La forme fractionnaire de l'exposant n'entraîne ici aucune remarque, puisque cette forme fractionnaire correspond à un quotient entier. Mais il y a avantage évident, ou, pour mieux dire, le caractère de l'Algèbre conduit nécessairement à étendre par convention cette notation au cas même où l'exposant de la quantité placée sous le radical n'est pas divisible par l'indice du radical. En effet, les règles relatives au calcul des quantités affectées d'exposants, qui ont été démontrées en Arithmétique (73 et suivants), exigent que ces exposants soient entiers. Les exposants pouvant être, eux aussi, représentés en Algèbre par des symboles généraux, il faut qu'on puisse supposer ces symboles remplacés par des valeurs quelconques et, par suite, par des valeurs fractionnaires, sans que les règles de calcul soient modifiées ; et cette extension sera facilement justifiée, si nous convenons de regarder comme équivalentes les deux expressions

$$\sqrt[p]{a^m} \quad \text{et} \quad a^{\frac{m}{p}},$$

m et p étant des quantités entières positives quelconques.

Pour que cette convention soit permise, il faut montrer que la valeur de la seconde expression étant indépendante de la forme donnée à la valeur fractionnaire $\frac{m}{p}$, il en sera de même de la valeur de la première. Supposons, en effet, qu'on ait

$$\frac{m}{p} = \frac{m'}{p'}.$$

On aura

$$a^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m'}{p'}}.$$

Je dis qu'on aura aussi

$$\sqrt[p]{a^m} = \sqrt[p']{a^{m'}}.$$

Réduisons ces deux radicaux au même indice ; ils deviendront

$$\sqrt[pp']{a^{mp'}} \quad \text{et} \quad \sqrt[pp']{a^{m'p}}.$$

Mais puisqu'on a

$$\frac{m}{p} = \frac{m'}{p'},$$

on a

$$mp' = m'p.$$

Les deux radicaux, réduits ou non au même indice, sont donc identiques.

Il est utile de remarquer que, pour calculer la valeur numérique d'une puissance fractionnaire, il faut revenir à la forme