Numéro d'ordre : 2008-24 Année 2008

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR

Spécialité : Génie civil

par

Nadège REBOUL

Ingénieur ECL

TRANSPORT DE PARTICULES DANS LES MILIEUX GRANULAIRES

Application à l'érosion interne

Soutenue le 18 Novembre 2008 devant la commission d'examen composée de

MM.	B. CAMBOU	Directeur de thèse	Professeur	LTDS, ECLyon
	F. DARVE	Président du jury	Professeur	3S-R, INPG
	JJ. FRY	Examinateur	Professeur associé	LTDS, EDF (CIH)
	PY. HICHER	Rapporteur	Professeur	GeM, ECNantes
	JN. ROUX	Rapporteur	Chercheur	LMSGC, UR Navier (LCPC-ENPC-CNRS)

E. VINCENS Directeur de thèse Maître de conférences LTDS, ECLyon

Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches

École Centrale de Lyon

AURIOL Philippe	Professeur	AMPERE	ECL
BEROUAL Abderrahmane	Professeur	AMPERE	ECL
BURET François	Maître de conférences	AMPERE	ECL
${\it JAFFREZIC-RENAULT~Nicole}$	Directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRAHENBUHL Laurent	Directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
MARTELET Claude	Professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Alain	Professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	Directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SIMONET Pascal	Chargé de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	Professeur	AMPERE	ECL
VOLLAIRE Christian	Maître de conférences	AMPERE	ECL
HELLOUIN Yves	Maître de conférences	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	Professeur	DER EEA	ECL
GUIRALDENQ Pierre	$Professeur\ \'em\'erite$	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	Professeur	DER STMS	ECL
LOHEAC Jean-Pierre	Maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	$Professeur\ \'em\'erite$	ICJ	ECL
MARION Martine	Professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	Professeur	ICJ	ECL

MUSY François	Maître de conférences	ICJ	ECL
ROUY MIRONESCU Elisabeth	Professeur	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	Maître de conférences	ICJ	ECL
	D 4	T.C.T.T.	Det
DAVID Bertrand	Professeur	ICTT	ECL
CALLARD Anne-Ségolène	Maître de conférences	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	Maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	Professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	Maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	Directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	Directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	Directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	Directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
JOSEPH Jacques	Professeur	INL	ECL
KRAWCZYK Stanislas	Directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	Chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	Professeur émérite	INL	ECL
O'CONNOR Ian	Maître de conférences	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	Professeur	INL	ECL
ROBACH Yves	Professeur	INL	ECL
SEASSAL Christian	Chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	Directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	Directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	Directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
CHEN Liming	Professeur	LIRIS	ECL
OHER Ellining	1 rojesseur	LIIGIS	LCL
BAILLY Christophe	Professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	Directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	Directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	Chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	Directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	Chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN Jean-Claude	Professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT Geneviève	Professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	Directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	Maître de conférences	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	Chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL

HENRY Daniel	Directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	Professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	Professeur	LMFA	ECL
LE RIBAULT Catherine	Chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	Professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	Professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	Professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	Professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	Chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	Chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	Maître de conférences	LMFA	ECL
BENAYOUN Stéphane	Professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	Professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	Maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	Maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfrid	Chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	$Professeur\ \'em\'erite$	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	Chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	Past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	Professeur	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	Professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	Ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	Directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	Chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	Directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	Professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	Directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	Professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	Maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	Maître de conférences	LTDS	ECL
SIDOROFF François	Professeur	LTDS	ECL
SINOU Jean-Jacques	Maître de conférences	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	Professeur	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	Professeur	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	Professeur	LTDS	ECL
VANNES André-Bernard	$Professeur\ \'em\'erite$	LTDS	ECL



Remerciements

Comprendre le transport des particules m'a amenée à sonder l'espace poral des milieux granulaires, un espace encore jamais exploré par les membres de mon équipe. J'ai donc eu la chance d'aborder cette thèse avec la liberté du pionnier - ce rôle privilégié où toute avancée, si petite soit-elle, semble être une découverte - mais aussi, plus malheureusement, avec sa solitude... Ma traversée des milieux granulaires a parfois ressemblé à une errance à travers l'espace des vides et j'avais à cœur de remercier toutes les personnes qui m'ont aidée, dans ces moments-là, à retrouver le bon chemin.

Mes remerciements s'adressent à Bernard Cambou pour m'avoir accueillie et dirigée au sein de l'équipe "Mécanique des Solides et Géomatériaux" du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes. Je tiens à vous remercier de m'avoir fait confiance et de m'avoir suivie dans les différentes voies que j'ai choisi d'emprunter. Merci également à Eric Vincens sans qui ce travail de thèse n'aurait pu prendre forme. Tu m'as souvent donné le courage de continuer. Merci pour ton optimisme et pour tout ce temps que tu m'as consacré. Merci de n'avoir pas abandonné, toi non plus...

Je tiens à remercier Félix Darve pour avoir accepté de présider mon jury de thèse. Je suis également reconnaissante à Pierre-Yves Hicher et Jean-Noël Roux, rapporteurs de ce manuscrit, d'avoir accordé autant d'attention à mon travail de recherche. Je remercie enfin Jean-Jacques Fry, l'"homme aux mille idées par jour", d'avoir pris part à mon jury et de m'avoir fait partager sa passion pour les barrages.

Je souhaiterais également remercier tous mes compagnons de route du G8 et je voudrais particulièrement témoigner mon amitié à Cécile Nouguier-Lehon, ma "docteur-jumelle du 18 novembre"! Merci d'avoir pris du temps sur tes propres travaux de recherche pour m'aider dans les miens. En travaillant à tes côtés, j'ai pu apprécier tes qualités tant d'enseignant que de chercheur, et découvrir une personne d'une vraie gentillesse, faisant preuve au quotidien de magnifiques qualités humaines. Merci aussi à Hélène Magoariec-Viste qui m'a dit ...des mots pour me réconforter, ... des mots pour m'encourager, ... des mots pour me faire rire. Certes, il y a eu des silences mais merci d'avoir veillé sur moi ces trois dernières années. Jean-Patrick,

merci pour tes conseils et l'oreille attentive que tu m'as souvent prêtée. Et parce que je ne peux penser au G8 sans t'y associer, merci Huong! Tu as mis tellement de vie dans l'équipe quand tu y étais. Je ne t'oublierai pas...

J'adresse enfin mes remerciements les plus chaleureux à mes proches. Papa, maman, merci infiniment de toujours répondre présents, qu'il s'agisse de partager avec moi des instants de bonheur ou de me soutenir dans des moments plus difficiles. Au rang des personnes qui me sont les plus chères figurent naturellement ma sœur, Emeline, et toute sa petite famille - Vianney, Isciane... et "Bébée"! Vous savoir à mes côtés, quel que soit le chemin que j'emprunte, est pour moi un précieux réconfort. Merci grande sœur d'être un si bel exemple de courage, j'espère simplement t'avoir rendue fière de moi. Je souhaitais également remercier Hélène avec qui j'ai partagé les joies et les angoisses de la vie centralienne, puis de la vie de thésarde. Merci pour ta gentillesse et ta disponibilité à chaque fois que j'ai eu besoin de toi. Et pour finir, parce que c'est parfois sans chercher que l'on fait les plus belles découvertes..., je voudrais avoir une pensée pour celui qui m'accorde son tendre soutien au quotidien depuis plus de deux ans. David, merci d'avoir compris que j'avais besoin de cette thèse et d'avoir accepté sa présence plus qu'envahissante. Tu as été mon énergie pour rédiger ce manuscrit et mon meilleur allié pour préparer la soutenance. Sois sûr que cette réussite est aussi la tienne! Pour le reste, la pudeur m'oblige à une distance que tu ne mérites pas alors mieux vaut en rester là...

Résumé

Le terme érosion interne désigne les phénomènes d'arrachement et de transport de particules, sous l'effet de forces d'écoulement, au sein d'un matériau granulaire. Il s'agit de l'un des modes de rupture des digues et barrages en remblai les plus répandus. Localiser et quantifier les déplacements de matière au sein des matériaux granulaires apparaît donc crucial si l'on veut garantir la pérennité des ouvrages hydrauliques.

Les critères de filtre permettent de statuer s'il y a transport ou non; ils s'appuient sur la connaissance de la courbe granulométrique des matériaux. Cette dernière peut être considérée comme une approche locale de la morphologie solide. Suivant une démarche similaire, l'analyse de la microstructure de l'espace poral où s'effectue la circulation des particules transportées a d'abord été proposée. Cette étude consiste à caractériser la morphologie et la topologie du réseau des vides d'assemblages numériques de sphères en s'appuyant sur une discrétisation du milieu poreux selon des cellules tétraédriques (partition de Delaunay généralisé). Les spécificités de comportement liées aux variations de densité ont été étudiées. Plusieurs caractéristiques des pores et des constrictions, passages les plus étroits entre pores, sont définies permettant d'envisager une corrélation entre l'organisation de l'espace poral et les possibilités de migration de particules au sein de cet espace. La recherche de cette corrélation repose sur l'hypothèse d'un mécanisme de capture par exclusion de taille : une particule transportée est stoppée dès lors qu'elle rencontre une constriction de taille inférieure à son diamètre. Un modèle purement géométrique est alors proposé pour estimer la distance qu'une particule infiltrée de taille donnée peut parcourir dans un milieu granulaire. Faute de pouvoir modéliser l'évolution du comportement du milieu poreux à l'échelle macroscopique avec ce modèle, nous proposons une nouvelle modélisation de transport. Elle s'inscrit dans le cadre de la théorie des milieux continus mais est enrichie par l'intégration d'une variable caractéristique des aspects microstructurels: la distribution de tailles de constrictions. Cet enrichissement a été rendu possible par le développement d'une formule analytique destinée au calcul de la distribution de tailles de constrictions à partir de la distribution de tailles de particules. Cette formulation analytique a été obtenue à partir d'analyses numériques discrètes.

Mots clés : Matériau granulaire, Transport de masses, Pores, Constrictions, Eléments discrets, Triangulation de Delaunay, Modèle de transport.

Abstract

Internal erosion is the phenomenon by which soil particles are entrained and washed out from an hydraulic earth structure by water seeping flows. It is one of the most widespread causes of failure of levees and embankment dams. So to guarantee security, it is crucial to locate and quantify mass transfers within granular materials.

Filter criteria are employed to assess transfer properties of a granular medium. They rely on the soil grading curve which is a local characteristics of the solid material. In a same way, it has been proposed to carry out a microscopic analysis of void space where transported particles flow. Void networks in sphere packings are characterized morphologically and topologically thanks to a Delaunay tessellation. Specific behaviours resulting from relative density changes have been studied. Several measures of pores and constrictions, smallest paths between pores, are defined, which enables us to plan to correlate void space organization and possibilities for particles to migrate within this space. This correlation assumes that particles are captured by a size exclusion mechanism: a transported particle is blocked if it encounters a constriction smaller than it. A purely geometrical model has been proposed to estimate the travel length that a particle with a given size can cover within a granular medium. Because this model was unable to take into account structural changes of the material at macroscopic scale, a new approach has been developed. It is in line with the theory of continuous media but a local void characteristics, the constriction size distribution, has been added. This improvement has been made possible because an analytical formula has been proposed to calculate the constriction size distribution from the particle size distribution. This analytical formula results from discrete numerical analyses.

Key words: Granular material, Mass transfer, Pores, Constrictions, Discrete elements, Delaunay tessellation, Transport model.

Sommaire

Ы	iste c	ies pe	rsonnes	Habilitées à Diriger des Recherches	1
R	emer	cieme	\mathbf{nts}		vii
R	ésum	ıé			ix
A	bstra	act			хi
Li	iste d	les fig	ures		xix
Li	iste d	les tal	oleaux	x	xiii
In	$_{ m trod}$	uctior	ı		1
	Bibl	liograp	hie		5
Ι	\mathbf{Ass}	embla	ges de	sphères : méthodes numériques de fabrication et propriétés	3
	por	ales fo	ondame	ntales	7
	1	Les p	rotocoles	s de création d'assemblages numériques tridimensionnels	9
		1.1	Les $m\epsilon$	éthodes géométriques dites d'addition séquentielle aléatoire	9
		1.2	Les mé	éthodes "géométrico-dynamiques" dites de réarrangement collectif .	10
		1.3	Les pr	otocoles de dépôt mécaniques - La méthode des éléments discrets .	10
	2	Les a	$_{ m ssemblag}$	ges monodisperses et leur espace poral	11
		2.1	Les ar	rangements ordonnés de densités extrêmes	11
			2.1.1	L'arrangement ordonné le plus dense	11
			2.1.2	L'arrangement ordonné le plus lâche	13
		2.2	Les éta	ats limites de densité désordonnés	14
			2.2.1	L'état désordonné le plus dense	14
			2.2.2	L'état désordonné le plus lâche	15
	3	Les a	$_{ m ssemblag}$	ges polydisperses et leur espace poral	16
	4	Enjeı	ıx liés au	choix de la méthode de création de l'assemblage	18
	5	Conc	lusion .		19
	Rib]	liogran	hie		21

xiv Sommaire

ΙΙ	Car	actéris	sation volumique de l'espace des pores	23
	1	Protoc	cole de création d'assemblages granulaires utilisé	24
		1.1	Principe général	24
		1.2	Caractéristiques des assemblages granulaires étudiés	25
		1.3	Détails du protocole de création des échantillons	27
		1.4	Problèmes de représentativité des échantillons	30
			1.4.1 Définition du volume minimal de mesure pour une statistique	
			correcte	30
			1.4.2 Homogénéité de l'échantillon dans le volume d'analyse	30
	2	Représ	sentation de l'espace des vides par une triangulation de Delaunay radical .	32
		2.1	Principe de la triangulation de Delaunay radical	32
		2.2	Vers des distributions de vide plus réalistes	33
		2.3	Comparaison avec les lois statistiques usuelles	36
		2.4	Analyse des résultats	36
	3	Effets	de la granulométrie et de la densité sur les caractéristiques morphologiques	38
		3.1	Influence de la granulométrie à densité relative fixée	39
		3.2	Influence de la densité relative du matériau à granulométrie fixée	40
	4	Conclu	ısion	44
	Bibl	iograph	ie	46
ΙIJ	Car	actéris	ation topologique de l'espace des pores	49
	1	L'espa	ce des vides : un réseau connecté	50
		1.1	Les distributions de tailles de constrictions	50
		1.2	La fonction de connectivité	51
	2	Effets	de la granulométrie et de la densification sur les caractéristiques topologiques	55
		2.1	Influence de la granulométrie à densité relative fixée	55
		2.2	Influence de la densité relative du matériau à granulométrie fixée	57
	3	Conclu	ısion	60
	Bibl	iograph	ie	64
IV	Mét	thodes	probabilistes de description des constrictions	65
	1		bibliographique	66
		1.1	Principe général des méthodes probabilistes	66
		1.2	Distribution de tailles de constrictions pour un matériau dans son état le	
			plus dense	68
			1.2.1 Approche de Silveira [Silveira, 1965]	68
			1.2.2 Approche de Ziems, reprise par [Kenney et al., 1985]	69
			1.2.3 Rapide estimation de la CSD calculée à partir de la PSD en nombre	
		1.3	Distribution de tailles de constrictions pour un matériau dans son état le	
			plus lâche	71

Sommaire

			1.3.1	Approche de Silveira [Silveira et al., 1975]	71
			1.3.2	Approche de Schuler [Schuler, 1996]	72
		1.4	CSD po	our une densité relative intermédiaire	73
	2	Etude	compar	ative des différentes méthodes de calcul de CSD	73
		2.1	Corres	oondance des méthodes pour les états de densités extrêmes	75
		2.2	Corresp	pondance des états lâches avec la formule de Locke et al	80
	3	Nouve	eau modè	ele probabiliste à 1 paramètre pour les granulométries serrée et linéaire	82
	4	Nouve	eau modè	ele probabiliste à 2 paramètres	85
	5	Concl	usion .		86
	Bibl	iograph	nie		89
\mathbf{v}	Mod	dèle gé	éométri	que pour caractériser le transport	91
	1	Cadre	de l'étu	de	92
	2	Repré	sentation	du milieu par un réseau à mailles rectangulaires	94
	3	Profo	ndeur de	pénétration d'une particule de taille donnée	97
		3.1	Méthod	lologie de calcul	98
		3.2	Applica	ation sur les granulométries serrée, étalée et discontinue	100
			3.2.1	Distances verticales maximales parcourues	100
			3.2.2	Influence du pas du réseau sur les longueurs des chemins de fil-	
				tration	102
			3.2.3	Influence de la densité relative	103
			3.2.4	Comparaison avec les critères de dimensionnement existants	104
		3.3	Validat	ion par des simulations numériques discrètes	104
	4	Comp	réhensio	n des mécanismes de capture	106
		4.1	La cap	ture par interception de la particule dans un chemin sans issue	107
		4.2	La cap	ture par sédimentation de la particule sur les parois d'un chemin :	110
	5	Limite	es du mo	dèle géométrique de transport	110
	6	Concl	usion .		112
	Bibl	iograph	nie		114
VI	Арр	roche	continu	ue des processus d'érosion et de transport de particules 1	.15
	1	Les th	éories co	ontinues de l'érosion	117
		1.1	Migrati	ion de particules fines au sein d'un matériau granulaire	117
			1.1.1	Principe général du modèle de Cividini et Gioda	117
			1.1.2	Les équations du problème	117
			1.1.3	Points forts et limites de cette approche	120
			1.1.4	Cadre plus général des théories continues de l'érosion	120
		1.2	Migrati	ion de particules à travers un système multi-couches	122
			1.2.1	Principe général du modèle de Indraratna	122
			1.2.2	Les équations du problème	122

<u>xvi</u> Sommaire

	2	Nouveau modèle de filtration	130
		2.1 Principe de l'hybridation	130
		2.2 Présentation algorithmique du nouveau modèle	131
	3	Application du modèle de transport proposé	135
		3.1 Comportement du matériau lors de la simulation numérique discrète .	137
		3.1.1 Procédure de la simulation	137
		3.1.2 Analyse des résultats de l'expérience numérique	139
		3.2 Simulation du transport par modèle continu	141
		3.2.1 Identification du pas de temps	142
		3.2.2 Identification du paramètre eta	145
	4	Mise en œuvre du modèle	148
	5	Conclusion	151
	Bib	iographie	152
\mathbf{C}	oncl	asion et perspectives	155
\mathbf{A}	Cal	cul des volumes de vide dans la procédure de niveau 0	161
A	1	Principe du calcul	
	$\frac{1}{2}$	Calcul du volume du tétraèdre, \mathcal{V}_T	
	2		
		2.1 Distance d'un point à un plan	
		Equation du plan \mathcal{P} passant par les trois sommets du tétraèdre \mathcal{S}_2 , \mathcal{S}_3 et 2.3 Aire de la base du tétraèdre	
	9		
	3	Calcul du volume de la pyramide sphérique $\mathcal{V}_{S \cap T}$	
	4	Recherche du projeté orthogonal d'un sommet sur le plan passant par les tro autres sommets du tétraèdre	
	E.	Critère d'existence d'une intersection entre la sphère et au moins l'une des fac	
	5	latérales du tétraèdre contenant le sommet considéré	
	6	Calcul du volume de la pyramide sphérique tronquée $\mathcal{V}_{\mathcal{S} \cap T}$	
	U	Calcul du volume de la pyramide spherique tronquee $\nu_{S \cap T}$	100
В	Cal	cul des sphères inscrites	171
\mathbf{C}	Cal	cul des aires de vide	177
	1	Démarche du calcul	177
	2	Calcul dans le cadre de la configuration (a)	178
	3	Critère de distinction des deux configurations	178
	4	Calcul dans le cadre de la configuration (b)	178
D	Cal	cul des cercles inscrits	181
${f E}$	Cal	cul de probabilité des méthodes probabilistes	185

Sommaire	xvii

\mathbf{F}	Processus de maximisation de \mathcal{A}_v dans l'approche de Silveira			
	1	Expression de l'angle γ en fonction de α	187	
	2	Expression de l'angle β en fonction de α	187	
	3	Expression de l'angle δ en fonction de α	188	
\mathbf{G}	Calcul des tailles de constriction dans le cas lâche selon Schuler 1			
H Calcul de probabilité du modèle de Locke				
Ι	Calo	cul de la charge hydraulique en tout point du domaine	195	
	1	Choix d'une discrétisation géométrique du domaine Ω	196	
	2	Expression locale (i.e. sur un élément) de la charge hydraulique	197	
	3	Assemblage des éléments	198	

xviii Sommaire

Liste des figures

I.1	Construction des empilements denses de sphères monodisperses	12
I.2	Configuration ordonnée la plus dense d'un assemblage de sphères monodisperses.	12
I.3	Configuration ordonnée la plus lâche d'un assemblage de sphères monodisperses.	13
I.4	Fonction de distribution radiale de Finney [Finney, 1970]	14
I.5	Configurations de sphères pouvant justifier les maxima de la fonction de dis-	
	tribution radiale	15
II.1	Caractéristiques solides des matériaux étudiés.	26
II.2	Evolution de la granulométrie du filtre au cours du processus de filtration	27
II.3	Génération de l'échantillon numérique	28
II.4	Porosité n en fonction de $\Delta U/U_T$ pour l'échantillon le plus dense du matériau	
	à granulométrie serrée	31
II.5	Evolution de la porosité selon la direction verticale pour le matériau de gra-	
	nulométrie serrée	31
II.6	Cellule tridimensionnelle de Delaunay	33
II.7	Densité de probabilité des volumes de vide à l'intérieur d'une cellule de Delaunay.	33
II.8	Définition de la sphère inscrite dans un triangle de Delaunay	34
II.9	Cellules de Delaunay pour lesquelles le critère de fusion est satisfait	34
II.10	Densité de probabilité du volume de vide pour les quatre niveaux d'association	
	(échantillon le plus dense de la granulométrie serrée)	35
II.11	Densités de probabilité du volume de vide et lois statistiques	37
II.12	Nombre de cellules de Delaunay par pore (analyse de niveau 1)	38
II.13	Densité de probabilité de rayon équivalent de pore (échantillon le plus dense	
	de la granulométrie serrée).	39
II.14	Procédure d'obtention des fractiles d'ordre P	39
II.15	Comparaison entre les distributions de tailles de sphères inscrites et de particules.	40
II.16	Densités de probabilité du rayon de pore	41
II.17	Evolution du d_{50} des distributions de tailles de pores	42
II.18	Déplacement d'une particule lors de la densification en fonction du volume de	
	vide offert initialement.	43

III.1	Densité de probabilité de rayons équivalents de tailles de constrictions pour			
l'éc	hantillon le plus dense de la granulométrie serrée	51		
III.2 Fonctions de connectivité normalisées				
III.3	Fonction de répartition pour les rayons d'entités de vide (a)3D, (b)2D	55		
III.4	Relation entre les distributions de tailles de constrictions et de particules solides.	56		
III.5	Influence de la densité relative sur les d_{50} des distributions cumulées de la			
tail	le des cercles inscrits	57		
III.6	Densités de probabilité du rayon des cercles inscrits	59		
III.7	Rayon d'une constriction en fonction des trois rayons de particules qui lui sont			
ass	ociés	61		
III.8	Fonctions de connectivité	62		
IV.1	Discrétisation de la distribution de tailles de particules	67		
IV.2	Configuration de base pour l'état le plus dense	69		
IV.3	CSD de l'état le plus dense et PSD en nombre translatée	70		
IV.4	Configuration de base pour l'état le plus lâche.	71		
IV.5	Constrictions de Schuler pour l'état le plus lâche	72		
IV.6	Comparaison entre les CSD de la MEDTD et celles des MP pour les granulo-			
${ m m}cute{e}$	tries serrée et étalée.	76		
IV.7	Face - Constriction état numérique	77		
IV.8	$e_3 = f(e_1, e_2)$	77		
IV.9	Comparaison des granulométries étalée et discontinue et de leurs CSD	79		
IV.10	Comparaison des CSD issues de la MEDTD et des MP pour la granulométrie			
lacı	unaire	79		
IV.11	Comparaison des CSD issues de la MEDTD et de la formule de Locke pour			
l'ét	at le plus lâche.	81		
IV.12	Schéma d'évolution des CSD des états numériques lors d'une densification	82		
IV.13	Superposition des CSD obtenues par la MEDTD et avec la formule proposée			
à u	n paramètre	84		
IV.14	Superposition des CSD obtenues par la MEDTD et avec la formule proposée			
à 1	paramètre pour la granulométrie discontinue	85		
IV.15	Superposition des CSD obtenues par la MEDTD et avec la formule proposée			
à 2	paramètres	87		
	Percolation, interception et rétention parfaite	93		
	Exemple bidimensionnel d'une partition par la grille à mailles rectangulaires.	95		
	Réseau d'espace accessible pour le matériau à granulométrie serrée, dans son			
	t le plus dense.	96		
V.4	Evolution de α , fraction de porosité accessible à une particule de rayon R	97		

Liste des figures xxi

V.5	Fonction de connectivité adimensionnée et $\alpha(R)$ pour l'échantillon le plus				
de	nse de la granulométrie serrée.	98			
V.6	V.6 Déplacements autorisés dans les deux mécanismes de transport proposés				
V.7	Densité de probabilité de la taille de constriction et profondeur de pénétration.	101			
V.8	Influence du pas de la grille sur les distances de parcours	102			
V.9	Mécanismes de capture	106			
V.10	Identification des mécanismes de capture à partir des matrices binaires	107			
V.11	Etude du mécanisme de capture par interception	109			
V.12	Etude du mécanisme de capture par sédimentation	111			
VI.1	Schématisation du problème d'érosion et de transport de CIVIDINI	118			
VI.2	Equilibre d'une particule de sol au sein d'un conduit	123			
VI.3	Possibilités d'avancer d'une unité de mouvement verticale dans un réseau poral				
cu	bique	125			
VI.4	Définition de trois gammes de particules selon leur comportement migratoire.	126			
VI.5	Configuration du problème de transport dans un multicouches	129			
VI.6	Configuration du problème de filtration étudié	131			
VI.7	Courbes granulométriques classiques du filtre et du matériau de base ainsi que				
la	CSD du filtre	136			
VI.8	Dispositif expérimental numérique	137			
VI.9	Courbes granulométriques des particules capturées et ayant traversé lors de				
l'e	xpérience numérique.	140			
VI.10	Courbes granulométriques du matériau filtre au début et à l'issue de l'expé-				
${ m ri}\epsilon$	ence numérique				
VI.11	Dispositif analysé grâce au modèle de transport	141			
VI.12	Evolution de la perméabilité équivalente et des courbes granulométriques du				
	atériau multi-couches pour différents Δt				
VI.13	Comportement de l'élément FILTRE 1	144			
VI.14	Evolution de la perméabilité équivalente au cours du temps pour différents β .	145			
VI.15	Courbes granulométriques des différents éléments après 60 secondes de simu-				
lat	tion pour différents eta	145			
VI.16	Evolution des diamètres caractéristiques de percolation et de rétention	146			
VI.17	Evolution de la porosité dans FILTRE 1 au cours du temps pour différents β .	146			
VI.18	Evolution du volume occupé par les particules capturées en fonction de la				
dis	stance à l'interface	147			
A.1	Pyramide sphérique : intersection entre une sphère et un tétraèdre	162			
A.2	Exemples de pyramides sphériques tronquées par un et deux plans	162			
A.3	Notations utilisées lors du calcul du volume d'une pyramide sphérique	164			

xxii Liste des figures

A.4	Notations employées lors du calcul du volume de la calotte sphérique tronquée	
	par un plan	166
A.5	Notations pour le calcul du domaine de variation de r	167
A.6	Notations utilisées pour le calcul de l'angle entre les plans considérés	168
C.1	Représentation d'une face d'un tétraèdre.	177
C.2	Formes géométriques intervenant dans le calcul de la configuration (b)	179
D.1	Face ${\mathcal F}$ considérée pour la recherche du cercle inscrit	181
D.2	Cercles considérés dans le cas d'une configuration problématique lors de la	
	recherche du cercle inscrit	183
T.1	Transformation de l'élément parent vers l'élément isoparamétrique.	197

Liste des tableaux

11.1	Caractéristiques de la génération numérique des assemblages granulaires	29
II.2	Pourcentages de variation des fractiles d'ordre 0.5 des distributions cumulées de	
	tailles de pores au cours de la densification	42
III.1	Pourcentages de variation des fractiles d'ordre 0.5 des distributions cumulées de	
	tailles de constrictions au cours de la densification	57
IV.1	Principales étapes des méthodes de calcul de la CSD	74
V.1	Estimation de d_p et d_r à l'aide de la distribution de tailles de constrictions et de	
	la fonction de connectivité pour les granulométries serrée, étalée et lacunaire	94
V.2	Rayons critiques et valeurs modales des distributions de rayons de constrictions	
	pour les granulométries serrée, étalée et lacunaire, dans leurs états de densité	
	extrêmes	102
V.3	Rayons critiques et rayons d'ouverture de contrôle de Kenney et al. et de Witt	104
V.4	Distances maximales, projetées selon la verticale et adimensionnées par la hauteur	
	de l'échantillon, parcourues par les sphères de diamètre 0.16, 0.22 et 0.27mm	
	injectées numériquement dans l'échantillon le plus dense de la granulométrie étalée	
	et prédites par les mécanismes A et B	106
	of produces pair too moodingment of B	100
VI.1	Données nécessaires à la mise en œuvre du modèle de transport	149
VI.2	Hypothèses sur lesquelles repose le calcul de la loi d'érosion	150
VI.3	Résultats fournis par le modèle de transport	150
A.1	Récapitulatif des formes possibles définies par l'intersection d'une sphère et d'un	
	$t\'etra\`edre \dots \dots$	163

xxiv Liste des tableaux

Les recherches liées au transport de particules ou transfert de masse en milieux poreux répondent à des enjeux environnementaux. Cette thématique intervient en particulier dans l'étude du devenir des sites de stockage des déchets radioactifs en formation géologique ([Fauré, 1994]) ou dans celle des processus de pollution et des méthodes de décontamination des nappes souterraines ([Thompson et Scharf, 1994], [Grolimund et al., 1996]). A cela, on peut ajouter des enjeux industriels. La compréhension des mécanismes de transport de particules est en effet capitale pour exploiter "au mieux" les réservoirs pétroliers ([Vardoulakis et al., 1996], [Vardoulakis, 2004], [Papamichos, 2004]) ou pour optimiser les techniques de renforcement des sols utilisant l'injection de coulis de ciment ([Maalej, 2007], [Aït-Alaïwa, 2007]). Enfin, un troisième enjeu, majeur, motivant les recherches sur les transferts de masse est celui de la sécurité industrielle. En France, la première cause de désordre sur les ouvrages hydrauliques en terre (digues, barrages) est l'érosion interne, un transport de particules sous l'effet d'un écoulement. Ce phénomène s'initie par une phase d'arrachement de matière à laquelle succède une phase de transport de cette matière déstabilisée. Ce couplage arrachement/transport est nécessaire pour expliquer les pathologies observées. En effet, la phase d'arrachement seule, n'est pas forcément problématique si l'accumulation des particules arrachées à l'aval permet tout de même une circulation "libre" du fluide et ne déstabilise pas le sol en place. En revanche, si les particules arrachées peuvent être transportées au sein de l'ouvrage jusqu'à un exutoire où elles seront définitivement éjectées du milieu alors les conséquences peuvent être très sérieuses.

La migration des particules à travers un milieu poreux est fortement liée à la répartition granulométrique du squelette solide et son état de compaction. Ainsi, concernant l'érosion interne, deux origines ont été répertoriées pour expliquer le transport excessif de particules au sein d'ouvrages hydrauliques : des erreurs de conception et des négligences lors de la réalisation des ouvrages. Par exemple, dans le premier cas, un matériau fin a pu être mis directement en contact avec un matériau grossier dont les pores sont plus gros que les particules du matériau fin. Par conséquent, le matériau grossier n'assurera aucun rôle de rétention par rapport au matériau fin (exemple du barrage de Gourdon dans le Lot [Lautrin, 2003]). Dans le second cas, un compactage mal réalisé peut permettre la formation de chemins préférentiels au niveau des contacts remblai/conduite de vidange par lesquels les particules pourront sortir de l'ouvrage (rupture du

barrage de Saint Julien des Landes en Vendée [Lautrin, 2003]). Une analyse de transport ne peut donc se faire sans considérer les deux aspects de granulométrie et d'état de densité des matériaux.

La variable déterminante pilotant l'intensité des désordres occasionnés est la distance que peuvent parcourir les particules transportées avant d'être capturées, si elles le sont, par le milieu granulaire. Deux principaux mécanismes de capture sont répertoriés : soit la particule adhère à la paroi du matériau sous l'effet d'un ensemble de forces physico-chimiques, soit elle est bloquée car elle rencontre un chemin de taille plus petite que la sienne (on parle dans ce second cas d'une capture par exclusion de taille). Selon la taille des particules transportées, l'un ou l'autre des mécanismes prédomine. Pour les particules très fines (les colloïdes impliquées dans le transport des polluants ou les particules argileuses cohérentes), les forces physico-chimiques contribuent significativement au dépôt des particules. En revanche, pour les particules plus grosses non cohérentes (sable, gravier), les forces hydrodynamiques prédominent et le principal mécanisme de capture est le mécanisme d'exclusion de taille. Le travail présenté ici, principalement axé sur la compréhension des mécanismes de transport à l'origine du phénomène d'érosion interne où les particules mobilisées peuvent atteindre plusieurs millimètres (grains de sable), s'inscrit dans cette dernière problématique.

Sous cette hypothèse d'exclusion de taille, estimer la distance parcourue par les particules et/ou la quantité de particules capturées demeure encore un enjeu scientifique. Les problèmes de transport les plus fréquemment traités concernent les deux cas extrêmes que sont la rétention parfaite, lorsque les particules transportées ne parviennent pas à entrer dans le milieu poreux, ou la percolation, lorsque les particules traversent le milieu poreux sans être arrêtées ([Sahimi, 1992], [Lominé et Oger, 2006]). Les cas intermédiaires de filtration, lorsqu'une partie des particules parcourent une certaine distance dans le milieu poreux, restent encore peu abordés. Les modèles théoriques utilisés pour traiter ces cas de migration partielle de particules se scindent en deux catégories : les modèles continus et les modèles discrets. Les approches continues s'avèrent des plus efficaces dans ces problèmes où plusieurs échelles d'espace sont mises en jeu ([Dormieux et Bourgeois, 2002]) et reposent sur une connaissance approfondie des lois de transport à l'échelle microscopique. Mais dans le cas des milieux poreux, la géométrie de l'interface fluide/solide est très irrégulière et rarement connue précisément ce qui rend délicate la résolution du problème. En général, cette résolution s'effectue donc à une échelle supérieure à celle du pore et mène à l'obtention de quantités macroscopiques moyennées. Mais peu de modèles continus, à l'heure actuelle, parviennent à intégrer des paramètres clefs non scalaires caractéristiques de la connectivité de l'espace por l lors du changement d'échelle. Pourtant, les connexions entre pores à l'échelle locale sont primordiales dans les phénomènes de transport et le fait de rester à une échelle mésoscopique constitue une limitation majeure des théories continues.

Les critères de filtre construits pour limiter l'érosion des particules et se fondant sur

des caractéristiques de la courbe granulométrique des matériaux tendent à montrer que des valeurs moyennes telles que la porosité ou la densité ne peuvent expliquer précisément les phénomènes de transport. Il est ainsi nécessaire d'approfondir la connaissance du milieu poral par une analyse locale de ce milieu. Les modélisations numériques pionnières dans ce domaine s'appuient sur des méthodes probabilistes ou statistiques pour estimer les distributions de tailles de pores ([Federico et Musso, 1993]) ou de constrictions, passages les plus étroits entre pores ([Silveira, 1965], [Schuler, 1996]) à partir de la distribution des tailles des particules solides du milieu granulaire. Par la suite, avec le développement des moyens informatiques, les approches numériques discrètes se sont présentées comme le pendant des théories continues. Elles se sont répandues d'abord pour comprendre les interactions entre les grains solides au niveau des contacts interparticulaires puis rapidement, ces méthodes se sont naturellement montrées pertinentes pour l'étude des vides intergranulaires. Les approches discrètes offrent en effet la possibilité de modéliser l'espace poral comme un réseau de pores et de constrictions et facilitent ainsi la définition d'une connectivité entre ces entités. Les vides sont souvent représentés par des sphères (les pores) reliées entre elles par des cylindres (les constrictions) et organisées selon un réseau tridimensionnel cubique ([Schuler, 1996]). Des méthodes probabilistes sont alors utilisées pour déterminer la profondeur de pénétration des particules dans le milieu en fonction de la distribution de tailles des constrictions. Un modèle assez récent, celui de Locke et Indraratna [Locke et al., 2001], semble des plus intéressants au sens où il se place à la frontière entre modèles continus et discrets. Il propose une approche continue des processus de transport tout en posant la distribution de tailles de constrictions comme l'élément pilotant la migration des particules. L'enjeu est ici de proposer un modèle simple de distribution de tailles de constrictions quels que soient le matériau granulaire et sa densité. Ce travail de thèse s'inscrit dans cette lignée afin de pouvoir aborder des problèmes de grande échelle grâce à l'approche continue tout en y intégrant la qualité descriptive à l'échelle microscopique de l'approche discrète.

Ce mémoire s'organise en six chapitres.

- Le premier chapitre fait état des connaissances actuelles relatives à l'espace poral des matériaux granulaires. Il présente essentiellement des résultats obtenus sur les milieux granulaires modèles que sont les assemblages de sphères. On s'attache particulièrement à définir comment la polydispersité d'un matériau, son état de densité et sa technique de mise en place (ici numérique) peuvent influer sur les paramètres décrivant l'espace des vides à l'échelle macroscopique.
- Le deuxième chapitre s'intéresse à la microstructure des vides. Il présente une méthode de caractérisation volumique de l'espace poral qui mène à la définition de distributions de tailles de pores. Cette méthode est appliquée à trois matériaux différents, à différentes compacités, afin de comprendre comment la granulométrie et la densification influe sur les distributions de

tailles de pores.

- Le troisième chapitre constitue le pendant du deuxième chapitre. Il s'intéresse également à la microstructure des vides et présente une méthode de caractérisation topologique de l'espace poral. Notre attention se porte ici, non plus sur les pores, mais sur les constrictions et sur la connectivité du réseau des vides. De même que précédemment, l'influence de la granulométrie et de l'état de densité du matériau sur la connectivité du réseau de vides est présentée.

- On trouve dans la littérature des méthodes probabilistes permettant de construire rapidement la distribution des tailles de constrictions à partir de la distribution des tailles des particules solides. Le quatrième chapitre situe les distributions issues de ces méthodes par rapport à celles obtenues au troisième chapitre du présent manuscrit à partir d'une modélisation numérique. Cette comparaison nous conduit à proposer des modèles de distribution de tailles de constrictions quel que soit le matériau granulaire et quelle que soit sa densité en réponse à l'enjeu mentionné précédemment.
- Le cinquième chapitre s'articule autour de la thématique du transport et propose une caractérisation de l'espace des vides par rapport au transport d'une particule d'une certaine dimension. Compte-tenu de l'hypothèse de capture par exclusion de taille, on s'intéresse ici à une méthode de caractérisation où la géométrie du milieu prime sur la mécanique. A priori prometteuse, cette approche montre rapidement ses limites en raison de la complexité de modélisation nécessaire pour rendre compte des phénomènes.
- Le sixième chapitre est consacré à la mise en œuvre d'un modèle continu pour aborder les problèmes de transport de particules. Il consiste en une hybridation du modèle d'érosion volumique de CIVIDINI et GIODA avec le modèle de filtration de LOCKE et INDRARATNA. Le modèle proposé prend en particulier en compte les résultats obtenus au chapitre IV. Il repose sur une loi d'érosion faisant intervenir un paramètre numérique. Une procédure d'identification de ce paramètre est mise en place à partir d'une expérience numérique discrète.

Nous reviendrons en conclusion sur les principaux résultats issus de la caractérisation microscopique des vides. Nous évoquerons également les possibilités offertes par les deux modèles de transport étudiés pour ensuite proposer quelques perspectives envisageables à ce travail de thèse. .0 Bibliographie 5

Bibliographie

[Aït-Alaïwa, 2007] Aït-Alaïwa, A. (2007). Etude des propriétés de transfert et de la propagation de coulis de ciment dans les milieux granulaires. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes.

- [Dormieux et Bourgeois, 2002] Dormieux, L. et Bourgeois, E. (2002). Introduction à la micromécanique des milieux poreux. Presses Ponts et Chaussées.
- [Fauré, 1994] Fauré, M.-H. (1994). Migration de particules et de solutés en milieux poreux : modélisation du transport simultané de particules argileuses et de radionucléides sous l'effet d'un gradient de salinité. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy (France).
- [Federico et Musso, 1993] Federico, F. et Musso, A. (1993). Some advances in the geometric-probabilistic method for filter design. Dans Filters in geotechnical and hydraulic engineering, pages 75–82, Balkema, Rotterdam.
- [Grolimund et al., 1996] Grolimund, D., Borkovec, M., Barmettler, K., et Sticher, H. (1996). Colloid-facilitated transport of strongly sorbing contaminants in natural porous media: A laboratory column study. *Environmental science and Technology*, 30:3118–3123.
- [Lautrin, 2003] Lautrin, D. (2003). Vieillissement et réhabilitation des petits barrages en terre. Cemagref.
- [Locke et al., 2001] Locke, M., Indraratna, B., et Adikari, G. (2001). Time-dependent particle transport through granular filters. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 127:521–528.
- [Lominé et Oger, 2006] Lominé, F. et Oger, L. (2006). Transport of small particles through a 3D packing of spheres: experimental and numerical approaches. *Journal of Statistical Mechanics:* Theory and Experiment, P07019(1-13).
- [Maalej, 2007] Maalej, Y. (2007). Comportement mécanique d'un milieu granulaire injecté par un coulis de ciment; étude expérimentale et modélisation micromécanique. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [Papamichos, 2004] Papamichos, E. (2004). Hydro-mechanical coupling for erosion. Revue Européenne de Génie-Civil, 8:709-734.
- [Sahimi, 1992] Sahimi, M. (1992). Transport of macromolecules in porous media. *Journal of chemical physics*, 96:4718–4728.
- [Schuler, 1996] Schuler, U. (1996). Scattering of the composition of soils an aspect for the stability of granular filters. Dans *Geofilters'96*, pages 21–34, Montreal, Canada. Lafleur and Rollin, Bitech Publications.

[Silveira, 1965] Silveira, A. (1965). An analysis of the problem of washing through in protective filters. Dans *Proceedings of the sixth international conference on soil mechanics and foundation engineering*, volume 2, pages 551–555, Montreal, Canada.

- [Thompson et Scharf, 1994] Thompson, M. et Scharf, R. (1994). An improved zero-tension lysimeter to monitor colloid transport in soils. *Journal of Environmental Quality*, 23:378–383.
- [Vardoulakis, 2004] Vardoulakis, I. (2004). Fluidisation in artesian flow conditions: Hydromechanically unstable granular media. *Géotechnique*, 54:165–177.
- [Vardoulakis et al., 1996] Vardoulakis, I., Stavropoulou, M., et Papanastasiou, P. (1996). Hydromechanical aspects of the sand production problem. *Transport in porous media*, 22:225–244.

Chapitre I

Assemblages de sphères : méthodes numériques de fabrication et propriétés porales fondamentales

Introduction

Une description détaillée de la microstructure granulaire s'avère nécessaire pour mieux comprendre les phénomènes de transport de particules à l'échelle macroscopique [Nolan et Kavanagh, 1994]. Plus l'espace poral créé par l'assemblage de particules solides sera connu précisément, plus l'on sera en mesure de comprendre les processus de transports de particules solides (ou de tout autre élément : un fluide, un gaz, etc) à travers cet espace.

Encore actuellement, la structure porale des matériaux réels est rarement connue précisément. Les exceptions concernent les matériaux ayant fait l'objet d'analyses microtomographiques ([Spanne et al., 1994], [Bernard, 2005]). Mais ces récentes techniques expérimentales de cartographie 3D sont lourdes à mettre en œuvre et doivent être combinées avec des techniques de traitements d'images appropriées. Ces dernières années, à côté de ces méthodes d'analyse directe, des méthodes numériques visant à reproduire les caractéristiques essentielles des matériaux réels ont été développées. Elles s'appuient sur un milieu granulaire modélisé, classiquement un assemblage de sphères. Cette approche est utilisée dans la présente étude où chaque grain solide est idéalement représenté par une sphère. En dépit de sa simplicité, ce modèle d'assemblage n'est pas incompatible avec une volonté d'avoir un modèle de milieu poreux physiquement représentatif. En effet, un ensemble de sphères génèrent les mécanismes fondamentaux retrouvés dans les matériaux granulaires réels. Des analyses réalisées sur ce type d'assemblages ont mis en évidence de manière très prometteuse des comportements tels que la ségrégation [Jullien et al., 1992], la fluidisation [Götzendorfer et al., 2006] ou même le transport de particules [Oger et Lominé, 2005].

Les études pionnières concernant l'analyse des vides ont été réalisées expérimentalement

dans les années 60 ([Bernal, 1964], [Scott et al., 1963]). Dans ces études, les empilements de sphères sont figés (à l'aide d'une cire par exemple) et des appareillages complexes ont dû être spécifiquement élaborés pour mesurer avec précision les coordonnées des centres des sphères. Le développement des outils numériques a permis de dépasser cette difficulté majeure en facilitant l'accès aux informations à l'échelle locale, notamment les coordonnées des centres des sphères. Mais la viabilité des résultats de l'analyse des vides menée sur les empilements de sphères dépend de la représentativité des échantillons de matériaux générés numériquement. Il faut par exemple se préoccuper de l'influence du processus de mise en place de l'assemblage de sphères. Les principales méthodes de simulation numérique à disposition sont ainsi répertoriées dans la première partie de ce chapitre.

Les recherches dédiées à l'analyse des vides se sont principalement focalisées sur les assemblages de sphères monodisperses. Il a été mis en évidence que les empilements réels de sphères de même rayon s'inscrivaient entre deux états limites : un état dense contraint par l'espace de vide disponible au sein du milieu et un état lâche contraint par la nécessité d'une stabilité du milieu sous gravité. Les empilements denses ont fait l'objet d'études intensives aussi bien expérimentales que théoriques ou numériques. Les travaux réalisés par Bernal [Bernal, 1964] et Finney, 1970] constituent notamment des références en la matière. Les recherches sur les empilements lâches sont plus rares et les données sur les états de densité intermédiaires sont très limitées. La deuxième partie de ce chapitre présente une synthèse des principaux résultats sur ces assemblages monodisperses concernant d'une part, l'organisation spatiale des sphères et d'autre part, les propriétés porales moyennées à l'échelle d'un volume élémentaire.

L'analyse de ces résultats est parfois délicate à transposer à des matériaux granulaires réels car ces assemblages monodisperses conduisent à des structurations très particulières, par ailleurs leur nature est très différente des matériaux réels. En effet, les matériaux granulaires réels peuvent avoir de larges étendues granulométriques. Cette polydispersité a des répercussions sur l'espace poral et la troisième partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de l'influence de la polydispersité sur les paramètres macroscopiques caractéristiques des vides. L'étude de la microstructure des vides des assemblages polydisperses de sphères fait spécifiquement l'objet des chapitres II et III de ce manuscrit et ne sera donc pas abordée ici.

Sommaire

1	Les protocoles de création d'assemblages numériques tridimensionnels				
	1.1	Les mé	thodes géométriques dites d'addition séquentielle aléatoire	9	
	1.2	Les mé	thodes "géométrico-dynamiques" dites de réarrangement collectif	10	
	1.3	Les pro	otocoles de dépôt mécaniques - La méthode des éléments discrets	10	
2	Les assemblages monodisperses et leur espace poral				
	2.1	Les arr	angements ordonnés de densités extrêmes	11	
		2.1.1	L'arrangement ordonné le plus dense	11	
		2.1.2	L'arrangement ordonné le plus lâche	13	

2.2 Les états limites de densité désordonnés			14	
		2.2.1	L'état désordonné le plus dense	14
		2.2.2	L'état désordonné le plus lâche	15
3	Les	assembla	ages polydisperses et leur espace poral	16
4	Enje	ux liés a	u choix de la méthode de création de l'assemblage	18
5	Con	clusion		19
Bib	oliogra	phie		21

1 Les protocoles de création d'assemblages numériques tridimensionnels

Les protocoles de création d'assemblages numériques se scindent en deux catégories : d'une part, les méthodes de type addition séquentielle aléatoire qui construisent des empilements plausibles de sphères sur la base de considérations géométriques, d'autre part, les méthodes de type Méthode des Eléments Discrets qui tiennent compte des lois de la mécanique dans le positionnement des particules.

1.1 Les méthodes géométriques dites d'addition séquentielle aléatoire

Le terme aléatoire fait usuellement référence à des assemblages irréguliers par opposition aux configurations cristallographiques (CFC ou HC par exemple). Il ne s'agit pas ici de positionner aléatoirement les sphères dans l'espace. Certaines contraintes doivent être respectées telles que des chevauchements admissibles entre particules ou la stabilité de l'assemblage granulaire. Dans les méthodes d'addition séquentielle aléatoire, les particules sont déposées une à une sur les particules préalablement placées (ou sur une surface plane dans le cas de la première couche de particules à déposer). Différentes possibilités sont envisageables pour positionner la nouvelle sphère sur celles déjà en place. Bennett, 1972] se fixe un point dans l'espace et place chaque nouvelle sphère pour qu'elle soit la plus proche possible de ce point. Il est à noter que cette technique conduit à des échantillons hétérogènes puisque la compacité diminue à mesure que l'on s'éloigne du point fixé. Jodrey et Tory [Jodrey et Tory, 1979] lâchent la nouvelle sphère depuis une position quelconque au-dessus de l'assemblage de sphères déjà en place. Ils l'autorisent ensuite à translater et à rouler jusqu'à ce qu'elle atteigne un point d'équilibre stable à trois points de contact. Il s'agit ici de translation et de rotation purement géométriques : les coordonnées du centre de la nouvelle sphère sont modifiées sans pour autant analyser la dynamique du système. Powell [Powell, 1980] et Oger et Lominé [Oger et Lominé, 2005] contraignent la nouvelle sphère à avoir trois contacts avec les sphères déjà en place, dont un avec l'une des sphères à la surface de la couche déjà réalisée, qui n'est donc pas encore couverte. Ces méthodes ont l'avantage de permettre de contrôler la distribution de tailles de particules.

Al-Raoush et Alsaleh [Al-Raoush et Alsaleh, 2007] proposent même une méthode d'addition séquentielle perfectionnée permettant de contrôler non seulement la distribution de tailles de particules mais aussi la distribution du nombre de coordination. Les empilements obtenus par ces méthodes sont moyennement denses avec des compacités comprises entre 0.58 et 0.61. Il est possible de forcer le compactage de l'échantillon en plaçant systématiquement la nouvelle sphère le plus bas possible (ou la plus proche du point fixe pour Bennett) mais la plage de compacités atteintes reste très étroite (de l'ordre de quelques %).

Ces protocoles de dépôt se fondent principalement sur des considérations géométriques ce qui leur confère la propriété d'être relativement peu coûteux en temps de calcul. Mais ces techniques de création ne reflètent pas un contexte où les forces gravitaires sont prépondérantes comme c'est le cas de matériaux déversés in situ. Dans les méthodes d'addition séquentielle aléatoire, aucun processus mécanique (écriture d'un quelconque équilibre mécanique) ne participe à l'organisation du milieu. Par ailleurs, l'interaction entre les particules lors de ce déversement et pouvant affecter l'arrangement n'est pas non plus pris en compte.

1.2 Les méthodes "géométrico-dynamiques" dites de réarrangement collectif

L'ensemble des sphères est placé aléatoirement (ici véritablement au sens statistique du terme) dans l'espace en autorisant les chevauchements entre sphères. Une procédure de relaxation itérative est ensuite utilisée pour séparer les sphères et atteindre une position d'équilibre avec des valeurs de chevauchements définis comme admissibles. A chaque itération, le déplacement d'une sphère est calculé en fonction du chevauchement de cette sphère avec ses sphères voisines. Ces méthodes autorisent, en cas de chevauchement non admissible, la réduction des tailles des sphères en contact. Elles ne conservent donc pas la distribution de tailles de particules initiale. Ces méthodes sont généralement classées parmi les méthodes géométriques bien que la procédure de relaxation itérative utilise un équilibrage dynamique très coûteux en temps de calcul. Le choix d'autoriser les chevauchements lors de la phase initiale de mise en place des sphères semble discutable puisque Al-Raoush et Alsaleh (Al-Raoush et Alsaleh, 2007) soulignent que, même à l'issue de la phase de relaxation, le réseau de contact entre particules n'est pas réaliste au sens où la distribution du nombre de coordination n'est pas en accord avec les résultats expérimentaux.

1.3 Les protocoles de dépôt mécaniques - La méthode des éléments discrets

La méthode des éléments discrets (Discret Element Method DEM), fondée principalement sur les travaux de Cundall et Strack [Cundall et Strack, 1979], considère chaque particule comme un corps rigide ou simplement déformable possédant un nombre fini de degrés de liberté. Cette particule interagit avec les autres particules de l'assemblage par une loi de contact et ses déplacements sont régis par le principe fondamental de la dynamique. Parmi les méthodes des éléments discrets, deux grands courants se distinguent [Cambou et Jean, 2001] qui diffèrent principalement dans le calcul des interactions entre particules :

- l'approche smooth DEM, proche de la méthode dynamique moléculaire dans laquelle les particules sont supposées indéformables. Les interactions de contact et de frottement entre particules sont décrites par des systèmes de ressorts et d'amortisseurs. Il s'agit donc de lois d'interaction continues. Dans ces méthodes, le recouvrement entre deux particules est autorisé tant qu'il reste négligeable devant la taille des particules et les systèmes de ressorts et d'amortisseurs permettent de simuler une force d'interaction répulsive tant que ce recouvrement n'est pas nul.
- l'approche dynamique des contacts (Non Smooth Contact Dynamics NSCD) dans laquelle les interactions entre particules sont régies par des lois de choc à seuil, conditions unilatérales et frottement de Coulomb. Ces méthodes permettent de traiter les contacts simultanément mais les propriétés élastiques des grains réels ne peuvent être prises en compte.

Cette première partie du chapitre a apporté des réponses au problème de construction géométrique des assemblages de sphères. Les sections suivantes sont consacrées à la caractérisation géométrique de ces assemblages. L'étude portera tout d'abord sur le cas particulier des empilements monodisperses et présentera quelques résultats fondamentaux sur la structure porale de tels assemblages.

2 Les assemblages monodisperses et leur espace poral

Il est usuellement reconnu que les porosités maximale et minimale atteignables avec des sphères monodisperses valent respectivement 0.4764 et 0.2595. Il est intéressant de remarquer que ces valeurs ne dépendent pas du diamètre des sphères empilées. Ceci provient du fait que ces bornes extrêmes de porosité résultent de considérations purement géométriques. Les empilements considérés pour atteindre ces porosités sont très réguliers : l'arrangement ordonné le plus dense est déterminé par un réseau de type hexagonal compact tandis que l'arrangement ordonné le plus lâche correspond à un réseau théorique parfait de type cubique. Ces arrangements sont décrits de manière détaillée ci-après.

2.1 Les arrangements ordonnés de densités extrêmes

2.1.1 L'arrangement ordonné le plus dense

Les arrangements tridimensionnels de sphères monodisperses les plus denses possibles sont obtenus lorsque les centres des sphères occupent les nœuds soit d'un réseau cubique face centrée (CFC) soit d'un réseau hexagonal compact (HC). La densité est la même pour ces deux réseaux qui s'obtiennent en empilant des plans denses, hexagonaux, de sphères. Soit \mathcal{A} le premier plan hexagonal (représenté par les sphères noires sur les figures Fig. I.1). Le plan \mathcal{B} , le plan hexagonal suivant, se positionne de manière à ce que chaque sphère de \mathcal{B} s'associe à trois sphères de \mathcal{A}

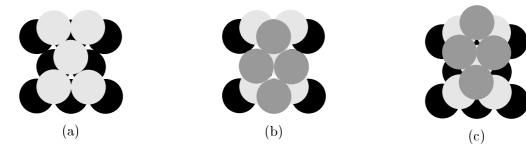


Fig. I.1 – Construction des empilements denses de sphères monodisperses (a). Superposition de deux plans hexagonaux \mathcal{A} (en noir) et \mathcal{B} (en gris clair), (b). Réseau Hexagonal Compact (c). Réseau Cubique Face Centré

pour former un tétraèdre régulier. Le plan \mathcal{B} correspond aux sphères en gris clair sur les figures Fig. I.1. Pour superposer un troisième plan hexagonal, le plan \mathcal{C} au-dessus de \mathcal{B} , on positionne les sphères de \mathcal{C} soit à la verticale des sphères de \mathcal{A} - le réseau ainsi obtenu est un réseau HC (Fig. I.1 (b)) - soit à la verticale des cavités inutilisées - le réseau obtenu est alors un réseau CFC (Fig. I.1 (c)).

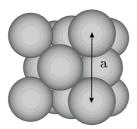


Fig. I.2 – Configuration ordonnée la plus dense d'un assemblage de sphères monodisperses

Dans le cas du réseau CFC (Fig. I.2),

$$\mathcal{V}_T = a^3 \tag{I.1}$$

$$V_{\text{solide}} = \frac{6}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) + \frac{8}{8} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$
 (I.2)

où \mathcal{V}_T représente le volume de la maille cubique de côté a et $\mathcal{V}_{\text{solide}}$ désigne le volume occupé par les sphères de rayon R au sein de la maille cubique.

Les particules sont ici en contact le long de la diagonale d'une face du cube. Par conséquent, $a\sqrt{2}=4R$.

La compacité maximale, rapport du volume des particules au volume total de la maille cubique, est donc égale à

$$\frac{\mathcal{V}_{\text{solide}}}{\mathcal{V}_T} = 1 - n_{\min} = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.7405 \tag{I.3}$$

ce qui correspond à une porosité minimale $n_{\min}=0.2595$. Dans cette configuration, le nombre de coordination (nombre moyen de contacts par sphère) est égal à 12.

