

# ECOLE CENTRALE DE LYON

N ° ordre : 2010-05

Année 2010

## THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

### DOCTEUR DE L'ECOLE CENTRALE DE LYON

Ecole Doctorale Mécanique, Energétique, Génie Civil & Acoustique (MEGA)

par

Laurent SOULAT

---

#### DÉFINITION, ANALYSE ET OPTIMISATION AÉRODYNAMIQUE D'UN NOUVEAU CONCEPT DE TRAITEMENT DE CARTER AU MOYEN D'OUTILS NUMÉRIQUES. APPLICATION AUX TURBOMACHINES BASSE VITESSE

---

PRÉSENTÉE LE 16 FÉVRIER 2010 À L'ECOLE CENTRALE DE LYON

#### JURY :

S. Moreau	Professeur, Université de Sherbrooke, Canada	Rapporteur
O. Léonard	Professeur, Université de Liège, Belgique	Rapporteur
P. Ferrand	Directeur de recherche CNRS, Ecole Centrale de Lyon, France	Directeur de thèse
I. Trébinjac	Maître de conférences, Ecole Centrale de Lyon, France	
M. Henner	Docteur Ingénieur, Valéo Thermal Systems, France	
P. Biscay	Docteur Ingénieur, Turbomeca, France	
S. Aubert	Docteur Ingénieur, Fluorem, France	Membre invité

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique - UMR 5509



*A Andrée et Rémy Raynaud*



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Pascal Ferrand, Directeur de recherche CNRS au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon. Ses conseils et sa disponibilité, même dans les périodes difficiles, m'ont fortement aidé dans mon travail de thèse.

Je veux aussi témoigner toute ma gratitude au Professeur Olivier Léonard, de l'université de Liège (Belgique), ainsi qu'au Professeur Stéphane Moreau, de l'université de Sherbrooke (Canada) pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je n'oublie pas non plus Mme Isabelle Trébinjac (LMFA), Mrs. Pierre Biscay (Turbomeca), Manuel Henner (Valéo) et Stéphane Aubert (Fluorem) qui ont accepté d'être membres du jury.

Je souhaite remercier Martin Buisson qui m'a fourni un soutien non négligeable au cours de cette thèse. Ses travaux préparatoires m'ont permis d'économiser un temps précieux lors de la réalisation et de l'exploitation des optimisations.

Un profond remerciement à tous ceux qui m'ont apporté une aide technique sur les différents logiciels utilisés tout au long de ma thèse. Je pense en particulier à l'équipe de Fluorem, Lionel Gamet, François Pacull, Claire Rambeau, Macumba N'Diaye, Thibault Turpin, Thierry Rochemont, Laurent Delmas, Céline Sy. Merci beaucoup pour vos conseils et remarques toujours utiles, et surtout pour votre *très* grande patience. Je remercie aussi Joëlle Caro et Jérôme Boudet qui m'ont fortement aidé lors de mon arrivée au LMFA.

Enfin, je remercie toutes celles et ceux que j'ai eu l'occasion de côtoyer et qui m'ont supporté pendant cette thèse : Hakim, Mickaël, Jean-Michel, Walid, les Nicolas, Benjamin, Emilie, Véronique, Hadi, Clément, Anas, Alexandre et tant d'autres. La bonne humeur et la convivialité du groupe m'ont permis d'apprécier pleinement ces trois ans.



# Résumé

Pour les turbomachines, les écoulements de jeu entre parties mobiles et fixes peuvent être une source non négligeable de dégradation des performances. Afin de contrer ces écoulements, on fait souvent appel à un traitement de carter. Cette étude est axée sur la définition, l'analyse et l'optimisation d'un nouveau concept de traitement de carter applicable aux turbomachines basse vitesse.

Plusieurs outils numériques sont nécessaires pour mener à bien cette étude. Pour la simulation numérique, il convient de disposer de schémas spatiaux adaptés aux maillages non-uniformes, lesquels sont développés ici. L'analyse pratique du traitement de carter fait intervenir une technique de dérivation d'ordre élevé du champ aérodynamique, permettant ensuite une reconstruction rapide des différentes géométries et des champs aérodynamiques associés. Cette technique de dérivation est couplée avec un algorithme génétique afin d'optimiser le traitement de carter. Un outil d'analyse et de visualisation du front de Pareto est alors employé.

Le nouveau traitement de carter proposé est un rainurage hélicoïdal du carter. Ce dispositif est utilisé pour réduire le débit de jeu et la giration de l'écoulement de jeu dans le cas de turbomachines présentant une virole. Le traitement de carter est modélisé afin de valider le concept même du rainurage. L'analyse des performances montre une amélioration par rapport à un jeu standard. L'étude du champ aérodynamique associé aux rainures fait ressortir des structures tourbillonnaires complexes et couplées. Une étude paramétrique permet de caractériser finement le comportement du nouveau traitement de carter relativement aux paramètres géométriques définissant la forme des rainures.

On valide l'ensemble des variations obtenues avec la méthode de dérivation d'ordre élevé. Le rainurage est alors optimisé en utilisant la base de donnée constituée par ces variations. L'analyse du front de Pareto permet de choisir une configuration optimale de traitement de carter. Cette solution est appliquée à un ventilateur de refroidissement. L'écoulement et les performances de l'ensemble [rotor+traitement de carter] sont étudiés précisément. Dans cette configuration, on améliore remarquablement les caractéristiques de l'écoulement de jeu.

## Mots-clés :

Traitement de carter, écoulement de jeu, turbomachines basse vitesse, rainurage hélicoïdal, optimisation, algorithme génétique, Self-Organizing Maps, paramétrisation, dérivation d'ordre élevé, schémas numériques spatiaux, maillages non-uniformes



# Abstract

The flow in the gap between moving and static parts of turbomachines is responsible for a important drop in performance of the overall system. A casing treatment is a usually applied in order to restrain these flows. The main purpose of this study is the definition, the analysis and the optimization of a new concept of casing treatment designed for low speed turbomachines.

Several numerical tools and techniques are required to carry out this study. Numerical simulation requires some accurate spatial schemes designed for non-uniform meshes. The development of these new schemes will be described here. The casing treatment analysis is also based on a high order differentiation technique that allows a quick reconstruction of the flowfields with respect to any given geometry. A genetic algorithm is associated to this reconstruction technique in order to optimize the casing treatment. A data-mining tool is thereafter necessary to process the result.

The new casing treatment consists in an helicoidal grooving of the casing. It aims at reducing the massflow and the swirl of the leakage gap flow within turbomachines with shrouded rotors. The casing treatment is modelized and simulated so as to validate the grooving concept. The performance criteria analysis shows an improvement compared to the standard gap. One finds a complex flow structure in the grooves. Several interacting vortices are noticed in the flowfield. A fine characterization of the casing treatment's behaviour is achieved by a parametric study of the geometrical parameters defining the grooves shape.

Aerodynamic performance variations calculated with the differentiation technique are validated. The casing treatment is optimized using the variation database. The resulting Pareto front is analyzed and a single optimal configuration is chosen. This solution is applied to a cooling fan. We precisely describe and analyse the flowfield and the aerodynamic performance for the complete set [rotor+casing treatment]. The casing treatment allows a drastic improvement of the gap flow in this configuration.

