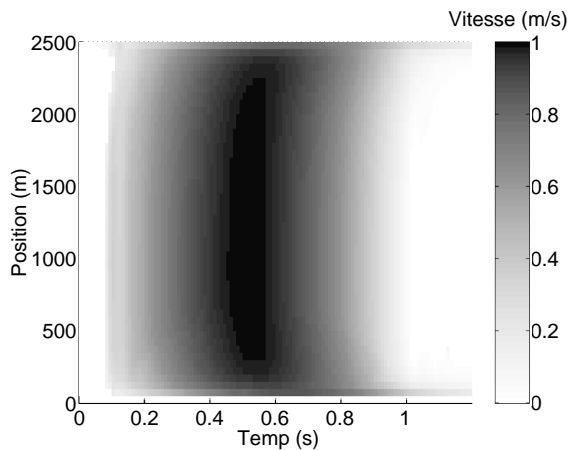


FIG. 3.38 – Réponse pour  $\mu_f = 0.5$

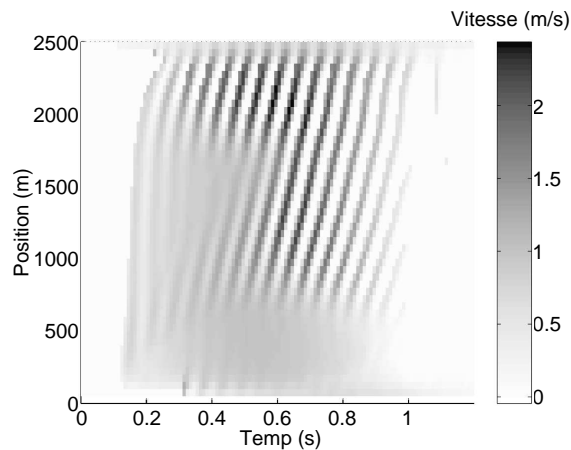


FIG. 3.39 – Réponse pour  $\mu_f = 2$

Le modèle 3S fait donc apparaître des phases de glissement alternées avec des phases de recollement, sans passer par une loi de frottement faisant intervenir des frottements statiques et dynamiques différents. A l'inverse, le sprag-slip permet en fait d'expliquer les chutes de frottement observées comme étant dues à des variations de l'effort normal et non du coefficient de frottement lui-même.

Le modèle 3S défini et construit ici semble donc parfaitement adapté pour reproduire les instabilités apparaissant à l'interface entre deux couches tectoniques et servira donc de base au modèle global proposé dans cette thèse.

### 3.7.3 Validation de la loi de Gutenberg-Richter

Dans la section précédente, la potentialité du modèle 3S à reproduire les instabilités de type sprag-slip a été établie. Dans cette partie, on cherche à simuler de façon plus réaliste une faille tectonique.

Dans un premier temps, la vitesse de déplacement imposée est prise égale à  $\partial X/\partial t = 1$  mm/s, ce qui est bien supérieur à une valeur réaliste (qui serait plutôt de l'ordre de 10 cm/an), mais est suffisamment faible pour permettre aux phénomènes d'instabilités d'apparaître tout en permettant une résolution temporelle simple sur un laps de temps relativement long vis à vis des évènements susceptibles de se produire au niveau de l'interface. Le coefficient de frottement sera supposé constant. La résolution temporelle est alors effectuée à partir d'un algorithme de Newmark dans lequel on introduit les non-linéarités liées au frottement.

Le but de cette résolution est de comparer les résultats statistiques du modèle 3S avec ceux du modèle de Burridge-Knopoff, et en particulier de voir si la loi de Gutenberg-Richter est toujours respectée. La répartition statistique des événements issus du modèle 3S est représentée sur la figure 3.40. On peut y constater que la loi de Gutenberg-Richter est globalement respectée. Les événements de grande amplitude sont ici bien représentés contrairement aux résultats issus du modèle de Burridge-Knopoff même si un excès d'évènements de petite amplitude apparaît.

Ce résultat est donc particulièrement intéressant, car le modèle ainsi obtenu permet de retrouver des statistiques de glissement proches des observations réelles, alors que la source d'instabilités est totalement différente.

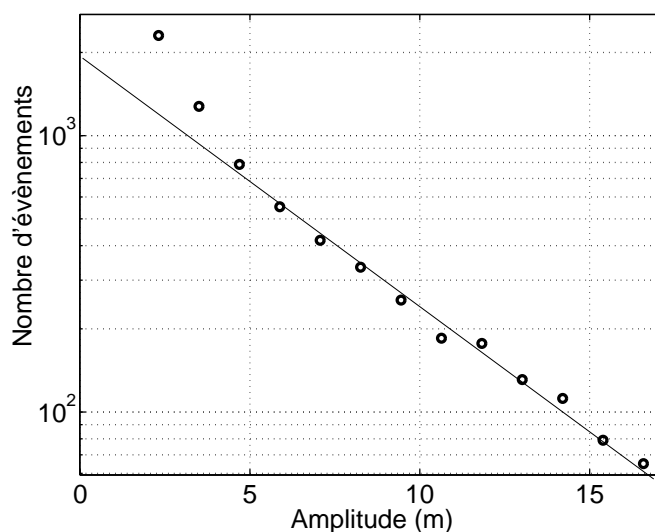


FIG. 3.40 – Nombre d'évènements en fonction du déplacement moyen pour  $\partial X/\partial t = 1$  mm/s et  $\mu_f = 2$

### 3.7.4 Simulation d'un cas réaliste

Dans le cas d'une faille sismique réelle, les vitesses de déplacement des plaques tectoniques sont de l'ordre de 10 cm/an. De façon à représenter un cas réaliste, une vitesse de  $10^{-9}$  m/s  $\approx$  6 cm/an est choisie pour la simulation. Toutefois, une vitesse aussi faible nécessite de faire intervenir un schéma d'intégration temporelle adaptatif. En effet, les phases de glissement vont cette fois être négligeables devant les phases collées. C'est pourquoi on choisit d'utiliser une résolution quasi-statique pour les phases collées de façon à déterminer l'instant du glissement suivant, puis pendant la phase de glissement, un algorithme de Newmark prenant en compte les non-linéarités intervient.

Avec ces paramètres, le modèle présente un comportement réaliste vis à vis de la répartition temporelle des secousses, comme on peut le voir sur la figure 3.41. La résolution correspondant à cette figure correspond à une période de 3,5 ans. On peut constater qu'au cours de cette période, 3 évènements majeurs se sont produits, chacun suivi d'une série de répliques.

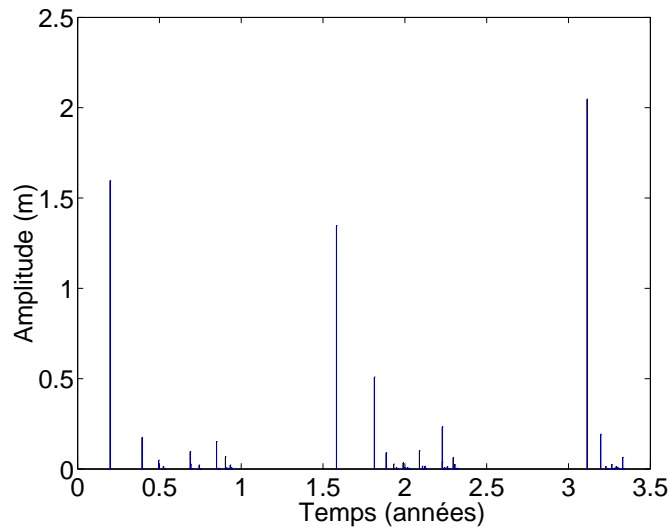


FIG. 3.41 – Répartition temporelle des glissements

### 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, les phénomènes d'instabilité de frottement ont été mis en évidence comme étant à l'origine des tremblements de terre, c'est à dire à l'origine du phénomène de rebond élastique. Un modèle permettant de simuler aussi bien les instabilités de type stick-slip que sprag-slip a été construit. La sortie de ce modèle, qui constituera l'entrée du modèle de propagation, consiste en un déplacement relatif entre deux solides élastiques. Nous verrons dans la suite que cela correspond à la notion de moment sismique.

## Chapitre 4

# Transmission de l'excitation à travers le sol

Dans le chapitre précédent, une modélisation des phénomènes apparaissant au niveau de la zone du foyer d'un séisme a été proposée. Le résultat qui en sort est une source d'excitation sous la forme d'un glissement relatif entre deux couches. Dans ce chapitre, nous allons voir comment l'onde générée au niveau de ce foyer se propage dans le sol jusqu'à la surface.

Pour cela, les différents types d'ondes susceptibles de se propager dans un milieu élastique sont rappelés de façon très générale. Différentes méthodes permettant de traiter de la propagation des ondes sont ensuite présentées, en tenant compte du fait que le sol correspondant au milieu traversé ici peut être modélisé comme un milieu homogène stratifié. Dans le cas où cette hypothèse ne serait pas applicable, des méthodes spécifiques pourront être utilisées, mais elles ne seront que brièvement abordées ici.

### 4.1 Les bases de la propagation d'ondes

On commence ici par présenter quelques généralités sur la propagation d'ondes élastiques dans un milieu homogène, de façon à se familiariser avec les différents types d'ondes et leur caractérisation générale.

#### 4.1.1 Les différents types d'ondes sismiques

Les ondes sismiques, générées lors de la rupture d'une faille au niveau du foyer, sont des ondes élastiques, ce qui signifie qu'elles peuvent traverser un milieu sans le modifier durablement.

Les vibrations engendrées par un séisme se propagent dans toutes les directions. On distingue les ondes de volume ((a) et (b) sur la figure 4.1) qui traversent la Terre et les ondes de surface ((c) et (d) sur la figure 4.1) qui se propagent parallèlement à sa surface. Elles se succèdent et se superposent sur les enregistrements des sismomètres. Leurs vitesses de propagation et leurs amplitudes sont modifiées par les structures géologiques traversées, c'est pourquoi les signaux enregistrés sont la combinaison d'effets liés à la source et aux milieux traversés.

La présentation succincte des différents types d'onde faite ici correspond à un milieu homogène. Une description plus complète avec mise en équation dans un cas plus général suivra.

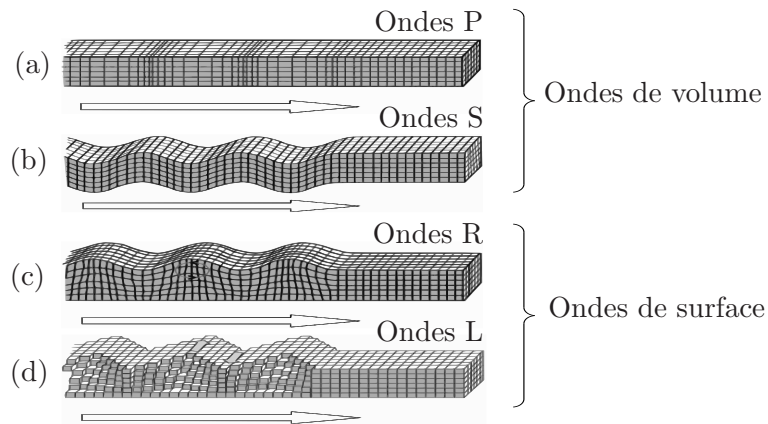


FIG. 4.1 – Types d'ondes sismiques se propageant dans le sol

#### • Les ondes de volume

Elles se propagent à l'intérieur du globe. Leur vitesse de propagation dépend du matériau traversé et d'une manière générale elle augmente avec la profondeur (cf. fig. 4.2).

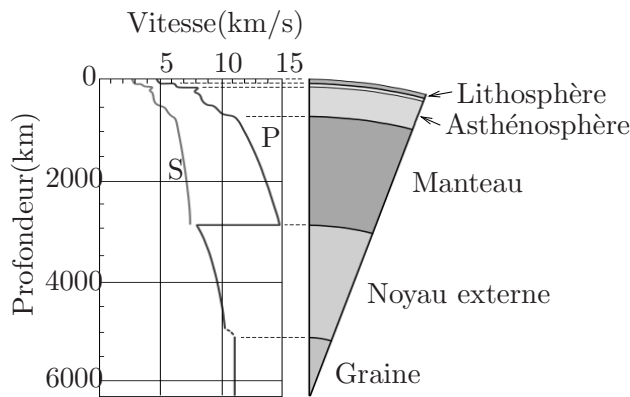


FIG. 4.2 – Influence de la profondeur sur les vitesses de propagation

On distingue :

- *les ondes P* - (a) sur la figure 4.1 - appelées aussi ondes de compression ou ondes longitudinales. Le déplacement du sol qui accompagne leur passage se fait par dilatations et compressions successives, parallèlement à la direction de propagation de l'onde. Ce sont les plus rapides (6 km/s près de la surface). Elles sont responsables du grondement sourd que l'on peut entendre au début d'un tremblement de terre.

- *les ondes S* - (b) sur la figure 4.1 - appelées aussi ondes de cisaillement ou ondes transversales. A leur passage, les mouvements du sol s'effectuent perpendiculairement au sens de propagation de l'onde. Leur vitesse est plus lente que celle des ondes P, elles apparaissent en second sur les sismogrammes. De plus, dans un cadre général, une onde S peut être décomposée en deux ondes (cf. figure 4.3) :



- \* une onde SH, telle que sa direction de vibration est perpendiculaire au plan d'incidence (qui est le plan contenant la verticale et la direction de propagation) ;
- \* une onde SV, telle que sa direction de vibration est dans le plan d'incidence et bien sûr dans le plan de polarisation de l'onde S, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction de propagation.

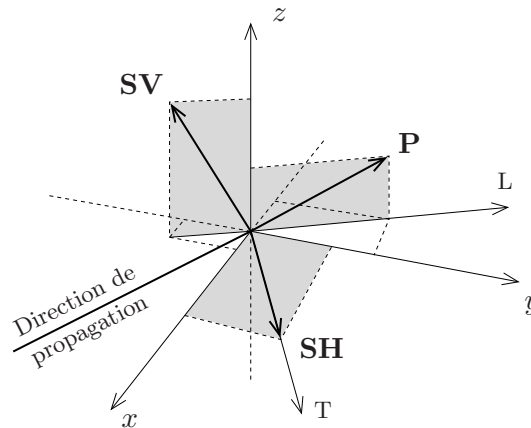


FIG. 4.3 – Projection sur les 3 axes des déplacements de matière liés au passage des ondes P et S (décomposée en SH et SV)

Les ondes de volume se propagent un peu comme les rayons lumineux : elles peuvent être réfléchies ou réfractées, c'est-à-dire déviées à chaque changement de milieu, au passage manteau-noyau par exemple. Elles peuvent ainsi suivre des trajets très complexes à l'intérieur de la Terre. Leur temps de parcours dépend de ce trajet, elles n'arrivent pas toutes en même temps au même endroit.

#### • Les ondes de surface

Ce sont des ondes guidées par la surface de la Terre. Elles sont moins rapides que les ondes de volume mais leur amplitude est généralement plus forte.

On distingue :

- *les ondes R* (ondes de Rayleigh) - (c) sur la figure 4.1 - le déplacement est complexe, assez semblable à celui d'un bouchon porté par une vague, un mouvement à la fois horizontal et vertical, elliptique, en fait. Le déplacement reste dans le plan défini par la direction de propagation et la verticale.

- *les ondes L* (ondes de Love) - (d) sur la figure 4.1 - le déplacement est essentiellement le même que celui des ondes S sans mouvement vertical. Les ondes de Love provoquent un ébranlement horizontal qui est la cause de nombreux dégâts aux fondations des édifices. Le déplacement se fait perpendiculairement au plan défini par la direction de propagation et la verticale.

#### 4.1.2 Vitesses de propagation

Comme on l'a déjà mentionné précédemment, chaque type d'onde possède sa propre vitesse de propagation dans le milieu. L'écriture des équations de propagation permet de déterminer

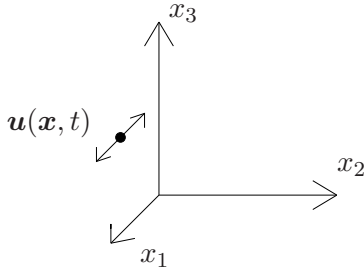
rapidement les différentes vitesses des ondes de volume.

On part pour cela de l'équation du mouvement dans sa forme la plus générale (cette équation sera reprise plus en détail par la suite) :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (4.1)$$

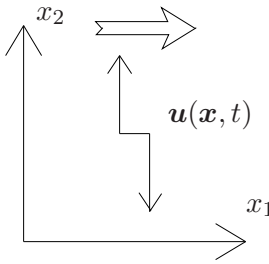
Dans le cas d'ondes se propageant dans la direction  $x_1$ , on obtient les vitesses  $c_P$  et  $c_S$  correspondant respectivement aux ondes P et S :

• **Onde P**



$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= [u_1(x_1, t), 0, 0] \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + f_1 &= \rho \ddot{u}_1 \\ \Rightarrow c_P &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \end{aligned}$$

• **Onde S**



$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= [0, u_2(x_1, t), 0] \\ \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + f_2 &= \rho \ddot{u}_2 \\ \Rightarrow c_S &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{aligned}$$

Ces vitesses s'expriment en fonction des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  et de la masse volumique  $\rho$  du milieu.

La détermination de la vitesse des ondes de surface est plus complexe, car elle impose d'introduire les conditions aux limites du système (bord libre). Ainsi, pour les ondes de Rayleigh, si on suppose que la surface libre est définie par le plan d'équation  $x_2 = 0$  et que l'on se place dans le plan  $(x_1, x_2)$ , les équations à prendre en compte sont les suivantes :

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} &= \rho \ddot{u}_1 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} &= \rho \ddot{u}_2 \\ \sigma_{22}(x_1, 0, t) &= 0 \\ \sigma_{12}(x_1, 0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

On peut alors connaître les vitesses relatives des différents types d'ondes en fonction du coefficient de Poisson du milieu. Sur la figure 4.4, on peut voir que quelles que soient les caractéristiques du milieu traversé, les ondes de volume sont toujours les plus rapides et que les ondes P sont aussi plus rapides que les ondes S.

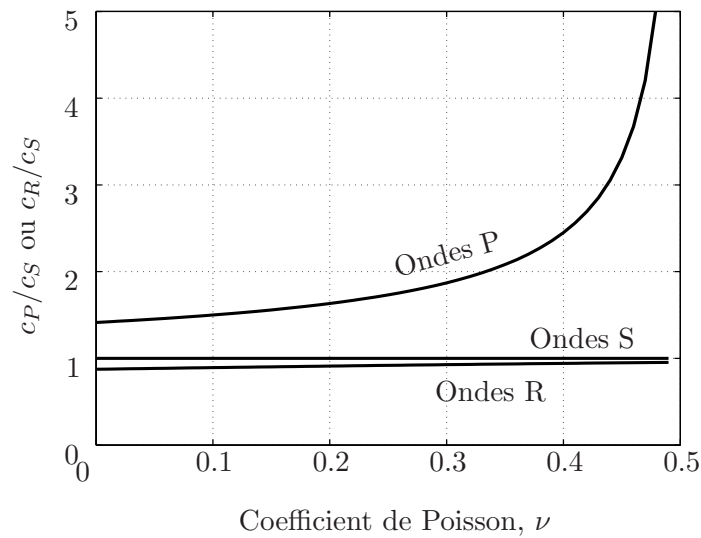


FIG. 4.4 – Vitesses relatives des ondes sismiques

Compte tenu de ces vitesses de propagation, l'ordre d'arrivée des ondes sur un accélérogramme typique sera tout d'abord les ondes P, suivies des ondes S et enfin les ondes de surface (ondes de Rayleigh en particulier), tel qu'illustré sur la figure 4.5.

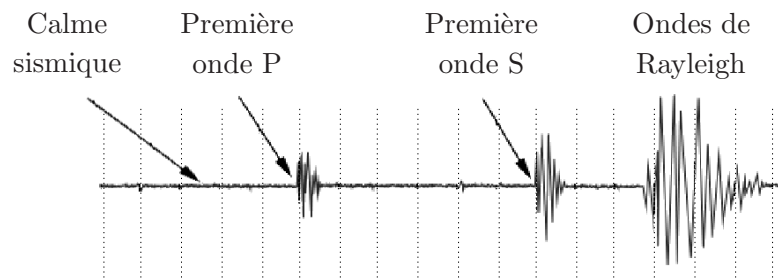


FIG. 4.5 – Accélérogramme type

### 4.1.3 Atténuation des ondes

Le sol traversé par les ondes sismiques joue un rôle d'atténuateur. Toutefois, on peut distinguer trois types d'atténuation :

- l'atténuation liée à l'amortissement interne du matériau ;
- l'atténuation liée à la dispersion de l'énergie ;
- l'atténuation liée au problème d'ondes évanescentes.

Ainsi, on peut modéliser l'amortissement des ondes sismiques lorsqu'elles s'éloignent de leur source par la formule suivante [45] :

$$X_2 = X_1 \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^n e^{-\alpha(r_2-r_1)} \quad (4.3)$$

où  $X_1$  et  $X_2$  représentent respectivement les amplitudes à la distance  $r_1$  et  $r_2$  de la source,  $n$  est le coefficient d'amortissement géométrique (lié à la dispersion de l'énergie avec la distance), dont quelques valeurs sont données dans le tableau 4.1, et  $\alpha$  le coefficient d'amortissement

lié au matériau (lié au frottement et à la cohésion entre les particules du sol).  $\alpha$  peut être représenté par :

$$\alpha = \frac{\pi\eta f}{c} \quad (4.4)$$

où  $\eta$  est un facteur de perte,  $f$  est la fréquence de l'onde, et  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde.

Localisation de la source	Type de source	Type d'ondes	$n$
Surface	Point	Volume	2.0
		Surface	0.5
	Ligne infinie	Volume	1
		Surface	0
Sous terre	Point	Volume	2.0
	Ligne infinie	Volume	1

TAB. 4.1 – Coefficients d'amortissement géométrique  $n$

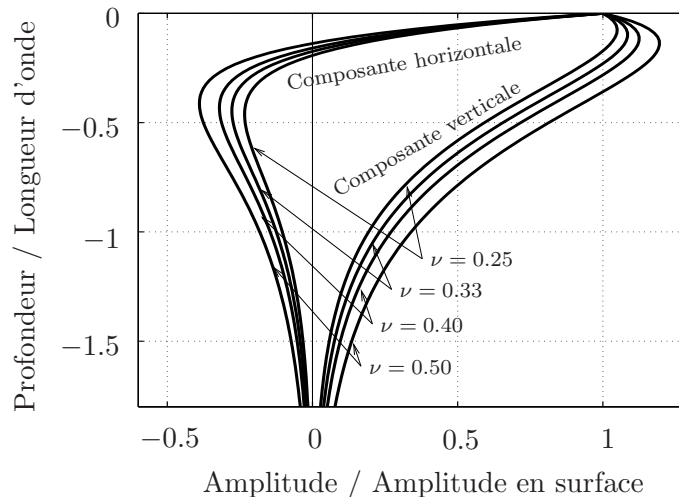


FIG. 4.6 – Atténuation des ondes de Rayleigh avec la profondeur

Concernant les ondes de surface, la figure 4.6 illustre l'atténuation très rapide des ondes de Rayleigh avec la profondeur. En effet, on observe que les ondes R ne se propagent que dans une couche superficielle dont l'épaisseur est de l'ordre de la longueur d'onde du signal, ce qui justifie l'appellation d'ondes de surface.

## 4.2 Noyaux de Green

On va dans cette partie s'intéresser à la réponse en déplacement à une excitation ponctuelle d'un point de l'espace. Ce champ de déplacement est appelé noyau de Green. Il sert de base à la résolution d'un problème de propagation de vibrations dans un milieu quelconque. On notera par la suite  $G_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$  la fonction de Green correspondant à la  $i^{\text{ème}}$  composante de

la réponse au point de coordonnées  $\mathbf{x}$  et à l'instant  $t$  pour une excitation impulsionnelle dans la direction  $x_j$  au point de coordonnées  $\boldsymbol{\xi}$  et à l'instant  $\tau$ .