2.1.2 L'arrangement ordonné le plus lâche

Bien que la définition de l'état le plus lâche d'un empilement granulaire soit sujette à discussion, l'arrangement cubique (Fig. I.3) est communément considéré comme l'arrangement le plus lâche pour des sphères monodisperses.

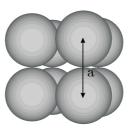


Fig. I.3 – Configuration ordonnée la plus lâche d'un assemblage de sphères monodisperses

Dans cette configuration, dans une maille cubique élémentaire de volume total $\mathcal{V}_T = a^3$, le volume $\mathcal{V}_{\text{solide}}$ occupé par les particules solides de rayon R, se calcule par l'équation (I.4) :

$$\mathcal{V}_{\text{solide}} = \frac{8}{8} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \tag{I.4}$$

Les particules sont en contact sur le côté d'une face. Par conséquent, a=2R. La compacité minimale est donc égale à

$$\frac{\mathcal{V}_{\text{solide}}}{\mathcal{V}_T} = 1 - n_{\text{max}} = \frac{\pi}{6} \approx 0.5236 \tag{I.5}$$

La porosité maximale correspondante, n_{max} , vaut alors 0.4764. Le nombre de coordination est ici égal à 6.

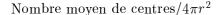
Une telle régularité dans les arrangements ne s'observent cependant pas dans les empilements de sphères réels. Expérimentalement, les particules sphériques s'arrangent spontanément de manière désordonnée et les porosités maximale et minimale mesurées valent respectivement 0.44 (au lieu de 0.4764 avec le réseau ordonné) et 0.36 (au lieu de 0.2595) [Aste, 2006]. Lors des expériences, les particules utilisées ne sont jamais strictement sphériques et n'ont jamais exactement le même diamètre. Cette dispersion dans la forme et/ou la taille des sphères, si petite soit-elle, suffit à introduire du désordre dans l'arrangement de particules. Ceci conduit à la définition de

deux nouveaux états limites : un état le plus lâche et un état le plus dense désordonnés. L'état le plus lâche doit être stable sous gravité et la structure de l'état le plus dense est contrainte par l'espace de vide disponible au sein du milieu.

2.2 Les états limites de densité désordonnés

2.2.1 L'état désordonné le plus dense

La compacité maximale d'un assemblage irrégulier de sphères est unanimement admise égale à 0.6367 (0.6366 ± 0.004 pour Finney [Finney, 1970], 0.6366 ± 0.0008 pour Scott [Scott et Kilgour, 1969], 0.638 pour Nolan et Kavanagh [Nolan et Kavanagh, 1992] et 0.638 pour Roux et Chevoir [Roux et Chevoir, 2005]). Le nombre de coordination est généralement mesuré autour de 6 (5.9 pour Nolan et Kavanagh [Nolan et Kavanagh, 1992] et 6.074 pour Roux et Chevoir [Roux et Chevoir, 2005]). Roux et Chevoir [Roux et Chevoir, 2005] ont de plus établi que l'état désordonné le plus dense pouvait se définir, dans la limite des grains rigides, comme un état d'équilibre sous chargement isotrope d'un assemblage de billes non frottantes, sans mise en ordre. Le nombre de coordination, calculé en éliminant les grains ne transmettant pas les efforts extérieurs, est alors égal à 6. L'une des principales caractéristiques des assemblages monodisperses a été mise en exergue par FINNEY [Finney, 1970] et concerne la fonction de distribution radiale qui représente la probabilité de trouver une particule à une distance r d'une autre. Un exemple de cette fonction obtenue à partir d'un empilement de 1109 sphères de diamètre d est représenté sur la figure Fig. I.4.



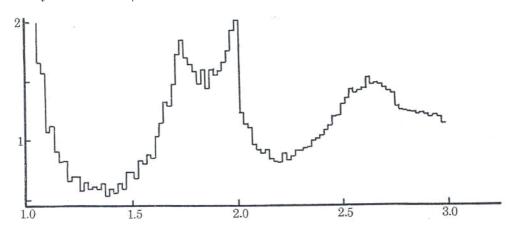


Fig. I.4 – Fonction de distribution radiale de FINNEY [Finney, 1970], obtenue sur un échantillon de 1109 sphères de même diamètre d, $\Delta r = 0.02d$

Distance (en diamètres de sphères)

Le premier maximum, à la distance d, correspond aux sphères directement en contact qui assurent la stabilité de l'assemblage. La spécificité concerne les deux maxima suivants, à des valeurs de 1.73d et 1.99d. Ces valeurs sont caractéristiques des assemblages monodisperses et témoignent de la présence de configurations planes à trois particules (Fig. I.5).

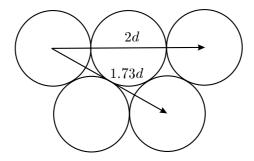


Fig. I.5 – Configurations de sphères pouvant justifier les maxima de la fonction de distribution radiale

Concernant l'espace poral de ce type d'assemblage, BERNAL [Bernal, 1964] met en évidence que la majorité des vides résulte d'arrangements tétraédriques des sphères. En élargissant la notion de contact à des particules voisines, distantes de moins de 1.4d, BERNAL trouve que la configuration tétraédrique définit 73% des pores. WHITTAKER [Whittaker, 1978] ne trouve plus que 40% de telles configurations en restraignant la distance de coordination à 1.2d. En revanche, selon Nolan et Kavanagh [Nolan et Kavanagh, 1995], la structure des états denses désordonnés se caractérise par des octaèdres irréguliers et des configurations planes plutôt que par des tétraèdres.

2.2.2 L'état désordonné le plus lâche

La compacité minimale d'un assemblage irrégulier de sphères est plus discutée que la compacité maximale. Les valeurs mesurées s'étendent de 0.509 pour Nolan et Kavanagh [Nolan et Kavanagh, 1992] à 0.601 pour Scott (cité par [Finney, 1970]). Onoda et Liniger [Onoda et Liniger, 1990] proposent une valeur intermédiaire de 0.555 dans le cas limite où la gravité est nulle. De la même manière, la dispersion sur le nombre de coordination est plus grande que pour le cas dense. Nolan et Kavanagh [Nolan et Kavanagh, 1992] mesurent une valeur de 4.4 tandis que Scott trouve une valeur de 5.5. La définition de l'état le plus lâche est effectivement plus délicate que celle de l'état le plus dense. Alors que l'état le plus dense peut être défini dans les termes d'un problème géométrique, l'état le plus lâche dépend très largement des propriétés mécaniques aux contacts. Il est généralement admis qu'il s'agit de l'état le plus lâche possible mécaniquement stable mais la notion de stabilité mécanique dépend du chargement extérieur que l'on considère qui peut être soit la gravité, soit une pression hydrostatique donnée. L'état le plus lâche s'obtient généralement par un simple lâcher sous

gravité des sphères dans un contenant. La porosité est alors maximale en raison de la formation de voûtes internes dans lesquelles plusieurs particules entrent en contact pour s'équilibrer collectivement. Mais dans le cas de sphères lisses particulièrement enclines au glissement et au roulement, ces voûtes sont fragiles et un faible chargement extérieur suffit à les casser. Ceci contribue à expliquer les incertitudes sur la description de l'état désordonné le plus lâche.

En définitive, la caractérisation des assemblages ordonnés est assez aisée dans la mesure où le positionnement des sphères est connu exactement. En revanche, dès lors que l'on suppose une infime dispersion dans les rayons des sphères comme c'est le cas pour les empilements réels, la caractérisation devient beaucoup plus complexe et passe nécessairement par une approche statistique. Ce désordre structural se retrouve dans les assemblages de sphères polydisperses où la gamme de tailles de sphères peut être très étendue et à nouveau, la description de ce type d'assemblage va s'appuyer sur des méthodes statistiques.

3 Les assemblages polydisperses et leur espace poral

Prendre en compte la polydispersité des matériaux présente deux avantages. Le premier est que cela permet une modélisation plus conforme à la réalité puisque les sols intervenant dans les applications du génie-civil ont naturellement des granulométries "étalées". Le second est que, la forme des particules étant fixée, la distribution des tailles des sphères devient le principal paramètre pouvant affecter la structure de l'assemblage. Diversifier les tailles des particules permet notamment d'atteindre des porosités inférieures à 0.2595, porosité minimale atteignable avec des assemblages monodisperses. Par un choix déterminé de la position et de la taille de chaque particule, il est même possible d'atteindre une compacité de 1 (soit une porosité nulle) qui constitue cependant un cas limite. Les sphères d'Apollonius sont un exemple d'un tel assemblage. Initialement, quatre sphères sont en contact deux à deux. La construction d'Apollonius consiste à positionner dans le pore entre ces quatre sphères, une cinquième sphère tangente aux quatre premières de manière à maximiser le volume solide inséré. Les nouveaux pores, plus petits, créés suite à l'ajout de cette nouvelle sphère, sont à nouveau remplis de sphères dont le volume est maximal et ainsi de suite. Atteindre cette compacité de 1 suppose donc une totale liberté dans le choix :

- 1. de la distribution de tailles de particules puisqu'il faut avoir à disposition suffisamment de petites particules (jusqu'à des particules infiniment petites...) pour pouvoir combler les vides à chaque itération,
- 2. du positionnement des particules. Cette construction est purement géométrique et suppose de pouvoir insérer une particule n'importe où dans l'espace. Il est à noter que d'un point de vue mécanique, le risque de voir apparaître un phénomène de ségrégation, séparation des grains par taille dès que le matériau est mis en mouvement, est très important avec cet empilement de compacité 1.

Ces deux conditions ne sont pas satisfaites dans la réalité et font que cette compacité de 1 est une borne supérieure théorique pour les milieux granulaires. Dans les milieux naturels, il manque généralement des particules fines pour entièrement combler l'espace des vides et le positionnement des particules n'est pas précisément contrôlé et résulte de l'équilibre mécanique de l'assemblage. Tout milieu granulaire réel comporte donc nécessairement des vides sur lesquels la distribution de tailles de particules a un impact décisif.

Dans les matériaux polydisperses, deux mécanismes contraires peuvent influencer la porosité [Dullien, 1979] : soit les particules les plus fines peuvent s'insérer dans les vides occasionnés par l'assemblage des particules les plus grandes, soit elles s'insèrent en perturbant cet assemblage et en écartant les grosses particules les unes des autres. Deux facteurs majeurs influencent donc la porosité : d'une part, les différences de taille entre les différentes particules (l'étalement granulométrique) et d'autre part, la proportion de particules de chaque taille. De manière générale, la polydispersité a pour conséquence de diminuer la porosité des assemblages [Lochmann et al., 2006] mais cela résulte de la concomitance des deux mécanismes contraires. Ajouter des particules fines tend certes à faire diminuer la porosité mais remplacer un assemblage poreux de petites particules par une grosse particule solide peut aussi s'avérer judicieux pour augmenter la compacité.

Etablir le lien entre la porosité et la distribution de tailles de particules a motivé de nombreuses recherches. Pour des distributions normales et log-normales, SOHN et MORELAND [Sohn et Moreland, 1968] ont souligné une relation directe entre la compacité et l'écart-type de la distribution granulaire. Brouwers [Brouwers, 2006] propose une expression analytique pour calculer la porosité dans le cas d'un assemblage dont la distribution suit une progression géométrique de raison constante. Pour des distributions granulométriques plus quelconques, on dispose de données expérimentales mettant en exergue les principaux paramètres influençant la porosité. Suite à des mesures d'indices des vides extrêmes réalisées sur près de deux cents matériaux granulaires, MIURA et al. [Miura et al., 1997] identifient deux paramètres cruciaux: le diamètre caractéristique solide d_{50} et le coefficient d'uniformité C_u . Ils observent notamment que les indices des vides maximal et minimal, respectivement e_{max} et e_{min} , diminuent tous deux à mesure que d_{50} augmente. Les auteurs attribuent cette tendance aux effets des forces surfaciques. Pour de fines particules, les forces électrostatiques jouent un rôle dominant par rapport aux forces gravitationnelles et permettent aux petites particules de s'arranger dans des structures plus lâches que les grandes particules. Cette tendance ne devrait donc pas être observée dans la présente étude, consacrée à des matériaux dits "grenus". De plus, MIURA et al. montrent que $e_{\rm max}$ et $e_{\rm min}$, qui semblent liés par la relation linéaire $e_{\rm max}{=}1.62e_{\rm min}$, diminuent à mesure que C_u augmente. Par ailleurs, l'étendue $e_{\max}-e_{\min}$ qui estime les potentialités de réarrangement diminue si d_{50} augmente mais ne dépend pas significativement de C_u . BIAREZ et Hicher [Biarez et Hicher, 1997] s'accordent sur la dépendance de $e_{\rm max}$ et $e_{\rm min}$ vis-à-vis de C_u puisqu'ils montrent que l'étalement granulométrique favorise des densités fortes, au moins jusqu'à des coefficients d'uniformité de l'ordre de 10. Pour des étalements plus forts, l'influence de C_u est plus faible. Ces auteurs ajoutent par ailleurs l'effet de la forme des grains et constatent que le caractère arrondi des particules est un facteur favorisant les densités élevées.

En définitive, les résultats sur les assemblages monodisperses soulignent la nécessité d'études de ces matériaux à l'échelle locale. Si les résultats expérimentaux ou théoriques sont effectivement à peu près consensuels sur les porosités moyennes, les divergences sont plus marquées dès lors que la microstructure du matériau (réseau de contacts, arrangement géométrique des particules) est considérée. Pour les assemblages polydisperses, encore peu documentés, il est difficile de comprendre les phénomènes d'arrangement collectif de ces sphères de tailles différentes et dans la plupart des cas, seules des tendances sont dégagées quant à l'évolution de l'espace des vides en fonction de la granulométrie ou de l'état de densité du matériau. Pour tous ces assemblages, les empilements réguliers de sphères ne sont pas pertinents pour refléter le comportement des matériaux réels. Pour rendre compte des hétérogénéités de la microstructure et ainsi assurer la validité de l'analyse des vides locale proposée dans ce travail, il nous faut donc mener nos propres expériences numériques sur des assemblages de particules désordonnés. Cependant, nous avons entraperçu plus haut que le procédé de dépôt de particules pouvait influencer grandement l'organisation de la structure. Il est donc important de choisir le procédé le plus à même de refléter les modes de dépôt des matériaux réels dans un contenant.

4 Enjeux liés au choix de la méthode de création de l'assemblage

Que ce soit expérimentalement ou numériquement, différentes procédures de fabrication d'échantillons peuvent produire différentes structures granulaires : pour une même compacité et une texture isotrope (paramètres moyens identiques), les nombres de coordination peuvent différer [Roux et Chevoir, 2005]. Roux et Chevoir se focalisent sur deux méthodes numériques discrètes de préparation d'états isotropes. La première est une méthode idéale de compression d'un gaz granulaire conduisant à des états internes différents selon le coefficient de frottement intergranulaire μ choisi. Dans le cas extrême μ =0, l'état obtenu, référencé A, est l'état de compacité maximale des assemblages de sphères aléatoires avec les valeurs classiques de porosité Φ_A =0.637 et de nombre de coordination z_A proche de 6. A l'extrême opposé, si μ est égal au coefficient de frottement du matériau granulaire (μ =0.3) alors la mise en place mène à un état lâche référencé D, pour lequel Φ_D =0.593 et z_D =4.546. Un cas intermédiaire de lubrification imparfaite (μ =0.02) est envisagé et mène à un état B caractérisé par Φ_B =0.627 et z_B =5.8. La seconde méthode d'assemblage est une méthode simplifiée de compactage par vibration : l'état dense, référencé C, est obtenu par dilatation de l'état A suivie d'une vibration et d'un

¹L'étoile dans la notation de z indique que le nombre de coordination est ici calculé en éliminant les grains "flottants", ne transmettant pas les efforts extérieurs. Si f est la proportion de ces grains flottants alors le nombre de coordination global se calcule par $z = (1 - f)z^*$.

I.5 Conclusion 19

compactage à frottement μ =0.3 sous une pression de 10kPa. Pour cet état C, Φ_C =0.635 et z_C^* =4.56. Il résulte des simulations que les états vibrés sont plus denses ($\Phi_C \geq \Phi_B$) mais leurs nombres de coordination sont plus faibles ($z_C^* \leq z_B^*$). L'état dense vibré C a d'ailleurs un nombre de coordination très proche de celui de l'état lâche A. Φ et z^* sont donc indépendants pour des états isotropes. Il est même observé, contrairement à ce que peut dicter l'intuition première, qu'un état obtenu par décompression d'un état dense a un réseau de contacts moins riche que celui de même compacité résultant d'une simple compression de l'état lâche. Dans le cadre de la présente étude, si les nombres de coordination diffèrent indépendamment de la porosité, il semble raisonnable de penser que les chemins de filtration et les tailles de vide sont également différents.

Ce dernier paragraphe met en évidence que la compacité de l'empilement de sphères et la coordinence géométrique dépendent fortement de l'algorithme de construction utilisé et l'on retrouve ici la nécessité de se préoccuper de la technique de création employée si l'on souhaite être au plus près des conditions physiques réelles.

5 Conclusion

Cet état de l'art souligne qu'il existe un catalogue relativement fourni d'expériences (en laboratoire et numériques) menées sur les assemblages monodisperses, particulièrement dans leur état le plus dense. Il se dégage de ces expériences que de tels assemblages se mettent naturellement en place de manière désordonnée. Deux états extrêmes peuvent alors être définis : un état dense régi par l'espace des vides disponible et un état lâche répondant à la seule contrainte d'être mécaniquement stable.

Un constat important établi à partir des assemblages monodisperses est que, si macroscopiquement, des assemblages au même état de densité semblent équivalents en termes de porosité, il peut exister des disparités localement : hétérogénéités dans le réseau de contacts entre particules, hétérogénéités dans les arrangements géométriques des particules les unes avec les autres qui se traduiront par des hétérogénéités dans les caractéristiques des pores. La microstructure du matériau granulaire semble dépendre directement du processus d'assemblage utilisé pour créer l'échantillon. Des techniques de mise en place différentes génèreront donc des matériaux avec des espaces interstitiels organisés différemment.

Les expériences relatives aux assemblages polydisperses sont beaucoup plus rares. La polydispersité n'augmente pas vraiment la difficulté d'obtention des caractéristiques telles que la porosité, la distribution du nombre de coordination ou la fonction de distribution radiale. Mais les dispersions sur les rayons rendent difficiles toute conclusion à partir de ces analyses. Sans la condition de monodispersité notamment, les études d'ordre à courte distance par la fonction de distribution radiale se révèlent difficiles à exploiter. C'est pourquoi la synthèse

bibliographique énonce principalement des tendances d'évolution des paramètres des vides : la diversification des tailles des sphères mène usuellement à des échantillons plus denses et dans le cadre des matériaux non cohérents, les volumes des pores semblent d'autant plus importants que le matériau est constitué de grosses particules.

Il ressort également de cette synthèse bibliographique que, même pour les assemblages monodisperses pourtant bien documentés, la plupart des études se concentrent sur l'état le plus dense et parfois l'état le plus lâche. Les états de densité intermédiaire sont souvent négligés.

Le récapitulatif de ces quelques résultats nous confortent dans l'idée de la nécessaire analyse du réseau de vides à l'échelle locale. Lors de nos expériences numériques, une attention particulière devra alors être accordée à la technique de mise en place du matériau granulaire. Enfin, les précédents constats nous ont conduits à privilégier deux axes de recherche dans la suite de ce travail : l'influence de la granulométrie et celle de l'état de densité du matériau sur la microstructure de l'espace poral.

I.5 Bibliographie 21

Bibliographie

[Al-Raoush et Alsaleh, 2007] Al-Raoush, R. et Alsaleh, M. (2007). Simulation of random packing of polydisperse particles. *Powder technology*, 176:47–55.

- [Aste, 2006] Aste, T. (2006). Volume fluctuations and geometrical constraints in granular packs. Physical Review Letters, 96:018002(1-4).
- [Bennett, 1972] Bennett, C. H. (1972). Serially deposited amorphous aggregates of hard spheres. Journal of Applied Physics, 43:2727–2734.
- [Bernal, 1964] Bernal, J. (1964). The structure of liquids. *Proc. Roy. Soc. London A*, 280:299–322.
- [Bernard, 2005] Bernard, D. (2005). 3D quantification of pore scale geometrical changes using synchrotron computed microtomography. Oil and Gas science and technology Rev. IFP, 60:747–762.
- [Biarez et Hicher, 1997] Biarez, J. et Hicher, P.-Y. (1997). Influence de la granulométrie et de son évolution par ruptures de grains sur le comportement mécanique de matériaux granulaires. Revue française de génie-civil, 1:607-631.
- [Brouwers, 2006] Brouwers, H. J. H. (2006). Particle-size distribution and packing fraction of geometric random packings. *Physical Review E*, 74:031309(1–14).
- [Cambou et Jean, 2001] Cambou, B. et Jean, M. (2001). Micromécanique des matériaux granulaires. HERMES Science Publications.
- [Cundall et Strack, 1979] Cundall, P. et Strack, O. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. Géotechnique, 29:47–75.
- [Dullien, 1979] Dullien, F. A. L. (1979). Porous media fluid transport and pore structure. Academic Press.
- [Finney, 1970] Finney, J. (1970). Random packings and the structure of simple liquids. The geometry of random close packings. *Proc. Roy. Soc. London A*, 319:479–493.
- [Götzendorfer et al., 2006] Götzendorfer, A., Tai, C. H., Kruelle, C. A., Rehberg, I., et Hsiau, S. S. (2006). Fluidization of a vertically vibrated two-dimensional hard sphere packing: a granular meltdown. *Physical review E*, 74:011304(1–9).
- [Jodrey et Tory, 1979] Jodrey, W. S. et Tory, E. M. (1979). Computer simulation of close random packing of equal spheres. *Physical review A*, 32:2347–2351.
- [Jullien et al., 1992] Jullien, R., Meakin, P., et Pavlovitch, A. (1992). Three-dimensional model for particle-size segregation by shaking. *Physical Review Letters*, 69:640–643.

- [Lochmann et al., 2006] Lochmann, K., Oger, L., et Stoyan, D. (2006). Statistical analysis of random sphere packings with variable radius distribution. *Solid State Sciences*, 8:1397–1413.
- [Miura et al., 1997] Miura, K., Maeda, K., Furukawa, M., et Toki, S. (1997). Physical characteristics of sands with different primary properties. *Soils and foundations*, 37:53–64.
- [Nolan et Kavanagh, 1994] Nolan, G. et Kavanagh, P. (1994). The size distribution of interstices in random packings of spheres. *Powder Technology*, 78:231–238.
- [Nolan et Kavanagh, 1995] Nolan, G. et Kavanagh, P. (1995). Octohedral configurations in random close packing. *Powder Technology*, 83:253–258.
- [Nolan et Kavanagh, 1992] Nolan, G. T. et Kavanagh, P. E. (1992). Computer simulation of random packing of hard spheres. *Powder Technology*, 72:149–155.
- [Oger et Lominé, 2005] Oger, L. et Lominé, F. (2005). Particle percolation through a porous medium. Dans *Powders and Grains*, pages 57–61, London. Garcia-Rojo, Hermann and McNamara, Taylor and Francis Group.
- [Onoda et Liniger, 1990] Onoda, G. Y. et Liniger, E. G. (1990). Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset. *Physical review letters*, 64:2727–2730.
- [Powell, 1980] Powell, M. (1980). Computer-simulated random packing of spheres. *Powder Technology*, 25:45–52.
- [Roux et Chevoir, 2005] Roux, J. N. et Chevoir, F. (2005). Simulation numérique discrète et comportement mécanique des matériaux granulaires. Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées, 254:109–138.
- [Scott et al., 1963] Scott, G. D., Charlesworth, A. M., et Mak, M. K. (1963). On the random packing of spheres. *Journal of chemical physics*, 40:611–612.
- [Scott et Kilgour, 1969] Scott, G. D. et Kilgour, D. M. (1969). The density of random close packing of spheres. *Journal of Physics D: Applied physics*, 2:863–866.
- [Sohn et Moreland, 1968] Sohn, H. Y. et Moreland, C. (1968). The effect of particle size distribution on packing density. Canadian Journal of Chemical Engineering, 46:162–167.
- [Spanne et al., 1994] Spanne, P., Thovert, J. F., Jacquin, C. J., Lindquist, W. B., Jones, K. W., et Adler, P. M. (1994). Synchrotron computed microtomography of porous media: topology and transports. *Physical review letters*, 73:2001–2004.
- [Whittaker, 1978] Whittaker, E. J. W. (1978). The cavities in a random close-packed structure. Journal of non-crystalline solids, 28:293–304.

Chapitre II

Caractérisation volumique de l'espace des pores

Introduction

Ce chapitre est dédié à une analyse de la microstructure de la phase poreuse de matériaux numériques modèles composés de sphères. Il s'organise selon un schéma similaire au premier chapitre : la première partie est consacrée à la description du mode de préparation des échantillons numériques tandis que les parties suivantes présentent les outils utilisés et les résultats de l'analyse porale. L'objectif est ici d'aboutir à une représentation la plus significative possible de l'espace poral en termes de distributions de volumes de pores.

Les constats du chapitre I ont souligné l'importance du processus d'assemblage des sphères, ce dernier pouvant conduire à des structures locales non réalistes. La première partie de ce chapitre présente la technique de création mise en œuvre pour générer les échantillons, technique que l'on a souhaitée la plus conforme possible aux processus de mise en place de matériaux réels sur les chantiers de génie-civil. La méthode des éléments discrets prenant en compte les lois de la mécanique a ici été privilégiée.

Concernant l'analyse des vides, si les pores étaient des entités aux frontières bien délimitées, une procédure de caractérisation unique pourrait être envisagée. Mais l'espace poral s'avère être continu et de géométrie particulièrement complexe. Par conséquent, l'enjeu de la caractérisation passe par la définition de paramètres pertinents pour estimer la taille des pores.

Dans la présente étude, pour accéder aux grandeurs locales jugées pertinentes, une partition de l'espace de type Delaunay radical est couplé au code de simulation discrète. A partir de cette partition, différentes grandeurs peuvent être envisagées pour estimer la taille d'un pore. Nous nous attacherons donc, dans la deuxième partie de ce chapitre, à présenter la procédure d'analyse proposée et à situer les différents paramètres caractéristiques des pores les uns par rapport aux autres.

Dans une troisième partie, nous nous intéresserons à l'influence de la granulométrie et de

l'état de densité sur les distributions de tailles de pores. La présente procédure d'analyse des vides sera appliquée à trois granulométries typiques (serrée, étalée et lacunaire), pour divers états de densité, du plus lâche au plus dense.

Sommaire

1	Pro	Protocole de création d'assemblages granulaires utilisé 24					
	1.1	Princip	e général	24			
	1.2	Caractéristiques des assemblages granulaires étudiés					
	1.3	Détails du protocole de création des échantillons					
	1.4	Problèmes de représentativité des échantillons					
		1.4.1	Définition du volume minimal de mesure pour une statistique				
			correcte	30			
		1.4.2	Homogénéité de l'échantillon dans le volume d'analyse	30			
2	Représentation de l'espace des vides par une triangulation de De-						
	launay radical						
	2.1	Princip	e de la triangulation de Delaunay radical	32			
	2.2	Vers de	s distributions de vide plus réalistes	33			
	2.3	Compa	raison avec les lois statistiques usuelles	36			
	2.4	Analyse	e des résultats	36			
3	Effets de la granulométrie et de la densité sur les caractéristiques						
	moi	rphologic	ques	38			
	3.1	Influenc	ce de la granulométrie à densité relative fixée	39			
	3.2	Influence	ce de la densité relative du matériau à granulométrie fixée	40			
4	Conclusion						
Bi	Bibliographie						

1 Protocole de création d'assemblages granulaires utilisé

1.1 Principe général

La technique de création utilisée ici est la méthode des éléments discrets Smooth-DEM. S'il est vrai que cette méthode est particulièrement coûteuse en temps de calcul (et à paramètre de raideur fixé, d'autant plus coûteuse que les particules à modéliser sont de petites tailles), elle offre plus de possibilités d'ajustement de la compacité des empilements pour une courbe granulométrique donnée. La porosité obtenue par les méthodes DEM dépend notamment du coefficient de frottement interparticulaire. Les sphères numériques seront déposées sous gravité dans une boîte. Ce processus de dépôt est un processus dynamique s'accompagnant d'éventuelles collisions entre sphères. La densification du matériau sera le résultat d'une sollicitation triaxiale vraie alternée, sous contrainte de confinement fixée.

1.2 Caractéristiques des assemblages granulaires étudiés

L'analyse des vides proposée dans ce travail s'articule autour de trois granulométries. Les courbes granulométriques de ces trois matériaux et les densités de probabilité des tailles de sphères associées sont données par la figure Fig II.1. Pour rappel, si g est la densité de probabilité de la variable X alors la normalisation de g consiste en $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$. Le matériau correspondant aux courbes (a) et (b) est un matériau à granulométrie serrée de coefficient d'uniformité 1.5, le d_{50} en masse vaut 6mm (d_0 =3mm, d_{100} =12mm). Le matériau correspondant aux courbes (c) et (d) est un matériau à granulométrie plus étalée de coefficient d'uniformité 3.9, le d_{50} en masse vaut 2.7mm (d_0 =0.7mm, d_{100} =10mm). Le matériau correspondant aux courbes (e) et (f) est un matériau présentant une lacune granulométrique s'étendant entre 1.2 et 2.5mm. Son coefficient d'uniformité est égal à 3.6, le d_{50} en masse vaut 3.2mm (d_0 =0.7mm, d_{100} =10mm).

Pour réaliser numériquement ces courbes granulométriques, l'étendue de tailles de particules représentées est discrétisée en dix classes. Pour chacune de ces classes, le pourcentage de tamisat cumulé est fixé par la courbe granulométrique que l'on s'impose (marquée par des croix sur la figure Fig II.1 (a)), ce qui permet de déterminer précisément le nombre de sphères à générer par classe de diamètres de particules. Par une étude inverse, on s'assure que le biais engendré par la discrétisation en classes est admissible et que la courbe granulométrique du matériau numérique effectivement généré (en traits pleins sur la figure Fig II.1 (a)) est conforme à celle que l'on s'est imposée.

Ces trois matériaux ont été choisis car ils correspondent à trois classes de comportement traditionnellement distinguées et usuellement rencontrées dans les problèmes de transport de particules.

De façon générale, le dimensionnement des filtres granulaires s'effectue à partir de critères empiriques se basant principalement sur les courbes granulométriques des matériaux. Le matériau filtre y est caractérisé par son diamètre caractéristique $d_{F,15}$, correspondant au passant à 15%. Il est supposé capable de retenir un matériau de base, caractérisé par son diamètre $d_{B,85}$ à condition que le rapport entre $d_{F,15}$ et $d_{B,85}$ soit inférieur à une certaine constante. Le retour d'expérience montre que la valeur à considérer pour cette constante diffère selon que les matériaux présentent une répartition granulométrique uniforme ou étalée. Il semble donc important de caractériser ces deux types de matériaux afin de voir s'il existe une différence structurelle entre leurs espaces interstitiels. Ceci justifie l'analyse des matériaux des figures Fig. II.1 (a) et (b) dans la présente étude. La granulométrie "étalée" étudiée ici présente un coefficient d'uniformité certes faible devant ceux des matériaux traditionnellement utilisés dans les ouvrages hydrauliques. Mais la génération d'un échantillon représentatif de ce matériau nécessite déjà 25000 sphères, ce qui représente un nombre important d'éléments à gérer pour les méthodes aux éléments discrets.

Enfin, comprendre le comportement des matériaux présentant une lacune granulométrique (dont

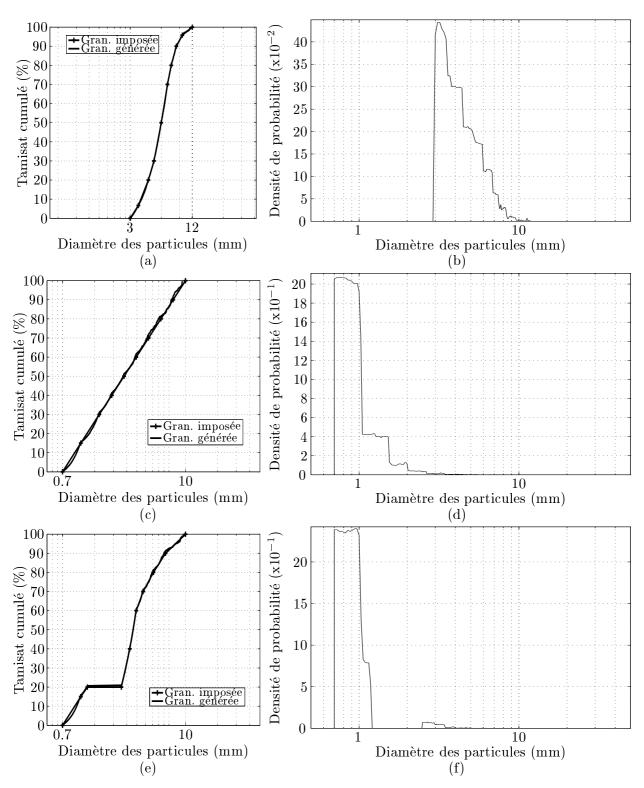


Fig. II.1 – Caractéristiques solides - Courbes granulométriques imposée et obtenue ainsi que la densité de probabilité de la taille des particules (a) et (b) pour un matériau à granulométrie serrée, (c) et (d) pour un matériau à granulométrie plus étalée, (e) et (f) pour un matériau présentant une lacune granulométrique.

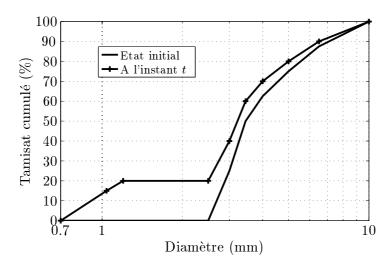


Fig. II.2 – Evolution de la granulométrie du filtre au cours du processus de filtration. Tout filtre tend à devenir lacunaire à mesure qu'il se charge en fines particules.

le matériau de la figure Fig. II.1 (c) est un exemple) est nécessaire pour appréhender l'évolution temporelle des processus de filtration. En effet, considérons un matériau de base A en contact avec un matériau filtre B dont la courbe granulométrique, avant que ne commence le processus de filtration, est présentée en traits pleins sur la figure Fig. II.2. Après la mise en mouvement du matériau de base, seule une partie des particules de A vont s'infiltrer au sein de B. Supposons par exemple qu'il s'agisse des particules de diamètres compris entre 0.7 et 1.04 mm. Le matériau A va alors compléter la courbe granulométrique du matériau B créant un nouveau matériau {B+particules de A infiltrées} de granulométrie discontinue (ou lacunaire) (voir Fig. II.2). Cette classe de granulométrie est donc caractéristique de l'évolution d'un filtre au cours du temps, justifiant ainsi son étude.

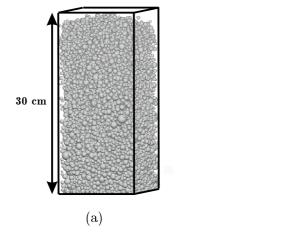
1.3 Détails du protocole de création des échantillons

Un échantillon résulte d'un lâcher sous gravité dans une boîte parallélépipédique à base carrée de 10000 sphères infiniment rigides pour le matériau à granulométrie serrée et de 25000 sphères pour les deux autres matériaux. Ces nombres élevés de sphères sont nécessaires pour obtenir une statistique fiable pour les grandeurs observées ([Oger et al., 1997], [Zhang et al., 2001]).

La création de l'échantillon se fait comme suit : les sphères issues de la base de données du matériau sont tirées aléatoirement et positionnées dans une boîte suffisamment grande pour que toutes les particules puissent être générées sans qu'aucun chevauchement ne se produise (voir Fig. II.3 (a)). Si le centre d'une sphère tirée entraîne un chevauchement avec une sphère déjà en place, un autre site pour cette sphère est tiré aléatoirement. L'ensemble de ces sphères, "flottant" dans l'espace, est lâché sous gravité dans une boîte de même base que la boîte parallélépipédique génératrice. On rappelle ici qu'au cours de ce lâcher, les sphères interagissent entre elles par le biais de collisions, rendues possibles. Le critère de convergence numérique repose sur les

rapports entre d'une part, la force de déséquilibre moyenne et la force de contact moyenne et d'autre part, entre la force de déséquilibre maximale et la force de contact maximale. L'équilibre final est donné comme atteint lorsque l'un ou l'autre de ces rapports passent sous le seuil des 5%. Une valeur de vitesse nulle est alors affectée à chaque sphère. Le code $\mathrm{PFC^{3D}}$ est utilisé ici pour traiter la dynamique du processus [Cundall et Strack, 1979]. Ce code aux Eléments Discrets permet de modéliser le comportement dynamique ou quasistatique d'un assemblage de sphères infiniment rigides. Le schéma numérique sous-jacent au traitement des équations de la dynamique est du type explicite. La loi de contact entre particules est ici une loi élastique linéaire, la force de contact entre deux éléments étant une fonction du chevauchement existant entre ces deux éléments en contact. Le contact devient glissant dès que la résultante de l'effort au contact se trouve sur le cône de Coulomb. La loi au contact nécessite alors la connaissance d'une rigidité normale k_n , d'une rigidité tangentielle k_t ainsi que la valeur du coefficient de frottement μ . Une dissipation d'énergie est introduite dans le système au moyen d'un amortissement α proportionnel aux forces d'accélérations de chaque particule. Lors d'un contact sphère - paroi de la boîte, le coefficient de frottement μ est supposé nul. Ici, la masse volumique des sphères est prise égale à 2530kg/m^3 (similaire à celle d'une bille de verre) et $\alpha = 0.7$.

Dans la loi de contact entre particules, les paramètres de raideurs normale et tangentielle, respectivement k_n et k_s , ont tous deux été pris égaux à $10^4 \mathrm{kN/m}$. Cette valeur numérique est élevée et entraîne l'utilisation de pas de temps de calculs très faibles et donc des temps de simulation élevés. Mais une telle valeur permet de limiter les recouvrements entre les particules et d'obtenir une représentation géométrique la plus fidèle possible à un assemblage réel de sphères rigides. De plus, l'analyse des vides proposée ci-après repose sur l'hypothèse de non-déformation des particules. Il est donc fondamental d'assurer un chevauchement des grains le plus faible possible lors de la création des échantillons afin de ne pas entraîner d'erreur géométrique sur les calculs des entités de vide.



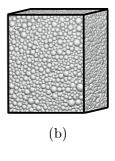


Fig. II.3 – Sphères dans la boîte génératrice (a) et un échantillon numérique de la granulométrie serrée (b).

			Nombre	Dimension de la		0	Densités
			${ m de}$	base de la boîte			$interm\'ediaires$
	d_0	d_{100}	particules	génératrice (mm)	$n_{ m min}$	n_{max}	${ m \acute{e}tudi\acute{e}es}$
Granulométrie							
serrée	3	12	10000	100×100	0.34	0.36	-
Granulométrie							
étalée	0.7	10	25000	40×40	0.25	0.33	37% - $71%$
Granulométrie							20% - 39%
lacunaire	0.7	10	25000	40×40	0.24	0.36	- 60% - 81%

Tab. II.1 – Caractéristiques de la génération numérique des assemblages granulaires

Le protocole de lâcher avec un coefficient de frottement interparticulaire μ =0.7 conduit à un état proche de l'état le plus lâche possible sous gravité pour ce matériau (et les paramètres numériques considérés). Le coefficient de frottement de 0.7, couramment utilisé ([Deluzarche, 2004], [Lobo-Guerrero et Vallejo, 2006]), correspond à un angle de frottement de 35°. Les états plus denses sont obtenus par des essais triaxiaux vrais alternés alors que le coefficient de frottement interparticulaire est abaissé et que l'échantillon est soumis à une pression de confinement de 50 kPa. L'influence de cette pression forçant l'enchevêtrement de la structure solide n'a pas été étudiée. Généralement, les effets de ce processus de densification sont lents et donc coûteux en temps de calcul. Abaisser le coefficient de frottement, jusqu'à l'annuler pour obtenir l'échantillon le plus dense, revient à lubrifier le matériau et permet d'accélérer le processus ([Thornton, 2000], [Sitharam et al., 2002]). Les cycles de compression - extension correspondent à un chargement jusqu'à l'état caractéristique, limite entre les états contractant et dilatant puis à une décharge jusqu'à un état de contrainte isotrope. Le cyclage s'arrête lorsque la contribution d'un cycle à la déformation volumique cumulée devient négligeable.

Le tableau Tab. II.1 résume les principales caractéristiques utilisées lors de la génération des échantillons pour les trois matériaux définis précédemment et donne les valeurs des porosités minimale et maximale (respectivement n_{\min} et n_{\max}) obtenues dans chaque cas. Pour les granulométries étalée et lacunaire, des états de densité relative intermédiaire ont été isolés. Les valeurs des densités relatives étudiées sont spécifiées dans le tableau Tab. II.1. Pour rappel, la densité relative d'un matériau R_d est définie par la relation (II.1).

$$R_d = \frac{e_{\text{max}} - e}{e_{\text{max}} - e_{\text{min}}} \tag{II.1}$$

où $e_{\text{max}} = n_{\text{max}}/(1 - n_{\text{max}})$ et $e_{\text{min}} = n_{\text{min}}/(1 - n_{\text{min}})$ sont respectivement les indices des vides maximal et minimal possibles pour le matériau étudié. e est l'indice des vides de l'état de densité considéré.

1.4 Problèmes de représentativité des échantillons

1.4.1 Définition du volume minimal de mesure pour une statistique correcte

Le processus de préparation de l'échantillon nécessite d'imposer des conditions aux limites ce qui entraîne la création de zones non homogènes. C'est surtout le cas pour les zones proches des parois latérales de la boîte. L'arrangement étant gêné près de ces parois, l'empilement se fait selon des configurations plus lâches que celles pouvant se produire au sein de l'échantillon ([Roblee et al., 1958], [Reyes et Iglesia, 1991]). Ces zones fortement influencées par les conditions aux limites doivent être ôtées du volume d'analyse car non représentatives des phénomènes au coeur de l'échantillon. Pour définir le volume maximal de mesure, qui est au moins de la taille du Volume Elémentaire Représentatif (VER), une étude paramétrique a été effectuée. Elle consiste à définir un volume ΔU dont le centre est confondu avec le centre géométrique de l'échantillon et au sein duquel une mesure de la porosité sera effectuée. La taille de ce volume englobant une fraction de l'échantillon est progressivement augmentée jusqu'à englober la totalité de l'échantillon. Le résultat de cette étude est donné pour l'échantillon le plus dense du matériau à granulométrie serrée dans la Fig. II.4. Le volume ΔU a été ici normalisé par la valeur du volume total U_T de l'échantillon. Pour des petites valeurs de volume, on note systématiquement une fluctuation de la porosité qui tendra à se stabiliser vers des plus grands volumes : la taille minimale pour le VER n'est pas encore atteinte. Lorsque le volume de mesure normalisé prend des valeurs proches de 1, la porosité moyenne augmente, signe de l'existence d'effets de parois. La Fig. II.4 met en relief le volume de mesure minimal égal à 10% du volume total U_T (largeur égale à 7d₅₀ en masse), le volume de mesure maximal admissible étant égal à 70% du volume total. Ce volume maximal a ses parois latérales distantes de 0.5d₁₀₀ (soit 0.8d₅₀ en masse) des parois latérales de l'échantillon. Cette valeur est conforme à celles que l'on retrouve dans la littérature notamment chez ROBLEE et al. [Roblee et al., 1958] ou REYES et IGLESIA [Reyes et Iglesia, 1991]. Pour l'analyse des vides, il est nécessaire de posséder un échantillon d'étude viable. Dans le cas particulier de la Fig. II.4, on a choisi un volume de mesure égal à 24% du volume total, soit un volume de largeur 10d₅₀. La porosité est alors environ égale à 0.34 (0.337 pour être plus précis).

1.4.2 Homogénéité de l'échantillon dans le volume d'analyse

L'approche précédente mène à un volume d'analyse pour lequel la moyenne statistique relative à l'espace des vides ne dépend pas de la taille de l'échantillon. Il reste cependant à vérifier qu'il n'existe pas une hétérogénéité au sein même du volume d'analyse qui serait masquée lors du processus de moyenne nécessaire au calcul de la porosité. Il convient notamment d'étudier dans quelle mesure le processus de dépôt sous gravité engendre une hétérogénéité en strates. On pourrait faire une étude similaire concernant l'anisotropie de structure mais elle ne sera pas conduite ici.

L'échantillon est alors discrétisé en tranches horizontales de mêmes dimensions et dont l'épaisseur est de l'ordre du plus grand diamètre de particules. La porosité est calculée sur chacune de

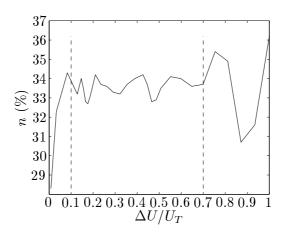


Fig. II.4 – Porosité n, en fonction du rapport entre le volume d'échantillon considéré ΔU et le volume total U_T , dans le cas de l'échantillon le plus dense du matériau à granulométrie serrée.

ces tranches. La figure Fig. II.5 présente l'évolution de la porosité dans ces différentes tranches pour les échantillons de densités extrêmes du matériau de granulométrie serrée. La numérotation des tranches s'effectue du bas en haut de l'échantillon. Dans le cas de l'échantillon le plus

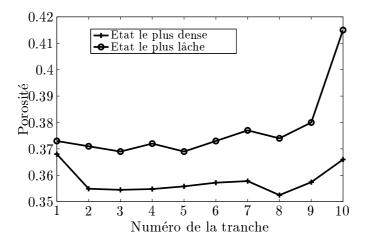


Fig. II.5 – Evolution de la porosité selon la direction verticale pour le matériau de granulométrie serrée dans ses deux états de densité extrêmes. Chaque échantillon est discrétisé en dix tranches horizontales, la tranche numérotée 1 correspond au bas de l'échantillon.

lâche, la figure Fig. II.5 met en évidence de faibles fluctuations de porosité sur l'ensemble des neuf premières tranches et une nette augmentation pour la dernière tranche. Il est donc à noter que la paroi solide inférieure de la boîte génératrice ne perturbe pas sensiblement l'organisation de l'assemblage lors du processus de dépôt. La singularité de la dernière tranche s'explique par le fait que le dépôt gravitaire conduit à un échantillon dont la surface libre est irrégulière ce qui biaise le calcul de porosité dans cette tranche. Dans le cas de l'échantillon le plus dense, la porosité fluctue à nouveau faiblement au cœur de l'échantillon. En revanche, on constate que les tranches 1 et 10, au voisinage des parois solides de la boîte génératrice, conduisent toutes deux à

de plus grandes porosités. Dans le processus de densification par sollicitation déviatoire alternée, les parois inférieure et supérieure de la boîte jouent un rôle équivalent aux parois solides latérales et perturbent l'organisation de la structure granulaire. Les grandes porosités dans les tranches extrêmes s'expliquent donc par une compaction plus difficile au voisinage des bords. Que ce soit pour l'échantillon le plus lâche ou le plus dense, il est à retenir que dans le volume d'analyse défini selon la procédure du précédent paragraphe, l'échantillon est homogène puisque les zones "aux limites" ne sont pas prises en compte.

2 Représentation de l'espace des vides par une triangulation de Delaunay radical

2.1 Principe de la triangulation de Delaunay radical

L'étude numérique donne accès à la position géométrique de tous les centres des sphères. Toute opération sur l'espace et notamment une partition peut alors être entreprise. Deux types de partition sont usuellement utilisés : une partition de type Voronoï ou de type Delaunay. Soit \mathcal{S} l'ensemble des centres des sphères contenues dans l'empilement. Un diagramme de Voronoï partitionne l'espace en cellules telles que chaque cellule est l'ensemble des points plus proches d'un point donné de S que de tout autre point de S. Dans cette configuration, chaque sphère se trouve alors incluse dans une cellule. Le graphe dual du graphe de Voronoï est le graphe de Delaunay, obtenu en liant les centres de sphères de cellules de Voronoï contiguës. On obtient alors en 3D une tétraédralisation de l'espace s'appuyant sur les centres \mathcal{S} des sphères. Dans le cas d'assemblages polydisperses de sphères, pour que tous les centres des sphères soient pris en compte, il convient d'effectuer la triangulation à partir des centres, pondérés par le carré des rayons des particules ([Richard et al., 2001], [Boissonnat et al., 2002]). Cette partition est alors qualifiée de partition de Delaunay radical¹. La partition de Voronoï a déjà été largement utilisée pour caractériser les arrangements locaux dans les milieux granulaires. Pour ne citer que les travaux centrés sur des études similaires aux nôtres, on citera [Oger et al., 1997], [Richard et al., 1999], [Yang et al., 2002]. Néanmoins, le graphe de Delaunay semble mieux adapté pour caractériser et surtout quantifier des volumes de pores ou de constrictions, entités fortement corrélées aux propriétés de transport ou de diffusion ([Mellor, 1989], Bryant et al., 1993], [Balhoff et Thompson, 2004]). En effet, il existe une relation très étroite entre les cellules de Delaunay d'une part et les volumes de pores ou tailles de constrictions d'autre part. Puisque le graphe de Delaunay est construit à partir des centres des sphères, les volumes de vide les plus importants se trouveront essentiellement au centre des tétraèdres. Par ailleurs, les constrictions les plus étroites se trouveront nécessairement sur les faces des tétraedres [Bryant et Blunt, 1992]. Aussi un pore se définit-il naturellement comme l'espace des vides

¹Les cellules de Voronoï associées à cette triangulation de Delaunay radical sont planes et correspondent aux plans radicaux entre sphères. Le plan radical à deux sphères est le lieu des points de l'espace desquels on peut mener aux deux sphères des tangentes de même longueur.

mesuré à l'intérieur d'une cellule de Delaunay (voir la figure Fig. II.6). Le volume de ce domaine sera appelé v. Rapporté au volume de mesure défini plus haut, il s'agit d'une variable aléatoire directement liée à la porosité "locale" de l'empilement. Le calcul du volume de vides dans les N

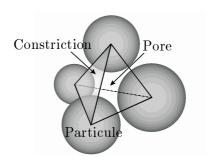


Fig. II.6 – Cellule 3D de Delaunay : un pore correspond à la fraction de vides contenue dans le tétraèdre alors que la constriction la plus étroite, étranglement entre deux pores adjacents, se situe sur les faces de la cellule (zone ombrée sur la figure).

cellules contenues dans le volume de mesure conduira à N valeurs possibles pour la variable v. La méthodologie de calcul des valeurs de v est détaillée dans l'annexe A et fait appel à l'hypothèse d'impénétrabilité des grains, mentionnée au paragraphe 1.3. Une fois ces valeurs rangées, une densité de probabilité en nombre de volume v peut être construite (voir Fig. II.7).

2.2 Vers des distributions de vide plus réalistes

L'utilisation directe d'une tétraédralisation de Delaunay (notée par la suite analyse de niveau 0) peut cependant conduire à une identification artificielle de volumes élémentaires. Selon [Al-Raoush et al., 2003], cet algorithme tend à subdiviser excessivement un volume de vide local

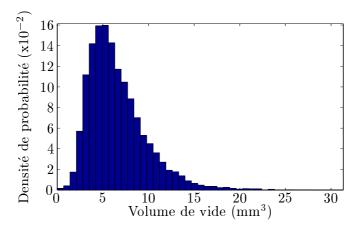
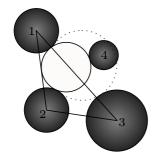


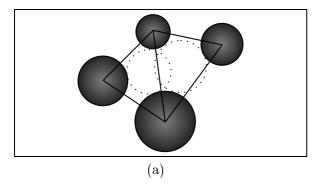
Fig. II.7 – Densité de probabilité des volumes de vide à l'intérieur d'une cellule de Delaunay (un tétraèdre), pour l'échantillon le plus dense de la granulométrie serrée.



...: Plus grande sphère pouvant être inscrite entre les particules sommets des cellules de Delaunay.

___: **Sphère inscrite** entièrement contenue dans l'espace des vides.

Fig. II.8 – Représentation 2D du problème de la sphère inscrite dans un triangle de Delaunay défini à partir des particules 1, 2 and 3.



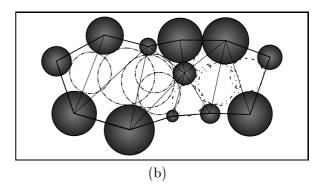


Fig. II.9 – Configurations 2D dans lesquelles : (a). les cellules de Delaunay doivent être fusionnées, b). cas où le critère de fusion conduit à la définition d'un conduit, mais non à un pore.

en sous-structures. Une approche plus réaliste du problème consiste à tenter d'associer des tétraèdres adjacents, quand cela est rendu nécessaire, c'est-à-dire lorsque un critère prédéfini se trouve enfreint [Balhoff et Thompson, 2004]. La difficulté majeure réside dans l'identification d'un critère d'association entre deux tétraèdres adjacents. Al-Raoush et al. ont proposé d'établir ce critère à partir du concept de la plus grande sphère entièrement contenue dans l'espace des vides et inscrite entre les quatre particules, sommets des cellules de Delaunay (Fig. II.8). Cette plus grande sphère inscrite est trouvée par un processus d'optimisation (pour plus de détails, voir l'annexe B). Ainsi définie, la sphère de vide rattachée à un tétraèdre n'est pas nécessairement entièrement inscrite dans le tétraèdre et deux sphères de vide rattachées à deux cellules de Delaunay adjacentes peuvent se chevaucher (Fig. II.9 (a)). Ce chevauchement révèle une corrélation entre deux cellules contiguës qui ne doivent alors pas être considérées comme deux entités indépendantes; elles seront fusionnées pour ne former qu'une seule structure [Al-Raoush et al., 2003]. Cette technique d'analyse sera par la suite appelée analyse de niveau 1. Ce niveau pourrait ne pas être suffisant, aussi étudierons-nous un niveau d'analyse supérieur, appelé niveau d'analyse 2. Pour une cellule donnée, la recherche d'une association sera tentée avec les quatre cellules adjacentes, mais aussi avec les trois autres cellules contiguës à chacune des quatre cellules adjacentes. Aucune étude à un niveau supérieur au niveau 2 ne sera entreprise car elle se rapprocherait d'une analyse du milieu en terme de conduits (voir Fig. II.9 (b) pour un cas 2D). En revanche, un

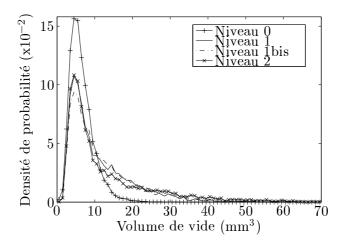


Fig. II.10 – Densité de probabilité du volume de vide pour les quatre niveaux d'association (échantillon le plus dense de la granulométrie serrée). Le niveau 0 correspond à la triangulation de Delaunay première. Le niveau 1 autorise l'association d'un tétraèdre avec ses plus proches voisins (si les sphères inscrites associées se chevauchent). Pour le niveau 2, un tétraèdre peut être associé à ses plus proches voisins ainsi qu'à leurs propres plus proches voisins. Le niveau 1 bis considère le même niveau de voisinage lors de l'association que le niveau 2 mais impose une diminution des tailles des sphères inscrites à mesure que l'on s'éloigne.

critère intermédiaire référencé niveau d'analyse 1 bis est proposé ici. Pour ce critère, l'association d'une cellule avec les cellules adjacentes est toujours conditionnée par l'existence d'un chevauchement entre les sphères inscrites qui leur sont associées. Mais le rattachement des cellules n'est ici effectif que si le diamètre de la sphère inscrite de la cellule adjacente est inférieur à celui de la sphère inscrite de la cellule considérée. Le niveau du voisinage entre les cellules à associer est similaire à celui du niveau 2. Par exemple, si une cellule adjacente à celle considérée possède, elle-aussi, une cellule contiguë dont la sphère inscrite recouvre partiellement celle de la cellule adjacente et lui est inférieure en taille alors cette cellule contiguë est elle-aussi rattachée à l'ensemble des cellules déjà fusionnées. La définition de ce critère découle d'une vision en deux étapes de la transition d'un pore à un autre. Tout d'abord, un étranglement géométrique marque la fin du premier pore puis l'entrée dans le second pore se caractérise par un élargissement plus ou moins progressif. Le critère proposé consiste à rechercher les limites d'un pore en localisant des resserrements géométriques. L'application de ce critère sur l'exemple de la figure Fig. II.9 (b) conduirait à scinder le canal de vide en deux pores distincts : d'une part, les six cellules de gauche pour lesquelles les sphères inscrites sont tracées sur la figure avec une alternance de traits et points peu espacés, d'autre part, les cinq cellules de droite pour lesquelles les sphères inscrites sont tracées avec une alternance de traits et points plus espacés.

2.3 Comparaison avec les lois statistiques usuelles

Pour chaque niveau d'analyse, qu'il soit 0, 1, 1bis ou 2, une densité de volumes de vide est définie. La figure Fig. II.10 donne ces densités pour l'échantillon le plus dense de la granulométrie serrée. On a vérifié ici que l'ordre de fusion des tétraèdres n'influence pas significativement les résultats. Compte-tenu de la forme de ces densités et notamment le fait qu'elles soient unimodales et asymétriques, les lois statistiques classiques les plus couramment employées pour l'ajustement des données sont les lois gamma [Johnston, 1998] et log-normale [Yang et al., 2006]. Les expressions analytiques de ces lois correspondent respectivement aux équations (II.2) et (II.3).

$$f(x) = x^{k-1} \frac{\exp(-x/\theta)}{\Gamma(k)\theta^k}$$
 (II.2)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
 (II.3)

Les paramètres de ces lois (k, θ, σ) et μ) sont estimés à partir des données par la méthode du maximum de vraisemblance. La figure Fig. II.11 met en évidence une meilleure adéquation de la loi log-normale avec les données, la corrélation étant même quasi parfaite au niveau 0, mais de manière générale, les lois théoriques tendent à déplacer le mode vers les plus grands pores et à atténuer la valeur du mode.