## Keywords :

Casing treatment, gap flow, low-speed turbomachines, helicoidal grooving, optimization, genetic algorithm, Self-organizing maps, parameterization, high-order derivation technique, spatial numerical schemes, non-uniform meshes



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Méthodes numériques pour la simulation</b>	<b>5</b>
2.1	Introduction . . . . .	5
2.2	Choix d'une discrétisation des équations de Navier-Stokes . . . . .	5
2.2.1	Discrétisation temporelle . . . . .	6
2.2.2	Discrétisation spatiale . . . . .	6
2.3	Formulation Volumes Finis . . . . .	8
2.4	Discrétisation spatiale des flux convectifs - schémas décentrés amont . . . . .	13
2.4.1	Schéma à séparation de flux de Van Leer . . . . .	14
2.4.2	Schéma de Liou . . . . .	15
2.4.2.1	Correction de la dissipation artificielle pour les écoulements à basse vitesse . . . . .	17
2.4.2.2	Correction des instabilités de pression . . . . .	18
2.4.3	Schéma à différence de flux - Schéma de Roe . . . . .	18
2.4.3.1	Principes généraux des schémas à différence de flux . . . . .	18
2.4.3.2	Schéma de Roe . . . . .	19
2.4.4	Schémas d'ordre élevé . . . . .	19
2.4.4.1	Interpolation MUSCL . . . . .	19
2.4.4.2	Limiteurs de pentes pour la formulation MUSCL . . . . .	22
2.4.5	Généralisation des formules d'interpolation pour les schémas décentrés amont . . . . .	23
2.4.5.1	Interpolation des variables - Remarque préalable . . . . .	24
2.4.5.2	Schéma du troisième ordre . . . . .	25
2.4.5.3	Interpolation du second ordre . . . . .	30
2.4.5.4	Validation des formulations généralisées . . . . .	31
2.4.6	Généralisation des limiteurs . . . . .	35
2.4.6.1	Limiteurs de flux . . . . .	35
2.4.6.2	Application des limiteurs de flux à des cas tests . . . . .	38
2.5	Discrétisation spatiale des flux convectifs - schémas centrés . . . . .	45
2.5.1	Schéma spatial centré . . . . .	45
2.5.2	Généralisation du schéma centré aux maillages non uniformes . . . . .	47
2.5.2.1	Correction de l'interpolation du champ au second ordre . . . . .	47
2.5.2.2	Correction de l'interpolation du champ au quatrième ordre . . . . .	48
2.5.2.3	Correction de la dissipation artificielle . . . . .	48
2.5.2.4	Application à des cas tests . . . . .	50

2.6	Discrétisation spatiale des flux diffusifs . . . . .	59
2.7	Synthèse sur les méthodes numériques pour la simulation . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Etude d'un traitement de carter</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	Problématique du refroidissement automobile . . . . .	63
3.2.1	Contexte général . . . . .	63
3.2.2	Analyse du ventilateur de référence Valéo . . . . .	65
3.2.2.1	Déficit de vitesse axiale . . . . .	69
3.2.2.2	Augmentation de la vitesse azimutale absolue . . . . .	69
3.2.2.3	Couplage des deux effets de jeu et impact sur le ventilateur . . . . .	70
3.2.2.4	Synthèse sur les effets de jeu pour le ventilateur de référence . . . . .	74
3.3	Traitement de carter proposé - Principes et objectifs . . . . .	75
3.3.1	Traitements de carter existants . . . . .	76
3.3.1.1	Joint labyrinthique . . . . .	76
3.3.1.2	"Bladelets" . . . . .	76
3.3.1.3	Traitement de carter pour ventilateur automobile . . . . .	77
3.3.2	Principe du traitement de carter proposé . . . . .	78
3.3.3	Origine du traitement de carter - Pompes Holweck . . . . .	79
3.4	Modélisation du traitement de carter . . . . .	82
3.4.1	Description du modèle de traitement de carter . . . . .	82
3.4.1.1	Définition géométrique du modèle . . . . .	82
3.4.1.2	Paramétrisation géométrique . . . . .	84
3.4.1.3	Conditions aux limites aérodynamiques . . . . .	85
3.4.1.4	Conditions numériques de simulation . . . . .	87
3.4.2	Géométries de comparaison et de validation . . . . .	87
3.4.2.1	Canal lisse . . . . .	88
3.4.2.2	Obstacle circonférentiel . . . . .	88
3.4.2.3	Géométries avec effets technologiques . . . . .	90
3.4.3	Objectifs du traitement de carter - Notations . . . . .	92
3.4.4	Validation du principe de traitement de carter . . . . .	92
3.4.5	Analyse de la structure globale de l'écoulement . . . . .	93
3.4.5.1	Remarques préliminaires . . . . .	93
3.4.5.2	Evolution dans les plénums . . . . .	94
3.4.5.3	Champ de vitesse dans le jeu . . . . .	95
3.4.5.4	Répartition de débit dans le jeu . . . . .	101
3.4.5.5	Champ de pression statique dans le jeu . . . . .	105
3.4.5.6	Champ de pression totale dans le jeu . . . . .	106
3.4.6	Structures tourbillonnaires de l'écoulement au niveau des rainures . . . . .	107
3.4.6.1	Décollement d'entrée de rainure . . . . .	107
3.4.6.2	Tourbillon colinéaire à la rainure . . . . .	110
3.4.6.3	Tourbillons arrières . . . . .	119
3.4.6.4	Effets technologiques sur la modélisation générale du jeu . . . . .	130
3.4.6.5	Synthèse sur l'analyse des structures tourbillonnaires . . . . .	135
3.4.7	Analyse quantitative de l'influence des paramètres sur les objectifs . . . . .	136
3.4.7.1	Longueur de la rainure $L$ . . . . .	136

3.4.7.2	Largeur de la rainure $w$ . . . . .	139
3.4.7.3	Nombre de rainures $N$ . . . . .	142
3.4.7.4	Angle de la rainure $\alpha$ . . . . .	145
3.4.7.5	Hauteur de la rainure $h$ . . . . .	148
3.4.7.6	Effets du débit . . . . .	150
3.4.7.7	Récapitulatif sur l'étude de l'influence de chaque paramètre . . . . .	152
3.5	Synthèse sur l'étude détaillée du traitement de carter . . . . .	152
3.5.1	Validation et analyse du nouveau traitement de carter . . . . .	152
3.5.2	Suite de l'étude . . . . .	153
<b>4</b>	<b>Méthodes pour l'optimisation et la paramétrisation</b> . . . . .	<b>155</b>
4.1	Introduction . . . . .	155
4.2	Cadre général des méthodes d'optimisation . . . . .	155
4.2.1	Notion d'optimisation . . . . .	156
4.2.2	Optimisation Multi-objectifs - Optimalité de Pareto . . . . .	157
4.3	Méthodes Inverses . . . . .	161
4.3.1	Méthode inverse . . . . .	161
4.3.2	Approche inverse . . . . .	162
4.4	Méthodes d'optimisation directes . . . . .	163
4.4.1	Principe des méthodes directes . . . . .	163
4.4.2	Limites principales des méthodes de descente . . . . .	165
4.5	Méthodes métaheuristiques - méthodes d'ordre 0 . . . . .	166
4.5.1	Méthodes évolutionnaires principales . . . . .	166
4.5.1.1	Marche au hasard . . . . .	166
4.5.1.2	Algorithmes génétiques . . . . .	167
4.5.1.3	Stratégie d'évolution . . . . .	167
4.5.1.4	Progammation évolutive . . . . .	168
4.5.1.5	Evolution différentielle . . . . .	168
4.5.1.6	Approche prédateur-proie . . . . .	168
4.5.2	Autres méthodes métaheuristiques . . . . .	169
4.5.2.1	Approche sociale - colonies de fourmis . . . . .	169
4.5.2.2	Approche thermodynamique - recuit simulé . . . . .	169
4.6	Algorithmes génétiques . . . . .	170
4.6.1	Principe de fonctionnement des algorithmes génétiques . . . . .	170
4.6.2	Mécanismes généraux des algorithmes génétiques . . . . .	171
4.6.2.1	Sélection des individus . . . . .	171
4.6.2.2	Reproduction . . . . .	172
4.6.2.3	Mutation . . . . .	173
4.6.2.4	Elitisme . . . . .	174
4.6.3	Problème lié à l'utilisation des algorithmes génétiques . . . . .	175
4.7	Méthodes numériques pour la paramétrisation . . . . .	175
4.7.1	Motivation de l'approche paramétrée . . . . .	175
4.7.2	Théorie de la paramétrisation . . . . .	176
4.7.3	Extrapolation du champ aérodynamique . . . . .	179
4.7.3.1	Série de Taylor . . . . .	179
4.7.3.2	Approximant de Padé . . . . .	179