### 4.2.1 Noyau de Green pour excitation en force

Dans un premier temps, on recherche la réponse d'un milieu homogène pour une excitation ponctuelle en force. Cette résolution passe par un certain nombre d'étapes et commence par l'écriture dans le cas général de l'équation du déplacement  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  sous la forme :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (4.5)$$

où  $\nabla$  représente l'opérateur Nabla, défini dans le repère de la figure 4.7 par :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

et  $\mathbf{f}$  représente une force volumique extérieure,  $\rho$  est la masse volumique du milieu et  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé, avec, en notant  $E$  et  $\nu$  respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du milieu :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4.7)$$

L'équation 4.5 peut aussi se ramener pour chaque composante à :

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + (\lambda + \mu) u_{j,j} + \mu u_{i,jj} \quad (4.8)$$

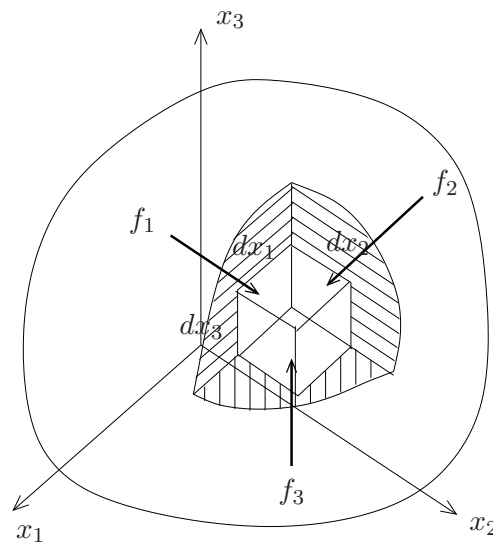


FIG. 4.7 – Caractéristiques volumiques d'un solide 3D

On écrit alors la décomposition en potentiels de Helmholtz de la force  $\mathbf{f}$  et des conditions initiales respectivement sur la vitesse  $\dot{\mathbf{u}}$  et le déplacement  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{f} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi}; \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \nabla A + \nabla \times \mathbf{B}; \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \nabla C + \nabla \times \mathbf{D}; \quad (4.9)$$

avec

$$\nabla \cdot \mathbf{\Psi} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.10)$$

Dans ce cas, on peut montrer qu'il existe des potentiels  $\phi$  et  $\psi$  respectant les quatre propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \\ \text{(ii)} \quad & \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0 \\ \text{(iii)} \quad & \ddot{\phi} = \frac{\Phi}{\rho} + c_P^2 \nabla^2 \phi \quad \left( \text{avec } c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \\ \text{(iv)} \quad & \ddot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{\mathbf{\Psi}}{\rho} + c_S^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} \quad \left( \text{avec } c_S^2 = \frac{\mu}{\rho} \right) \end{aligned}$$

$\nabla\phi$  et  $\nabla \times \boldsymbol{\psi}$  sont alors respectivement les composantes en ondes P et ondes S de  $\mathbf{u}$ .

A partir de cette écriture en décomposition en potentiels de Helmholtz de la réponse  $\mathbf{u}$ , on va pouvoir déterminer de façon beaucoup plus simple l'expression de la réponse dans un cas général, en résolvant indépendamment les équations correspondant à  $\phi$  et  $\boldsymbol{\psi}$ .

#### 4.2.1.1 Solution de Green dans un milieu homogène

On cherche ici le déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  satisfaisant l'équation des ondes 4.5 avec  $\mathbf{f}$  pris sous la forme  $f_i = X_0(t)\delta(\mathbf{x})\delta_{i1}$ , correspondant à une force exercée à l'origine du repère dans la direction  $x_1$ . La première étape consiste à reprendre la décomposition en potentiels de Helmholtz de l'équation 4.9 et à déterminer les potentiels  $\Phi$  et  $\mathbf{\Psi}$  :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= -\frac{X_0(t)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \\ \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, t) &= \frac{X_0(t)}{4\pi} \left( 0, \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{|\mathbf{x}|}, -\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Le fait que les potentiels correspondant à une force ponctuelle dans l'espace soient non nuls en dehors de la source peut paraître surprenant, mais cela souligne le côté artificiel de la méthode des potentiels.

La seconde étape pour déterminer le déplacement consiste à résoudre les équations décrivant les potentiels  $\phi$  et  $\boldsymbol{\psi}$  (avec  $\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}$ ). Ces dernières s'écrivent comme suit :

$$\ddot{\phi} = -\frac{X_0(t)}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|\mathbf{x}|} + c_P^2 \nabla^2 \phi \quad (4.12)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{X_0(t)}{4\pi\rho} \left( 0, \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{|\mathbf{x}|}, -\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) + c_S^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} \quad (4.13)$$

Ces équations sont résolues sous la forme :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \int_0^{|\mathbf{x}|/c_P} \tau X_0(t - \tau) d\tau \quad (4.14)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\rho} \left( 0, \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{|\mathbf{x}|}, -\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \int_0^{|\mathbf{x}|/c_S} \tau X_0(t - \tau) d\tau \quad (4.15)$$

La dernière étape pour obtenir le déplacement dû à une force  $X_0(t)$  appliquée dans la direction  $x_1$  est de former l'expression  $\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}$ . On note de plus  $r = |\mathbf{x}|$ , correspondant à la distance entre l'origine et le point de mesure. On obtient alors :

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\rho} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_1} \frac{1}{r} \right) \int_{r/c_P}^{r/c_S} \tau X_0(t - \tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho c_P^2 r} \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) X_0 \left( t - \frac{r}{c_P} \right) + \frac{1}{4\pi\rho c_S^2} \left( \delta_{i1} - \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) X_0 \left( t - \frac{r}{c_S} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Enfin, si on change les indices 1 en  $j$ , dans l'expression 4.16, on obtient le déplacement dû à une force appliquée à l'origine dans la direction  $x_j$ . En utilisant les cosinus directeurs  $\gamma_i$  définis par  $\gamma_i = x_i/r = \partial r/\partial x_i$ , on obtient finalement le déplacement dans la direction  $x_i$  généré par une force  $X_0(t)$  dans la direction  $x_j$  sous la forme :

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= X_0 * G_{ij} \\ &= \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} \int_{r/c_P}^{r/c_S} \tau X_0(t - \tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho c_P^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} X_0 \left( t - \frac{r}{c_P} \right) - \frac{1}{4\pi\rho c_S^2} (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r} X_0 \left( t - \frac{r}{c_S} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

La fonction de Green  $G_{ij}$  est obtenue en prenant  $X_0(t) = \delta(t)$  dans l'expression 4.17, soit :

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}, 0) &= \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} t \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho c_P^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} \delta \left( t - \frac{r}{c_P} \right) - \frac{1}{4\pi\rho c_S^2} (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r} \delta \left( t - \frac{r}{c_S} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

#### 4.2.1.2 Description des différents termes

L'expression 4.17 peut être séparée en trois termes, dépendant de leur atténuation avec la distance et du type d'onde. Ainsi, le terme  $r^{-3} \int_{r/c_P}^{r/c_S} \tau X_0(t - \tau) d\tau$  s'atténue en  $r^{-2}$  pour des sources pour lesquelles  $X_0$  est non nulle sur un laps de temps faible devant  $r/c_S - r/c_P$ , alors que les termes suivants se comportent en  $r^{-1}$ .

Les termes  $r^{-1} X_0 \left( t - \frac{r}{c_P} \right)$  et  $r^{-1} X_0 \left( t - \frac{r}{c_S} \right)$  sont alors appelés *champ lointain* alors que le terme  $r^{-3} \int_{r/c_P}^{r/c_S} \tau X_0(t - \tau) d\tau$  correspond au *champ proche*. De façon plus détaillée, l'expression 4.17 se décompose comme suit :

- **champ lointain, onde P**

$$u_i^P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho c_P^2} \gamma_i \gamma_j \frac{1}{r} X_0 \left( t - \frac{r}{c_P} \right)$$

- s'atténue en  $r^{-1}$ ;
- se propage à la vitesse  $c_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ ;
- correspond à un champ de déplacement proportionnel à la force appliquée avec un décalage temporel de  $r/c_P$ ;
- se propage dans une direction radiale par rapport à la source.

- **champ lointain, onde S**

$$u_i^S(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho c_S^2} (\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r} X_0 \left( t - \frac{r}{c_S} \right)$$

- s'atténue en  $r^{-1}$ ;
- se propage à la vitesse  $c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ;
- correspond à un champ de déplacement proportionnel à la force appliquée avec un décalage temporel de  $r/c_S$ ;
- se propage dans une direction transversale par rapport à la source.

- **champ proche**

$$u_i^N(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} \int_{r/c_P}^{r/c_S} \tau X_0(t - \tau) d\tau$$

- s'atténue en  $r^{-2}$ ;
- est non nul sur une période  $(r/c_S - r/c_P) + T$  si  $X_0$  est non nul sur une période  $T$ .

Les figures 4.8 et 4.9 représentent l'amplitude dans les différentes directions de propagation respectivement des ondes P et S en champ lointain pour une excitation dans le sens vertical. Les figures 4.10 et 4.11 permettent quant à elles de voir le sens de déplacement des particules lors du passage de l'onde.



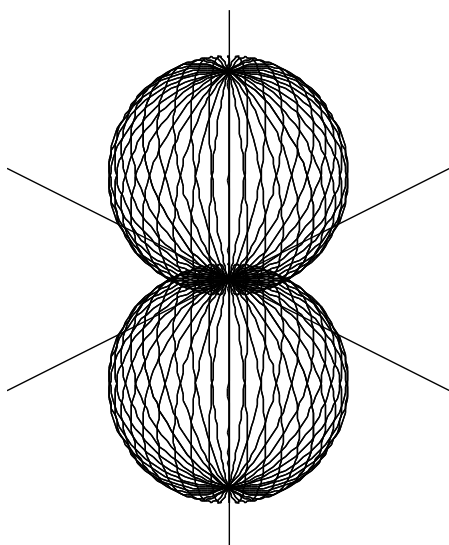


FIG. 4.8 – Onde P : amplitude du champ lointain

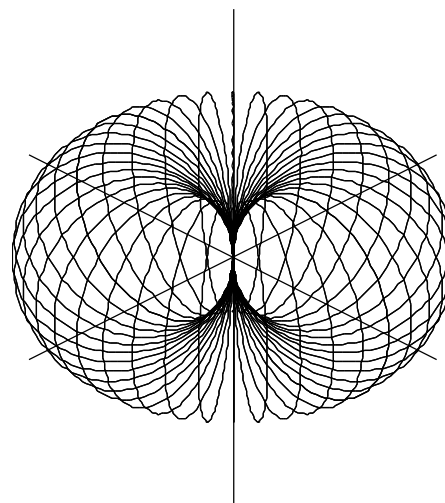


FIG. 4.9 – Onde S : amplitude du champ lointain

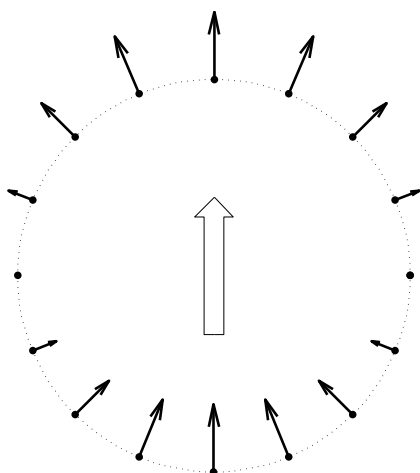


FIG. 4.10 – Onde P : direction et amplitude du champ lointain

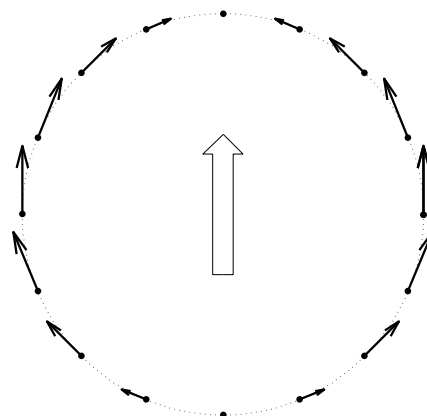


FIG. 4.11 – Onde S : direction et amplitude du champ lointain

### 4.2.2 Moment sismique

La notion de *tenseur de moment sismique* est fréquemment utilisée dans le cadre de la description de l'action sismique. Cette quantité, notée  $\mathbf{M}$ , dépend de la résistance de la source et de sa direction. Elle caractérise toutes les informations provenant de la source pouvant être interprétées par l'observation des ondes dont la longueur d'onde est grande par rapport aux dimensions de la rupture  $\Sigma$ . Pour les sources de dimensions finies (ne pouvant pas être considérées comme ponctuelles), on introduit une densité de moment sismique  $\mathbf{m}$  qui peut correspondre à  $d\mathbf{M}/d\Sigma$  ou  $d\mathbf{M}/dV$  pour une source volumique.

On s'intéresse ici à une faille quelconque, telle que représentée sur la figure 4.12, définie

par son orientation  $\phi_s$  par rapport à la direction du Nord  $x_1$  et par son pendage  $\delta$  (angle que fait le plan de faille avec le plan horizontal). On note de plus  $\bar{\mathbf{u}}$  le glissement moyen sur la faille et  $\lambda$  l'angle dans le plan de faille entre l'horizontale et la direction du glissement. Enfin, on représente par  $i_\xi$  et  $\phi$  la direction de départ d'un rayon donné.

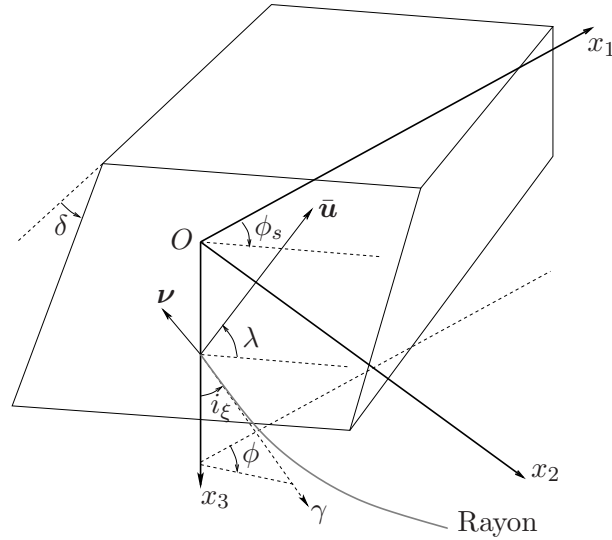


FIG. 4.12 – Définition des coordonnées cartésiennes

Dans ce cas, le moment  $M_0$  est donné par :

$$M_0 = \mu A |\bar{\mathbf{u}}| \quad (4.19)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement traduisant la rigidité de la roche dans la zone source,  $\bar{\mathbf{u}}$  est le déplacement moyen et  $A$  est la surface sur laquelle le déplacement a été moyenné.

Le tenseur de moment  $\mathbf{M}$  dans son expression la plus générale peut alors être vu comme la somme de quatre “moments élémentaires”  $\mathbf{M}^{(i)}$  :

$$\mathbf{M} = \cos \delta \cos \lambda \mathbf{M}^{(1)} + \sin \delta \cos \lambda \mathbf{M}^{(2)} - \cos 2\delta \sin \lambda \mathbf{M}^{(3)} + \sin 2\delta \sin \lambda \mathbf{M}^{(4)} \quad (4.20)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(1)} &= M_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos \phi_s \\ 0 & 0 & -\sin \phi_s \\ -\cos \phi_s & -\sin \phi_s & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{M}^{(2)} &= M_0 \begin{pmatrix} -\sin 2\phi_s & \cos 2\phi_s & 0 \\ \cos 2\phi_s & \sin 2\phi_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}^{(3)} &= M_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \phi_s \\ 0 & 0 & -\cos \phi_s \\ \sin \phi_s & -\cos \phi_s & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{M}^{(4)} &= M_0 \begin{pmatrix} -\sin^2 \phi_s & \frac{1}{2} \sin 2\phi_s & 0 \\ \frac{1}{2} \sin 2\phi_s & -\cos^2 \phi_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Les moments  $\mathbf{M}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) peuvent être interprétés comme des cas particuliers de faille, chacun des termes  $M_{ij}$  de  $\mathbf{M}$  correspondant à une excitation en traction-compression ou en moment, tel que schématisé sur la figure 4.13.

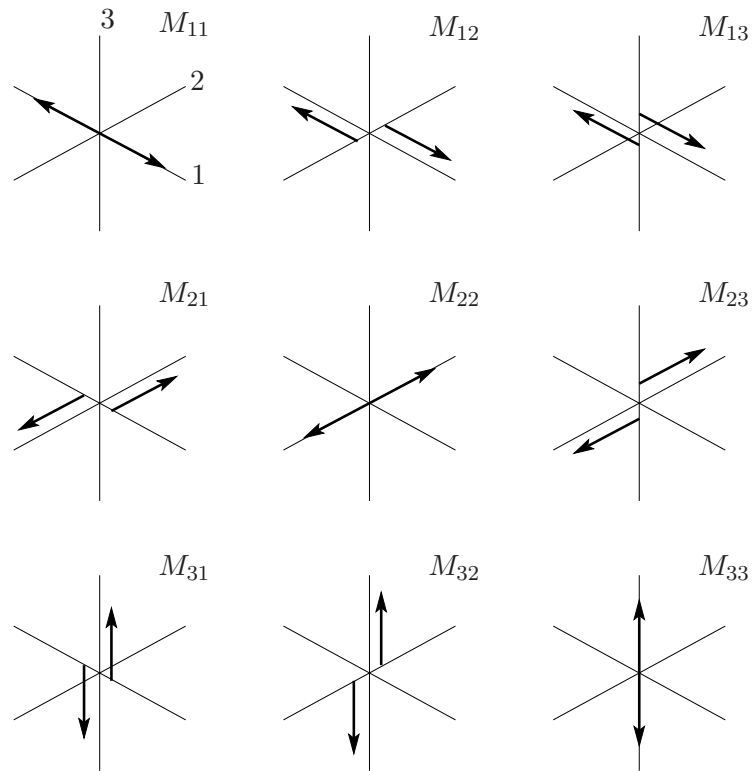


FIG. 4.13 – Représentation des différents termes du moment sismique

Dans le cas particulier où la faille est dans le plan perpendiculaire à  $x_3$  et le déplacement se fait dans la direction  $x_1$ , seuls deux termes du moment sismique sont non nuls :

$$M_{13} = M_{31} = M_0 = A\mu\bar{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ M_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 4.2.3 Noyau de Green pour une excitation en moment

La détermination du champ de déplacement résultant d'une excitation en moment est obtenue par un passage à la limite du résultat correspondant à l'excitation en force. En effet, le moment peut être interprété comme un couple de forces agissant en sens opposés et séparées d'une distance  $\Delta l_q$ . On a dans ces conditions :

$$M_{pq} = \lim_{\substack{\Delta l_q \rightarrow 0 \\ F_p \rightarrow \infty \\ \Delta l_q F_p = M_{pq}}} \Delta l_q F_p$$

d'où, en notant  $G_{np,q} = \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{np}$  :

$$u_n(\mathbf{x}, t) = M_{pq} * G_{np,q} = \lim_{\substack{\Delta l_q \rightarrow 0 \\ F_p \rightarrow \infty \\ \Delta l_q F_p = M_{pq}}} \Delta l_q F_p * \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{np} \quad (4.22)$$

et dans le cas d'une distribution de moment  $m_{pq}$  sur la faille :

$$M_{pq} = \iint_{\Sigma} m_{pq} d\Sigma \quad m_{pq} = \frac{dM_{pq}}{d\Sigma}$$

soit alors :

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} m_{pq} * G_{np,q} d\Sigma$$

On note de plus :

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_q} = -\gamma_q \quad \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi_q} = \frac{\gamma_j \gamma_q - \delta_{jq}}{r}$$

Avec ces notations, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}, t) &= M_{pq} * G_{np,q} \\ &= \left( \frac{15\gamma_n \gamma_p \gamma_q - 3\gamma_n \delta_{pq} - 3\gamma_p \delta_{nq} - 3\gamma_q \delta_{np}}{4\pi\rho} \right) \frac{1}{r^4} \int_{r/c_P}^{r/c_S} \tau M_{pq}(t - \tau) d\tau \\ &\quad + \left( \frac{6\gamma_n \gamma_p \gamma_q - \gamma_n \delta_{pq} - \gamma_p \delta_{nq} - \gamma_q \delta_{np}}{4\pi\rho c_P^2} \right) \frac{1}{r^2} M_{pq} \left( t - \frac{r}{c_P} \right) \\ &\quad - \left( \frac{6\gamma_n \gamma_p \gamma_q - \gamma_n \delta_{pq} - \gamma_p \delta_{nq} - 2\gamma_q \delta_{np}}{4\pi\rho c_S^2} \right) \frac{1}{r^2} M_{pq} \left( t - \frac{r}{c_S} \right) \\ &\quad + \frac{\gamma_n \gamma_p \gamma_q}{4\pi\rho c_P^3} \frac{1}{r} \dot{M}_{pq} \left( t - \frac{r}{c_P} \right) - \left( \frac{\gamma_n \gamma_p - \delta_{np}}{4\pi\rho c_S^3} \right) \gamma_q \frac{1}{r} \dot{M}_{pq} \left( t - \frac{r}{c_S} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

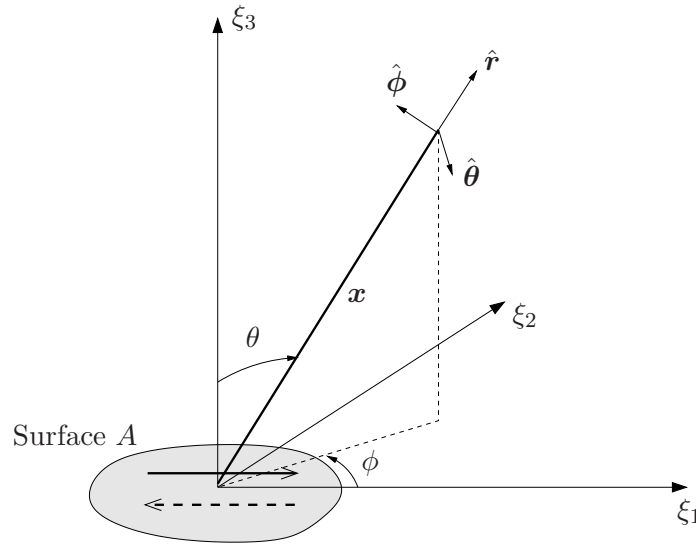


FIG. 4.14 – Coordonnées cartésiennes et sphériques utilisées dans l'étude du rayonnement

Par ailleurs, en utilisant le moment sismique  $M_0(t) = \mu \bar{u}(t)A$  (avec  $\bar{u}(t)$  représentant le déplacement différentiel moyen sur la surface de rupture et  $A$  correspondant à la surface de glissement), et en prenant le repère  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  de façon à ce que la faille soit perpendiculaire à l'axe  $\xi_3$  et le glissement dans la direction  $\xi_1$  (cf. figure 4.14), on a l'expression condensée suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{A}^N \frac{1}{r^4} \int_{r/c_P}^{r/c_S} \tau M_0(t - \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{4\pi\rho c_P^2} \mathbf{A}^{IP} \frac{1}{r^2} M_0\left(t - \frac{r}{c_P}\right) + \frac{1}{4\pi\rho c_S^2} \mathbf{A}^{IS} \frac{1}{r^2} M_0\left(t - \frac{r}{c_S}\right) \\ & + \frac{1}{4\pi\rho c_P^3} \mathbf{A}^{FP} \frac{1}{r} \dot{M}_0\left(t - \frac{r}{c_P}\right) + \frac{1}{4\pi\rho c_S^3} \mathbf{A}^{FS} \frac{1}{r} \dot{M}_0\left(t - \frac{r}{c_S}\right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dans cette expression, les champs proches (notés  $N$ ), les champs intermédiaires associés aux ondes P et S (notés  $IP$  et  $IS$ ) et les champs lointains associés aux ondes P et S (notés  $FP$  et  $FS$ ) ont des directions de radiation données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^N &= 9 \sin 2\theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} - 6(\cos 2\theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}) \\ \mathbf{A}^{IP} &= 4 \sin 2\theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} - 2(\cos 2\theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}) \\ \mathbf{A}^{IS} &= -3 \sin 2\theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + 3(\cos 2\theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}) \\ \mathbf{A}^{FP} &= \sin 2\theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{A}^{FS} &= \cos 2\theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}$$

les vecteurs  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  et  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  étant des vecteurs unitaires.

Ces expressions mettent clairement en évidence une dépendance de la composante radiale en  $\sin 2\theta \cos \phi$  et une composante transversale proportionnelle au vecteur  $(\cos 2\theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}})$ . Les figures 4.15 et 4.16 illustrent l'amplitude des différents types d'ondes en champ lointain ( $FP$  et  $FS$ ) en fonction de leur direction de propagation. Les figures 4.17 et 4.18 représentent l'amplitude du mouvement, ainsi que le sens de déplacement des particules au passage de l'onde dans les différentes directions.

