et le rayon de giration correspondant sera

$$\rho' = \sqrt{\frac{l\delta^3}{6 \times l\delta}} = \frac{\delta}{\sqrt{6}}.$$

On voit donc qu'en prenant sur la base un point M qui divise DC dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{6}}$ et en menant par ce point une parallèle Mf à la médiane BD l'intersection f de cette parallèle avec le diamètre conjugué de Od sera le point de tangence cherché. Connaissant dans l'ellipse d'inertie les deux demi-diamètres conjugués Od et Of, on tracera facilement la courbe et même ses axes, d'après le tracé connu (v. Ct, 2° p., ch. V).

***90. Moment d'inertie du trapèze par rapport à sa grande base.** — En considérant le trapèze comme la réunion d'un

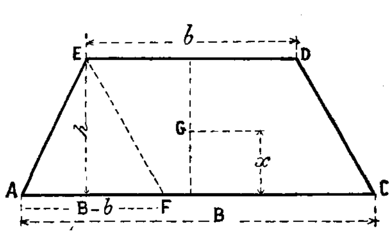

Fig. 72

parallélogramme et d'un triangle on trouve facilement son moment d'inertie par rapport à l'une de ses bases parallèles.

Soit ACDE (fig. 72) le trapèze donné dont h est la hauteur, B la grande base, b la petite. En menant BF parallèle à DE on le décompose en deux surfaces dont nous savons trouver le moment d'inertie : on aura donc

$$I_B = b\,\frac{h^3}{3} + (B - b)\,\frac{h^3}{12} = \frac{h^3}{12}(B + 3b).$$

***91. Moment d'inertie central du trapèze parallèlement aux bases.** — En retranchant de la valeur I_B que nous venons de trouver le produit de l'aire du trapèze par le carré de la distance x de son centre de gravité à la grande base on obtiendra le moment d'inertie central cherché. La distance x, d'après ce que nous avons vu (v. n° 66), est égale à

$$x = \frac{h}{3} \times \frac{2b + B}{b + B},$$

on aura donc

$$I = \frac{h^3}{12}[B + 3b] - \frac{h}{2}(B + b) \times \frac{h^2}{9}\,\frac{(2b + B)^2}{(b + B)^2}$$

ou en réduisant

$$I = \frac{h^3}{12}(B + 3b) - \frac{h^3}{18} \times \frac{(B + 2b)^2}{B + b}.$$

En divisant cette quantité par la surface et en simplifiant on obtiendrait pour valeur du carré du rayon de giration

$$\rho^2 = \frac{h^2}{18}\left(1 + \frac{2Bb}{(B + b)^2}\right).$$

$$\rho = \frac{h}{3(B + b)}\sqrt{\frac{B^2 + 4Bb + b^2}{2}}.$$

§ 4. — Recherche algébrique des moments d'inertie polaire

92. La recherche d'un moment d'inertie polaire ramenée à celle d'un moment statique. — Soit ABC (fig. 73) l'aire donnée, G son centre de gravité.

Imaginons comme nous l'avons fait plus haut (v. n° 82) un cylindre qui aurait cette aire pour base et concevons un ***cône de révolution*** à axe vertical dont le sommet serait le centre polaire G et dont les génératrices seraient *inclinées à 45°* sur le plan de la figure ABC.

Le moment d'inertie polaire d'un petit élément ω situé au point E, et à la distance r, a pour expression

$$j = \omega r^2.$$

Si l'on considère un petit cylindre ayant pour base ω et pour limite, en hauteur, la surface du cône, sa hauteur sera EE' égale à r puisque le cône est à 45° et son volume v sera

$$v = \omega r.$$

Son centre de gravité étant en $\frac{h}{2}$ au milieu de la hauteur, son moment statique par rapport au plan de base sera

$$m = \frac{1}{2}\,\omega r^2\,;$$

d'où l'on tire pour le moment polaire élémentaire j de la surface ω

$$j = 2m.$$

En faisant la somme de toutes les quantités semblables relatives aux éléments de la surface ABC on voit que le moment d'inertie polaire de la surface proposée est égale au double du moment statique, par rapport au plan de la figure, de la portion de cylindre comprise entre ce plan et le cône.

Pour l'obtenir on prendra, en général, le moment statique du cylindre total ABCA'B'C' et on en retranchera le moment du cône creux GA'B'C'.

Nous avons figuré, en dessous, en l'ombrant (fig. II) ce solide tronconique, dont le moment statique serait égal à la moitié du moment d'inertie polaire cherché.