4.7.3.3	Autres techniques . . . . .	180
4.7.4	Effets de l'extrapolation sur les variables non conservatives . . . . .	180
4.7.4.1	Problématique . . . . .	180
4.7.4.2	Exemple d'un écoulement monodimensionnel . . . . .	181
4.7.4.3	Application à l'étude du traitement de carter . . . . .	185
4.7.4.4	Synthèse . . . . .	187
4.8	Algorithme Génétique NSGA-II . . . . .	187
4.8.1	Caractéristiques de l'algorithme . . . . .	187
4.8.2	Structure de NSGA-II . . . . .	188
4.9	Post-traitement de l'optimisation . . . . .	190
4.9.1	Méthodes de visualisation classiques . . . . .	190
4.9.2	Partitionnement de population . . . . .	191
4.9.3	Self-Organizing Map . . . . .	192
4.9.3.1	Présentation des SOM . . . . .	192
4.9.3.2	Construction des SOM . . . . .	193
4.9.3.3	Apprentissage séquentiel . . . . .	194
4.9.3.4	Apprentissage matriciel . . . . .	195
4.9.3.5	Taille des cartes . . . . .	195
4.9.3.6	Initialisation des cartes . . . . .	197
4.9.3.7	Informations supplémentaires associées aux SOM . . . . .	198
4.10	Synthèse sur la paramétrisation et l'optimisation . . . . .	201
<b>5</b>	<b>Optimisation et application du traitement de carter</b>	<b>203</b>
5.1	Introduction . . . . .	203
5.2	Paramétrisation Turb'Opty - couplages entre paramètres . . . . .	203
5.2.1	Evaluation des résultats paramétrisés avec Turb'Opty - Comparaison avec Turb'Flow . . . . .	204
5.2.2	Etude des variations obtenues par la paramétrisation . . . . .	204
5.2.2.1	Longueur L . . . . .	204
5.2.2.2	Largeur w . . . . .	206
5.2.2.3	Nombre de rainures N . . . . .	207
5.2.2.4	Angle $\alpha$ . . . . .	208
5.2.2.5	Hauteur h . . . . .	210
5.2.3	Couplages entre paramètres . . . . .	211
5.3	Optimisation du traitement de carter modélisé . . . . .	215
5.3.1	Conditions de l'optimisation . . . . .	215
5.3.2	Résultats de l'optimisation . . . . .	216
5.3.2.1	Front de Pareto . . . . .	216
5.3.2.2	Cartographie SOM de la population optimale . . . . .	217
5.3.3	Choix d'une géométrie . . . . .	220
5.4	Application du traitement de carter au ventilateur Valéo . . . . .	220
5.4.1	Conditions de l'étude . . . . .	220
5.4.2	Intégration du traitement de carter - Configuration 1 . . . . .	221
5.4.2.1	Description . . . . .	221
5.4.2.2	Effets du traitement de carter - Configuration 1 . . . . .	222
5.4.2.3	Corrections proposées . . . . .	227

5.4.3	Traitement de carter - Configuration 2 . . . . .	227
5.4.3.1	Écoulement global dans le jeu . . . . .	228
5.4.3.2	Structures tourbillonnaires dans le jeu . . . . .	230
5.4.3.3	Effets globaux du traitement de carter n° 2 . . . . .	234
5.4.4	Traitement de carter - Configuration 3 . . . . .	234
5.4.4.1	Structure générale de l'écoulement dans le jeu . . . . .	235
5.4.4.2	Structures tourbillonnaires dans le jeu . . . . .	236
5.4.4.3	Effets globaux du traitement de carter n° 3 . . . . .	237
5.4.5	Effets de l'amélioration de l'écoulement de jeu sur le ventilateur . . . . .	237
5.4.6	Synthèse sur l'application du traitement de carter au ventilateur . . . . .	244
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>245</b>
<b>A</b>	<b>Modélisation de l'écoulement</b>	<b>251</b>
A.1	Equations de Navier-Stokes . . . . .	251
A.2	Equations moyennées . . . . .	252
A.2.1	Equations pour les variables conservatives . . . . .	252
A.2.2	Modélisation de la turbulence . . . . .	256
A.3	Equations adimensionnées . . . . .	257
<b>B</b>	<b>Méthodes Numériques pour la Simulation - Annexe</b>	<b>259</b>
B.1	Discrétisation temporelle . . . . .	259
B.1.1	Schéma d'Euler explicite . . . . .	260
B.1.2	Schéma de Runge-Kutta . . . . .	261
B.1.3	Détermination du pas de temps $\Delta t$ . . . . .	262
B.1.4	Lissage du résidu . . . . .	264
B.1.4.1	Lissage explicite du pas de temps . . . . .	264
B.1.4.2	Lissage implicite du pas de temps . . . . .	265
B.2	Discrétisation spatiale des flux turbulents . . . . .	265
B.2.1	Flux convectif . . . . .	266
B.2.2	Flux Diffusif . . . . .	267
B.3	Traitement des conditions aux limites . . . . .	267
B.3.1	Extension du domaine de calcul . . . . .	268
B.3.2	Conditions géométriques de frontière . . . . .	270
B.3.3	Conditions aux limites physiques . . . . .	270
<b>C</b>	<b>Concepts généraux d'optimisation</b>	<b>275</b>
C.1	Généralisation de la dominance . . . . .	275
C.1.1	Dominance généralisée . . . . .	275
C.1.2	Équilibre de Nash . . . . .	276
C.1.3	Équilibre de Stackelberg . . . . .	277
C.2	Techniques pour l'optimisation mono-objectif . . . . .	277
C.2.1	Fonction objectif agrégée . . . . .	278
C.2.2	Méthode par contrainte $\varepsilon$ . . . . .	280
C.2.3	Méthode des distances pondérées . . . . .	281
C.2.4	Conclusion sur les techniques mono-objectif . . . . .	282