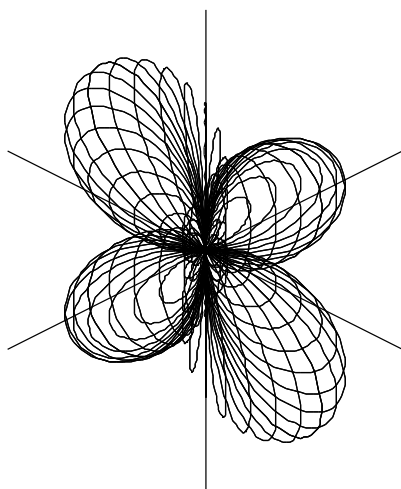


FIG. 4.15 – Onde P

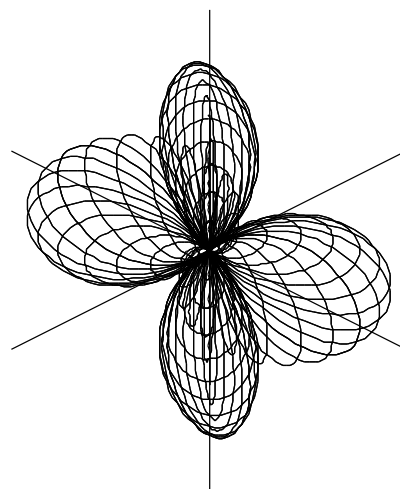


FIG. 4.16 – Onde S

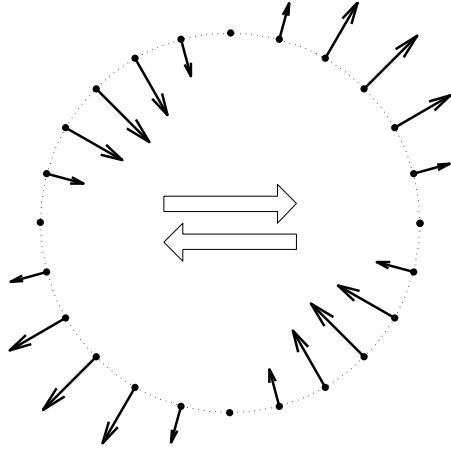


FIG. 4.17 – Composante radiale du déplacement

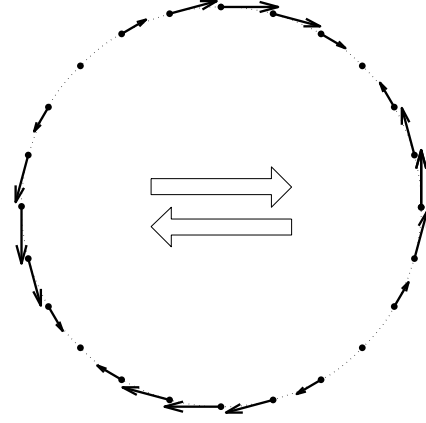


FIG. 4.18 – Composante transversale du déplacement

On peut de plus déterminer par l'expression 4.24 le déplacement final après excitation liée à un moment  $M_0$ . Pour cela, on prend la limite de chacun des termes lorsque  $t \rightarrow \infty$ , et on suppose que le moment sismique possède une valeur finale constante  $M_0(\infty)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \infty) &= \frac{M_0(\infty)}{4\pi\rho r^2} \left[ \mathbf{A}^N \left( \frac{1}{2c_S^2} - \frac{1}{2c_P^2} \right) + \frac{\mathbf{A}^{IP}}{c_P^2} + \frac{\mathbf{A}^{IS}}{c_S^2} \right] \\ &= \frac{M_0(\infty)}{4\pi\rho r^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{3}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} \right) \sin 2\theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c_P^2} \left( \cos 2\theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

### 4.3 Les ondes de surface

Dans toute cette partie, on considérera que la surface libre est définie par  $x_3 = 0$ .

#### 4.3.1 Rappels sur les ondes de surface

On différencie deux types d'ondes de surface : les ondes de Love et les ondes de Rayleigh. Les premières sont des ondes de cisaillement pur, les secondes sont un mélange de traction-compression et de cisaillement.

##### 4.3.1.1 Ondes de Love

Les ondes de Love étant des ondes de cisaillement antiplanaires, on recherche pour elles une solution de l'équation du mouvement sous la forme :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= l_1(k, x_3, \omega) e^{i(kx_1 - \omega t)} \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

ce qui introduit une fonction propre  $l_1$  restant à déterminer.

De plus, les contraintes associées à ce champ de déplacement sont alors :

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{31} = 0 \\ \tau_{23} &= \mu \frac{\partial l_1}{\partial x_3} e^{i(kx_1 - \omega t)} \\ \tau_{12} &= ik\mu l_1 e^{i(kx_1 - \omega t)}\end{aligned}\quad (4.27)$$

Une telle solution correspond au cas où aucune force volumique n'existe. De plus, les déplacements et contraintes doivent être continus aux différentes interfaces où le module d'Young risque lui d'être discontinu, car dans le cas contraire, les discontinuités joueraient le rôle de sources sismiques.

Par ailleurs, étant donné que l'on considère ici uniquement des milieux variables suivant l'axe  $x_3$  (couches horizontales), il faut simplement assurer que la composante  $\tau_{23}$  soit continue. On introduit pour cela une nouvelle fonction  $l_2$  :

$$\tau_{23} = l_2(k, x_3, \omega) e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (4.28)$$

Considérant les équations 4.27 et 4.28 ainsi que l'écriture de l'équation du mouvement, on aboutit alors à l'équation différentielle liant  $l_1$  et  $l_2$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu(x_3)^{-1} \\ k^2\mu(x_3) - \omega^2\rho(x_3) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Comme le montrent Aki et Richards [2], dans un milieu homogène, l'équation 4.29 a pour solution :

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\nu x_3} & e^{\nu x_3} \\ -\nu\mu e^{-\nu x_3} & \nu\mu e^{\nu x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{(d)} \\ S^{(m)} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

avec :

$$\nu = \sqrt{k^2 - \omega^2/c_S^2} \quad \text{et} \quad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (4.31)$$

$S^{(d)}$  et  $S^{(m)}$  sont des constantes représentant l'amplitude des ondes respectivement descendante et montante.

#### 4.3.1.2 Ondes de Rayleigh

Le raisonnement précédemment présenté dans le cas des ondes de Love est maintenant appliqué aux ondes de Rayleigh. On part pour cela de l'écriture des déplacements sous la forme :

$$\begin{aligned}u_1 &= r_1(k, x_3, \omega) e^{i(kx_1 - \omega t)} \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= ir_2(k, x_3, \omega) e^{i(kx_1 - \omega t)}\end{aligned}\quad (4.32)$$

Les contraintes correspondantes s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
\tau_{23} &= \tau_{12} = 0 \\
\tau_{11} &= i \left[ \lambda \frac{\partial r_2}{\partial x_3} + k(\lambda + 2\mu)r_2 \right] e^{i(kx_1 - \omega t)} \\
\tau_{22} &= i \left( \lambda \frac{\partial r_2}{\partial x_3} + k\lambda r_1 \right) e^{i(kx_1 - \omega t)} \\
\tau_{33} &= i \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial r_2}{\partial x_3} + k\lambda r_1 \right] e^{i(kx_1 - \omega t)} \\
\tau_{31} &= \mu \left( \frac{\partial r_1}{\partial x_3} - kr_2 \right) e^{i(kx_1 - \omega t)}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Les composantes  $\tau_{31}$  et  $\tau_{33}$  étant continues selon  $x_3$ , on introduit les fonctions  $r_3$  et  $r_4$  définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\tau_{31} &= r_3(k, x_3, \omega) e^{i(kx_1 - \omega t)} \\
\tau_{33} &= ir_4(k, x_3, \omega) e^{i(kx_1 - \omega t)}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Les équations 4.33 et 4.34 couplées à l'équation du mouvement permettent alors d'écrire l'équation différentielle liant les fonctions  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  et  $r_4$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \tag{4.35}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & k & \mu(x_3)^{-1} & 0 \\ -k\lambda(x_3)[\lambda(x_3) + 2\mu(x_3)]^{-1} & 0 & 0 & [\lambda(x_3) + 2\mu(x_3)]^{-1} \\ k^2\zeta(x_3) - \omega^2\rho(x_3) & 0 & 0 & k\lambda(x_3)[\lambda(x_3) + 2\mu(x_3)]^{-1} \\ 0 & -\omega^2\rho(x_3) & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\zeta(x_3) = \frac{4\mu(x_3)[\lambda(x_3) + \mu(x_3)]}{\lambda(x_3) + 2\mu(x_3)}$$

Et là encore, de façon similaire avec ce qui a été fait pour les ondes de Love, mais en faisant intervenir cette fois quatre constantes  $P^{(d)}$ ,  $S^{(d)}$ ,  $P^{(m)}$  et  $S^{(m)}$  correspondant aux quatre types d'ondes susceptibles d'apparaître, la solution s'écrit :

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} P^{(d)} \\ S^{(d)} \\ P^{(m)} \\ S^{(m)} \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

la matrice  $\mathbf{F}$  pouvant être factorisée sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \omega^{-1} \begin{pmatrix} c_P k & c_S \nu & c_P k & c_S \nu \\ c_P \gamma & c_S k & -c_P \gamma & -c_S k \\ -2c_P \mu k \gamma & -c_S \mu (k^2 + \nu^2) & 2c_P \mu k \gamma & c_S \mu (k^2 + \nu^2) \\ -c_P \mu (k^2 + \nu^2) & -2c_S \mu k \nu & -c_P \mu (k^2 + \nu^2) & -2c_S \mu k \nu \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} e^{-\gamma x_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu x_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\gamma x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\nu x_3} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.37}$$



avec :

$$\nu = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_S^2}} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_P^2}} \quad (4.38)$$

et :

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{et} \quad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (4.39)$$

### 4.3.2 Propagation dans les milieux stratifiés

On considère ici le modèle classique de Gutenberg constitué de diverses couches homogènes superposées verticalement. Dans ce cas, les propriétés mécaniques du sol évoluent en fonction de la profondeur : la figure 4.19 présente l'évolution de la densité ainsi que des vitesses des ondes de compression et de cisaillement.

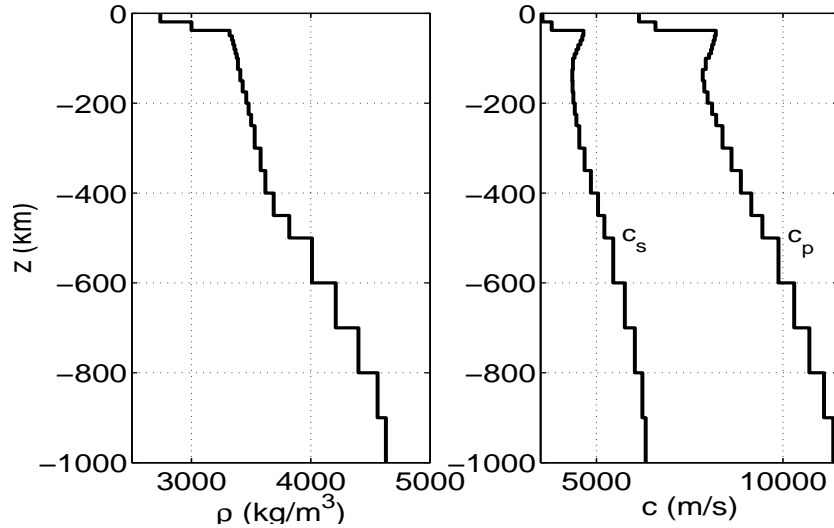


FIG. 4.19 – Données numériques du modèle de Gutenberg

#### • Cas des ondes de Love

On utilise ici le résultat de l'équation 4.30 pour écrire les conditions de continuité ainsi que les conditions aux limites correspondant aux ondes de Love. Les couches seront dans toute la suite numérotées successivement en partant de la surface de  $i = 1$  à  $N$ . Ainsi, les conditions de bord libre en  $x_3 = 0$  et de Sommerfeld à l'infini ( $x_3 \rightarrow \infty$ ) se traduisent par :

$$S_1^{(d)} - S_1^{(m)} = 0 \quad S_N^{(m)} = 0$$

De plus, les conditions de continuité entre les couches  $i$  et  $i + 1$  se traduisent par :

$$\begin{aligned} e^{-\nu_i H_i} S_i^{(d)} + e^{\nu_i H_i} S_i^{(m)} &= e^{-\nu_{i+1} H_i} S_{i+1}^{(d)} + e^{\nu_{i+1} H_i} S_{i+1}^{(m)} \\ -\nu_i e^{-\nu_i H_i} S_i^{(d)} + \nu_i e^{\nu_i H_i} S_i^{(m)} &= -\nu_{i+1} e^{-\nu_{i+1} H_i} S_{i+1}^{(d)} + \nu_{i+1} e^{\nu_{i+1} H_i} S_{i+1}^{(m)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

On aboutit ainsi à un système d'équations en  $S_i^{(d)}$  et  $S_i^{(m)}$  :

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} S_1^{(d)} \\ S_1^{(m)} \\ \vdots \\ S_i^{(d)} \\ S_i^{(m)} \\ S_{i+1}^{(d)} \\ S_{i+1}^{(m)} \\ \vdots \\ S_N^{(d)} \\ S_N^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & e^{-\nu_i H_i} & e^{\nu_i H_i} & -e^{-\nu_{i+1} H_i} & -e^{\nu_{i+1} H_i} & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & -\nu_i e^{-\nu_i H_i} & \nu_i e^{\nu_i H_i} & \nu_{i+1} e^{-\nu_{i+1} H_i} & -\nu_{i+1} e^{\nu_{i+1} H_i} & 0 & \cdots & 0 & \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

L'annulation du déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$  permet alors de déterminer les nombres d'onde  $k_n$  et les fonctions propres de Love (forme des ondes)  $l_{1,n}$  et  $l_{2,n}$  associées pour une fréquence  $\omega$  donnée. En effet, les fonctions  $l_{1,n}$  et  $l_{2,n}$  sont définies par morceaux de la façon suivante :

$$\text{pour } x_3 \in [H_{i-1}H_i], \quad \begin{pmatrix} l_{1,n}(x_3) \\ l_{2,n}(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\nu_{i,n} x_3} & e^{\nu_{i,n} x_3} \\ -\nu_{i,n} \mu_i e^{-\nu_{i,n} x_3} & \nu_{i,n} \mu_i e^{\nu_{i,n} x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_i^{(d)} \\ S_i^{(m)} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Les déplacements s'écrivent alors comme la somme des contributions des différents modes :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= \sum_n l_{1,n}(k_n, x_3, \omega) e^{i(k_n x_1 - \omega t)} \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

La détermination des vitesses de phase  $c_n$  et de groupe  $U_n$  correspondant à chacun des modes défini par le nombre d'onde  $k_n$  passe alors par l'application du principe d'Hamilton, en considérant uniquement la participation du mode  $n$  dans le déplacement  $u_i$  ; on notera alors ce déplacement  $u_{i,n}$ . On écrit pour cela le Lagrangien  $L$  du système, défini comme la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :  $L = E_c - E_p$ . On notera ici par  $\langle L \rangle$  la moyenne

temporelle de  $L$ , de sorte que :

$$\begin{aligned}\langle L \rangle &= \frac{1}{2} \rho \dot{u}_{i,n} \bar{u}_{i,n} - \frac{1}{2} \tau_{ij,n} \bar{\varepsilon}_{ij,n} \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \rho l_{1,n}^2 - \frac{1}{2} k_n^2 \mu l_{1,n}^2 - \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial l_{1,n}}{\partial x_3} \right)^2\end{aligned}\quad (4.45)$$

L'Hamiltonien est alors défini comme suit :

$$\begin{aligned}H &= \int_0^\infty \langle L \rangle dx_3 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \omega^2 \rho l_{1,n}^2 - k_n^2 \mu l_{1,n}^2 - \mu \left( \frac{\partial l_{1,n}}{\partial x_3} \right)^2 dx_3 \\ &= \omega^2 I_1 - k_n^2 I_2 - I_3\end{aligned}\quad (4.46)$$

et le principe d'Hamilton ( $\delta H = 0$ ) permet d'écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\delta H &= \omega^2 \delta I_1 - k_n^2 \delta I_2 - \delta I_3 \\ &= \int_0^\infty \left\{ \omega^2 \rho l_{1,n} - k_n^2 \mu l_{1,n} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu \frac{\partial l_{1,n}}{\partial x_3} \right) \right\} \delta l_{1,n} dx_3 - \left[ \mu \frac{\partial l_{1,n}}{\partial x_3} \delta l_{1,n} \right]_0^\infty \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.47)$$

$I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  étant donnés par :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho l_{1,n}^2 dx_3, \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu l_{1,n}^2 dx_3, \quad I_3 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu \left( \frac{\partial l_{1,n}}{\partial x_3} \right)^2 dx_3 \quad (4.48)$$

Ce résultat permet d'écrire l'équation du mouvement :

$$\omega^2 \rho l_{1,n} - k_n^2 \mu l_{1,n} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu \frac{\partial l_{1,n}}{\partial x_3} \right) = 0 \quad (4.49)$$

De plus, en multipliant l'équation 4.49 par  $l_{1,n}$  et en l'intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \dots \times l_{1,n} dx_3 &= \omega^2 \int_0^\infty \rho l_{1,n}^2 dx_3 - k_n^2 \int_0^\infty \mu l_{1,n}^2 dx_3 + \int_0^\infty l_{1,n} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu \frac{\partial l_{1,n}}{\partial x_3} \right) dx_3 \\ &= 2 (\omega^2 I_1 - k_n^2 I_2 - I_3) \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.50)$$

La combinaison des équations 4.47 et 4.50 permet alors d'écrire que pour toutes variations  $\delta \omega$ ,  $\delta k_n$ ,  $\delta I_1$ ,  $\delta I_2$  et  $\delta I_3$ , on a :

$$(\omega + \delta \omega)^2 (I_1 + \delta I_1) = (k_n + \delta k_n)^2 (I_2 + \delta I_2) + (I_3 + \delta I_3) \quad (4.51)$$

ce qui, après développement au 1<sup>er</sup> ordre et simplification liée aux équations 4.47 et 4.50, aboutit à :

$$\omega \delta \omega I_1 = k_n \delta k_n I_2 \quad (4.52)$$

Ces résultats permettent alors de connaître la vitesse de phase  $c$  et la vitesse de groupe  $U$  par les relations suivantes :

$$c_n = \frac{\omega}{k_n} \quad U_n = \frac{\partial \omega}{\partial k_n} = \frac{k_n I_2}{\omega I_1} = \frac{I_2}{c_n I_1} \quad (4.53)$$

L'évolution des vitesses de phase  $c$  et de groupe  $U$  avec la fréquence est illustrée sur la figure 4.20 avec les déformées associées pour le mode fondamental.

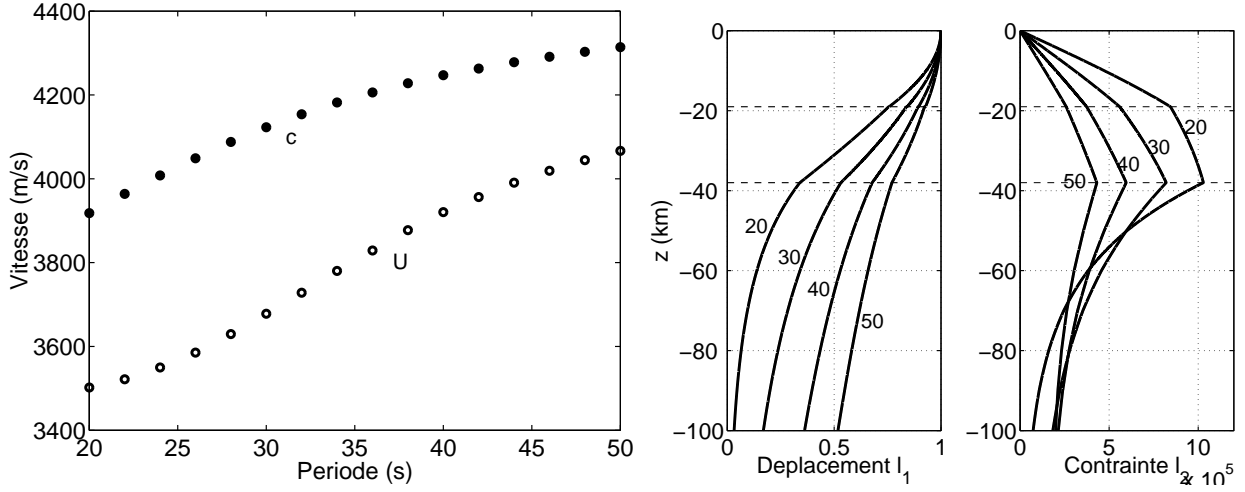


FIG. 4.20 – Vitesses de phase  $c$  et de groupe  $U$  du mode fondamental des ondes de Love et déformées associées (les nombres sur les tracés correspondent à la période considérée)

#### • Cas des ondes de Rayleigh

On utilise cette fois le résultat de l'équation 4.36 pour écrire les conditions de continuité ainsi que les conditions aux limites correspondant aux ondes de Rayleigh. Les conditions de bord libre en  $x_3 = 0$  et de Sommerfield à l'infini ( $x_3 \rightarrow \infty$ ) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} r_3(x_3 = 0) &= -2c_{P1}\mu_1 k \gamma_1 P_1^{(d)} - c_{S1}\mu_1 (k^2 + \nu_1^2) S_1^{(d)} + 2c_{P1}\mu_1 k \gamma_1 P_1^{(m)} + c_{S1}\mu_1 (k^2 + \nu_1^2) S_1^{(m)} = 0 \\ r_4(x_3 = 0) &= c_{P1}\mu_1 (k^2 + \nu_1^2) P_1^{(d)} + 2c_{S1}\mu_1 k \nu_1 S_1^{(d)} + c_{P1}\mu_1 (k^2 + \nu_1^2) P_1^{(m)} + 2c_{S1}\mu_1 k \nu_1 S_1^{(m)} = 0 \\ P_N^{(m)} &= 0 & S_N^{(m)} &= 0 \end{aligned}$$

Et en écrivant les conditions de continuité sur les fonctions  $r_1, r_2, r_3$  et  $r_4$  entre les couches  $i$  et  $i + 1$ , on aboutit à un système d'équations en  $P_i^{(d)}, S_i^{(d)}, P_i^{(m)}$  et  $S_i^{(m)}$  dont l'annulation du déterminant permet de déterminer les nombres d'onde  $k_n$  et les fonctions propres de Rayleigh  $r_{1,n}, r_{2,n}, r_{3,n}$  et  $r_{4,n}$ .

Comme dans le cas des ondes de Love présenté précédemment, on détermine les vitesses de phase  $c_n$  et de groupe  $U_n$  à partir du principe d'Hamilton :

$$c_n = \frac{\omega}{k_n} \quad U_n = \frac{\partial \omega}{\partial k_n} = \frac{I_2 + \frac{I_3}{2k_n}}{cI_1} \quad (4.54)$$

$I_1, I_2$  et  $I_3$  étant cette fois donnés par :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho (r_{1,n}^2 + r_{2,n}^2) dx_3, & I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty [(\lambda + 2\mu)r_{1,n}^2 + \mu r_{2,n}^2] dx_3, \\ I_3 &= \int_0^\infty \left( \lambda r_{1,n} \frac{\partial r_{2,n}}{\partial x_3} - \mu r_{2,n} \frac{\partial r_{1,n}}{\partial x_3} \right) dx_3 \end{aligned} \quad (4.55)$$

L'évolution des vitesses de phase  $c$  et de groupe  $U$  du mode fondamental avec la fréquence est illustrée sur la figure 4.21 avec les déformées associées.

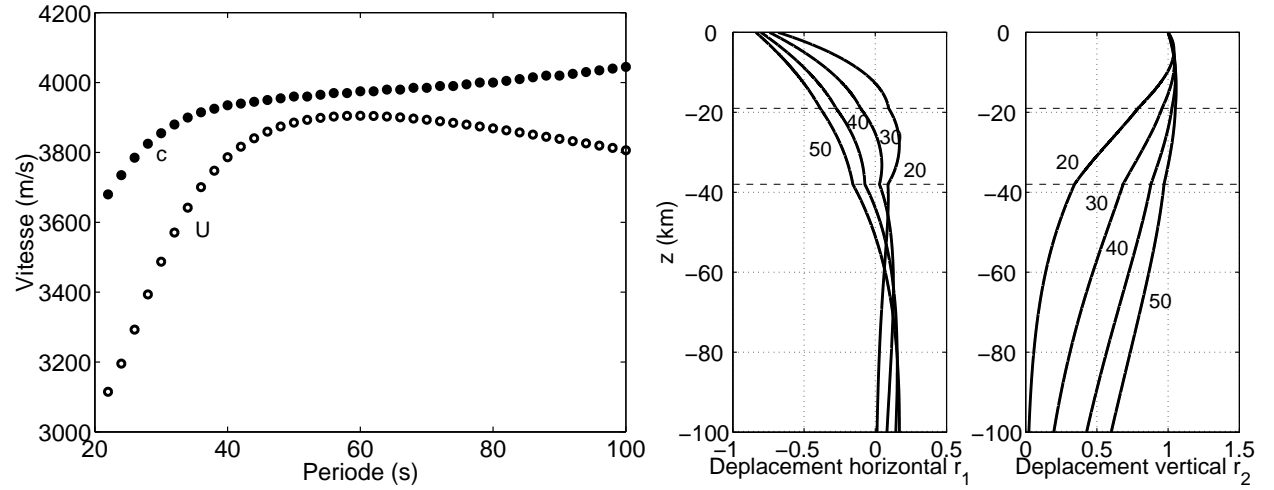


FIG. 4.21 – Vitesses de phase  $c$  et de groupe  $U$  du mode fondamental des ondes de Rayleigh et déformées associées (les nombres sur les tracés correspondent à la période considérée)

### 4.3.3 Noyaux de Green

#### 4.3.3.1 Cas bidimensionnel

On se place tout d'abord dans un cas bidimensionnel, le plan considéré étant défini par  $x_2 = 0$  et on cherche à déterminer les fonctions de Green correspondant aux ondes de surface. Les calculs sont ici détaillés pour les ondes de Love, et on se contentera de donner les résultats concernant les ondes de Rayleigh, les calculs étant alors sensiblement plus lourds.

#### Relation d'orthogonalité des modes des ondes de surface

On note ici  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  les champs de déplacement associés respectivement aux forces volumiques  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$ . On note également  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{n})$  et  $\mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{n})$  les efforts surfaciques liés respectivement aux déplacements  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ .

On peut alors écrire la relation de réciprocité suivante entre  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  :

$$\iiint_V (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} dV + \iint_S \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS = \iiint_V (\mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{u} dV + \iint_S \mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS \quad (4.56)$$

Ce résultat étant valable y compris dans le cas où les grandeurs associées à  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont considérées à des instants  $t_1$  et  $t_2$  différents, on prend ici  $t_1 = t$  et  $t_2 = \tau - t$ , et on considère l'intégrale entre 0 et  $\tau$  des termes portant sur l'accélération dans l'équation 4.56. On a alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \rho \{ \ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(\tau - t) - \mathbf{u}(t) \cdot \ddot{\mathbf{v}}(\tau - t) \} dt \\ &= \rho \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(\tau - t) + \mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\tau - t) \} dt \\ &= \rho \{ \dot{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \mathbf{v}(0) - \dot{\mathbf{u}}(0) \cdot \mathbf{v}(\tau) + \mathbf{u}(\tau) \cdot \dot{\mathbf{v}}(0) - \mathbf{u}(0) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\tau) \} \end{aligned} \quad (4.57)$$

S'il existe un instant  $\tau_0$  avant lequel  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont nuls sur tout le domaine  $V$  (ce qui implique  $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{v}} = 0$ ), alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho \{ \ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(\tau - t) - \mathbf{u}(t) \cdot \ddot{\mathbf{v}}(\tau - t) \} dt = 0 \quad (4.58)$$

et l'équation 4.56 se ramène alors, après intégration sur la variable  $t$  entre  $-\infty$  et  $\infty$ , à :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, \tau - t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau - t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \} dV dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau - t) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau - t), \mathbf{n}) \} dS dt \end{aligned} \quad (4.59)$$

Considérons maintenant le cas où il n'y a aucune force de volume. L'équation 4.59 donne alors :

$$\iint_S \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega), \mathbf{n}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega), \mathbf{n}) \} dS = 0 \quad (4.60)$$

cette relation étant valable pour tout couple  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de solutions de l'équation du mouvement sans forces volumiques. On choisit alors de prendre comme domaine d'intégration le domaine représenté sur la figure 4.22 et défini par les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $D$  et on prend  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  comme étant deux modes correspondant aux ondes de Love se propageant dans la direction  $x_1$ .  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  ont alors une unique composante suivant l'axe  $x_2$  :

$$\begin{cases} u_2 = l_1(k_n, x_3, \omega) e^{ik_n x_1} \\ T_2(\mathbf{u}) = \tau_{12} = ik_n \mu l_1 e^{ik_n x_1} \end{cases} \quad (4.61)$$

$$\begin{cases} v_2 = l_1(k_m, x_3, \omega) e^{ik_m x_1} \\ T_2(\mathbf{v}) = \tau_{12} = ik_m \mu l_1 e^{ik_m x_1} \end{cases} \quad (4.62)$$

(on donne ici simplement  $T_2$  car les autres composantes sont inutiles dans l'équation 4.60, sachant que seuls  $u_2$  et  $v_2$  sont non nuls). En substituant ces expressions dans l'équation 4.60, et en faisant tendre  $D$  vers l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned} & e^{i(k_n + k_m)a} \int_0^{\infty} i(k_n - k_m) \mu(x_3) l_1(k_m, x_3, \omega) l_1(k_n, x_3, \omega) dx_3 \\ &= e^{i(k_n + k_m)b} \int_0^{\infty} i(k_n - k_m) \mu(x_3) l_1(k_m, x_3, \omega) l_1(k_n, x_3, \omega) dx_3 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Cette relation devant être vraie quelque soit  $a$  et  $b$ , on aboutit à la relation d'orthogonalité des modes des ondes de Love :

$$\int_0^{\infty} \mu(x_3) l_1(k_m, x_3, \omega) l_1(k_n, x_3, \omega) dx_3 = 0 \quad \text{pour } k_n \neq k_m \quad (4.64)$$

Pour les ondes de Rayleigh, en reprenant les notations définies précédemment pour  $r_1$  et  $r_2$ , le même raisonnement permet d'écrire la relation d'orthogonalité sous la forme :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left\{ (\lambda + \mu)(k_m - k_n) r_1(k_n, x_3, \omega) r_1(k_m, x_3, \omega) - \mu(k_m - k_n) r_2(k_n, x_3, \omega) r_2(k_m, x_3, \omega) \right. \\ & + \lambda \left[ r_1(k_n, x_3, \omega) \frac{\partial r_2(k_m, x_3, \omega)}{\partial x_3} - r_1(k_m, x_3, \omega) \frac{\partial r_2(k_n, x_3, \omega)}{\partial x_3} \right] \\ & \left. + \mu \left[ r_2(k_n, x_3, \omega) \frac{\partial r_1(k_m, x_3, \omega)}{\partial x_3} - r_2(k_m, x_3, \omega) \frac{\partial r_1(k_n, x_3, \omega)}{\partial x_3} \right] \right\} dx_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

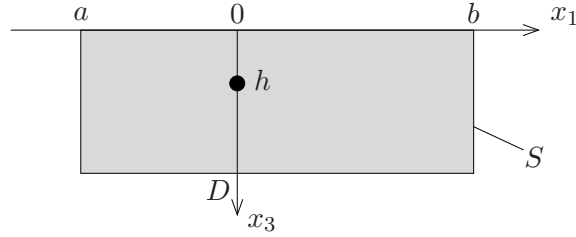


FIG. 4.22 – Domaine d'intégration

### Détermination de la fonction de Green

La relation d'orthogonalité précédemment établie va maintenant permettre de déterminer la fonction de Green  $\mathbf{G}_k(x_1, x_3; 0, h; \omega)e^{-i\omega t}$  correspondant au déplacement en un point de coordonnées  $(x_1, x_3)$  pour une force harmonique  $\mathbf{F} = e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{x}}_k$  appliquée en  $(x_1, x_3) = (0, h)$  et agissant dans la direction  $x_k$  ( $\hat{\mathbf{x}}_k$  désigne le vecteur unitaire). Cette fonction  $\mathbf{G}_k$  vérifie donc :

$$-\rho\omega^2 G_{ik}(x_1, x_3; 0, h; \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}(\mathbf{G}_k) + \delta_{ik}\delta(x_1)\delta(x_3 - h) \quad (4.66)$$

où  $G_{ik}$  représente la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{G}_k$ .

En reprenant l'équation 4.59 avec  $g_i(\mathbf{x}, t) = \delta_{ik}\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t)$  (où  $\boldsymbol{\xi}$  désigne les coordonnées du point où la force est appliquée) et de façon associée  $v_i(\mathbf{x}, t) = G_{ik}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, 0)$ , on trouve :

$$u_k(0, h) = \iint_S \{G_{ik}(x_1, x_3; 0, h; \omega)T_i(\mathbf{u}, \mathbf{n}) - u_i(x_1, x_3)T_i(\mathbf{G}_k, \mathbf{n})\} dS \quad (4.67)$$

Le champ de déplacement est alors écrit sous la forme d'une somme d'ondes de Surface (Love et Rayleigh) correspondant aux différents modes précédemment déterminés. Ainsi, la composante suivant  $x_2$  de la fonction de Green sera constituée d'une somme d'ondes de Love :

$$G_{22}(x_1, x_3; 0, h; \omega) = \begin{cases} \sum_m b_m^+(h) l_1(k_m, x_3, \omega) e^{ik_m x_1} & x_1 > 0 \\ \sum_m b_m^-(h) l_1(k_m, x_3, \omega) e^{-ik_m x_1} & x_1 < 0 \end{cases} \quad (4.68)$$

où  $b_m^+(h)$  et  $b_m^-(h)$  sont des termes restant à déterminer.

En substituant alors les équations 4.68 et 4.61 dans l'équation 4.67, on a :

$$u_2(0, h) = \sum_n b_n^+(h) \int_0^\infty i(k_n - k_m) \mu(x_3) l_1(k_n, x_3, \omega) l_1(k_m, x_3, \omega) e^{i(k_n + k_m)b} dx_3 \\ - \sum_m b_m^-(h) \int_0^\infty i(k_n + k_m) \mu(x_3) l_1(k_n, x_3, \omega) l_1(k_m, x_3, \omega) e^{i(k_m - k_n)a} dx_3 \quad (4.69)$$

et en utilisant la relation d'orthogonalité 4.64 :

$$u_2(0, h) = l_1(k_n, h, \omega) = -2ik_n b_n^-(h) \int_0^\infty \mu(x_3) l_1^2(k_n, x_3, \omega) dx_3 = -4ik_n b_n^-(h) I_2 \quad (4.70)$$

On reprend les mêmes calculs avec cette fois  $u_2 = l_1 e^{-ik_n x_1}$ , ce qui aboutit à :

$$b_n^+(h) = b_n^-(h) = \frac{l_1(k_n, h, \omega)}{-4ik_n I_2} \quad (4.71)$$

Finalement, la participation des ondes de Love dans la fonction de Green est donc donnée par :

$$G_{22}(x_1, x_3; 0, h; \omega) \approx \sum_n \frac{l_1(k_n, h, \omega) l_1(k_n, x_3, \omega)}{4k_n I_2} e^{i(k_n x_1 + \frac{\pi}{2})} \quad x_1 \gg 0 \quad (4.72)$$

ou encore :

$$G_{22}(x_1, x_3; 0, h; \omega) \approx \sum_n \frac{l_1(k_n, h, \omega) l_1(k_n, x_3, \omega)}{4k_n c U I_1} e^{i(k_n x_1 + \frac{\pi}{2})} \quad x_1 \gg 0 \quad (4.73)$$

En notant  $\mathbf{G}_{2D}^{LOVE}$  la fonction de Green globale correspondant aux ondes de Love en champ lointain dans le cas bidimensionnel, on a donc :

$$\mathbf{G}_{2D}^{LOVE} = \sum_n \frac{l_1(k_n, h, \omega) l_1(k_n, x_3, \omega)}{4k_n c U I_1} e^{i(k_n x_1 + \frac{\pi}{2})} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

De même, on établit la fonction de Green globale correspondant aux ondes de Rayleigh en champ lointain dans le cas bidimensionnel  $\mathbf{G}_{2D}^{RAYLEIGH}$  :

$$\mathbf{G}_{2D}^{RAYLEIGH} = \sum_n \frac{1}{4k_n c U I_1} e^{ik_n x_1} \quad (4.75)$$

$$\times \begin{pmatrix} ir_1(k_n, h, \omega) r_1(k_n, x_3, \omega) & 0 & r_2(k_n, h, \omega) r_1(k_n, x_3, \omega) \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_1(k_n, h, \omega) r_2(k_n, x_3, \omega) & 0 & ir_2(k_n, h, \omega) r_2(k_n, x_3, \omega) \end{pmatrix}$$

### 4.3.3.2 Cas tridimensionnel

Dans le cas tridimensionnel, les fonctions de Green correspondant aux ondes de surface sont sensiblement plus complexes à obtenir, et on se contente donc ici de donner le résultat, la démonstration pouvant être trouvée dans [2].

On se place toujours dans le cas d'une surface libre définie par  $x_3 = 0$ . On note alors  $\mathbf{G}^{LOVE}$  et  $\mathbf{G}^{RAYLEIGH}$  les fonctions de Green correspondant respectivement aux ondes de Love et de Rayleigh en champ lointain. Ces fonctions sont alors données par :

$$\mathbf{G}^{LOVE} = \sum_n \frac{l_1(x_3) l_1(h)}{8c U I_1} \begin{pmatrix} \sin^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi & 0 \\ -\sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \quad (4.76)$$

et

$$\mathbf{G}^{RAYLEIGH} = \sum_n \frac{1}{8c U I_1} \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \quad (4.77)$$

$$\times \begin{pmatrix} r_1(x_3) r_1(h) \cos^2 \phi & r_1(x_3) r_1(h) \cos \phi \sin \phi & -ir_1(x_3) r_2(h) \cos \phi \\ r_1(x_3) r_1(h) \sin \phi \cos \phi & r_1(x_3) r_1(h) \sin^2 \phi & -ir_1(x_3) r_2(h) \sin \phi \\ ir_2(x_3) r_1(h) \cos \phi & ir_2(x_3) r_1(h) \sin \phi & r_2(x_3) r_2(h) \end{pmatrix}$$



A partir de ces noyaux de Green, on peut déterminer les ondes se propageant dans le milieu pour une source quelconque. Toutefois, les noyaux donnés ici correspondent à une source en force. De façon à pouvoir prendre en compte notre modèle de source correspondant à une excitation en moment, il convient de déterminer les noyaux correspondant.

#### 4.3.4 Ondes de Love et de Rayleigh correspondant à une source en moment

Les fonctions de Green correspondant à une excitation en force ayant été obtenues précédemment, les déplacements induits par une source en moment  $\mathbf{M}$  correspondant aux ondes de Love et de Rayleigh sont ici simplement déterminés par la relation :

$$u_i(\mathbf{x}, \omega) = M_{pq}(\omega) \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{ip}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}; \omega) \quad (4.78)$$

On aboutit ainsi, par différentiation des fonctions  $\mathbf{G}^{LOVE}$  et  $\mathbf{G}^{RAYLEIGH}$  aux déplacements suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{LOVE} = & \sum_n \frac{l_1(x_3)}{8cUI_1} \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \\ & \times \left\{ ik_n l_1(h) [M_{11} \sin \phi \cos \phi - M_{21} \cos^2 \phi + M_{12} \sin^2 \phi \right. \\ & \left. - M_{22} \sin \phi \cos \phi] - \frac{\partial l_1}{\partial x_3} \Big|_h [M_{13} \sin \phi - M_{23} \cos \phi] \right\} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{RAYLEIGH} = & \sum_n \frac{1}{8cUI_1} \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} \left\{ k_n r_1(h) [M_{11} \cos^2 \phi \right. \\ & + (M_{12} + M_{21}) \sin \phi \cos \phi + M_{22} \sin^2 \phi] + i \frac{\partial r_1}{\partial x_3} \Big|_h [M_{13} \cos \phi \\ & + M_{23} \sin \phi] - ik_n r_2(h) [M_{31} \cos \phi + M_{32} \sin \phi] + \frac{\partial r_2}{\partial x_3} \Big|_h M_{33} \left. \right\} \\ & \times \left( r_1(x_3) e^{i(k_n r - \frac{\pi}{4})} \hat{\mathbf{r}} + r_2(x_3) e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \hat{\mathbf{z}} \right) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Ces déplacements sont relativement complexe, toutefois, si on se place dans le cas particulier présenté précédemment d'une faille dans le plan perpendiculaire à  $x_3$  avec un déplacement se faisant dans la direction  $x_1$ , le moment est alors ramené à :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ M_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

et les déplacement correspondant respectivement aux ondes Love et de Rayleigh s'écrivent alors :

$$\mathbf{u}^{LOVE} = \sum_n \frac{l_1(x_3)}{8cUI_1} \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \times \left\{ - \frac{\partial l_1}{\partial x_3} \Big|_h M_0 \sin \phi \right\} \hat{\phi} \quad (4.82)$$

$$\mathbf{u}^{RAYLEIGH} = \sum_n \frac{1}{8cUI_1} \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} \left\{ i \frac{\partial r_1}{\partial x_3} \Big|_h M_0 \cos \phi - ik_n r_2(h) M_0 \cos \phi \right\} \times \left( r_1(x_3) e^{i(k_n r - \frac{\pi}{4})} \hat{\mathbf{r}} + r_2(x_3) e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (4.83)$$

#### 4.4 Génération du champ par réflexions et transmissions d'ondes planes

Les études de propagation présentées jusque là se basent sur la détermination de noyaux de Green correspondant au milieu traversé de façon globale et à la nature de la source. Une autre façon de traiter le problème de la propagation d'ondes dans un milieu stratifié est d'utiliser la méthode des rayons, c'est à dire à suivre le parcours d'une onde depuis la source jusqu'à la surface du sol. Pour cela, il est indispensable de gérer les phénomènes de réflexions et de transmissions au niveau des interfaces entre les strates.

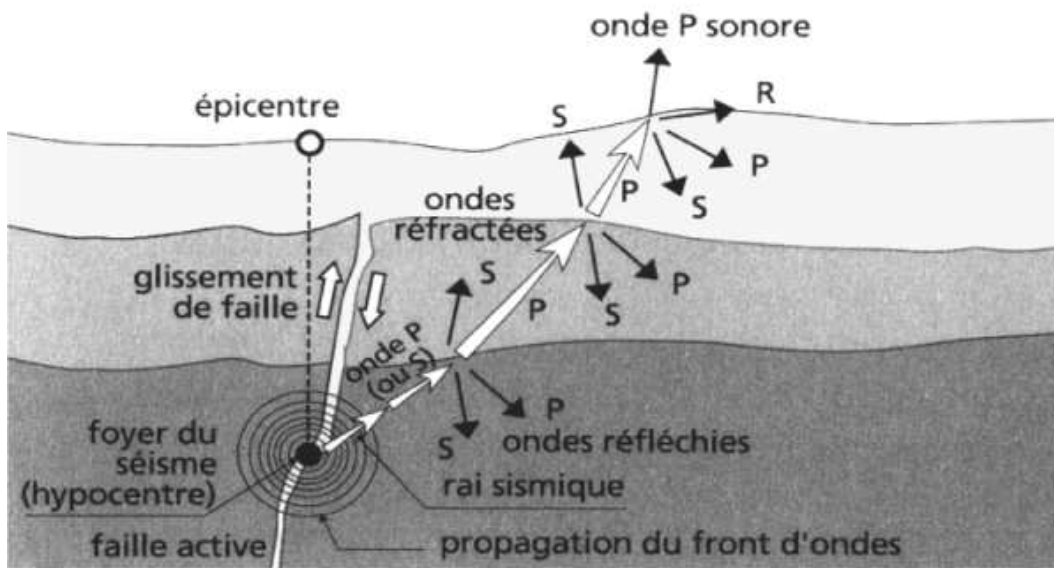


FIG. 4.23 – Propagation des ondes P et S dans un milieu stratifié

On s'intéresse donc ici à la propagation des ondes sismiques dans un milieu stratifié, tel que schématisé sur la figure 4.23. Ce milieu est supposé constitué de couches homogènes horizontales successives avec des interfaces planes. Les réflexions et transmissions d'ondes à chacune de ces interfaces sont étudiées en approximant localement l'onde par une onde plane. Les lois de Descartes permettent alors de prévoir les réflexions et transmissions de chacune des ondes (en notant  $v_i$  la vitesse des ondes dans le milieu  $i$ ) :

- première loi de Descartes : rayons incident, réfléchi et réfracté sont situés dans un même plan orthogonal à la surface de séparation des deux milieux ;
- deuxième loi de Descartes : (présentée ici dans le cas des ondes SH - cf. figure 4.24)

- loi de la réflexion :  $r_1 = i_1$
- loi de la réfraction :  $\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin r_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$

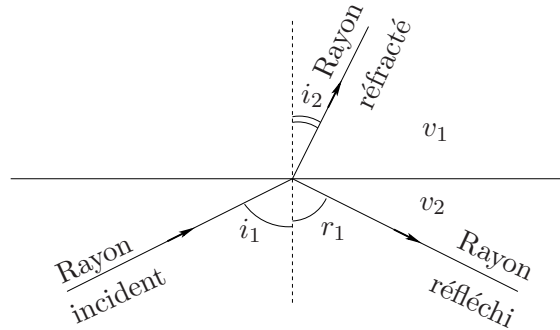
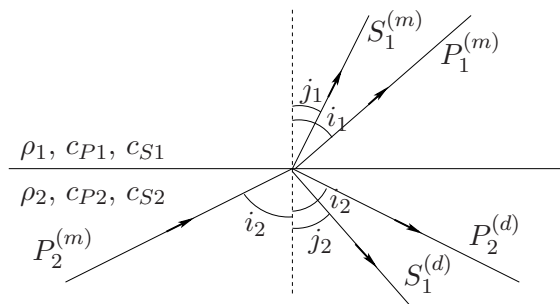


FIG. 4.24 – Illustration des lois de Descartes

#### 4.4.1 Réflexions et transmission à une interface solide-solide

Dans l'application considérée ici, on s'intéresse au cas d'une interface solide-solide avec une vision bidimensionnelle (déplacement des particules dans le plan de propagation des ondes). Dans ce cas, deux types d'ondes sont à considérer : les ondes de compression (P) et les ondes de cisaillement SV (pas d'ondes SH car on ne considère que les déplacements dans le plan de propagation des ondes). Dans ce cas, au niveau de l'interface, des conversions d'ondes vont se produire entre les ondes P et SV. Si on considère le cas particulier d'une onde P arrivant sur l'interface, elle va donner naissance à quatre ondes : deux ondes réfléchies et deux ondes transmises (figure 4.25). Dans ce cas relativement complexe, la continuité des déplacements et des contraintes au niveau de l'interface se traduit par un système de quatre équations à quatre inconnues permettant de déterminer les différents coefficients de réflexion et de transmission.

FIG. 4.25 – Réflexion et transmission d'une onde  $P$  à une interface solide-solide

Dans le cas plus général où on considère quatre ondes arrivant sur l'interface, respectivement notées  $P_1^{(m)}$ ,  $S_1^{(m)}$ ,  $P_2^{(d)}$  et  $S_2^{(d)}$ , et donnant naissance à quatre ondes notées  $P_1^{(d)}$ ,  $S_1^{(d)}$ ,  $P_2^{(m)}$  et  $S_2^{(m)}$ , les équations de continuité peuvent s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} P_1^{(m)} \\ S_1^{(m)} \\ P_2^{(d)} \\ S_2^{(d)} \end{pmatrix} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} P_1^{(d)} \\ S_1^{(d)} \\ P_2^{(m)} \\ S_2^{(m)} \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

où les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  sont définies par :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -c_{P1}p & -\cos j_1 & c_{P2}p & \cos j_2 \\ \cos i_1 & -c_{S1}p & \cos i_2 & -c_{S2}p \\ 2\rho_1 c_{S1}^2 p \cos i_1 & \rho_1 c_{S1}(1 - 2c_{S1}^2 p^2) & 2\rho_2 c_{S2}^2 p \cos i_2 & \rho_2 c_{S2}(1 - 2c_{S2}^2 p^2) \\ -\rho_1 c_{P1}(1 - 2c_{S1}^2 p^2) & 2\rho_1 c_{S1}^2 p \cos j_1 & \rho_2 c_{P2}(1 - 2c_{S2}^2 p^2) & -2\rho_2 c_{S2}^2 p \cos j_2 \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} c_{P1}p & \cos j_1 & -c_{P2}p & -\cos j_2 \\ \cos i_1 & -c_{S1}p & \cos i_2 & -c_{S2}p \\ 2\rho_1 c_{S1}^2 p \cos i_1 & \rho_1 c_{S1}(1 - 2c_{S1}^2 p^2) & 2\rho_2 c_{S2}^2 p \cos i_2 & \rho_2 c_{S2}(1 - 2c_{S2}^2 p^2) \\ \rho_1 c_{P1}(1 - 2c_{S1}^2 p^2) & -2\rho_1 c_{S1}^2 p \cos j_1 & -\rho_2 c_{P2}(1 - 2c_{S2}^2 p^2) & 2\rho_2 c_{S2}^2 p \cos j_2 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

et :

$$p = \frac{\sin i_1}{c_{P1}} = \frac{\sin j_1}{c_{S1}} = \frac{\sin i_2}{c_{P2}} = \frac{\sin j_2}{c_{S2}}$$

#### 4.4.2 Réflexions sur une surface libre

Lorsque les ondes sismiques atteignent la surface de la Terre, un phénomène de réflexion sur une surface libre se produit. Là encore, chaque type d'ondes (P et S) va donner naissance à deux ondes réfléchies. Les lois de Descartes permettent de nouveau de connaître le comportement des différents rayons. La figure 4.26 illustre ces différentes réflexions.



FIG. 4.26 – Réflexion des ondes  $P$  et  $SV$  sur une surface libre

En notant  $p = \frac{\sin i}{c_P} = \frac{\sin j}{c_S}$ , les différents coefficients de réflexion sont alors donnés par :

$$P^{(m)}P^{(d)} = \frac{-\left(\frac{1}{c_S^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i \cos j}{c_P c_S}}{\left(\frac{1}{c_S^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i \cos j}{c_P c_S}} \quad P^{(m)}S^{(d)} = \frac{4\frac{c_P}{c_S}p \frac{\cos i}{c_P} \left(\frac{1}{c_S^2} - 2p^2\right)}{\left(\frac{1}{c_S^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i \cos j}{c_P c_S}} \quad (4.87)$$

$$S^{(m)}P^{(d)} = \frac{4\frac{c_S}{c_P}p\frac{\cos j}{c_S}\left(\frac{1}{c_S^2} - 2p^2\right)}{\left(\frac{1}{c_S^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2\frac{\cos i}{c_P}\frac{\cos j}{c_S}} \quad S^{(m)}S^{(d)} = \frac{\left(\frac{1}{c_S^2} - 2p^2\right)^2 - 4p^2\frac{\cos i}{c_P}\frac{\cos j}{c_S}}{\left(\frac{1}{c_S^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2\frac{\cos i}{c_P}\frac{\cos j}{c_S}} \quad (4.88)$$

L'évolution de ces coefficients de réflexion est représentée en fonction de  $p$  sur la figure 4.27, pour  $c_P = 5$  km/s et  $c_S = 3$  km/s. Dans ces conditions,  $p$  varie entre 0 s/km et  $1/c_P = 0.2$  s/km.