2.4 Analyse des résultats

Lorsque l'on compare les distributions de niveau 0 et de niveau 1, on constate que la distribution des volumes issue d'une analyse de niveau 1 apporte plus de contraste. La forme très différente de cette dernière (voir Fig. II.10) et la forte atténuation de la valeur modale indiquent que de nombreuses cellules tétraédriques se trouvent fortement corrélées. Plus précisément, environ 31% des tétraèdres de niveau 0 ne sont pas indépendants et formeront des volumes de pores de forme plus complexe. Cependant, les valeurs modales des distributions sont très proches, résultant du fait que l'élément principal de volume de pores reste le tétraètre. Ainsi, qu'elle que soit la porosité, plus de 50% des cellules de Delaunay ne sont pas affectées par le critère de fusion (voir Fig. II.12). Cette prédominance de la forme tétraédrique est en contradiction avec les résultats de Nolan et Kavanagh [Nolan et Kavanagh, 1995] qui ont identifié dans leurs assemblages essentiellement des structures de pore octoédriques. Ceci peut s'expliquer par un biais statistique dû au nombre peu important de sphères pris en compte par ces auteurs dans les calculs (150 sphères) mais aussi au protocole de création de l'échantillon, différent de celui utilisé dans cette étude. Zhang et al. [Zhang et al., 1997] ont en effet montré que les caractéristiques des pores - tailles et formes - dépendent fortement de la méthode numérique d'assemblage utilisée. Ces auteurs montrent notamment que les empilements issus d'un dépôt sous gravité présentent des distributions de tailles de pores avec des pics plus étroits et d'amplitudes plus grandes que les assemblages créés par la méthode d'addition séquentielle. Alors qu'une

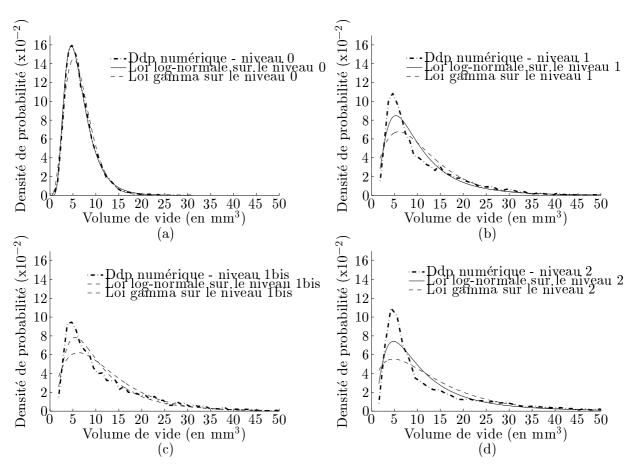


Fig. II.11 – Densités de probabilité (Ddp) associées aux volumes de vide et lois gamma et lognormale identifiées pour les quatre niveaux d'association.

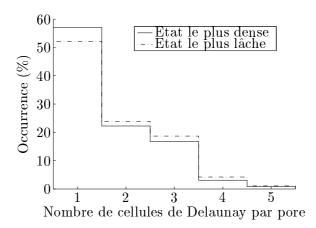


Fig. II.12 – Nombre de cellules de Delaunay par pore (analyse de niveau 1) pour les états de densité extrêmes de la granulométrie serrée.

technique d'arrangement dérivée de celle de POWELL est utilisée dans l'étude de NOLAN et KAVANAGH, ici nous obtenons, à partir de notre échantillon obtenu par lâcher sous gravité, de plus grandes densités en diminuant le coefficient de frottement et en donnant à l'échantillon une sollicitation déviatoire alternée. De fortes déformations de cisaillement semblent avoir déformé le milieu solide tout en créant des volumes de pore de forme plus élémentaire : le tétraèdre. Cependant, des formes plus complexes comme des hexaèdres ou octoèdres sont représentées à hauteur de 20%. Le raffinement apporté par une analyse de niveau 2 est moins perceptible et ne concerne que 10% des volumes de niveau 1. L'approche intermédiaire de niveau 1 bis qui recherche les étranglements géométriques semble ainsi suffisante pour capter la nature de la porosité locale.

Une comparaison peut être établie entre les volumes de pore identifiés par les analyses de niveau 0, 1, 1bis et 2 et celle plus usuelle du rayon de la sphère inscrite dans un pore. Pour cela, aux volumes identifiés précédemment, on peut associer le rayon de la sphère occupant le même volume ([Nolan et Kavanagh, 1994], [Delerue et al., 1999] ou [Luchnikov et al., 2002]). La distribution de ce rayon équivalent (niveau 0, 1, 1bis et 2) est donnée en Fig. II.13. L'approche par la sphère inscrite conduit à sous-estimer les volumes de pore car cette technique oublie par essence une partie du domaine des vides. Ceci explique pourquoi la distribution sous-jacente se trouve rejetée vers les plus petites valeurs de rayon.

3 Effets de la granulométrie et de la densité sur les caractéristiques morphologiques

La morphologie de l'espace poral dépend directement de la distribution de tailles de particules solides et, à granulométrie fixée, peut se trouver modifiée par la densité du matériau [Nolan et Kavanagh, 1994]. L'objectif de cette section est d'étudier qualitativement et quantitativement les effets d'un changement de granulométrie ou de compacité.

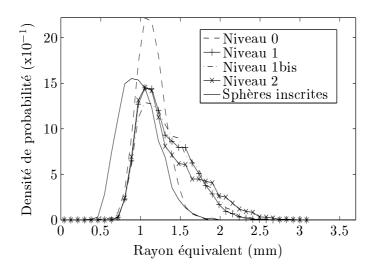


Fig. II.13 – Densité de probabilité de rayon équivalent de pore (échantillon le plus dense de la granulométrie serrée). Ce rayon est alternativement pris égal au rayon de la sphère occupant le même volume de vide que celui identifié par les associations de niveau 0, 1, 1bis et 2 et au rayon de la sphère inscrite.

3.1 Influence de la granulométrie à densité relative fixée

Pour corréler la granulométrie à la taille des pores, on se propose d'étudier le fractile d'ordre P de la fonction de répartition des tailles de sphères inscrites $d_{\rm sphère}$ en fonction du fractile du même ordre de la courbe granulométrique $d_{\rm solide}$. La figure Fig. II.14 illustre la procédure

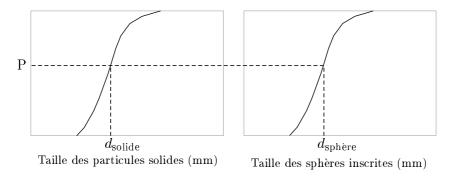


Fig. II.14 – Procédure d'obtention des fractiles d'ordre P de la fonction de répartition de tailles de sphères inscrites $(d_{\text{sphère}})$ et de la courbe granulométrique (d_{solide})

d'obtention de $d_{\text{sphère}}$ et d_{solide} et la figure Fig. II.15 présente l'évolution de d_{solide} en fonction de $d_{\text{sphère}}$ pour les états denses des trois granulométries étudiées, P variant de 5% à 95%. Cette figure ne met pas en évidence de dépendance quantitative explicite d'un fractile par rapport à l'autre. Qualitativement, certaines tendances se dégagent cependant. La taille des pores tend à diminuer à mesure que les tailles des particules solides diminuent ou que l'étalement granulométrique

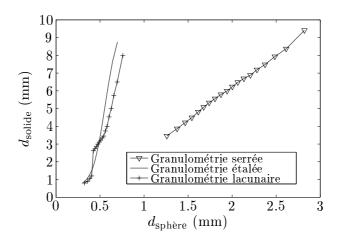


Fig. II.15 – Evolution du fractile d'ordre $P, P = 5\% + k.5\%, k \in [1; 19],$ de la distribution cumulée de tailles de sphères inscrites $d_{\text{sphère}}$ en fonction du fractile du même ordre de la courbe granulométrique d_{solide} pour les états les plus denses des trois granulométries étudiées.

augmente.

3.2 Influence de la densité relative du matériau à granulométrie fixée

La figure Fig. II.16 synthétise l'influence de la densité relative à travers les densités de probabilité de rayons équivalents pour les volumes de pores issus de la procédure de niveau 1bis ((a), (c) et (e)) ou issus de l'approche de la sphère inscrite ((b), (d) et (f)). Les figures (a) et (b) concernent la granulométrie serrée, (c) et (d), la granulométrie plus étalée et (e) et (f), la granulométrie présentant une lacune.

Quelles que soient la granulométrie et la définition de la taille de pores, alors que la densité relative augmente, les tailles des pores et la dispersion des distributions diminuent. Plus précisément, si l'on se focalise sur les fractiles d'ordre 0.5 des distributions cumulées (Fig. II.17), on s'aperçoit que ces paramètres diminuent quasi linéairement à mesure que la densité relative augmente.

Pour les rayons équivalents des pores définis par la procédure de niveau 1bis :

$$d_{50} = -0.16R_d + 2.71 \text{ (serrée)}$$
 (II.4)

$$d_{50} = -0.0888R_d + 0.7362$$
 (étalée) (II.5)

$$d_{50} = -0.0753R_d + 0.765$$
 (lacunaire) (II.6)

(II.4)
$$d_{50} = -0.13R_d + 2.07 \text{ (serrée)}$$
(II.7)
$$d_{50} = -0.1187R_d + 0.5867 \text{ (étalée)}$$
(II.8)
$$d_{50} = -0.1484R_d + 0.6421 \text{ (lacunaire)}$$
(II.9)

$$d_{50} = -0.1484R_d + 0.6421$$
 (lacunaire) (II.9)

Le tableau TAB. II.2 évalue la diminution relative des fractiles d'ordre 0.5 lors du passage de l'état le plus lâche à l'état le plus dense pour les trois granulométries étudiées. La méthode des

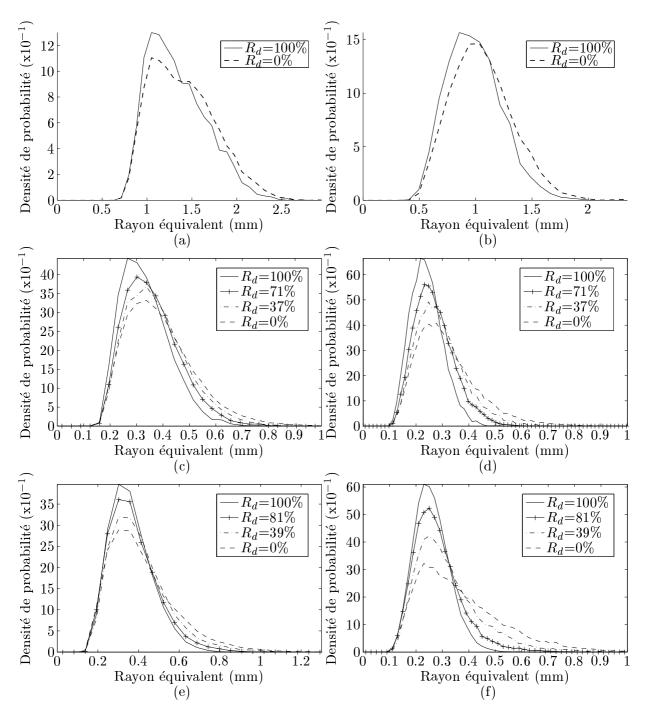


Fig. II.16 – Densités de probabilité du rayon équivalent de la sphère ayant le volume des vides mesuré dans l'analyse de niveau 1bis pour le matériau (a) de granulométrie serrée, (c) de granulométrie étalée et (e) de granulométrie lacunaire. Densités de probabilité du rayon de la sphère de dimension maximale inscrite dans le pore pour le matériau (b) de granulométrie serrée, (d) de granulométrie étalée et (f) de granulométrie lacunaire.

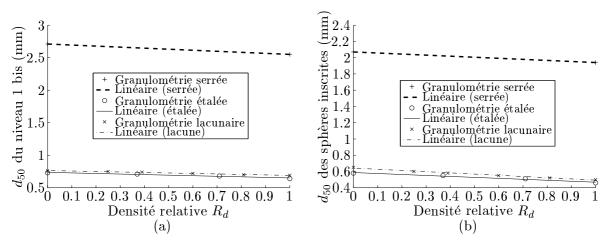


Fig. II.17 – Evolutions et courbes de tendance linéaires des d_{50} issus de l'analyse de niveau 1bis (a) et de celle des sphères inscrites (b) en fonction de la densité relative R_d pour les trois granulométries étudiées.

sphères inscrites conduit à des variations plus importantes car cette quantité étant par essence isotrope, elle est plus sensible au réarrangement se produisant lors de la densification que les volumes de pores issus des analyses de niveau 1, 1bis ou 2. Les tétraèdres à l'origine des analyses de niveau 1, 1bis ou 2 peuvent se déformer lors de la densification et conserver un volume de vide important. Les sphères inscrites, elles, sont contraintes à conserver leur forme géométrique parfaitement symétrique et ne peuvent pas jouer sur une déformation pour conserver un volume admissible. L'incidence de la densification est donc plus perceptible lorsque l'on considère les sphères inscrites.

Tab. II.2 – Pourcentages de variation des fractiles d'ordre 0.5 des distributions cumulées de tailles de pores au cours de la densification

	Granulométrie	Granulométrie	Granulométrie
Matériau	serrée	${ m \acute{e}tal\acute{e}e}$	lacunaire
Diamètre équivalent du pore			
par l'analyse de niveau 1bis	5.9%	12.3%	9.2%
par la sphère maximale inscrite	6.3%	20.7%	23.1%

Pour comprendre comment s'effectue cette diminution des tailles de pores, on se propose d'étudier localement les effets de la densification sur l'organisation de l'espace poral et plus précisément, analyser les corrélations entre les déplacements des particules au cours de la densification et le volume de vide qui leur est offert. Pour cela, la distribution de tailles de particules est discrétisée en classes de diamètres. Pour chaque classe j, $\|\vec{u}\|^j$ représente le déplacement moyen des particules appartenant à cette classe. Le déplacement correspond ici à un passage "direct" de la position dans l'état le plus lâche à la position dans l'état le plus dense. La tortuosité potentielle du trajet n'est pas considérée. Le volume de vide offert au déplacement est calculé sur

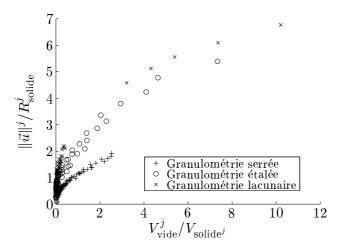


Fig. II.18 — Evolution du déplacement moyen qu'effectuent les particules d'une classe de diamètres j entre l'état le plus lâche et l'état le plus dense en fonction du volume de vide qui leur est offert initialement.

le même principe de discrétisation en classes de particules. Pour chaque particule p, le volume de vide offert correspond à la somme des volumes de vide dans les tétraèdres ayant pour sommet la particule p considérée. V_{vide}^{\jmath} est le volume de vide moyen offert aux particules appartenant à la classe j. V_{solide}^{j} est le volume solide moyen des particules de la classe j. La figure Fig. II.18 présente l'évolution du déplacement $\|\vec{u}\|^j$ (normalisé par le rayon R^j_{solide} représentatif de la classe j) en fonction du volume de vide V_v^j (normalisé par le volume représentatif de la classe j). Il s'avère que les particules parcourant les plus grandes distances sont celles qui, proportionnellement à leur taille, disposent des plus grands volumes de vide à l'état lâche. L'arrangement des particules à l'état le plus dense est donc conditionné par la structure de l'empilement à l'état le plus lâche. Il est crucial de prendre en compte cet "effet de mémoire" du matériau compacté et de ne pas considérer que les états de densité intermédiaire résultent d'un positionnement aléatoire des particules. La structure initiale du matériau régit les arrangemets locaux se produisant lors du processus de densification. De plus, les valeurs modales des distributions de tailles des pores sont identiques pour les niveaux 0, 1, 1bis et 2 pour tous les matériaux et tous les états de densité étudiés (Fig. II.13 pour l'état le plus dense de la granulométrie serrée). Par conséquent, les fortes corrélations entre cellules tétraédriques persistent pour tous les états de densité. Le volume de vide le plus représenté tend à diminuer au cours de la densification pour les granulométries serrée et étalée mais reste identique pour la granulométrie lacunaire où l'absence de particules est un facteur limitant les réarrangements (Fig. II.16 (e) et (f)). La densification a donc comme effet premier d'ordonner l'espace mais le milieu granulaire garde en mémoire l'histoire de sa compaction. L'invariance du mode des distributions lors de la densification souligne que l'organisation originelle du matériau, à l'état le plus lâche, se répercute sur tous les états de densité intermédiaire, jusqu'à l'état le plus dense.

4 Conclusion

Affecter des limites géométriques à un pore afin de pouvoir lui donner une mesure constitue la question centrale de toute caractérisation de la microstructure porale. Sur la base de la triangulation de Delaunay généralisé, cinq grandeurs de vide locales ont ici été proposées comme taille caractéristique de pore :

- 1. Le rayon de la sphère de dimension maximale inscrite dans le pore,
- 2. Le rayon de la sphère ayant un volume équivalent à celui du vide au sein d'un tétraèdre de Delaunay,
- 3. Le rayon de la sphère ayant un volume équivalent à celui du vide mesuré dans la procédure de niveau 1. Ce niveau autorise l'association d'un tétraèdre avec ses plus proches voisins si les sphères inscrites maximales associées se chevauchent.
- 4. Le rayon de la sphère ayant un volume équivalent à celui du vide mesuré dans la procédure de niveau 2. Un tétraèdre peut ici être associé à ses plus proches voisins ainsi qu'à leurs propres plus proches voisins.
- 5. Le rayon de la sphère ayant un volume équivalent à celui du vide mesuré dans la procédure de niveau 1 bis. Le rattachement des cellules est ici conditionné par une nécessaire diminution de la taille des sphères inscrites à mesure que l'on s'éloigne du centre du pore. Le niveau de voisinage considéré est similaire à celui de la procédure de niveau 2.

Le premier constat porte sur la validité des mesures effectuées. Toutes les variables considérées mènent à des distributions de tailles de pores proches ce qui tend à signifier que les diverses distributions sont admissibles. Il ne se dégage pas des différentes analyses UN paramètre de vide pertinent.

Certainement parce qu'il est illusoire d'essayer d'en trouver un... Il est extrêmement délicat d'extraire des entités discrètes d'un espace poral par nature continu. Il est à souligner que l'intérêt des variables porales présentées ici réside dans leur association. En effet, la définition des grandeurs de vide considérées mène à penser que l'approche par la sphère inscrite sous-estime la taille du pore tandis que l'approche de la sphère de volume identique utilisant la procédure de niveau 2 la surestime. Ces deux variables fournissent donc un encadrement de la taille caractéristique de vide.

L'utilisation conjointe des différentes approches permet également de mieux comprendre l'organisation de l'espace interstitiel. L'approche de la sphère au volume de vide issu de l'analyse de niveau 0 scinde certes abusivement les pores les plus grands mais la comparaison avec l'approche de la sphère issue de l'analyse de niveau 1 montre que la majorité des cellules de Delaunay définissent à elles-seules des pores et ne sont pas concernées par les critères

II.4 Conclusion 45

d'association proposés. La forme porale la plus représentée est donc le tétraèdre mais d'autres entités telles que l'hexaèdre ou l'octaèdre sont aussi présentes même si elles le sont en nombre moins important.

L'étude morphologique a ici été entreprise sur des assemblages de sphères construits par dépôt collectif sous gravité dans une boîte parallélépipédique. Les différents états de densité ont été obtenus par sollicitation déviatoire alternée. L'analyse des pores souligne l'influence de l'état initial du matériau et montre que le processus de densification consiste essentiellement à mieux ordonner la structure originelle du milieu granulaire. A fur et à mesure du compactage, les distributions de tailles de pores se resserrent autour d'une valeur modale de plus en plus prononcée.

En s'appuyant sur les approches de niveau 1 bis et de la sphère inscrite, la taille des pores a été étudiée quantitativement en fonction de la densité relative. Pour les trois granulométries typiques considérées, les résultats indiquent que le diamètre caractéristique d_{50} de la fonction de répartition des tailles de pores décroît linéairement à mesure que la densité relative augmente. Cependant, la recherche d'une corrélation entre la distribution de tailles de pores et la courbe granulométrique n'a pas été fructueuse. Par conséquent, il est difficile de donner un sens physique aux deux coefficients numériques intervenant dans l'expression analytique de cette décroissance linéaire.

Les analyses des vides menées sur les différentes granulométries ont permis de retrouver les tendances usuelles observées sur les assemblages polydisperses. Le matériau à granulométrie serrée et plus grossier présente une distribution de tailles de pores rejetée vers les plus grandes valeurs par rapport aux deux autres granulométries, plus étalées et plus fines.

Bibliographie

- [Al-Raoush et al., 2003] Al-Raoush, R., Thompson, K., et Willson, C. S. (2003). Comparison of network generation techniques for unconsolidated porous media. *Soil Science Society of America Journal*, 67:1687–1700.
- [Balhoff et Thompson, 2004] Balhoff, M. T. et Thompson, K. E. (2004). Modelling the steady flow of yield-stress fluids in packed beds. *American Institute of Chemical Engineers*, 50:3034–3048.
- [Boissonnat et al., 2002] Boissonnat, J. D., Devillers, O., Pion, S., Teillaud, M., et Yvinec, M. (2002). Triangulations in CGAL. *Computational Geometry*, 22:5–19.
- [Bryant et Blunt, 1992] Bryant, S. et Blunt, M. (1992). Prediction of relative permeability in simple porous media. *Physical Review A*, 46:2004–2011.
- [Bryant et al., 1993] Bryant, S. L., King, P. R., et Mellor, D. W. (1993). Network model evaluation of permeability and spatial correlation in a real random sphere packing. *Transport in Porous Media*, 11:53–70.
- [Cundall et Strack, 1979] Cundall, P. et Strack, O. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. Géotechnique, 29:47–75.
- [Delerue et al., 1999] Delerue, J., Perrier, E., Yu, Z., et Velde, B. (1999). New algorithms in 3D image analysis and their application to the measurement of a spatialized pore size distribution in soils. *Physics and Chemistry of the Earth*, 24:639–644.
- [Deluzarche, 2004] Deluzarche, R. (2004). Modélisation discrète des enrochements Application aux barrages. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon.
- [Johnston, 1998] Johnston, P. R. (1998). Revisiting the most probable pore-size distribution in filter media: the gamma distribution. *Filtration and Separation*, 35:287–292.
- [Lobo-Guerrero et Vallejo, 2006] Lobo-Guerrero, S. et Vallejo, L. E. (2006). Discrete element method analysis of railtrack ballast degradation during cyclic loading. *Granular Matter*, 8:195–204.
- [Luchnikov et al., 2002] Luchnikov, V., Gavrilova, M., Medvedev, N., et Voloshin, V. (2002). The Voronoi-Delaunay approach for the free volume analysis of a packing of balls in a cylindrical container. Future Generation Computer Systems, 18:673–679.
- [Mellor, 1989] Mellor, D. W. (1989). Random close packing of equal spheres: structure and implication for the use as a model porous medium. Thèse de doctorat, Open University, Milton Keynes, U. K.

[Nolan et Kavanagh, 1994] Nolan, G. et Kavanagh, P. (1994). The size distribution of interstices in random packings of spheres. *Powder Technology*, 78:231–238.

- [Nolan et Kavanagh, 1995] Nolan, G. et Kavanagh, P. (1995). Octohedral configurations in random close packing. *Powder Technology*, 83:253–258.
- [Oger et al., 1997] Oger, L., Troadec, J., Richard, P., Gervois, A., et Rivier, N. (1997). Voronoï tessellation of packings of equal spheres. Dans *Powders and Grains 97*, pages 287–290, Rotterdam. Behringer and Jenkins, Balkema.
- [Reyes et Iglesia, 1991] Reyes, S. et Iglesia, E. (1991). Monte Carlo simulations of structural properties of packed beds. *Chemical Engineering Science*, 46:1089–1099.
- [Richard et al., 1999] Richard, P., Oger, L., Lemaître, J., Samson, L., et Medvedev, N. N. (1999). Application of the Voronoï tessellation to study transport and segregation of grains inside 2D and 3D packings of spheres. *Granular Matter*, 1:203–211.
- [Richard et al., 2001] Richard, P., Oger, L., Troadec, J. P., et Gervois, A. (2001). A model of binary assemblies of spheres. *The European Physical Journal E*, 6:295–303.
- [Roblee et al., 1958] Roblee, L., Baird, R., et Tierney, J. (1958). Radial porosity variations in packed beds. *AIChE Journal*, 4:460–464.
- [Sitharam et al., 2002] Sitharam, T. G., Dinesh, S. V., et Shimizu, N. (2002). Micromechanical modelling of monotonic drained and undrained shear behaviour of granular media using three-dimensional DEM. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 26:1167–1189.
- [Thornton, 2000] Thornton, C. (2000). Numerical simulations of deviatoric shear deformation of granular media. *Géotechnique*, 50:43–53.
- [Yang et al., 2002] Yang, R., Zou, R., et Yu, A. (2002). Voronoi tessellation of the packing of fine uniform spheres. *Physical Review E*, 65:041302(1–8).
- [Yang et al., 2006] Yang, R., Zou, R., Yu, A., et Choi, S. (2006). Pore structure of the packing of fine particles. *Journal of Colloid and Interface Science*, 299:719–725.
- [Zhang et al., 2001] Zhang, Z., liu, L., Yuan, Y., et Yu, A. (2001). A simulation of the effects of dynamic variables on the packing of spheres. *Powder and Technology*, 116:23–32.
- [Zhang et al., 1997] Zhang, Z. P., Yu, A. B., et Dodds, J. A. (1997). Analysis of the pore characteristics of mixtures of disks. *Journal of colloid and interface science*, 195:8–18.

Chapitre III

Caractérisation topologique de l'espace des pores

Introduction

Ce chapitre prolonge la caractérisation microscopique de l'espace poral présentée au chapitre précédent. Dans le cadre de l'étude du transport de particules à travers un milieu poreux, une description de l'espace des vides seulement basée sur une distribution de volumes de pore n'est pas suffisante. Une telle distribution traduit certes l'espace poral disponible mais ne renseigne pas sur l'accessibilité des pores. Si l'on cherche à comprendre les processus de migration de particules au sein d'un sol, il faut tenir compte de la topologie de l'espace poral, à savoir la manière dont ces pores de tailles différentes sont connectés. Les pores interviennent, certes, en tant qu'hôtes potentiels des particules transportées et influent sur les vitesses mais les entités de vide déterminantes dans les processus de transport sont les constrictions, passages les plus étroits entre deux pores.

La première partie de ce chapitre est dédiée à la présentation et à la comparaison des deux mesures topologiques envisagées dans ce travail : la distribution de tailles de constriction et la fonction de connectivité. Nous nous intéresserons dans une seconde partie à étudier les répercussions d'un changement de granulométrie ou d'une densification sur ces caractéristiques topologiques.

Sommaire

1	L'espace des vides : un réseau connecté				
	1.1	Les distributions de tailles de constrictions	50		
	1.2	La fonction de connectivité	51		
2		ets de la granulométrie et de la densification sur les caractéris- ues topologiques	55		
	2.1	Influence de la granulométrie à densité relative fixée	55		

	2.2	Influence	de la	densité	e relative	e du	matér	iau à	granu	lomét	rie fi	xée	 	57
3	Conc	clusion .												60
\mathbf{Bib}	liograp	ohie												64

1 L'espace des vides : un réseau connecté

1.1 Les distributions de tailles de constrictions

Les contrictions, étranglements les plus étroits entre deux pores, sont déterminantes dans les processus de transfert dans les milieux poreux ([Bryant et al., 1993], [Vogel et Roth, 2001], [Balhoff et Thompson, 2004]). En effet, la taille de la plus grande constriction du milieu définit la taille de la plus grosse particule susceptible de s'infiltrer, ne serait-ce que légèrement, dans le milieu. De même, une population de particules de taille inférieure à la plus petite valeur de constriction pourra percoler à travers tout le milieu. Pour identifier les constrictions, un processus similaire à celui utilisé pour les volumes de pore dans le chapitre II sera utilisé.

Le diagramme de Delaunay incite à définir le volume de pore au centre du tétraèdre, quant aux constrictions, elles seront définies sur la face commune à deux tétraèdres. Pour chaque face d'un tétraèdre, deux mesures de la taille de constriction seront étudiées. La première est reliée à l'aire de vide présent dans la face, elle fait le pendant de l'analyse de niveau 0 réalisée précédemment. La deuxième mesure proposée quantifie le diamètre du plus grand disque, contenu dans le plan d'une face du tétraèdre ainsi que dans l'espace des vides et inscrit entre les trois sphères sommets de la face étudiée. Cette mesure est de même nature que la sphère inscrite définie pour l'étude morphologique. En introduisant le rayon du disque de même aire, la première mesure peut être comparée à la deuxième mesure et des distributions de rayon équivalent peuvent être construites (Fig. III.1).

Ces définitions approchent respectivement par le haut et par le bas les propriétés topologiques du milieu poreux. BRYANT et al. [Bryant et al., 1993] ont montré que ces deux diamètres permettent d'approcher correctement la taille de constriction présente dans les calculs de conductivité hydraulique. La définition du disque inscrit (aussi appelé cercle inscrit par abus de langage) tend à sous-estimer la conductivité hydraulique (l'aire couverte est plus faible que la section réelle) alors que la définition du cercle équivalent surestime cette valeur (le tube cylindrique est généralement le type de section le plus avantageux en terme d'écoulement fluide). La distribution obtenue pour les cercles inscrits tend à présenter deux modes : le deuxième pic (nettement moins marqué sur la figure Fig. III.1 et obtenu pour une valeur de rayon de 0.8mm dans le cas de l'échantillon le plus dense de la granulométrie serrée) apparaît à côté d'un mode principal autour de 0.4mm. YANG et al. [Yang et al., 2006] ont aussi obtenu des distributions de taille de constriction bimodales pour un matériau similaire au nôtre et

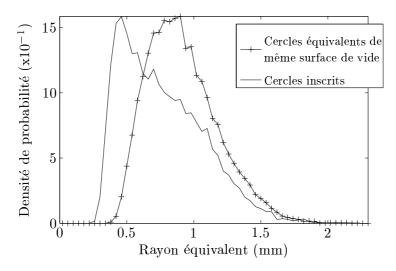


Fig. III.1 – Densité de probabilité de rayons équivalents de tailles de constrictions pour l'échantillon le plus dense de la granulométrie serrée. Ce rayon est pris alternativement égal au rayon du cercle inscrit et au rayon du disque dont l'aire est égale à l'aire de vide dans une face de Delaunay.

selon ces auteurs, le deuxième pic resulterait de faces de tétraèdres dont les particules-sommets ne sont pas en contact les unes avec les autres. Ce dernier pic est aussi associé à des pores adjacents fortement corrélés présents dans l'analyse morphologique de niveau 1 car l'étranglement existant entre de tels tétraèdres est nécessairement de grande ouverture. Une étude plus fine a montré que seuls 1.6% (état lâche) à 4.4% (état dense) des cercles inscrits sont tangents aux trois particules-sommets des faces en contact mutuel pour la granulométrie serrée, 3.5% à 7.2% pour la granulométrie étalée et 3.4% à 4.4% pour la granulométrie lacunaire. Ainsi, très peu de constrictions sont construites à partir de trois sphères mutuellement en contact.

Même pour les configurations les plus denses, l'arrangement classique dense (hexahonal compact) des sphères monodisperses n'est que rarement trouvé et donc non conforme aux conditions de l'expérience numérique présentée ici.

1.2 La fonction de connectivité

L'étude de la topologie de l'espace des vides assimile souvent cet espace à un ensemble de lieux ponctuels (centres des pores) reliés entre eux par des liens non orientés (les constrictions) [Tsakiroglou et Payatakes, 2000]. Cette représentation de l'espace des vides par un réseau discret permet d'avoir recours à la théorie des graphes et d'introduire un invariant, représentatif de la topologie porale : la caractéristique d'Euler-Poincaré χ . En trois dimensions, χ est définie par l'équation III.1 :

$$\chi = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 \tag{III.1}$$

où β_i représente le nombre de Betti d'ordre i. Le nombre de Betti d'ordre 0 β_0 , correspond au nombre de composantes connexes dans le réseau poral discret. L'espace des vides définit un milieu continu donc $\beta_0=1$ si l'on considère le réseau poral dans sa globalité. Le nombre de Betti d'ordre 1 β_1 , aussi appelé le genre ou la connectivité ([Tsakiroglou et Payatakes, 2000], [Liang et al., 2000]), dénombre les connexions redondantes, c'est-à-dire les liens du réseau qui peuvent être rompus sans créer de nouvelles entités isolées. Le nombre de Betti d'ordre 2 β_2 , mesure le nombre de "cavités", correspondant ici au nombre d'amas de particules entièrement entourés de vide. Pour tout réseau composé de N nœuds et de B liens, β_0 et β_1 sont liés par $\beta_0 - \beta_1 = N - B^1$ ([Tsakiroglou et Payatakes, 2000], [Liang et al., 2000]). χ est alors définie par l'équation (III.2) :

$$\chi = N - B + \beta_2. \tag{III.2}$$

Le paramètre β_2 joue un rôle mineur dans les milieux granulaires pour lesquels les forces gravitaires sont prépondérantes car, dans de tels milieux, l'occurence de ces amas est généralement très rare [Vogel, 2002].

Cette approche du problème de représentation topologique de l'espace des vides est très différente de celle qui a pu être abordée plus haut, car la notion de forme de pores, de taille de pores disparaît. Seule la position relative des nœuds (pores) les uns par rapport aux autres est nécessaire. Ceci peut apparaître comme limitant, aussi Vogel [Vogel, 2002] a-t-il réintroduit l'influence de la morphologie en définissant une fonction de connectivité issue de la caractéristique d'Euler pour chaque taille de pores. En effet, alors qu'il apparaît raisonnable que les plus gros pores, peu représentés dans le milieu granulaire, puissent être isolés car non reliés entre eux, des pores de plus petites tailles qui sont en plus grand nombre ont beaucoup de chance d'être adjacents donc d'être reliés entre eux. On voit ici que la morphologie doit, avec raison, être prise en compte pour la construction d'une topologie rationnelle. Pour un pore de diamètre ou diamètre équivalent D, χ est calculée selon le principe suivant :

- un pore est supposé être représentable par une seule cellule de Delaunay,
- deux pores sont connectés si les conditions suivantes sont satisfaites :
 - 1. chacun d'entre eux a une taille supérieure à D,
 - 2. la taille de la connexion entre ces deux pores est aussi supérieure à D.

Nous avons vu que différentes définitions de taille de pores peuvent être mises en avant (rayon de la sphère inscrite, rayon équivalent du volume de vide d'une cellule de Delaunay), de même une constriction peut se caractériser par différentes quantités (rayon du cercle inscrit, rayon équivalent de l'aire de vides sur une face de cellule de Delaunay). Aussi, une combinaison de

¹Il apparaît ici une analogie entre le genre β_1 et le nombre cyclomatique d'un graphe des liaisons μ , qui intervient dans le calcul du degré d'hyperstaticité d'un mécanisme. En effet, μ représente le nombre de chaînes indépendantes du graphe des liaisons et se calcule par $\mu = N_L - N_P + 1$ où N_L désigne le nombre de liaisons entre les pièces et N_P , le nombre de pièces du mécanisme. Toute pièce étant reliée au moins par une liaison aux autres pièces du mécanisme, $\beta_0 = 1$.

chacune des quantités volumiques avec une quantité topologique conduira à quatre fonctions de connectivité différentes (Fig. III.2).

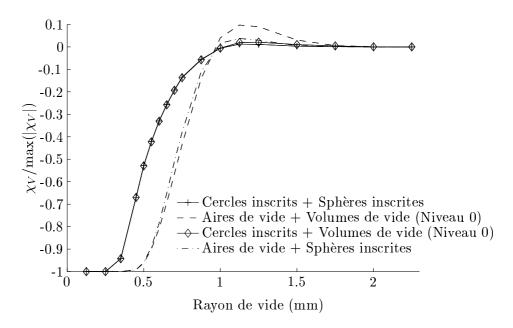


Fig. III.2 – Fonctions de connectivité normalisées en fonction du rayon de vide (en mm), pour les quatre combinaisons possibles des paramètres caractéristiques volumiques et topologiques (échantillon le plus dense de la granulométrie serrée)

D'après la Fig. III.2, on constate que si l'on se fixe en premier lieu la caractéristique topologique (rayon du cercle inscrit, rayon équivalent de l'aire de vides sur une face d'une cellule de Delaunay), le choix du paramètre de morphologie n'affecte pas la forme de la fonction de connectivité résultante (elles sont confondues). Cette constatation renforce l'idée que les constrictions jouent un rôle fondamental dans les analyses de topologie car de par leur taille, plus petite que celles des pores, elles constituent le facteur limitant pour établir une connexion entre les pores.

La Fig. III.2 met en évidence que la caractéristique d'Euler-Poincaré χ (ou ici χ_V quantité ramenée au volume de mesure des caractéristiques de l'empilement) est positive pour les grandes valeurs de rayon de pores. Cela indique qu'il existe un nombre plus élevé de grands pores que de connexions de grandes tailles. Ainsi, les pores de grandes tailles ont tendance à constituer des amas isolés. Les passages qui permettraient de sortir de ces pores ont de trop petites ouvertures. Pour un rayon de cercles inscrits critique (aux alentours de 0.95mm sur la Fig. III.2), la caractéristique d'Euler-Poincaré χ devient négative. Cela dénote une adéquation entre la taille des pores et celles des passages entre pores. Les ouvertures (ou connexions), trop petites auparavant, deviennent accessibles et les pores sont effectivement connectés les uns aux autres. A mesure

que le rayon de cercle inscrit considéré diminue, le nombre de connexions augmente et χ devient de plus en plus négative.

 χ est minimale pour un diamètre $d_{\min, \text{cercle}}$ correspondant au diamètre du cercle inscrit entre trois des plus petites particules de la granulométrie, positionnées dans une configuration "pyramidale". Ce type d'arrangement (très rare pour le milieu granulaire étudié) est l'arrangement qui conduit à un enchevêtrement théorique le plus dense possible :

$$d_{ ext{min,cercle}} = \left(-1 + rac{2}{\sqrt{3}}
ight) d_{0, ext{solide}} \simeq rac{1}{6.5} d_{0, ext{solide}}.$$

Tous les pores et connexions du réseau ont une taille au moins égale à $d_{\text{min.cercle}}$.

Pour une taille de vide donnée, une seule variable scalaire traduit ici toute la connectivité du réseau poral. L'exploitation de la fonction de connectivité est donc à mener avec prudence, d'autant plus que la caractéristique d'Euler résulte d'une addition sur l'ensemble de ce réseau poral. Ainsi, une même caractéristique d'Euler $\chi(d)$, faiblement négative, peut résulter de deux configurations : soit un faible nombre de pores avec quelques connexions, soit un nombre très important de pores et des connexions en plus grand nombre. Dans le premier cas, les propriétés de transport sont quasiment nulles. Dans le second cas en revanche, il n'est pas improbable de rencontrer un chemin d'ouverture au moins égale à d au sein du milieu granulaire. Le lien entre transport et fonction de connectivité mérite donc d'être spécifiquement étudié.

La fonction de connectivité peut être entrevue comme une estimation cumulée de liens au sein de milieux granulaires, on peut alors la mettre en parallèle avec les fonctions de répartition issues des densités de probabilité de tailles de pores ou de tailles de constriction (Fig. III.3 (a) et Fig. III.3 (b)). Cette comparaison est l'occasion de souligner le caractère plus contraignant d'une approche par la fonction de connectivité par rapport à une approche par les distributions de tailles de constrictions. Si l'on prend comme paramètre de vide la taille du cercle inscrit, la Fig. III.2 met en évidence que le milieu le plus dense de la granulométrie serrée offre des possibilités de parcours très limitées à une particule de rayon 1mm. Pourtant, la distribution de tailles de constrictions (Fig. III.3 (b)) montre que tout de même 20% de constrictions permettent le passage d'une telle particule. La fonction de connectivité présente l'avantage de témoigner de la dispersion de ces 20% de constrictions au sein du matériau. Ces deux informations sont donc complémentaires.

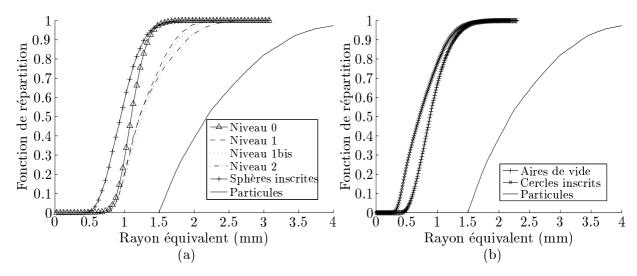


Fig. III.3 – Fonction de répartition pour les rayons d'entités de vide (a)3D, (b)2D. Ce rayon est pris alternativement comme rayon de la sphère équivalente au volume de niveau 0, 1, 1bis et 2, rayon de la sphère inscrite, rayon de la sphère solide, rayon du disque équivalent à l'aire de vide sur une face de cellule de Delaunay et rayon du cercle inscrit.

2 Effets de la granulométrie et de la densification sur les caractéristiques topologiques

2.1 Influence de la granulométrie à densité relative fixée

Selon une procédure similaire à celle présentée dans le chapitre I, section 3, on se propose d'étudier le fractile d'ordre P de la fonction de répartition des tailles de cercles inscrits $d_{\rm cercle}$ en fonction du fractile du même ordre de la distribution de tailles de particules solides $d_{\rm solide}$, pour P variant de 5% à 95%.

Schuler [Schuler, 1996] propose une corrélation entre le fractile d'ordre $0.7~(d_{\rm cercle70})$ de la distribution de tailles de constrictions et le fractile du même ordre $(d_{\rm solide70})$ de la distribution de tailles de particules solides en surface. Couramment définie par une approche en masse (ou en volume), la granulométrie d'un sol peut aussi être caractérisée par une approche en surface. Les contacts entre grains se localisent au niveau des surfaces externes des particules. L'hypothèse est alors que plus une classe de grains offre une grande surface de contact, plus la probabilité que les particules de cette classe interviennent dans des arrangements granulaires est grande. La distribution de tailles de particules en surface mesure alors l'importance de la surface latérale offerte par une classe de particules par rapport à toute la surface de contact possible dans le matériau. La relation proposée par Schuler à partir d'une telle distribution (équation (III.3)) fait intervenir la densité relative R_d et a été établie dans le cadre de distributions linéaires et convexes de tailles de particules.

$$d_{\text{cercle}70}(R_d) = 0.31 d_{\text{solide}70} \exp\left(-0.9 R_d^{0.83}\right)$$
(III.3)

L'existence de cette formule nous incite donc à baser notre recherche de corrélation sur la distribution de tailles de particules solides en surface plutôt qu'en masse. Les figures Fig. III.4 (a) et (b) représentent l'évolution du ratio $d_{\rm cercle}/d_{\rm solide}$ en fonction de P pour les trois matériaux étudiés lorsqu'ils sont respectivement dans leur état le plus lâche et dans leur état le plus dense.

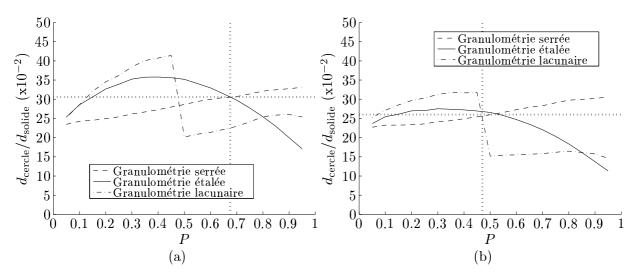


Fig. III.4 – Evolution du rapport entre le fractile d'ordre P de la distribution cumulée de tailles de constrictions et le fractile de même ordre de la distribution de tailles de particules solides en surface, en fonction de P pour les trois granulométries étudiées (a) dans leur état le plus lâche - (b) dans leur état le plus dense.

La première constatation est que la relation proposée par [Schuler, 1996] se vérifie ici dans le cas des états lâches. Sur la figure Fig. III.4 (a), les courbes relatives aux granulométries serrée et étalée s'intersectent au point de coordonnées (67%, 0.31) ce qui correspond effectivement à l'équation (III.3) sous la condition R_d =0% (et si l'on admet l'approximation de l'ordre 70% par l'ordre 67%). Cependant, la présente étude souligne d'une part que le cadre de validité de la relation à l'état lâche ne s'étend pas à la granulométrie lacunaire ici considérée. D'autre part, cette relation ne se vérifie plus à l'issue de notre processus de densification puisque les courbes des granulométries serrée et étalée ne s'intersectent pas au point de coordonnées (70%, 0.126²) sur la figure Fig. III.4 (b). De manière plus générale, cette figure ne met en évidence aucune corrélation entre les fractiles d'ordre 0.7. En revanche, elle suggère une relation de dépendance entre les fractiles d'ordre 47% se traduisant par l'équation (III.4).

$$d_{\text{cercle}47}(R_d = 100\%) = 0.26 d_{\text{solide}47}$$
 (III.4)

 $^{^{2}0.31}d_{\text{solide}70} \exp(-0.9) = 0.126$

2.2 Influence de la densité relative du matériau à granulométrie fixée

Les tendances constatées sur les informations topologiques sont les mêmes que celles trouvées pour les caractéristiques morphologiques : les tailles de constrictions diminuent à mesure que l'on densifie le matériau. Le tableau Tab. III.1 quantifie la diminution relative du fractile d'ordre 0.5 de la distribution de tailles de constrictions lors du passage de l'état lâche à l'état dense et met en évidence que les effets de la densification sont plus prononcés sur les caractéristiques topologiques que sur les données volumiques présentées au chapitre II.

Tab. III.1 – Pourcentages de variation des fractiles d'ordre 0.5 des distributions cumulées de

tailles de constrictions au cours de la densification

	Granulométrie	Granulométrie	Granulométrie
Matériau	serrée	${ m \acute{e}tal\acute{e}e}$	lacunaire
Variation du diamètre de constriction			
issu de l'analyse des aires de vide	4.9%	16%	13.2%
issu du cercle maximal inscrit	9.6%	24.4%	25.5%

Quelle que soit la granulométrie, on observe une décroissance linéaire du fractile d'ordre 0.5 de la distribution de tailles de cercles inscrits en fonction de la densité relative (Fig. III.5).

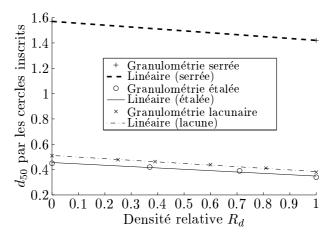


Fig. III.5 – Influence de la densité relative sur les d_{50} des fonctions de répartition de la taille des cercles inscrits pour les trois granulométries étudiées.

Les relations de dépendance sont les suivantes (l'unité est le millimètre) :

$$d_{50} = -0.15R_d + 1.57 \text{ pour la granulométrie serrée}, \tag{III.5}$$

$$d_{50} = -0.107R_d + 0.455 \text{ pour la granulométrie étalée}, \tag{III.6}$$

$$d_{50} = -0.127R_d + 0.511 \text{ pour la granulométrie lacunaire.}$$
 (III.7)

Il n'a pas été trouvé de corrélation entre les coefficients intervenant dans ces relations de

dépendance et les diamètres caractéristiques des distributions de tailles de particules.

Intéressons-nous désormais à des distributions de tailles de constrictions plutôt qu'à des valeurs scalaires moyennées. La figure Fig. III.6 présente l'influence de la densification sur les densités de probabilité du rayon des cercles inscrits pour les trois granulométries : Fig. III.6 (a), (b) et(c) pour les matériaux de granulométrie serrée, étalée et lacunaire respectivement.

Pour les états les plus lâches, les distributions des cercles équivalents rendent compte de processus large bande. Ce phénomène est plus prononcé dans le cas des granulométries étalée et lacunaire dont les densités de probabilité présentent des plateaux étendus sur des rayons allant respectivement de 0.1mm à 0.3mm et de 0.1mm à 0.25mm (Fig. III.6 (b) et (c)). Ceci réflète un milieu très hétérogène, par ailleurs plus hétérogène que ce qui a pu être trouvé pour les caractéristiques volumiques au chapitre II. Au cours du processus de densification, les réseaux de constrictions des matériaux à granulométries continues se réorganisent autour d'une taille de constriction caractéristique puisque la densité de probabilité de la valeur modale gagne en amplitude. Le rayon de constriction le plus représenté à l'état dense vaut 0.45mm pour la granulométrie serrée et 0.13mm pour la granulométrie étalée linéaire. Il est à souligner d'une part que ces valeurs modales sont caractéristiques de la granulométrie du matériau puisqu'elles s'avèrent invariantes par changement de densité relative. D'autre part, elles correspondent aux estimations de l'ouverture de filtre obtenues par l'application du critère de Terzaghi [Terzaghi et Peck, 1948]. Selon ce critère, la taille caractéristique de vide peut être obtenue en divisant par 4 (voire 5) le diamètre caractéristique d'ordre 15% de la courbe granulométrique.

$$d_{\text{mode}} = d_{15,\text{solide}}/4.7$$
 pour la granulométrie serrée, (III.8)

$$d_{\text{mode}} = d_{15.\text{solide}}/4$$
 pour la granulométrie linéaire. (III.9)

Pour le matériau à granulométrie lacunaire, le comportement semble quelque peu différent. La lacune granulométrique a pour conséquence l'apparition de deux valeurs modales : l'une pour un rayon de 0.12mm et l'autre pour un rayon de 0.17mm. Le plus petit rayon correspond à l'estimation par la formule de Terzaghi avec un coefficient de 4.3. Ce rayon est effectivement la valeur modale à l'état lâche mais lors de la densification, le second pic devient le pic prédominant.

Pour mieux comprendre les effets du processus de densification, on s'est intéressé au lien entre une taille de constriction et les tailles des trois particules, sommets de la face de Delaunay, qui délimitent cette constriction. La figure Fig. III.7 présente les rayons de constrictions en échelle de gris en fonction des rayons (R_1, R_2, R_3) des particules définissant les constrictions pour les trois granulométries étudiées dans leurs états extrêmes de densité. Pour chaque matériau, la répartition spatiale des points est très proche à l'état lâche et à l'état dense. Il apparaît donc que la densification n'engendre pas de bouleversement profond de la structure interne des milieux granulaires. Mais l'assombrissement des graphiques souligne qu'un réarrangement des

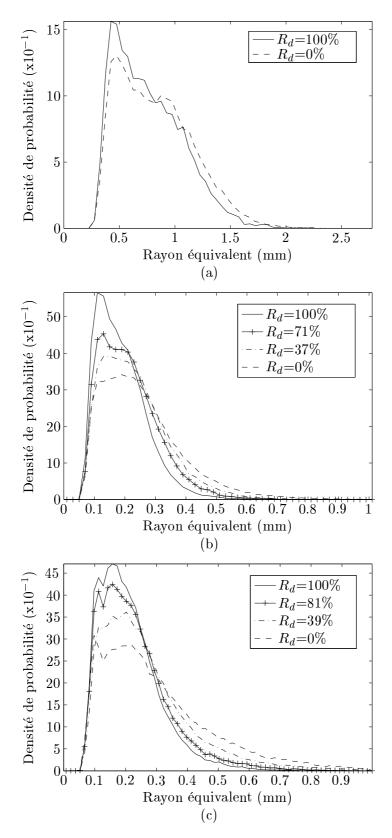


Fig. III.6 – Densités de probabilité du rayon des cercles inscrits pour les états de densité relative (a). $R_d = \{100\%, 0\%\}$ pour la granulométrie serrée, (b) $R_d = \{100\%, 71\%, 37\%, 0\%\}$ pour la granulométrie étalée et (c) $R_d = \{100\%, 81\%, 39\%, 0\%\}$ pour la granulométrie lacunaire.

particules a lieu de manière à réduire les espaces vides. Pour les matériaux à granulométries étalée et discontinue, c'est-à-dire à large étendue granulométrique, les graphiques Fig. III.7 (c) et (e) mettent en évidence l'existence de "voûtes" internes à l'état lâche puisque de grandes tailles de constrictions résultent de l'association de trois petites particules. La densification a alors pour principal effet de casser ces équilibres instables. A ces effets de voûte s'ajoute un phénomène de ségrégation dans le cas du matériau présentant une lacune granulométrique. A l'état lâche, 41.8% des constrictions résultent de l'association de trois particules dont le diamètre est inférieur à ceux de la lacune granulométrique et 11.7% des constrictions mettent en jeu au moins deux particules de diamètres supérieurs à ceux de la lacune. Dans le cas du matériau à granulométrie étalée, seules 19% des constrictions sont engendrées par trois petites particules et 2.7% par au moins deux grosses particules. Dans le matériau présentant une lacune granulaire, les particules ont donc tendance à s'associer par gammes de tailles similaires. Le premier pic de la densité de probabilité de la taille de constriction provient des amas de petites particules. Le second pic découle de la mise en contact de ces petites particules, initialement équilibrées dans les voûtes, avec les autres particules de l'assemblage.

Pour chaque granulométrie, nous avons juxtaposé les fonctions de connectivité obtenues à chaque état de densité étudié (voir Fig. III.8). Lorsque la densité relative augmente, χ_V augmente pour les pores les plus larges, aussi la chance de trouver un chemin associé à cette gamme de tailles se réduit-elle. Cependant, contrairement à ce qui pourrait être pensé, pour les petits diamètres de pores, le milieu le plus connecté se trouve pour les états les plus denses. Lorsque la porosité diminue, le taux de diminution du nombre de pores par unité de volume est plus faible que le nombre de connexions associées à cette taille. Cela s'explique par un arrangement plus uniforme de l'espace des vides lors du processus de densification. Dû à cet arrangement, si une particule mobile de taille petite traverse une constriction (face d'un tétraèdre), il est fort probable qu'elle puisse traverser les autres faces du tétraèdre (donc de sortir du pore). Pour un échantillon lâche, les cellules de Delaunay sont beaucoup plus déformées et il n'y a pas de corrélation certaine entre la probabiblité d'entrée et de sortie d'un pore. Il est à souligner que la valeur limite de diamètre de constriction à partir de laquelle un échantillon dense paraît plus connecté qu'un échantillon lâche est très proche du premier mode des distributions trouvé, soit des rayons de 0.45mm pour la granulométrie serrée et 0.1mm pour les granulométries étalée et lacunaire.

3 Conclusion

Ce chapitre a été intégralement consacré à l'étude topologique de l'espace poral d'un milieu afin de rendre compte des hétérogénéités relatives aux potentialités de transport au sein de ce milieu. Les propriétés topologiques permettent d'aborder les problèmes de cheminement dans le réseau des vides qui sont un élément essentiel dans la compréhension de la migration de

III.3 Conclusion 61

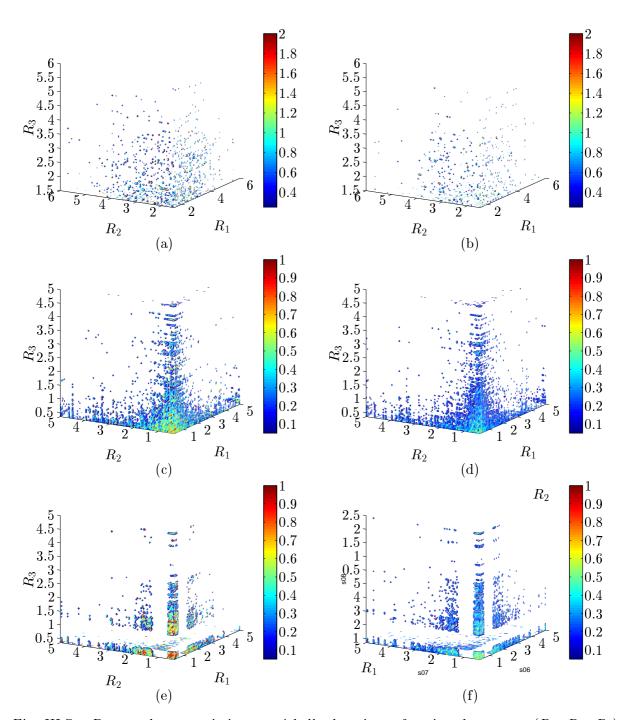


Fig. III.7 – Rayons des constrictions en échelle de gris en fonction des rayons (R_1, R_2, R_3) des trois particules, sommets de la face de Delaunay associée à la constriction pour les états les plus lâches (respectivement les plus denses) de la granulométrie serrée (a) (resp. (b)), de la granulométrie étalée (c) (resp. (d) et de la granulométrie lacunaire (e) (resp. (f)). Les tailles sont données en mm.

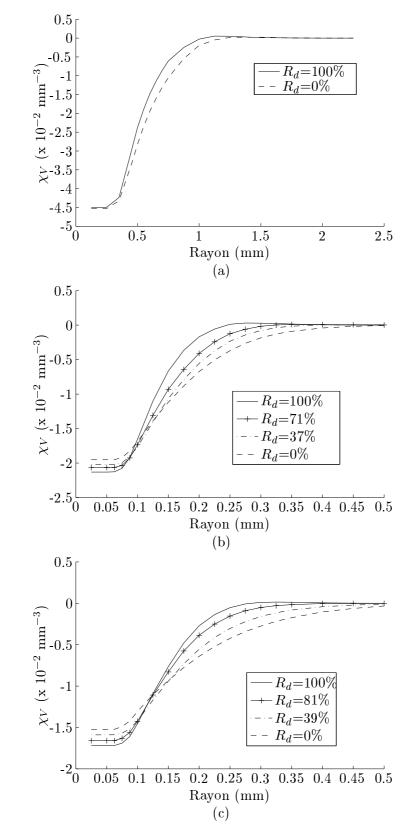


Fig. III.8 – Fonctions de connectivité (a) pour la granulométrie serrée, pour des densités relatives égales à 0% et 100%, (b) pour la granulométrie étalée, pour des densités relatives égales à 0%, 37%, 71% et 100%, (c) pour la granulométrie lacunaire, pour des densités relatives égales à 0%, 39%, 81% et 100%.

III.3 Conclusion 63

particules dans un matériau.

Nous nous sommes ici focalisés sur les constrictions dans la mesure où un milieu granulaire peut être assimilé à un ensemble de "chemins de vide". Pour chacun de ces chemins, la plus petite constriction détermine la dimension des particules pouvant traverser ce chemin. De la même manière que pour les pores, l'ambiguïté sur les frontières géométriques des constrictions nous a amenés à définir plusieurs mesures pour une même constriction : soit le rayon du disque inscrit, soit le rayon du disque de même aire que l'aire de vide au sein d'une face d'un tétraèdre de Delaunay. On peut supposer que le rayon du disque inscrit sous-estime la taille caractéristique de la constriction tandis que l'approche par l'aire de vide sur une face conduit à une surestimation de cette taille.