<b>D</b>	<b>Méthodes d'optimisation directes</b>	<b>283</b>
D.1	Méthodes de descente usuelles . . . . .	283
D.1.1	Méthode de la plus forte pente (steepest-descent) . . . . .	283
D.1.2	Méthode de Newton . . . . .	285
D.2	Gestion des contraintes . . . . .	286
D.2.1	Classification des contraintes et des problèmes . . . . .	286
D.2.2	Reformulation des contraintes . . . . .	287
D.2.3	Multiplicateurs de Lagrange . . . . .	288
D.2.4	Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) . . . . .	289
D.3	Calcul des gradients . . . . .	289
D.3.1	Evaluation par différences finies . . . . .	290
D.3.2	Calcul du gradient par état adjoint . . . . .	290
D.3.2.1	Adjoint discret . . . . .	292
D.3.2.2	Adjoint continu . . . . .	293
<b>E</b>	<b>Opérateurs des algorithmes génétiques</b>	<b>295</b>
E.1	Processus de sélection . . . . .	295
E.1.1	Tournoi à $n$ individus . . . . .	295
E.1.2	Roulette . . . . .	295
E.2	Opérateurs génétiques - codage binaire . . . . .	297
E.2.1	Opérateur de croisement . . . . .	298
E.2.2	Opérateur de mutation . . . . .	301
E.2.3	Limites du codage binaire . . . . .	301
E.3	Opérateurs génétiques - codage réel . . . . .	302
E.3.1	Opérateur de croisement . . . . .	302
E.3.2	Opérateur de mutation . . . . .	307
E.4	Elitisme . . . . .	309
E.5	Pareto-efficacité . . . . .	310
E.6	Préservation de la diversité . . . . .	312
E.6.1	Approche de niche - Sharing . . . . .	312
E.6.2	Crowding Distance . . . . .	313
E.6.3	Limites d'utilisation de ces méthodes . . . . .	315
E.7	Traitement des contraintes . . . . .	315
E.8	Algorithmes distribués, hiérarchiques et multi-niveaux . . . . .	318
E.9	Evaluation des individus . . . . .	320
E.9.1	Approche paramétrique . . . . .	320
E.9.2	Modélisation interpolatrice de la population . . . . .	321
E.9.2.1	Surface de réponse . . . . .	321
E.9.2.2	Kriging . . . . .	322
E.9.2.3	Réseaux de neurones artificiels . . . . .	324
E.9.2.4	Radial Basis Function . . . . .	326
E.9.3	Lien avec les techniques d'accélération distribuées et multi-niveaux . . . . .	328

---

<b>F</b>	<b>Méthodes pour la résolution de systèmes linéaires creux</b>	<b>331</b>
F.1	Méthode du gradient conjugué - espace de Krylov . . . . .	332
F.2	Méthodes de Krylov générales . . . . .	334
F.2.1	Algorithme GMRES . . . . .	335
F.2.2	Restarted GMRES . . . . .	336
F.2.3	Deflated GMRES . . . . .	337
F.3	Autres méthodes . . . . .	338
<b>G</b>	<b>Maillages utilisés</b>	<b>339</b>
G.1	Maillage des rainures . . . . .	339
G.2	Maillage du ventilateur et du jeu/rainures . . . . .	340



# Table des figures

2.1	Approches <i>cell-vertex</i> et <i>cell-center</i> . . . . .	8
2.2	Changement de repère sur un maillage structuré . . . . .	9
2.3	Structure de maillage croisé . . . . .	10
2.4	Détermination des états gauches et droits par une approche MUSCL . . . . .	20
2.5	Construction graphique des interpolations MUSCL pour $\kappa = 0$ , $\kappa = 1$ et $\kappa = -1$ . . . . .	21
2.6	Comparaison des interpolations MUSCL pour $\kappa = 1/2$ et $\kappa = 1/3$ . . . . .	26
2.7	Positions des noeuds et des centroïdes pour un maillage quelconque . . . . .	28
2.8	Maillages utilisés pour le cas Ringleb . . . . .	31
2.9	Cas test Ringleb - Nombre de Mach $M$ - maillage de référence et maillage déraffiné . . . . .	32
2.10	Cas test Ringleb - Pression Totale $P_t$ - maillage de référence et maillage déraffiné . . . . .	33
2.11	Cas test Ringleb - Pression Totale $P_t$ - maillage de référence et maillage déformé . . . . .	34
2.12	Définition des grandeurs pour les limiteurs de flux . . . . .	35
2.13	Interpolation $\kappa = 1/3$ de Waterson et interpolation MUSCL du troisième ordre - Cas Ringleb - $P_t$ . . . . .	38
2.14	Cas Ringleb standard- $P_t$ - Comparaison des limiteurs du second ordre . . . . .	39
2.15	Cas Ringleb déformé- $P_t$ - Comparaison des limiteurs du second ordre . . . . .	40
2.16	Cas Ringleb - $P_t$ - Comparaison des limiteurs du troisième ordre . . . . .	41
2.17	Convection d'un scalaire passif - détail du maillage et champ initial . . . . .	42
2.18	Comparaison des profils du scalaire pour les schémas non limités . . . . .	42
2.19	Comparaison des profils de scalaire pour les limiteurs du second ordre . . . . .	43
2.20	Comparaison des profils du scalaire pour les limiteurs du troisième ordre . . . . .	44
2.21	Interpolation généralisée pour un schéma centré au second ordre . . . . .	48
2.22	Fluctuation de pression remontante - vue générale . . . . .	51
2.23	Reconstruction à l'ordre 2 - Large saut de maille . . . . .	52
2.24	Reconstruction à l'ordre 2 - Petit saut de maille . . . . .	52
2.25	Erreur sur la pression statique - ordre 2 . . . . .	53
2.26	Pression statique au niveau de la zone géométrique - schéma d'ordre 2 . . . . .	53
2.27	Reconstruction à l'ordre 4 - Large saut de maille . . . . .	54
2.28	Reconstruction à l'ordre 4 - Petit saut de maille . . . . .	55
2.29	Erreur sur la pression statique - ordre 4 . . . . .	55
2.30	Pression statique au niveau de la zone géométrique - schéma d'ordre 4 . . . . .	56
2.31	Influence du maillage sur l'erreur - schéma d'ordre 4 . . . . .	57
2.32	Influence du maillage sur l'erreur - schéma d'ordre 2 . . . . .	58
2.33	Molécule de calcul pour la discrétisation des flux diffusifs . . . . .	60

3.1	Eclaté d'un groupe moto-ventilateur automobile . . . . .	64
3.2	GMV fourni par Valéo - détail sur le jeu . . . . .	66
3.3	Configuration numérique simulée - Coupe méridienne . . . . .	67
3.4	Composante axiale $U_x$ (gauche), azimutale absolue $V_y$ (centre) et relative $W_y$ (droite) moyenne de vitesse au niveau du rotor - Configuration standard . . . . .	68
3.5	Champ vectoriel méridien de vitesse en tête d'aube . . . . .	69
3.6	Vitesse azimutale absolue au voisinage de la virole - Configuration standard . . . . .	70
3.7	Profils amont des composantes $U_x$ , $W_y$ et d'angle relatif $\beta$ - Configuration standard . . . . .	71
3.8	Champ de vitesse relative - Coupe aube à aube à 97% de hauteur . . . . .	72
3.9	Profils de pression totale relative $P_{tr}$ - Configuration standard . . . . .	72
3.10	Profils de pression statique $P_s$ - Configuration standard . . . . .	73
3.11	Champ méridien de pression statique $P_s$ - Configuration standard . . . . .	73
3.12	Schéma méridien du joint labyrinthique . . . . .	76
3.13	Configuration avec "bladelets" - reproduction de Wallis et al., 2001 . . . . .	77
3.14	Décollements dans le jeu . . . . .	77
3.15	Traitement de carter Siemens . . . . .	78
3.16	Coupe d'une pompe Holweck à rotor lisse . . . . .	80
3.17	Modèle général de rainures - gros plan . . . . .	83
3.18	Positionnement des plénums et de la zone rainurée . . . . .	84
3.19	Paramétrisation géométrique des rainures . . . . .	85
3.20	Description de la configuration en canal lisse . . . . .	88
3.21	Description de la configuration avec un obstacle circonférentiel . . . . .	89
3.22	Ecoulement en amont et au dessus de l'obstacle circonférentiel - h=3 mm, L=9 mm . . . . .	89
3.23	Recirculation derrière l'obstacle circonférentiel - h=3 mm, L=9 mm . . . . .	90
3.24	Géométrie cylindrique . . . . .	91
3.25	Géométrie avec congés de raccordement . . . . .	91
3.26	Repérage des coins au niveau de la rainure . . . . .	94
3.27	Définitions des différentes zones et plans remarquables du jeu . . . . .	94
3.28	Profils de vitesse en entrée de jeu . . . . .	95
3.29	Champ de vitesse au niveau du jeu . . . . .	96
3.30	Composantes de vitesse au niveau du jeu . . . . .	97
3.31	Profils de vitesse et d'incidence en entrée et en sortie de jeu avec rainures . . . . .	99
3.32	Comparaison des profils aval de vitesse axiale et transversale . . . . .	100
3.33	Plans d'intégration sur la rainure . . . . .	102
3.34	Fraction de débit passant dans la rainure . . . . .	102
3.35	Equilibrage de vitesse débitante au niveau des rainures . . . . .	104
3.36	Vitesse débitante moyenne adimensionnée dans la rainure . . . . .	104
3.37	Carte de pression statique à mi-hauteur de rainure et de zone supérieure . . . . .	105
3.38	Carte de pression totale à mi-hauteur de rainure et de zone supérieure . . . . .	106
3.39	Profils de pression totale . . . . .	107
3.40	Recirculation en entrée de rainure - Coupe à mi-hauteur de rainure . . . . .	108
3.41	Etendue du décollement en entrée de rainure . . . . .	108
3.42	Vortex de rainure - Champ vectoriel et pression statique à mi-longueur de la rainure . . . . .	110
3.43	Cartographie de vitesse transversale $V_y$ le long de la rainure . . . . .	112
3.44	Trajectoires des particules au niveau du tourbillon de rainure . . . . .	113
3.45	Carte de vitesse $V_y$ - Sortie et aval de la rainure . . . . .	114