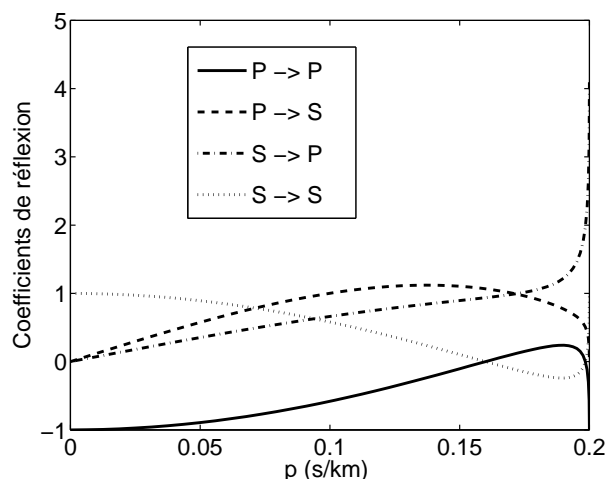


FIG. 4.27 – Coefficients de réflexion et conversion des ondes P et SV à une interface libre

#### 4.4.3 Parcours des ondes

On s'intéresse ici au parcours des ondes dans un milieu stratifié entre le point source (le foyer) et un point donné à la surface du sol. Les lois de Descartes permettent de prévoir les différents changements de direction au niveau des interfaces et ainsi de déterminer les différents parcours possibles. Considérant qu'une onde est toujours partiellement réfléchi en traversant une interface, une infinité de parcours permettent de relier deux points. C'est pourquoi on fera par la suite l'hypothèse que les rayons ayant été réfléchis au moins une fois auront une amplitude négligeable par rapport aux rayons directs, ce qui permettra de limiter le nombre de parcours à prendre en compte. Ainsi, en tenant compte des conversions possibles entre les ondes P et SV, plusieurs chemins peuvent être déterminés ayant même origine et même arrivée, comme on peut le voir sur la figure 4.28.

Connaissant ces parcours et les vitesses de propagation des ondes dans les différentes couches de sol, on peut en déduire les instants d'arrivée de chacune des ondes de volume. De façon à illustrer nos propos, on reprend les valeurs numériques introduites dans la section 4.3 concernant les vitesses de propagation dans le modèle de Gutenberg (figure 4.19). On se place dans un premier temps dans le cas où quatre couches de sol distinctes séparent le foyer de la surface du sol, tel qu'on peut le voir sur la figure 4.28. Les données numériques correspondantes sont rappelées sur la figure 4.29.

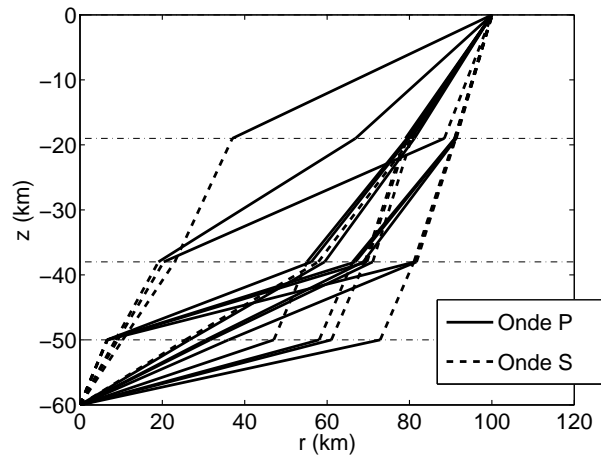


FIG. 4.28 – Illustration des chemins possibles pour joindre le foyer à un point de la surface

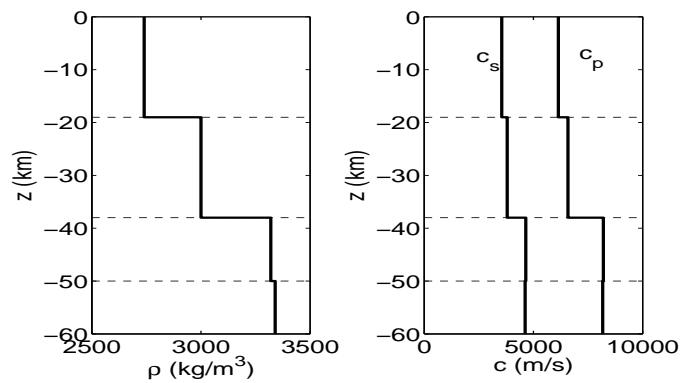


FIG. 4.29 – Modèle de Gutenberg (4 couches)

La figure 4.30 présente alors les instants d'arrivée au niveau de la surface des différentes ondes de la figure 4.28. On constate que déjà dans ce cas simple, l'arrivée des ondes s'étale sur un laps de temps relativement long. La première onde arrivant en surface est une onde dont toutes les participations au cours du parcours sont sous forme d'onde P. Inversement, l'onde arrivant le plus tardivement est une onde S tout au long de la traversée du milieu.

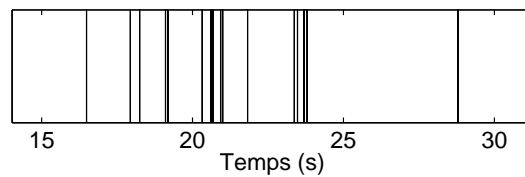


FIG. 4.30 – Instants d'arrivée des différentes ondes de volume

De cette façon, connaissant l'amplitude des ondes au niveau de la source par les noyaux de Green déterminés dans la section 4.2 et en utilisant les coefficients de transmission issus des lois de Descartes, on pourra connaître le déplacement en surface pour une source dans un milieu stratifié.

## 4.5 Propagation d'ondes en milieux inhomogènes

En complément à la méthode de génération du signal par réflexions et transmissions, il peut être utile de connaître le parcours d'une onde dans un milieu inhomogène. En effet, dans la partie précédente, on a considéré un milieu stratifié, dont chaque couche est homogène. Si cette approximation ne peut être faite, l'onde ne va pas se propager linéairement dans le milieu.

### 4.5.1 Principe des rayons

On s'intéresse ici à un milieu inhomogène, mais dont les propriétés varient de façon continue dans l'espace. La propagation des ondes dans un tel milieu peut se faire en utilisant le principe des tirs de rayons. On considère un rayon émis dans une certaine direction au niveau de la source et on étudie sa trajectoire à travers le milieu.

On note  $s$  l'abscisse curviligne, correspondant à la distance parcourue le long d'un rayon depuis la source. De plus,  $c(\mathbf{x})$  correspond à la vitesse de propagation de l'onde et  $T(\mathbf{x})$  au temps mis par l'onde pour aller du point source au point de coordonnées  $\mathbf{x}$ . On a alors :

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c\nabla T \quad (4.89)$$

Les rayons étant des courbes fixes (indépendantes du temps) dans l'espace, on cherche à éliminer l'influence de  $T$  dans les équations de façon à obtenir une équation en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  avec uniquement  $c(\mathbf{x})$ . Cette opération se fait en plusieurs étapes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) &= \frac{d}{ds} \nabla T \\ &= \left( \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \nabla \right) \nabla T = (c\nabla T \cdot \nabla) \nabla T = \frac{1}{2} c \nabla \left[ (\nabla T)^2 \right] = \frac{1}{2} c \nabla \frac{1}{c^2} \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) &= -\frac{1}{c^2} \nabla c = \nabla \left( \frac{1}{c} \right) \end{aligned} \quad (4.90)$$

L'équation différentielle définissant un rayon s'écrit alors (en coordonnées spatiales uniquement) :

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = \nabla \left( \frac{1}{c} \right) \quad (4.91)$$

Cette équation peut être résolue simplement par la méthode des différences finies, permettant ainsi de déterminer le trajet d'un rayon connaissant sa source et sa direction initiale et à condition de connaître  $c$  et  $\nabla c$  en chaque point. Par ailleurs, dans un milieu homogène, l'équation 4.91 se réduit à  $d^2\mathbf{x}/ds^2 = 0$ , dont la solution générale est  $\mathbf{x} = \gamma s + \xi$  ( $\gamma$  et  $\xi$  étant des vecteurs constants), ce qui correspond à une ligne droite de direction  $\gamma$  et passant par le point source  $\xi$ , ce qui correspond bien à ce qui pouvait être attendu de façon naturelle.

Dans un milieu où  $c$  ne dépend que de la profondeur  $z$ , la quantité

$$\hat{z} \times \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \equiv \mathbf{Q} \quad (4.92)$$

(où  $\hat{z}$  correspond au vecteur directeur de l'axe  $z$ ) est constante le long d'un rayon. En effet, on a :

$$\frac{d\mathbf{Q}}{ds} = \hat{z} \times \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = \hat{z} \times \nabla \left( \frac{1}{c} \right) = 0 \quad (4.93)$$

( $\hat{z}$  étant parallèle à  $\nabla(1/c)$ ). Ce résultat signifie que les rayons sont limités dans des plans parallèles à l'axe  $z$  et que  $|\mathbf{Q}| = \frac{\sin(i(z))}{c(z)} \equiv p$  est constant le long d'un rayon,  $i$  représentant ici l'angle entre la direction des  $z$  croissants et le rayon (cf. figure 4.31). Il s'agit de la *loi de Snell* et  $p$  est appelé *paramètre de rayon*.

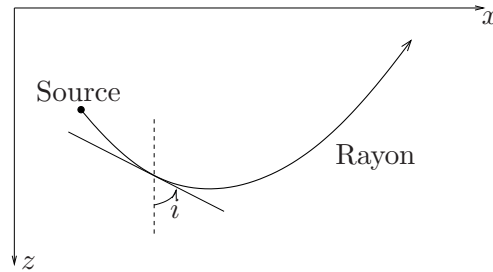


FIG. 4.31 – Propagation d'un rayon dans un milieu dépendant de la profondeur

#### 4.5.2 Illustration dans le cas d'une variation linéaire avec la profondeur

De façon à illustrer le principe des rayons présenté précédemment, on considère un milieu dans lequel la vitesse de propagation des ondes varie linéairement avec la profondeur. Cela signifie que  $c(z)$  peut s'écrire sous la forme  $c(z) = \alpha + \beta z$ .

Si on compare alors les directions de propagation des rayons dans ce cas (figure 4.33) et dans le cas d'un milieu homogène (figure 4.32), on constate que les trajectoires sont plus complexes. En effet, alors que dans le cas du milieu homogène les trajectoires sont rectilignes, dans un milieu inhomogène, les trajectoires deviennent courbes et cette complexité croît avec celle des variations de la vitesse dans le milieu.

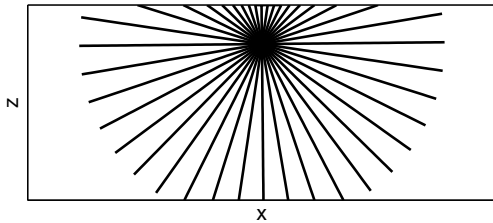


FIG. 4.32 – Milieu homogène

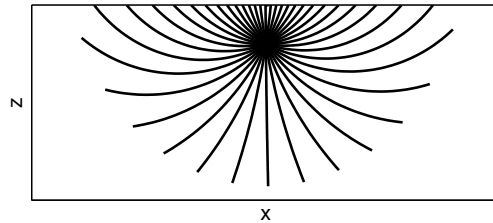


FIG. 4.33 – Milieu inhomogène



## 4.6 Propagation d'ondes en milieux aléatoires

Les outils présentés précédemment s'appliquent parfaitement dans le cas d'un milieu stratifié. Toutefois, il peut s'avérer intéressant de traiter le sol non pas comme un milieu stratifié, mais comme un milieu aléatoire, c'est à dire dont les propriétés mécaniques varient aléatoirement dans l'espace. Dans ce cas, les méthodes précédentes ne sont plus adaptées et il convient de mettre en œuvre des outils spécifiques. C'est dans ce cadre qu'intervient la théorie du transport dont nous allons exposer les fondements.

L'étude de la propagation d'ondes en milieux hétérogènes aléatoires trouve son application dans une très large gamme de problèmes mécaniques et physiques. Néanmoins, la grande majorité des travaux effectués jusqu'à présent concerne la propagation des ondes électromagnétiques ou acoustiques, traitée par une équation d'onde scalaire. Nous allons voir ici comment le problème peut être résolu dans le cas d'ondes élastiques, de façon à voir la potentialité de cette méthode dans le cadre de notre application à l'analyse d'endommagement de bâtiments.

### 4.6.1 Phénomènes caractéristiques

Les connaissances actuelles du phénomène de propagation d'ondes en milieu aléatoire sont le résultat de recherches suivant trois axes principaux :

- la théorie du transport ;
- la théorie de la diffraction (basée sur la décomposition du champ de déplacement en ondes planes) ;
- la théorie de la diffusion.

On différenciera alors différentes approches en fonction du rapport entre les différentes échelles caractéristiques intervenant dans les phénomènes de propagation d'ondes. Quatre échelles caractéristiques sont ainsi à prendre en compte (cf. figure 4.34) :

- la longueur d'onde  $\lambda$  ;
- la distance de propagation  $d$  ;
- la taille caractéristique des hétérogénéités du milieu  $L$ .
- la distance caractéristique entre hétérogénéités ou libre parcours moyen  $l$ .

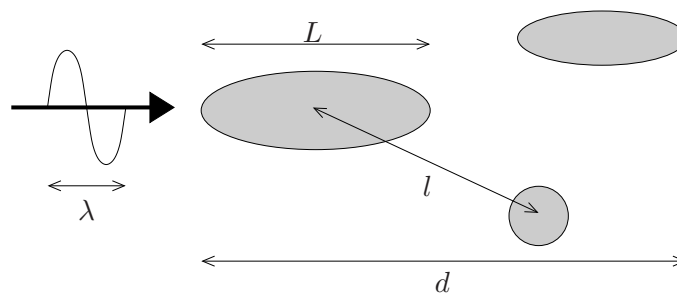


FIG. 4.34 – Définitions des distances caractéristiques

On différencie alors les cas suivants :

- $\lambda \gg d$  ou  $\lambda \approx d$

ces deux cas s'inscrivent directement dans le cadre de la diffraction. On peut dans ce cas identifier un régime de propagation déterministe auquel s'ajoutent des fluctuations fortes (réflexions multiples pour  $d \gg L$ ) ou faibles (réflexion/transmission simple pour  $d \approx L$ ).

- $\lambda \ll d$

dans ce cas, une hypothèse hautes fréquences peut être utilisée. La théorie des rayons permet alors de traiter le problème pour des hétérogénéités marquées déterministes avec  $L \gg \lambda$ .

#### 4.6.2 La théorie du transport

La théorie du transport des ondes propagatives dans les milieux inhomogènes concerne les ondes propagatives de toute nature (électro-magnétique, mécanique,...), évoluant dans un milieu présentant des obstacles dont le principal effet est la diffusion de ces ondes au sens large (réflexion, diffraction, absorption,...). Elle fut tout d'abord développée pour étudier la propagation de la lumière dans l'atmosphère terrestre. Cette théorie présente la particularité de s'intéresser directement au transport de l'énergie à travers un milieu inhomogène, ce qui a pour inconvénient de perdre l'information de phase associée aux ondes, mais permet de connaître la participation de chacun des types d'ondes. Quelques études récentes sur le sujet peuvent être citées, tels que les travaux de Ryzhik, Papanicolaou et Keller [5, 61, 67, 68].

Comme Papanicolaou l'explique [61], les équations du transport permettent de décrire sans aucune difficulté les phénomènes de propagation si les hypothèses suivantes sont rassemblées :

- approximation hautes fréquences : les longueurs d'ondes doivent être beaucoup plus courtes que la distance de propagation,  $\lambda \ll d$  ;
- les longueurs d'ondes doivent être du même ordre de grandeur que la taille caractéristique des hétérogénéités,  $\lambda \approx L$

- **Cas des ondes acoustiques**

On présente ici pour commencer la théorie du transport dans sa forme la plus simple, c'est à dire appliquée aux ondes acoustiques. On note  $a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k})$  la densité d'énergie définie pour tout vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , position  $\mathbf{x}$  et instant  $t$ . Du fait de l'interaction avec les inhomogénéités du milieu qu'elle traverse, une onde arrivant avec un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  peut être diffusée dans une autre direction avec le vecteur d'onde  $\mathbf{k}'$  (cf. figure 4.35). L'équation du transport donne alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) - \nabla_{\mathbf{x}} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \cdot \nabla_{\mathbf{k}} a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}') d\mathbf{k}' - \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{k}) a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.94)$$

avec :

$$\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') d\mathbf{k}' \quad (4.95)$$

et où  $n$  est la dimension de l'espace considéré ( $n = 2$  ou  $3$ ),  $\nabla_{\mathbf{k}}$  et  $\nabla_{\mathbf{x}}$  sont les opérateurs Nabla concernant la différentiation respectivement vis à vis de  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{x}$ .  $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  est la fréquence au point  $\mathbf{x}$  de l'onde se propageant avec le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et  $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$  est le taux de conversion en énergie d'une onde de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  en une onde de vecteur d'onde  $\mathbf{k}'$  au point  $\mathbf{x}$ . La fonction  $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$  est positive et généralement symétrique en  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$ .

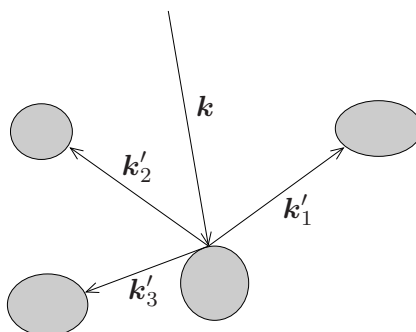


FIG. 4.35 – Illustration de la théorie du transport

La partie gauche de l'équation 4.94 est la dérivée temporelle totale de  $a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k})$  en un point se déplaçant le long d'une trajectoire dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  et peut être écrite sous la forme d'une équation de Liouville :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \{\omega, a\} \quad (4.96)$$

où  $\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial k_i} - \frac{\partial f}{\partial k_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$  est le crochet de Poisson. La partie droite de l'équation 4.94 représente quant à elle les effets de diffusion.

Il est clair que si l'on ne considère pas de dissipation d'énergie, alors l'énergie totale doit être indépendante du temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) d\mathbf{x} d\mathbf{k} = 0 \quad (4.97)$$

#### • Cas des ondes élastiques

Dans notre cas, on s'intéresse aux ondes sismiques, qui, comme on l'a vu plus tôt, sont des ondes élastiques. Des applications de la théorie du transport en sismologie peuvent être trouvées dans [26, 56, 77]. La principale difficulté spécifique aux ondes élastiques est liée au couplage entre les ondes P (compression) et S (cisaillement). En effet, dans un milieu inhomogène, une onde P de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  peut être partiellement diffusée en une onde S de vecteur d'onde  $\mathbf{p}$  et de même fréquence, donc avec  $c_P(\mathbf{x})|\mathbf{k}| = c_S(\mathbf{x})|\mathbf{p}|$ , et inversement. C'est pourquoi les équations de transport des ondes P et S sont couplées. L'équation de transport des ondes P sera une équation scalaire similaire à l'équation 4.94 avec un terme additionnel prenant en compte les conversions S-P. Par contre, l'équation de transport correspondant aux ondes S sera plus complexe et s'apparentera aux cas des ondes électromagnétiques.

On définit alors la matrice de cohérence  $\mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k})$  correspondant aux ondes S à partir des paramètres de Stokes  $I$ ,  $Q$ ,  $U$  et  $V$  (paramètres permettant de spécifier la phase et la polarisation d'une onde) par :

$$\mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U + iV \\ U - iV & I - Q \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

On a ainsi les équations de transport suivantes, avec  $a^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{k})$  la densité d'énergie des ondes P,  $\sigma^{ij}$  et  $\Sigma^{ij}$  ( $i, j = P$  ou S) correspondant à  $\sigma$  et  $\Sigma$  de l'équation 4.95 et tenant compte de la conversion entre les deux types d'onde :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{k})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{k}} \omega^P(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} a^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) - \nabla_{\mathbf{x}} \omega^P(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \cdot \nabla_{\mathbf{k}} a^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sigma^{PP}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') a^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}') d\mathbf{k}' - \Sigma^{PP}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) a^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \sigma^{PS}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}') d\mathbf{k}' - \Sigma^{PS}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) a^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{k}} \omega^S(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) - \nabla_{\mathbf{x}} \omega^S(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \\ &+ \mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) N(\mathbf{x}, \mathbf{k}) - N(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sigma^{SS}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}') d\mathbf{k}' - \Sigma^{SS}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \sigma^{SP}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') a^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}') d\mathbf{k}' - \Sigma^{SP}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.100)$$

où la matrice  $\mathbf{N}$  est définie par :

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial c_S(\mathbf{x})}{\partial x_i} |\mathbf{k}| z^{(1)}(\mathbf{k}) \cdot \frac{\partial z^{(2)}(\mathbf{k})}{\partial k_i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.101)$$

les vecteurs  $z^{(1)}(\mathbf{k})$  et  $z^{(2)}(\mathbf{k})$  étant définis à partir de  $\mathbf{k}$  de telle sorte que, en coordonnées polaires, on a :

$$\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^{(1)}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^{(2)}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.102)$$

La complexité relative des équations 4.99 et 4.100 par rapport à l'équation 4.94 montre la difficulté de prise en compte des interactions entre les ondes de type P et S dans un milieu aléatoire. Pour plus de détails sur ces calculs, on se reportera à l'article de Ryzhik *et al.* [67].

### 4.6.3 Approximation hautes fréquences

#### • Cadre général

Nous allons ici nous intéresser spécifiquement aux cas où l'hypothèse hautes fréquences peut être introduite. La transformation de Wigner pourra alors être utilisée pour étudier le comportement du système.

Pour commencer, on rappelle que la plupart des équations d'ondes peuvent être écrites sous la forme de systèmes symétriques hyperboliques :

$$\mathbb{A}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \mathbb{D}^i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = 0, \quad \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (4.103)$$

où  $\mathbb{A}$  est une matrice symétrique, définie positive et les matrices  $\mathbb{D}^i$  sont symétriques et indépendantes de  $\mathbf{x}$  et  $t$ .

La densité d'énergie  $\mathcal{E}(t, \mathbf{x})$  correspondant aux solutions d'un tel système est alors donnée par :

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \mathbb{A}_{ij}(\mathbf{x}) u_i(t, \mathbf{x}) \bar{u}_j(t, \mathbf{x}) \quad (4.104)$$

et le flux d'énergie  $\mathcal{F}_i(t, \mathbf{x})$  est défini par :

$$\mathcal{F}_i(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \mathbb{D}^i \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \rangle \quad (4.105)$$

Le produit scalaire de chacun des termes de l'équation 4.103 avec  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  permet d'écrire la loi de conservation d'énergie :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = 0 \quad (4.106)$$

#### • Ondes élastiques - cas déterministe

Dans le cas des ondes élastiques, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.107)$$

où la densité  $\rho$  et les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  dépendent de la position  $\mathbf{x}$ .

De façon à écrire ces équations sous la forme d'un système symétrique hyperbolique tel que celui de l'équation 4.103, on commence par introduire les variables  $p$ ,  $\xi_i$  et  $\varepsilon_{ij}$  définies par :

$$p = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \quad \xi_i = \dot{u}_i \quad \varepsilon_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (4.108)$$

Comme ces définitions le montrent clairement,  $p$  représente une pression,  $\boldsymbol{\xi}$  représente la vitesse et  $\varepsilon_{ij}$  est un élément du tenseur des contraintes. On note alors  $\mathbf{w}$  le vecteur défini par  $\mathbf{w} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}, p)$ . L'équation 4.107 peut alors être écrite sous la forme :

$$\mathbb{A}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \mathbb{D}^i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.109)$$

où la matrice  $\mathbb{A}$  est donnée par :

$$\mathbb{A}(\mathbf{x}) = \operatorname{diag} \left( \rho, \rho, \rho, \frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\lambda} \right) \quad (4.110)$$

les matrices  $\mathbb{D}^i$  sont constantes et symétriques, et la matrice de dispersion  $\mathbb{L}$  définie par  $\mathbb{L}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{A}(\mathbf{x}) k_i \mathbb{D}^i$  s'écrit par blocs :

$$\mathbb{L} = - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{K}(\mathbf{k})/\rho & \mathbf{M}(\mathbf{k})/\rho & \mathbf{k}/\rho \\ 2\mu \mathbf{K}(\mathbf{k}) & 0 & 0 & 0 \\ \mu \mathbf{M}(\mathbf{k}) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda \mathbf{k}^t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.111)$$

avec les matrices  $\mathbf{K}(\mathbf{k})$  et  $\mathbf{M}(\mathbf{k})$  données par :

$$\mathbf{K}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & k_1 \\ k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.112)$$

Les valeurs propres de la matrice de dispersion  $\mathbb{L}$  sont alors :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 0 && \text{ordre 4} \\ \omega_{\pm}^P &= \pm c_P |\mathbf{k}| && \text{ordre 1} \\ \omega_{\pm}^S &= \pm c_S |\mathbf{k}| && \text{ordre 2} \end{aligned} \quad (4.113)$$

et les vecteurs propres associés sont, en notant  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\pm}^P &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \hat{\mathbf{k}}, \mp \frac{2\mu}{\sqrt{2(2\mu + \lambda)}} \mathbf{K}(\hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{k}}, \mp \frac{\mu}{\sqrt{2(2\mu + \lambda)}} \mathbf{M}(\hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{k}}, \mp \frac{\lambda}{\sqrt{2(2\mu + \lambda)}} \right), \\ \mathbf{b}_{\pm}^{Sj} &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \mathbf{z}^{(j)}, \mp \sqrt{2\mu} \mathbf{K}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{z}^{(j)}, \mp \sqrt{\frac{\mu}{2}} \mathbf{M}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{z}^{(j)}, 0 \right), \quad j = 1, 2, \\ \mathbf{b}^{0j} &= \left( 0, \sqrt{2\mu} \mathbf{K}(\mathbf{z}^{(j)}) \mathbf{z}^{(j)}, \mp \sqrt{\frac{\mu}{2}} \mathbf{M}(\mathbf{z}^{(j)}) \mathbf{z}^{(j)}, 0 \right), \quad j = 1, 2, \\ \mathbf{b}^{03} &= \left( 0, 2\sqrt{\mu} \mathbf{K}(\mathbf{z}^{(1)}) \mathbf{z}^{(2)}, \sqrt{\mu} \mathbf{M}(\mathbf{z}^{(1)}) \mathbf{z}^{(2)}, 0 \right), \\ \mathbf{b}^{04} &= \left( 0, \sqrt{\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}} \mathbf{K}(\hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{k}}, \sqrt{\frac{\lambda\mu}{2(\lambda + 2\mu)}} \mathbf{M}(\hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{k}}, -\sqrt{\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}} \right) \end{aligned} \quad (4.114)$$

Les vecteurs propres  $\mathbf{b}_{\pm}^P$  représentent les modes longitudinaux ou de compression, donc les ondes P, tandis que les vecteurs propres  $\mathbf{b}_{\pm}^{Sj}$  représentent les modes transverses ou de cisaillement, donc les ondes S. Les vecteurs propres  $\mathbf{b}^{0j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$  correspondent quant à eux à des modes non propagatifs.