L'étude des distributions de tailles de constrictions confirme les conclusions de l'analyse volumique des vides menée précédemment, à savoir que la densification ne bouleverse pas profondément la structure interne du matériau. Le milieu, initialement désordonné (bruit blanc sur une large gamme de diamètres), se réorganise autour d'une voire deux valeurs modales, caractéristiques de la granulométrie du matériau. Les tendances linéaires proposées pour traduire l'évolution du d_{50} des distributions cumulées de tailles de constrictions mériteraient d'être étudiées plus précisément. A partir des trois seules granulométries considérées, il semble difficile d'expliciter la dépendance des coefficients impliqués dans la relation linéaire en fonction de la courbe granulométrique. Cependant, les relations obtenues permettent d'estimer la réduction de l'espace poral consécutive à une densification.

Coupler les résultats des analyses volumique et topologique permet de calculer la fonction de connectivité du milieu qui traduit l'existence ou non de connexions entre les pores en fonction de leur taille. Le tracé de ces fonctions met tout d'abord en évidence le rôle limitant des constrictions dans les processus de transfert au sein des sols. De plus, il apparaît qu'une forte densité ne veut pas forcément dire milieu moins connecté. Le processus de densification réordonne le milieu, milieu qui est perçu par une petite particule mobile comme un milieu plus connecté.

Les distributions de tailles de constrictions et les fonctions de connectivité sont des caractéristiques intrinsèques des matériaux. Mais les propriétés de filtration d'un élément de sol dépendent fortement de l'épaisseur de matériau que l'on utilise pour réaliser cet élément. De manière très schématique, plus l'élément est épais, plus la probabilité de rencontrer la plus petite constriction possible sur un chemin de filtration est grande. Il reste donc un lien à établir entre ces propriétés topologiques et les propriétés de transport d'un milieu, notamment les longueurs que peuvent parcourir des particules d'un diamètre donné.

Bibliographie

- [Arya et al., 1999] Arya, L. M., Leij, F. J., Shouse, P. J., et van Genuchten, M. T. (1999). Relationship between the hydraulic conductivity function and the particle-size distribution. Soil Science Society of America Journal, 63:1063–1070.
- [Balhoff et Thompson, 2004] Balhoff, M. T. et Thompson, K. E. (2004). Modelling the steady flow of yield-stress fluids in packed beds. *American Institute of Chemical Engineers*, 50:3034–3048.
- [Bryant et al., 1993] Bryant, S. L., King, P. R., et Mellor, D. W. (1993). Network model evaluation of permeability and spatial correlation in a real random sphere packing. *Transport in Porous Media*, 11:53–70.
- [Chakraborty et al., 2006] Chakraborty, D., Chakraborty, A., Santra, P., Tomar, R. K., Garg, R. N., Sahoo, R. N., Choudhury, S. G., Bhavanarayana, M., et Kalra, N. (2006). Prediction of hydraulic conductivity from particle-size distribution. *Current Science*, 90:1526–1531.
- [Liang et al., 2000] Liang, Z., Ioannidis, M., et Chatzis, I. (2000). Geometric and topological analysis of three-dimensional porous media: Pore space partitioning based on morphological skeletonization. *Journal of Colloid and Interface Science*, 221:13–24.
- [Schuler, 1996] Schuler, U. (1996). Scattering of the composition of soils an aspect for the stability of granular filters. Dans *Geofilters'96*, pages 21–34, Montreal, Canada. Lafleur and Rollin, Bitech Publications.
- [Terzaghi et Peck, 1948] Terzaghi, K. et Peck, R. (1948). Soil mechanics in engineering practice. John Wiley and Sons Inc., New York.
- [Tsakiroglou et Payatakes, 2000] Tsakiroglou, C. D. et Payatakes, A. C. (2000). Characterization of the pore structure of reservoir rocks with the aid of serial sectioning analysis, mercury porosimetry and network simulation. *Advances in Water Resources*, 23:773–789.
- [Vogel et Roth, 2001] Vogel, H. et Roth, K. (2001). Quantitative morphology and network representation of soil pore structure. Advances in Water Resources, 24:233–242.
- [Vogel, 2002] Vogel, H.-J. (2002). Topological characterization of porous media. *Morphology* and Condensed Matter Physics and Geometry of Spatially Complex Systems, 600:75–92.
- [Yang et al., 2006] Yang, R., Zou, R., Yu, A., et Choi, S. (2006). Pore structure of the packing of fine particles. *Journal of Colloid and Interface Science*, 299:719–725.

Chapitre IV

Méthodes probabilistes de description des constrictions

Introduction

Les précédents chapitres ont souligné que l'entité de vide pertinente pour l'analyse du transport est la constriction et que les caractéristiques de cette variable dépendent de la granulométrie du milieu et de sa densité. Ce chapitre recense dans un premier temps les méthodes "géométrico-probabilistes" qui ont pour objectif de proposer une méthode approchée permettant de construire la distribution de tailles de constrictions (CSD) qui est la variable physiquement pertinente à partir de variables facilement mesurables (la distribution de tailles des particules solides (PSD), la densité). Dans la lignée de la procédure pionnière de SILVEIRA [Silveira, 1965], ces méthodes consistent à utiliser un modèle probabiliste pour décrire un milieu poral sur la base d'un arrangement géométrique entièrement déterminé de particules solides. Plus rapides que la méthode des éléments discrets associée à la triangulation de Delaunay, ces méthodes se présentent donc comme des alternatives intéressantes pour l'étude des vides. Dans la deuxième partie de ce chapitre, ces méthodes probabilistes, basées sur des configurations simples de particules sont confrontées aux méthodes s'appuyant sur une partition de Delaunay qui elles, rendent compte de toute la multiplicité d'arrangements possibles pour un matériau granulaire. La comparaison proposée ici porte sur des granulométries différentes (serrée, étalée et lacunaire) et sur des états de densité différents. Enfin, des modèles à un et deux paramètres sont proposés afin de corréler les résultats de ces méthodes : l'objectif est ici d'enrichir les méthodes probabilistes numériques peu coûteuses par le réalisme inhérent à la méthode des éléments discrets.

Sommaire

	1.1	Principe général des méthodes probabilistes				
	1.2	Distrib	ution de tailles de constrictions pour un matériau dans son état			
		le plus	dense	68		
		1.2.1	Approche de Silveira [Silveira, 1965]	68		
		1.2.2	Approche de Ziems, reprise par [Kenney et al., 1985]	69		
		1.2.3	Rapide estimation de la CSD calculée à partir de la PSD en			
			nombre	70		
	1.3	Distrib	ution de tailles de constrictions pour un matériau dans son état			
		le plus	lâche	71		
		1.3.1	Approche de Silveira [Silveira et al., 1975]	71		
		1.3.2	Approche de Schuler [Schuler, 1996]	72		
	1.4	CSD po	our une densité relative intermédiaire	73		
2	Etuc	de comp	parative des différentes méthodes de calcul de CSD	73		
	2.1	Corresp	pondance des méthodes pour les états de densités extrêmes	75		
	2.2	Corresp	pondance des états lâches avec la formule de Locke $et~al.~\dots$	80		
3	Nou	veau m	odèle probabiliste à 1 paramètre pour les granulométries			
	serr	ée et lir	néaire	82		
4	Nou	veau m	odèle probabiliste à 2 paramètres	85		
5	\mathbf{Con}	clusion		86		
Bib	oliogra	phie .		89		

1 Etude bibliographique

1.1 Principe général des méthodes probabilistes

Ces méthodes se construisent généralement selon trois étapes :

- 1. La distribution de tailles de particules solides (PSD) est discrétisée en différentes classes. La figure Fig. IV.1 présente un exemple de discrétisation en m classes. Chaque classe i est caractérisée par un diamètre représentatif d_i et une probabilité d'occurrence p_i . Il est admis par la suite que le milieu granulaire n'est composé que de sphères dont le diamètre est égal à l'un de ces diamètres représentatifs.
- 2. Des hypothèses simplificatrices sont avancées quant à l'arrangement géométrique des grains solides. Ces postulats répondent au besoin de donner une forme et une taille à la constriction. Aucun effet d'arche au sein du matériau n'est pris en compte.
- 3. Une approche probabiliste permet de déterminer la probabilité d'occurrence d'une taille de constriction à partir des probabilités d'occurrence des tailles de particules solides (définissant la constriction), définies par la donnée de la PSD.

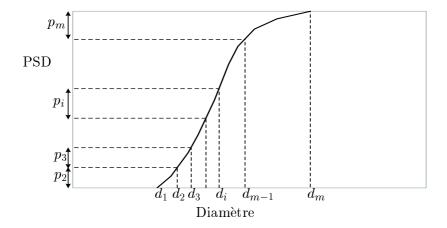


Fig. IV.1 – Discrétisation de la distribution de tailles de particules

Les distributions de tailles de constrictions diffèrent selon que la procédure se base sur la distribution de tailles de particules en masse, en surface ou en nombre. La distribution la plus communément utilisée est la distribution en masse (la courbe granulométrique) qui permet de mesurer l'importance relative des différentes classes de grains sur la masse totale du système. C'est plus particulièrement celle qui découle des expériences par tamisage ou sédimentométrie. Selon Locke et al. [Locke et al., 2001], l'utilisation de cette distribution aboutit à une bonne représentation de la distribution de tailles de vides dans le cas de filtres à granulométrie serrée mais conduit à des erreurs non négligeables lorsque l'on traite des filtres à granulométrie étalée. Avec une représentation en masse, le rôle des grandes particules qui ont une forte masse individuelle mais qui sont peu nombreuses au sein de l'assemblage va être surestimé. Il est en effet peu probable que ces particules se retrouvent en contact mutuel dans le matériau et génèrent de grands vides. Pour des raisons similaires, une distribution en nombre de tailles de particules conduit à une surestimation des vides les plus petits. Le compromis que LOCKE et al. proposent, dans la lignée des travaux de Humes [Humes, 1996], est d'utiliser la distribution en surface de tailles de particules en partant du principe que les grosses particules, même faiblement représentées au sein du système, interfèreront avec les autres particules en raison de leur grande surface de contact.

Les relations de passage entre ces différentes distributions (en masse, en surface et en nombre) sont explicitées ci-après. Soit un matériau discrétisé en n classes de grains de dimensions représentatives respectives d_1, d_2, \ldots, d_n . Soit $p_{m,i}$ la probabilité d'occurrence en masse de la classe i. Les probabilités en surface $p_{SA,i}$ et en nombre $p_{NB,i}$ se déduisent respectivement par application

¹L'aire de la surface des sphères est ici considérée

des relations (IV.1) et (IV.2).

$$p_{SA,i} = \frac{\frac{p_{m,i}}{d_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{m,i}}{d_i}}$$
 (IV.1)

$$p_{NB,i} = \frac{\frac{p_{m,i}}{d_i^3}}{\sum_{i=1}^n \frac{p_{m,i}}{d_i^3}}$$
(IV.2)

Il sera précisé dans le descriptif de chaque méthode la distribution de tailles de particules historiquement suggérée mais il faut garder à l'esprit que les PSD peuvent être interchangées entre les diverses méthodes.

Une fois choisi le type de PSD à utiliser, la méthodologie de calcul de la distribution de tailles de constrictions dépend de la compacité du matériau que l'on étudie. Les méthodes probabilistes reposent sur un arrangement structural *préétabli* des particules. En d'autres termes, avant d'utiliser le schéma probabiliste, il est nécessaire de présupposer les positions relatives des particules les unes par rapport aux autres. Originellement, ces arrangements géométriques n'ont été définis que pour l'état le plus dense et l'état le plus lâche d'un matériau. Pour les états de densités intermédiaires, il est généralement admis qu'ils résultent d'une combinaison de ces deux états de densité extrêmes.

1.2 Distribution de tailles de constrictions pour un matériau dans son état le plus dense

1.2.1 Approche de Silveira [Silveira, 1965]

La méthodologie proposée pour déterminer la CSD se base sur les hypothèses suivantes :

- les grains solides sont sphériques,
- l'assemblage granulaire est dans son état le plus dense,
- la distribution de tailles de particules suggérée est la PSD en masse.

SILVEIRA considère alors que toute constriction résulte de l'association de trois sphères mutuellement tangentes de diamètres respectifs d_i , d_j et d_k et de probabilités d'occurrence respectives p_i , p_j et p_k (Fig. IV.2). Chacune de ces constrictions peut alors être caractérisée par \bar{d} , le diamètre du cercle tangent intérieurement aux trois cercles que forment les sphères dans le plan passant par leurs centres. Connaissant d_i , d_j et d_k , \bar{d} peut être déterminé par l'application du théorème de Descartes.

Théorème 1 Théorème de Descartes

Si quatre cercles tangents entre eux ont pour courbures k_i , $i \in [1..4]$ alors

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

Par conséquent,

$$\left(\frac{2}{d_i}\right)^2 + \left(\frac{2}{d_j}\right)^2 + \left(\frac{2}{d_k}\right)^2 + \left(\frac{2}{\overline{d}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{d_i} + \frac{2}{d_j} + \frac{2}{d_k} + \frac{2}{\overline{d}}\right)^2$$
 (IV.3)

$$\left(\frac{1}{\bar{d}}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} + \frac{1}{d_k}\right)\left(\frac{1}{\bar{d}}\right) + 2\left(\frac{1}{d_i^2} + \frac{1}{d_j^2} + \frac{1}{d_k^2}\right) - \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} + \frac{1}{d_k}\right)^2 = 0$$
(IV.4)

La résolution de l'équation du second degré en $\frac{1}{\bar{d}}$ permet la détermination de \bar{d} pour tout triplet (d_i, d_i, d_k) .

A cette taille de constriction \bar{d} correspond une probabilité \bar{p} qui est la probabilité d'occurrence du groupe (d_i,d_j,d_k) . D'après KEMENY et al. [Kemeny et al., 1959], \bar{p} se calcule selon l'expression (IV.5).

$$\bar{p} = \frac{3!}{r_i! r_j! r_k!} p_i^{r_i} p_j^{r_j} p_k^{r_k}$$
 (IV.5)

 r_i , r_j et r_k correspondent respectivement aux nombres d'occurrences de d_i , d_j et d_k dans le groupe $(r_i + r_j + r_k = 3)$. L'annexe E fournit quelques explications quant à la provenance de la formule (IV.5).

En exploitant la subdivision de la distribution de tailles de particules en m classes et en considérant toutes les combinaisons possibles (d_i, d_j, d_k) entre les m diamètres moyens de ces classes, la démarche précédemment décrite permet l'estimation de tous les \bar{d} et \bar{p} à partir desquels la distribution de tailles de constrictions peut être construite.

1.2.2 Approche de Ziems, reprise par [Kenney et al., 1985]

L'approche est similaire à celle précédemment décrite mais ZIEMS propose d'utiliser la distribution en nombre de tailles de particules pour le calcul des probabilités (équation (IV.6)) au lieu d'utiliser la distribution en masse comme le fait SILVEIRA.

$$\bar{p} = \frac{3!}{r_i! r_j! r_k!} p_{n,i}^{r_i} p_{n,j}^{r_j} p_{n,k}^{r_k}$$
 (IV.6)

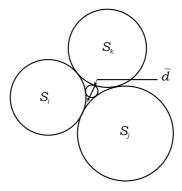


Fig. IV.2 – Configuration de base pour l'état le plus dense

1.2.3 Rapide estimation de la CSD calculée à partir de la PSD en nombre

Les recherches de [Schulze, 1993] mettent en évidence une corrélation entre la PSD en nombre et la CSD calculée par la méthode probabiliste à partir de la PSD en nombre dans le cas d'un matériau dans son état le plus dense. Schulze propose la relation (IV.7).

$$D_{\rm CSD} = \frac{1}{c}D_{\rm PSD} \tag{IV.7}$$

avec c=5.5 pour les sols à granulométrie étalée et c=6.5 pour les sols à granulométrie serrée. $D_{\rm CSD}$ représente le diamètre de constriction associé à un fractile donné et $D_{\rm PSD}$ représente le diamètre de particules associé à ce même fractile dans la PSD en nombre.

La figure Fig. IV.3 superpose la PSD en nombre, la CSD issue de la méthode probabiliste considérant la PSD en nombre et la PSD en nombre translatée en échelle logarithmique pour trois matériaux étudiés dans ce travail de granulométries serrée, étalée et présentant une lacune granulaire. Le coefficient c a ici toujours été pris égal à 6.5, la présente étude tend à confirmer

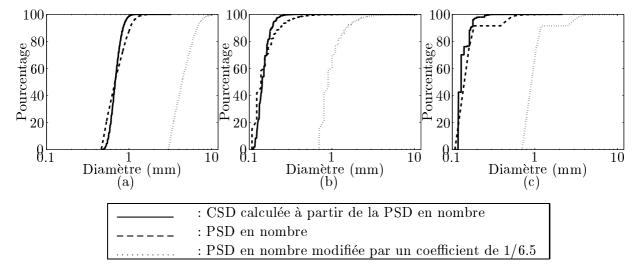


Fig. IV.3 – Superposition de la PSD en nombre, de la CSD issue de la méthode probabiliste considérant la PSD en nombre et de la PSD en nombre translatée (division des diamètres par 6.5) pour (a). la granulométrie serrée, (b). la granulométrie étalée et (c). la granulométrie avec une lacune granulaire.

la relation (IV.7) proposée par Schulze. Il est à rappeler que ce coefficient de 6.5 correspond également au facteur multiplicatif permettant de passer du diamètre d'une particule solide au diamètre de la constriction formée de trois de ces particules solides, mutuellement tangentes. Schulze souligne que la corrélation trouve ses limites dans la zone des plus grands fractiles, ce qui tend également à être confirmé par les présents résultats.

1.3 Distribution de tailles de constrictions pour un matériau dans son état le plus lâche

1.3.1 Approche de Silveira [Silveira et al., 1975]

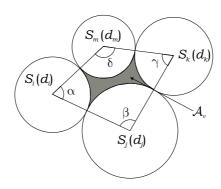


Fig. IV.4 – Configuration de base pour l'état le plus lâche

SILVEIRA suppose que la taille de constriction, notée \bar{d} , est équivalente à celle du cercle ayant la même aire que \mathcal{A}_v , l'aire formée par la réunion de quatre particules mutuellement tangentes $(S_i, S_j, S_k \text{ et } S_m)$. Ainsi défini, \bar{d} sera alors une estimation par excès d'un diamètre de particules susceptible de passer dans la constriction. La figure FIG. IV.4 illustre cette configuration et précise les notations adoptées. Dans l'état le plus lâche du matériau, les particules S_i, S_j, S_k et S_m sont supposées positionnées de manière à maximiser l'aire \mathcal{A}_v .

La connaissance de \bar{d} passe donc par la détermination de \mathcal{A}_v à partir des différents diamètres de particules puis par l'obtention des valeurs des angles α , β , γ et δ permettant d'obtenir une aire \mathcal{A}_v maximale.

Soient d_i , d_j , d_k et d_m les diamètres des quatre particules mutuellement tangentes. a, b, c et d représentent les longueurs des côtés du quadrilatère $(S_iS_jS_kS_m)$ et α , β , γ et δ désignent les angles de ce quadrilatère. Dans la configuration de la figure Fig. IV.4, les longueurs du problème sont liées par les relations suivantes :

$$a = \frac{d_i + d_m}{2}$$
 $b = \frac{d_k + d_m}{2}$ $c = \frac{d_j + d_k}{2}$ $d = \frac{d_i + d_j}{2}$

L'aire \mathcal{A}_v recherchée correspond alors à l'aire du quadrilatère $(S_iS_jS_kS_m)$ (vue ici comme la somme des aires des triangles $(S_iS_jS_m)$ et $(S_jS_kS_m)$) à laquelle sont retranchées les aires des portions de disque résultant du chevauchement du quadrilatère avec les particules :

$$\mathcal{A}_{v} = \frac{ad\sin\alpha}{2} + \frac{bc\sin\gamma}{2} - \frac{1}{8}\left(d_{i}^{2}\alpha + d_{j}^{2}\beta + d_{k}^{2}\gamma + d_{m}^{2}\delta\right)$$
(IV.8)

La spécification de l'un des angles (par exemple α) détermine entièrement le système. Par conséquent, pour déterminer la taille de constriction maximale, il suffit de trouver la valeur de α qui maximise l'expression (IV.8). L'annexe F est consacrée au développement des calculs nécessaires à la maximisation de \mathcal{A}_v . Connaissant la valeur maximale de \mathcal{A}_v , la taille équivalente de

constriction est obtenue par la relation (IV.9).

$$\bar{d} = \sqrt{\frac{4\mathcal{A}_{v_{\text{max}}}}{\pi}} \tag{IV.9}$$

Comme il est fortement improbable que les quatre centres des particules S_i , S_j , S_k et S_m soient coplanaires, il est conseillé d'appliquer un coefficient multiplicatif de 0.82 (valeur moyenne de la longueur des cordes) au diamètre de constriction déterminé par la démarche précédente.

La probabilité d'occurrence des diamètres de particules (d_i, d_j, d_k, d_m) , notée \bar{p} , est donnée par l'équation (IV.10).

$$\bar{p} = \frac{4!}{r_i! r_j! r_k! r_m!} p_i^{r_i} p_j^{r_j} p_k^{r_k} p_m^{r_m}$$
 (IV.10)

 p_i, p_j, p_k et p_m représentent respectivement les probabilités de présence des particules de diamètre d_i, d_j, d_k et d_m au sein de la matrice solide et r_i, r_j, r_k et r_m correspondent respectivement aux nombres d'occurrences de d_i, d_j, d_k et d_m dans le groupe $(r_i + r_j + r_k + r_m = 4)$. La CSD s'obtient finalement en considérant toutes les combinaisons possibles (d_i, d_j, d_k, d_m) entre tous les diamètres représentatifs.

1.3.2 Approche de Schuler [Schuler, 1996]

Il considère que lorsque la constriction est formée par quatre grains en contact (Fig. IV.5), elle définit en réalité deux passages, de tailles respectives \bar{d}_1 et \bar{d}_2 , pour les particules transportées. Deux configurations sont alors à considérer pour le calcul des tailles de ces passages :

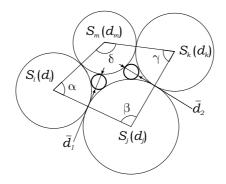


Fig. IV.5 – Constrictions de Schuler pour l'état le plus lâche

- 1. Si la diagonale $[S_jS_m]$ est la plus grande, les tailles des passages correspondent aux diamètres des sphères tangentes aux triplets de particules (S_i, S_k, S_m) et (S_i, S_j, S_k) ,
- 2. Si la diagonale $[S_iS_k]$ est la plus grande, les tailles des passages correspondent aux diamètres des sphères tangentes aux triplets de particules (S_i,S_j,S_m) et (S_j,S_k,S_m) (cas de la figure Fig. IV.5).

La méthodologie de calcul de la taille de constriction est présentée dans l'annexe G. Cette définition de la taille de constrictions doit plutôt conduire à une estimation par défaut de la taille des particules susceptibles de passer dans la constriction étudiée.

1.4 CSD pour une densité relative intermédiaire

Approche de Schuler [Schuler, 1996] Selon Schuler, le changement de densité relative n'engendre qu'une translation de la distribution de tailles de constrictions (au moins en ce qui concerne les matériaux dont la distribution de tailles de particules est linéaire ou convexe). Par conséquent, pour connaître la distribution de tailles de constrictions à une densité relative donnée R_d , il suffit de connaître :

- 1. la distribution de tailles de constrictions pour une densité relative quelconque (par exemple pour l'état le plus lâche du matériau (cf la sous-section 1.3). Cela constitue une référence et permet de connaître la forme de la distribution recherchée,
- 2. un point (et un seul) de la distribution de tailles de constrictions à la densité relative voulue. Cela permet de déterminer la translation à appliquer à la distribution connue entièrement à un autre état de densité.

Pour le positionnement de la distribution de tailles de constrictions (point 2 de l'énumération précédente), SCHULER utilise l'équation (IV.11) qui relie les fractiles d'ordre 70% de la distribution de tailles de constrictions p_{70} et de la distribution en surface de tailles de particules solides o_{70} .

$$p_{70}(R_d) = 0.31 \cdot o_{70} \cdot \exp\left(-0.9R_d^{0.83}\right) \tag{IV.11}$$

Approche de Locke et al. [Locke et al., 2001] Quelle que soit la distribution de tailles de particules utilisée pour obtenir la distribution de tailles de constrictions (masse, surface ou nombre), [Locke et al., 2001] propose l'équation (IV.12) pour calculer D_c , la taille de la constriction correspondant à la fraction P_c pour une densité relative donnée R_d .

$$D_c = D_{cD} + P_c (1 - R_d) (D_{cL} - D_{cD})$$
 (IV.12)

où D_{cL} et D_{cD} sont respectivement les tailles de constrictions dans l'état le plus lâche et dans l'état le plus dense pour la même fraction P_c .

2 Etude comparative des différentes méthodes de calcul de CSD

Le tableau Tab. IV.1 récapitule les grands axes des deux méthodologies de calcul de la CSD qui vont être comparées ci-après : la Méthode Eléments Discrets/Triangulation de Delaunay (MEDTD) et les Méthodes Probabilistes (MP). L'objectif est d'évaluer le niveau de similitudes des CSD obtenues en tenant compte de l'influence de la granulométrie (serrée, étalée ou discontinue) et de l'état de densité du matériau. La mesure de la taille d'une constriction pour la méthode MEDTD est obtenue en considérant les cercles inscrits dans l'espace des vides dans chaque face des tétraèdres de Delaunay.

Tab. IV.1 – Principales étapes des méthodes de calcul de la CSD

	Méthode Eléments Discrets/Triangulation de Delaunay (MEDTD)	Méthodes Probabilistes (MP)
Mise en place d'un échantillon de sol et identification des constrictions	Approche micromécanique : équations du mouvement + Triangulation de Delaunay pour localiser les constrictions	Postulats géométriques
Etat lâche	Lâcher sous gravité avec $\mu = 0.7$	1 constriction = contact mutuel entre 4 particules avec maximisation du vide généré
Etat dense	Densification de l'état lâche par diminution de μ et cycles de compression/extension	1 constriction = contact mutuel entre 3 particules
Calcul de la CSD	Approche statistique	Calcul probabiliste

2.1 Correspondance des méthodes pour les états de densités extrêmes

Les figures Fig. IV.6 (a), (c) et (b), (d) représentent respectivement les CSD obtenues à partir d'une granulométrie serrée et d'une granulométrie étalée. Pour chaque matériau, les deux états de densités extrêmes sont considérés : les états les plus lâches correspondent aux figures Fig. IV.6 (a) et (b), les états les plus denses aux figures Fig. IV.6 (c) et (d). Pour chaque état sont superposées la PSD en masse, la CSD issue de la méthode Eléments Discrets/Triangulation de Delaunay et les trois CSD résultant des méthodes probabilistes (en considérant successivement pour le calcul la PSD en masse, en surface puis en nombre). Si l'on se focalise sur la granulométrie serrée, il ressort des figures Fig. IV.6 (a) et (b) que les CSD issues de la MEDTD ne coïncident avec aucune des CSD calculées par l'approche probabiliste. Dans les deux états de densité extrêmes, la différence majeure concerne l'étendue des tailles de constrictions représentées dans la CSD: elle est constamment plus restreinte avec les MP qu'avec la MEDTD. Dans le cas de l'état le plus dense, la gamme de diamètres ne s'étend que de 0.5mm à 1.8mm avec les MP. Elle s'étend de 0.5mm à 3.4mm avec la MEDTD. Une remarque similaire peut être faite pour le cas de l'état le plus lâche : les diamètres de constrictions vont de 1.35mm à 4.5mm avec les MP; ils s'étalent de 0.5mm à 4mm avec la MEDTD. Globalement, les constrictions sont trouvées plus petites avec les MPs pour l'état le plus dense et plus grandes pour l'état le plus lâche. Si l'on se focalise désormais sur la granulométrie étalée, des remarques similaires au cas de la granulométrie serrée peuvent être formulées mais les différences entre les CSD sont moins prononcées. Cela a pour répercussion que, intégrée dans un modèle de transport, la CSD issue des MP confère au matériau étudié de meilleures (respectivement plus faibles) capacités de rétention que la CSD issue de la MEDTD dans son état le plus dense (respectivement le plus lâche).

La non-coïncidence entre les CSDs des états les plus denses s'explique notamment par la différence structurale entre les arrangements granulaires de la MEDTD et ceux prédéfinis dans les MP. En effet, le postulat géométrique des MP se révèle erroné pour les échantillons de sol mis en place sous gravité par simulation numérique. Dans les états de la MEDTD, les constrictions résultent des faces des cellules de Delaunay dont la forme la plus générale est présentée sur la figure Fig. IV.7. Les particules S_i , S_j et S_k ne sont a priori pas en contact mutuellement et δ_1 , δ_2 et δ_3 désignent respectivement les écarts entre les particules $(S_i$ et $S_k)$, $(S_i$ et $S_j)$ et $(S_j$ et $S_k)$. Soit e_1 (resp. e_2 et e_3) la normalisation de δ_1 (resp. δ_2 et δ_3) par la moyenne des rayons des particules distantes de δ_1 (resp. δ_2 et δ_3).

$$e_1 = 2\frac{\delta_1}{d_i + d_k}$$
 $e_2 = 2\frac{\delta_1}{d_i + d_j}$ $e_3 = 2\frac{\delta_1}{d_j + d_k}$ (IV.13)

Les figures Fig. IV.8 (a). et (b). montrent respectivement l'évolution de e_3 en fonction de e_1 et e_2 pour la granulométrie serrée et la granulométrie étalée. Si le postulat des MP était vérifié, le nuage de points se réduirait pour chacun de ces graphes à un seul point, centré sur l'origine. Les constrictions formées par trois particules en contact mutuel ne sont présentes qu'à 4% dans l'état de la MEDTD le plus dense de la granulométrie serrée et à 7% dans l'état de la MEDTD

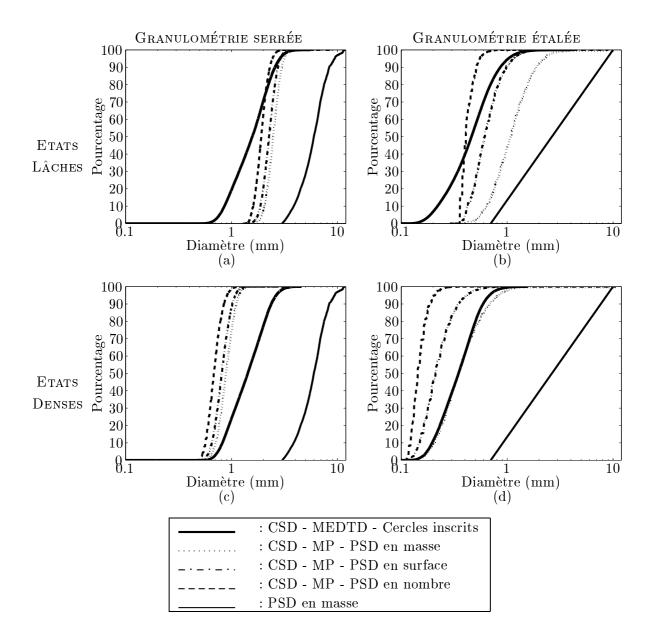


Fig. IV.6 – Superposition de la CSD issue de la méthode Eléments Discrets/Triangulation de Delaunay et des trois CSD résultant des méthodes probabilistes considérant la PSD en masse, la PSD en surface et la PSD en nombre (a) pour l'état lâche et (c) l'état dense de la granulométrie serrée ainsi que pour (b) l'état lâche et (d) l'état dense de la granulométrie étalée.

le plus dense de la granulométrie étalée.

Les MP postulent simplement une géométrie plausible d'empilement dense. Dans la MEDTD, la densification est effectuée à partir de l'état lâche avec des particules dont l'arrangement résulte d'un processus mécanique. Les particules constituent des maillons de différentes chaînes de forces. La structure finale de l'état le plus dense se trouve fortement influencée par cet état lâche initial. L'étude de la microstructure par la triangulation de Delaunay montre que le processus de compaction ici utilisé ne bouleverse pas profondément l'arrangement structural de l'assemblage. C'est plutôt une ré-organisation à courte distance du système qui permet une diminution de la taille des macropores. Dans l'état dense, les contacts originels sont pour la plupart maintenus et la diminution de l'espace des vides a provoqué la création de nouveaux contacts.

L'état le plus dense de la MEDTD n'est pas directement équivalent à l'état le plus dense des MP. La MEDTD aboutit à des constrictions plus grandes que la plus grande des constrictions issues des MP. Par conséquent, dans l'état de la MEDTD, le postulat géométrique des MP n'est pas valide et il existe des constrictions qui résultent de la mise en contact de plus de trois particules solides. De même, dans l'état le plus lâche, la MEDTD conduit à des constrictions plus petites que la plus petite des constrictions des MP ce qui révèle l'existence de constrictions issues de seulement trois particules (et non quatre comme le supposent les MP). En d'autres

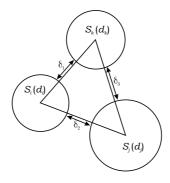


Fig. IV.7 – Face - Constriction état numérique

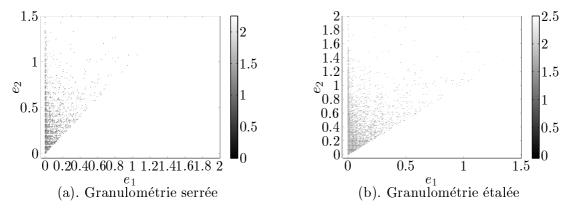


Fig. IV.8 – $e_3 = f(e_1, e_2)(a)$. Granulométrie serrée - (b). Granulométrie étalée

termes, il semble que les deux configurations géométriques extrêmes des MP soient toujours présentes dans les états de la MEDTD, quel que soit l'état de densité considéré. Un état de la MEDTD apparaît comme une moyenne pondérée des deux configurations extrêmes des MP et les coefficients pondérateurs varient selon l'état de densité du matériau.

La présente étude conclut certes sur la non correspondance des deux méthodes (MEDTD et MP) pour les états de densités extrêmes. Néanmoins, il est important de noter que toutes les MP et la MEDTD s'accordent sur la borne inférieure des tailles de constrictions dans le cas le plus dense quel que soit le type de granulométrie étudié. La MP considérant la PSD de surface s'accorde également avec la MEDTD sur la borne supérieure des tailles de constrictions dans le cas le plus lâche (voir Fig. IV.6 (a) et (c)). L'étude d'une granulométrie discontinue dont les PSD en nombre, surface et masse sont représentées sur la figure Fig. IV.9 (a), confirme que la PSD en masse n'est pas la plus appropriée pour mener une analyse des vides et que les résultats les plus prometteurs proviennent de la MP considérant la PSD en surface. La granulométrie discontinue choisie s'étend sur la même gamme de diamètres que la granulométrie étalée, à savoir entre 0.7mm et 10mm. La lacune granulométrique concerne les diamètres compris entre 1.2 et 2.5mm. Ainsi, la présence du palier à 20% en masse modifie fortement la PSD en masse par rapport à celle de la granulométrie étalée. En revanche, la PSD en nombre n'est que moindrement affectée par la présence de cette lacune. Les CSD issues des MEDTD, représentées en gras sur la figure Fig. IV.9 (b), ne retranscrivent pas la discontinuité des PSD. Leur évolution est en effet tout aussi progressive que celle des CSD de la granulométrie étalée. La lacune granulométrique se ressent simplement par une augmentation des tailles de constrictions pour l'état lâche comme pour l'état dense. Ce résultat de la MEDTD est prometteur puisque conforme à l'intuition : certaines constrictions demeurent "ouvertes" dans la mesure où les particules susceptibles de les obstruer sont déficientes.

Intéressons-nous désormais aux CSD issues des MP pour cette granulométrie discontinue. La figure Fig. IV.10 montre des CSD avec des paliers marqués si elles proviennent de la PSD en masse et beaucoup plus discrets si elles proviennent de la PSD en nombre. Par conséquent, les MP répercutent les discontinuités des PSD ce qui ne va pas dans le sens de ce qui est observé par la MEDTD où la particularité de la granulométrie est lissée lors de l'arrangement spatial des particules. La PSD en surface semble ici encore le meilleur compromis à adopter si l'on souhaite retrouver le comportement numérique à partir des MP. D'une part, l'intérêt de la PSD en surface est de constituer un compromis entre la PSD en masse et celle en nombre et donc de rendre compte, tout en les nuançant, les particularismes de l'une et de l'autre. D'autre part, à nouveau seule la MP utilisant la PSD en surface permet de retrouver les bornes d'encadrement (inférieure et supérieure) des tailles de constrictions de la MEDTD.

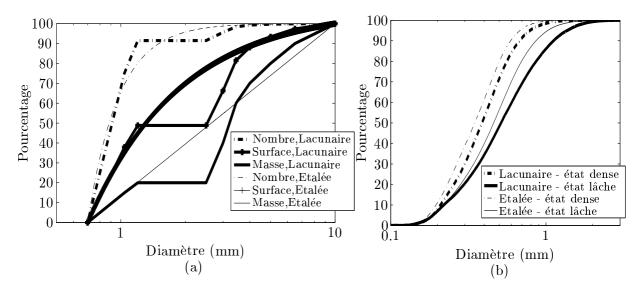


Fig. IV.9 – (a). PSD en masse, en surface et en nombre des granulométries lacunaire et étalée. (b). CSD de ces deux granulométries pour les deux états de densités extrêmes par la MEDTD.

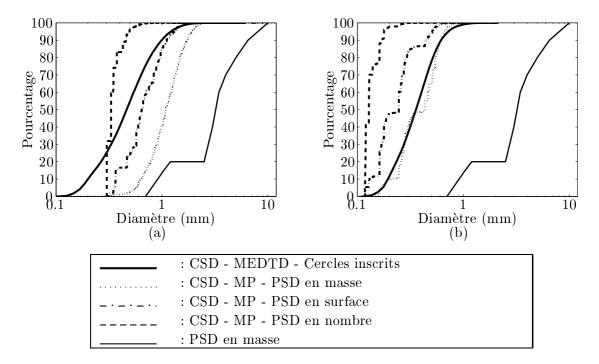


Fig. IV.10 – Superposition de la CSD issue de la méthode Eléments Discrets/Triangulation de Delaunay et des trois CSD résultant des méthodes probabilistes considérant la PSD en masse, la PSD en surface et la PSD en nombre (a) pour l'état lâche et (b) l'état dense de la granulométrie discontinue.

2.2 Correspondance des états lâches avec la formule de Locke et al.

Revenons sur la formule (IV.12) proposée par LOCKE et al. [Locke et al., 2001] pour connaître la CSD à une densité relative quelconque R_d .

$$D_c = D_{cD} + P_c (1 - R_d) (D_{cL} - D_{cD})$$

Dans le cas le plus dense, pour lequel $R_d=100\%$, cette formule donne $\forall P_c, D_c=D_{cD}$. En d'autres termes, la CSD proposée est issue directement de la configuration appelée "dense" des MP. Cependant, dans le cas le plus lâche, pour lequel $R_d=0\%$, Locke et al. proposent :

$$D_{c} = D_{cD} + P_{c} (D_{cL} - D_{cD})$$

$$D_{c} = (1 - P_{c}) D_{cD} + P_{c} D_{cL}$$

$$D_{c} = \text{Barycentre} \{ (D_{cD}, 1 - P_{c}), (D_{cL}, P_{c}) \}$$
(IV.14)

On ne retrouve pas la CSD directement issue des MP en utilisant la configuration appelée "lâche". A P_c fixée, la taille de constriction recherchée résulte ici d'une combinaison des tailles aux états de densités extrêmes. Les pondérations sont choisies telles que :

- Si P_c est faible, l'état le plus influent est l'état dense des MP.
- Si P_c est proche de 1, l'état le plus influent est l'état lâche des MP.

Pour éviter toute confusion, nous emploierons désormais la notation D_3 pour faire référence au diamètre de la constriction issue de 3 particules simultanément tangentes et D_4 pour désigner le diamètre de la constriction résultant de 4 particules en contact mutuel. Les notations D_{cL} et D_{cD} seront réservées aux états physiques (et non géométriques) respectivement le plus lâche et le plus dense.

Par rapport aux méthodes MP premières pour l'état lâche ([Silveira et al., 1975], [Schuler, 1996]), cette approche présente l'avantage de proposer des CSD sur des gammes de diamètres similaires aux MEDTD.

Les figures Fig. IV.11 (a), (c) et (e) superposent les CSD issues des MEDTD (cercles inscrits et aires de vide) dans le cas lâche, les CSD des états de densités extrêmes issues de la MP avec la PSD de surface et la CSD résultant de la formule de Locke et al. dans le cas lâche pour les matériaux de granulométries respectivement serrée, étalée et discontinue. Pour chaque granulométrie est également quantifiée l'erreur faite en estimant la CSD de la MEDTD (cercles inscrits) par la CSD issue de la formule de Locke et al.. La correspondance entre la CSD issue de la formule de Locke et al. et la CSD des tailles de cercles inscrits de la MEDTD (courbes en gras sur les figures Fig. IV.11 (a), (c) et (e)) est ici globalement satisfaisante. En effet, approximer la CSD de la MEDTD par la formule de Locke et al. revient à commettre en moyenne une erreur de 11% à 16% selon la granulométrie considérée (Fig. IV.11 (b), (d) et (f)). C'est dans la gamme des petites tailles de constriction que cette corrélation trouve ses limites : la formule de Locke et al. tend à y surestimer les probabilités de présence par rapport à la MEDTD. Cet

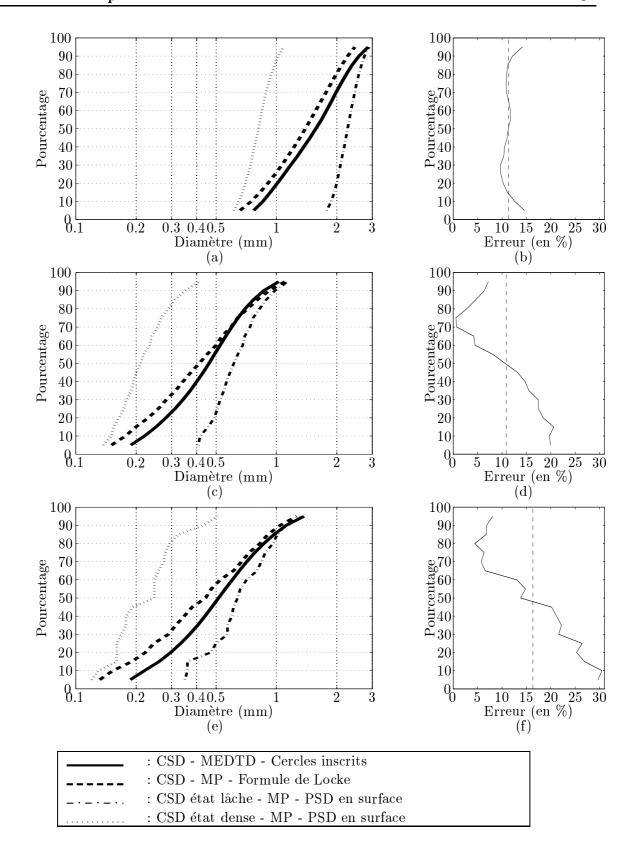


Fig. IV.11 – Superposition des CSD (tracés en échelle logarithmique) et estimation de l'erreur commise lors de l'approximation de la CSD de la MEDTD par la formule de Locke (a) et (b).Granulométrie serrée, (c) et (d). Granulométrie étalée, (e) et (f). Granulométrie discontinue.

écart est peut-être attribuable à la forme des particules. Les présents résultats concernent des assemblages de sphères tandis que la corrélation d'Indraratna et al. a été établie à partir de matériaux réels dont les grains peuvent être de forme quelconque. On considèrera par la suite que la formule de Locke et al. modifiée de manière à compenser l'erreur moyenne de 11% permet une approximation satisfaisante de la CSD de la MEDTD dans le cas le plus lâche. La taille de constriction D_{cL} associée à P_c qui permet d'approcher au mieux par les MP le fractile d'ordre P_c de l'état le plus lâche de la MEDTD s'exprime :

$$D_{cL} = 1.11 (D_3 + P_c (D_4 - D_3))$$
 (IV.15)

3 Nouveau modèle probabiliste à 1 paramètre pour les granulométries serrée et linéaire

L'objectif est ici de proposer un nouveau modèle basé sur la MP et mieux à même de rendre compte des résultats obtenus par la MEDTD. Dans la mesure où la formule de LOCKE et al. permet de mettre en concordance ces deux méthodes pour l'état le plus lâche, on se propose de prendre cet état comme état de référence pour chercher la corrélation à densité relative donnée.

L'évolution des CSD des états de la MEDTD lors d'une densification est schématisée sur la figure Fig. IV.12.

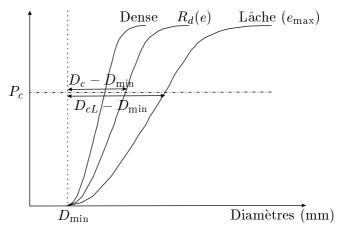


Fig. IV.12 – Schéma d'évolution des CSD des états numériques lors d'une densification.

Deux spécificités sont à souligner :

1. La taille minimale de constrictions apparaît comme un point invariant par le changement de densité relative. De plus, cette taille minimale, notée D_{\min} , correspond à la taille de la constriction résultant d'un contact mutuel entre trois des plus petites particules du matériau.

2. Pour P_c non nul fixé, la taille de constrictions diminue au fur et à mesure de la densification.

Pour retranscrire mathématiquement ces quelques remarques, nous proposons la formule analytique (IV.16) pour rendre compte de l'évolution de la CSD lors d'une densification.

$$D_c - D_{\min} = \frac{e}{e_{\max}} \left(D_{cL} - D_{\min} \right) \tag{IV.16}$$

La formule (IV.16) est équivalente à la relation (IV.17).

$$D_{cL} - D_c = \frac{e_{\text{max}} - e}{e_{\text{max}}} (D_{cL} - D_{\text{min}})$$
 (IV.17)

où D_c est la taille de constriction correspondant à la fraction P_c pour un matériau dont l'indice des vides vaut e. D_{cL} est la taille de constriction correspondant à P_c pour ce même matériau dans son état le plus lâche. L'indice des vides est alors maximal et vaut e_{max} . D_{min} est la plus petite taille de constriction possible et résulte du contact mutuel de trois des plus petites particules de l'assemblage granulaire. Par la relation (IV.16), le diamètre $D_c(P_c)$ de la CSD d'un matériau caractérisé par un indice des vides e est l'homothétie du diamètre $D_{cL}(P_c)$ de la CSD du même matériau dans son état le plus lâche par une homothétie de centre D_{\min} et de rapport $\frac{e}{e_{\max}}$. Si l'on souhaite une dépendance explicite en fonction de la densité relative R_d alors la formule (IV.18) est équivalente à la relation (IV.16).

$$D_c - D_{\min} = \left(1 - \left(\frac{e_{\max} - e_{\min}}{e_{\max}}\right) R_d\right) (D_{cL} - D_{\min})$$
 (IV.18)

où le coefficient $\left(\frac{e_{\max}-e_{\min}}{e_{\max}}\right)$ représente le rapport entre le volume de vide maximal pouvant disparaître entre les états de densité extrêmes et le volume de vide maximum pour le matériau considéré.

Les figures Fig. IV.13 (a) et (b) superposent les CSD issues de la MEDTD (référencées dans les légendes "CSD MEDTD") et les CSD obtenues suite à l'application de la formule proposée (référencées "CSD proposées") pour les granulométries respectivement serrée et étalée. Dans chacun des cas, les erreurs minimale, moyenne et maximale, commises en utilisant la formule proposée, sont quantifiées pour tous les états de densité relative non nulle. L'erreur relative moyenne commise sur le calcul du diamètre n'atteint pas 2% pour la granulométrie serrée et reste inférieure à 5% pour la granulométrie étalée. Par conséquent, les coefficients numériques que nous avons proposés dans la formule (IV.16) pour quantifier la translation donnent des résultats satisfaisants dans le cadre de granulométries continues.

Cependant, ce modèle est moins précis dans le cas du matériau de granulométrie discontinue. La figure Fig. IV.14 superpose les CSD obtenues par la MEDTD et celles calculées par la formule (IV.16). S'il apparaît sur cette figure que l'approximation est acceptable pour les grandes

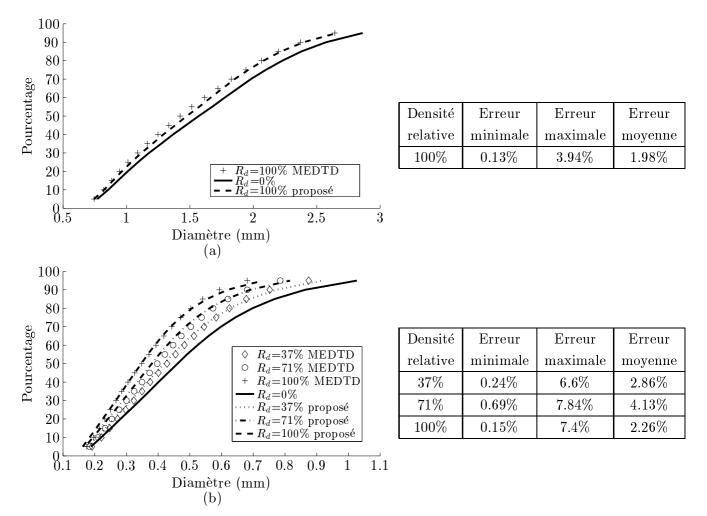


Fig. IV.13 – Superposition des CSD obtenues par la MEDTD et avec la formule proposée à un paramètre. Quantification des erreurs commises sur le diamètre pour une probabilité donnée. (a).Granulométrie serrée, (b). Granulométrie étalée.

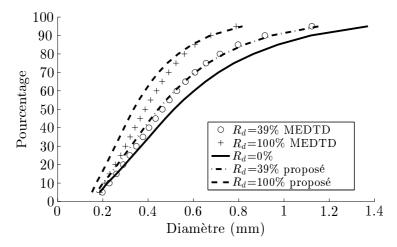


Fig. IV.14 – Superposition des CSD obtenues par la MEDTD et avec la formule proposée à 1 paramètre pour la granulométrie présentant une lacune granulométrique.

valeurs de P_c , il existe en revanche un certain écart entre les CSD proposées et mesurées à faibles valeurs de P_c . Cet écart se révèle d'autant plus important que P_c (ou le diamètre de constriction considéré) est petit ou que le matériau se trouve dans un état dense (on rappelle que l'état lâche est pris comme référence dans notre nouveau modèle).

Suite au phénomène de ségrégation mis en évidence au chapitre III, la densification affecte moins les constrictions de faibles diamètres. Le modèle à 1 paramètre numérique n'est pas suffisant pour témoigner des effets différents de la densification selon les valeurs de P_c .

4 Nouveau modèle probabiliste à 2 paramètres

Le modèle le plus simple pour rendre compte d'une dépendance selon P_c consiste à introduire une fonction affine en P_c dans la relation (IV.17). Le nouveau modèle probabiliste à 2 paramètres correspond alors à l'expression analytique :

$$D_{cL} - D_c = \frac{e_{\text{max}} - e}{e_{\text{max}}} (A.P_c + B) (D_{cL} - D_{\text{min}})$$
 (IV.19)

où A et B sont deux coefficients numériques à déterminer. Cette formulation est équivalente à l'équation (IV.20) si l'on souhaite faire apparaître explicitement la dépendance en R_d .

$$D_c - D_{\min} = \left(1 - \left(\frac{e_{\max} - e_{\min}}{e_{\max}}\right) (A.P_c + B) R_d\right) (D_{cL} - D_{\min})$$
 (IV.20)

La méthode des moindres carrés nous permet de déterminer les valeurs de A et B pour lesquelles la formule proposée approche au mieux les CSD de la MEDTD, pour l'ensemble des états de densité étudiés d'une granulométrie donnée. Les valeurs optimales de A et B obtenues

à l'issue de cette procédure sont :

$$\begin{cases} A_{opt} = -0.71 & B_{opt} = 1.76 \text{ pour la granulométrie serrée,} \\ A_{opt} = 0.52 & B_{opt} = 0.63 \text{ pour la granulométrie linéaire,} \\ A_{opt} = 0.81 & B_{opt} = 0.30 \text{ pour la granulométrie discontinue.} \end{cases}$$
(IV.21)

Il est tout d'abord intéressant de noter que la somme $A_{opt} + B_{opt}$ est relativement constante et vaut environ 1.1 pour toutes les granulométries. Dès lors, il ne nous manque plus qu'une seule relation pour déterminer A et B.

Dans le cas particulier des trois granulométries étudiées, il a été mis en évidence au chapitre III qu'il existait une relation entre les fractiles d'ordre 0.47 des distributions de tailles de constrictions et de tailles de particules solides en surface : $d_{47,constriction} \approx 0.26 d_{47,solide}$. En reportant cette relation dans la formulation (IV.19) du modèle à deux paramètres, il vient une deuxième relation (éq. (IV.22)) entre les coefficients A et B qui sont donc dorénavant déterminés.

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.47R_d \frac{e_{\text{max}} - e_{\text{min}}}{e_{\text{max}}} & R_d \frac{e_{\text{max}} - e_{\text{min}}}{e_{\text{max}}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1.1 \\ D_{cL} - 0.26d_{47,solide} \\ D_{cL} - D_{\text{min}} \end{pmatrix}$$
(IV.22)

La figure Fig. IV.15 superpose les CSD issues de la MEDTD et les CSD obtenues suite à l'application de cette formule à 2 paramètres pour les granulométries serrée, étalée et discontinue, pour tous les états de densité étudiés. Pour les granulométries serrée et étalée où, à faibles P_c , l'écart $D_{cL} - D_{\min}$ est faible, l'intégration du second paramètre n'apporte pas de modification sensible par rapport au modèle à 1 paramètre. Les figures Fig. IV.15 (a) et (b) mettent en évidence que l'on conserve une corrélation satisfaisante entre les CSD de la MEDTD et les CSD calculées par la formule à 2 paramètres pour les granulométries continues.

Tout en permettant de conserver des résultats satisfaisants sur les granulométries continues, la prise en compte d'une évolution affine en P_c apporte une nette amélioration des calculs de CSD dans le cas de la granulométrie discontinue. Avec ce modèle à deux paramètres, l'erreur moyenne la plus forte est obtenue dans le cas de l'état le plus dense et vaut 2.6%. A faibles P_c , l'erreur commise peut atteindre 8% mais cela reste acceptable et nettement inférieur à l'erreur commise avec les MP originelles.

La formule proposée permet donc une amélioration significative de la prédiction des CSD connaissant la granulométrie du matériau et la valeur de $e_{\rm max}$ (qui est une caractéristique traditionnellement recherchée et obtenue pour un matériau). Le nouveau modèle s'appuie sur certains préceptes issus des MP.

5 Conclusion

Les méthodes destinées à prédire la CSD uniquement à partir de la PSD se présentent toutes comme des méthodes "géométrico-probabilistes" où l'approche probabiliste ne peut être

IV.5 Conclusion 87

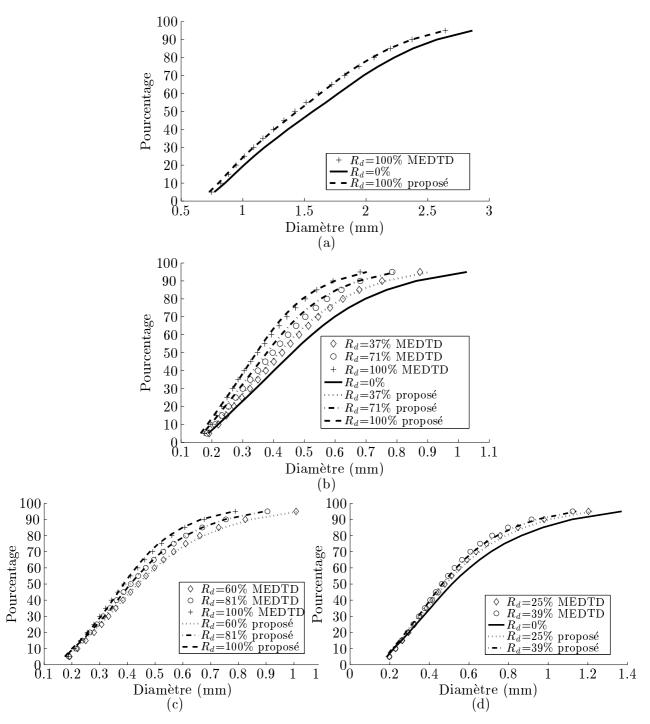


Fig. IV.15 – Superposition des CSD obtenues par la MEDTD et avec la formule proposée à 2 paramètres. (a).Granulométrie serrée, (b). Granulométrie étalée, (c) Etats plutôt denses de la granulométrie discontinue et (d) Etats plutôt lâches de la granulométrie discontinue.

menée qu'après avoir postulé un positionnement relatif des particules entre elles. La synthèse bibliographique de ce chapitre montre que ces méthodes permettent de déterminer la CSD d'un matériau pour tous ses états de densité, du plus lâche au plus dense.

Ces méthodes probabilistes présentent l'avantage d'être rapides et conceptuellement simples. Mais les illustrations de cette étude soulignent qu'une utilisation directe de ces méthodes conduit à des résultats peu pertinents si les CSD issues de la MEDTD sont prises comme référence. Une adéquation est possible sur l'état le plus lâche mais l'état le plus dense qui résulte de considérations purement géométriques ne correspond pas à l'état le plus dense obtenu par un procédé mécanique de densification.

Nous proposons une méthodologie permettant d'étendre le champ d'application des MP, notre volonté étant de prédire la CSD d'un matériau connaissant sa PSD et l'étendue d'indices des vides, *physiquement* atteignable, avec ce matériau. Cette méthodologie comprend 3 étapes.

- 1. La détermination de la CSD doit s'effectuer à partir de la PSD en surface puisque dans le cadre des illustrations de ce chapitre, l'utilisation de la PSD en surface conduit à des résultats quantitativement plus justes quel que soit le type de granulométrie et quel que soit l'état de densité étudié.
- 2. La CSD de l'état le plus lâche ne s'obtient pas par application directe des MP dans le cas lâche mais résulte de la formule proposée par LOCKE et al..
- 3. Deux modèles sont proposés pour changer de densité relative, l'état lâche déterminé précédemment étant pris comme état de référence. Un modèle à 1 paramètre donne des résultats satisfaisants sur les granulométries continues étudiées mais trouve ses limites dans le cas de la granulométrie discontinue tandis que le modèle à deux paramètres est valide pour les trois granulométries.