3.46	Carte de vitesse transversale - Coupe en sortie de rainure . . . . .	115
3.47	Trajectoire du cœur tourbillonnaire - cas $\alpha = 70^\circ, 115^\circ, 140^\circ$ . . . . .	116
3.48	Effets de la hauteur sur $V_y$ en sortie de rainure . . . . .	117
3.49	Effets de la largeur sur $V_y$ en sortie de rainure . . . . .	118
3.50	Tourbillon arrière - Recirculation dans le plan méridien . . . . .	119
3.51	Tourbillon arrière - Poche de vitesse axiale négative . . . . .	120
3.52	Décollement aval à droite de la rainure - Coupe à mi-hauteur de la rainure . . . . .	123
3.53	Décollements aval à gauche et à droite des rainures - Coupe à 0.33h . . . . .	123
3.54	Champs de pression statique et de vitesse à mi-hauteur de la rainure, $\alpha = 115^\circ$ . . . . .	124
3.55	Champ de vitesse en aval de l'obstacle pour $\alpha = 140^\circ$ . . . . .	126
3.56	Evolution du champ de vitesse $V_y$ à mi-hauteur en aval de l'obstacle en fonction du paramètre $w$ . . . . .	127
3.57	Déformation de la recirculation arrière droite - plan à mi-hauteur de rainure . . . . .	128
3.58	Débordement des tourbillons arrière . . . . .	129
3.59	Poches de vitesse axiale négative. Comparaison des cas avec et sans congés . . . . .	132
3.60	Décollement arrière en $\mathbf{Ds}$ avec et sans congés - cas $\alpha = 45^\circ$ . . . . .	133
3.61	Recirculation amont - Cas avec congés . . . . .	133
3.62	Écoulement amont - Cas sans congé . . . . .	134
3.63	Écoulement amont - Champ de vitesse axiale à 40% de hauteur de rainure . . . . .	134
3.64	Evolution longitudinale de la moyenne de $V_y$ pour l'obstacle circconférentiel . . . . .	138
3.65	Evolution longitudinale de la moyenne de $V_y$ pour le rainurage . . . . .	138
3.66	Evolution longitudinale de la moyenne de $P_t$ pour le rainurage . . . . .	139
3.67	Effets du paramètre $w$ sur les objectifs . . . . .	140
3.68	Evolution longitudinale des moyennes de $P_s$ et $V_y$ - paramètre $w$ . . . . .	141
3.69	Carte de pression statique et vitesse à mi-rainure - Effets de la largeur . . . . .	142
3.70	Effets du paramètre $N$ sur les objectifs . . . . .	143
3.71	Evolution longitudinale des moyennes de $P_s, P_t$ et $V_y$ - paramètre $N$ . . . . .	144
3.72	Effets du paramètre $\alpha$ sur les objectifs . . . . .	145
3.73	Evolution longitudinale des moyennes de $P_s, P_t$ et $V_y$ - paramètre $\alpha$ . . . . .	147
3.74	Effets du paramètre $h$ sur les objectifs . . . . .	148
3.75	Evolution longitudinale des moyennes de $P_s, P_t$ et $V_y$ - paramètre $h$ . . . . .	149
3.76	Evolution longitudinale des moyennes de $P_s, P_t$ et $V_y$ - Vitesse amont . . . . .	151
4.1	Espace paramétrique et espace objectif . . . . .	157
4.2	Illustration 2D de la notion de dominance . . . . .	159
4.3	Localisation des fronts Pareto-optimaux dans différentes configurations . . . . .	160
4.4	Fonctionnement conceptuel des méthodes inverses . . . . .	162
4.5	Représentation de la direction de descente - cas bi-paramétrique . . . . .	164
4.6	Structure générale d'un algorithme génétique . . . . .	174
4.7	Reconstruction de $P_s$ à partir des variables conservatives extrapolées . . . . .	182
4.8	Evolution de la vitesse $U$ en fonction de la pression statique $p$ . . . . .	184
4.9	Reconstruction à l'ordre 2 des objectifs $\Delta P_s, \Delta P_t$ et $\Delta V_y$ - effet des variables de reconstruction . . . . .	186
4.10	Structure de l'algorithme NSGA-II . . . . .	188
4.11	Exemple de représentation SOM . . . . .	192
4.12	Treillis hexagonal et rectangulaire . . . . .	193

4.13	Introduction de vecteurs prototypes interpolés par la SOM . . . . .	196
4.14	Analyse en composantes principales sur les variables - visualisation des corrélations . . . . .	199
4.15	Représentation de la distance U-Matrix . . . . .	200
5.1	Effets du paramètre L sur les objectifs - paramétrisation . . . . .	205
5.2	Effets du paramètre w sur les objectifs - paramétrisation . . . . .	206
5.3	Effets du paramètre N sur les objectifs - paramétrisation . . . . .	207
5.4	Effets du paramètre $\alpha$ sur les objectifs - paramétrisation . . . . .	209
5.5	Effets du paramètre h sur les objectifs - paramétrisation . . . . .	210
5.6	Couplage entre h et $\alpha$ - objectif $\Delta P_s$ . . . . .	212
5.7	Couplage entre h et $\alpha$ - comportement optimal avec h . . . . .	213
5.8	Couplage entre h et $\alpha$ - comportement optimal avec h . . . . .	214
5.9	Front de Pareto dans l'espace objectif . . . . .	216
5.10	Cartographie SOM de la population optimale . . . . .	217
5.11	Position des minima de chaque objectif . . . . .	218
5.12	Front de Pareto reconstruit à partir des vecteurs prototypes de la SOM . . . . .	219
5.13	Application du traitement de carter issu de l'étude paramétrique . . . . .	221
5.14	Champ méridien de vitesse au niveau du jeu - Configuration 1 . . . . .	223
5.15	Iso-surface de vitesse axiale nulle dans le jeu . . . . .	223
5.16	Recirculation dans le plénum aval . . . . .	224
5.17	Vitesse azimutale $V_y$ dans le jeu - Configuration 1 et configuration de référence . . . . .	225
5.18	Profils de vitesse azimutale $V_y$ en sortie de jeu - Configuration 1 et configuration de référence . . . . .	226
5.19	Position des plans d'intégration amont et aval . . . . .	226
5.20	Configurations de rainurages proposées en correction . . . . .	228
5.21	Champ méridien de vitesse dans le jeu - Configuration 2 . . . . .	229
5.22	Champ vitesse axiale $U_x$ à mi-hauteur de rainure - Configuration 2 . . . . .	230
5.23	Champ méridien de vitesse azimutale dans le jeu - Configuration 2 . . . . .	230
5.24	Champ vitesse azimutale $V_y$ à mi-rainure - Configuration 2 . . . . .	231
5.25	Champ vitesse axiale $U_x$ à mi-rainure - Configuration 2 . . . . .	231
5.26	Champ vitesse radiale $V_z$ à mi-rainure - Configuration 2 . . . . .	232
5.27	Champ vitesse radiale $V_z$ en aval d'un obstacle - Configuration 2 . . . . .	233
5.28	Poches de vitesse azimutale $V_y < 0$ en aval des obstacles - Configuration 2 . . . . .	233
5.29	Champ vitesse axiale $U_x$ à mi-rainure - Configuration 2 . . . . .	235
5.30	Champ méridien de vitesse azimutale dans le jeu - Configuration 3 . . . . .	236
5.31	Champ vitesse radiale $V_z$ en aval d'un obstacle - Configuration 3 . . . . .	237
5.32	Champ méridien de pression totale relative $P_{tr}$ . . . . .	238
5.33	Champ méridien de vitesse azimutale absolue $V_y$ . . . . .	238
5.34	Champ de vitesse relative à 97% de la hauteur . . . . .	239
5.35	Profils amont des composantes $U_x$ , $V_y$ , $W_y$ et d'angle relatif $\beta$ . . . . .	240
5.36	Composantes de vitesse axiale $U_x$ (haut), azimutale $V_y$ (milieu) et radiale $V_z$ (bas) en sortie de jeu . . . . .	241
5.37	Champ de vitesse amont sans jeu . . . . .	243
B.1	Molécules de calcul pour le premier et troisième ordre non visqueux et troisième ordre visqueux . . . . .	268