La densité d'énergie  $\mathcal{E}$  et le flux d'énergie  $\mathcal{F}$  des ondes élastiques sont alors respectivement donnés par :

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}) |\dot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})|^2 + \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{x}) (\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}) \operatorname{Tr}(\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \nabla^t \mathbf{u}(t, \mathbf{x}))^2 \quad (4.115)$$

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{x}) = \{ \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) (\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \nabla^t \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \} \dot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})$$

Enfin, on obtient les expressions de  $a_{\pm}^P$  et  $\mathbf{W}_{\pm}^S$  :

$$a_{\pm}^P = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int e^{iky} f_{\pm}^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{y}, \mathbf{k}) \bar{f}_{\pm}^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{y}, \mathbf{k}) d\mathbf{y} \quad (4.116)$$

$$\mathbf{W}_{\pm ij}^S = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int e^{iky} f_i^{S\pm}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{y}, \mathbf{k}) \bar{f}_j^{S\pm}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{y}, \mathbf{k}) d\mathbf{y} \quad (4.117)$$

avec :

$$\begin{aligned} f_{\pm}^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{k}) &= \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{x})}{2}} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{z})) \\ &\mp \frac{\mu(\mathbf{x})}{\sqrt{2(2\mu(\mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{x}))}} (\hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{z}) + \nabla^t \mathbf{u}(t, \mathbf{z}))) \hat{\mathbf{k}} \mp \frac{\lambda(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{z})}{\sqrt{2(2\mu(\mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{x}))}} \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$f_i^{S\pm}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{x})}{2}} (\mathbf{z}^{(i)}(\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{z}))) \mp \sqrt{\frac{\mu(\mathbf{x})}{2}} (\hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{z}) + \nabla^t \mathbf{u}(t, \mathbf{z})) \mathbf{z}^{(i)}(\mathbf{k})) \quad (4.119)$$

• Ondes élastiques - milieu aléatoire

Dans le cas d'ondes élastiques se propageant dans un milieu aléatoire, on reprend l'équation 4.109 en introduisant une matrice  $\mathbb{A}$  perturbée. La matrice  $\mathbb{A}$  est ainsi réécrite sous la forme :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2\mu) \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/\mu) \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\tilde{\theta}/2) \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\theta} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right] \quad (4.120)$$

où  $\mathbf{I}$  représente ici la matrice identité  $3 \times 3$ , et  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{\theta}$  et  $\tilde{\psi}$  correspondent respectivement aux fluctuations de  $\rho$ ,  $1/\mu$  et  $1/\lambda$ .

On cherche donc maintenant une solution des équations de transport 4.99 et 4.100 correspondant respectivement aux ondes P et S. Pour cela, on redimensionne les variables temporelle et spatiale  $(t, \mathbf{x})$  en  $t \rightarrow \varepsilon^2 t$  et  $\mathbf{x} \rightarrow \varepsilon \mathbf{x}$ . Les équations 4.99 et 4.100 deviennent alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial a^P}{\partial t} + \varepsilon c_P \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} a^P &= \mathcal{A}_{PP}[a^P] + \mathcal{A}_{PS}[\mathbf{W}^S] - (\Sigma^{PP} + \Sigma^{PS}) a^P \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{W}^S}{\partial t} + \varepsilon c_S \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W}^S &= \mathcal{A}_{SS}[\mathbf{W}^S] + \mathcal{A}_{SP}[a^P] - (\Sigma^{SS} + \Sigma^{SP}) \mathbf{W}^S \end{aligned} \quad (4.121)$$

les opérateurs  $\mathcal{A}_{ij}$  étant définis en considérant l'analogie entre l'équation 4.121 et les équations 4.99 et 4.100. On développe alors les solutions de l'équation 4.121 en série sous la forme :

$$a^P = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i a^{(i)} = a^{(0)} + \varepsilon a^{(1)} + \varepsilon^2 a^{(2)} + \dots \quad \mathbf{W}^S = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{W}^{(i)} = \mathbf{W}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{W}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{W}^{(2)} + \dots \quad (4.122)$$

Ainsi, en introduisant les expressions 4.122 dans l'équation 4.121, on obtient que les termes principaux  $a^{(0)}$  et  $\mathbf{W}^{(0)}$  doivent satisfaire les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{PP}[a^{(0)}] + \mathcal{A}_{PS}[\mathbf{W}^{(0)}] &= (\Sigma^{PP} + \Sigma^{PS}) a^{(0)} \\ \mathcal{A}_{SS}[\mathbf{W}^{(0)}] + \mathcal{A}_{SP}[a^{(0)}] &= (\Sigma^{SS} + \Sigma^{SP}) \mathbf{W}^{(0)} \end{aligned} \quad (4.123)$$

On peut alors montrer [67] que les solutions sont de la forme :

$$a^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) = \phi(t, \mathbf{x}, |\mathbf{k}|), \quad \mathbf{W}^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) = \phi \left( t, \mathbf{x}, \frac{c_S}{c_P} |\mathbf{k}| \right) \mathbf{I} \quad (4.124)$$

où  $\phi(t, \mathbf{x}, |\mathbf{k}|)$  est une fonction scalaire restant à déterminer.

A partir de ce résultat, en reprenant l'écriture des énergies sous la forme :

$$\mathcal{E}_P(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} a^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad \mathcal{E}_S(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \text{Tr} \mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (4.125)$$

et compte tenu du fait qu'au premier ordre, on a :

$$a^P(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \approx a^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}), \quad \mathbf{W}^S(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \approx \mathbf{W}^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}) = a^{(0)} \left( t, \mathbf{x}, \frac{c_S}{c_P} \mathbf{k} \right) \mathbf{I} \quad (4.126)$$

il vient la relation suivante :

$$\mathcal{E}_P(t, \mathbf{x}) \approx \frac{c_S^3}{2c_P^3} \mathcal{E}_S(t, \mathbf{x}) \quad (4.127)$$

Ce résultat montre clairement qu'en régime de diffusion, la majorité de l'énergie est contenue dans les ondes S, quelle que soit la distribution initiale.

#### 4.6.4 Applicabilité

La théorie du transport permet donc, dans un milieu aléatoire et non stratifié, de déterminer les niveaux d'énergie de façon statistique. Toutefois, bien qu'une telle analyse soit intéressante en termes de niveau de nocivité d'un signal sismique, elle n'est pas suffisamment pertinente pour l'étude de l'endommagement de bâtiments. En effet, on ne dispose plus ici de l'information sur la phase du signal, or celle-ci est indispensable pour analyser le comportement temporel d'une structure et donc évaluer son endommagement. On se limitera donc aux études de milieux stratifiés qui pourront être étudiés à partir des noyaux de Green précédemment déterminés.

### 4.7 Conclusion

Différentes méthodes permettant de simuler la propagation d'ondes au sein d'un milieu élastique ont été présentées dans ce chapitre. Toutefois, toutes ces méthodes ne sont pas parfaitement adaptées à notre application, car il faut garder à l'esprit que le but est ici d'analyser l'endommagement d'une structure en surface, donc d'utiliser la sortie de ce modèle comme entrée en termes d'excitation sur la structure. Ainsi, la théorie du transport semble inadaptée et ne sera pas retenue. Par contre, les méthodes basées sur les noyaux de Green et les réflexions/transmissions d'ondes planes semblent toutes deux adéquates. Nous nous focaliserons dans la suite sur les noyaux de Green.



## Chapitre 5

# Application - Synthèse

Les phénomènes liés à la naissance de l'excitation sismique au niveau du foyer et à la propagation des ondes dans le sol ayant été traités de façon dé耦lée dans les chapitres précédents, il convient maintenant de voir comment le problème global est traité en réunissant l'ensemble des résultats. C'est l'objet de ce chapitre.

Pour cela, de façon à pouvoir fixer les idées, on se fixera un cas d'application particulier permettant de synthétiser les résultats dans un cadre relativement simple.

### 5.1 Cadre d'application

La synthèse des résultats issus des chapitres précédents permet d'aboutir au modèle complet de source sismique et est réalisée dans cette partie pour un cas particulier de faille : on choisit ici de s'intéresser à des séismes superficiels se produisant dans une zone de subduction, et on se limitera à un milieu stratifié à deux couches pour étudier la propagation. On verra que dans ce cadre simple, les résultats obtenus sont tout à fait généralisables.

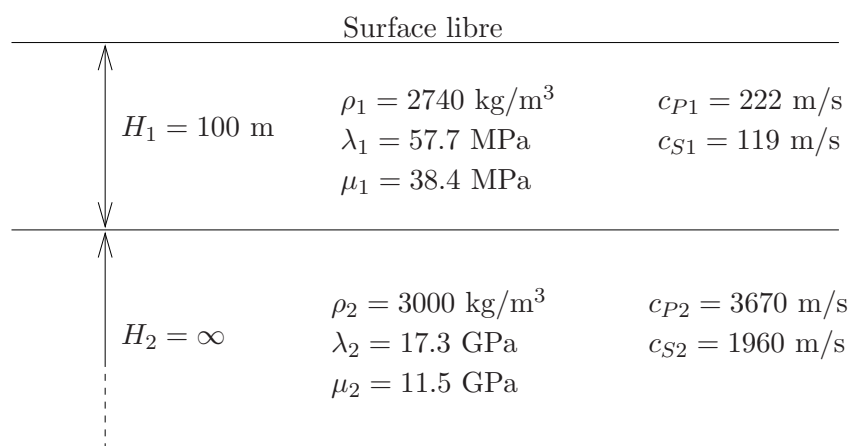


FIG. 5.1 – Milieu retenu pour les applications

Les grandeurs numériques caractérisant le système sont synthétisées sur la figure 5.1. Ces

caractéristiques correspondent à une couche superficielle meuble reposant sur un milieu rocheux nettement plus rigide. L'inclinaison de la faille sera introduite comme un paramètre du système et influencera la loi statistique correspondant à la profondeur du foyer.

A partir de ces données, l'enchaînement des modèles de source et de propagation va permettre de déterminer les principales caractéristiques des séismes susceptibles de se produire dans une telle zone.

## 5.2 Résultats au niveau de la source

Nous allons ici exploiter le modèle de source 3S défini dans le chapitre 3 dans le cadre d'application fixé. Ce modèle ayant été défini à partir d'une couche de sol d'épaisseur constante, il conviendra dans un premier temps de voir comment l'angle définissant la faille au niveau de la zone de subduction peut être pris en compte.

### 5.2.1 Mise en œuvre du modèle 3S

Le modèle 3S, défini à partir de la condensation d'un modèle éléments finis d'un bloc de sol, se présente sous la forme d'un système périodique dont une période est représentée sur la figure 5.2.

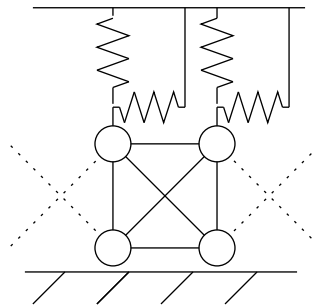


FIG. 5.2 – Élément périodique du modèle 3S

De façon à tenir compte de l'angle formé par la faille avec l'horizontale dans une zone de subduction, une charge répartie est introduite sur le système, cette charge variant linéairement avec la position, de façon à représenter le poids du sol à la verticale du point considéré. Ainsi, pour un point quelconque sur la faille, repéré par sa distance  $X$  par rapport au point de la faille en surface, cette charge sera proportionnelle à  $X \sin \theta$ , où  $\theta$  représente l'inclinaison de la faille. Toutefois, cette charge doit être modulée de façon à tenir compte de la masse déjà prise en compte lors de la définition du modèle 3S en lui-même. La figure 5.3 présente une mise en situation du modèle 3S. La charge  $P(X)$  introduite est ainsi inclinée du même angle  $\theta$  sur le modèle 3S de façon à être appliquée verticalement dans le cas pratique.

Dans cette configuration, nous allons pouvoir mener diverses études statistiques concernant les phases de glissement au niveau de la faille.

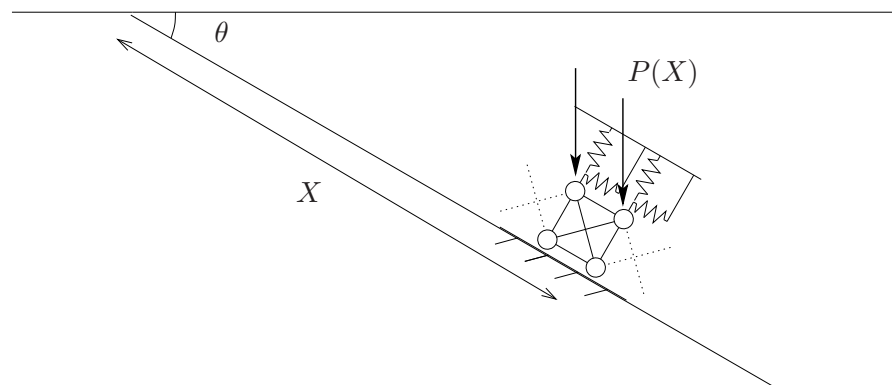


FIG. 5.3 – Mise en situation du modèle 3S

### 5.2.2 Résultats statistiques

Les études statistiques sont menées en faisant varier l'inclinaison de la faille et pour chacune de ces inclinaisons, en effectuant une simulation sur un laps de temps suffisamment grand pour disposer de données statistiques. Nous allons ainsi pouvoir tester l'influence de l'inclinaison de la faille sur l'initiation des glissements, mais aussi établir des lois statistiques entre la profondeur du glissement et son amplitude.

#### Initiation du glissement

La première étude effectuée ici porte sur l'initiation du glissement, et plus précisément sur l'influence de l'angle entre la faille et la surface considérée comme horizontale sur la profondeur du premier glissement. On travaille pour cela sur une faille de hauteur fixée (donc de longueur variable en fonction de son inclinaison). Les conditions initiales sont choisies de telle sorte qu'aucune contrainte de cisaillement n'existe : on se place pour cela dans le cas de la déformée statique pour un frottement nul sur l'interface. A partir de cette déformée initiale, une contrainte aléatoire est introduite au niveau des différents points de contact, de façon à simuler un état quelconque résultant de glissements antérieurs. On cherche alors le déplacement à imposer sur la partie supérieure du modèle 3S pour lequel un premier glissement apparaît, se traduisant par  $F_T = \mu_f F_N$  (où  $F_T$  et  $F_N$  représentent respectivement les efforts tangentiels et normaux au niveau du contact).

La figure 5.4 représente la profondeur relative moyenne du glissement (définie comme la profondeur du glissement divisée par la hauteur totale de la faille). On constate que plus la faille est inclinée, plus le foyer du séisme risque d'être proche de la surface. Toutefois, il ne s'agit ici que d'une étude de localisation. Les amplitudes associées à chacun des glissements n'ont pas été étudiées.

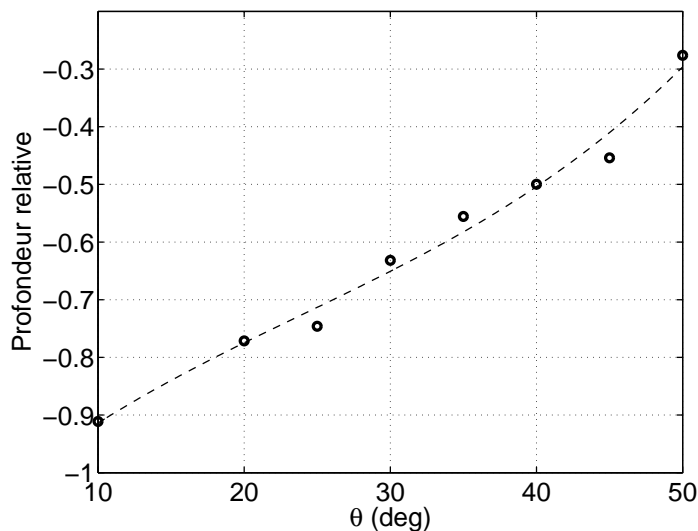


FIG. 5.4 – Influence de l'angle sur la profondeur du foyer

### Amplitudes de glissement

On se place maintenant dans le cas d'une faille inclinée de  $30^\circ$  par rapport à l'horizontal. De plus, la faille considérée est choisie d'une longueur de 5 km. Dans ce cas, une résolution temporelle est effectuée sur un laps de temps permettant d'obtenir des glissements de tous les points du modèle. On s'intéresse alors à la distance  $d$  de glissement apparaissant quand un mouvement est initiée en un point repéré par l'abscisse  $X$  sur la faille ( $X = 0$  correspondant au point sur la surface). La figure 5.5 présente l'ensemble des couples (position ; distance de glissement) obtenus.

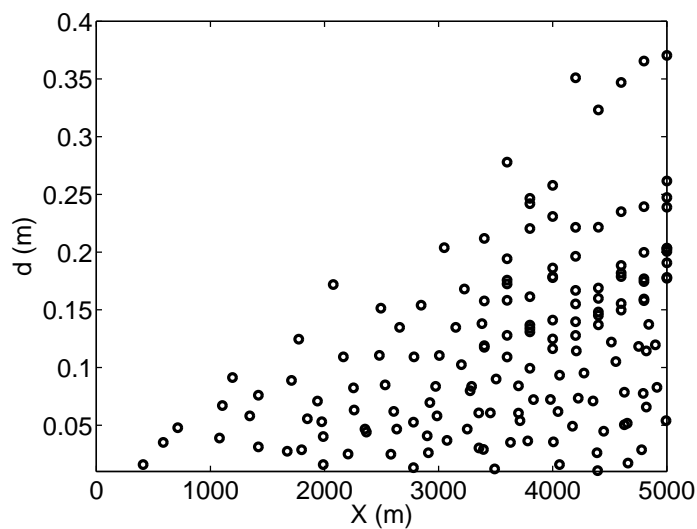


FIG. 5.5 – Amplitude des déplacements en fonction de leur localisation

A partir de ces résultats, on constate que les glissements majeurs (de plus grande amplitude) prennent a priori naissance dans les zones les plus profondes, c'est à dire là où les contraintes sont les plus importantes.

La répartition statistique des amplitudes de glissement, présentée sur la figure 5.6 permet de retrouver que la loi de Burridge-Knopoff est globalement vérifiée (décroissance exponentielle de la probabilité avec l'amplitude).

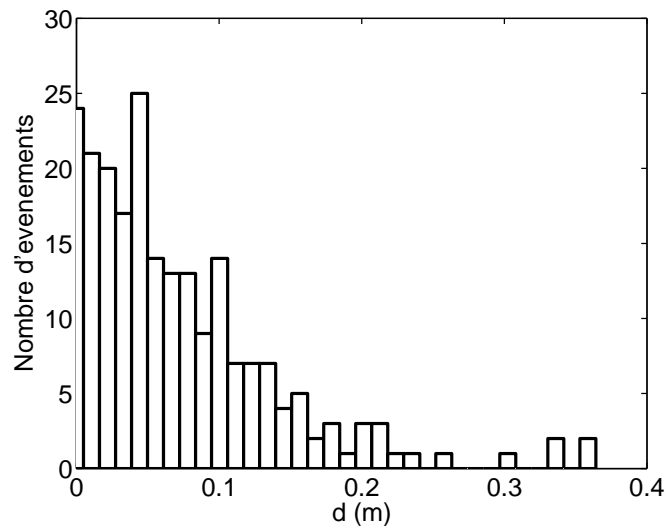


FIG. 5.6 – Répartition statistique des amplitudes des déplacements

L'ensemble de ces résultats statistiques va permettre de gérer l'entrée à prendre en compte dans le modèle de source.

## 5.3 Propagation des ondes jusqu'à la surface

L'étude de la propagation des ondes est faite en considérant le milieu stratifié de la figure 5.1. La différence très importante entre les caractéristiques mécaniques des deux milieux va engendrer des phénomènes de résonance au sein de la couche supérieure. En effet, la présence d'une couche meuble en surface va être à l'origine de mécanismes d'amplification et conduire à des comportements complexes n'existant pas dans un milieu homogène, comme on le verra dans la suite.

### 5.3.1 Relations de dispersion

En reprenant les résultats du chapitre 4 concernant la détermination des noyaux de Green relatifs aux ondes de Rayleigh, on peut déterminer, pour toute valeur de fréquence  $\omega$ , les nombres d'ondes  $k$  associés. Les relations de dispersion obtenues sont représentées sur la figure 5.7. Plus la fréquence augmente, plus les ondes (caractérisées par leur nombre d'onde) susceptibles de se propager sont nombreuses, ce qui est un résultat classique dans un guide

d'ondes. Ces relations peuvent aussi s'écrire en termes de vitesse de propagation par la relation  $c = \omega/k$ , ce qui aboutit aux courbes de la figure 5.8.

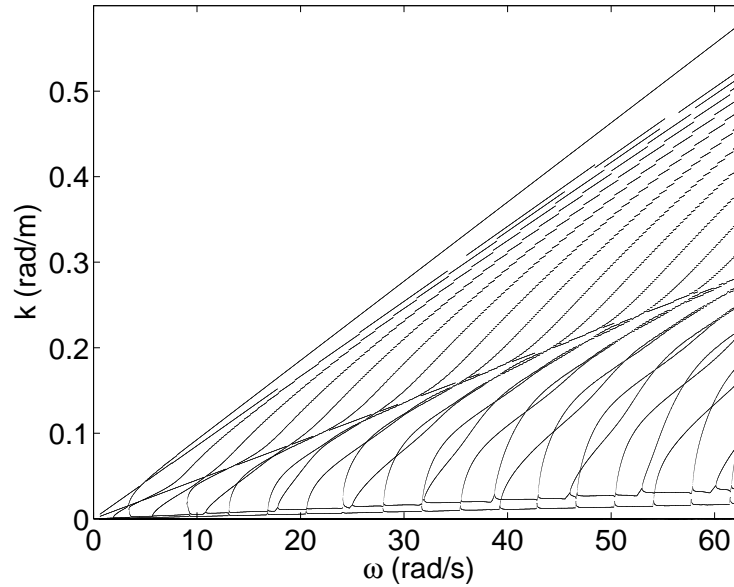


FIG. 5.7 – Relations de dispersion pour un milieu stratifié à deux couches

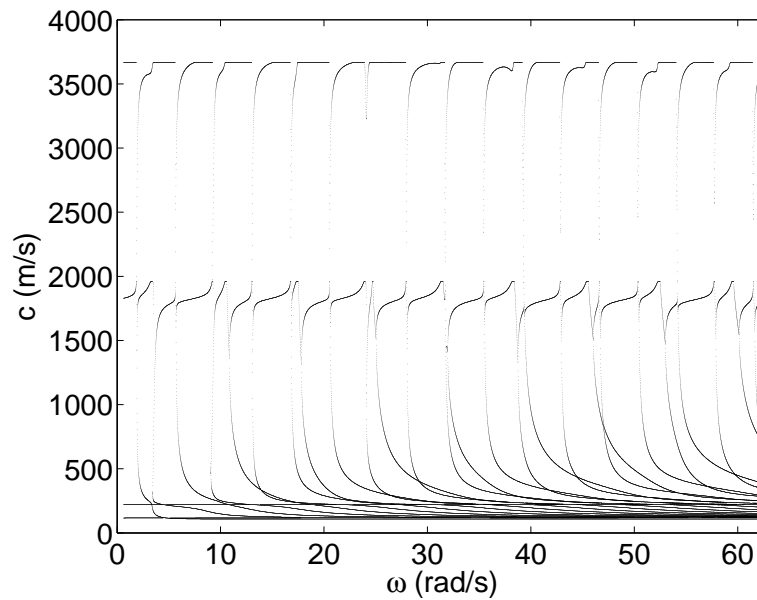


FIG. 5.8 – Relations de dispersion pour un milieu stratifié à deux couches

Les fonctions propres de Rayleigh  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  et  $r_4$  associées à chacun de ces nombres d'ondes

sont alors également déterminées, ce qui permet de connaître entièrement les noyaux de Green qui, on le rappelle, donnent pour une source en moment dans le cas général un déplacement de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{RAYLEIGH} = \sum_n \frac{1}{8cUI_1} \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} \left\{ k_n r_1(h) [M_{11} \cos^2 \phi \right. \\ + (M_{12} + M_{21}) \sin \phi \cos \phi + M_{22} \sin^2 \phi] + i \frac{\partial r_1}{\partial x_3} \Big|_h [M_{13} \cos \phi \\ + M_{23} \sin \phi] - ik_n r_2(h) [M_{31} \cos \phi + M_{32} \sin \phi] + \frac{\partial r_2}{\partial x_3} \Big|_h M_{33} \left. \right\} \\ \times \left( r_1(x_3) e^{i(k_n r - \frac{\pi}{4})} \hat{\mathbf{r}} + r_2(x_3) e^{i(k_n r + \frac{\pi}{4})} \hat{\mathbf{z}} \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Disposant des fonctions de Green, il ne reste alors qu'à exploiter les résultats issus du modèle 3S pour connaître les résultats en termes de caractérisation des tremblements de terre

### 5.3.2 Résultats en surface

A partir des noyaux de Green, on détermine les déplacements et accélérations en surface en fonction des différents paramètres mis en jeu, le but étant d'aboutir à des lois statistiques sur les séismes.