Les corrélations utilisées pour mettre en place le modèle à deux paramètres devraient être confirmées sur un plus grand nombre de granulométries pour pouvoir être généralisables. Néanmoins, il est à retenir que la méthodologie mise en place ici est prometteuse puisqu'elle aboutit à une description appropriée et rapide des distributions de tailles de constrictions pour les trois granulométries typiques étudiées.

Bibliographie

- [Humes, 1996] Humes, C. (1996). A new approach to compute the void size distribution curves of protective filters. Dans *Geofilters'96*, pages 57–66, Montreal, Canada. Lafleur and Rollin, Bitech Publications.
- [Kemeny et al., 1959] Kemeny, J., Mirkil, H., Snell, J., et Thompson, G. (1959). Finite mathematical structures. Prentice-Hall.
- [Kenney et al., 1985] Kenney, T., Chahal, R., Chiu, E., Ofoegbu, G., Omange, G., et Ume, C. (1985). Controlling constriction sizes of granular filters. Canadian geotechnical journal, 22:32–43.
- [Locke et al., 2001] Locke, M., Indraratna, B., et Adikari, G. (2001). Time-dependent particle transport through granular filters. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 127:521–528.
- [Schuler, 1996] Schuler, U. (1996). Scattering of the composition of soils an aspect for the stability of granular filters. Dans *Geofilters'96*, pages 21–34, Montreal, Canada. Lafleur and Rollin, Bitech Publications.
- [Schulze, 1993] Schulze, B. (1993). Neuere untersuchungen uber die injizierbarkeit von feinstbindemittel-suspensionen. Dans *Proc. Grouting in Rock and Concrete*, pages 107–116, A.A. Balkema, Rotterdam.
- [Silveira, 1965] Silveira, A. (1965). An analysis of the problem of washing through in protective filters. Dans *Proceedings of the sixth international conference on soil mechanics and foundation engineering*, volume 2, pages 551–555, Montreal, Canada.
- [Silveira et al., 1975] Silveira, A., de Lorena Peixoto Jr., T., et Nogueira, J. (1975). On void-size distribution of granular materials. Dans *Proceedings of the fifth panamerican conference on soil mechanics and foundation engineering*, volume 3, pages 161–176, Buenos Aires, Argentina.

Chapitre V

Modèle géométrique pour caractériser le transport

Introduction

En préambule de cette étude, nous avons considéré que la microstructure des vides permettait de comprendre certaines bases du mécanisme de migration des particules au sein d'un sol. Les précédents chapitres ont proposé une analyse détaillée de l'espace interstitiel d'un milieu granulaire. Se pose dorénavant une question centrale à laquelle nous allons tenter de répondre dans le présent chapitre : étant donnés un sol et les résultats de l'analyse de sa microstructure porale, qu'est-il possible de conclure sur les possibilités de déplacement de particules au sein de ce matériau?

Dans ce chapitre, nous nous attacherons à comprendre le mouvement au sein du matériau d'une particule de taille donnée, depuis son point d'entrée dans le milieu jusqu'à son point d'arrêt, s'il existe. Notre cadre d'étude et nos objectifs sont expliqués plus précisément dans la première partie de ce chapitre.

Sous l'hypothèse d'exclusion de taille selon laquelle, on le rappelle, la capture d'une particule est consécutive à sa rencontre avec une constriction de plus petite taille qu'elle, il semble que la structure géométrique du milieu granulaire soit primordiale pour expliquer les phénomènes de transport. C'est pourquoi nous avons choisi de construire un modèle de transport se basant exclusivement sur des données géométriques. La présentation de ce modèle fait l'objet de la deuxième partie de ce chapitre.

Par la suite, ce modèle est utilisé afin de prédire la distance qu'une particule de taille donnée peut parcourir au sein d'un milieu granulaire et comprendre les raisons de sa capture si cette particule se trouve interceptée lors de son parcours.

Sommaire

2	\mathbf{Rep}	résentati	ion du milieu par un réseau à mailles rectangulaires 94
3	Prof	ondeur (de pénétration d'une particule de taille donnée 97
	3.1	Méthodo	ologie de calcul
	3.2	Applicat	ion sur les granulométries serrée, étalée et discontinue 100
		3.2.1	Distances verticales maximales parcourues 100
		3.2.2	Influence du pas du réseau sur les longueurs des chemins de
			filtration
		3.2.3	Influence de la densité relative
		3.2.4	Comparaison avec les critères de dimensionnement existants $$. 104
	3.3	Validation	on par des simulations numériques discrètes
4	Com	préhens	ion des mécanismes de capture
	4.1	La captu	are par interception de la particule dans un chemin sans issue . 107
	4.2	La captu	re par sédimentation de la particule sur les parois d'un chemin 110
5	Limi	ites du n	nodèle géométrique de transport
6	Cond	clusion	
Bib	liograp	phie	

1 Cadre de l'étude

Du point de vue du transport de particules, l'espace poral d'un milieu granulaire se présente comme pouvant générer une multitude de chemins que les particules peuvent emprunter pour se déplacer au sein du milieu. Ces chemins sont communément appelés "chemins de filtration". Une particule de taille donnée, injectée dans un tel milieu, peut être stoppée dans un certain chemin de filtration mais peut aussi traverser intégralement le milieu en empruntant un autre chemin. Une particule injectée dans un milieu granulaire peut donc, selon sa taille, présenter trois comportements différents.

- 1. La particule traverse l'échantillon de part en part (Cas (a) de la figure Fig. V.1). Il existe donc un diamètre d_p tel que si $d \leq d_p$ alors la particule de taille d parcourt la totalité de l'échantillon, quel que soit le chemin emprunté.
- 2. La particule pénètre dans l'échantillon mais est interceptée par le milieu granulaire (Cas (b) de la figure Fig. V.1). La projection selon la verticale de la distance parcourue par la particule injectée est alors strictement inférieure à la hauteur de l'échantillon.
- 3. La particule ne parvient pas à pénétrer au sein de l'échantillon. Il existe donc un diamètre d_r tel que si $d \geq d_r$ alors la particule de taille d ne pénètre pas dans l'échantillon (Cas (c) de la figure Fig. V.1).

L'analyse des vides, plus spécifiquement la caractérisation topologique décrite au chapitre III, permet une première estimation des diamètres d_r et d_p .

V.1 Cadre de l'étude

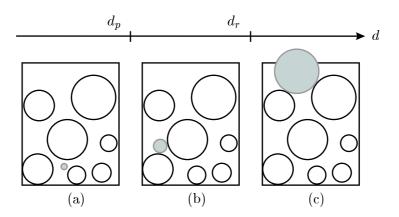


Fig. V.1 – Différents comportements possibles pour une particule de taille d, ici grisée, injectée dans un milieu granulaire. (a) Percolation, (b) Interception, (c) Rétention parfaite.

Si l'on se réfère à la distribution de tailles de constrictions, une particule plus petite que la plus petite constriction de l'espace poral peut nécessairement emprunter tous les chemins de filtration et percoler à travers le milieu. De même, une particule plus grande que la plus grande constriction ne trouve aucun accès possible pour s'infiltrer dans le milieu. Ainsi, les diamètres minimal et maximal de la distribution de tailles de constrictions permettent respectivement d'évaluer d_p et d_r . Si l'on se réfère à la fonction de connectivité, déterminer le seuil de percolation revient à trouver la taille d_p telle que tous les pores de taille supérieure ou égale à d_p sont connectés et ne forment qu'une seule entité. Suite à des mesures en porosimétrie à intrusion de mercure, Wu et al. [Wu et al., 2006] mettent en évidence que le seuil de percolation est atteint dans la gamme de tailles de pores pour laquelle la caractéristique d'Euler χ quitte sa valeur minimale pour augmenter rapidement (Fig. III.8 du chapitre III). Pour le seuil de rétention, il suffit de considérer pour d_r , la plus petite taille de pore correspondant à χ =0. Compte-tenu du faible nombre de connexions entre les pores de tailles au moins égale à d_r , la probabilité qu'une particule de taille supérieure à d_r puisse s'insérer dans le matériau est très faible et peut être considérée comme nulle.

Pour les trois granulométries considérées dans ce manuscrit, l'application de ces critères conduit aux valeurs mentionnées dans le tableau Tab. V.1. Que l'on se réfère à la distribution de tailles de constrictions ou à la fonction de connectivité, les estimations de d_p concordent mais pour la détermination de d_r , l'approche par la fonction de connectivité est plus restrictive que celle par la distribution de tailles de constrictions. Ceci provient du fait que les pores et constrictions de plus grande taille ne sont pas connectés les uns aux autres.

Définir ces diamètres extrêmes par l'une ou l'autre de ces méthodes revient en réalité à sous-évaluer d_p et à surévaluer d_r . Une particule de taille donnée d restera assurément bloquée dans l'échantillon si sur *chaque* chemin de filtration potentiel, il existe une constriction de taille inférieure ou égale à d. Pour une taille de particule d_c telle que $\chi(d_c)=\chi_{\min}$, il est certain

0.5

0.1

0.1

0.1

0.1

2.1

1.2

0.5

1.4

0.6

0.5

0.1

0.1

0.1

0.1

2.5

1.9

1.0

2.3

1.1

 $(d_{50} = 6 \mathrm{mm})$ Granulométrie étalée

 $(d_{50} = 2.7 \text{mm})$

Granulométrie lacunaire

 $(d_{50} = 3.2 \text{mm})$

onct	sion de connectivité pour l	es granulométries serrée, ét	alée et l	acunaire	١.	
			d_p (1	mm)	d_r (1	mm)
			$R_d=1$	$R_d = 0$	$R_d=1$	$R_d=0$
	Granulométrie serrée	Tailles de constrictions	0.5	0.5	3.7	4.2

Fonction de connectivité

Tailles de constrictions

Fonction de connectivité

Tailles de constrictions

Fonction de connectivité

Tab. V.1 – Estimation de d_p et d_r à l'aide de la distribution de tailles de constrictions et de la

que quelles que soient les forces appliquées sur la particule, celle-ci trouvera un chemin lui permettant de traverser intégralement le matériau. Cependant, pour les tailles légèrement supérieures à d_c , la perte de connectivité peut résulter d'une perte de connexions qui ne sont pas sollicitées dans le mode de transport considéré - par exemple, les connexions transverses sont de moindre importance lors d'un lâcher sous gravité. Il reste alors, pour les particules de tailles supérieures à d_c , des chemins de filtration qui leur sont accessibles et qui traversent le matériau de part en part. En conséquence, d_p est probablement supérieur à $d|_{\chi=\chi_{\min}}$

Par ailleurs, la porosité constituée des pores de grande taille risque d'être une porosité isolée au sein de l'échantillon et donc non disponible pour le transport. Le critère de rétention absolue sera alors dans la pratique vérifié pour des diamètres inférieurs à celui correspondant au début du palier $\chi=0$.

Ce chapitre est consacré au raffinement des estimations de d_p et d_r en s'intéressant aux chemins de filtration et en localisant sur ces chemins, si elle existe, la première constriction de taille inférieure ou égale à d. L'objectif est ici de déterminer la profondeur de pénétration dans le milieu granulaire d'une particule de taille donnée. Nous proposons pour cela d'utiliser un modèle simple de représentation du milieu granulaire s'appuyant sur un pavage de l'espace à base d'éléments parallélépipédiques rectangles.

2 Représentation du milieu par un réseau à mailles rectangulaires

Le transport de particules est un problème mécanique dans lequel les particules injectées sont soumises à des champs de contraintes particuliers (ici, seul le champ gravitaire sera considéré) et sont susceptibles d'interagir avec le milieu granulaire. Des rebonds peuvent en effet dévier la particule injectée de sa direction de transport privilégiée. Une approche intéressante pour rendre compte de la migration des particules injectées est de modéliser le milieu granulaire par un réseau de points et d'identifier les chemins potentiels de migration comme des successions de points particuliers. En raisonnant ainsi, on considère que la structure géométrique de l'assemblage granulaire conditionne entièrement les possibilités de déplacement d'une particule. Cette hypothèse rejoint celle d'un mode de capture des particules par exclusion de taille.

Le milieu poreux dans son ensemble - vides et particules solides - est ici représenté comme un tableau tridimensionnel de points régulièrement espacés. A chacun des points est affectée une propriété physique (notée δ) qui est la distance de ce point à la particule solide la plus proche (Fig. V.2). δ est donc nulle pour tous les points situés à l'intérieur d'une particule solide formant la matrice granulaire.

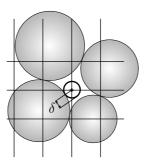


Fig. V.2 – Exemple bidimensionnel d'un maillage. δ correspond à la distance du point à la particule solide la plus proche.

Cette modélisation a tout d'abord pour intérêt de fournir une information qualitative sur l'agencement des espaces interstitiels au sein de l'échantillon. Le rendu sous forme d'images (Fig. V.3) permet d'une part d'apprécier toute la complexité de la structure géométrique des vides. D'autre part, la distance à la particule la plus proche, calculée en chaque nœud de la grille, correspond au rayon de la plus grosse particule sphérique dont le centre peut coïncider avec le nœud considéré. En se focalisant uniquement sur les points du maillage affectés d'une distance supérieure ou égale à une taille donnée R, il est alors possible de visualiser le domaine de vide accessible au centre d'une particule de rayon R. La visualisation de ces points particuliers permet d'estimer la connectivité des pores de taille R au sens où cela permet de préjuger de l'existence ou non d'un chemin vide continu de taille au moins égale à R au sein de l'échantillon. En comptabilisant le nombre de ces points, il est possible de quantifier la fraction de porosité $\alpha(R)$ accessible à une particule de rayon R.

$$\alpha(R) = \frac{n(R)}{n} = \frac{\text{Nombre de points où } \delta \ge R}{\text{Nombre total de points localisés dans l'espace des vides}}$$
 (V.1)

où n(R) est la porosité accessible à une particule de rayon R et n, la porosité dans le volume

d'étude de l'échantillon considéré.

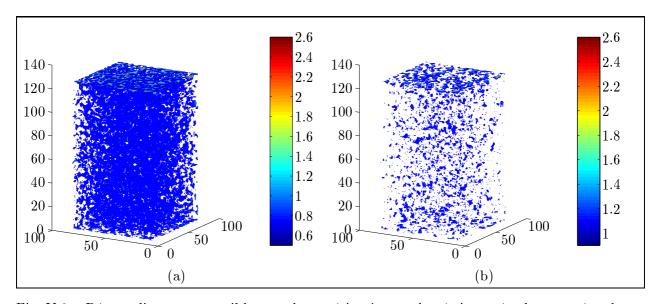


Fig. V.3 – Réseau d'espace accessible pour le matériau à granulométrie serrée, dans son état le plus dense. Sur la figure (a) apparaissent tous les points du milieu poreux associés à des valeurs de δ supérieures à 500μ m tandis que sur la figure (b) ne sont conservés que ceux où δ excède 900μ m. Les axes symbolisant le repère de l'échantillon ainsi que l'échelle de couleur associée à la valeur de δ sont gradués en millimètres.

Les figures Fig. V.3 (a) et (b) présentent respectivement les domaines de vide associés à des tailles supérieures à 500μ m et 900μ m pour le matériau à granulométrie serrée dans son état le plus dense. Tandis que sur la figure Fig. V.3 (a) se dessine un véritable réseau de vide, la représentation graphique Fig. V.3 (b) ne montre plus qu'une faible proportion de pores, disséminés dans le milieu. Un parallèle peut ici être fait avec la notion de fonction de connectivité présentée au chapitre III. La figure Fig. V.3 (a) présente un réseau de connexions associé à une valeur $\chi_V(R=0.5 \mathrm{mm})=53\% \mathrm{min}(\chi_V)$ et la figure Fig. V.3 (b), un réseau pour lequel $\chi_V(R=0.9 \mathrm{mm})\approx 0$.

La représentation de $\alpha(R)$, proposée sur la figure Fig. V.4, confirme que la portion d'échantillon accessible à des particules de grande dimension est quasi nulle et montre l'existence d'un rayon (approximativement 0.3mm sur le cas de la figure Fig. V.4) à partir duquel une faible diminution de rayon s'accompagne d'une augmentation significative de la porosité accessible. Schématiquement, l'évolution de $\alpha(R)$ se décompose en trois phases : il existe deux zones de décroissance linéaire correspondant aux rayons extrêmes et une zone centrale caractérisée par une courbure maximale. La figure Fig. V.5 superpose les courbes d'évolution de $\alpha(R)$ et de la fonction de connectivité adimensionnée et renversée. Les tendances linéaires de $\alpha(R)$ sont symbolisées par des flèches. Il est intéressant de noter que la zone centrale de courbure maximale de $\alpha(R)$ coïncide avec la zone de perte de connectivité. Pour R très petit, $\alpha(R)$ indique que toute la

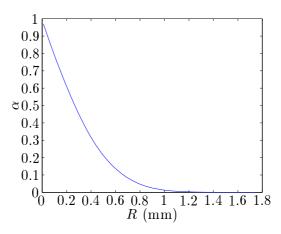


Fig. V.4 – Evolution de α , fraction de porosité accessible à une particule de rayon R pour le matériau à granulométrie serrée, dans son état le plus dense.

porosité macroscopique est accessible. Ainsi, pour une petite particule, la migration est très facile au travers du matériau considéré. Une telle particule va trouver des chemins de filtration très larges relativement à son taille. Une particule de plus grand rayon, mais qui appartient toujours à la première zone de décroissance linéaire de $\alpha(R)$, a encore accès à tous les conduits au sein du matériau mais ceux-ci lui semblent plus étroits comparativement à sa taille. La décroissance linéaire illustre que le centre d'une particule de rayon R se trouve au moins à une distance R de l'interface solide. A mesure que R augmente, la zone directement à proximité de l'interface solide tend à se réduire pour ne plus être accessible. La linéarité de la décroissance provient du fait que la perte d'espace vide est uniforme sur l'intégralité de l'interface solide. Il ne s'agit pas là d'une perte de chemin à proprement parler. En revanche, la perte de linéarité dans la zone centrale indique que dans cette gamme de rayons, la perte de porosité accessible n'est plus homogène sur la totalité des parois solides et souligne que certains chemins à travers l'espace poral ne sont effectivement plus empruntables. Ainsi, la sortie de la première zone linéaire souligne un changement de comportement du matériau étudié (matrice solide immobile) qui commence à assurer une fonction de rétention : une particule de rayon R n'a dorénavant plus accès à tous les conduits et peut se trouver capturée au sein du matériau. La capacité de rétention augmente à mesure que R augmente jusqu'à devenir totale lorsque $\alpha(R) = 0$. $\alpha(R)$ permet donc d'appréhender la gamme de rayons par rapport auxquels le matériau a des propriétés de rétention.

3 Profondeur de pénétration d'une particule de taille donnée

Il a été souligné en introduction de ce manuscrit que la distance que peut parcourir une particule injectée au sein d'un matériau est un paramètre essentiel pour la compréhension des mécanismes de filtration. Aussi avons-nous cherché à utiliser la précédente représentation géométrique du milieu granulaire pour déterminer ce paramètre.

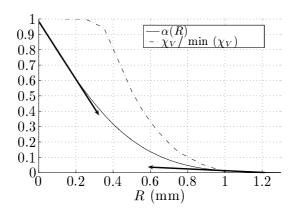


Fig. V.5 – Fonction de connectivité adimensionnée et $\alpha(R)$ pour l'échantillon le plus dense de la granulométrie serrée.

Lorsque le milieu est représenté par la grille régulière à mailles rectangulaires, un chemin de filtration n'est autre qu'un ensemble de nœuds connectés les uns aux autres. Un nœud pour lequel $2\delta \leq d$ est un site que peut potentiellement occuper une particule de taille d. Lors d'une réelle expérience de lâcher de particules, le trajet de chaque particule résulte de considérations mécaniques. Dans notre modèle géométrique, il n'y a pas de résolution d'équation mécanique mais on propose de rendre compte des sollicitations appliquées aux particules dans la manière d'associer les nœuds entre eux. Le mécanisme de transport des particules est introduit dans ce modèle en corrélant la création de ces liens entre nœuds avec la direction du champ gravitaire. Cette direction sera la direction de transport privilégiée. Dans cette étude, nous appellerons "profondeur de pénétration", la longueur de la projection, selon la direction de transport privilégiée (celle de la gravité), du plus long chemin d'ouverture au moins égale à d.

3.1 Méthodologie de calcul

La grille de points (et donc le milieu poreux) est envisagée comme une juxtaposition de plans horizontaux selon la direction verticale. Dans ces conditions, étudier la migration d'une particule soumise à la gravité à travers un milieu granulaire revient à rechercher des connexions entre nœuds appartenant au même plan ou entre nœuds appartenant à des plans successifs. Le premier mécanisme de transport envisagé, référencé mécanisme A, oblige à un mouvement vertical descendant : les déplacements adviennent donc entre un plan et le plan immédiatement en-dessous de lui. Le second mécanisme, appelé mécanisme B, autorise les déplacements horizontaux dans un même plan ainsi que tous les déplacements verticaux permis dans le mécanisme A.

Soit \mathcal{N}_z , l'ensemble des nœuds appartenant au plan situé à la cote z (l'axe z est considéré vertical descendant) et accessibles à une particule de taille d, qui serait $l\hat{a}ch\acute{e}e$ au-dessus de $l'\acute{e}chantillon$. Le critère d'accessibilité à un pore est alors défini à partir de δ , distance à la particule la plus proche calculée en chaque nœud de la grille. Si $d \leq 2\delta$ en un nœud donné alors

le centre d'une particule de diamètre d peut occuper ce site.

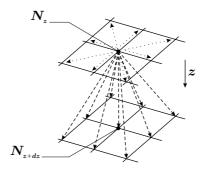


Fig. V.6 – Déplacements autorisés dans les deux mécanismes de transport proposés. Les flèches en tirets (- - -) représentent le mécanisme A. Le mécanisme B est obtenu en y ajoutant les flèches en pointillés (...).

Dans le mécanisme de transport A, à partir d'un nœud $N_z \in \mathcal{N}_z$ sont considérés les déplacements vers le nœud N_{z+dz} qui est immédiatement à la verticale de N_z et vers les huit voisins immédiats de N_{z+dz} (se référer aux flèches en tirets sur la figure Fig. V.6). Ces nœuds ne sont finalement retenus que s'ils appartiennent à \mathcal{N}_{z+dz} , c'est-à-dire accessibles à une particule de taille d. Un tel mécanisme avec une direction d'écoulement très fortement privilégiée peut par exemple modéliser un lâcher sous gravité des particules (prédominance de la direction verticale) ou un transport sous l'effet d'un écoulement laminaire (prédominance de la direction globale de l'écoulement).

Dans le mécanisme de transport B, à partir d'un nœud $N_z \in \mathcal{N}_z$ sont considérés les mêmes déplacements que précédemment auxquels sont ajoutés ceux vers les huit voisins immédiats de N_z (se référer aux flèches en tirets et en pointillés sur la figure Fig. V.6). De même que précédemment, l'appartenance de N_z et de ses voisins immédiats à \mathcal{N}_z ou celle des voisins immédiats de N_{z+dz} à \mathcal{N}_{z+dz} est conditionnée par l'accessibilité de ces points à une particule de taille d. Ce mécanisme tend à uniformiser l'importance donnée à chaque direction (même si les déplacements verticaux descendants restent privilégiés) ce qui s'apparenterait plutôt au cas d'un transport sous l'effet d'un écoulement turbulent.

Etablir \mathcal{N}_z pour chaque plan horizontal de la discrétisation permet de reconstituer une matrice 3D binaire indiquant la présence ou l'absence de liens entre les nœuds du réseau, selon le mécanisme de transport envisagé. Il est alors possible de définir un chemin de filtration comme une suite de pas sur la grille discrète qui modélise l'espace poral (ou ce qui est équivalent, comme une succession de 1 sur la matrice 3D binaire). Le nombre minimal de chemins de filtration permettant à une particule lâchée au-dessus de l'échantillon d'arriver à la cote z se calcule en comptabilisant le nombre de composantes connexes dans le graphe associé à \mathcal{N}_z (correspondant

La composante connexe de x dans un graphe \mathcal{G} est l'ensemble des sommets pouvant être atteints à partir de x dans \mathcal{G}

à la matrice 2D binaire située à la cote z). Le premier plan pour lequel aucun chemin de filtration n'est répertorié définit la projection sur la verticale du plus long chemin de taille au moins égale à d au sein de l'échantillon et donc la profondeur de pénétration maximale pour une particule infiltrée de diamètre d.

3.2 Application sur les granulométries serrée, étalée et discontinue

3.2.1 Distances verticales maximales parcourues

Cette recherche du plus long chemin de filtration de taille au moins égale à d a été effectuée pour chacune des trois granulométries déjà étudiées, dans leurs deux états de densité extrêmes. Les figures Fig. V.7 (a), (b), (c), (d), (e) et (f) présentent les longueurs maximales L, adimensionnées par la hauteur de l'échantillon H, obtenues selon les mécanismes A et B, lorsque d décrit l'intégralité de la gamme de tailles de constrictions.

Cette figure met en évidence que les chemins les plus larges sont peu profonds et peu tortueux puisque le mécanisme B qui autorise les déplacements transverses n'apporte pas plus de solution de transport que le mécanisme A. A mesure que l'ouverture de chemin considérée diminue, il apparaît tout d'abord une taille caractéristique à partir de laquelle les connexions transverses du mécanisme B permettent d'aller plus loin au sein du matériau que le mécanisme A. Puis, quel que soit le mécanisme considéré, on passe par une taille critique à partir de laquelle les possibilités de pénétration augmentent rapidement jusqu'à permettre de traverser en totalité l'échantillon. Il est important de souligner qu'aucune conclusion ne peut être donnée quant au devenir des chemins, ici traversants, dans un échantillon qui serait plus grand. Les particules injectées de diamètre d pour lesquelles L/H=1 pourraient être stoppées à des distances supérieures à H. Il n'est pas possible, à partir de ces seuls essais, de positionner d par rapport à d_p .

Sur les figures Fig. V.7 ont également été représentées les densités de probabilité du rayon de constriction obtenues par l'approche du cercle inscrit. On remarque alors que la taille critique à partir de laquelle une petite diminution d'ouverture de chemin s'accompagne d'une nette augmentation de la profondeur de pénétration potentielle correspond sensiblement au mode de la distribution de rayons de constriction quel que soit le matériau et quel que soit son état de densité. Le tableau Tab. V.2 donne les valeurs numériques des tailles critiques et des valeurs modales des distributions de rayons de constrictions. On donne la valeur correspondante R_x de la distribution cumulée de rayons de constrictions (R_x est le fractile d'ordre x de la distribution de rayons de constrictions.). Si l'on compare les distributions de tailles de constrictions obtenues par NOLAN et KAVANAGH [Nolan et Kavanagh, 1994] sur des assemblages de sphères avec les résultats de leurs essais de percolation effectués dans ces mêmes assemblages, on retrouve l'approximation du rayon critique par la valeur modale de la distribution de tailles de constrictions.

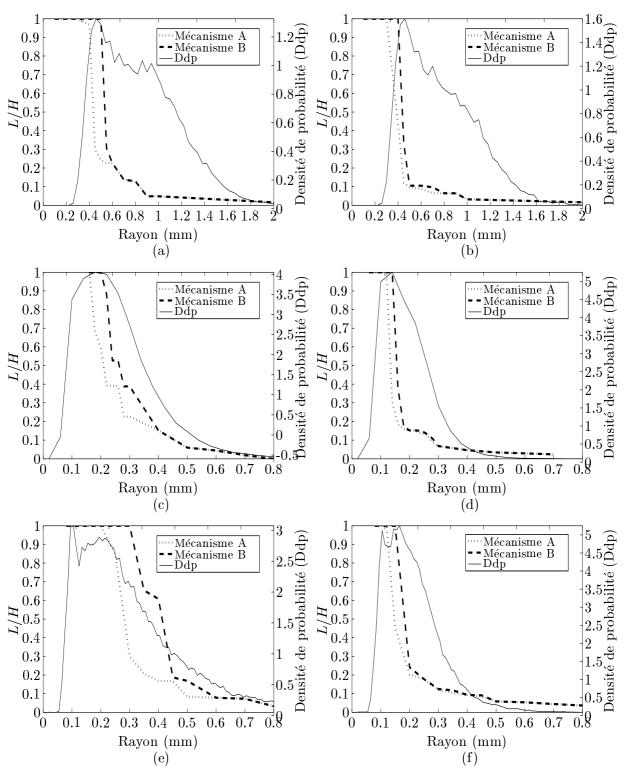


Fig. V.7 – (a), (c) et (e) Densité de probabilité de la taille de constriction et profondeur de pénétration L résultant des mécanismes de transport A et B pour les états les plus lâches des granulométries respectivement serrée, étalée et lacunaire. (b), (d) et (f) Densité de probabilité de la taille de constriction et profondeur de pénétration L résultant des mécanismes de transport A et B pour les états les plus denses des granulométries respectivement serrée, étalée et lacunaire. L est adimensionnée par la dimension de l'échantillon H.

	Rayons critiques (mm)			Valeurs modales des des distributions de rayons de constrictions		
	R_d	= 0	R_d	= 1		
	Méca. A	Méca. B	Méca. A	Méca. B	$R_d = 0$	$R_d = 1$
Granulométrie serrée	0.3	0.5	0.3	0.4	$0.45 \approx R_{13}$	$0.46 \approx R_{18}$
Granulométrie étalée	0.16	0.2	0.12	0.14	$0.18 \approx R_{33}$	$0.14 \approx R_{34}$
Granulométrie lacunaire	0.2	0.3	0.12	0.15	$0.2 \approx R_{34}$	$0.16 \approx R_{35}$

Tab. V.2 – Rayons critiques et valeurs modales des distributions de rayons de constrictions pour les granulométries serrée, étalée et lacunaire, dans leurs états de densité extrêmes.

3.2.2 Influence du pas du réseau sur les longueurs des chemins de filtration

L'usage d'un réseau discret à mailles rectangulaires pour simuler le mouvement le long des chemins de filtration pose la question de l'influence du choix de la largeur de maille. La figure Fig. V.8 présente l'évolution des profondeurs de pénétration adimensionnées L/H, résultant (a). du mécanisme A ou (b). du mécanisme B, pour différentes largeurs de mailles l_m dans le cas de l'état le plus dense du matériau de granulométrie étalée.

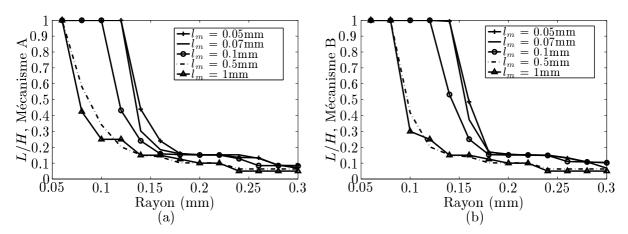


Fig. V.8 – Influence du pas de la grille sur les distances de parcours des particules de rayon R dans le matériau de granulométrie linéaire, dans son état le plus dense. (a) Mécanisme de transport A, (b). Mécanisme de transport B.

Changer le pas du réseau influence l'évolution de la profondeur de pénétration de manière similaire que l'on considère le mécanisme A ou le mécanisme B. Le choix de l_m n'a que de faibles répercussions sur les distances parcourues par des particules de grands rayons $(R \in [0.2\text{mm}, 0.3\text{mm}])$ ou de très petits rayons $(R \leq 0.06\text{mm})$ pour le mécanisme A, $R \leq 0.08\text{mm}$ pour le mécanisme B). En revanche, les différences sont significatives dans la gamme de rayons

intermédiaire $(R \in]0.06\text{mm}, 0.12\text{mm}[$ pour le mécanisme A, $R \in]0.08\text{mm}, 0.14\text{mm}[$ pour le mécanisme B). Pour une particule de rayon donné dans cet intervalle, la distance parcourue adimensionnée L/H diminue lorsque la longueur de la maille l_m augmente.

Tout d'abord, il est à souligner que pour de grandes valeurs de la largeur de mailles ($l_m=0.5$ mm ou 1mm), il est impropre de continuer à définir L comme une profondeur de pénétration au sein du matériau. La subdivision n'est pas assez fine pour retranscrire l'interconnexion entre les nœuds. En effet, dans la présente méthodologie, la construction de la matrice 3D binaire (\mathcal{N}_z) $z \in [0,H]$) repose sur une vérification de l'accessibilité des sites. Mais l'accessibilité des liens est implicitement admise : le passage d'un nœud (par exemple N_z) vers un autre (par exemple N_{z+dz}) est toujours supposé possible. Or lorsque l_m est grand, cette condition n'est pas vérifiée alors que les sites se trouvent en fait au sein d'une entité de vide (pore ou constriction) et rien ne garantit l'existence d'un chemin pour aller d'un site à un autre. Il est donc au moins nécessaire qu'il existe un recouvrement entre les sites étudiés et donc que $l_m < R$. De plus, pour un rayon donné, les courbes d'évolution de L/H de la figure Fig. V.8 donnent des résultats concordants dès lors que la largeur de maille est au moins inférieure à deux fois le rayon. Cette condition a été vérifiée lors du choix du pas de discrétisation des échantillons pour établir les résultats de la figure Fig. V.7. Il est à noter que pour les rayons inférieurs au rayon de percolation, toutes les valeurs de l_m prédisent une traversée de l'échantillon : pour un site N_z donné, la probabilité de trouver un site accessible est suffisamment grande pour assurer que parmi les au moins neuf voisins de N_z considérés dans les mécanismes de transport, l'un au moins corresponde à un site accessible et permette d'avancer de l_m dans la direction verticale.

L'étude de l'évolution de L/H pour de grandes valeurs de largeur de maille est néanmoins intéressante puisqu'elle met en évidence le caractère tortueux des chemins de filtration. En effet, si l'on considère une particule de rayon 0.1mm et le mécanisme de transport A, la discrétisation correspondant à l_m =0.05mm montre l'existence d'un chemin traversant l'échantillon de part en part. Si ce chemin était purement vertical, il apparaîtrait également avec les discrétisations correspondant à l_m =0.5mm et l_m =1mm où la procédure de calcul de L inclue la recherche de l'existence de sites d'accueil sur une verticale, en des sites espacés de l_m .

3.2.3 Influence de la densité relative

Les mécanismes A et B ici définis permettent de mettre en exergue l'influence de l'état de compacité d'un matériau granulaire sur ses propriétés filtrantes. La distance (projetée selon la verticale) qu'une particule de taille donnée est susceptible de parcourir au sein d'un matériau dans son état le plus dense (Fig. V.7 (b), (d) et (f)) est toujours inférieure ou égale à celle que la particule peut parcourir au sein du même matériau dans son état le plus lâche (Fig. V.7 (a), (c) et (e)).

Il est à noter également que l'écart entre le rayon de la plus petite sphère ne pouvant s'infiltrer dans le matériau et le rayon de la plus grosse sphère traversant intégralement l'échantillon est plus grand dans le cas des états lâches que dans le cas des états denses. La densification a eu

tendance à régulariser le milieu, les propriétés moins dispersées entraînent des propriétés de migration très différentes pour de faibles variations du diamètre de la particule en mouvement.

3.2.4 Comparaison avec les critères de dimensionnement existants

On retrouve pour les granulométries étalée et lacunaire des résultats similaires avec ceux de Indraratna et al., 2007] qui considèrent, sur la base d'un modèle probabiliste de transport, qu'aucune particule de taille inférieure au fractile d'ordre 0.35, R_{c35} , de la distribution de tailles de constrictions ne peut être retenue par le matériau. Par ailleurs, il est intéressant de positionner les rayons critiques par rapport aux rayons d'ouverture de contrôle R_c^* , définis par Kenney et al. [Kenney et al., 1985] et par Witt [Witt, 1993]. Cette appellation fait référence au rayon de la plus grande particule pouvant être transportée à travers le filtre. Selon Kenney et al.,

$$R_c^*/R_5 \le 0.25$$
 (V.2a)

ou
$$R_c^*/R_{15} < 0.2$$
 (V.2b)

Selon WITT, les particules de taille égale à $R_c^*=0.23R_{f,\mathrm{moyen}}$ peuvent parcourir une distance égale à 300 d_5 . $R_{f,\mathrm{moyen}}$ est le rayon moyen, en nombre, des particules du filtre. Le tableau Tab. V.3 montre que les rayons critiques tendent à être supérieurs mais sont du même ordre de grandeur que les rayons d'ouverture de contrôle. Cette approche par excès se justifie par les définitions de ces deux rayons. Le rayon critique est le rayon à partir duquel la profondeur de pénétration des particules infiltrées augmente rapidement mais il est possible qu'après une très grande distance parcourue, les particules soient capturées dans le matériau. En revanche, le rayon d'ouverture de contrôle de Kenney et al. correspond au rayon de percolation et sous-entend que les particules peuvent traverser n'importe quelle épaisseur de sol. Le rayon d'ouverture de contrôle de Witt offre une approche intermédiaire puisque la distance de parcours considérée est plus grande que l'épaisseur des échantillons numériques étudiés dans la présente étude mais reste limitée à 300 d_5 .

Tab. V.3 – Rayons critiques et rayons d'ouverture de contrôle de Kenney et al. et de Witt

	Kenney et al.		WITT	Mécanismes A et B
	$0.25 R_5$	$0.2 R_{15}$	$0.23~R_{f,\mathrm{moyen}}$	Plages des rayons critiques
Granulométrie serrée	0.43	0.42	0.55	[0.3;0.5]
Granulométrie étalée	0.1	0.1	0.12	[0.12; 0.2]
Granulométrie lacunaire	0.1	0.1	0.12	[0.12;0.3]

3.3 Validation par des simulations numériques discrètes

On se propose ici de valider les profondeurs de pénétration trouvées par les mécanismes A et B à l'aide de simulations numériques discrètes. Plus précisément, nous allons tester les capacités

filtrantes de l'échantillon le plus dense de la granulométrie étalée (linéaire). En utilisant un code numérique aux éléments discrets de type "dynamique du contact" (se reporter au chapitre I), des particules de taille donnée sont lâchées au-dessus de l'échantillon considéré. Ces particules vont soit être bloquées par le milieu granulaire, soit traverser tout l'échantillon.

Ces expériences numériques de transport de particules consistent à injecter, une par une, des sphères dans l'échantillon considéré. La procédure exacte est la suivante :

- 1. Une sphère de taille donnée est aléatoirement positionnée au-dessus de l'échantillon,
- 2. Cette sphère est lâchée sous gravité jusqu'à ce qu'elle soit bloquée ou qu'elle ait traversé l'échantillon,
- 3. Après un temps écoulé fixé (ici égal à 2 millisecondes), une autre sphère est aléatoirement positionnée au-dessus de l'échantillon et lâchée sous gravité.

Des sphères de taille donnée sont ainsi injectées dans l'échantillon. Elles ne sont pas supprimées du matériau après leur capture. Par conséquent, il est possible que les premières particules injectées et bloquées aient des répercussions sur le parcours des dernières particules lâchées. Mais il nous importe ici qu'un maximum de chemins soient empruntés. Il n'est pas rédhibitoire, au contraire, que les premières sphères bloquées orientent les suivantes vers des chemins encore ouverts, le nombre de sphères n'étant pas suffisant pour colmater l'échantillon. D'autre part, la fréquence entre deux injections de particules est suffisamment faible pour nous assurer qu'il n'y a pas de blocage "collectif", consécutif à la formation d'un amas de particules injectées. L'objectif est ici de comparer les longueurs de parcours des particules lâchées aux valeurs prédites à partir des mécanismes A et B issus de la grille à mailles rectangulaires. Cette comparaison n'est concevable que si suffisamment de sphères sont injectées pour explorer un grand nombre de chemins et ainsi augmenter la probabilité que l'une des particules injectées emprunte le plus long chemin de filtration offert aux particules de cette taille. Si cette condition n'est pas satisfaite, l'exploitation des expériences numériques nous conduit à sous-estimer la profondeur de pénétration potentielle.

Trois lâchers numériques de particules sont ainsi réalisés, correspondant respectivement à des sphères injectées de diamètres égaux à 0.16, 0.22 et 0.27mm. Les plus grandes sphères sont lâchées au nombre de 1000. Afin de pouvoir balayer un nombre plus important de chemins de filtration pour les plus petits diamètres, les deux autres lâchers sont réalisés à partir de 2000 sphères chacun. Le tableau Tab. V.4 synthétise les résultats de ces trois expériences.

Le mécanisme A semble ici plus pertinent pour rendre compte des lâchers sous gravité que le mécanisme B. Lors des simulations numériques, la valeur usuelle de 0.1 a été prise pour le coefficient de restitution ce qui ne favorise pas les rebonds des particules injectées. Sans écoulement ni rebond lors des simulations numériques pour conduire les particules injectées vers les sorties des pores, il semble cohérent que le mécanisme A, privilégiant la direction verticale, offre une meilleure adéquation avec les simulations numériques. La concordance quantitative sur les profondeurs de pénétration simulées et prédites par le mécanisme A est prometteuse.

Tab. V.4 – Distances maximales, projetées selon la verticale et adimensionnées par la hauteur de l'échantillon, parcourues par les sphères de diamètre 0.16, 0.22 et 0.27mm injectées numériquement dans l'échantillon le plus dense de la granulométrie étalée et prédites par les mécanismes A et B.

Granulométrie étalée dans son éta	at le plu	$_{ m ls} { m dense}$	
Diamètres des sphères injectées (mm)	0.16	0.22	0.27
L/H issues des simulations numériques	100%	100%	46%
L/H prédites par le mécanisme A	100%	100%	44%
L/H prédites par le mécanisme B	100%	100%	100%

4 Compréhension des mécanismes de capture

Le but de cette partie est d'utiliser la description du milieu granulaire sous forme de grille pour caractériser les mécanismes de capture des particules à l'échelle locale. Dans ce travail, les effets hydrodynamiques et moléculaires susceptibles d'agir sur la migration des particules ont été négligés. On se concentrera donc ici uniquement sur deux types de mécanismes de capture. D'une part, les particules injectées peuvent être capturées dans des chemins de filtration sans issue (cas (a) de la figure Fig. V.9). D'autre part, les particules injectées n'étant soumises qu'à la gravité, il est possible qu'elles "sédimentent" sur une portion d'un chemin de filtration (cas (b) de la figure Fig. V.9).

Une différence majeure entre ces deux mécanismes est que le blocage par interception est



Fig. V.9 – Mécanismes de capture envisagés lors d'un lâcher sous gravité (a).Interception, (b). "Sédimentation"

assuré quelle que soit la sollicitation à l'origine de la migration des particules. En revanche, le blocage par "sédimentation" est plus probable lors d'une sollicitation gravitaire que si le transport est engendré par un écoulement fluide, car dans ce cas-là la particule serait guidée par le champ de vitesses maximales situées au centre des conduits. La figure Fig. V.10 propose un exemple d'identification de ces modes de capture à partir de l'étude de deux plans horizontaux superposés. La figure Fig. V.10 (a) présente les deux plans sur lesquels apparaissent, en gris

clair, les composantes connexes définissant les chemins de filtration. Ainsi, le plan supérieur est accessible par deux chemins de filtration tandis qu'il n'existe plus qu'un seul chemin au plan inférieur. La figure Fig. V.10 (b) met en évidence les sites de capture par interception en gris foncé et le site de capture par sédimentation est symbolisé par une écriture blanche sur un fond noir. En effet, à partir des sites dans la zone gris foncé, il n'existe aucune possibilité pour accéder au plan inférieur. En revanche, le site sur fond noir sera un site de capture pour le mécanisme A mais pas pour le mécanisme B. En conséquence, l'existence ou non d'un site de capture en ce point dépend de la sollicitation appliquée. Ce nœud est donc répertorié comme un site de capture par sédimentation.

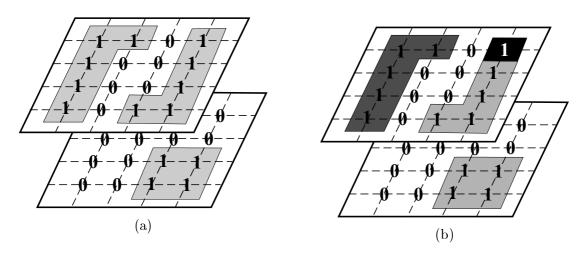


Fig. V.10 – Identification des mécanismes de capture à partir des matrices binaires représentatives de l'espace poral interconnecté. (a) Deux matrices binaires 2D superposées et visualisation des chemins de filtration sur chacun des plans horizontaux. (b) Identification des mécanismes de capture. La zone en gris foncée désigne des sites de capture par interception tandis que le site écrit en blanc est un site de capture par sédimentation.

Par l'intermédiaire des expériences numériques discrètes de lâchers de particules, nous pouvons connaître le positionnement exact des particules capturées. Nous envisageons de comparer ces positions aux caractéristiques des chemins de filtration issus du mécanisme A afin d'établir dans quelle mesure il est possible de prédire la capture des particules en exploitant la grille à mailles rectangulaires.

4.1 La capture par interception de la particule dans un chemin sans issue

Intéressons-nous tout d'abord au mode de capture par interception. Pour chacun des trois lâchers réalisés au sein de l'échantillon le plus dense de la granulométrie étalée, on s'est intéressé à l'évolution des trois paramètres suivants :

1. le nombre de particules capturées à une profondeur donnée,

- 2. le nombre de chemins de filtration permettant à une particule de taille d de passer d'une profondeur z à une profondeur z+dz. Les chemins sont ici construits à partir du mécanisme A privilégiant la direction de transport verticale.
- 3. la taille moyenne des chemins permettant de passer de z à z + dz et d'ouverture au moins égale à d. Cette taille est ici exprimée en nombre de sphères de diamètre d nécessaires à combler l'ouverture du chemin de filtration.

Les figures Fig. V.11 (a), (b) et (c) représentent l'évolution de ces paramètres pour des lâchers de sphères de diamètres respectifs 0.27, 0.22 et 0.16mm.

On constate sur ces figures que la répartition des particules capturées au sein de l'échantillon a une allure similaire à l'évolution du nombre de chemins de filtration offerts pour le transport. Lors du lâcher de sphères de 0.27mm de diamètre, environ 10% des sphères ne pénètrent pas dans l'échantillon. Le pic dans la répartition des particules correspond effectivement à la surface libre de l'échantillon. Il coïncide également avec le nombre maximal de chemins de filtration disponibles : légèrement au-dessus de l'échantillon, à une profondeur de pénétration nulle, il n'y a que du vide, c'est-à-dire un seul chemin de filtration de taille égale au nombre de particules nécessaires à couvrir la surface de l'échantillon. Cette unique composante se scinde en plusieurs chemins à mesure que l'on pénètre dans l'échantillon. Le pic du nombre de chemins correspond au nombre d'accès par lesquels une sphère de diamètre 0.27mm peut entrer dans le matériau. Ces accès sont ici au nombre de 167 ce qui justifie l'utilisation d'un nombre élevé de particules pour s'assurer de parcourir tous les chemins de filtration possibles. Jusqu'à une profondeur de pénétration de 8mm (soit 20%H), on constate une perte de chemins régulière et une répartition des particules capturées à peu près uniforme. Le raisonnement en termes de nombre de chemins est ici possible puisque la taille moyenne des conduits demeure constante. Au-delà de 8mm, le caractère plus chaotique de la taille moyenne des chemins met en évidence que la diminution du nombre de chemins est probablement consécutive à une fusion de plusieurs chemins et non à la disparition de certains d'entre eux. Néanmoins, on dénombre peu de chemins permettant d'atteindre de telles profondeurs et peu de particules y accèdent effectivement.

Lors du lâcher de sphères de 0.22mm de diamètre, 10% des sphères ne pénètrent pas dans le matériau et 2% des sphères traversent la totalité de l'échantillon. Dans les simulations numériques, les sphères ne peuvent pas sortir de l'échantillon. Elles s'accumulent donc à une profondeur de pénétration égale à la hauteur de l'échantillon. Le nombre de chemins de filtration tend à diminuer à mesure que l'on progresse dans l'échantillon et les particules sont préférentiellement bloquées dans la première moitié de l'échantillon. 70% des sphères sont capturées dans cette première moitié. Les sphères ont tendance à s'accumuler en amont de zones à faibles capacités de filtration (diminution du nombre de chemins ou de leur taille). Ces zones sont localisées sur les figures à l'aide de lignes en tirets. Mais à l'inverse, toutes les zones à faibles capacités de filtration n'entraînent pas spécifiquement un dépôt de particules. Il est par conséquent difficile de définir un critère de capture à partir de cette expérience.

Lors du lâcher de sphères de 0.16mm, plus de 80% des sphères lâchées traversent le matériau.

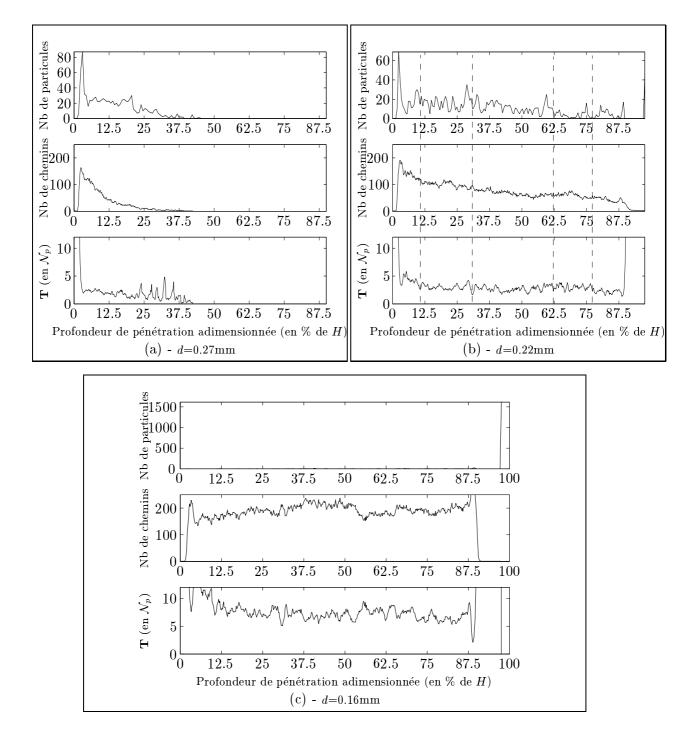


Fig. V.11 – Etude du mécanisme de capture par interception. Répartition des particules bloquées lors des lâchers de sphères de diamètre égal à (a) 0.27 mm, (b) 0.22mm et (c) 0.16mm ainsi que le nombre de chemins accessibles selon le mécanisme A et la taille moyenne de ces chemins \mathbf{T} , exprimée en nombre de particules \mathcal{N}_p pouvant les occuper ($\mathbf{T} = \pi \mathcal{N}_p d^2/4$).

Les chemins offerts au transport sont en nombre constant et de taille moyenne à peu près égale sur toute la hauteur de l'échantillon.

4.2 La capture par sédimentation de la particule sur les parois d'un chemin

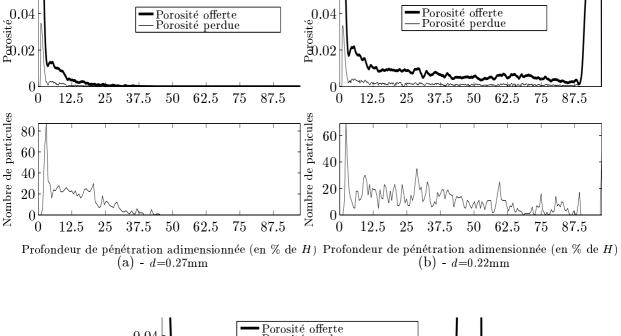
Pour localiser les zones de sédimentation potentielle, on s'intéresse à la perte de porosité lors du passage d'une profondeur z à une profondeur z+dz qui n'est pas due à la fin d'un chemin de filtration. Cette perte de porosité peut par exemple provenir du rétrécissement d'un chemin de filtration. La figure Fig. V.12 présente l'évolution de cette porosité perdue lorsque l'on considère l'ensemble des chemins d'ouverture au moins égale à d avec (a) d=0.27mm, (b) d=0.22mm et (c) d=0.16mm. Sur ces graphiques figurent également la porosité offerte aux particules de diamètre d et la répartition des sphères capturées lors des lâchers numériques réalisés. De même que précédemment, les comportements singuliers à proximité de l'origine des profondeurs s'expliquent par le profil irrégulier de la surface libre de l'échantillon. Le calcul de la porosité perdue nécessite ici la connaissance du nombre de chemins de filtration, valeur qui n'est représentative qu'au sein même de l'échantillon. A la surface, seul un chemin de filtration est répertorié. Le premier pic de porosité perdue provient de la diminution de taille de ce chemin mesure que l'on quitte la surface libre pour véritablement entrer dans le milieu granulaire.

Le premier constat est que ce mode de capture est très faible même dans le cas d'un lâcher sous gravité et d'autant plus faible que les sphères injectées sont grosses. Les diminutions de porosité sont donc principalement causées par la disparition des chemins de filtration. On remarque d'ailleurs une évolution similaire entre la porosité offerte au transport des particules et le nombre de chemins de filtration disponibles (cf Fig. V.11).

5 Limites du modèle géométrique de transport

La première limite concerne les moyens informatiques nécessaires pour traiter ce modèle. Cette méthode est d'autant plus exigeante en puissance de calcul que les sphères injectées sont de petite taille. Il faut en effet s'assurer que l'espacement entre deux points de la grille soit inférieur au plus petit rayon des sphères injectées pour que les chemins répertoriés soient valides. Mais mailler l'échantillon entier en satisfaisant ce critère devient rapidement très coûteux informatiquement. L'étude du transport de particules de rayons égaux à 500μ m dans le matériau le plus dense de la granulométrie étalée requiert de définir au moins 282000 nœuds. Considérer des particules de 150μ m nécessiterait de discrétiser avec environ 6 millions de nœuds.

Initialement, une de nos intentions était de prédire la fonction de répartition de la distance parcourue par les sphères injectées à l'aide de la grille à mailles rectangulaires. Nous nous sommes confrontés à la difficulté de rendre compte de la dépendance de cette fonction de répartition en fonction du nombre de sphères injectées. La fonction de répartition que l'on est à-même de



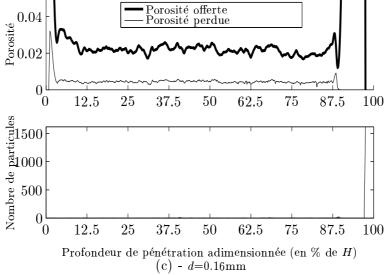


Fig. V.12 – Etude du mécanisme de capture par sédimentation. Répartition des particules bloquées lors des lâchers de sphères de diamètre égal à (a) 0.27 mm, (b) 0.22mm et (c) 0.16mm ainsi que la porosité offerte aux particules selon le mécanisme A et la porosité perdue ne correspondant pas à une porosité perdue par perte de chemins.

calculer avec la grille à mailles rectangulaires correspondrait à l'injection d'une sphère dans chaque chemin de filtration existant au sein du matériau. Le problème du passage de cette fonction à celle correspondant à un dépôt de N sphères lâchées aléatoirement n'a pas pu être résolu dans cette étude. De plus, des lâchers numériques de 1000, puis de 2000 sphères de même diamètre ont été réalisés dans le même échantillon. Ils ont mis en évidence que les dernières sphères injectées parcourent des distances plus importantes que les premières. Il semblerait donc que les premières particules comblent les chemins sans issue facilitant ainsi l'infiltration des sphères suivantes. Bien que les sphères soient injectées en faible nombre par rapport à la porosité totale du matériau, les modifications structurelles du milieu qu'elles engendrent sont suffisantes pour influencer les processus de transport. Avec la représentation géométrique du milieu proposée, il n'est pas évident de rendre compte de ce colmatage partiel qui malgré tout, au moins dans une première phase, semble aller dans le sens d'une amélioration des propriétés de transport. Pourtant, modéliser cette phase de dépôt est un élément essentiel si l'on souhaite rendre compte des changements graduels du milieu tout au long du processus de filtration.

6 Conclusion

A partir d'un modèle conceptuellement simple, on s'est attaché dans ce chapitre à établir des liens entre la microstructure porale d'un milieu granulaire et les potentialités de migration de particules de taille donnée dans ce milieu.

Le modèle développé ici, bien que purement géométrique, donne des résultats encourageants concernant l'analyse des processus de transport de particules. Le mécanisme A qui privilégie les déplacements verticaux s'avère notamment représentatif du comportement des particules injectées lors de lâchers numériques sous gravité. Le présent modèle permet une estimation satisfaisante de la longueur qu'une particule de taille donnée peut parcourir dans un milieu granulaire. La connectivité de l'espace poral peut également être appréciée sans faire appel à des notions topologiques complexes. De plus, le modèle souligne l'existence d'un rayon critique au-delà duquel la capacité de pénétration des particules injectées dans le milieu filtrant diminue rapidement. Pour tous les matériaux étudiés, dans l'état le plus lâche comme dans l'état le plus dense, ce rayon critique est très proche du rayon associé au mode de la densité de probabilité de la taille de constriction. Pour les granulométries étalées étudiées, il est très proche du fractile d'ordre 0.35 de la distribution cumulée de la taille de constriction. Pour la granulométrie serrée, le rayon critique est peu éloigné du fractile d'ordre 0.15 de la distribution cumulée de la taille de constriction.

L'approche locale offerte par ce modèle a permis d'étudier les mécanismes de capture des particules injectées dans un milieu granulaire. Si la présente approche nous permet certes de localiser ces zones de blocage des particules et de comprendre la raison de la capture, toute V.6 Conclusion

quantification semble délicate. La principale limitation du modèle de grille à mailles rectangulaires réside dans la difficulté à le faire évoluer et à rendre compte des changements de conditions de transport consécutifs au dépôt des premières particules bloquées. De plus, le modèle consiste à superposer au milieu poreux un maillage dont le raffinement dépend de la taille des particules dont on souhaite étudier les possibilités de transport. Par conséquent, l'un des inconvénients de cette approche est que plus on s'intéresse à la migration de petites particules, plus le maillage met en jeu un nombre de points conséquent et plus la puissance de calcul nécessaire est importante.