B.2	Plans et arêtes supplémentaires . . . . .	269
C.1	Processus de convergence vers un équilibre de Nash . . . . .	276
C.2	Localisation de la solution - Fonction objectif pondérée . . . . .	279
C.3	Reconstruction d'une zone concave - Fonction Objectif Pondérée . . . . .	280
C.4	Détermination des optima - Méthode par contrainte . . . . .	281
D.1	Effet d'une descente trop forte - méthode de la plus forte pente . . . . .	284
E.1	Sélection par roulette classique . . . . .	296
E.2	Stochastic Universal Sampling . . . . .	297
E.3	Représentation d'un individu - codage binaire . . . . .	298
E.4	Opérateur de croisement à un site . . . . .	299
E.5	Croisement Simple . . . . .	303
E.6	Distribution de probabilité $P$ & Probabilité de création des enfants (Deb,2001) . . . . .	305
E.7	Distribution de probabilité de création des enfants pour deux écartements entre les parents (Deb,2001) . . . . .	306
E.8	Méthode du Simplexe . . . . .	307
E.9	Probabilité de mutation . . . . .	309
E.10	Crowding distance . . . . .	314
E.11	Crowding distance - cas général . . . . .	314
E.12	Algorithme à structure hiérarchique . . . . .	318
E.13	Algorithmes Multi-niveaux (Reproduit de Kampolis,2008) . . . . .	319
E.14	Reconstruction par Kriging . . . . .	323
E.15	Détection d'un optimum par une approche au mérite . . . . .	324
E.16	Structure d'un réseau de neurones . . . . .	325
E.17	Structure d'un neurone et fonction de transfert sigmoïde . . . . .	325
E.18	Structure d'un réseau RBF . . . . .	327
G.1	Maillage fin au niveau de la rainure - modélisation de la rainure . . . . .	339
G.2	Maillage fin au niveau des plénums - modélisation de la rainure . . . . .	340
G.3	Maillage méridien du ventilateur - vue globale . . . . .	341
G.4	Maillage du ventilateur - coupe aube à aube . . . . .	342
G.5	Maillage méridien au niveau du jeu - configurations 1 et 3 . . . . .	342
G.6	Maillage du jeu dans le plan aube à aube - configuration 3 . . . . .	343
G.7	Exemple de maillage non-coïncident en azimuth . . . . .	343



# Liste des tableaux

2.1	Ecart sur l'erreur relative entre les cas $\varepsilon_4 = 0.05$ et $\varepsilon_4 = 0.15$ - position $x=8.7\text{m}$ . . .	57
2.2	Ecart sur l'erreur relative entre les cas $\varepsilon_2 = 0.05$ et $\varepsilon_2 = 0.15$ - position $x=8.6\text{m}$ . . .	58
3.1	Conditions de fonctionnement nominales du ventilateur . . . . .	66
3.2	Perfomances du ventilateur - Configuration de référence . . . . .	67
3.3	Conditions aux limites . . . . .	87
3.4	Distances de recollement en aval de l'obstacle circconférentiel . . . . .	90
3.5	Validation du traitement de carter . . . . .	93
3.6	Géométrie de référence pour l'étude du rainurage . . . . .	93
3.7	Evolution de la recirculation d'entrée - influence de l'angle de rainure . . . . .	109
3.8	Variation de l'hélicité moyenne en sortie de rainure relativement à l'angle . . . . .	116
3.9	Variation de l'hélicité et de la vitesse transversale moyenne en sortie de rainure relativement à la hauteur . . . . .	117
3.10	Extension de la recirculation méridienne - influence de la hauteur . . . . .	120
3.11	Extension de la recirculation méridienne - Comparaison du cas avec rainures et de l'obstacle circconférentiel . . . . .	121
3.12	Extension de la recirculation méridienne - influence de l'angle . . . . .	121
3.13	Extension de la recirculation méridienne - influence de la largeur de rainure . . . . .	122
3.14	Extension de la recirculation méridienne, influence du nombre de rainures . . . . .	122
3.15	Effet de la géométrie cylindrique sur le décollement d'entrée . . . . .	130
3.16	Effet de la géométrie cylindrique sur le tourbillon de rainure . . . . .	130
3.17	Effet de la géométrie cylindrique sur le tourbillon méridien . . . . .	131
3.18	Evolution de la recirculation d'entrée - Effet des congés . . . . .	131
3.19	Influence des paramètres $\alpha$ , $h$ , $w$ et $N$ sur les structures tourbillonnaires . . . . .	136
3.20	Effets de la longueur $L$ sur les objectifs aérodynamiques pour le rainurage . . . . .	137
3.21	Effets de la longueur $L$ sur les objectifs aérodynamiques pour l'obstacle circconférentiel	137
3.22	Comparaison des objectifs entre le canal droit et le cas rainuré - influence de $N$ . . . .	143
3.23	Effets du niveau de vitesse sur le fonctionnement des rainures . . . . .	150
3.24	Influences des paramètres sur les objectifs . . . . .	152
4.1	Erreur de reconstruction de $P_s$ . . . . .	184
5.1	Géométrie de base utilisée pour le calcul paramétrique . . . . .	204
5.2	Plages de paramètres balayées par l'optimisation . . . . .	215
5.3	Configurations extrêmes de l'optimisation . . . . .	218
5.4	Configuration retenue pour l'intégration sur un ventilateur . . . . .	220