#### Influence de la profondeur du foyer

Dans un premier temps, l'influence de la profondeur de la source sur l'amplitude des vibrations ressenties est étudiée. Pour cela, on considère des fonctions test particulières comme entrée du modèle, c'est à dire correspondant au moment sismique. Ces moments sismiques sont choisis sous la forme de demi-sinus, traduisant un glissement au niveau de la faille (cf. figure 5.9). Les résultats sont alors obtenus en passant par une décomposition en série de Fourier du signal et la réponse temporelle en surface se retrouve par l'intermédiaire d'une transformée de Fourier inverse.

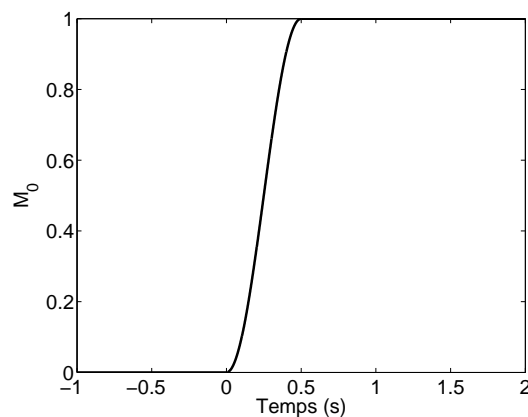


FIG. 5.9 – Moment sismique  $M_0$  utilisé

Le but étant ici de comparer les amplitudes entre elles pour différentes profondeurs de la source, les résultats ont été normalisés de façon à ce que le maximum soit égal à 1 sur les tracés des figures 5.10 et 5.11. L'amplitude du moment sismique n'est donc pas prise en compte, mais le noyau de Green dépendant linéairement de cette amplitude, le résultat sera généralisable.

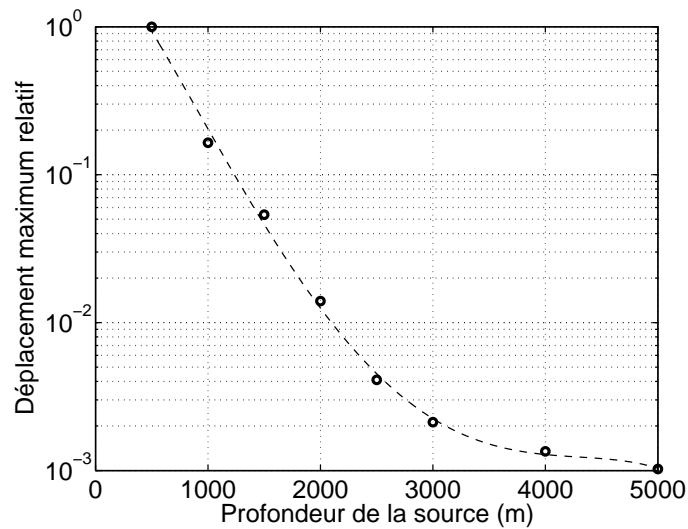


FIG. 5.10 – Déplacement maximum en fonction de la profondeur de la source

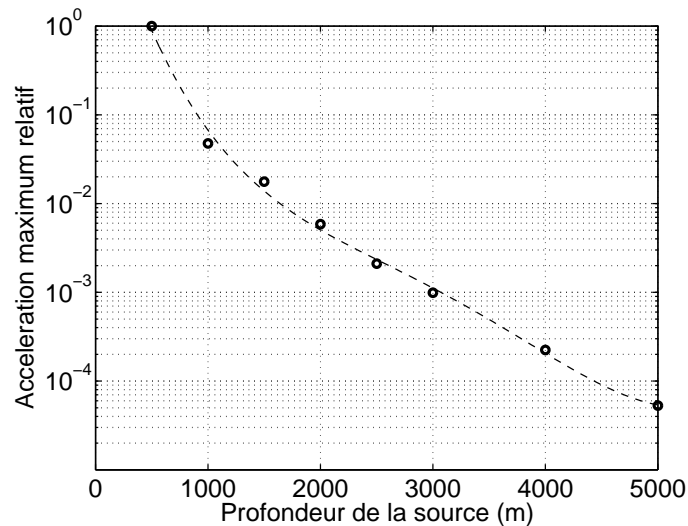


FIG. 5.11 – Accélération maximum en fonction de la profondeur de la source

En termes d'énergie apportée par le signal en surface, on obtient une dépendance avec la profondeur de la source illustrée sur la figure 5.12.



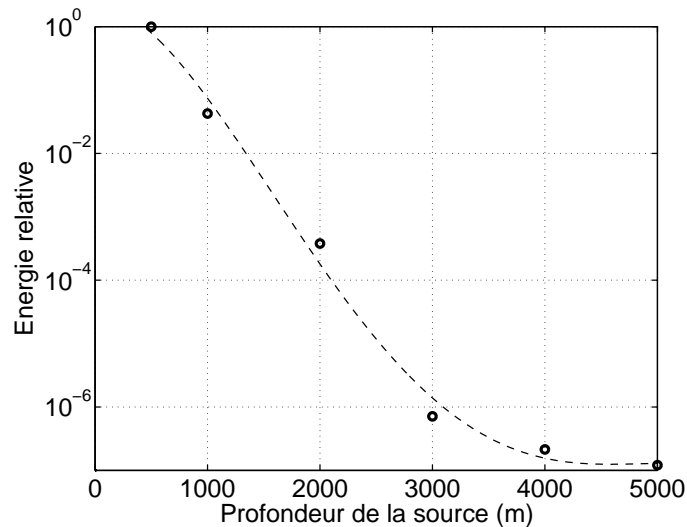


FIG. 5.12 – Energie du signal en fonction de la profondeur de la source

Pour caractériser la nocivité d'un séisme, de nombreux indicateurs peuvent être utilisés, mais nous nous limitons ici à trois d'entre eux : le PGD (Plus Grand Déplacement), le PGA (Plus Grande Accélération) et l'énergie.

On constate sur l'ensemble des résultats que les amplitudes diminuent très rapidement lorsque la source s'enfonce. Les ondes générées par des glissements se produisant à une grande profondeur sont donc fortement atténuées lorsqu'elles atteignent la surface du sol. Toutefois, comme on l'a vu précédemment, les glissements de plus grandes amplitudes se produisent profondément, mettant en jeu des énergies très importantes du fait des contraintes à ce niveau. Il est donc difficile de conclure à ce point sur la nocivité d'un séisme en fonction de sa profondeur. Une étude plus poussée reste à faire

### Résultats statistiques

De façon à évaluer la nocivité des séismes sous forme statistique, il convient de revenir sur la définition de la notion de moment sismique. On rappelle donc que le moment sismique  $M_0$  est défini par :

$$M_0 = A\mu\bar{u} \quad (5.2)$$

où  $\mu$  est la rigidité du milieu (coefficient de Lamé),  $A$  est la surface de glissement, et  $\bar{u}$  est le glissement moyen sur la faille.

Le modèle de source ayant été ici réalisé en 2D, on ne dispose pas directement de la surface de glissement, mais d'une longueur de glissement. On évaluera alors le moment sismique en supposant qu'il est proportionnel au carré de la longueur glissante. La figure 5.13 présente un lien entre les amplitudes de glissement et les longueurs glissantes pour les résultats présentés précédemment correspondant au modèle 3S. Ces résultats permettent de voir que les grandes amplitudes de glissement sont généralement aussi liées aux grandes surfaces

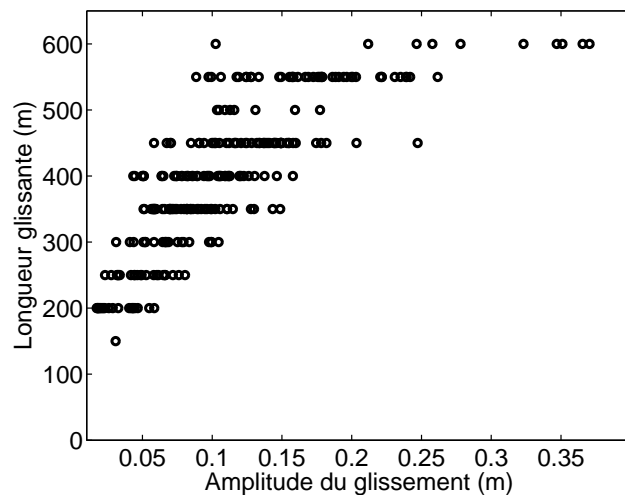


FIG. 5.13 – Lien entre l’amplitude du glissement et la longueur glissante

On considère alors une surface de glissement de forme elliptique, dont la largeur est prise deux fois plus grande que la longueur (cf. figure 5.14), et on tient compte de la rigidité du milieu dans lequel se produit le glissement. En notant  $L$  la longueur glissante, on a donc une surface de glissement  $A$  donnée par  $A = 2\pi L^2$ . Le moment sismique s’écrit alors :

$$M_0 = 2\pi\mu L^2 \bar{u} \quad (5.3)$$

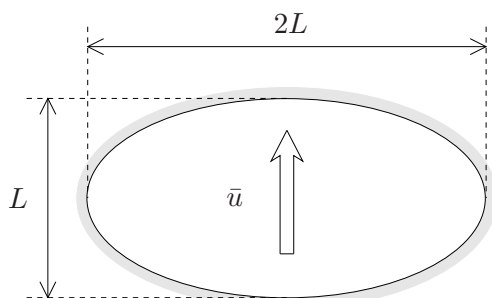


FIG. 5.14 – Surface de glissement utilisée pour calculer le moment sismique

Sur la figure 5.15, on a représenté le moment sismique en fonction de l’amplitude du glissement. On constate que le moment sismique évolue rapidement quand l’amplitude du glissement augmente, avec une loi se rapprochant d’une fonction polynomiale de degré deux.

Enfin, les résultats donnant le moment sismique en fonction de la localisation sur la faille du glissement peuvent aussi être analysés (cf. figure 5.16). C’est cette information qui est a priori la plus intéressante dans le cadre de notre étude, car elle permet d’exploiter les relations d’atténuation des ondes avec la profondeur établies précédemment.

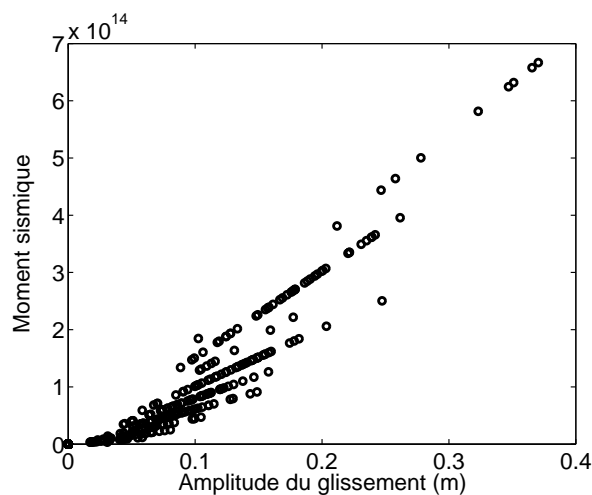


FIG. 5.15 – Lien entre l'amplitude du glissement et le moment sismique

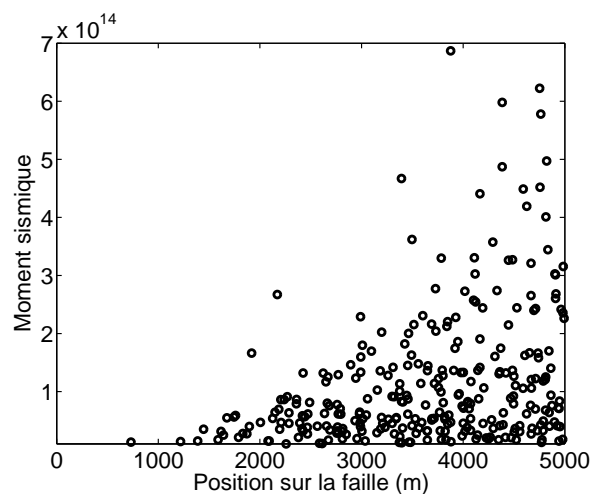


FIG. 5.16 – Lien entre la localisation du glissement et le moment sismique

### 5.3.3 Synthèse

A partir de l'ensemble des données précédemment déterminées, les statistiques correspondant aux accélérations maximales au cours des séismes et à l'énergie apportée sont établies. Elles traduisent la probabilité d'occurrence d'un séisme d'amplitude donnée pour le site étudié.

La première chose faite ici est de déterminer le lien existant entre le moment sismique et les résultats en termes d'accélération maximale et d'énergie en surface pour les différents évènements sismiques obtenus jusque là. Cette relation est illustrée sur les figures 5.17 et 5.18. On constate que bien que les moments sismiques les plus importants correspondent aux sources les plus profondes, donc les plus atténuées, ils se traduisent en surface comme les évènements

majeurs.

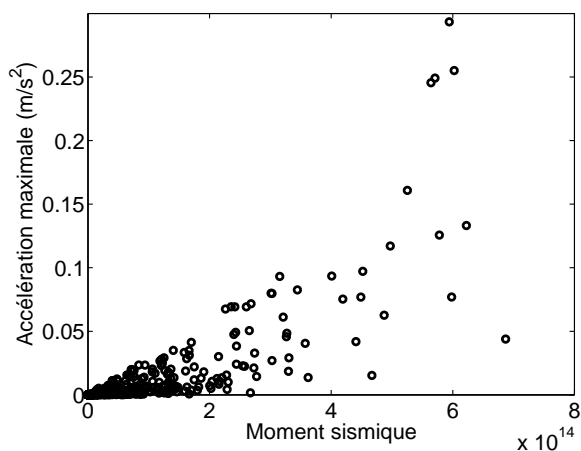


FIG. 5.17 – Lien entre le moment sismique et l'accélération maximale ressentie en surface

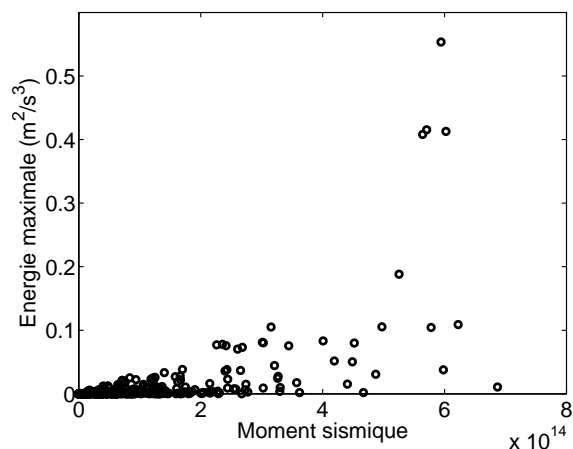


FIG. 5.18 – Lien entre le moment sismique et l'énergie apportée en surface

Les figures 5.19 et 5.20 présentent alors les répartitions statistiques respectivement des accélérations et des énergies correspondant aux différents évènements sismiques enregistrés, un évènement sismique correspondant à la combinaison d'une initiation de glissement au niveau de la faille et de la propagation des ondes dans le sol. Ces résultats montrent que les séismes de grande ampleur ont bien une très faible probabilité de se produire sur un laps de temps fixé. On retrouve en fait ici une loi de probabilité suivant une exponentielle négative, ce qui correspond à nouveau à la loi de Gutenberg-Richter.

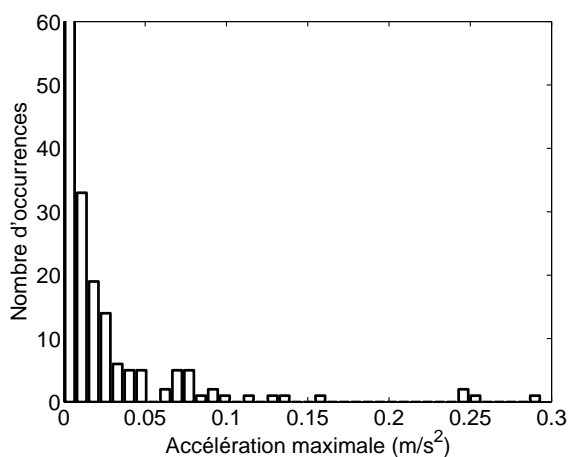


FIG. 5.19 – Répartition statistique des accélérations ressenties en surface

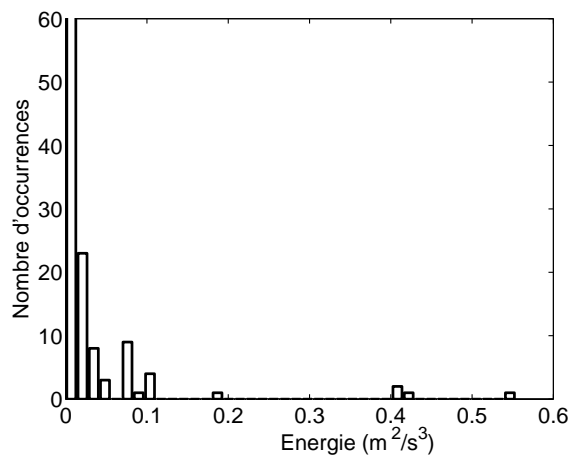


FIG. 5.20 – Répartition statistique de l'énergie apportée en surface

Compte tenu de la très faible probabilité d'occurrence des évènements de grande ampleur, les résultats présentés ici ne sont pas en nombre suffisant pour visualiser correctement les lois

statistiques. Toutefois, les grandes tendances peuvent être observées.

## 5.4 Conclusion

Les modèles de source et de propagation, constituant les différents éléments du modèle d'excitation sismique, ont ici été mis bout à bout. Des résultats statistiques ont ainsi pu être obtenus sur les principaux critères de nocivité des séismes dans une zone de subduction. Ces résultats respectent la loi de Gutenberg-Richter, se traduisant par une probabilité d'occurrence des séismes décroissant exponentiellement avec leur amplitude. Ces données statistiques pourront alors être utilisées pour déterminer les risques de dommage d'une structure sur un tel site. Bien que les résultats ne soient présentés ici que dans un cas particulier de faille, il sont bien évidemment similaires pour d'autres configurations.



# Conclusions et perspectives

L'enjeu initial de ce travail de thèse était de proposer une modélisation de l'endommagement des bâtiments au cours de tremblements de terre, en tenant compte de l'ensemble des phénomènes liés aussi bien à la secousse sismique en elle-même qu'au bâtiment.

Il est rapidement apparu que pour permettre une analyse robuste de cet endommagement, il était nécessaire de prendre en compte des incertitudes.

L'originalité des travaux de cette thèse repose alors sur le découplage des différents phénomènes. Dans un premier temps, l'endommagement de structures en béton armé a été étudié. La complexité du processus d'endommagement d'un tel matériau a été mise en évidence, et il a été montré que le comportement d'un tel système non-linéaire soumis à une excitation aléatoire peut être représenté par un système linéaire à paramètres incertains. Les outils permettant de prendre en compte de telles incertitudes ont été présentés en insistant sur la différence entre les méthodes probabilistes et possibilistes : les avantages et inconvénients de chacune de ces méthodes ont ainsi été illustrés.

Dans un deuxième temps, un modèle d'excitation sismique a été développé de façon à permettre l'obtention de lois statistiques relatives à la nocivité des séismes pour un site donné. Ce modèle a été construit en se basant sur un découplage des phénomènes associés respectivement à la source sismique et à la propagation des vibrations à travers le sol.

Au niveau de la zone du foyer sismique, il a été mis en évidence que des instabilités de glissement avec frottement étaient à l'origine des secousses. Ces instabilités sont de deux types : stick-slip et sprag-slip. Elles se traduisent par un relâchement brutal des contraintes accumulées dans le sol lors de la dérive des plaques tectoniques. Un modèle de source sismique, baptisé modèle 3S, a alors été élaboré. Ce modèle se veut aussi simple que possible pour permettre des études statistiques tout en permettant une reproduction des différents types d'instabilité.

L'étude de l'initiation du mouvement ayant été menée, la propagation des ondes générées jusqu'à la surface libre de la terre est traitée en considérant le sol comme un milieu stratifié. Diverses méthodes permettant de modéliser cette propagation ont été développées, telles que les noyaux de Green ou les méthodes de réflexions et transmissions d'ondes planes. D'autres techniques existent pour gérer les milieux aléatoires, mais se sont avérées inappropriées dans l'application visée ici.

A partir de ces modèles, le cas d'une zone de subduction dans un milieu stratifié à deux couches a pu être étudié. Des lois statistiques ont ainsi été obtenues sur quelques critères de nocivité, tels que le PGA ou l'énergie du signal sismique. De telles informations sont parti-

culièrement intéressantes dans le cadre de la conception parasismique de structures.

Les résultats de cette étude peuvent alors ouvrir sur de nouvelles perspectives quant à la conception parasismique.

Le premier point concerne la détermination de lois d'endommagement robustes pour les structures. En effet, l'endommagement a ici été pris en compte simplement sous la forme d'une variable incertaine traduisant la loi d'endommagement obtenue expérimentalement. Or une telle méthode nécessitant le passage par des simulations réelles ou des modèles coûteux semble inadaptée dans le cas général.

Au niveau du modèle d'excitation, les résultats obtenus ici ne tiennent pas compte d'incertitudes sur les propriétés du milieu. Dans le cadre d'une analyse robuste de l'endommagement, ces incertitudes méritent d'être incluses au modèle. Par ailleurs, l'étude présentée dans ce mémoire s'est limitée au cas des zones de subduction. Les résultats devront être étendus aux autres types de faille.

Le but ultime d'une telle modélisation est de proposer des critères permettant le dimensionnement d'une structure en phase de conception dans une zone sismique. Il faudra donc utiliser les résultats du modèle de source sismique comme entrée d'un modèle d'endommagement des structures.



# Bibliographie

- [1] B.T. AAGAARD. *Finite-Element Simulations of Earthquakes*. Mémoire de thèse, California Institute of Technology - Pasadena, USA, 2000.
- [2] K. AKI, P.G. RICHARDS. *Quantitative Seismology (Second Edition)*. University Science Books, 2002.
- [3] P.G. AKISHIN, M.V. ALTAISKY, I. ANTONIOU, A. D. BUDNIK, V.V. IVANOV. Burridge-knopoff model and self-similarity. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 11(1-3), pp. 207–222, 2000.
- [4] F.T.K. AU, Y.S. CHENG, L.G. THAM, G.W. ZENG. Robust design of structures using convex models. *Computers and Structures*, Vol. 81, pp. 2611–2619, 2003.
- [5] G. BAL, J.B. KELLER, G. PAPANICOLAOU, L. RYZHIK. Transport theory for acoustic waves with reflection and transmission at interfaces. *Wave Motion*, Vol. 30, pp. 303–327, 1999.
- [6] G.J. BALAS, J. DOYLE, K. GLOVER, A. PACKARD, R. SMITH.  *$\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox (for use with MATLAB)*. The Math Works, Natick, MA.
- [7] H. BANON, J.M. BIGGS, H.M. IRVINE. Seismic damage in reinforced concrete frames. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, Vol. 107(ST9), pp. 1713–1729, 1981.
- [8] H. BANON, D. VENEZIANO. Seismic safety of reinforced concrete members and structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, pp. 179–193, 1982.
- [9] A. BARRATA, I. ELISHAKOFF, G. ZUCCARO, M. SHINOZUKA. A generalization of the drenick-shinozuka model for bounds on the seismic response of a single-degree-of-freedom system. *Earthquake engineering and structural dynamics*, Vol. 27, pp. 423–437, 1998.
- [10] Y. BEN-HAIM, G. CHEN, TT. SOONG. Maximum structural response using convex models. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 122, pp. 325–333, 1996.
- [11] Y. BEN-HAIM, I. ELISHAKOFF. *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*. Elsevier, 1990.
- [12] C. BREZINSKI. Extrapolation algorithms and padé approximations : a historical survey. *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 20, pp. 299–318, 1996.
- [13] J.L. BRUN, J.B. GOMEZ. A four-parameter, two degree-of-freedom block-spring model : Effect of the driver velocity. *Pure and Applied Geophysics*, Vol. 143, pp. 633–653, 1994.
- [14] M. BRUN. *Contribution à l'étude des effets endommageants des séismes proches et lointains sur des voiles en béton armé*. Mémoire de thèse, INSA de Lyon - Lyon, France, 2002.