Bibliographie

- [Indraratna et al., 2007] Indraratna, B., Raut, A. K., et Khabbaz, H. (2007). Constriction-based retention criterion for granular filter design. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 133:266–276.
- [Kenney et al., 1985] Kenney, T., Chahal, R., Chiu, E., Ofoegbu, G., Omange, G., et Ume, C. (1985). Controlling constriction sizes of granular filters. *Canadian geotechnical journal*, 22:32–43.
- [Nolan et Kavanagh, 1994] Nolan, G. et Kavanagh, P. (1994). The size distribution of interstices in random packings of spheres. *Powder Technology*, 78:231–238.
- [Witt, 1993] Witt, K. (1993). Reliability study of granular filters. Dans Filters in Geotechnical and Hydraulic Engineering, pages 35–41, Balkema, Rotterdam. Brauns, Heibaum and Schuler.
- [Wu et al., 2006] Wu, K., Dijke, M. I. V., Couples, G. D., Jiang, Z., Ma, J., Sorbie, K. S., Crawford, J., Young, I., et Zhang, X. (2006). 3D stochastic modelling of heterogeneous porous media applications to reservoir rocks. *Transport in Porous Media*, 65:443–467.

Chapitre VI

Approche continue des processus d'érosion et de transport de particules

Introduction

Les approches locales contribuent à une description plus nuancée des phénomènes de migration de particules. Cependant, les moyens informatiques actuels ne permettent pas de simuler tout un ouvrage par assemblage de grains. Pour l'instant, seuls des échantillons de sol composés de quelques milliers de particules peuvent être étudiés à l'échelle locale. Par conséquent, pour aborder les problèmes de transport de particules à l'échelle macroscopique ou à l'échelle de l'ouvrage, il est nécessaire de mettre en place une approche continue s'appuyant notamment sur la définition de propriétés moyennes sur un volume élémentaire et sur le formalisme propre à la mécanique des milieux continus. Les approches discrètes doivent permettre de mieux comprendre les processus mis en jeu mais aussi d'enrichir les modèles continus par l'introduction de paramètres plus nuancés que de simples quantités moyennes rendant compte d'hétérogénéités locales. Notre travail s'inscrit dans cette démarche.

Notre attention se portera ici sur des modélisations déjà développées du transport de particules sous l'effet d'un écoulement. Plus précisément, l'étude bibliographique de ce chapitre se concentre sur deux modèles. Un premier modèle, celui de Cividini et Gioda, 2004], s'inscrit dans le cadre des théories continues de l'érosion des matériaux instables. Il s'agit ici d'une érosion volumique au sein d'une même masse de sol où, sous l'action d'un écoulement, les particules fines du sol parviennent à migrer dans les interstices de la matrice formée par les particules plus grosses. Dans le second modèle, celui d'Indraratna ([Indraratna et Vafai, 1997], [Indraratna et Locke, 2000], [Locke et al., 2001]), l'origine du transport de particules est une érosion surfacique. La migration s'initie à l'interface entre deux

matériaux : un matériau dit de base, supposé plutôt fin, et un matériau dit filtre, supposé plutôt grossier. Un écoulement perpendiculaire à l'interface est à l'origine de l'entraînement des particules transportées. Ce modèle est intéressant car il s'appuie sur une structuration discrète de l'espace poral, avec des pores joints par des constrictions, pour juger des possibilités de transport des particules d'un matériau vers un autre.

Nous proposons de construire un modèle couplé de transport et d'écoulement en hybridant ces deux méthodes. L'échelle locale est ici prise en compte via la distribution de tailles de constrictions (CSD). Ainsi le modèle développé pourra-t-il être ensuite enrichi au regard de notre travail sur l'obtention de CSD plus réalistes présenté au chapitre IV.

Sommaire

	Les théories continues de l'érosion								
	1.1	1.1 Migration de particules fines au sein d'un matériau granulair							
		1.1.1	Principe général du modèle de Cividini et Gioda						
		1.1.2	Les équations du problème						
		1.1.3	Points forts et limites de cette approche						
		1.1.4	Cadre plus général des théories continues de l'érosion 1						
	1.2	Migration de particules à travers un système multi-couches							
		1.2.1	Principe général du modèle de Indraratna						
		1.2.2	Les équations du problème						
2	Nouveau modèle de filtration								
	2.1	Principe de l'hybridation							
	2.2	Présent	ation algorithmique du nouveau modèle						
3	Application du modèle de transport proposé								
	3.1	Comportement du matériau lors de la simulation numérique discrèt							
		3.1.1	Procédure de la simulation						
		3.1.2	Analyse des résultats de l'expérience numérique						
	3.2	Simula	tion du transport par modèle continu						
		3.2.1	Identification du pas de temps						
		3.2.2	Identification du paramètre eta						
	Міс	se en œu	vre du modèle						
4	10112								

1 Les théories continues de l'érosion

1.1 Migration de particules fines au sein d'un matériau granulaire

1.1.1 Principe général du modèle de Cividini et Gioda

CIVIDINI et GIODA [Cividini et Gioda, 2004] cherchent à modéliser l'érosion interne de particules sous l'effet d'un écoulement. Leur approche repose sur l'équation de conservation de la masse de particules transportées dans laquelle apparaît un terme source, qui rend compte de l'érosion des particules fines du milieu granulaire soumis à l'écoulement. Cette formulation distingue d'une part la fraction des particules structurales de grande dimension, supposées fixes formant le squelette du milieu granulaire, et d'autre part la fraction de particules fines potentiellement érodables. Le terme source de l'équation s'exprime comme une relation non linéaire entre la quantité totale de sol érodé pour un temps infiniment long et la vitesse de l'écoulement. Cette relation est calée sur les résultats expérimentaux de STERPI [Sterpi, 2003]. La résolution des équations repose sur une méthode aux éléments finis, associée à un schéma temporel incrémental.

1.1.2 Les équations du problème

L'équation de conservation de la masse Soit un milieu granulaire saturé par un fluide incompressible et soumis à un écoulement. La matrice granulaire du sol se subdivise alors en deux fractions :

- la fraction des particules fines, susceptibles d'être transportées et potentiellement redéposées plus loin par l'écoulement,
- la fraction des particules structurales les plus grosses, considérées non sujettes au transport. Le gradient hydraulique est donc supposé inférieur au gradient hydraulique critique pouvant déstabiliser tout le matériau granulaire.

La figure Fig. VI.1 schématise le problème de transport pour un écoulement supposé dirigé selon s et les principales variables intervenant dans la conservation de la masse transportée sont les suivantes :

- $-\rho_{fg}$ et ρ_{ff} représentent respectivement les masses volumiques de la fraction grossière et de la fraction fine du squelette granulaire. Il est à noter que les masses volumiques sont dans cette approche, définies par rapport au volume total du milieu granulaire (solide+vide).
- $-\rho_{tr}$ est la masse volumique de particules fines transportées par l'écoulement.
- $-q_{er}$ et q_{dp} sont les flux volumiques de particules respectivement érodées et déposées. Il s'agit de taux d'érosion et de dépôt assimilables à des variations de ρ_{ff} par unité de temps. Il est à souligner que la présente approche ne tient pas compte d'un potentiel dépôt de particules $(q_{dp} = 0)$.
- $-q_{tr}$ est le flux surfacique de particules fines transportées, amenées par l'écoulement dans l'élément de sol considéré.

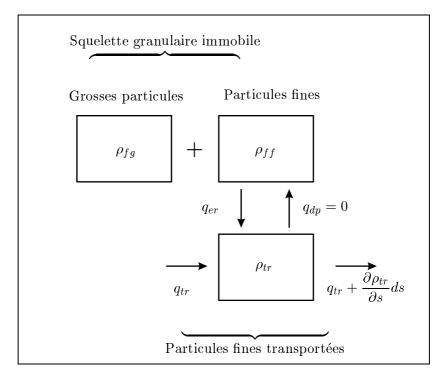


Fig. VI.1 – Schématisation du problème d'érosion et de transport de Cividini

Un bilan de masse classique permet d'aboutir à l'équation de conservation (VI.1).

$$\frac{\partial \rho_{tr}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_{trx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{try}}{\partial y} + \frac{\partial q_{trz}}{\partial z}\right) + q_{er} - q_{dp} \tag{VI.1}$$

où les flux q_{trx} , q_{try} et q_{trz} sont supposés régis par les relations (VI.2)¹ reliant le transport à une vitesse d'écoulement \mathbf{v} , de composantes v_x , v_y et v_z .

$$q_{trx} = \rho_{tr} v_x \tag{VI.2a}$$

$$q_{try} = \rho_{tr} v_y \tag{VI.2b}$$

$$q_{trz} = \rho_{tr}v_z \tag{VI.2c}$$

L'équation (VI.3) donne l'écriture finale de la conservation de la masse des particules transportées.

$$\frac{\partial \rho_{tr}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{tr} v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_{tr} v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho_{tr} v_z)}{\partial z} = q_{er} - q_{dp} = q_{er}$$
 (VI.3)

Les composantes de la vitesse d'écoulement du fluide sont liées à la charge hydraulique h via la loi de DARCY (relation (VI.4)). Cette loi traduit une relation de proportionnalité entre la vitesse apparente d'écoulement de l'eau $(n\mathbf{v})$ et le gradient hydraulique.

¹Ces relations n'impliquent pas que, localement, la vitesse des particules transportées coïncide avec celle de l'écoulement. Les flux ont ici seulement une connotation macroscopique semblable à la vitesse de décharge au sens de DARCY.

$$\left\{
\begin{array}{l}
nv_{x} \\
nv_{y} \\
nv_{z}
\end{array}\right\} = -\mathbf{K} \left\{
\begin{array}{l}
\frac{\partial h}{\partial x} \\
\frac{\partial h}{\partial y} \\
\frac{\partial h}{\partial z}
\end{array}\right\} = - \left(
\begin{array}{l}
K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\
K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\
K_{zx} & K_{zy} & K_{zz}
\end{array}\right) \left\{
\begin{array}{l}
\frac{\partial h}{\partial x} \\
\frac{\partial h}{\partial y} \\
\frac{\partial h}{\partial z}
\end{array}\right\}$$
(VI.4)

 \mathbf{K} est la matrice des perméabilités (ou conductivités hydrauliques), traduisant la capacité du milieu granulaire à se laisser traverser par l'eau dans les trois directions de l'espace et n désigne la porosité.

De plus, la conservation de la masse du fluide s'exprime selon l'équation (VI.5).

$$\frac{\partial(nv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(nv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(nv_z)}{\partial z} = 0$$
 (VI.5)

Le problème constitué des équations (VI.3), (VI.4) et (VI.5) est en l'état un problème incomplet. Il nécessite l'introduction d'une loi constitutive d'érosion.

La loi d'érosion La loi d'érosion porte ici sur la masse volumique de particules fines dont l'évolution dépend directement du terme source de l'équation de conservation de la masse des particules transportées. En effet, l'évolution de la masse volumique des fines est régie par l'équation :

$$\frac{\partial \rho_{ff}}{\partial t} = -\left(q_{er} - q_{dp}\right) \tag{VI.6}$$

La formulation de la loi d'érosion se base sur les résultats expérimentaux de Sterpi effectués sur des échantillons de sol carottés dans la région de Milan. Les principales observations expérimentales dont découle la loi d'érosion proposée sont les suivantes :

- 1. La masse volumique de la fraction fine ρ_{ff} décroît en fonction du temps depuis sa valeur initiale ρ_{ff_0} (valeur à t=0) vers une valeur finale $\rho_{ff_{\infty}}$ (correspondant à un temps infiniment long).
- 2. La quantité érodée sur le long terme, $\rho_{ff_0} \rho_{ff_{\infty}}$, augmente lorsque le gradient hydraulique augmente.
- 3. Le ratio $\frac{\Delta(\rho_{ff_0} \rho_{ff_\infty})}{\Delta v}$ tend à décroître à mesure que v augmente.
- 4. $\rho_{ff_{\infty}}$ tend vers ρ_{ff0} s'il n'y a plus d'écoulement. Dans le cas d'un écoulement à grande vitesse, il n'y a pas de "mémoire" de la masse volumique initiale de particules fines et $\rho_{ff_{\infty}}$ semble ne dépendre que de la vitesse du fluide.

Pour tenir compte de ces observations, CIVIDINI et GIODA proposent les relations suivantes :

$$\rho_{ff_{\infty}}(v) = \rho_{ff_0} - \left(\rho_{ff_0} - \rho_{ff_{\infty}}^*\right) \frac{v}{v^*} \quad \text{si} \quad 0 \le v(t) \le v^*$$
 (VI.7a)

$$\rho_{ff_{\infty}}(v) = \rho_{ff_{\infty}}^* - \alpha \log \left(\frac{v}{v^*}\right) \quad \text{si} \quad v^* \le v(t)$$
 (VI.7b)

$$\rho_{ff_{\infty}} \ge 0$$
 (VI.7c)

où v^* est la plus faible vitesse imposée lors des essais expérimentaux et $\rho_{ff_{\infty}}^*$ est la masse volumique des particules fines sur le long terme correspondante. α est un coefficient numérique

calé sur les résultats expérimentaux par minimisation d'erreur. L'introduction de v^* permet de rendre compte des phénomènes transitoires. Expérimentalement, la fraction fine érodée est mesurée dès que le matériau est soumis à un écoulement fluide. L'écoulement transitoire, avant que le débit choisi par l'expérience ne soit atteint, engendre déjà un lessivage des particules fines, supposé ici linéaire en fonction de la vitesse fluide (équation VI.7a).

L'équation (VI.8) est alors proposée comme expression du taux d'érosion.

$$q_{er}(t,v) = \beta \ v \ \left(\rho_{ff}(t) - \rho_{ff_{\infty}}(v)\right) \tag{VI.8}$$

où β découle également d'une identification par recalage d'après les résultats expérimentaux. $\rho_{ff}(t) - \rho_{ff_{\infty}}(v)$ représente la quantité de particules fines, encore présente au temps t dans le milieu granulaire et sujette à l'érosion.

La méthode de résolution Une méthode aux éléments finis est introduite pour toutes les équations aux dérivées partielles. Les équations sont écrites sous leur forme faible pour obtenir une écriture matricielle du problème, issue de l'interpolation de la masse volumique de matériau transporté ρ_{tr} et de la charge hydraulique h. L'intégration temporelle du problème matriciel non-linéaire repose sur une méthode du type prédiction-correction : la phase de prédiction aboutit à une première approximation de $\rho_{tr}(t+\Delta t)$ à partir des valeurs aux temps précédents. La phase de correction améliore $\rho_{tr}(t+\Delta t)$ grâce à une technique itérative.

1.1.3 Points forts et limites de cette approche

Ce modèle présente l'avantage de proposer un terme de génération de masse conceptuellement simple. Le taux d'érosion s'exprime ici comme le produit de la vitesse d'écoulement par la masse volumique de particules fines sujettes à l'érosion, avec un seul paramètre de calage.

La principale limite de cette approche est qu'elle ne prend pas en compte un éventuel dépôt de particules fines. Ceci est imputable au fait que la loi découle de résultats expérimentaux qui quantifient la masse de particules sortant de l'échantillon. Les migrations de particules à l'intérieur de l'échantillon ne sont pas mesurées. La loi proposée tient compte des phénomènes simultanés d'érosion et de dépôt. L'une des conséquences en est que la matrice des perméabilités K demeure constante tout au long du processus itératif de résolution. Or, on peut s'attendre à ce que les changements de répartition des particules fines dans le matériau s'accompagnent de variations de la perméabilité.

1.1.4 Cadre plus général des théories continues de l'érosion

Le modèle de Cividini et Gioda s'inscrit dans le cadre des théories continues de l'érosion ([Vardoulakis et al., 1996], [Papamichos, 2004], [Vardoulakis, 2004]) qui considèrent le matériau granulaire saturé comme un milieu à trois phases : les particules immobiles de la matrice solide, les particules transportées et le fluide interstitiel. Ces théories reposent sur la formulation des

équations d'équilibre de masse pour chaque phase auxquelles il est nécessaire d'ajouter une équation de comportement ou d'évolution pour le taux de matériau transporté.

Equations des modèles d'érosion à trois phases : Soit $c = \frac{V_{tr}}{V_{tr} + V_{fsat}}$, la concentration en particules transportées. V_{tr} et V_{fsat} représentent respectivement le volume des particules transportées et celui du fluide saturant le milieu. Soit $n = \frac{V_{tr} + V_{fsat}}{V_{tr} + V_{fsat} + V_{sq}}$, la porosité. V_{sq} désigne le volume du squelette solide. Le problème d'érosion repose sur les équations d'équilibre de masse (VI.9).

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\dot{m}}{\rho_s}$$
 pour le squelette solide, immobile (VI.9a)

$$\frac{\partial(cn)}{\partial t} + \frac{\partial(cnv_{tri})}{\partial x_i} = \frac{\dot{m}}{\rho_s} \text{ pour les particules transportées}$$
(VI.9b)

$$\frac{\partial((1-c)n)}{\partial t} + \frac{\partial\left(n(1-c)v_{fsat_i}\right)}{\partial x_i} = 0 \text{ pour le fluide interstitiel}$$
 (VI.9c)

où v_{tri} et v_{fsat_i} représentent respectivement les $i^{\text{ème}}$ composantes des vecteurs vitesses des particles transportées et du fluide et ρ_s , la masse volumique absolue moyenne des grains. Ces vecteurs sont généralement supposés égaux ou colinéaires. \dot{m} est le taux de masse produite et il est supposé que toute la masse extraite du squelette solide se retrouve dans la fraction des particules transportées.

L'équation introduite pour pouvoir résoudre ce problème à quatre inconnues² porte généralement sur le terme de génération de masse. Pour VARDOULAKIS et PAPAMICHOS, il s'agit de la loi d'EINSTEIN-SAKTHIVADIVEL qui suppose que le taux de masse érodée est régi par la vitesse de décharge des particules transportées $(cn||v_{tri}||)$ et est proportionnel à la masse volumique du squelette solide, immobile $(\rho_s(1-n))$:

$$\dot{m} = \Lambda \rho_s (1 - n) cn \|v_{tri}\| \tag{VI.10}$$

où Λ est un paramètre ayant pour dimension l'inverse d'une longueur qui doit être calé expérimentalement.

Les équations du modèle de CIVIDINI et GIODA s'inscrivent dans cette théorie des matériaux triphasiques sous les hypothèses suivantes :

- 1. Les particules transportées ont, macroscopiquement, une vitesse égale à celle du fluide qui les transporte,
- 2. Le débit fluide est régi par la loi de Darcy.

Pour obtenir la correspondance entre les équations du cadre général présenté ci-dessus et celles de l'approche de Cividini et Gioda, il suffit de poser $\rho_{tr} = cn\rho_s$. ρ_{tr} correspond alors effectivement

 $^{^2}c$, n, \dot{m} et la charge hydraulique h. Grâce à la loi de Darcy, h suffit pour définir les 3 composantes du vecteur vitesse v_{fsat_i} , $i \in [1,3]$ (et donc celle de v_{tr_i} , $i \in [1,3]$ par égalité ou proportionnalité).

à la masse volumique des particules transportées, définie par rapport au volume total du milieu granulaire.

1.2 Migration de particules à travers un système multi-couches

1.2.1 Principe général du modèle de Indraratna

Dans cette approche, le système classiquement étudié est constitué d'un matériau de base en contact avec un matériau filtre, plus grossier, l'interface de contact entre ces deux matériaux se trouvant perpendiculaire à l'écoulement fluide. INDRARATNA et al. ([Indraratna et Vafai, 1997], [Indraratna et Locke, 2000], [Locke et al., 2001]) cherchent à modéliser la migration des particules du matériau de base vers le matériau filtre sous l'effet de l'écoulement.

Le matériau de base et le filtre sont ici spatialement discrétisés en éléments. Cette discrétisation ne concerne qu'une seule direction, celle de l'écoulement. L'entraînement de particules d'un élément vers un autre ne se produit que si le gradient hydraulique appliqué à l'élément considéré dépasse une valeur critique, déterminée par des considérations d'équilibre limite (développées plus loin mais vivement critiquées [Kenney, 1998]). Si ce critère hydraulique est vérifié, les potentialités de transport de particules sont alors étudiées par l'intermédiaire de critères géométriques. L'idée sous-jacente à ces critères est que le parcours des particules d'un élément est entièrement conditionné par la taille des constrictions de l'élément suivant. Ainsi, la gamme de tailles de particules susceptibles de se mouvoir résulte d'une comparaison entre la PSD³ d'un élément et la CSD⁴ de l'élément suivant. La quantité de particules transportées pendant un intervalle de temps fixé et leur vitesse de parcours provient de la résolution des équations couplées de conservation de la masse et de la quantité de mouvement du mélange {fluide+particules transportées} par un schéma de différences finies. A la fin de chaque itération, les PSD, les porosités et les perméabilités des éléments sont recalculées.

1.2.2 Les équations du problème

Critère hydraulique d'initiation de l'érosion Le gradient hydraulique critique est calculé à partir d'une configuration similaire à celle de la figure Fig. VI.2 : une particule de diamètre d est à la limite de l'équilibre dans un canal de vide orienté d'un angle α par rapport à l'horizontale. Cette particule n'est pas transportée tant que les forces motrices s'équilibrent avec les forces de frottement, ici décomposées en deux termes : un terme traduisant le frottement de la particule le long de la paroi du canal de vide, un terme résultant de contraintes latérales exercées par les particules constituant la paroi du canal sur la particule de diamètre d (équilibre limite de Rankine). L'équation (VI.11) est proposée par INDRARATNA pour exprimer analytiquement l'équilibre de la particule piégée. Il est à noter que dans la présente configuration, le

³PSD : Distribution de tailles de particules

⁴CSD : Distribution de tailles de constrictions

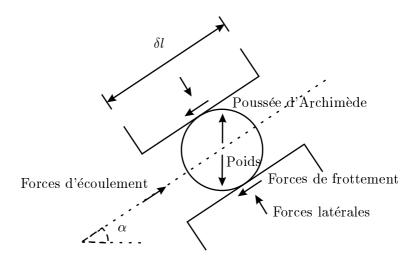


Fig. VI.2 – Equilibre d'une particule de sol au sein d'un conduit

poids s'oppose aux forces motrices.

$$\frac{\pi d^{2}}{2} \left(\gamma_{s} h_{s} - \gamma_{w} h_{w} \right) \tan \Phi' \left(K + \sqrt{\cos^{2} \alpha + K^{2} \sin^{2} \alpha} \right) + \underbrace{\frac{\pi d^{3}}{6} \left(\gamma_{s} - \gamma_{w} \right) \cos \alpha \tan \Phi'}_{\text{Forces de frottement (Rankine)}} \\
= \underbrace{\frac{\pi d^{2}}{4} i_{cr} \gamma_{w} \delta l}_{\text{Forces hydrauliques}} - \underbrace{\frac{\pi d^{3}}{6} \gamma_{s} \sin \alpha}_{\text{Poids}} + \underbrace{\frac{\pi d^{3}}{6} \gamma_{w} \sin \alpha}_{\text{Poussée d'Archimède}} (\text{VI.11})$$

où h_s est la hauteur de sol en surcharge, h_w , la charge hydraulique, δl , la longueur du pore, Φ' , l'angle de frottement entre les particules du matériau de base et celles du filtre et $0 \le K \le \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi'}{2}\right)$. Cette équation conduit à l'expression (VI.12) pour le gradient hydraulique critique.

$$i_{cr} = \frac{2}{\delta l \gamma_w} (\gamma_s h_s - \gamma_w h_w) \tan \Phi' \left(K + \sqrt{\cos^2 \alpha + K^2 \sin^2 \alpha} \right) + \frac{2d}{3\delta l \gamma_w} (\gamma_s - \gamma_w) \left(\cos \alpha \tan \Phi' + \sin \alpha \right) \quad (VI.12)$$

Si le gradient hydraulique appliqué au matériau de base excède ce gradient critique alors l'érosion peut s'initier dans ce matériau.

Longueur d'infiltration Les particules potentiellement érodables sont identifiées par l'intermédiaire du schéma probabiliste de SILVEIRA [Silveira, 1965] visant à déterminer la longueur d'infiltration la plus probable d'une particule de diamètre d d'un matériau de base au sein d'un filtre. Le parcours de cette particule s'envisage comme une succession de confrontations avec des

constrictions, chaque confrontation particule/constriction pouvant se solder soit par le passage soit par la capture de la particule. La condition de passage de la particule au travers de la constriction (ou condition de non capture) est que la taille de la constriction \bar{d} soit supérieure à celle de la particule d et d'après la CSD, il existe une probabilité $\mathfrak{p}(\bar{d}>d)$ que cette condition soit vérifiée :

$$\mathfrak{p}(\bar{d} > d) = 1 - \underbrace{\mathfrak{p}(\bar{d} \le d)}_{\text{donnée par la CSD}}$$
(VI.13)

Par conséquent, si la CSD est connue pour d parcourant l'ensemble des tailles de particules représentées dans le matériau de base, alors la probabilité de capture à l'échelle d'une constriction est connue pour toute particule du matériau de base.

Pour caractériser ensuite la progression de la particule dans une direction donnée (généralement celle de l'écoulement), la notion d'"unité de mouvement" est introduite. Avancer d'une unité peut alors se faire par différentes trajectoires, plus ou moins tortueuses, et chaque trajectoire se décompose en une succession de confrontations avec des constrictions. Le réseau poral est ici assimilé à un réseau tridimensionnel cubique (Fig. VI.3), une particule localisée dans un pore donné peut aller dans la direction considérée soit par un chemin direct, soit en empruntant au préalable un ou plusieurs chemins horizontaux. La probabilité que la particule de diamètre d puisse avancer d'une unité $P_u(d)$ dans la direction de l'écoulement est alors donnée par l'équation (VI.14) dont l'annexe H fournit une explication.

$$P_{u}(d) = \mathfrak{p}(\bar{d} > d) + \sum_{i=0}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \mathfrak{p}(\bar{d} > d) \right)^{4} \right] (1 - \mathfrak{p}(\bar{d} > d)) \mathfrak{p}(\bar{d} > d) \left\{ \left[1 - \left(1 - \mathfrak{p}(\bar{d} > d) \right)^{3} \right] (1 - \mathfrak{p}(\bar{d} > d)) \right\}^{i}$$
(VI.14)

La condition $P_u(d)^N = 0$ assure la capture de toute particule de diamètre d après qu'elle a successivement parcouru N(d) unités de mouvement dans la direction de l'écoulement. SILVEIRA s'intéresse préférentiellement au nombre de confrontations (ou nombre d'unités de mouvement franchies) N, avant que $\bar{P} \times 100\%$ des particules ne soient stoppées (équation (VI.15). Cela veut dire alors que certaines particules (en faible quantité) sont autorisées à poursuivre leur course après N confrontations. Indrarana et al. suggèrent de considérer un niveau de confiance $\bar{P} = 0.95$.

$$N(d) = \frac{\ln\left(1 - \bar{P}\right)}{\ln P_u(d)}$$
 (VI.15)

La distance L(d) parcourue par la particule au sein du filtre est alors donnée par la relation :

$$L(d) = \frac{\ln\left(1 - \bar{P}\right)}{\ln P_u(d)} \cdot D_{f,\text{moyen}}$$
 (VI.16)

où $D_{f,\text{moyen}}$ est la distance représentative associée à l'unité de mouvement. SILVEIRA propose de la prendre égale au diamètre moyen des particules du filtre calculé à partir de la PSD en masse. WITTMAN [Wittman, 1979] préfère considérer ce même diamètre mais calculé à partir de la PSD en nombre, ce qui a été retenu par INDRARATNA $et\ al.$

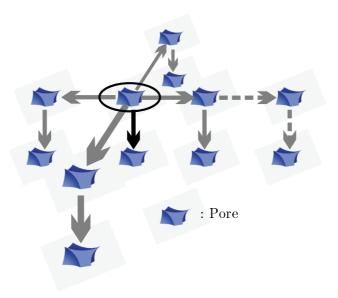


Fig. VI.3 – Possibilités d'avancer d'une unité de mouvement verticale dans un réseau poral cubique. Une particule, située dans le pore entouré, peut soit emprunter le chemin vertical direct (flèche noire), soit emprunter un chemin horizontal avant d'aller dans le sens de l'unité de mouvement (flèches grises), soit emprunter deux chemins horizontaux avant d'aller dans le sens de l'unité de mouvement (flèches grises en pointillés), etc.

Cette étude permet à LOCKE et al. [Locke et al., 2001] de distinguer trois gammes de tailles de particules :

- 1. Les particules les plus fines, ayant une distance d'infiltration L grande devant la taille du filtre (ou devant la longueur d'un élément du filtre si celui-ci a été discrétisé spatialement). Ces particules traverseront le filtre (ou un élément de la discrétisation) sans être capturées. La borne supérieure des diamètres de cette gamme de particules est notée d_p .
- 2. Les particules, un peu plus grandes, ayant une distance d'infiltration inférieure à celle trouvée précédemment mais au moins égale à la longueur unitaire $(N(d) \ge 1$, soit $L(d) \ge D_{f,\text{moyen}})$. Ces particules pénètrent dans le filtre mais y sont retenues et ne pourront plus être déplacées ultérieurement. Le diamètre correspondant à N(d) = 1 est noté d_r .
- 3. Les particules les plus grosses dont la distance d'infiltration n'atteint pas une longueur unitaire (N(d) < 1). Ces particules ne peuvent pas être lessivées et continuent d'appartenir au squelette solide stationnaire.

Il est à noter que la valeur 1 dans le critère $N(d) \geq 1$ a été choisie arbitrairement. Les auteurs justifient ce choix par le fait que seules 5% des constrictions ont une taille supérieure au diamètre associé au critère N(d)=1. Il leur semble donc raisonnable que les particules plus grandes que ce diamètre soient retenues tandis que des particules plus petites pénètreront d'au moins une faible distance au sein du filtre.

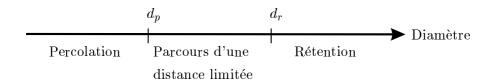


Fig. VI.4 – Définition de trois gammes de particules selon leur comportement migratoire

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement Pour connaître la fraction de particules mobiles et leur vitesse de déplacement, INDRARATNA et LOCKE proposent une résolution conjointe des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. L'accumulation de masse dans un élément durant un intervalle de temps dt est déterminée par l'équation de conservation de la masse (équation (VI.17)).

$$\frac{d\rho_m}{dt} + \frac{d(\rho_m v)}{dz} = 0 (VI.17)$$

L'écoulement de l'eau est ici supposé unidirectionnel dans la direction z, et de vitesse \mathbf{v} . ρ_m est la masse volumique du mélange {eau+particules solides transportées} et s'initialise par la

relation:

$$\rho_m = \frac{\rho_f V_f + \rho_s V_{tr}}{V_f + V_{tr}} \tag{VI.18}$$

où V_f et V_{tr} sont respectivement les volumes de fluide et de particules mobiles au sein de l'élement. ρ_f et ρ_s représentent respectivement les masses volumiques du fluide et des particules solides.

Le principe de conservation de la quantité de mouvement appliqué au volume de mélange V_m s'écrit :

$$\rho_m V_m \left(\frac{dv}{dt} + v \frac{dv}{dz} \right) = \sum F = -\nabla P V_m - \rho_m g V_m + \rho_m R V_m$$
 (VI.19)

Cette expression prend en compte les contributions des forces de pression, des forces volumiques gravitaires et des forces visqueuses. R est définie comme étant la force de traînée visqueuse par unité de masse de mélange mais son expression littérale n'est pas explicitée par les auteurs.

Actualisation de la PSD La variation de ρ_m au cours d'un pas de temps traduit des changements granulométriques liés au passage des particules mobiles d'un élément vers un autre. Ces changements sont répercutés dans le modèle mathématique par une modification des PSD des matériaux entre deux itérations. Pour actualiser les PSD, il convient dans un premier temps de distinguer les contributions du fluide (V_{Fout}) et des particules solides transportées (V_{Sout}) dans le volume de mélange sortant d'un élément, noté V_{out} , par la résolution du système (VI.20).

$$V_{Sout} + V_{Fout} = V_{out} = Q\Delta t (VI.20a)$$

$$\rho_s V_{Sout} + \rho_f V_{Fout} = \rho_m V_{out} \tag{VI.20b}$$

Q désigne le débit sortant.

La connaissance de V_{Sout} au temps t permet l'actualisation du volume solide total V_s restant dans l'élément i:

$$(V_s)_i^t = (V_s)_i^{t-1} + (V_{Sout})_{i-1}^t - (V_{Sout})_i^t$$
 (VI.21)

Pour mettre à jour la PSD, il faut répartir la quantité de particules solides perdues dans un élément sur l'ensemble des classes⁵ de particules qui étaient susceptibles d'être transportées hors de cet élément. La procédure suivante est alors appliquée : si l'élément i contient S% de particules dont le diamètre est inférieur à d_r alors le volume de sol restant dans la $j^{\text{ème}}$ classe de diamètres de particules peut être estimé par la relation (VI.22).

$$(V_{Sout})_{j}^{t} = (V_{Sout})^{t} \frac{P_{j}^{t-1}}{S}$$
 (VI.22)

avec

$$P_j^t = \frac{(V_{Sout})_j^{t-1} - (V_{Sout})_j^t}{V_s^t}, \quad \sum_j P_j^t = 1$$
 (VI.23)

⁵La PSD est discrétisée en un certain nombre de classes. Chacune de ces classes est représentée par un diamètre caractéristique de particules.

Les particules dont le diamètre est compris entre d_p et d_r sont définitivement retenues dans l'élément i+1. Elles représentent un volume solide $\sum_{d_p < j \leq d_r} V_{\text{retenus},j}^{i+1}$, désormais immobile dans l'élément i+1. Les particules dont le diamètre est inférieur à d_p peuvent continuer leur trajet et ne sont pas considérées comme des particules structurales de l'élément i+1. Elles conservent leur propriété de particules mobiles et ne sont donc pas prises en compte dans la PSD à partir de laquelle s'effectuera le calcul de la CSD au sein de l'élément i+1.

Prédiction de la porosité La porosité s'actualise à partir de la contribution du fluide au volume total de mélange sortant, issue de la résolution du système (VI.20).

$$n_i = \frac{(V_f)_i}{(V_T)_i} \tag{VI.24}$$

οù

$$(V_f)_i^t = (V_f)_i^{t-1} - (V_{Fout})_i^t + (V_{Fout})_{i-1}^t$$
(VI.25)

 n_i est la porosité de l'élément i (matériau de base, filtre ou élément de discrétisation de ces matériaux) et V_T est le volume total de cet élément.

Prédiction de la perméabilité La perméabilité est notamment régie par les particules les plus fines d'un sol. Aussi Indraratna et Locke proposent-ils d'utiliser les relations (VI.26), respectivement établies par Sherard et al. [Sherard et al., 1984] et Indraratna et al., 1996] à partir des diamètres caractéristiques d_5 , d_{10} et d_{15} du matériau exprimés en mm. La perméabilité, k est donnée en cm/s.

$$k = 0.35 \left(d_{15} \right)^2$$
 (VI.26a)

$$k = 1.02 \left(d_5 d_{10} \right)^{0.93}$$
 (VI.26b)

Koenders et Williams, 1992] proposent une formule d'estimation de la perméabilité qui prend aussi en compte l'état de densité du matériau via la porosité :

$$k = \frac{1}{\eta} \bar{d}^2 n \left(0.0035 \pm 0.0005 \right) \left(\frac{n}{1 - n} \right)^2$$
 (VI.27)

où \bar{d} est le diamètre moyen des particules en nombre.

INDRARATNA et LOCKE utilisent une combinaison (non explicitée) des relations (VI.26a), (VI.26b) et (VI.27) pour estimer la perméabilité. Les coefficients appliqués aux différentes relations sont choisis de manière à caler au mieux sur les résultats expérimentaux dont ils disposent.

Points forts et limites de cette approche L'équation (VI.17) revient à écrire l'équation de conservation de la masse pour un fluide monophasique en considérant que les particules transportées ont pour seule influence une modification de la masse volumique du fluide avec :

$$\begin{cases} \rho_m \equiv \rho_f \text{ modifiée} \\ v \equiv \text{ vitesse réelle de l'écoulement} \end{cases}$$

De même, l'équation (VI.19) traduit la conservation de la quantité de mouvement pour un fluide monophasique de masse volumique ρ_m qui occupe un volume V_m .

Néanmoins, avec une telle vision du problème, il devient problématique de définir la force de traînée visqueuse par unité de masse de mélange, R, intervenant dans l'équation (VI.19). Les formules usuellement proposées pour exprimer la force de traînée ([Ergun, 1952], équations de FORCHHEIMER) s'appliquent au calcul des efforts exercés sur un obstacle (ici, les particules transportées) par un fluide visqueux. Les modifications à apporter à ces formules lorsque le système isolé n'est plus simplement {les particules transportées} mais le mélange {fluide + particules transportées} sont incertaines.

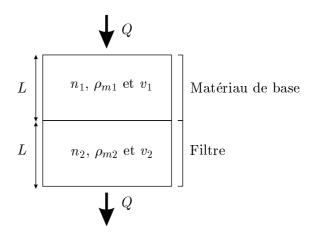


Fig. VI.5 – Configuration du problème de transport dans un multicouches

Revenons désormais au cas d'un système {matériau de base/filtre} avec un écoulement perpendiculaire à l'interface de contact entre les deux matériaux et faisons l'hypothèse qu'aucune particule du matériau de base n'est transportée (à savoir $\rho_{m1} = \rho_{m2} = \rho_f$). En régime permanent, l'équation de conservation de la masse du matériau de base selon Indraratna et Locke conduit à :

$$v_1 \frac{\rho_{m2} - \rho_{m1}}{L} + \rho_{m1} \frac{v_2 - v_1}{L} = 0$$

soit $v_1 = v_2$.

Or, dans un milieu poreux {matériau de base/filtre}, le principe de conservation, en régime permanent, impose la conservation du débit : $Q = q \times A =$ cste avec q, le débit fluide par unité

de surface et A, la surface considérée. De plus, $q = n \times v$, v étant la vitesse de l'écoulement dans l'espace poral. Par conséquent,

$$Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow v_1 n_1 A = v_2 n_2 A \tag{VI.28}$$

$$\Leftrightarrow v_1 n_1 = v_2 n_2, \tag{VI.29}$$

ce qui n'est pas compatible avec les résultats de Indraratna et Locke si $n_1 \neq n_2$.

Usuellement, dans un milieu poreux, c'est une équation macroscopique de conservation de la masse qui est écrite :

$$\frac{\partial \left(\rho_f n\right)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\rho_f n v\right) \tag{VI.30}$$

Cette équation est équivalente à l'équation de la phase fluide des théories continues d'érosion considérant trois phases (équation (VI.9b)). L'équation de conservation de la masse d'Indrarana et Locke semble donc valide seulement si les masses volumiques sont calculées par rapport au volume total de milieu poreux et avec v, la vitesse réelle de l'écoulement. Néanmoins, la forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement n'est pas non plus proposée sous une forme moyennée qui consisterait en :

$$\rho_f \left(\frac{\partial (nv)}{\partial t} + \nabla . (nvv) \right) = \nabla . \left(n(-p1 + \tau) \right) + n\rho_f g + f_{int}$$
 (VI.31)

avec τ , le tenseur des contraintes visqueuses et f_{int} la force d'interaction fluide/particule.

Ainsi la correction des équations d'Indraratna et Locke par considération de masses volumiques ramenées au volume total de milieu poreux ne suffit-elle pas à retrouver l'esprit de l'équation (VI.31) puisqu'ici la porosité est concernée par les dérivations.

Il y a donc des ambiguités dans le modèle d'Indraratna et Locke qui utilisent des équations écrites à l'échelle microscopique pour décrire des variables censées être représentatives sur tout un élément de discrétisation du filtre, à une échelle mésoscopique.

2 Nouveau modèle de filtration

2.1 Principe de l'hybridation

Le modèle proposé retiendra les points forts de l'approche de CIVIDINI et GIODA et de celle d'Indrarana et al.. La configuration du problème est ici similaire à celle étudiée par Indrarana et al. (Fig. VI.6) : un matériau de base se situe en amont d'un matériau filtrant. L'écoulement s'effectue perpendiculairement à l'interface entre ces deux matériaux et résulte d'une différence de charge hydraulique imposée aux frontières Γ_{sup} et Γ_{inf} . Les matériaux sont maintenus latéralement par une membrane imperméable. Pour traiter ce problème, nous proposons le raisonnement suivant :

1. Chaque couche de sol est considérée comme un matériau potentiellement instable sous l'effet de l'écoulement. La migration des particules fines au sein d'une même couche de

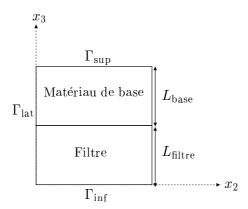


Fig. VI.6 – Configuration du problème de filtration étudié

matériau (soit le matériau de base, soit le filtre) peut être prise en compte par le modèle de Cividini et Gioda. Pour rappel, il consiste à écrire l'équation de conservation de la masse de particules transportées dans laquelle un terme source rend compte de l'érosion.

2. Mais on se propose de modifier l'expression littérale de ce terme source pour que les potentialités de départ de particules d'un élément soient conditionnées par les potentialités d'accueil de l'élément suivant. En ce sens, l'approche d'Indrarana qui établit un lien direct entre les potentialités de transport de particules au sein d'un élément et sa distribution de tailles de constriction nous semble pertinente. Par ailleurs, en prenant en compte les potentialités d'accueil dans l'élément suivant, il devient possible de quantifier le dépôt de particules au sein de cet élément (non prévu par le modèle de Cividini et Gioda). Les potentialités d'accueil d'un élément sont ici déterminées à partir du nouveau modèle de calcul de la distribution de tailles de constrictions proposé au chapitre IV.

En définitive, le couplage entre les deux approches permet de construire un modèle qui ne nécessite le calage que du seul coefficient numérique β . Tous les autres paramètres sont exprimés littéralement en fonction de grandeurs physiques intervenant dans le problème de transport. L'utilisation d'une loi d'érosion, comme dans l'approche de CIVIDINI et GIODA, permet de passer outre les difficultés de détermination de la force d'interaction fluide/particules solides. En dernier lieu, en intégrant la distribution de tailles de constrictions à la manière d'INDRARATNA et al., le nouveau modèle offre la possibilité de rendre compte du dépôt de particules transportées et des changements de granulométrie des différents matériaux soumis à l'écoulement.

2.2 Présentation algorithmique du nouveau modèle

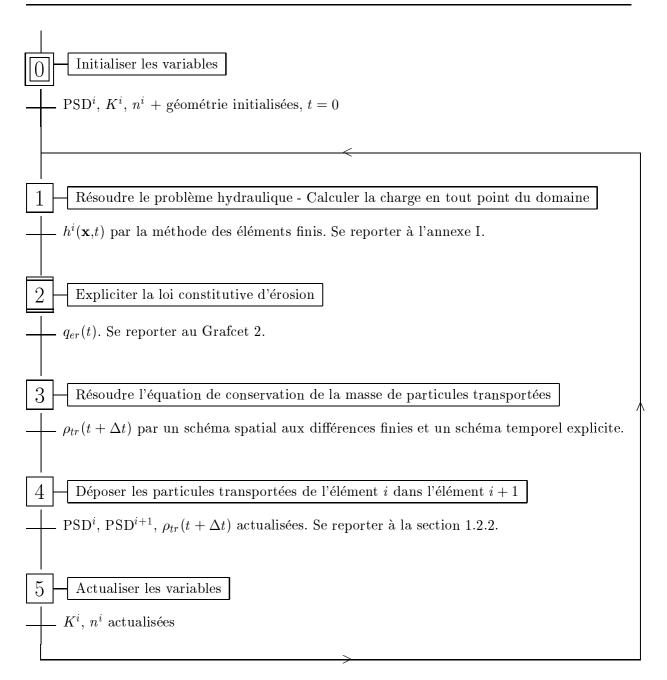
La procédure de couplage entre les deux méthodes est présentée au travers des représentations fonctionnelles référencées Grafcet⁶ 1 et Grafcet 2. Ces graphes décrivent la succession ordonnée des sous-problèmes à traiter pour résoudre le problème global de filtration. Les

⁶GRAphe Fonctionnel de Commande des Etapes et des Transitions

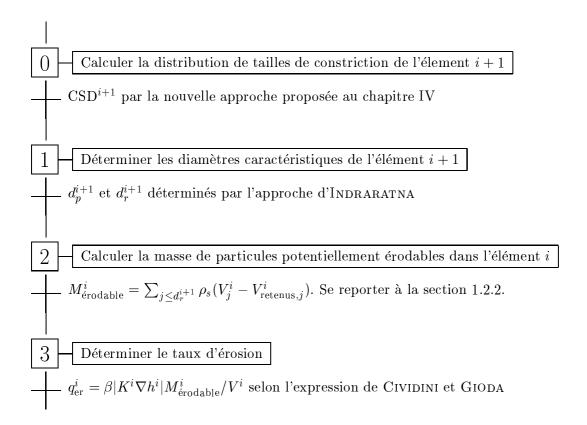
principes de résolution des différents sous-problèmes ont pour la plupart été présentés précédemment. Il est spécifié dans les grafcets où se reporter pour trouver les détails des explications. Les techniques de calcul utilisées sont développées en annexe de ce manuscrit.

Afin de préciser les notations utilisées dans ces grafcets :

- l'exposant i désigne la couche de matériau qui est considérée. Le matériau multi-couches fait effectivement l'objet d'une discrétisation spatiale verticale et l'incrémentation de i se fait dans le sens de l'écoulement. Ainsi, sur la figure Fig. VI.6, pour un écoulement vertical descendant, i=1 pour le matériau de base et i=2 pour le matériau filtre.
- l'indice j désigne une classe de particules. Pour rappel, l'utilisation du modèle d'Indraratna $et\ al.$ repose sur une discrétisation de la distribution de tailles de particules. V^i_j fait alors référence au volume des particules solides de la classe j, présentes dans l'élément i.



Grafcet 1: Présentation algorithmique de la méthode couplée



Grafcet 2: Détail de l'élaboration de la loi constitutive d'érosion

Dans le sous-problème correspondant à l'initialisation des variables, seule l'initialisation de la perméabilité peut ici s'avérer délicate. Il existe dans la littérature de multiples relations empiriques destinées à estimer la perméabilité d'un matériau à partir de sa granulométrie. Nous n'avons pas ici suivi la méthodologie de calcul d'INDRARATNA et nous avons donné préférence à deux formules qui d'une part, sont valides sur des étendues granulométriques assez larges et qui d'autre part, prennent en compte l'influence de l'état de compaction du matériau. La perméabilité, notée k, est alors calculée dans le présent modèle en effectuant la moyenne entre les résultats de ces deux formules.

La première estimation se base sur une version de la formule de KOZENY-CARMAN proposée par CARRIER [Carrier, 2003] :

$$k_1(\text{cm/s}) = 1.99 \times 10^4 \frac{1}{SF^2} \left(\frac{d_{\text{eff}}}{1\text{mm}}\right)^2 \frac{e^3}{1+e}$$
 (VI.32)

où e est l'indice des vides et SF, un facteur de forme dont la valeur dépend de l'angularité des particules. Dans le cas de particules sphériques, SF=6. $d_{\rm eff}$, défini par l'équation (VI.33), est un diamètre effectif calculé à partir de la distribution de tailles de particules, discrétisée en différentes classes. La classe j est délimitée inférieurement par le diamètre d_{inf_j} et bornée

supérieurement par d_{sup_j} . f_j représente le pourcentage de particules présentes dans la classe j.

$$d_{\text{eff}} = \frac{100\%}{\sum_{j} \frac{f_{j}}{d_{sup_{j}}^{0.404} d_{inf_{j}}^{0.595}}}$$
(VI.33)

La relation (VI.33) suppose que la distribution de tailles de particules est linéaire (en échelle logarithmique) entre les diamètres d_{inf_i} et d_{sup_i} .

La seconde estimation se réfère à une formule empirique proposée par Pavčič (équation (VI.34) citée par [Semar et Witt, 2007]). Cette formule résulte d'essais expérimentaux réalisés sur plus de 300 matériaux non cohérents de diamètre caractéristique solide d_{17} compris entre 0.008mm et 10mm.

$$k_2 = \frac{4\phi}{\nu} \sqrt[3]{C_u} \frac{e^3}{1+e} d_{17}^2 \tag{VI.34}$$

avec $\phi=1\text{ms}^{-2}$ pour les sols de graviers sablonneux et $\phi=0.35$ à 0.4ms^{-2} pour les graviers concassés. C_u représente le coefficient d'uniformité du matériau et e, son indice des vides.

L'initialisation de la matrice des perméabilités ${\bf K}$ se base sur l'hypothèse d'un matériau isotrope.

$$\mathbf{K} = \frac{k_1 + k_2}{2} \mathbf{I_n} \tag{VI.35}$$

où I_n est la matrice identité de dimension n. Afin de donner quelques ordres de grandeur, pour le matériau de granulométrie serrée présenté au chapitre II qui est un sol grenu à base de graves, les formules précédemment présentées conduisent à $9 \le k_1 \le 12 \text{cm/S}$ et $6 \le k_2 \le 12 \text{cm/s}$ dans la gamme de porosité $[0.34\,;\,0.36]$. Pour le matériau de granulométrie étalée également présenté au chapitre II qui correspond à un sable à granulométrie étalée, $10^{-1} \le k_1 \le 4.10^{-1} \text{cm/s}$ et $10^{-1} \le k_2 \le 5.10^{-1} \text{cm/s}$ dans la gamme de porosité $[0.25\,;\,0.33]$.

3 Application du modèle de transport proposé

Pour décrire le comportement du nouveau modèle de transport, nous proposons de l'appliquer sur un matériau bicouche "matériau de base fin, destiné à être transporté - matériau filtre grossier". Compte-tenu du manque de résultats expérimentaux publiés et bien documentés, une simulation numérique discrète est mise au point pour présenter un exemple de calibration du modèle de transport. Néanmoins, à l'heure actuelle, la prise en compte de l'interaction fluide/solide n'est pas implémentée dans la plupart des codes aux éléments discrets. Déterminer l'expression analytique de la force transmise par le fluide sur les particules est un thème de recherche à part entière que le temps imparti à ce travail de thèse ne nous a pas permis d'explorer. Nous avons donc fait le choix de conduire une expérience numérique dans laquelle le transport n'est pas consécutif à un écoulement fluide mais résulte de l'application de la

gravité sur l'ensemble du matériau bicouche (donc milieu sec). Dans cette étude, la capture des particules est supposée régie par un mécanisme d'exclusion de taille. La sollicitation conditionne les chemins de filtration empruntés par les particules mais la capture ne dépend que de la géométrie du milieu poreux. Les paramètres de l'expérience numérique ont été choisis de manière à rendre l'expérience la plus fidèle possible aux conditions hydrauliques supposées dans le modèle de transport.

Le bicouche choisi pour l'expérience se scinde en :

- 1. un matériau de base (fin) correspondant au matériau de granulométrie étalée log-linéaire dans son état le plus lâche, présenté au chapitre II,
- 2. un matériau filtre (grossier) correspondant au matériau de granulométrie serrée dans son état le plus lâche, également présenté au chapitre II.

Les courbes granulométriques de ces deux matériaux sont superposées sur la figure Fig. VI.7 où apparaît également la distribution de tailles de constrictions du filtre. La courbe granulométrique du matériau de base est définie sur une gamme de diamètres qui chevauche le domaine de définition de la distribution de tailles de constrictions du filtre. Par conséquent, les conditions sont réunies pour qu'un transport de particules s'initie du matériau de base vers le filtre. Néanmoins,

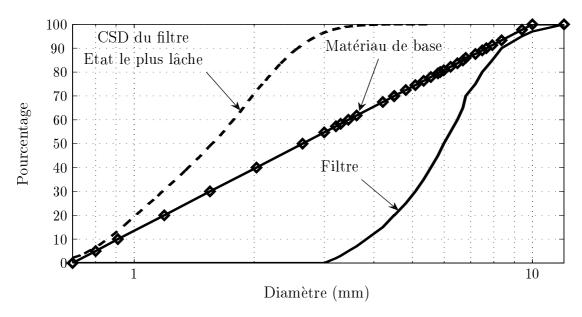


Fig. VI.7 – Courbes granulométriques classiques du filtre et du matériau de base ainsi que la distribution de tailles de constrictions du filtre dans son état le plus lâche issue de la MEDTD.

selon les critères de filtre usuels $(d_{15,filtre}/d_{85,base} = 0.63 < 4)$, on peut s'attendre à ce qu'il se produise un phénomène d'auto-filtration essentiellement à l'interface entre les deux matériaux. En effet, les particules du matériau de base étant parvenues à s'infiltrer dans le filtre et y étant retenues, devraient progressivement permettre de retenir les particules les plus fines en amont.

Selon les critères empiriques, le bicouche ne doit pas présenter d'érosion continue et doit tendre vers un état stable. Ce cadre d'étude est intéressant puisqu'il permet des comparaisons entre les prédictions du modèle et les expériences numériques sur les états *stabilisés*.

3.1 Comportement du matériau lors de la simulation numérique discrète

3.1.1 Procédure de la simulation

Le dispositif de simulation numérique se décompose en quatre parties (Fig. VI.8):

- 1. une matrice granulaire fixe correspondant au matériau filtre (e=0.56),
- 2. un ensemble de particules libres de se déplacer constituant le matériau de base,
- 3. une paroi latérale constituée de grains sphériques fixes. Cette paroi a pour rôle d'assurer le maintien du matériau de base.
- 4. une zone d'écoulement libre pour les sphères du matériau de base ayant intégralement traversé l'épaisseur du filtre.

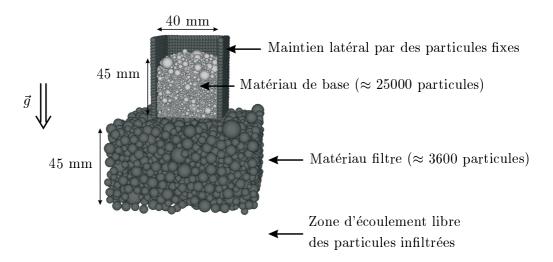


Fig. VI.8 – Dispositif expérimental numérique. Les particules en gris foncé sont fixes tandis que celles en gris clair sont susceptibles de se mouvoir sous l'effet de la gravité (\vec{g}) . Seules trois des quatre faces du cube de particules servant au maintien latéral sont ici représentées.

Justification de la géométrie du dispositif : La dissymétrie de ce dispositif entre le matériau de base et le filtre nécessite quelques justifications. Elle est principalement due à une nécessité de restreindre le nombre de particules à traiter dans les calculs discrets qui s'effectuent sur une station de travail⁷. Le matériau de base est de granulométrie étalée et se compose des

⁷PowerPC G5 (bi-processeur : 2x2GHz), 1.5Go DDR SDRAM, Mac OS X Panther

particules les plus fines. Une faible augmentation du volume de ce matériau engendrera une augmentation importante du nombre de particules. Environ 25000 particules sont nécessaires pour occuper un volume de 40mm³, près de 50000 particules devront être utilisées pour réaliser un échantillon de 50mm³. Nous avons donc fait le choix de limiter au maximum les dimensions du matériau de base tout en nous assurant de la représentativité de nos volumes d'étude. L'épaisseur des couches³ (ici égale à 45mm) est choisie de manière à avoir, sous le matériau de base, un volume de matériau filtre au moins égal au volume minimal de mesure sur lequel la définition de la distribution de tailles de constrictions a un sens (se reporter au chapitre II). Le volume minimal d'étude est imposé par le plus grossier des matériaux, ici le filtre. De plus, comme le met en évidence la figure Fig. VI.8, la section transversale du matériau filtre est de plus grande dimension que celle du matériau de base. Par ce procédé, nous tentons d'occulter les problèmes d'effets de bord et nous nous assurons que tout le volume du matériau filtre dans lequel est susceptible de se produire la migration est représentatif.

Protocoles de la simulation : Les simulations numériques sont ici menées à l'aide d'une approche de type dynamique des contacts. Pour qu'une comparaison des résultats de la simulation avec les prédictions du modèle soit possible, il nous faut trouver des protocoles de simulation et des paramètres numériques pour lesquels l'état stabilisé du bicouche à l'issue d'une sollicitation gravitaire corresponde au mieux à l'état stabilisé du bicouche soumis à un écoulement fluide. Deux expériences numériques ont été envisagées avec l'objectif de compenser l'absence de fluide :

- Dans le premier protocole proposé (référencé protocole 1), les 25000 particules du matériau de base sont disposées au-dessus du matériau filtre et collectivement soumise à la gravité.
 Pour rendre compte du fait que l'écoulement fluide favorise le mouvement des particules, le coefficient de frottement interparticulaire est pris égal à 0.
- Dans le second protocole (protocole 2), il a été considéré qu'un écoulement fluide a un effet déstabilisateur sur le matériau, ce que le lâcher collectif des 25000 particules ne reproduit pas dans la procédure 1. Pour encourager le brassage des particules du matériau de base dans les simulations numériques, la procédure 2 repose sur des lâchers successifs de particules. Tout d'abord, les 5000 particules du matériau de base les plus proches de l'interface sont soumises à la gravité. Lorsque celles-ci sont stabilisées, les 5000 particules supérieures sont lâchées depuis les positions qu'elles auraient occupées initialement lors d'un lâcher collectif, et ainsi de suite. Pour des raisons de puissance de calcul, seuls quatre lâchers de 5000 particules ont été réalisés. Dans la mesure où la migration concerne préférentiellement les particules à proximité de l'interface, on considèrera que la migration de ces 20000 particules, représentant 30 mm d'épaisseur du matériau de base, est suffisant pour nous autoriser une comparaison avec la procédure 1.

⁸Le modèle de transport a été implémenté sous l'hypothèse que toutes les couches ont une même épaisseur. La simulation numérique s'inscrira donc dans ce cadre d'étude.

De plus, il va généralement être très difficile de reproduire expérimentalement toutes les conditions aux limites imposées dans un modèle continu qui nécessiterait l'emploi de conditions périodiques. Les outils de simulation discrète disponibles ne donnent pas la possibilité d'imposer de telles conditions. En toute rigueur, la largeur d'étude du matériau filtre correspond exactement à celle du matériau de base. Pour que, dans l'expérience numérique, le filtre soit représentatif sur toute la largeur du matériau de base, nous avons agrandi les dimensions du filtre par rapport à celles du matériau de base. Rien dans la géométrie du système n'oblige donc les particules à s'écouler exactement au droit du matériau de base. Or, pour rester conforme au modèle continu en termes de porosité, il est important qu'une majorité de particules du matériau de base, infiltrées dans le filtre, demeurent au droit du matériau de base. Cette condition est nécessaire pour que les particules infiltrées modifient effectivement les propriétés de filtration du matériau filtre au sein du volume d'étude. Pour limiter la dispersion transversale des particules infiltrées, le coefficient de restitution imposé est faible $(e_N=0.2, e_T=0.1)$ dans les deux protocoles de simulation proposés.