---

5.5	Performances de la configuration retenue . . . . .	220
5.6	Comparaison de la configuration 1 avec le cas de référence Valéo . . . . .	222
5.7	Répartition de débit au niveau des rainures - Configuration 1 . . . . .	225
5.8	Performances du ventilateur en configuration 1 . . . . .	226
5.9	Comparaison de la configuration 2 avec le cas de référence Valéo . . . . .	228
5.10	Vitesses azimutales dans le jeu - Configuration 2 . . . . .	228
5.11	Répartition de débit au niveau des rainures - Configuration 2 . . . . .	229
5.12	Performances du ventilateur en configuration 2 . . . . .	234
5.13	Comparaison de la configuration 3 avec le cas de référence Valéo . . . . .	234
5.14	Vitesses azimutales dans le jeu - Configuration 3 . . . . .	235
5.15	Répartition de débit au niveau des rainures - Configuration 3 . . . . .	235
5.16	Performances du ventilateur en configuration 3 . . . . .	237
5.17	Performances du ventilateur sans jeu . . . . .	243
B.1	Coefficients optimaux pour les schémas de Runge-Kutta standard et hybrides à cinq pas . . . . .	261
D.1	Comparaison des systèmes résolus : Paramétrisation directe vs. Adjoint discret . . . . .	293
E.1	Codage Binaire et Gray . . . . .	301
E.2	Exemple de Pareto-efficacité . . . . .	311

# Liste des publications

1. "Design and numerical optimization of a new casing treatment for cooling fans", L. Soulat, P. Ferrand, S. Aubert, S. Moreau, 8th European Conference on Turbomachinery (ETC8), 23-27 March 2009, Graz, Austria
2. "Numerical design and optimization of a new casing treatment for shrouded fans", L. Soulat, P. Ferrand, S. Aubert, S. Moreau, M. Henner, 27th Congress of International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS 2010), 19-24 September 2010, Nice, France (Accepté)
3. "Influence of different parameters on Pareto fronts used for the optimization of a fan blade by coupling a genetic algorithm and flow parameterization software Turb'Opty", M. Buisson, C. Rambeau, P. Ferrand, S. Aubert, L. Soulat, M. Henner, Fifth European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010, 14-17 June 2010, Lisbon, Portugal



# Chapitre 1

## Introduction

La conception de turbomachines est une démarche très délicate. Il existe de très nombreux phénomènes physiques qui peuvent dégrader les conditions de fonctionnement de la machine, et au final dégrader les performances. Parmi tous ces phénomènes, on retiendra essentiellement les écoulements secondaires qui se développent au niveau de chaque roue, fixe ou mobile, et qui peuvent perturber plus ou moins fortement les roues précédentes ou suivantes. Ces écoulements secondaires sont d'autant plus difficiles à prendre en compte lors de la phase de conception qu'ils sont généralement complexes, couplés et assez variables en fonction des conditions de fonctionnement de la machine. Du strict point de vue de l'utilisateur, ils induisent souvent des chutes de rendement, de débit, des instabilités. A ce titre, l'un des écoulements secondaires les plus critiques est *l'écoulement de jeu*. Il s'agit de l'écoulement se formant au niveau du jeu entre parties mobiles et parties fixes. L'écoulement de jeu génère bien souvent des structures tourbillonnaires en tête d'aube et perturbe l'écoulement au sommet des aubes.

Deux possibilités s'offrent au concepteur pour essayer de limiter les problèmes liés aux écoulements secondaires :

- Construire une machine peu sensible aux écoulements secondaires. Il s'agit de la démarche "idéale", mais elle est utopique en pratique. Dans les turbomachines modernes, les conditions de fonctionnement sont telles que les moindres perturbations liées aux écoulements secondaires se ressentent sur la machine complète.
- Contrôler les écoulements secondaires pour contrôler leurs effets et les supprimer si possible.

Pour l'écoulement de jeu, une des réponses les plus classiques est le contrôle au moyen d'un *traitement de carter*. Il s'agit habituellement de modifications de la géométrie du carter, comme par exemple un rainurage circonférentiel de la paroi carter.

Parmi toutes les turbomachines existantes, certaines présentent des géométries assez particulières, notamment en tête d'aube : pour des raisons mécaniques ou aérodynamiques, il est parfois nécessaire d'utiliser des aubes à talon, c'est-à-dire des aubes reliées entre elles par une couronne de matière, appelée *virole*, située au sommet des aubes. C'est le cas des ventilateurs utilisés pour assurer le refroidissement des moteurs automobiles lorsque le véhicule est à l'arrêt ou à basse vitesse.

Cependant, l'utilisation d'une virole ne supprime pas le problème de l'écoulement de jeu. Dans ce cas, l'écoulement de jeu apparaît dans le jeu existant entre la virole et le carter. Ce canal établit un lien direct entre l'amont et l'aval du ventilateur. Cela conduit à l'apparition d'un écoulement de retour, de l'aval à l'amont du ventilateur. L'écoulement de jeu présente deux spécificités :

- Le débit de retour est important.
- La giration de cet écoulement est importante.

Ces caractéristiques entraînent par la suite une modification forte de l'écoulement au niveau des aubes : on s'écarte ainsi des conditions aérodynamiques qui avaient été prévues lors de la phase de dessin des aubes. Pour les ventilateurs automobiles, il n'est pas rare que le rendement du rotor soit faible (environ 50 à 60%). Une bonne partie des pertes est alors associée à l'écoulement de jeu. Les ventilateurs automobiles constituent donc un bon cas pratique pour tester des traitements de carter.

A l'heure actuelle, il n'existe pas de traitement de carter conçu pour maîtriser cet écoulement de jeu. Les améliorations proposées le plus souvent consistent à redessiner l'aube afin de l'adapter le mieux possible aux perturbations liées au jeu. Cela ne résout en rien le problème fondamental qui est la présence de cet écoulement de jeu. Le but de cette étude est de **concevoir, analyser et optimiser un nouveau traitement de carter adapté au contrôle de l'écoulement de jeu sur des turbomachines avec virole. Ce traitement de carter sera ensuite appliqué à un ventilateur automobile.** Compte tenu du nombre de traitements de carter possibles, quasi-infini, l'étude est axée sur la **simulation numérique** de l'écoulement autour de géométries paramétrisées. Cela permet de disposer rapidement, et à peu de coût (relativement à une approche expérimentale), de résultats sur les géométries testées.

Toutefois, l'approche choisie soulève plusieurs difficultés :

- D'abord, il faut être en mesure de faire des simulations **précises**. La description fine du fonctionnement du traitement de carter est à ce prix. On ne peut pas, par exemple, se permettre de déterminer approximativement les effets du traitement de carter sur l'écoulement de jeu, la validation n'ayant alors pas beaucoup de sens.
- Il faut aussi disposer de méthodes **efficaces**. Ceci est surtout important pour l'optimisation, où la démarche la plus simple est de simuler un grand nombre de géométries afin de n'en retenir que les meilleures. Une telle approche est bien souvent irréalisable avec des solveurs classiques. Pour des cas multi-paramétriques, comme c'est le cas ici, il faut effectuer beaucoup de simulations, souvent longues. Le temps de calcul total devient très vite prohibitif.
- Il est enfin nécessaire de disposer de techniques **adaptées** pour l'optimisation du traitement de carter. Il existe aujourd'hui de très nombreuses techniques d'optimisation, chacune ayant un domaine d'application privilégié. Il est donc nécessaire de choisir celle qui est le mieux adaptée à notre étude, c'est à dire une optimisation portant sur plusieurs paramètres et plusieurs objectifs.

L'étude sera donc organisée comme suit.

Dans le chapitre 2, nous détaillerons les méthodes numériques utilisées pour la simulation des écoulements. Les simulations étant stationnaires, ce chapitre sera plus spécifiquement consacré au choix d'une modélisation spatiale précise. On présentera notamment les schémas spatiaux centrés et décentrés utilisés, ainsi que les développements réalisés pour améliorer encore la précision. En effet, la plupart des méthodes numériques existantes sont construites en faisant des hypothèses simplificatrices sur la forme des maillages, notamment sur la taille des mailles. Ces hypothèses conduisent à introduire une erreur numérique lors de l'utilisation de maillages quelconques. Pour

---

notre étude, nous avons donc réécrit les modèles numériques pour des maillages plus généraux. Ces développements seront présentés en détail, ainsi que les validations numériques effectuées.