- [15] M. BRUN, J.M. REYNOUARD, L. JEZEQUEL. A simple shear wall model taking into account stiffness degradation. *Engineering Structures*, Vol. 25, pp. 1–9, 2003.
- [16] M. CAMPILLO, I.R. IONESCU, J.C. PAUMIER, Y. RENARD. On the dynamic sliding with friction of a rigid block and of an infinite elastic slab. *Physics of The Earth and Planetary Interiors*, Vol. 96(1), pp. 15–23, 1996.
- [17] J.M. CARLSON. Two-dimensional model of a fault. *Physical Review A*, Vol. 44(10), pp. 6226–6232, 1991.
- [18] J.M. CARLSON, J.S. LANGER. Mechanical model of an earthquake fault. *Physical Review A*, Vol. 40(11), pp. 6470–6484, 1989.
- [19] E.C. CARVALHO, E. COELHO. *Global structural behaviour of bare frames*. pp. 205–212, 1996.
- [20] B. CHAKRABATI, R.B. STINCHCOMBE. Stick-slip statistics for two fractal surfaces : a model for earthquake. *Physica A*, Vol. 270, pp. 27–34, 1999.
- [21] P. CHAMBRETTE, L. JEZEQUEL. Stability of a beam rubbed against a rotating disc. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 11(1), pp. 107–138, 1992.
- [22] H.L. CHEN, C.C. SPYRAKOS, G. VENKATESH. Evaluating structural deterioration by dynamic response. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 121(8), pp. 1197–1204, 1995.
- [23] W.F. CHEN. *Constitutive Equations for Engineering Materials*. Elsevier, 1994.
- [24] Y.S. CHUNG, C. MEYER, M. SHINOZUKA. Modeling of concrete damage. *ACI Structural Journal*, Vol. 86(3), pp. 259–271, 1989.
- [25] A. COCHARD, R. MADARIAGA. Dynamic faulting under rate-dependent friction. *Pure and Applied Geophysics*, Vol. 142, pp. 419–445, 1994.
- [26] A.M. DAINTY, M.N. TOKSÖZ. Elastic wave propagation in a highly scattering medium. *Journal of Geophysics*, Vol. 43, pp. 375–388, 1977.
- [27] M. de SOUSA VIEIRA. Self-organised criticality in a deterministic mechanical model. *Physical Review A*, Vol. 46(10), pp. 6288–6293, 1992.
- [28] O. DESSOMBZ. *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*. Mémoire de thèse, Ecole Centrale de Lyon - Lyon, France, 2000.
- [29] O. DESSOMBZ, A. DINIZ, F. THOUVEREZ, L. JEZEQUEL. Analysis of stochastic structures : perturbation method and projection on homogeneous chaos. Dans *Proceedings of IMAC XVII*, Vol. 2, Kissimmee, Florida, 1999.
- [30] O. DESSOMBZ, F. THOUVEREZ, L. JEZEQUEL. Analysis of stochastic structures : projection on homogeneous chaos. Dans *Proceedings of the International Colloquium on Numerical Modeling of Uncertainties*, pp. 221–226, Valenciennes, France, 1999.
- [31] E. DIPASQUALE, A.S. CAKMAK. Seismic damage assessment using linear models. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 9(4), pp. 194–215, 1990.
- [32] J.C. DOYLE. Analysis of feedback systems with structured uncertainty. *IEE Proceedings, Part D*, Vol. 129, pp. 242–250, 1982.
- [33] G.N. DOZ, J.D. RIERA. Towards the numerical simulation of seismic excitation. *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 196, pp. 253–261, 2000.

- [34] R.F. DRENICK. Model-free design of aseismic structures. *Journal of Engineering Mechanics Division (ASCE)*, Vol. 96, pp. 483–493, 1970.
- [35] M.N. FARDIS. Damage measures and failure criteria for reinforced concrete members. Dans *Proceedings of the 10th European Conference on Earthquake Engineering*, pp. 1377–1382, Vienna, Austria, 1994.
- [36] R.L. FOX, M.P. KAPOOR. Rate of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, Vol. 6(12), pp. 2426–2429, 1968.
- [37] U. GALVANETTO. Some remarks on the two-block symmetric burridge-knopoff model. *Physics Letters A*, Vol. 293(5-6), pp. 251–259, 2002.
- [38] R.G. GHANEM, P.D. SPANOS. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [39] N.K. GOSAIN, R.H. BROWN, J.O. JIRSA. Shear requirements for load reversal on rc members. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 103(7), pp. 1461–1476, 1977.
- [40] P. HAHNER, Y. DROSSINOS. Dynamics of a creep-slip model of earthquake faults. *Physica A : Statistical and Theoretical Physics*, Vol. 260(3-4), pp. 391–417, 1998.
- [41] J.H. HE. A new perturbation technique which is also valid for large parameters. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229(5), pp. 1257–1263, 2000.
- [42] L. HUMBERT. *Recalage des modèles éléments finis à partir de mesures vibratoires*. Mémoire de thèse, Ecole Centrale de Lyon - Lyon, France, 1999.
- [43] T. JONSSON, S.F. MARINOSON. Correlation functions and power spectra in a model of an earthquake fault. *Physics Letters A*, Vol. 207(3-4), pp. 165–172, 1995.
- [44] A.J. KAPPOS. Seismic damage indices for rc buildings. *Progress in Structural Engineering and Materials*, Vol. 1, pp. 78–87, 1997.
- [45] D.S. KIM, J.S. LEE. Propagation and attenuation characteristics of various ground vibrations. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 19, pp. 115–126, 2000.
- [46] L. KNOPOFF, J.A. LANDONI, M.S. ABINANTE. Dynamical model of an earthquake fault with localization. *Physical Review A*, Vol. 46, pp. 7445–7449, 1992.
- [47] S.K. KUNNATH, A.M. RAINHORN, Y.J. PARK. Analytical modeling of inelastic seismic response of r/c structures. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 116(4), pp. 996–1017, 1990.
- [48] J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE. *Mécanique des matériaux solides*. Paris, Bordas, 1988.
- [49] W.K. LIU, G. BESTERFIELD, T. BELYTSCHKO. Transient probabilistic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 67, pp. 27–54, 1988.
- [50] W.K. LIU, G. BESTERFIELD, A. MANI. Probabilistic finite element methods in nonlinear structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, pp. 61–81, 1986.
- [51] J. MARKERINK, S. BENNANI, B. MULDER. *Design of a Robust Controller for the HIRM using  $\mu$ -synthesis*. Report, GARTEUR (Group for Aeronautical Research and Technology in Europe), 1997.

- [52] J.A.C. MARTINS, J. GUIMARAES, L.O. FARIA. Dynamic surface solutions in linear elasticity and viscoelasticity with frictional boundary conditions. *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 117, pp. 445–451, 1995.
- [53] I.F. MEYER, W.B. KRATZIG, F. STANGENBERG, K. MESKOURIS. Damage prediction in reinforced concrete frames under seismic actions. *European Earthquake Engineering*, Vol. 3, pp. 61–68, 1988.
- [54] F. MOIROT. *Etude de la stabilité d'un équilibre en présence de frottement de Coulomb*. Mémoire de thèse, Ecole Polytechnique - Paris, France, 1998.
- [55] R. MONTAGNE, G.L. VASCONCELOS. Complex dynamics in a one-block model for earthquakes. *Physica A*, Vol. 342, pp. 178–185, 2004.
- [56] Y. NAKAMURA. Seismic energy transmission in an intensively scattering environment. *Journal of Geophysics*, Vol. 43, pp. 389–399, 1977.
- [57] H. NAKANISHI. Statistical properties of the cellular-automaton model for earthquakes. *Physical Review A*, Vol. 43(12-15), pp. 6613–6621, 1991.
- [58] R.B. NELSON. Simplified calculation of eigenvector derivatives. *AIAA Journal*, Vol. 14(9), pp. 1201–1205, 1976.
- [59] A. PACKARD, J. DOYLE. The complex structured singular value. *Automatica*, Vol. 29(1), pp. 71–109, 1993.
- [60] A. PACKARD, J. DOYLE, G.J. BALAS. Linear, multivariable robust control with a  $\mu$  perspective. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 115, pp. 426–438, 1993.
- [61] G. PAPANICOLAOU. Mathematical problems in geophysical wave propagation. *Documenta Mathematica*, Extra Volume ICM, pp. 403–427, 1998.
- [62] Y.J. PARK, A.H.S. ANG. Mechanistic seismic damage model for rc. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 111, pp. 722–739, 1987.
- [63] B.N.J. PERSSON, O. ALBOHR, F. MANCOSU, V. PEVERI, V.N. SAMOILOV, I.M. SIVEBAEK. On the nature of the static friction, kinetic friction and creep. *Wear*, Vol. 254, pp. 835–851, 2003.
- [64] G.H. POWELL, R. ALLHABADI. Seismic damage prediction by deterministic methods : concepts and procedures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, pp. 719–734, 1988.
- [65] M.S.L. ROUFAIEL, C. MEYER. Analytical modelling of hysteretic behaviour of rc frames. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 113(3), pp. 429–444, 1987.
- [66] V.B. RYABOV, K. ITO. Intermittent phase transitions in a slider-block model as a mechanism for earthquakes. *Pure and Applied Geophysics*, Vol. 158, pp. 919–930, 2001.
- [67] L. RYZHIK, G. PAPANICOLAOU, J.B. KELLER. Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave Motion*, Vol. 24, pp. 327–370, 1996.
- [68] L. RYZHIK, G. PAPANICOLAOU, J.B. KELLER. Transport equations for waves in a half space. *Communications in Partial Differential Equations*, Vol. 22, pp. 1869–1910, 1997.

- 
- [69] M. SHINOZUKA. Maximum structural response to seismic excitations. *Journal of Engineering Mechanics Division (ASCE)*, Vol. 96, pp. 729–738, 1970.
- [70] D. SINCLAIR. Frictional vibrations. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 22, pp. 207–213, 1955.
- [71] J.J. SINOUE, F. THOUVEREZ, L. JEZEQUEL. Analysis of friction and instability by the centre manifold theory for a non-linear sprag-slip model. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 265, pp. 527–559, 2003.
- [72] R.T. SPURR. A theory of brake squeal. *Proceedings of the Automobile Division, Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 1, pp. 33–40, 1961.
- [73] J.E. STEPHENS, J.T.P. YAO. Damage assessment using response measurements. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 113(4), pp. 787–801, 1987.
- [74] P. VENINI. Robust control of uncertain structures. *Computers and Structures*, Vol. 67, pp. 165–174, 1998.
- [75] M.L. WANG, S.P. SHAH. Reinforced concrete hysteresis model based on the damage concept. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 15(8), pp. 993–1003, 1987.
- [76] M.L. WANG, J. WANG. Nonlinear dynamic analysis of reinforced concrete shear wall structures. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 11(5), pp. 255–268, 1992.
- [77] J.P. WESLEY. Diffusion of seismic energy in the near range. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 70, pp. 5099–5106, 1965.
- [78] M.S. WILLIAMS, R.G. SEXSMITH. Seismic damage indices for concrete structures : A state-of-the-art review. *Earthquake Spectra*, Vol. 11(2), pp. 319–349, 1995.



# Table des figures

1.1	Tectonique des plaques . . . . .	4
1.2	Les trois types principaux de failles . . . . .	4
1.3	Les quatre phases du rebond élastique . . . . .	4
1.6	Zone de subduction . . . . .	5
1.4	Séisme de Chi-Chi (Taiwan) du 21 septembre 1999 . . . . .	6
1.5	Déformation localisée de rails après le séisme de Tangshan (Chine) du 28 juillet 1976 . . . . .	6
1.7	Zone de subduction . . . . .	7
1.8	Algorithme de résolution avec prise en compte du frottement . . . . .	8
1.9	Accélérogramme type obtenu en surface . . . . .	9
1.10	Spectre type . . . . .	9
1.11	Les différentes phases du séisme . . . . .	10
1.12	Rupture d'une liaison poutre/poteau - séisme d'Izmit (Turquie, 17 août 1999) . . . . .	11
1.13	Détail rupture de poteau - séisme de Bhuj (Inde, 26 janvier 2001) . . . . .	11
1.14	Dommmages sur élément en béton - séisme au Salvador (13 janvier 2001) . . . . .	11
2.1	Structures testées lors des essais Gauvin (1978) . . . . .	14
2.2	Poteau - premiers modes propres . . . . .	15
2.3	Portique - premiers modes propres . . . . .	16
2.4	Maillage des structures sous ANSYS . . . . .	16
2.5	Loi de comportement du béton . . . . .	17
2.6	Loi de comportement de l'acier . . . . .	17
2.7	Exemple de loi moment/courbure pour un poteau en béton armé . . . . .	17
2.8	Poteau - sollicitation push-over . . . . .	18
2.9	Portique - sollicitation push-over . . . . .	18
2.10	Poteau - courbe de réponse force/déplacement . . . . .	19
2.11	Portique - courbe de réponse force/déplacement . . . . .	19
2.12	Poteau - contraintes dans le domaine élastique . . . . .	20
2.13	Portique - contraintes dans le domaine élastique . . . . .	20
2.14	Poteau - contraintes dans le domaine plastique . . . . .	20
2.15	Portique - contraintes dans le domaine plastique . . . . .	20
2.16	Définition des raideurs sécantes . . . . .	25
2.17	Algorithme de Rump modifié . . . . .	34
2.18	Principe théorique de l'analyse convexe . . . . .	35

2.19	Portique - Enveloppe de la partie réelle de la fonction de transfert et réalisations pour les valeurs extrêmes et moyenne . . . . .	37
2.20	Portique - Enveloppe de la partie imaginaire de la fonction de transfert et réalisations pour les valeurs extrêmes et moyenne . . . . .	38
2.21	Portique - Enveloppe du module de la fonction de transfert et réalisations pour les valeurs extrêmes et moyenne . . . . .	38
2.22	Loi normale choisie pour le module d'Young $E$ - 4000 tirages . . . . .	39
2.23	Portique - Enveloppe de la partie réelle de la fonction de transfert et tirages de Monte Carlo . . . . .	40
2.24	Portique - Enveloppe de la partie imaginaire de la fonction de transfert et tirages de Monte Carlo . . . . .	40
2.25	Portique - Enveloppe du module de la fonction de transfert et tirages de Monte Carlo . . . . .	41
2.26	Système masse-ressort . . . . .	42
2.27	Séisme de El-Centro : $\ddot{u}_0$ . . . . .	45
2.28	Spectre de Fourier du séisme de El-Centro . . . . .	45
2.29	Coefficients $c$ admissibles . . . . .	46
2.30	Enveloppe temporelle de la réponse avec incertitude sur l'excitation . . . . .	47
2.31	Influence du paramètre $\theta$ sur le déplacement maximum . . . . .	47
2.32	Enveloppe temporelle de l'accélération avec incertitude sur l'excitation . . . . .	48
2.33	Influence de la première fréquence propre sur le déplacement maximum . . . . .	49
2.34	Influence de l'incertitude en pourcentage . . . . .	49
2.35	Enveloppe du déplacement avec incertitude sur la structure ( $\Delta k/k = 20\%$ ) . . . . .	49
2.36	Enveloppe de l'accélération avec incertitude sur la structure ( $\Delta k/k = 20\%$ ) . . . . .	49
2.37	Influence de chacun des deux types d'incertitudes . . . . .	51
2.38	Enveloppe du déplacement avec incertitude sur l'excitation et la structure . . . . .	51
2.39	Comparaison des enveloppes du dommage pour les différentes hypothèses d'incertitude . . . . .	51
2.40	Analyse convexe (trait plein) et simulation de Monte Carlo (surface grisée) . . . . .	52
2.41	Géométrie du voile (dimensions en mètres) . . . . .	53
2.42	Modélisation de la chute de fréquence avec l'endommagement . . . . .	53
2.43	Influence du dommage initial sur le dommage en fin d'excitation (les figures de droite représentent les accélérogrammes correspondant à chacune des figures de gauche) . . . . .	55
2.44	Répartition statistique de $X_{max}$ . . . . .	56
2.45	Enveloppe temporelle du déplacement (trait continu) et répartition statistique (surface grisée) . . . . .	56
2.46	Influence de la fréquence propre initiale . . . . .	56
2.47	Influence du dommage initial . . . . .	56
2.48	Description du portique à deux étages . . . . .	59
2.49	Excitation de la structure et définition des degrés de liberté . . . . .	59
2.50	Déplacement relatif maximum de chaque étage . . . . .	60
2.51	Système actif . . . . .	61
2.52	Forme additive . . . . .	62



2.53	Forme multiplicative . . . . .	62
2.54	Système actif nominal . . . . .	63
2.55	Système avec incertitudes structurées . . . . .	63
2.56	Système bouclé . . . . .	64
2.57	Robustesse en performance . . . . .	66
3.1	Modélisation du stick-slip . . . . .	71
3.2	Exemples de lois de frottement . . . . .	71
3.3	Modèle de Burridge-Knopoff . . . . .	72
3.4	Loi de frottement utilisée dans le modèle de Burridge-Knopoff . . . . .	72
3.5	Caractère chaotique du modèle de Burridge-Knopoff . . . . .	73
3.6	Illustration de la loi de Gutenberg-Richter . . . . .	73
3.7	Description des deux systèmes . . . . .	74
3.8	Coefficient de frottement dépendant du déplacement (1) ou de la vitesse (2) . . . . .	75
3.9	Comparaison des résultats dans le cas du frottement dépendant du glissement (Campillo <i>et al.</i> [16]) . . . . .	75
3.10	Bloc élastique homogène frottant soumis à un déplacement imposé . . . . .	76
3.11	Evolution temporelle de la contrainte de cisaillement . . . . .	77
3.12	Schéma de principe du sprag-slip . . . . .	78
3.13	Glissement de deux couches élastiques en contact . . . . .	78
3.14	Influence de $\mu_f$ et $\nu$ sur la vitesse de propagation des ondes . . . . .	81
3.15	Variation de $Re(c)$ . . . . .	81
3.16	Variation de $Im(c)$ . . . . .	81
3.17	Orbite d'un point proche de la surface pour $\nu = 0.3$ et $\mu_f = 2$ . . . . .	81
3.18	Modèle éléments-finis . . . . .	82
3.19	Déplacement pour $\mu_f = 0.5$ . . . . .	83
3.20	Déplacement pour $\mu_f = 2$ . . . . .	83
3.21	Orbite d'une particule proche de la surface de contact . . . . .	84
3.22	Modèle éléments-finis . . . . .	84
3.23	Condensation de Guyan : numérotation des noeuds . . . . .	85
3.24	Termes non nuls des matrices de masse et de raideur après condensation . . . . .	85
3.25	Matrices de masse et de raideur après condensation de Guyan : mise en évidence des termes prépondérants . . . . .	86
3.26	Réduction de l'influence des noeuds au niveau des matrices de masse et de raideur . . . . .	86
3.27	Illustration des couplages conservés entre noeuds . . . . .	86
3.28	Réponses temporelles du système ; $\mu_f = 0$ (gauche : modèle complet, milieu : condensation de Guyan, droite : réduction des matrices) . . . . .	87
3.29	Réponses temporelles du système ; $\mu_f = 0.5$ (gauche : modèle complet, milieu : condensation de Guyan, droite : réduction des matrices) . . . . .	88
3.30	Réponses temporelles du système ; $\mu_f = 2$ (gauche : modèle complet, milieu : condensation de Guyan, droite : réduction des matrices) . . . . .	88
3.31	Le modèle 3S . . . . .	89
3.32	Définition des degrés de liberté . . . . .	90
3.33	Domaine d'instabilité dans le plan Fréquence/Frottement . . . . .	91

3.34	Evolution du nombre d'onde et de la vitesse dans le plan Fréquence/Frottement	92
3.35	Variations de $\text{Im}(k)$ avec le frottement pour $\omega = 15\text{Hz}$	92
3.36	Evolution de $\text{Re}(c)$ et $\text{Im}(k)$ pour $\omega = 15\text{Hz}$	93
3.37	Déplacement imposé en partie supérieure	93
3.38	Réponse pour $\mu_f = 0.5$	94
3.39	Réponse pour $\mu_f = 2$	94
3.40	Nombre d'évènements en fonction du déplacement moyen pour $\partial X/\partial t = 1 \text{ mm/s}$ et $\mu_f = 2$	95
3.41	Répartition temporelle des glissements	96
4.1	Types d'ondes sismiques se propageant dans le sol	98
4.2	Influence de la profondeur sur les vitesses de propagation	98
4.3	Projection sur les 3 axes des déplacements de matière liés au passage des ondes P et S (décomposée en SH et SV)	99
4.4	Vitesses relatives des ondes sismiques	101
4.5	Accélérogramme type	101
4.6	Atténuation des ondes de Rayleigh avec la profondeur	102
4.7	Caractéristiques volumiques d'un solide 3D	103
4.8	Onde P : amplitude du champ lointain	107
4.9	Onde S : amplitude du champ lointain	107
4.10	Onde P : direction et amplitude du champ lointain	107
4.11	Onde S : direction et amplitude du champ lointain	107
4.12	Définition des coordonnées cartésiennes	108
4.13	Représentation des différents termes du moment sismique	109
4.14	Coordonnées cartésiennes et sphériques utilisées dans l'étude du rayonnement	110
4.15	Onde P	111
4.16	Onde S	111
4.17	Composante radiale du déplacement	112
4.18	Composante transversale du déplacement	112
4.19	Données numériques du modèle de Gutenberg	115
4.20	Vitesses de phase $c$ et de groupe $U$ du mode fondamental des ondes de Love et déformées associées (les nombres sur les tracés correspondent à la période considérée)	118
4.21	Vitesses de phase $c$ et de groupe $U$ du mode fondamental des ondes de Rayleigh et déformées associées (les nombres sur les tracés correspondent à la période considérée)	119
4.22	Domaine d'intégration	121
4.23	Propagation des ondes P et S dans un milieu stratifié	124
4.24	Illustration des lois de Descartes	125
4.25	Réflexion et transmission d'une onde $P$ à une interface solide-solide	125
4.26	Réflexion des ondes $P$ et $SV$ sur une surface libre	126
4.27	Coefficients de réflexion et conversion des ondes P et SV à une interface libre	127
4.28	Illustration des chemins possibles pour joindre le foyer à un point de la surface	128
4.29	Modèle de Gutenberg (4 couches)	128

---

4.30	Instants d'arrivée des différentes ondes de volume . . . . .	128
4.31	Propagation d'un rayon dans un milieu dépendant de la profondeur . . . . .	130
4.32	Milieu homogène . . . . .	130
4.33	Milieu inhomogène . . . . .	130
4.34	Définitions des distances caractéristiques . . . . .	131
4.35	Illustration de la théorie du transport . . . . .	133
5.1	Milieu retenu pour les applications . . . . .	139
5.2	Élément périodique du modèle 3S . . . . .	140
5.3	Mise en situation du modèle 3S . . . . .	141
5.4	Influence de l'angle sur la profondeur du foyer . . . . .	142
5.5	Amplitude des déplacements en fonction de leur localisation . . . . .	142
5.6	Répartition statistique des amplitudes des déplacements . . . . .	143
5.7	Relations de dispersion pour un milieu stratifié à deux couches . . . . .	144
5.8	Relations de dispersion pour un milieu stratifié à deux couches . . . . .	144
5.9	Moment sismique $M_0$ utilisé . . . . .	145
5.10	Déplacement maximum en fonction de la profondeur de la source . . . . .	146
5.11	Accélération maximum en fonction de la profondeur de la source . . . . .	146
5.12	Energie du signal en fonction de la profondeur de la source . . . . .	147
5.13	Lien entre l'amplitude du glissement et la longueur glissante . . . . .	148
5.14	Surface de glissement utilisée pour calculer le moment sismique . . . . .	148
5.15	Lien entre l'amplitude du glissement et le moment sismique . . . . .	149
5.16	Lien entre la localisation du glissement et le moment sismique . . . . .	149
5.17	Lien entre le moment sismique et l'accélération maximale ressentie en surface .	150
5.18	Lien entre le moment sismique et l'énergie apportée en surface . . . . .	150
5.19	Répartition statistique des accélérations ressenties en surface . . . . .	150
5.20	Répartition statistique de l'énergie apportée en surface . . . . .	150



## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 avril 2002,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur L. JEZEQUEL

et les rapports de

Monsieur F. DARVE

Professeur - Institut National Polytechnique de Grenoble - Laboratoire Sols Solides Structures - BP 53 -  
38041 GRENOBLE cedex 9

et de

Monsieur D. LE HOUEDÉC

Professeur - Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique - GeM - Ecole Centrale de Nantes –  
1, rue de la Noë - BP 92101 - 44321 NANTES cedex 3

**Monsieur LIGNON Sylvain**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE (MEGA)**

Fait à Ecully, le 23 mars 2006



P/Le Directeur de l'E.C.L.  
Le Directeur des Etudes

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'J. JOSEPH', written over a horizontal line.

J. JOSEPH