3.1.2 Analyse des résultats de l'expérience numérique

Lors des simulations numériques, le comportement du matériau bicouche est conforme aux prédictions des critères de filtre : des particules du matériau de base parviennent à migrer au sein du matériau filtre mais le phénomène d'auto-filtration à l'interface se produit et permet au système bicouche d'atteindre finalement un état stable. Sur cet état stabilisé, l'expérience numérique donne accès à deux grandeurs intéressantes :

- la granulométrie des particules ayant réussi à pénétrer dans le filtre et y étant capturées,
- la granulométrie des particules présentes dans la zone d'écoulement, qui sont donc parvenues à traverser les 45mm du matériau filtre.

La surface libre du matériau filtre étant irrégulière, il nous faut définir un critère pour juger s'il y a infiltration ou non des particules du matériau de base dans le filtre. Par extrapolation du critère de représentativité volumique, l'entrée dans le filtre correspond ici à l'altitude z_e à partir de laquelle les porosités dans les plans $z = \text{constante} \leq z_e$ sont à peu près constantes. Cela revient ici à descendre d'environ un rayon de la plus grande particule du filtre par rapport au point le plus haut de la surface libre.

Les figures Fig. VI.9 (a) et (b) présentent respectivement les granulométries des particules capturées et passantes obtenues à partir des états stabilisés issus des protocoles 1 et 2. Pour chaque protocole, deux courbes granulométriques des particules capturées sont tracées : l'une restreint l'étude aux particules restées au droit du matériau de base (Volume d'étude V_e de caractéristique homogène), l'autre considère toute la largeur du matériau filtre (Volume total V_{tot}). Ici, V_e =0.16 V_{tot} . La figure Fig. VI.9 (a) met en évidence que les deux protocoles de simulation conduisent à des courbes granulométriques de particules capturées similaires. Le protocole 1, correspondant au lâcher collectif avec un coefficient de frottement nul tend

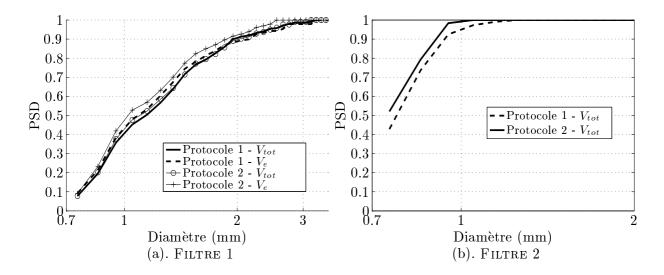


Fig. VI.9 – (a). Courbe granulométrique des particules capturées dans le matériau filtre. (b). Courbe granulométrique des particules ayant traversé le filtre.

à permettre l'infiltration de plus grosses particules que le protocole 2, ce qui est confirmé par la figure Fig. VI.9 (b). Néanmoins, les écarts entre les courbes granulométriques restent suffisamment faibles pour affirmer que les deux protocoles s'accordent sur le comportement du matériau bicouche.

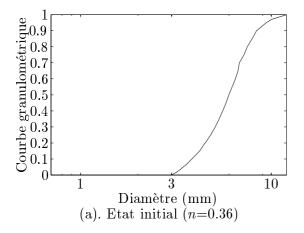
A partir de ces granulométries de particules capturées, il est possible d'estimer le diamètre de rétention du filtre à l'état initial. Il correspond au diamètre des plus grosses particules ayant pénétré dans le filtre et appartient à l'intervalle [2.6mm, 3.2mm] (Fig. VI.9 (a)). De plus, les plus grandes particules parvenues à parcourir toute l'épaisseur du filtre ont des tailles légèrement supérieures à 1 mm (Fig. VI.9 (b)), donc ici :

$$d_p \approx 1 \text{mm} \pm 0.2 \text{mm} \tag{VI.36}$$

$$d_r \approx 2.9 \text{mm} \pm 0.3 \text{mm} \tag{VI.37}$$

Les courbes granulométriques du matériau filtre au début et à l'issue de l'expérience numérique sont respectivement présentées sur les figures Fig. VI.10 (a) et (b). Il apparaît que, en termes de masse, très peu de particules du matériau de base se sont infiltrées dans le matériau filtre. Dans la présente étude, nous avons cherché à définir une configuration d'étude qui puisse à la fois être gérée par un code aux éléments discrets spécifique aux approches locales, et être modélisée par une approche continue réservée à l'échelle macroscopique. Mais dans le cas présent, les restrictions sur la taille du système et l'étendue granulométrique des matériaux imposées par la simulation numérique discrète mènent à des résultats trop peu contrastés pour permettre une comparaison quantitative. Néanmoins, réaliser une expérience numérique à plus grande échelle

ou en utilisant un matériau de base plus fin conduirait à des temps de calculs prohibitifs. Nous nous limiterons donc ici à quelques remarques qualitatives sur le comportement du matériau.



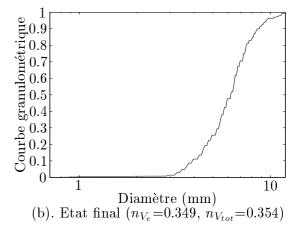


Fig. VI.10 – Courbes granulométriques du matériau filtre (a).au début de l'expérience numérique et (b). à la fin de l'expérience numérique. Les porosités des états initial et final sont mentionnées sur la figure.

3.2 Simulation du transport par modèle continu

Pour modéliser la simulation numérique précédente, le dispositif de la figure Fig. VI.11 est adopté comme configuration initiale du modèle de transport.

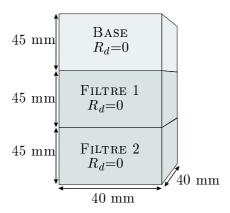


Fig. VI.11 – Dispositif analysé grâce au modèle de transport.

Géométrie : La colonne de sol est divisée en trois éléments de 45mm d'épaisseur chacun. Le filtre est scindé en deux éléments : l'élément FILTRE 1 équivaut au matériau filtre de l'expérience numérique et l'élément FILTRE 2 est comparable à la zone d'écoulement libre.

Propriétés des matériaux: Les courbes granulométriques du matériau de base et du filtre sont discrétisées à l'aide de 34 diamètres. Conformément à l'étude menée au chapitre II, les indices des vides minimal et maximal valent respectivement 0.33 et 0.49 pour le matériau de base, 0.51 et 0.56 pour le matériau filtre. Les densités relatives sont toutes prises égales à 0. La perméabilité initiale de chaque élément est calculée à partir des courbes granulométriques. La valeur attribuée à la perméabilité correspond à la moyenne des estimations obtenues par les formules de KOZENY-CARMAN (équation (VI.32) et de PAVCIC (équation (VI.34)).

Traitements informatiques: Dans la présente configuration, les épaisseurs d'éléments sont très fines. Le modèle de transport doit donc prédire l'évolution des matériaux à très petite échelle. LOCKE et INDRARATNA [Locke et al., 2001] reconnaissent que dans l'approche d'INDRARATNA et al. telle qu'elle est présentée dans ce chapitre, le comportement du premier élément du filtre nécessite un traitement particulier. Ils le considèrent comme un élément de transition d'épaisseur égale à $5D_{f,moyen}$ que les particules de tailles inférieures à d_p traversent instantanément, sans satisfaire le taux de transport issu des équations de conservation. Or, dans notre exemple, l'enjeu est de prédire précisément le comportement de ce premier élément. Par conséquent, certaines hypothèses d'INDRARATNA et al. nécessitent d'être modifiées. Le schéma de résolution temporel étant explicite, il s'accompagne d'un pas de temps relativement faible au cours duquel une particule ne peut pas parcourir tout l'épaisseur de l'élément. De ce fait, la distribution de tailles de constrictions est ici calculée à partir de la totalité des particules présentes dans le filtre, et pas seulement celles de tailles supérieures à d_p comme le préconisent INDRARATNA et al.

La configuration du dispositif expérimental est alors entièrement définie. Compte-tenu de notre choix d'utiliser un schéma de résolution temporel explicite, il nous faut désormais déterminer le pas de temps à utiliser pour un bon déroulement des calculs. Une fois ce paramètre numérique calé, il sera alors possible de mener une procédure d'identification du coefficient numérique β intervenant dans la loi d'érosion du problème de transport.

3.2.1 Identification du pas de temps

CIVIDINI et GIODA utilisent un schéma de résolution implicite qui permet de passer outre, dans une certaine mesure, les problèmes de détermination du pas de temps. Néanmoins, ils s'imposent une évolution de la perméabilité au cours d'une itération. INDRARATNA et al. raisonnent à partir d'un schéma explicite mais ne spécifient pas le pas de temps utilisé dans leurs travaux. En l'absence de référence, nous proposons donc de procéder à une étude paramétrique pour identifier le pas de temps associé à une valeur de β fixée.

Le pas de temps maximal admissible Δt_{max} est considéré égal au temps nécessaire à une particule, s'écoulant à la vitesse de DARCY, pour parcourir un élément d'épaisseur L_{elt} . Nous

proposons alors de mener une étude paramétrique sur un coefficient $\alpha \in]0,1]$ tel que :

$$\Delta t = \alpha \Delta t_{max} = \alpha L_{elt} \frac{1}{\max(K_{\text{BASE}}, K_{\text{FILTRE 1}}, K_{\text{FILTRE 2}})i}$$
(VI.38)

où K_{BASE} , $K_{\text{FILTRE 1}}$ et $K_{\text{FILTRE 2}}$ représentent respectivement les perméabilités des éléments BASE, FILTRE 1 et FILTRE 2. Le paramètre β sera pris égal à 10^{-3} .

La figure Fig. VI.12 (a) présente l'évolution de la perméabilité équivalente du matériau multi-couches pour des pas de temps égaux à $\alpha \Delta t_{max}$, $\alpha = 1/5$, 1/10, 1/50, 1/100, 1/150.

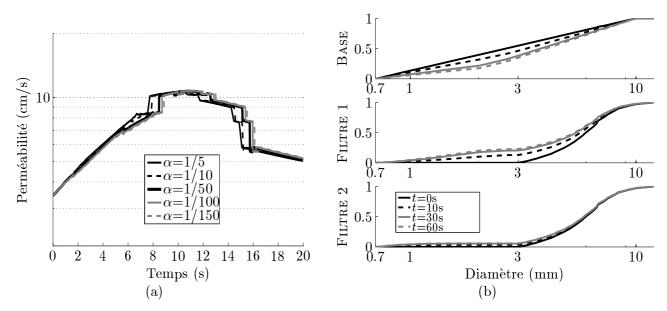


Fig. VI.12 – (a). Evolution de la perméabilité équivalente du matériau multi-couches pour $\Delta t = \alpha \Delta t_{max}$, $\alpha = 1/5$, 1/10, 1/50, 1/100, 1/150 ($\beta = 10^{-3}$). (b). Evolution des courbes granulométriques de BASE, FILTRE 1 et FILTRE 2 au cours du temps ($\beta = 10^{-3}$).

Dans le cas d'un écoulement perpendiculaire aux interfaces entre éléments, la perméabilité équivalente se calcule par :

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_{\text{BASE}}} + \frac{1}{K_{\text{FILTRE 1}}} + \frac{1}{K_{\text{FILTRE 2}}}$$
(VI.39)

Ainsi l'élément de plus faible perméabilité conditionne-t-il la perméabilité équivalente.

L'augmentation de perméabilité équivalente des premières itérations (Fig. VI.12 (a)) met en évidence le lessivage des particules fines du matériau de base (Fig. VI.12 (b)). La perte d'éléments fins du matériau de base se traduit par une augmentation de la perméabilité de l'élément BASE. Néanmoins, l'apport de particules au sein du filtre n'est pas encore suffisant pour modifier la perméabilité de FILTRE 1. En effet, si la quantité de particules infiltrées ne provoque pas de variation significative sur le $D_{f,\text{moyen}}$ ou le d_5 de la granulométrie du filtre alors, ces changements ne se répercutent pas dans les estimations de la perméabilité par les

formules de Kozeny-Carman et Pavcic. En conséquence, K_{Base} augmente, $K_{\text{Filtre 1}}$ et $K_{\text{Filtre 2}}$ restent du même ordre de grandeur donc K_{eq} augmente.

La perméabilité équivalente diminue lorsque suffisamment de particules du matériau de base se sont accumulées dans FILTRE 1. Cette diminution de perméabilité reflète le pouvoir de rétention du filtre vis-à-vis du matériau de base donc son efficacité, et conduit à une stabilisation du matériau bicouche.

Sur la figure Fig. VI.12 se distinguent deux familles de courbes : les courbes associées aux grandes valeurs de α (α =1/5, 1/10) forment un premier ensemble, celles associées aux valeurs plus faibles (α =1/50, 1/100, 1/150) en forment un second. Les différences s'expriment principalement dans le régime transitoire et les courbes tendent à se rejoindre vers un même état stabilisé. Plus le pas de temps est grand, plus la migration de particules au cours d'une itération est conséquente, plus les changements de granulométrie et donc de perméabilité apparaissent rapidement.

La figure Fig. VI.13 se focalise sur le comportement de l'élément FILTRE 1 au cours de la simulation. La figure Fig. VI.13 (a) montre l'évolution des diamètres caractéristiques des

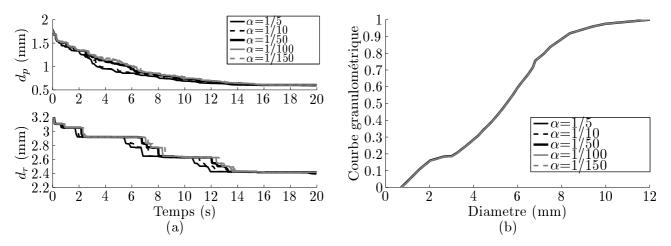


Fig. VI.13 – Comportement de l'élément FILTRE 1. (a). Evolution des diamètres caractéristiques de percolation d_p et de rétention d_r , (b). Courbe granulométrique de l'élément à l'issue des 20 secondes de simulation.

propriétés de transport de FILTRE 1. La diminution de d_p et d_r au cours du temps révèle le phénomène d'auto-filtration à l'interface BASE/FILTRE 1. De même que précédemment, on retrouve deux familles de courbes selon les valeurs de α . La figure Fig. VI.13 (b) qui présente la granulométrie de FILTRE 1 en fin de simulation confirme ce qu'indiquait l'évolution de la perméabilité, à savoir que le pas de temps n'a ici que peu d'influence sur l'état du multi-couches à l'issue des 20 secondes de simulation.

A la lumière de l'ensemble de ces résultats, le choix de $\alpha=1/50$ nous paraît être un bon compromis entre la précision des résultats et le temps de calcul.

3.2.2 Identification du paramètre β

Etude paramétrique: La figure Fig. VI.14 présente l'évolution de la perméabilité équivalente au cours du temps pour $\beta=10^{-4}$, 3.10^{-4} , 5.10^{-4} , 10^{-3} , 5.10^{-3} . Il apparaît que l'augmentation de la valeur de β conduit à des milieux de moins en moins perméables. Plus β est grand, plus

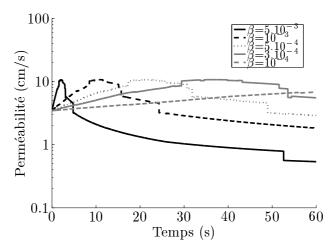


Fig. VI.14 – Evolution de la perméabilité équivalente au cours du temps pour $\beta=10^{-4},\ 3.10^{-4},\ 5.10^{-4},\ 10^{-3},\ 5.10^{-3}$.

l'infiltration de particules dans le filtre est massive (Fig. VI.15) et brutale. Dans ce cas, la

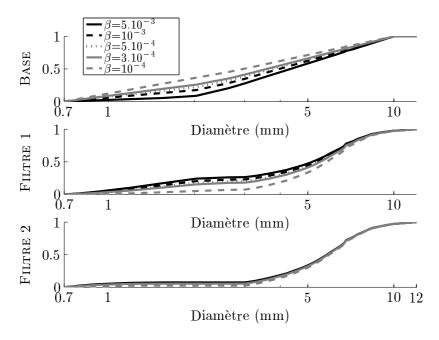


Fig. VI.15 – Courbes granulométriques des différents éléments après 60 secondes de simulation pour $\beta=10^{-4}$, 3.10^{-4} , 5.10^{-4} , 10^{-3} , 5.10^{-3} .

capacité de rétention du filtre augmente rapidement avec une diminution rapide de d_p et d_r (Fig. VI.16 (a)).

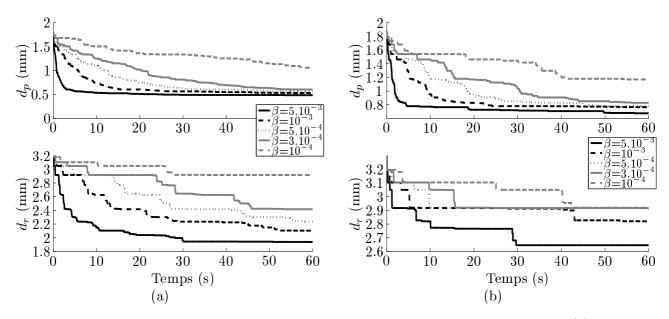


Fig. VI.16 – Evolution des diamètres caractéristiques de percolation et de rétention (a). pour FILTRE 1, (b). pour FILTRE 2.

Dans la présente approche, l'arrêt du processus de migration dépend des diamètres caractéristiques et de la perméabilité. Aucun critère ne porte sur la porosité. Si l'on permet des infiltrations massives de particules au cours d'une itération, le risque est d'atteindre des porosités extrêmement basses et non réalistes (Fig. VI.17).

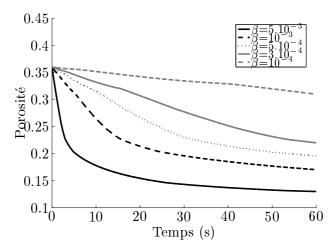


Fig. VI.17 – Evolution de la porosité dans FILTRE 1 au cours du temps pour $\beta = 10^{-4}$, 3.10^{-4} , 5.10^{-4} , 10^{-3} , 5.10^{-3} .

Choix du β par confrontation à l'expérience numérique Tout d'abord, il est à noter que le modèle de transport et l'expérience numérique s'accordent sur l'étendue granulométrique des particules sujettes au transport. La figure Fig. VI.15 montre que le modèle de transport prédit des particules capturées dans FILTRE 1 de tailles comprises entre 0.7 et 3.2 mm et des particules arrivant dans FILTRE 2 de tailles inférieures à 1.6mm. L'expérience numérique discrète aboutit à d_r entre 2.6mm et 3.2mm et à d_p de l'ordre du millimètre. Le fait que le modèle de transport approche la simulation numérique par excès peut s'expliquer par l'utilisation de \bar{P} =0.95 dans le modèle de calcul de la distribution de tailles de constrictions. En effet, cela revient à considérer que les particules de tailles inférieures au d_{95} de la distribution de tailles de constrictions peuvent s'insérer dans le filtre. Or, l'analyse du chapitre V a montré que si cette estimation semble réaliste pour les matériaux de granulométries étalées, pour le présent matériau de granulométrie serrée, l'estimation de d_r par la fonction de connectivité (Tab. V.1) conduit à une valeur de 2.1mm.

Pour les valeurs de β testées, l'injection de particules permise dans les premiers pas de temps est trop importante par rapport à l'expérience numérique. Tout se passe comme si la réactualisation des propriétés de transfert du matériau au cours du temps se faisait en retard par rapport à la migration des particules. Dans l'expérience numérique, les particules les plus grosses du matériau de base viennent rapidement colmater l'interface et arrêter le processus de filtration. La figure Fig. VI.18 s'intéresse à la répartition des particules du matériau de base capturées dans

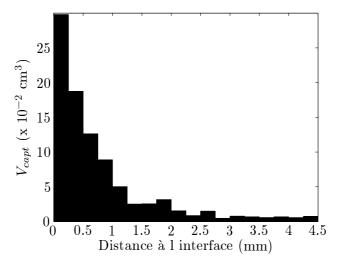


Fig. VI.18 – Evolution du volume occupé par les particules capturées V_{capt} en fonction de la distance à l'interface matériau de base/filtre. La répartition des particules bloquées s'appuie sur des couches de matériaux d'épaisseur $0.25 \,\mathrm{mm}$.

le matériau filtre et montre l'évolution du volume occupé par les particules bloquées en fonction de la distance à l'interface. Il apparaît que la répartition du matériau de base infiltré dans le filtre n'est pas homogène, contrairement à ce que suppose le modèle continu. En effet, dans le modèle

continu, à chaque itération, le calcul de la distribution de tailles de constrictions s'effectue comme si les particules infiltrées étaient redistribuées dans tout le volume. Le modèle continu ne rend pas compte de ce colmatage en surface et l'apport en particules du matériau de base doit être suffisamment conséquent pour que changent les propriétés de transfert. L'échelle à laquelle le modèle de transport peut s'avérer pertinent n'est pas celle de l'expérience numérique : l'échelle représentative de la modélisation discrète est celle de la particule, l'échelle représentative du modèle de transport est celle de l'élément de discrétisation. Il ne nous est alors pas possible d'identifier β à partir de l'expérience menée. Le modèle continu fonctionne comme si le premier élément du filtre représentait l'interface entre le matériau de base et le matériau filtre. Ce premier élément a surtout pour rôle de faire évoluer les propriétés de transfert du matériau filtre.

4 Mise en œuvre du modèle

Le modèle développé ici s'applique aux problèmes de filtration dans des sols multi-couches non cohérents. Il s'attache à prédire le taux de migration d'un matériau de base vers un matériau filtre sous l'effet d'un écoulement. Le tableau VI.1 récapitule l'ensemble des données fournies pour le déroulement des calculs lors de l'application. Dans le tableau VI.2 figurent les principales hypothèses sur lesquelles repose le calcul de la loi d'érosion et susceptibles d'influer sur les prédictions du modèle de transport. Le tableau VI.3 présente les principaux résultats que l'on peut déduire du modèle.

on 1 '	T 7T 1	D /	, .	\ 1		1	111 1	1
Tab.	VI.I -	Donnees	nécessaires	a. I	a mise en	œuvre du	modele de	transport

Tab. $VI.1 - D_0$	onnées nécessaires à la mise en œuvre du modèle de transport
Caractéristiques des matériaux	 Courbes granulométriques de Base, Filtre 1 et Filtre 2 par la donnée de 34 couples (diamètre, pourcentage massique), Indices des vides minimaux et maximaux de tous les matériaux, Porosités de tous les matériaux à l'état initial.
Discrétisation spatiale	 Différences finies - Modèle de transport : Ici, discrétisation monodimensionnelle mais le passage bidimensionnel est envisageable, 3 éléments de discrétisation, Dimensions d'une couche. Pour alléger la procédure de calcul, le modèle ne gère que des couches de mêmes dimensions. Eléments finis - Calcul de la charge hydraulique : Maillage par des éléments isoparamétriques à 4 nœuds.
Discrétisation temporelle	– Pas de temps, paramètre numérique à choisir avec précaution : $\Delta t = \alpha \Delta t_{max},$ – Temps total de la simulation.
Conditions aux limites	Charge hydraulique aux frontières du domaine.
Paramètre du modèle	Le coefficient numérique β , paramètre difficile à identifier qui nécessite un calage spécifique.

Tab. VI.2 – Hypothèses sur lesquelles repose le calcul de la loi d'érosion

Hypothèses de la loi d'érosion

D'une part, l'établissement de la loi d'érosion suppose de choisir des méthodologies de calcul :

- la formulation de la loi d'érosion,
- la procédure de calcul de la distribution de tailles de constrictions,
- la procédure de calcul de la probabilité d'avancer P_u (équation (VI.14)),
- l'estimation de la perméabilité (formules empiriques de Kozeny-Carman et Pavcic).

D'autre part, certains paramètres sont introduits dans les expressions littérales des grandeurs physiques du problème :

- \bar{P} , le niveau de confiance (équation (VI.16)), est supposé égal à 0.95.
- $D_{f,\text{moyen}}$ (équation (VI.16)) est calculé en utilisant la distribution de tailles de particules en nombre,

Tab. VI.3 – Résultats fournis par le modèle de transport

Résultats

Pour chaque couche de matériau, le modèle fournit :

- l'évolution de la courbe granulométrique au cours du temps,
- l'évolution de la perméabilité, de la porosité,
- l'évolution des diamètres d_p et d_r caractéristiques des potentialités de migration dans la couche.

VI.5 Conclusion 151

5 Conclusion

Le modèle de transport proposé dans ce chapitre est développé à partir des approches de CIVIDINI et GIODA, et d'INDRARATNA et al.. Pour mieux appréhender le comportement à l'échelle macroscopique, il s'inscrit dans le cadre des théories continues de l'érosion. Il prend en compte l'information locale issue de la caractérisation topologique des vides au travers de la distribution de tailles de constrictions. Ce modèle nécessite l'introduction d'une loi d'érosion dépendant d'un coefficient numérique qu'il est nécessaire de calibrer.

Le manque d'essais expérimentaux bien documentés oblige à une calibration sur des simulations numériques discrètes. Mais l'échelle des transports de matière est de l'ordre du mètre tandis que l'échelle des échantillons discrets est de l'ordre du centimètre. D'autre part, la filtration met en jeu des gammes de tailles de particules très étendues; mais rares sont les simulations numériques réalisées sur des matériaux de granulométries étalées en raison du nombre important de grains qui sont alors nécessaires pour occuper un volume représentatif.

Sur la base d'un compromis entre les phénomènes à modéliser et les puissances de calcul disponibles, nous avons proposé un cas d'étude réalisable numériquement et analysable par le modèle de transport. Mais la configuration adoptée conduit à des migrations de particules trop faibles pour que des informations quantitatives pertinentes puissent être apportées.

Du point de vue phénoménologique, le modèle de transport semble cohérent : il met en évidence un lessivage des particules fines du matériau de base en début d'essai. Progressivement, ces particules diminuent la perméabilité du filtre ce qui limite les possibilités de migration.

La configuration étudiée aura simplement permis d'illustrer le comportement du modèle de transport et nous sommes conscients qu'elle n'aura permis ni sa calibration ni sa validation. Nous nous sommes heurtés ici au manque d'expériences en laboratoire, à l'échelle mésoscopique, et au fait que l'approche discrète n'est pas adaptée pour les problèmes à grande échelle. Une approche totalement discrète n'est pas la réponse au problème de transport de particules. De même, les précédents chapitres ont souligné la forte corrélation entre la migration et les tailles des constrictions. L'information locale mérite donc sa place dans les approches continues. Ainsi, cette expérience nous conforte dans l'idée que les approches couplées discrète/continue sont pertinentes pour traiter le transport de masse dans les matériaux granulaires.

Bibliographie

- [Carrier, 2003] Carrier, W. D. (2003). Goodbye, Hazen; hello, Kozeny-Carman. *Journal of geotechnical and geoenvironemental engineering*, 129:1054–1056.
- [Cividini et Gioda, 2004] Cividini, A. et Gioda, G. (2004). Finite-element approach to the erosion and transport of fine particles in granular soils. *International journal of geomechanics*, 4:191–198.
- [Ergun, 1952] Ergun, S. (1952). Fluid flow through packed columns. *Chemical Engineering Progress*, 48:89–94.
- [Indraratna et Vafai, 1997] Indraratna, B. et Vafai, F. (1997). Analytical model for particle migration within base soil-filter system. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 123:100–109.
- [Indraratna et al., 1996] Indraratna, B., Vafai, F., et Dilema, E. (1996). An experimental study of the filtration of a lateritic clay slurry by sand filters. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Geotechnical engineering, 119:75–83.
- [Indraratna et Locke, 2000] Indraratna, B. N. et Locke, M. (2000). Analytical modeling and experimental verification of granular filter behaviour. Dans *Filters and drainage in geotechnical and environmental engineering*, pages 3–26. W. Wolski and J. Mlynarek eds, Balkema, Rotterdam.
- [Kenney, 1998] Kenney, T. C. (1998). Discussion: Analytical model for particle migration within base soil-filter system by b. indraratna and f. vafai. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental engineering*, 124:1044–1045.
- [Koenders et Williams, 1992] Koenders, M. et Williams, A. (1992). Flow equations for particle fluid mixtures. *Acta Mechanica*, 92:91–116.
- [Locke et al., 2001] Locke, M., Indraratna, B., et Adikari, G. (2001). Time-dependent particle transport through granular filters. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 127:521–528.
- [Papamichos, 2004] Papamichos, E. (2004). Hydro-mechanical coupling for erosion. Revue Européenne de Génie-Civil, 8:709-734.
- [Semar et Witt, 2007] Semar, O. et Witt, K. J. (2007). Analyse critique des risques de transport suffusif de matériaux sur les digues latérales du Rhin recherche, évaluation et développement, adaptation des critères disponibles. Technical report, Bauhaus-Universität Weimar.
- [Sherard et al., 1984] Sherard, J., Dunnigan, L., et Talbot, J. (1984). Basic properties of sand and gravel filters. *Journal of Geotechnical Engineering*, 110:684–700.

- [Silveira, 1965] Silveira, A. (1965). An analysis of the problem of washing through in protective filters. Dans *Proceedings of the sixth international conference on soil mechanics and foundation engineering*, volume 2, pages 551–555, Montreal, Canada.
- [Sterpi, 2003] Sterpi, D. (2003). Effects of the erosion and transport of fine particles due to seepage flow. *International journal of geomechanics*, 3:111–122.
- [Vardoulakis, 2004] Vardoulakis, I. (2004). Fluidisation in artesian flow conditions: Hydromechanically unstable granular media. *Géotechnique*, 54:165–177.
- [Vardoulakis et al., 1996] Vardoulakis, I., Stavropoulou, M., et Papanastasiou, P. (1996). Hydromechanical aspects of the sand production problem. *Transport in porous media*, 22:225–244.
- [Wittman, 1979] Wittman, L. (1979). The process of soil filtration its physics and the approach in engineering practice. Dans *Proceedings of the seventh european conference on soil mechanics and foundation engineering*, pages 303–310.

Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse a pour objectif de contribuer à la compréhension des mécanismes de transport de particules dans les milieux granulaires. Dans le domaine d'application choisi, l'érosion interne, l'enjeu est de déterminer d'une part la capacité de rétention des filtres granulaires des ouvrages géotechniques et d'autre part la quantité de matière fine pouvant quitter une zone donnée.

La contribution de ce travail de thèse se situe dans la prise en compte de la microstructure de l'espace des vides du milieu granulaire pour estimer les potentialités de transport. La procédure d'analyse repose sur une approche numérique et l'hypothèse est faite que le milieu granulaire est modélisable par un assemblage de sphères polydisperses.

Nous présenterons ici les conclusions en dissociant la thématique Analyse de la microstructure des vides de la thématique Transport de particules en corrélation avec la microstructure des vides.

Analyse de la microstructure des vides

Les critères de filtre classiques emblématiques des processus de filtration/rétention dans les milieux granulaires incitent à aborder les problèmes de transport de particules par une représentation nuancée des propriétés du milieu. Cette représentation s'appuie sur des distributions de caractéristiques morphologiques et topologiques de l'espace poral.

Le constat majeur du premier chapitre est que, pour une granulométrie donnée, la préparation de l'échantillon - son processus de dépôt et son état de densité - conditionne de manière cruciale l'organisation du matériau à l'échelle microscopique. Le protocole de création des échantillons numériques a donc ici été élaboré de manière à être le plus conforme possible au mode de mise en place des filtres dans les ouvrages de génie-civil : l'état le plus lâche correspond à l'état d'équilibre sous gravité du matériau; des états plus denses ont été obtenus par sollicitation déviatoire alternée.

L'objectif des analyses des vides menées sur les assemblages de sphères est de définir des variables géométriques pertinentes permettant de caractériser la structure du milieu vis-à-vis des phénomènes de transport. Des variables possibles sont notamment les dimensions individuelles des pores, des constrictions et de leurs connexions. Mais définir de telles grandeurs suppose de

pouvoir distinguer un pore d'un autre, de pouvoir affecter des limites géométriques aux cavités de vide dans un espace poral continu et de géométrie complexe. Là réside la principale difficulté du travail de recherche sur la microstructure des vides. Nous avons proposé une méthodologie d'analyse des vides à l'échelle locale reposant sur une partition de Delaunay généralisé effectuée sur l'ensemble des sphères de l'assemblage numérique. Cette caractérisation des vides repose sur une étude morphologique des pores, poursuivie d'une étude topologique axée autour des constrictions et des connexions au sein du réseau poral.

Cinq variables ont ici été suggérées comme taille caractéristique de pore. Deux d'entre elles nous semblent particulièrement intéressantes : d'une part, le rayon de la sphère de dimension maximale inscrite dans le pore et d'autre part, le rayon de la sphère ayant un volume équivalent à celui du vide mesuré dans la procédure dite de niveau 1bis. Ici, le rattachement de cellules de Delaunay adjacentes donnant naissance à un "macropore" est conditionné par une nécessaire diminution de la taille des sphères inscrites lorsque l'on s'éloigne du centre du macropore. De la même manière, deux grandeurs sont envisageables pour mesurer une constriction : le rayon du disque de dimension maximale inscrit dans la constriction et le rayon du disque ayant une aire équivalente à celle du vide au sein d'une face d'une cellule de Delaunay. Les divers paramètres semblent nécessaires pour caractériser un milieu poral dont les contours sont imprécis. Par ailleurs, ils présentent l'avantage d'encadrer les propriétés de ce milieu : pour les constrictions par exemple, l'approche par le disque inscrit donne une valeur par défaut de la taille d'une constriction tandis que l'approche par l'aire de vide au sein de la face de Delaunay en fournit une valeur par excès. De plus, il ressort de nos recherches que c'est une démarche de comparaison entre les distributions de tailles de pores, de constrictions et la fonction de connectivité qui est la plus prometteuse pour répondre à notre dessein de corréler les entités de vide aux potentialités de migration.

L'influence de la granulométrie et de l'état de densité du matériau sur la microstructure des vides a été étudiée.

Notre analyse montre que pores et constrictions sont d'autant plus grands que le matériau possède en moyenne de grandes particules ou que la densité relative du milieu est faible. Par ailleurs, la lacune granulaire a ici pour conséquence une augmentation de la taille des vides. Pour les états les plus lâches des différents matériaux, les distributions de tailles de pores et de constrictions présentent des plateaux, signe d'une forte hétérogénéité. Au cours du processus de densification, les distributions se resserrent autour d'une (voire deux pour le matériau de granulométrie discontinue) valeur modale qui apparaît être une caractéristique intrinsèque de la granulométrie du matériau. Il est important de noter que les ouvertures de filtre calculées à partir des critères empiriques usuels de dimensionnement conduisent à des valeurs proches des valeurs modales des distributions de tailles de constrictions. La fonction de connectivité, résultant d'une analyse conjointe des propriétés volumiques et topologiques, souligne le rôle

déterminant des constrictions dans les processus de transfert au sein des sols.

Nous avons ensuite proposé une méthode permettant d'évaluer correctement et rapidement la distribution de tailles de constrictions, entités de vide pertinentes pour l'analyse des propriétés de transport. Des modèles ont été proposés pour déterminer la distribution de tailles de constrictions à partir de la distribution de tailles de particules (de type surface). Ces modèles s'inscrivent dans la continuité des méthodes probabilistes qui postulent l'existence de configurations géométriques caractéristiques en fonction de l'état de densité du matériau. Ils reposent sur la constatation que les configurations classiquement supposées de 3 et 4 particules en contact mutuel pour les états respectivement denses et lâches sont toujours conjointement présentes quel que soit l'état de densité du matériau. Un modèle à un paramètre a été mis au point et donne des résultats convaincants pour les matériaux de granulométries continues. Pour le matériau de granulométrie lacunaire, il est nécessaire d'introduire un second paramètre. Le nouveau modèle à deux paramètres proposé permet une estimation des distributions de tailles de constrictions avec une erreur moyenne inférieure à 3% pour les trois matériaux considérés dans cette étude.

Corrélation entre transport de particules et microstructure des vides

L'analyse des vides nous a permis de mieux comprendre les effets de la structure porale sur le transport et le dépôt de particules infiltrées dans un milieu granulaire. Une première caractéristique des propriétés de filtration du milieu peut être donnée en évaluant la distance maximale qu'une particule de taille donnée, infiltrée dans le matériau, peut parcourir dans une direction donnée. Dans la présente étude, nous avons mis l'accent sur un mécanisme de capture des particules purement géométrique en omettant le vaste champ des phénomènes hydrodynamiques : toute particule peut se déplacer dans le matériau tant que le canal de vide qu'elle emprunte est de taille supérieure au diamètre de la particule.

La première méthode proposée au chapitre V pour estimer la longueur des chemins de filtration en rapport avec une dimension de particule susceptible de transport dans le matériau repose sur une discrétisation du milieu poreux à base de parallélépipèdes. Dans ce modèle purement géométrique, il est supposé que la sollicitation à l'origine du transport conditionne l'orientation des connexions entre les nœuds de la discrétisation. Cette représentation du milieu granulaire a montré son aptitude à reproduire la connectivité de l'espace poral. L'étude des chemins de filtration met en évidence l'existence d'un rayon critique au-delà duquel la capacité de pénétration des particules injectées dans le milieu granulaire diminue rapidement. Une étude comparative avec les résultats de l'analyse des vides positionne ce rayon critique aux alentours du mode de la distribution de tailles de constrictions.

Cependant, la qualité de la description des chemins de filtration dépend du raffinement

de la discrétisation spatiale. Ce point est particulièrement problématique pour l'étude des phénomènes d'érosion interne où ce sont les particules fines qui sont préférentiellement mises en mouvement par les écoulements parasites au sein des ouvrages. Le maillage du milieu poreux peut alors rapidement devenir très coûteux numériquement. Par ailleurs, cette approche donne certes des résultats prometteurs dans le cadre de particules monodisperses lâchées les unes après les autres mais ses possibilités d'évolution pour reproduire des lâchers collectifs de particules polydisperses semblent limitées.

En définitive, ce modèle confirme l'intérêt des approches locales pour cerner les aspects microstructurels de l'espace poral mais ne semble pas approprié pour suivre l'évolution du processus de filtration à l'échelle du matériau.

Pour aborder les problèmes de transport à l'échelle de l'ouvrage granulaire, les modélisations continues semblent plus adaptées. Ainsi notre travail a-t-il consisté en dernier lieu à exploiter la complémentarité des approches locale et globale pour développer un modèle de transport. Il s'inscrit dans la théorie des milieux continus mais conserve l'information locale offerte par les modélisations discrètes. Le manque de données expérimentales concernant d'éventuels essais de filtration en colonne nous oblige à tenter une calibration du modèle destiné à l'approche macroscopique à partir d'une simulation numérique discrète. Les résultats de l'expérimentation numérique conduisent à penser que le transport obtenu, insuffisamment significatif, ne permet pas d'identifier clairement tous les paramètres du modèle de transport. S'il est impossible en l'état de prédire quantitativement la migration particulaire avec ce modèle, l'évolution du matériau multi-couches qu'il prévoit est phénoménologiquement satisfaisante.

Perspectives

Relativement à l'analyse de la microstructure des vides, plusieurs directions de recherche se dégagent. On peut tout d'abord envisager l'étude d'autres types de granulométries que celles proposées dans ce travail de thèse avec l'objectif raisonnable d'établir des corrélations quantitatives pertinentes entre les distributions de tailles de pores et de constrictions et la granulométrie du matériau. Les matériaux à granulométrie discontinue montrent des comportements atypiques et nécessiteraient une étude particulière. Plus largement, l'étude de différents types de granulométries permettrait d'éprouver les formules analytiques proposées au chapitre IV pour calculer la distribution de tailles de constrictions. Les matériaux réels sont composés d'un mélange de particules ayant des rapports d'allongement généralement compris entre 1 et 2. La question à traiter ici est la manière dont le réseau de pores et constrictions est modifié par cette anisotropie géométrique des grains. Cependant, l'expérience montre que le traitement de la géométrie d'un assemblage de sphères n'est pas chose aisée, un système à géométrie plus complexe amplifiera cette difficulté de traitement. Concernant les problèmes de transport à grande échelle, le modèle proposé basé sur la théorie des milieux continus et enrichi d'une caractéristique locale prévoit des comportements de matériaux en conformité

avec les critères de filtre existants. Cette combinaison entre la formulation analytique continue et l'approche probabiliste pour calculer la distribution de tailles des constrictions semble une voie d'avenir même si le présent travail de thèse a mis en évidence les difficultés à rendre pour l'instant ce modèle de transport quantitativement pertinent.

Pour une meilleure prédiction des transferts de matières, la coopération entre numériciens et expérimentateurs est donc nécessaire. Dans cette optique, une collaboration s'est déjà mise en place avec l'équipe du Laboratoire de Mécanique, Physique et Géosciences (LMPG) de l'Université du Hâvre pour confronter les processus de la construction d'assemblages de sphères à l'échelle du volume élémentaire représentatif et l'expérimentation numérique. Les paramètres numériques pourront ainsi être affinés. Des lâchers de petites sphères sous gravité permettront alors d'analyser l'influence du procédé de création des échantillons sur le réseau de constriction. Dans un deuxième temps, il est envisagé une comparaison avec l'institut de recherche en Géniecivil et Mécanique (GeM) de l'Université de Nantes dans le cadre de l'ANR TRANSOL finalisant ainsi la validation du modèle continu de transport. L'identification de ce modèle s'effectuerait à partir d'essais à plus grande échelle sur des colonnes de sol soumises à un écoulement fluide. Ces résultats expérimentaux en présence de fluide pourraient également servir de références pour l'élaboration d'un modèle couplé fluide/solide intégrant les conditions hydrodynamiques et ainsi, par comparaison entre les différents modèles, évaluer l'effet des forces hydrodynamiques.

Annexe A

Calcul des volumes de vide dans la procédure de niveau 0

1 Principe du calcul

Soit T, une cellule de Delaunay construite à partir des centres de quatre particules sphériques S_j , j = [1,4]. Le volume de vide à l'intérieur de la cellule (équation (A.1)) correspond au volume du tétraèdre \mathcal{V}_T auquel on ôte le volume occupé par les particules $\left(\sum_{j=1}^4 \mathcal{V}_{T \cup S_j}\right)$.

$$\mathcal{V}_{\text{vide}} = \mathcal{V}_T - \sum_{j=1}^4 \mathcal{V}_{T \cup \mathcal{S}_j}$$
 (A.1)

 \mathcal{V}_T est entièrement déterminé par la donnée des coordonnées des centres des sphères \mathcal{S}_j , $j = \llbracket 1,4 \rrbracket$. Pour connaître le volume de vide, la contribution $\mathcal{V}_{T \cup \mathcal{S}_j}$ du volume solide à retrancher dépend de la forme géométrique engendrée par l'intersection de la sphère \mathcal{S}_j et du tétraèdre T. Dans le cas le plus simple, l'intersection d'une sphère et d'un tétraèdre engendre une pyramide sphérique (Fig. A.1).

Néanmoins, lorsque la distance d'un sommet à la face du tétraèdre qui lui est opposée est inférieure au rayon de la sphère centrée sur ce sommet alors la pyramide sphérique se voit coupée par un plan dans sa partie sphérique (Fig. A.2).

Par conséquent, les formes géométriques obtenues par l'intersection d'une sphère et d'un plan diffèrent selon la position du centre de la sphère par rapport à la face du tétraèdre qui lui est opposée. Le tableau TAB. A.1 récapitule les différents cas possibles.

2 Calcul du volume du tétraèdre, \mathcal{V}_T

Le volume d'un tétraèdre vaut le tiers du produit de sa hauteur par l'aire de sa base (équation (A.2)). La hauteur correspond à la distance de l'un des sommets du tétraèdre (\mathcal{S}_1 par exemple)



Fig. A.1 – Pyramide sphérique : intersection entre une sphère et un tétraèdre

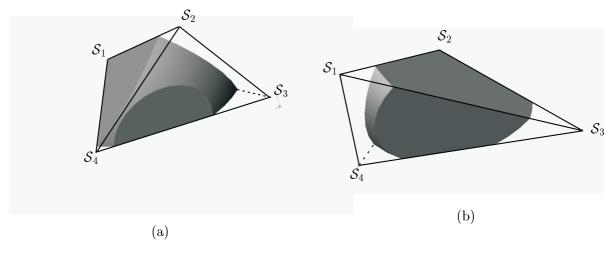


Fig. A.2 – Configuration où la sphère centrée sur l'un des sommets du tétraèdre se voit coupée dans sa partie sphérique par la face du tétraèdre délimitée par les trois autres sommets. (a). Pyramique sphérique privée d'une calotte sphérique tronquée par un plan - (b). Pyramique sphérique privée d'une calotte sphérique tronquée par deux plans

au plan \mathcal{P} , passant par les trois autres $(\mathcal{S}_i, i \in [2,4])$. La base est alors le triangle défini par les points $\mathcal{S}_i, i \in [2,4]$.

$$\mathcal{V}_{T} = \frac{1}{3} d\left(\mathcal{S}_{1}, \mathcal{P}\right) \mathcal{A}_{\text{base}} \tag{A.2}$$

2.1 Distance d'un point à un plan

La distance du point $S_1(x_1,y_1,z_1)$ au plan \mathcal{P} d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0$ se calcule par l'équation (A.3).

$$d(S_1, \mathcal{P}) = \frac{|\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$
(A.3)

Tab. A.1 – Récapitulatif des formes possibles définies par l'intersection d'une sphère et d'un tétraèdre

		Distance du centre de la sphère		
		au plan défini par les trois autres sommets		
		> R	< R	
Position du projeté			Nombre d'intersections avec les faces	
orthogonal du centre	Intérieur		0	≥ 1
de la sphère sur le	à la face	Pyramide	Pyramide sphérique	Pyramide sphérique privée d'une
plan opposé défini par	opposée		privée d'une	calotte sphérique tronquée
les trois autres			calotte sphérique	par un ou plusieurs plans
sommets du	Extérieur	sphérique		
tétraèdre	à la face		Pyramide sphérique	
	opposée			

2.2 Equation du plan $\mathcal P$ passant par les trois sommets du tétraèdre $\mathcal S_2,\,\mathcal S_3$ et $\mathcal S_4$

$$M \in \left(S_2, \overline{S_2S_3}, \overline{S_2S_4}\right) \Leftrightarrow \overline{S_2S_3}. \left(\overline{S_2S_3} \wedge \overline{S_2S_4}\right) = 0$$
 (A.4a)

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_2 & x_3 - x_2 & x_4 - x_2 \\ y - y_2 & y_3 - y_2 & y_4 - y_2 \\ z - z_2 & z_3 - z_2 & z_4 - z_2 \end{vmatrix} = 0$$
 (A.4b)

L'équation du plan passant par les points S_2 , S_3 et S_4 de coordonnées $(x_{2(\text{resp.}3,4)}, y_{2(\text{resp.}3,4)}, z_{2(\text{resp.}3,4)})$ est de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0$ avec

$$\alpha = (y_3 - y_2)(z_4 - z_2) - (z_3 - z_2)(y_4 - y_2)$$
(A.5a)

$$\beta = (z_3 - z_2)(x_4 - x_2) - (x_3 - x_2)(z_4 - z_2) \tag{A.5b}$$

$$\gamma = (x_3 - x_2)(y_4 - y_2) - (y_3 - y_2)(x_4 - x_2) \tag{A.5c}$$

$$\delta = x_2 \alpha + y_2 \beta + z_2 \gamma \tag{A.5d}$$

2.3 Aire de la base du tétraèdre

Selon la formule de Héron, l'aire du triangle ayant pour sommets S_2 , S_3 et S_4 est donnée par la relation (A.6).

$$\mathcal{A}_{\text{base}} = \sqrt{s \left(s - d(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3)\right) \left(s - d(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_4)\right) \left(s - d(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4)\right)},\tag{A.6}$$

 $d(S_i, S_j)$ étant la distance entre les points S_i et S_j et $s = \frac{1}{2} (d(S_2, S_3) + d(S_2, S_4) + d(S_3, S_4))$, le demi-périmètre du triangle.

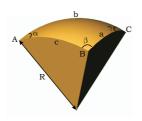


Fig. A.3 – Notations utilisées lors du calcul du volume d'une pyramide sphérique

3 Calcul du volume de la pyramide sphérique $\mathcal{V}_{S\cap T}$

Par définition, le volume de la pyramide sphérique présentée sur la figure Fig. A.3 est égal au tiers du produit du rayon de la sphère, R, par l'aire du triangle sphérique défini par les points A, B et C.

Soit α (respectivement β et γ) l'angle sur la surface de la sphère du triangle au point A (respectivement B et C). L'aire du triangle sphérique se calcule alors selon la formule (A.7).

Aire du triangle sphérique =
$$R^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2 \varepsilon$$
 (A.7)

où ε est le défaut d'euclidianité ou l'excès sphérique du triangle ABC.

La formule de l'Huilier, équivalent de la formule de Héron dans les triangles euclidiens, permet de calculer ce défaut d'euclidianité en fonction de a, b et c qui sont respectivement les angles sous-tendus au centre de la sphère par les fuseaux BC, AC et AB.

$$\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2} = \tan^2\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{avec} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$
(A.8)

La détermination des angles a, b et c par le théorème de Pythagore généralisé achève le calcul du volume de la pyramide sphérique,

$$d_{AB}^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(c), \quad \text{soit} \quad c = \arccos\left(\frac{2R^2 - d_{AB}^2}{2R^2}\right)$$
 (A.9a)

$$d_{AC}^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(b)$$
, soit $b = \arccos\left(\frac{2R^2 - d_{AC}^2}{2R^2}\right)$ (A.9b)

$$d_{BC}^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(a) \quad \text{soit} \quad a = \arccos\left(\frac{2R^2 - d_{BC}^2}{2R^2}\right)$$
 (A.9c)

avec

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$
(A.10a)

$$d_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2}$$
(A.10b)

$$d_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2}.$$
 (A.10c)

4 Recherche du projeté orthogonal d'un sommet sur le plan passant par les trois autres sommets du tétraèdre

Soit P (x,y,z), le projeté orthogonal du sommet S_1 sur le plan passant par S_2,S_3 et S_4 .

P est défini par
$$\begin{cases} \overrightarrow{\alpha x} + \overrightarrow{\beta y} + \gamma z - \delta = 0 & \text{(appartenance au plan } \mathcal{P}) \\ \overrightarrow{S_1 P}.\overrightarrow{S_2 S_3} = 0 & \text{(orthogonalité par rapport à un vecteur du plan)} \\ \overrightarrow{S_1 P}.\overrightarrow{S_2 S_4} = 0 & \text{(orthogonalité par rapport à un second vecteur)} \end{cases}$$

Le principe d'obtention des coefficients du plan \mathcal{P} est décrit dans la sous-partie 2.2.

Les coordonnées du point P sont donc les solutions du système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 & z_4 - z_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta \\ x_1(x_3 - x_2) + y_1(y_3 - y_2) + z_1(z_3 - z_2) \\ x_1(x_4 - x_2) + y_1(y_4 - y_2) + z_1(z_4 - z_2) \end{pmatrix}$$
(A.11)

P peut être considéré comme le barycentre des points S_2 , S_3 et S_4 affectés respectivement de coefficients α_2 , α_3 et α_4 . P est intérieur à la face du tétraèdre limitée par ces trois points si et seulement si les trois coefficients α_i , $i=\llbracket 2,4 \rrbracket$ sont de même signe. On cherche donc α_2 , α_3 et α_4 tels que l'équation (A.12) soit vérifiée.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\alpha_2 \overrightarrow{OS_2} + \alpha_3 \overrightarrow{OS_3} + \alpha_4 \overrightarrow{OS_4}}{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$$
(A.12)

ce qui revient à considérer le système suivant :

$$(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x_P = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \tag{A.13a}$$

$$(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)y_P = \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 \tag{A.13b}$$

$$(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)z_P = \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \alpha_4 z_4 \tag{A.13c}$$

Si l'on impose $\alpha_2 = 1$,

$$\alpha_3 = \frac{(y_4 - y_P)(x_P - x_2) + (x_P - x_4)(y_P - y_2)}{(x_3 - x_P)(y_4 - y_P) - (y_3 - y_P)(x_4 - x_P)}$$
(A.14a)

$$\alpha_{3} = \frac{(y_{4} - y_{P})(x_{P} - x_{2}) + (x_{P} - x_{4})(y_{P} - y_{2})}{(x_{3} - x_{P})(y_{4} - y_{P}) - (y_{3} - y_{P})(x_{4} - x_{P})}$$

$$\alpha_{4} = \frac{(y_{P} - y_{3})(x_{P} - x_{2}) + (x_{3} - x_{P})(y_{P} - y_{2})}{(x_{3} - x_{P})(y_{4} - y_{P}) - (y_{3} - y_{P})(x_{4} - x_{P})}$$
(A.14a)

P est intérieur à la face du tétraèdre considérée si et seulement si les coefficients α_3 et α_4 ainsi calculés sont positifs.

5 Critère d'existence d'une intersection entre la sphère et au moins l'une des faces latérales du tétraèdre contenant le sommet considéré

La sphère centrée sur S_1 intersecte le segment $[S_2S_3]$ si et seulement si la distance de S_1 à la droite (S_2S_3) est inférieure au rayon de la sphère et P, le projeté orthogonal de S_1 sur cette droite est intérieur au segment $[S_2S_3]$.

P est intérieur au segment $[S_2S_3]$ si et seulement si

$$\begin{cases}
\overline{S_2P}.\overline{S_2S_3} > 0 \\
\overline{S_3P}.\overline{S_3S_2} > 0
\end{cases}$$
(A.15)

6 Calcul du volume de la pyramide sphérique tronquée $\mathcal{V}_{S \cap T}$

Le volume de la pyramide tronquée s'obtient en calculant le volume de la pyramide sphérique entière associée auquel on retranche le volume de la calotte sphérique tronquée. Cette section est donc dédiée à la méthode de calcul du volume de la calotte sphérique tronquée qui résulte de l'intersection de la sphère par deux plans que l'on supposera par la suite séparés d'un angle α .

Choix d'un paramétrage : Soit S_1 , le centre de la sphère étudiée et R, son rayon. $d(S_1, \text{plan})$ est la distance entre S_1 et le plan \mathcal{P} passant par les trois autres sommets du tétraèdre (S_2, S_3) et S_4 . Dans la configuration étudiée, l'une des faces du tétraèdre vient intersecter la calotte et est orientée d'un angle α par rapport au plan \mathcal{P} . Pour le calcul du volume délimité par la sphère et les deux faces du tétraèdre, le paramétrage adopté est le suivant :

- -z, la distance par rapport à S_1 selon la normale au plan \mathcal{P} ,
- -r, le "rayon" définissant la calotte dans le plan z = constante,
- $-\varphi$, l'angle dans le plan z = constante.

Les notations sont précisées sur la figure Fig. A.4.

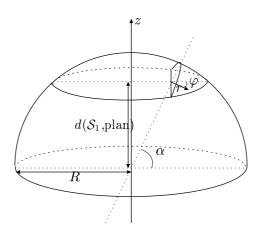


Fig. A.4 – Notations employées lors du calcul du volume de la calotte sphérique tronquée par un plan

Détermination du volume élémentaire : Les relations entre le paramétrage choisi et le repère cartésien classique sont les suivantes :

$$\begin{cases} x = \frac{z}{\tan \alpha} + r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$
 (A.16)

ce qui permet d'effectuer le calcul du Jacobien :

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & \frac{1}{\tan \alpha} \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \tag{A.17}$$

et d'en déduire l'expression du volume élémentaire avec le paramétrage choisi :

$$dV = r dr d\varphi dz \tag{A.18}$$

Le calcul du volume nécessite encore la détermination des bornes d'intégration pour les trois paramètres choisis - ceci fait l'objet des sections suivantes.

Domaine de variation de r : Si l'on se place dans un plan z = constante, la sphère se réduit à un disque de rayon $\sqrt{R^2 - z^2}$.

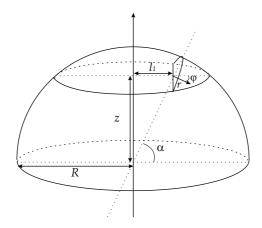


Fig. A.5 – Notations pour le calcul du domaine de variation de r

$$R^{2} - z^{2} = r_{l}^{2} \sin^{2} \varphi + (l_{1} + r_{l} \cos \varphi)^{2}$$
(A.19a)

$$R^{2} - z^{2} = r_{l}^{2} \sin^{2} \varphi + \frac{z^{2}}{\tan^{2} \alpha} + \frac{2r_{l}z \cos \varphi}{\tan \alpha} + r_{l}^{2} \cos^{2} \varphi$$
(A.19b)

$$r_l^2 + \frac{2z\cos\varphi}{\tan\alpha}r_l + z^2\left[1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}\right] - R^2 = 0$$
 (A.19c)

qui conduit à l'unique solution positive :

$$r_{\text{max}} = -\frac{z\cos\varphi}{\tan\alpha} + \sqrt{(R^2 - z^2) - \frac{z^2\sin^2\varphi}{\tan^2\alpha}}$$
 (A.20)

Domaine de variation de φ : φ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$

Domaine de variation de z : z varie de $d(S_1, plan)$ à $R \sin \alpha$.

Calcul du volume de la portion de calotte

$$V = \int_{z=d(S_1, \text{plan})}^{R \sin \alpha} \int_{\varphi = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r_{\text{max}}} r dr d\varphi dz$$
 (A.21)

$$V = \int_{z=d(\mathcal{S}_1, \text{plan})}^{R \sin \alpha} \left[\frac{\pi}{2} \left(R^2 - z^2 \right) + \frac{z \left(z^2 - R^2 \right)}{\tan \alpha \sqrt{\frac{z^2}{\tan^2 \alpha}}} \arctan \left(\frac{\sqrt{\frac{z^2}{\tan^2 \alpha}}}{\sqrt{R^2 - z^2 - \frac{z^2}{\tan^2 \alpha}}} \right) - \frac{z}{\tan \alpha} \sqrt{R^2 - z^2 - \frac{z^2}{\tan^2 \alpha}} \right] dz$$
(A.22)

Cette intégrale n'ayant pas d'expression explicite simple, une méthode de quadrature est utilisée pour en approximer la valeur numérique. En d'autres termes, on remplace le calcul de l'intégrale par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration. Si ce dernier est [a,b], les méthodes sont de la forme

$$I = \int_{a}^{b} f(x)\varpi(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_{i}f(x_{i})$$

où $\varpi(.)$ est une fonction de pondération sur (a,b) qui peut assurer l'intégrabilité de f. Les w_i sont les coefficients de quadrature et les points x_i sont les racines de polynômes orthogonaux, choisis conformément au domaine d'intégration et à la fonction de pondération. L'intérêt des quadratures de Gauss est que ces méthodes laissent la liberté de choisir non seulement les coefficients de pondération mais également les points auxquels la fonction doit être évaluée.

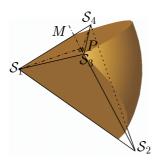


Fig. A.6 – Notations utilisées pour le calcul de l'angle entre les plans considérés.

Calcul de l'angle α entre les plans Soit M(x,y,z) le projeté orthogonal de \mathcal{S}_1 sur la droite $(\mathcal{S}_2\mathcal{S}_3)$, représenté sur la figure Fig. A.6. Soit P, le projeté orthogonal de \mathcal{S}_4 sur la droite $(\mathcal{S}_2\mathcal{S}_3)$. L'angle α recherché est celui entre les vecteurs $\overrightarrow{\mathcal{S}_1M}$ et $\overrightarrow{PS_4}$.

 $M \in \text{plan}(S_1, \overrightarrow{S_1S_2}, \overrightarrow{S_1S_3}) \text{ donc } \alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z - \delta_1 = 0$

 $M \in \text{plan } \mathcal{P} \text{ (passant par les points } \mathcal{S}_2, \, \mathcal{S}_3 \text{ et } \mathcal{S}_4 \text{) donc } \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - \delta_2 = 0$

M est le projeté orthogonal de S_1 sur la droite (S_2S_3) donc $\overrightarrow{S_1M}.\overrightarrow{S_2S_3}=0$ soit $(x-x_1)(x_3-x_2)+(y-y_1)(y_3-y_2)+(z-z_1)(z_3-z_2)=0$.

On a donc trois équations qui nous permettent de déterminer les trois inconnues (x,y,z).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ x_1(x_3 - x_2) + y_1(y_3 - y_2) + z_1(z_3 - z_2) \end{pmatrix}$$
(A.23)

Par un raisonnement similaire on obtient les coordonnées du point P, projeté orthogonal de S_4 sur la droite (S_2S_3) .

On cherche un angle α compris entre 0 et π donc il nous suffit de connaître le cosinus de cet angle pour déterminer sa valeur. Le produit scalaire entre les vecteurs $\overrightarrow{\mathcal{S}_1M}$ et $\overrightarrow{PS_4}$ nous permet d'accéder au cosinus de l'angle (aux normes de ces deux vecteurs près) et donc à l'angle.

Annexe B

Calcul des sphères inscrites

La plus grande sphère pouvant se positionner entre quatre particules $S_j, j \in [1,4]$ est, quand elle existe, la sphère tangente à ces quatre particules. La détermination directe du centre et du rayon de cette sphère revient à la résolution du système

$$\begin{cases}
(x_1 - \xi_{11})^2 + (x_2 - \xi_{21})^2 + (x_3 - \xi_{31})^2 &= (r + R_1)^2 \\
(x_1 - \xi_{12})^2 + (x_2 - \xi_{22})^2 + (x_3 - \xi_{32})^2 &= (r + R_2)^2 \\
(x_1 - \xi_{13})^2 + (x_2 - \xi_{23})^2 + (x_3 - \xi_{33})^2 &= (r + R_3)^2 \\
(x_1 - \xi_{14})^2 + (x_2 - \xi_{24})^2 + (x_3 - \xi_{34})^2 &= (r + R_4)^2
\end{cases}$$
(B.1)

où $P(x_1,x_2,x_3)$ et r représentent respectivement le centre et le rayon de la sphère recherchée tandis que $(\xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3j})$ et R_j sont respectivement les coordonnées des centres et les rayons des sphères sommets du tétraèdre. Mais cette méthode n'est utile que dans les configurations où la sphère tangente existe... Or, dans notre assemblage, ce n'est pas systématiquement le cas. Cette méthode n'est donc citée ici qu'en tant que moyen de vérification du bon fonctionnement de la procédure décrite ci-après dans les cas où la sphère tangente existe.

Un programme plus général a donc été mis au point avec l'objectif de retrouver la sphère tangente aux quatre particules du tétraèdre lorsqu'elle existe. La base de ce programme consiste en la détermination du quadruplet (x_1, x_2, x_3, R) tel que :

$$(Syst_1) \begin{cases} d(P,S_1) &= d(P,S_2) \\ d(P,S_2) &= d(P,S_3) \\ d(P,S_3) &= d(P,S_4) \\ d(P,S_4) &= d(P,S_1) \end{cases}$$
(B.2)

où $d(P,S_i)$ représente la distance de P à la sphère S_i .

$$d(P,S_j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - \xi_{ij})^2 - R_j, j \in [1,4]}$$
(B.3)

Si l'on introduit les fonctions suivantes :

$$\begin{cases}
f_{1}(x_{1},x_{2},x_{3}) &= \sqrt{\sum_{i}(x_{i}-\xi_{i2})^{2}} - \sqrt{\sum_{i}(x_{i}-\xi_{i1})^{2}} - (R_{2}-R_{1}) \\
f_{2}(x_{1},x_{2},x_{3}) &= \sqrt{\sum_{i}(x_{i}-\xi_{i3})^{2}} - \sqrt{\sum_{i}(x_{i}-\xi_{i2})^{2}} - (R_{3}-R_{2}) \\
f_{3}(x_{1},x_{2},x_{3}) &= \sqrt{\sum_{i}(x_{i}-\xi_{i4})^{2}} - \sqrt{\sum_{i}(x_{i}-\xi_{i3})^{2}} - (R_{4}-R_{3}) \\
f_{4}(x_{1},x_{2},x_{3}) &= \sqrt{\sum_{i}(x_{i}-\xi_{i1})^{2}} - \sqrt{\sum_{i}(x_{i}-\xi_{i4})^{2}} - (R_{1}-R_{4})
\end{cases}$$
(B.4)

alors le système $(Syst_1)$ est équivalent à :

$$\begin{cases}
f_1(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\
f_3(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\
f_4(x_1, x_2, x_3) &= 0
\end{cases}$$
(B.5)

La résolution de ce nouveau système, non linéaire, peut se ramener à la recherche du minimum de la fonction de plusieurs variables,

$$h(x_1, x_2, x_3) = f_1^2(x_1, x_2, x_3) + f_2^2(x_1, x_2, x_3) + f_3^2(x_1, x_2, x_3) + f_4^2(x_1, x_2, x_3)$$
(B.6)

qui, étant écrite comme une somme de fonctions élevées au carré, est positive ou nulle. La recherche du minimum de h se fait à l'aide d'une méthode d'optimisation locale, la méthode de Powell qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases}
P_0 \in \mathbb{R}^3 & \text{quelconque,} \\
P_{k+1} = P_k + \lambda_k u^{(k)}, k \in \mathbb{N}
\end{cases}$$
(B.7)

où $u^{(k)}$ est un vecteur de \mathbb{R}^3 qui détermine la direction de descente et λ_k un scalaire tel que $h(P_{k+1}) \leq h(P_k)$.

La méthode de Powell a été choisie ici car elle appartient à la classe des méthodes d'optimisation dites directes au sens où les choix successifs des directions de descente n'exigent pas le calcul des dérivées de la fonction à minimiser - seules des évaluations directes de la fonction en certains points sont nécessaires.

Dans l'implémentation de base de la méthode de Powell, les directions de descente proposées $(u^{(k)})$ sont les vecteurs unitaires du repère et le processus itératif se déroule de la manière suivante :

- Soient un point P_0 et une direction $u^{(0)}$ donnés.
- Une minimisation $unidimensionnelle^1$ dans la direction $u^{(0)}$ (c'est-à-dire la détermination du scalaire λ qui minimise $h(P_0 + \lambda u^{(0)})$) permet de définir un nouveau point P_1 .
- On s'intéresse ensuite à la direction $u^{(1)}$ et on définit un nouveau point P_2 suite à une minimisation unidimensionnelle dans la direction $u^{(1)}$.
- On réitère l'étape précédente jusqu'à la détermination du point P_N (ici, N=3).

¹appel de la fonction *linmin* dans les programmes

– La spécificité de Powell est de proposer, à ce niveau, d'effectuer une descente directement le long de la ligne de plus grande pente (c'est-à-dire celle définie par $P_N - P_0$) et non selon les axes. C'est par une minimisation dans cette direction que l'on obtient le point P_0 à partir duquel va être relancé le processus itératif.

A titre de remarque, il est nécessaire de conserver des vecteurs de descente non colinéaires afin de pouvoir parcourir l'intégralité de l'espace. Mais au fur et à mesure des itérations, le risque d'obtenir des vecteurs colinéaires augmente. C'est pourquoi une réinitialisation des directions de descente est parfois nécessaire.

Selon le point initial P_0 donné, il arrive que l'algorithme renvoie un centre très éloigné de la zone définie par le tétraèdre considéré. Pour éviter cela, différents points initiaux sont proposés et successivement testés tant que le résultat ne paraît pas cohérent. Ces points correspondent :

- 1. à l'isobarycentre des centres des quatre sphères, c'est-à-dire $bar\{(S_1,1);(S_2,1);(S_3,1);(S_4,1)\}$,
- 2. au barycentre des quatre centres avec des coefficients de pondération égaux aux rayons soit $bar\{(S_1,R_1);(S_2,R_2);(S_3,R_3);(S_4,R_4)\}$.
- 3. au barycentre des quatre centres avec des coefficients de pondération égaux aux inverses des rayons soit $bar\left\{\left(\mathcal{S}_{1}, \frac{1}{R_{1}}\right); \left(\mathcal{S}_{2}, \frac{1}{R_{2}}\right); \left(\mathcal{S}_{3}, \frac{1}{R_{3}}\right); \left(\mathcal{S}_{4}, \frac{1}{R_{4}}\right)\right\}.$
- 4. au centre de masse du système, c'est-à-dire le barycentre des quatre centres avec des coefficients de pondération égaux aux cubes des rayons soit $bar\left\{ (\mathcal{S}_1,R_1^3); (\mathcal{S}_2,R_2^3); (\mathcal{S}_3,R_3^3); (\mathcal{S}_4,R_4^3) \right\},$
- 5. au barycentre des quatre centres avec des coefficients de pondération égaux aux inverses des cubes des rayons (toutes les particules ayant la même masse volumique) soit $bar\left\{\left(\mathcal{S}_{1}, \frac{1}{R_{1}^{3}}\right); \left(\mathcal{S}_{2}, \frac{1}{R_{2}^{3}}\right); \left(\mathcal{S}_{3}, \frac{1}{R_{3}^{3}}\right); \left(\mathcal{S}_{4}, \frac{1}{R_{4}^{3}}\right)\right\}.$

Le principe du barycentre est de "rapprocher" le point cherché du point auquel on a attribué le plus grand poids. Dans notre étude, il serait intéressant que le point P_0 initial choisi appartienne d'ores et déjà au domaine des vides et donc s'éloigne d'autant plus des centres des particules que celles-ci sont grosses. C'est dans cette optique que les définitions 3. et 5. ont été proposées. Dorénavant, on a les caractéristiques de la sphère tangente (ou son équivalent) aux quatre particules délimitant le tétraèdre que l'on a considéré initialement. Il convient désormais de le replacer au sein de l'assemblage de particules dont il est issu. On rappelle que notre objectif est de caractériser l'espace des vides. Dans la plupart des cas, il s'avère que la sphère "tangente" précédemment définie est contenue dans l'espace des vides et peut donc effectivement être considérée comme caractéristique d'un pore. Cependant, il peut arriver que cette sphère "tangente" vienne recouvrir une particule appartenant à un autre tétraèdre. C'est notamment le cas si à l'intérieur de la triangulation, certains tétraèdres sont plats. Dans ces configurations, la sphère précédemment trouvée n'est pas significative et l'on doit alors prendre en considération les parti-

cules avoisinantes du tétraèdre étudié. La procédure appliquée lorsque la sphère inscrite initiale n'appartient pas à l'espace des vides est décrite par l'algorithme 1.

```
solution \leftarrow 0;
Pour chaque particule S_{rec}, recouverte même partiellement par la sphère inscrite initiale
{\cal S}_{ini} faire
    sphere1 \leftarrow sphère "inscrite" (i.e. à égale distance) de S_1, S_2, S_3, S_4 et S_{rec}.
    Si (sphere1 \notin vide OU sphere1 \cap S_{ini} = \{\emptyset\}) Alors
       sphere 1 \leftarrow 0
    Fin Si
    sphere2 \leftarrow sphère inscrite entre S_1, S_2, S_3 et S_{rec}.
    Si (sphere2 \notin vide OU sphere2 \cap S_{ini} = \{\emptyset\}) Alors
       | sphere2 \leftarrow 0
    Fin Si
    sphere3 \leftarrow sphère inscrite entre S_1, S_2, S_4 et S_{rec}.
    Si (sphere3 \notin vide OU sphere3 \cap S_{ini} = \{\emptyset\}) Alors
        sphere 3 \leftarrow 0
    Fin Si
    sphere4 \leftarrow sphère inscrite entre S_1, S_3, S_4 et S_{rec}.
    Si (sphere4 \notin vide OU sphere4 \cap S_{ini} = \{\emptyset\}) Alors
        sphere4 \leftarrow 0
    Fin Si
    sphere5 \leftarrow sphère inscrite entre S_2, S_3, S_4 et S_{rec}.
    Si (sphere5 \notin vide OU sphere5 \cap S_{ini} = \{\emptyset\} ) Alors
         sphere5 \leftarrow 0
    Fin Si
    solution \leftarrow max{ solution, sphere1, sphere2, sphere3, sphere4, sphere5 }
Fin Pour
```

Algorithme 1: Algorithme appliqué si la sphère inscrite initialement déterminée n'est pas contenue dans l'espace des vides

Dans certaines configurations (notamment dans le cas de tétraèdres très plats), la méthode de Powell échoue dans la détermination de la sphère inscrite initiale malgré les différents points initiaux testés. La sphère inscrite est alors recherchée par une procédure qui s'apparente à celle décrite par l'algorithme 1 mais au lieu de considérer les particules recouvertes par S_{ini} , on considère les particules sommets S_{adj} de tous les tétraèdres de la triangulation de Delaunay ayant au moins un sommet commun avec le tétraèdre considéré. Dès lors, on calcule les quatre sphères

inscrites entre trois des particules du tétraèdre initial et S_{adj} . Leur appartenance à l'espace des vides est vérifiée mais la condition traduisant un nécessaire chevauchement de la sphère calculée avec la sphère initiale est ignorée. La sphère inscrite correspond à la plus grande des sphères calculées.

Annexe C

Calcul des aires de vide

1 Démarche du calcul

Soient (x_i, y_i, z_i) , les coordonnées du point S_i . La connaissance de ces coordonnées nous permet d'envisager le calcul de l'aire totale du triangle à l'aide de la formule de Héron. Une fois l'aire totale déterminée, il reste à retrancher la surface occupée par les particules pour obtenir la surface de vide. Deux configurations se présentent alors - la première, référencée configuration (a) dans la figure Fig. C.1, correspond au cas où toute la partie sphérique des particules est contenue à l'intérieur de la face du tétraèdre étudiée. Dans la configuration (b) de la figure Fig. C.1, la particule centrée sur S_1 a une partie de sa surface à l'extérieur de la face $(S_2S_1S_3)$. Seule l'aire correspondant à l'intersection entre la particule et la face du tétraèdre est à retrancher de l'aire totale lors du calcul de l'aire de vide.

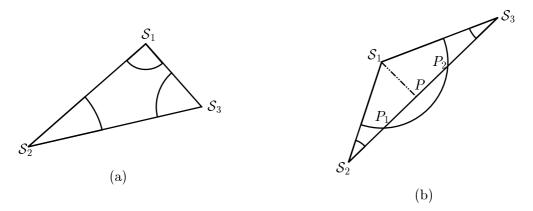


Fig. C.1 – Représentation d'une face d'un tétraèdre (a). Configuration "idéale" - (b). Configuration où la sphère centrée sur l'un des sommets du tétraèdre se voit coupée par la droite passant par les deux autres sommets constituant la face.

2 Calcul dans le cadre de la configuration (a)

L'aire d'une portion de disque de rayon R et d'angle au centre θ est $\theta \frac{R^2}{2}$.

A titre d'exemple, l'aire de la portion de disque issue de S_1 s'obtient à l'aide de la formule $\theta \frac{R_1^2}{2}$ où θ est l'angle $(\overrightarrow{S_1S_2}, \overrightarrow{S_1S_3})$.

Or $\overrightarrow{S_1S_2}.\overrightarrow{S_1S_3} = \|\overrightarrow{S_1S_2}\| \|\overrightarrow{S_1S_2}\| \|\overrightarrow{S_1S_3}\| \cos \theta$, $\theta \in [0,\pi[$ ce qui conduit donc à θ puis à l'aire recherchée. L'aire de vide est alors obtenue en retranchant à l'aire totale les aires des portions de disque issues de S_1 , S_2 et S_3 .

3 Critère de distinction des deux configurations

Afin de différencier ces deux configurations, l'idée est de s'intéresser au projeté orthogonal du centre de la sphère sur le segment opposé.

Soit donc P(x,y,z), le projeté orthogonal de S_1 sur (S_2S_3) .

Ce point appartient au cercle de centre S_1 et de rayon R_1 d'où

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R_1^2.$$
(C.1)

Il appartient également à la droite (S_2S_3) , soit

$$P = S_2 + t. \overrightarrow{S_2S_3}, t \in \mathbb{R}, \text{ ou } \begin{cases} x = x_2 + t(x_3 - x_2) \\ y = y_2 + t(y_3 - y_2) \\ z = z_2 + t(z_3 - z_2) \end{cases}$$
 (C.2)

Les quatre équations précédentes conduisent à une équation du second degré en t,

$$((x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2) t^2$$

$$+2((x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_2)(y_2 - y_1) + (z_3 - z_2)(z_2 - z_1)) t$$

$$+(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - R_1^2 = 0$$
(C.3)

Suite au calcul du discriminant, on obtient deux solutions t_1 et t_2 .

Une condition nécessaire pour rencontrer la configuration (b) est que le projeté orthogonal de S_1 sur la droite (S_2S_3) appartienne au segment $[S_2S_3]$, c'est-à-dire que les deux valeurs du paramètre t, obtenues à l'issue de la résolution de (C.3) soient comprises entre 0 et 1. Si cette condition est vérifiée, il reste à s'assurer que la distance de S_1 à la droite (S_2S_3) est inférieure à R_1 pour affirmer que l'on est dans la configuration (b).

4 Calcul dans le cadre de la configuration (b)

Soient P_1 et P_2 , les deux points d'intersection du cercle (obtenu par une coupe de la sphère dans le plan de la face) et de la droite (S_2S_3) (cf Fig. C.2). Les coordonnées de P_1 et P_2

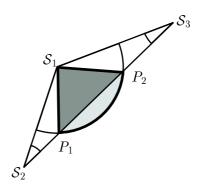


Fig. C.2 – Formes géométriques intervenant dans le calcul de la configuration (b)

s'obtiennent via $P_1 = S_2 + t_1 \xrightarrow{S_2 S_3}$ et $P_2 = S_2 + t_2 \xrightarrow{S_2 S_3}$, où t_1 et t_2 sont les paramètres obtenus après résolution de (C.3).

L'aire occupée par la particule hors de la face \mathcal{F} du tétraèdre (en gris clair sur la figure) se calcule en soustrayant l'aire du triangle $P_1\mathcal{S}_1P_2$ (en gris foncé sur la figure) à l'aire de la portion de disque ou triangle sphérique $P_1\mathcal{S}_1P_2$, apparaissant en <u>traits plus épais sur la fig</u>ure :

- L'aire du triangle $P_1 S_1 P_2$ se calcule via $\sqrt{s(s-R_1)^2(s-\|\overrightarrow{P_1P_2}\|)}$ avec $s=\frac{1}{2}\left(2R_1+\|\overrightarrow{P_1P_2}\|\right)$
- L'angle du triangle sphérique $P_1 S_1 P_2$ se déduit du produit scalaire $\overrightarrow{S_1 P_2}.\overrightarrow{S_1 P_1} = \|\overrightarrow{S_1 P_2}\| \|\overrightarrow{S_1 P_1}\| \cos \theta$ et l'aire du triangle sphérique en découle : $\frac{\theta}{2} R_1^2$.

L'aire de vide se calcule au final par :

Aire de vide = Aire totale(
$$S_1S_2S_3$$
) - Aire de ($S_1 \cap \mathcal{F}$)
= Aire totale - Aire de la portion de disque entière
+Aire de la portion de disque hors de la face (C.4)

Annexe D

Calcul des cercles inscrits

Considérons une face, notée \mathcal{F} , de l'un des tétraèdres de la triangulation. Soient \mathcal{S}_i , $i \in [1,3]$, les particules délimitant la face \mathcal{F} et \mathcal{D}_i , $i \in [1,3]$, les disques formés par l'intersection de ces sphères avec la face étudiée. Les notations sont précisées sur la figure Fig. D.1. L'objectif est tout d'abord de déterminer les coordonnées (x_1, x_2, x_3) du centre \mathcal{C} du cercle inscrit à l'aide de la méthode de Powell. Pour ce faire, les fonctions suivantes sont introduites :

$$\begin{cases}
f_1(x_1, x_2, x_3) &= d(\mathcal{C}, \mathcal{D}_1) - d(\mathcal{C}, \mathcal{D}_3) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, x_3) &= d(\mathcal{C}, \mathcal{D}_1) - d(\mathcal{C}, \mathcal{D}_2) &= 0 \\
f_3(x_1, x_2, x_3) &= d(\mathcal{C}, \mathcal{D}_2) - d(\mathcal{C}, \mathcal{D}_3) &= 0
\end{cases}$$
(D.1)

où $d(\mathcal{C}, \ldots)$ représente la distance du certre du certle inscrit recherché à l'objet désigné en second. Plus précisément,

$$d(\mathcal{C}, \mathcal{D}_j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - \xi_{ij})^2 - R_j, \ j = 1..3}$$
 (D.2)

$$d(\mathcal{C}, \text{plan de la face}) = \frac{|\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 - \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$
(D.3)

si l'on note respectivement $(\xi_{1j}, \xi_{2j}, \xi_{3j})$ et R_j les coordonnées du centre et le rayon du disque \mathcal{D}_j , l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0$ étant celle du plan de la face \mathcal{F} . Les fonctions f_1 , f_2 et f_3

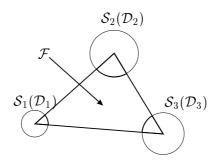


Fig. D.1 – Face \mathcal{F} considérée pour la recherche du cercle inscrit

positionnent le centre du cercle à égale distance des disques \mathcal{D}_i .

Pour assurer l'appartenance de C au plan de la face, on se ramène à un problème à deux inconnues par la démarche suivante. $(\overrightarrow{S_1S_2}, \overrightarrow{S_1S_3})$ constitue une base du plan de F. Les équations (D.5) conduisent à une base orthogonale (\vec{u}, \vec{w}) de ce plan.

$$\begin{cases}
\vec{u} = \overrightarrow{S_1 S_2} \\
\vec{w} = \overrightarrow{S_1 S_2} + \beta \overrightarrow{S_1 S_3}
\end{cases} \text{ avec } \vec{w}.\vec{u} = 0$$
(D.4)

soit

$$\begin{cases}
\vec{u} = \overline{S_1 S_2} \\
\vec{w} = \overline{S_1 S_2} - \frac{\overline{S_1 S_2} \cdot \overline{S_1 S_2}}{\overline{S_1 S_3} \cdot \overline{S_1 S_2}} \overrightarrow{S_1 S_3}
\end{cases} (D.5)$$

Puisque C appartient au plan de F alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\overrightarrow{\mathcal{S}_1 \mathcal{C}} = \overrightarrow{O \mathcal{C}} - \overrightarrow{O \mathcal{S}_1} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{w}$$
 (D.6)

d'où

$$\begin{cases} x_1 = x_{1_{S_1}} + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 w_1 \\ x_2 = x_{2_{S_1}} + \lambda_1 u_2 + \lambda_2 w_2 \\ x_3 = x_{3_{S_1}} + \lambda_1 u_3 + \lambda_2 w_3 \end{cases}$$
(D.7)

Dès lors, la recherche du centre du cercle inscrit passe par la minimisation de la fonction à deux variables,

$$h(\lambda_1, \lambda_2) = f_1^2(\lambda_1, \lambda_2) + f_2^2(\lambda_1, \lambda_2) + f_3^2(\lambda_1, \lambda_2).$$
 (D.8)

Pour la méthode de Powell, par analogie avec la recherche des sphères inscrites, différents points initiaux sont proposés, à savoir l'isobarycentre des centres des trois disques, le centre de masse du système, le barycentre des centres pondérés par l'inverse des rayons au cube. Ces points initiaux P_{init} sont connus par leurs coordonnées tridimensionnelles. Les couples $(\lambda_{1_{init}}, \lambda_{2_{init}})$ correspondant à ces points s'obtiennent en calculant les produits scalaires de $\overline{S_1P_{init}}$ avec les vecteurs de la base du plan de \mathcal{F} (équation (D.9)).

$$\begin{cases}
\overrightarrow{S_1 P_{init}} \cdot \vec{u} = (\lambda_{1_{init}} \vec{u} + \lambda_{2_{init}} \vec{w}) \cdot \vec{u} = \lambda_{1_{init}} ||\vec{u}||^2 \\
\overrightarrow{S_1 P_{init}} \cdot \vec{u} = (\lambda_{1_{init}} \vec{u} + \lambda_{2_{init}} \vec{w}) \cdot \vec{u} = \lambda_{2_{init}} ||\vec{w}||^2
\end{cases}$$
(D.9)

d'où

$$(\lambda_{1_{init}}, \lambda_{2_{init}}) = \left(\frac{\overrightarrow{S_1 P_{init}}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}, \frac{\overrightarrow{S_1 P_{init}}.\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)$$
(D.10)

La procédure de minimisation est lancée à partir de ces couples $(\lambda_{1_{init}}, \lambda_{2_{init}})$. Une fois déterminée la position du centre du cercle inscrit, le rayon R_{inscrit} est obtenu en calculant la plus petite distance du centre à l'un des disques \mathcal{D}_i .

De même que pour la sphère inscrite, il reste à s'assurer que le cercle ainsi défini est effectivement contenu dans l'espace des vides et qu'il n'y a pas de chevauchement entre le cercle et

une particule de l'assemblage. Il convient donc d'étudier l'intersection des particules avoisinantes avec le plan auquel appartient la face étudiée.

Considérons une particule de l'assemblage qui ne soit pas l'une des S_i , i=1 à 3. Cette particule a pour centre $S_0(\xi_{10},\xi_{20},\xi_{30})$ et pour rayon R_0 . Si la distance du centre de la particule au plan de la face \mathcal{F} est inférieure à R_0 alors la particule intersecte le plan considéré en un disque de rayon $\sqrt{R_0^2 - d(S_0,\mathcal{F})^2}$. Afin de savoir si ce disque chevauche le cercle inscrit, il est nécessaire de déterminer la position de son centre $P(x_{1P},x_{2P},x_{3P})$, ce qui revient à la résolution du système :

$$\begin{cases}
\frac{\alpha x_{1P} + \beta x_{2P} + \gamma x_{3P} - \delta = 0}{\overrightarrow{S_0 P} \cdot \overrightarrow{S_1 S_2}} = 0 \\
\overrightarrow{S_0 P} \cdot \overrightarrow{S_1 S_3} = 0
\end{cases}$$
(D.11)

soit

$$\begin{pmatrix} x_{1P} \\ x_{2P} \\ x_{3P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi_{12} - \xi_{11} & \xi_{22} - \xi_{21} & \xi_{32} - \xi_{31} \\ \xi_{13} - \xi_{11} & \xi_{23} - \xi_{21} & \xi_{33} - \xi_{31} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta \\ \xi_{10} (\xi_{12} - \xi_{11}) + \xi_{20} (\xi_{22} - \xi_{21}) + \xi_{30} (\xi_{32} - \xi_{31}) \\ \xi_{10} (\xi_{13} - \xi_{11}) + \xi_{20} (\xi_{23} - \xi_{21}) + \xi_{30} (\xi_{33} - \xi_{31}) \end{pmatrix}$$
(D.12)

Le cercle inscrit n'est pas caractéristique de l'espace des vides si l'équation (D.13) est vérifiée.

$$\sqrt{(x_{1P} - x_1)^2 + (x_{2P} - x_2)^2 + (x_{3P} - x_3)^2} < R_{\text{inscrit}} + \sqrt{R_0^2 - d(\mathcal{S}_0, \mathcal{F})^2}.$$
 (D.13)

Dans une telle configuration, on recherche les caractéristiques de trois nouveaux cercles inscrits (apparaissant en pointillés sur la figure Fig. D.2), obtenus en considérant à chaque fois deux des sphères constituant la face et la particule la plus proche du centre P précédemment trouvé. La valeur de diamètre conservée correspond à celle associée au plus grand des trois cercles pour

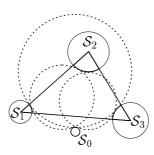


Fig. D.2 – Cercles considérés dans le cas d'une configuration problématique lors de la recherche du cercle inscrit

lequel il n'y a aucun chevauchement avec les particules avoisinantes. De plus, une condition de chevauchement du cercle tangent aux trois particules aux sommets de la face est imposée afin de s'assurer que le cercle inscrit finalement déterminé caractérise effectivement la face étudiée.

Annexe E

Calcul de probabilité des méthodes probabilistes

Le nombre d'arrangements (placements) de n objets distincts est n!. Il y a donc 3! éventualités pour former le triplet (S_i, S_j, S_k) si l'on considère distinctement les sphères de même diamètre. Dans ce décompte, si le triplet comprend deux sphères de diamètre d_i alors le triplet (S_{i1}, S_{i2}, S_k) diffère du triplet (S_{i2}, S_{i1}, S_k) .

Dans le cas présent, il n'y a pas lieu de distinguer les sphères S_{i1} et S_{i2} , il reste alors $\frac{3!}{r_i!}$ éventualités puisque $r_i!$ correspond au nombre de dispositions possibles des r_i sphères S_i . Si l'on ne souhaite distinguer ni les sphères S_j entre elles, ni les sphères S_k alors il reste $\frac{3!}{r_i!r_j!r_k!}$ éventualités.

De plus, chaque ordre d'apparition (triplet) a une probabilité d'occurrence $p_i^{r_i} p_j^{r_j} p_k^{r_k}$ (r_i apparitions successives de S_i , r_j apparitions successives de S_j puis r_k apparitions successives de S_k).

D'après l'axiome des probabilités totales, on ajoute les probabilités, ici toutes égales de chaque répartition de trois sphères. Comme il y a $\frac{3!}{r_i!r_j!r_k!}$ éventualités possibles des différents types de sphères,

$$p(\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k) = \frac{3!}{r_i! r_j! r_k!} p_i^{r_i} p_j^{r_j} p_k^{r_k}$$
(E.1)

Annexe F

Processus de maximisation de A_v dans l'approche de Silveira

La donnée de l'angle α suffit à fixer l'arrangement géométrique du système. Les angles γ , β et δ peuvent donc être exprimés comme des fonctions du seul paramètre α . Après avoir explicité ces dépendances, il suffit de faire varier l'angle α entre 0 et π et de récupérer la valeur maximale de A_v obtenue sur cet intervalle.

Expression de l'angle γ en fonction de α 1

L'aire du triangle $(S_j S_k S_m)$ est égale à

$$\mathcal{A}_{S_j S_k S_m} = \frac{bc \sin \gamma}{2} \tag{F.1}$$

Cette aire peut également se calculer en utilisant la formule de Héron :

$$\mathcal{A}_{S_i S_b S_m} = \sqrt{s(s-b)(s-c)(s-y)} \tag{F.2}$$

où s est le demi-périmètre (formule (F.3)) et y la longueur de la diagonale (S_jS_m) (formule (F.4)).

$$s = \frac{b+c+y}{2}$$
 (F.3)
$$y = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha}$$
 (F.4)

$$y = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha} \tag{F.4}$$

L'égalisation des expressions (F.1) et (F.2) conduit à la détermination de γ à partir de la seule connaissance de α .

2 Expression de l'angle β en fonction de α

Soit l'égalité vectorielle (F.5).

$$\overrightarrow{S_iS_i} + \overrightarrow{S_iS_k} + \overrightarrow{S_kS_m} + \overrightarrow{S_mS_i} = \vec{0}$$
 (F.5)

La projection selon le vecteur $\overrightarrow{S_jS_k}$ conduit à l'équation (F.6).

$$-d\cos\beta + c - b\cos\gamma + a\cos(\alpha + \beta) = 0$$
 (F.6)

$$c - d - b\cos\gamma + (2d - a\cos\alpha)\sin^2\frac{\beta}{2} + a\cos\alpha\cos^2\frac{\beta}{2} - 2a\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 0$$
 (F.7)

Si $\cos \frac{\beta}{2}$ est différent de 0, à savoir $\beta \neq (2k+1), k \in \mathbb{Z}$,

$$(c+d-b\cos\gamma - a\cos\alpha)\tan^2\frac{\beta}{2} - 2a\sin\alpha\tan\frac{\beta}{2} + c - d - b\cos\gamma + a\cos\alpha = 0$$
 (F.8)

La résolution de cette équation du second degré en $\tan\frac{\beta}{2}$ permet la détermination de β connaissant γ et α . Le cas $\beta=\pi$ est à considérer séparément.

3 Expression de l'angle δ en fonction de α

$$\delta = 2\pi - \alpha - \beta - \gamma \tag{F.9}$$

Annexe G

Calcul des tailles de constriction dans le cas lâche selon Schuler

Trois particules S_1 , S_2 et S_3 , de rayons respectifs R_1 , R_2 et R_3 . \bar{r} : rayon de la constriction et l_1 , l_2 et l_3 : longueurs des côtés opposés

$$\mathcal{A}_{\text{totale}} = \sqrt{\mathcal{T}} = \sqrt{s(s-l_1)(s-l_2)(s-l_3)} \quad \text{avec} \quad s = \frac{1}{2} (l_1 + l_2 + l_3) \quad (G.1)$$

$$\mathcal{A}_1 = \sqrt{\mathcal{T}_1} = \sqrt{s_1(s_1 - l_1) \left(s_1 - (R_2 + \bar{r}) \right) \left(s_1 - (R_3 + \bar{r}) \right)} \quad \text{avec} \quad s_1 = \frac{1}{2} \left(l_1 + 2\bar{r} + R_2 + R_3 \right) \quad (G.2)$$

$$\mathcal{A}_2 = \sqrt{\mathcal{T}_2} = \sqrt{s_2(s_2 - l_2) \left(s_2 - (R_3 + \bar{r}) \right) \left(s_2 - (R_1 + \bar{r}) \right)} \quad \text{avec} \quad s_2 = \frac{1}{2} \left(l_2 + 2\bar{r} + R_1 + R_3 \right) \quad (G.3)$$

$$\mathcal{A}_3 = \sqrt{\mathcal{T}_3} = \sqrt{s_3(s_3 - l_3) \left(s_3 - (R_1 + \bar{r}) \right) \left(s_3 - (R_2 + \bar{r}) \right)} \quad \text{avec} \quad s_3 = \frac{1}{2} \left(l_3 + 2\bar{r} + R_1 + R_2 \right) \quad (G.4)$$

$$\sqrt{\mathcal{T}} = \sqrt{\mathcal{T}_1} + \sqrt{\mathcal{T}_2} + \sqrt{\mathcal{T}_2} \tag{G.5}$$

En élevant cette égalité au carré deux fois consécutivement, on obtient :

$$\left(\left(\mathcal{T} - \left(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 \right) \right)^2 - 4 \left(\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_3 \right) \right)^2 = 64 \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_3 \mathcal{T}$$
 (G.6)

Le développement de l'expression de \mathcal{T}_1 donnée dans l'équation (G.2) conduit à une expression du second degré en \bar{r} :

$$\mathcal{T}_{1} = \alpha_{12}\bar{r}^{2} + \alpha_{11}\bar{r} + \alpha_{10} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_{12} &= \frac{1}{4}(l_{1} - R_{2} + R_{3})(l_{1} + R_{2} - R_{3}) \\ \alpha_{11} &= \alpha_{12}(R_{2} + R_{3}) \\ \alpha_{10} &= \frac{1}{4}\alpha_{12}(R_{2} + R_{3} + l_{1})(R_{2} + R_{3} - l_{1}) \end{cases}$$

De la même manière, on obtient :

$$\mathcal{T}_2 = \alpha_{22}\bar{r}^2 + \alpha_{21}\bar{r} + \alpha_{20} \tag{G.7}$$

$$\mathcal{T}_3 = \alpha_{32}\bar{r}^2 + \alpha_{31}\bar{r} + \alpha_{30} \tag{G.8}$$

où les α_{ij} , i=2,3 et j=0...2, s'obtiennent par permutation circulaire des indices dans les expressions données pour \mathcal{T}_1 .

Les produits $\mathcal{T}_i \mathcal{T}_i$, $i,j=[1,3]^2$ s'écrivent comme des polynômes d'ordre 4 en \bar{r} :

$$\mathcal{T}_{1}\mathcal{T}_{2} = \beta_{124}\bar{r}^{4} + \beta_{123}\bar{r}^{3} + \beta_{122}\bar{r}^{2} + \beta_{121}\bar{r} + \beta_{120} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \beta_{124} &= \alpha_{12}\alpha 22 \\ \beta_{123} &= \alpha_{12}\alpha 21 + \alpha_{11}\alpha 22 \\ \beta_{122} &= \alpha_{12}\alpha 20 + \alpha_{11}\alpha 21 + \alpha_{10}\alpha 22 \\ \beta_{121} &= \alpha_{11}\alpha 20 + \alpha_{10}\alpha 21 \\ \beta_{120} &= \alpha_{10}\alpha 20 \end{cases}$$

$$(\mathcal{T} - (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3))^2 - 4(\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_3) = P_4 \bar{r}^4 + P_3 \bar{r}^3 + P_2 \bar{r}^2 + P_1 \bar{r} + P_0$$

$$\begin{cases}
P_4 &= \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_{i2}\right)^2 - 4\sum_{i,j=1}^3 \beta_{ij4} \\
P_3 &= 2\sum_{i=1}^3 \alpha_{i1}\sum_{i=1}^3 \alpha_{i2} - 4\sum_{i,j=1}^3 \beta_{ij3} \\
P_2 &= \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_{i1}\right)^2 - 2\sum_{i=1}^3 \alpha_{i2}(\mathcal{T} - \sum_{i=1}^3 \alpha_{i0}) - 4\sum_{i,j=1}^3 \beta_{ij2} \\
P_1 &= -2\sum_{i=1}^3 \alpha_{i1}(\mathcal{T} - \sum_{i=1}^3 \alpha_{i0}) - 4\sum_{i,j=1}^3 \beta_{ij1} \\
P_0 &= \left(\mathcal{T} - \sum_{i=1}^3 \alpha_{i0}\right)^2 - 4\sum_{i,j=1}^3 \beta_{ij0}
\end{cases}$$
st alors solution de l'équation de degré 8

 \bar{r} est alors solution de l'équation de degré

$$\mathcal{P}(X) = p_8 X^8 + p_7 X^7 + p_6 X^6 + p_5 X^5 + p_4 X^4 + p_3 X^3 + p_2 X^2 + p_1 X^1 + p_0 = 0 \tag{G.9}$$

$$\begin{cases} p_8 &= P_4^2 \\ p_7 &= 2 P_3 P_4 \\ p_6 &= P_3^2 + 2 P_4 P_2 - 64 \beta_{124} \alpha_{32} \mathcal{T} \\ p_5 &= 2 P_4 P_1 + 2 P_3 P_2 - 64 \mathcal{T} * (\beta_{124} \alpha_{31} + \beta_{123} \alpha_{32}) \\ p_4 &= P_2^2 + 2 P_4 P_0 + 2 P_3 P_1 - 64 \mathcal{T} (\beta_{124} \alpha_{30} + \beta_{123} \alpha_{31} + \beta_{122} \alpha_{32}) \\ p_3 &= 2 P_3 P_0 + 2 P_2 P_1 - 64 \mathcal{T} (\beta_{123} \alpha_{30} + \beta_{122} \alpha_{31} + \beta_{121} \alpha_{32}) \\ p_2 &= P_1^2 + 2 P_2 P_0 - 64 \mathcal{T} (\beta_{122} \alpha_{30} + \beta_{121} \alpha_{31} + \beta_{120} \alpha_{32}) \\ p_1 &= 2 P_1 P_0 - 64 \mathcal{T} (\beta_{121} \alpha_{30} + \beta_{120} \alpha_{31}) \\ p_0 &= P_0^2 - 64 \mathcal{T} \beta_{120} \alpha_{30} \end{cases}$$
es racines du polynôme sont obtenues en passant par le concept de "matrice compagnon".

Les racines du polynôme sont obtenues en passant par le concept de "matrice compagnon".

Définition 1 Matrice compagnon

Soit $\mathcal{P}(X) = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + ... + X^r$, un polynôme à coefficients constants dans un corps \mathbb{K} .

On démontre qu'il existe une matrice carrée d'ordre r dont le polynôme caractéristique est égal à $(-1)^r \mathcal{P}(X)$. Cette matrice est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -p_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -p_{r-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -p_{r-1} \end{pmatrix}$$

et est appelée matrice compagnon de \mathcal{P} .

 \bar{r} correspond donc à la plus petite valeur propre de cette matrice compagnon.

Annexe H

Calcul de probabilité du modèle de Locke

Soit \mathcal{A}_i , $i \in \mathbb{N}$, l'événement "avancer d'une unité de mouvement dans le sens de l'écoulement après i passages horizontaux". L'événement \mathbb{A} , "avancer d'une unité de mouvement dans le sens de l'écoulement", correspond alors à l'union des événements \mathcal{A}_i . Les \mathcal{A}_i , $i \in \mathbb{N}$ étant deux à deux incompatibles, la probabilité de l'événement \mathbb{A} se calcule alors par la relation (H.1).

$$\mathfrak{p}(\mathbb{A}) = \mathfrak{p}\left(\bigcup_{i} \mathcal{A}_{i}\right) = \sum_{i} \mathfrak{p}(\mathcal{A}_{i}) \tag{H.1}$$

Si l'on considère successivement les événements A_i , $i \in \mathbb{N}$:

Evénement A_0 : il est trivial que $\mathfrak{p}(A_0) = \mathfrak{p}(\bar{d} > d)$.

Evénement A_1 : A_1 revient à prendre un chemin horizontal puis à prendre le chemin vertical d'où

$$\mathfrak{p}(\mathcal{A}_0) = \underbrace{\left(1 - \mathfrak{p}(\bar{d} > d)\right)}_{\text{Ne pas prendre le chemin vertical direct}} \times \underbrace{\left(1 - (1 - \mathfrak{p}(\bar{d} > d))^4\right)}_{\text{Prendre l'un des chemins horizontaux}} \times \underbrace{\mathfrak{p}(\bar{d} > d)}_{\text{Prendre le chemin vertical}}$$

Evénement A_2 : On considère successivement les étapes suivantes :

- Etape 1 : la particule n'avance pas directement d'une unité de mouvement et emprunte un chemin horizontal ce qui correspond à la probabilité $\left(1-(1-\mathfrak{p}(\bar{d}>d))^4\right)\left(1-\mathfrak{p}(\bar{d}>d)\right)$
- Etape 2 : la particule n'avance pas directement d'une unité de mouvement et emprunte un chemin horizontal différent de celui par lequel elle est arrivée, ce ce qui correspond à la probabilité $(1 - (1 - \mathfrak{p}(\bar{d} > d))^3)$ $(1 - \mathfrak{p}(\bar{d} > d))$
- Etape 3 : la particule avance d'une unité de mouvement avec la probabilité $\mathfrak{p}(\bar{d} > d)$ La probabilité totale s'obtient par le produit des probabilités à chacune des étapes.

Evénement A_2 : il convient de répéter (i-1) fois l'étape 2 précédente. L'expression (H.1) devient donc, au final:

$$\mathfrak{p}(\mathbb{A}) = \mathfrak{p}(\bar{d} > d) + \sum_{i=0}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \mathfrak{p}(\bar{d} > d)\right)^4\right] (1 - \mathfrak{p}(\bar{d} > d)) \mathfrak{p}(\bar{d} > d) \left\{ \left[1 - \left(1 - \mathfrak{p}(\bar{d} > d)\right)^3\right] (1 - \mathfrak{p}(\bar{d} > d)) \right\}^{i} = 0$$

Annexe I

Calcul de la charge hydraulique en tout point du domaine

Soit Ω , l'ouvert borné et connexe de \mathbb{R}^3 (ou \mathbb{R}^2 pour un problème plan), de frontière $\Gamma = \Gamma_{\inf} + \Gamma_{\sup} + \Gamma_{\operatorname{lat}}$ et de normale extérieure \mathbf{n} , le domaine de la figure Fig. VI.6 sur lequel est défini le problème. En supposant d'une part que la loi de Darcy est vérifiée et d'autre part qu'il n'existe pas de source interne d'écoulement, le problème de conservation de la masse de fluide sous sa forme locale s'écrit :

$$(\mathcal{P}_{\text{hyd}}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } h: (\Omega, \mathbb{R}^+) \mapsto \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \nabla. \left(\mathbf{K} \nabla h(\mathbf{x}, t)\right) = 0 \text{ dans } \Omega \\ h(\mathbf{x}, t) = h_{\text{inf}}(t) \text{ sur } \Gamma_{\text{inf}} \\ h(\mathbf{x}, t) = h_{\text{sup}}(t) \text{ sur } \Gamma_{\text{sup}} \\ \mathbf{K} \nabla h(\mathbf{x}, t). \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{lat}} \text{ (membrane latérale imperméable)} \end{array} \right.$$

En notation indicielle, l'équation différentielle du problème (\mathcal{P}_{hyd}) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = 0 \tag{I.1}$$

Soit $h^*(x_1,x_2,x_3,t)$, une variation virtuelle de la charge hydraulique définie dans le volume Ω .

$$\int_{\Omega} h^* \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) d\Omega = 0$$
 (I.2)

Par application du théorème de Gauss,

$$\int_{\Gamma} h^* K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial h^*}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} d\Omega = 0$$
 (I.3)

où n_i est le cosinus directeur du vecteur unitaire \mathbf{n} normal à la frontière. Comme on est libre de choisir la charge hydraulique virtuelle, on élimine le premier terme de l'équation en prenant une charge virtuelle nulle sur la frontière $\Gamma_{\text{inf}} \cup \Gamma_{\text{sup}}$.

Soit alors $H^1(\Omega) = \left\{ h^* : (\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}^+) \mapsto \mathbb{R}, \int_{\Omega} \frac{\partial h^*}{\partial x_i} \frac{\partial h^*}{\partial x_j} d\Omega < +\infty, \text{ pour tout } (i,j) \in [1,3]^2 \right\}$ et soit V_0 l'espace défini par $V_0 = \left\{ h^* \in H^1(\Omega), h^* / (\Gamma_{\inf} \cup \Gamma_{\sup}) = 0 \right\}$. La formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}_{\text{hvd}})$ s'écrit alors

$$(\mathcal{P}_{\text{var}}) \begin{cases} \text{Trouver } h \in V_0 \text{ telle que } \forall h^* \in V_0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial h^*}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} d\Omega = 0 \end{cases}$$

On se propose ici de résoudre ce problème d'écoulement en milieu poreux dans le cas bidimensionnel représenté sur la figure Fig. VI.6.

Dans le problème variationnel (\mathcal{P}_{var}), V_0 est de dimension infinie. La méthode des éléments finis propose de se ramener en dimension finie en discrétisant le domaine Ω en éléments géométriques dont les points caractéristiques sont appelés $n \alpha u ds$. La méthode des éléments finis consiste alors à ne déterminer les valeurs de $h(\mathbf{x},t)$ qu'aux points nodaux puis à interpoler entre ces valeurs pour connaître h en tout point de Ω . L'inconnue du problème est dorénavant le vecteur des valeurs de h aux points nodaux, \mathbf{h} .

$$h(\mathbf{x},t) = \mathbf{f}^{T}(\mathbf{x}) \ \mathbf{h}(t) = \mathbf{h}^{T}(t) \ \mathbf{f}(\mathbf{x})$$
 (I.4)

où $\mathbf{f}^T(\mathbf{x})$ sont les fonctions d'interpolation (ou fonctions de forme) du problème discrétisé.

1 Choix d'une discrétisation géométrique du domaine Ω

Le maillage du domaine s'effectue à partir de N_h éléments isoparamétriques à 4 nœuds (Fig. I.1). L'élément parent est un carré rapporté à des axes locaux ξ et η . A chaque sommet de ce carré (nœud) correspond un degré de liberté correspondant à la valeur de la charge hydraulique en ce nœud.

La transformation définissant l'élément isoparamétrique à partir de l'élément parent est régie par les relations (I.5).

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{j=1}^4 f_j(x_1)_j \\ x_2 = \sum_{j=1}^4 f_j(x_2)_j \end{cases}$$
 (I.5)

où $((x_1)_j,(x_2)_j)$ sont les coordonnées du nœud j et où les f_j désignent les fonctions d'interpolation associées aux quatre nœuds et définies par les équations (I.6).

$$\mathbf{f} = \begin{cases} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) \\ \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \\ \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) \\ \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \end{cases}$$
(I.6)

Par suite, pour tout $i \in [1,4]$,

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \mathcal{J} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \end{array} \right\}$$
(I.7)

où \mathcal{J} est la matrice jacobienne.

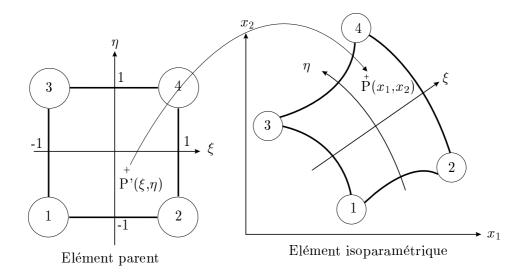


Fig. I.1 – Transformation de l'élément parent vers l'élément isoparamétrique

2 Expression locale (i.e. sur un élément) de la charge hydraulique

Soit Ω^e , $e \in [1, N_h]$, un élément quelconque de la discrétisation. Les équations (I.8) proposent une réécriture de l'équation du problème (\mathcal{P}_{var}) sur cet élément.

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial h_e^*}{\partial x_i} K_{ij}^e \frac{\partial h_e}{\partial x_j} d\Omega = 0$$
 (I.8a)

$$\int_{\Omega^e} \left\{ \frac{\partial h_e^*}{\partial x_1} \frac{\partial h_e^*}{\partial x_2} \right\} \mathbf{K}^e \left\{ \begin{array}{c} \partial h_e^* / \partial x_1 \\ \partial h_e^* / \partial x_2 \end{array} \right\} d\Omega^e = 0 \tag{I.8b}$$

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{h}_e^*(t)^T \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \right\} \mathbf{K}^e \left\{ \begin{array}{c} \partial \mathbf{f}^T / \partial x_1 \\ \partial \mathbf{f}^T / \partial x_2 \end{array} \right\} \mathbf{h}_e(t) d\Omega^e = 0$$
 (I.8c)

La charge hydraulique sur l'élément $\mathbf{h}_e^*(t)$ pouvant être choisie arbitrairement, le problème se réduit à :

$$\mathbf{M}^{e}(t)\mathbf{h}_{e}(t) = 0 \tag{I.9}$$

avec

$$\mathbf{M}^{e}(t) = \int_{\Omega^{e}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_{1}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_{2}} \right\} \mathbf{K}^{e} \left\{ \begin{array}{c} \partial \mathbf{f}^{T} / \partial x_{1} \\ \partial \mathbf{f}^{T} / \partial x_{2} \end{array} \right\} d\Omega^{e}$$
 (I.10)

Ces intégrales sont évaluées numériquement à l'aide de la méthode d'intégration de Gauss-Legendre.

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} g(x,y) dx dy = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \omega_{j}^{X} \omega_{k}^{Y} g(S_{j}, S_{k})$$
 (I.11)

où (S_j, S_k) (respectivement $\omega_j^X \omega_k^Y$), $(j,k) \in [1,N]^2$ sont les coordonnées (respectivement les pondérations) des N^2 points de Gauss où la fonction g est évaluée.

3 Assemblage des éléments

La matrice \mathbf{M} (équation (I.12)) du problème global s'obtient en sommant en chacun des nœuds les contributions élémentaires \mathbf{M}^e .

$$\mathbf{M}(t)\mathbf{h}(t) = 0 \tag{I.12}$$

Le gradient hydraulique est imposé par l'application de conditions aux limites de type Dirichlet sur la charge hydraulique aux frontières $\Gamma_{\rm inf}$ et $\Gamma_{\rm sup}$. Il est possible de réduire la taille du système à résoudre en écrivant le système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{II} & \mathbf{M}_{IF} \\ \mathbf{M}_{FI} & \mathbf{M}_{FF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{I} \\ \mathbf{h}_{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 (I.13)

avec \mathbf{h}_I les charges hydrauliques nodales inconnues et \mathbf{h}_F les charges hydrauliques nodales imposées, ce qui conduit à

$$\mathbf{M}_{II}\mathbf{h}_{I} = -\mathbf{M}_{IF}\mathbf{h}_{F} \tag{I.14}$$

$$\mathbf{h}_{I} = -\mathbf{M}_{II}^{-1} \mathbf{M}_{IF} \mathbf{h}_{F} \tag{I.15}$$

La connaissance des charges hydrauliques nodales et des fonctions de forme nous permet de déterminer la charge hydraulique en tout point du domaine considéré.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur B. CAMBOU

et les rapports de

Monsieur P-Y. HICHER
Professeur - Ecole Centrale de Nantes - Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM)
1, rue de la Noë - BP 92101 - 44321 NANTES cedex 3

et de

Monsieur J-N. ROUX Professeur - ENPC - Laboratoire des Matériaux et Structures du Génie Civil (LMSGC) - Cité Descartes 2, allée Kepler - 77420 CHAMPS-SUR-MARNE

Mademoiselle REBOUL Nadège

est autorisée à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de DOCTEUR

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE (MEGA)

Fait à Ecully, le 6 novembre 2008

P/Le Directeur de l'E.C.L. La Directrice des Etudes

M-A. GALLAND

RÉSUMÉ

Le terme érosion interne désigne les phénomènes d'arrachement et de transport de particules, sous l'effet de forces d'écoulement, au sein d'un matériau granulaire. Il s'agit de l'un des modes de rupture des digues et barrages en remblai les plus répandus. Localiser et quantifier les déplacements de matière au sein des matériaux granulaires apparaît donc crucial si l'on veut garantir la pérennité des ouvrages hydrauliques. Les critères de filtre permettent de statuer s'il y a transport ou non; ils s'appuient sur la connaissance de la courbe granulométrique des matériaux. Cette dernière peut être considérée comme une approche locale de la morphologie solide. Suivant une démarche similaire, l'analyse de la microstructure de l'espace poral où s'effectue la circulation des particules transportées a d'abord été proposée. Cette étude consiste à caractériser la morphologie et la topologie du réseau des vides d'assemblages numériques de sphères en s'appuyant sur une partition de Delaunay radical. Les spécificités de comportement liées aux variations de densité ont été étudiées. Plusieurs caractéristiques des pores et des constrictions, passages les plus étroits entre pores, sont définies permettant d'envisager une corrélation entre l'organisation de l'espace poral et les possibilités de migration de particules au sein de cet espace. Cette corrélation repose sur l'hypothèse d'un mécanisme de capture par exclusion de taille : une particule transportée est stoppée dès qu'elle rencontre une constriction de taille inférieure à son diamètre. Un modèle purement géométrique est alors proposé pour estimer la distance qu'une particule infiltrée de taille donnée peut parcourir dans un milieu granulaire. Faute de pouvoir modéliser l'évolution du comportement du milieu poreux à l'échelle macroscopique avec ce modèle, nous proposons une nouvelle modélisation de transport. Elle s'inscrit dans le cadre de la théorie des milieux continus mais est enrichie par l'intégration d'une variable caractéristique des aspects microstructurels : la distribution de tailles de constrictions. Cet enrichissement a été rendu possible par le développement d'une formule analytique destinée au calcul de la distribution de tailles de constrictions à partir de la distribution de tailles de particules. Cette formulation analytique a été obtenue à partir d'analyses numériques discrètes.

Mots clés : Matériau granulaire, Transport de masses, Pores, Constrictions, Eléments discrets, Triangulation de Delaunay, Modèle de transport.

ABSTRACT

Internal erosion is the phenomenon by which soil particles are entrained and washed out from an hydraulic earth structure by water seeping flows. It is one of the most widespread causes of failure of levees and embankment dams. So to guarantee security, it is crucial to locate and quantify mass transfers within granular materials. Filter criteria are employed to assess transfer properties of a granular medium. They rely on the soil grading curve which is a local characteristics of the solid material. In a same way, it has been proposed to carry out a microscopic analysis of void space where transported particles flow. Void networks in sphere packings are characterized morphologically and topologically thanks to a radical Delaunay tessellation. Specific behaviours resulting from relative density changes have been studied. Several measures of pores and constrictions, smallest paths between pores, are defined, which enables us to plan to correlate void space organization and possibilities for particles to migrate within this space. This correlation assumes that particles are captured by a size exclusion mechanism: a transported particle is blocked if it encounters a constriction smaller than it. A purely geometrical model has been proposed to estimate the travel length that a particle with a given size can cover within a granular medium. Because this model was unable to take into account structural changes of the material at macroscopic scale, a new approach has been developped. It is in line with the theory of continuous media but a local void characteristics, the constriction size distribution, has been added. This improvement has been made possible because an analytical formula has been proposed to calculate the constriction size distribution from the particle size distribution. This analytical formula results from discrete numerical analyses.

Keywords: Granular material, Mass transfer, Pores, Constrictions, Discrete elements, Delaunay tessellation, Transport model.