Le chapitre 3 sera consacré à la détermination et à la validation du nouveau traitement de carter. Pour ce faire, on commencera par analyser en détail l'écoulement de jeu apparaissant dans le cas d'un ventilateur automobile. Cette analyse permettra de déterminer des objectifs de conception pour un nouveau traitement de carter. Ce nouveau concept, proposé dans le cadre de mon travail, consiste en un rainurage hélicoïdal du carter. On définira alors un modèle représentatif du rainurage, ainsi que les paramètres géométriques à ajuster. On validera ce nouveau traitement de carter, avant d'analyser le champ aérodynamique associé. Cette analyse du champ est nécessaire afin de comprendre :

1. Le fonctionnement global du nouveau traitement de carter
2. Les possibles effets d'une variation de la géométrie du traitement de carter

On mettra en particulier à jour un certain nombre de structures tourbillonnaires complexes, interagissant les unes avec les autres. Après l'analyse du champ aérodynamique, on se concentrera sur l'étude des performances du traitement de carter en fonction des paramètres géométriques.

Toutefois, à ce niveau, il est encore impossible d'optimiser précisément ce traitement de carter par manque de méthodes adéquates.

Dans le chapitre 4, on détaillera donc les techniques d'optimisation. L'un des buts de cette étude étant l'optimisation du traitement de carter proposé, nous avons cherché l'algorithme d'optimisation le mieux adapté à notre cas. Cet algorithme doit en particulier être capable de fournir en un temps raisonnable la plupart des configurations optimales (si elles existent), c'est à dire le Front de Pareto. Comme la connaissance du comportement du nouveau traitement de carter, vis à vis des paramètres géométriques, reste limitée, la technique d'optimisation retenue devra faire preuve de robustesse et d'efficacité dans le parcours de l'espace paramétrique. On présentera donc les concepts généraux de l'optimisation multi-paramétrique et multi-objectifs. On fera ensuite un panorama des différentes techniques d'optimisation actuelles, afin de pouvoir présenter en détail la méthode d'optimisation retenue pour cette étude.

On présentera aussi dans ce chapitre les techniques de paramétrisation utilisées pour pouvoir évaluer rapidement les géométries. Il s'agit de la condition sine qua non pour pouvoir optimiser la géométrie du traitement de carter. Dans l'approche la plus courante et la plus simple des optimisations, il est, au mieux, nécessaire d'évaluer deux configurations distinctes par paramètre. L'étude des effets de couplage entre paramètres requiert encore plus d'évaluations. En conséquence, plus le nombre de paramètres est élevé, plus le nombre de simulations nécessaires sera important. Les simulations numériques en mécanique des fluides pouvant être longues (plusieurs jours), le temps de calcul total nécessaire pour l'optimisation devient très vite irréaliste. On s'attachera donc, dans cette partie du chapitre 4, à présenter une technique de paramétrisation basée sur le calcul des dérivées d'ordre élevé du champ aérodynamique par rapport aux paramètres. Avec une telle technique, il est possible de reconstruire n'importe quelle configuration à partir des dérivées calculées (une seule et unique fois) en une configuration de référence. L'opération de reconstruction est extrêmement simple et rapide. Elle pose néanmoins certaines questions quant à la fiabilité du résultat reconstruit. On détaillera les différentes techniques de reconstruction utilisées actuellement, avec leurs avantages et inconvénients. On s'intéressera plus particulièrement à la problématique de reconstruction et d'évaluation des grandeurs non-conservatives.

Un autre point important pour la phase d'optimisation est la technique de visualisation qui peut être utilisée pour analyser les résultats de l'optimisation. Comme on le verra dans le chapitre 4, les

techniques adaptées aux cas multi-paramétriques et multi-objectifs reposent essentiellement sur la construction de bases de données de grande taille. En fin de processus, il est intéressant de pouvoir analyser précisément le contenu de ces bases de données, pour trouver par exemple des tendances particulières parmi les configurations optimales. En raison du grand nombre de points dans les bases de données, cette analyse demande des techniques assez particulières. On présentera les Self Organizing Map qui constituent un moyen graphique simple et efficace de représenter toutes les informations contenues dans la base de données.

Dans le chapitre 5, on exposera les résultats de l'optimisation du traitement de carter. Ces résultats sont obtenus à partir de la modélisation présentée au chapitre 2. L'objectif de cette optimisation est de disposer d'une configuration qui soit déjà performante pour l'appliquer à un ventilateur automobile. Cette application doit permettre de vérifier la pertinence et l'efficacité du traitement de carter pour le contrôle de l'écoulement de jeu dans des conditions de fonctionnement réelles, et ainsi valider définitivement le concept. Ce cas est en effet assez sévère du point de vue de l'écoulement de jeu, lequel est important et animé d'une giration forte. On ne cherche cependant pas ici à améliorer le fonctionnement global du ventilateur. On présentera dans cette partie les effets de l'utilisation du nouveau traitement sur le ventilateur choisi. On détaillera en particulier le champ aérodynamique dans le jeu, ainsi qu'au niveau du ventilateur. On évaluera les performances du ventilateur en présence d'un écoulement de jeu maîtrisé afin de dégager de nouvelles pistes d'étude.

Enfin, nous concluons et discuterons des perspectives futures ouvertes par cette étude dans le chapitre 6.

Cette thèse a été effectuée au sein du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) de l'Ecole Centrale de Lyon, dans le cadre des projets CINEMAS2 (Région Rhône-Alpes) et LIBRAERO (ANR). Au cours de cette thèse, j'ai proposé, analysé et optimisé un nouveau concept de traitement de carter. Je l'ai ensuite appliqué à un ventilateur automobile. Pour mener à bien ces travaux, j'ai utilisé le code de calcul d'écoulements Turb'Flow<sup>TM</sup>, développé par le LMFA. J'ai construit, dans le cadre de l'étude du traitement de carter, de nouveaux schémas spatiaux pour ce code de calcul. Ces nouveaux schémas sont applicables à des maillages non uniformes. Pour l'optimisation, trois logiciels différents ont été utilisés. Tout d'abord, la paramétrisation du traitement de carter a été traitée avec le code Turb'Opty<sup>TM</sup>, proposé par la société Fluorem. L'optimisation elle-même a été réalisée avec Turb'Opty<sup>TM</sup> et l'algorithme génétique NSGA-II, construit par le laboratoire KanGAL (Indian Institute of Technology, Kampur), et adapté par M. Buisson au sein du LMFA. Le post-traitement de l'optimisation a été réalisé avec l'aide de M. Buisson en utilisant la SOM-Toolbox, distribuée par le Laboratory of Computer and Information Science de l'Université Technique d'Helsinki.

## Chapitre 2

# Méthodes numériques pour la simulation

### 2.1 Introduction

Dans l'étude présentée ici, notre but est de décrire un nouveau traitement de carter applicable aux turbomachines. L'analyse de cette géométrie passe essentiellement par la simulation numérique, la seule approche permettant de tester rapidement et facilement un grand nombre de configurations. Comme on le verra un peu plus tard (chapitre 3), la simulation du traitement de carter, et plus généralement des turbomachines, demande **une grande précision** afin d'avoir des résultats fiables.

Cette partie sera donc consacrée au choix, à la présentation et au développement de méthodes numériques à même de fournir la précision attendue. Dans les premières sections, jusqu'à la section 2.4 incluse, on rappellera les techniques et méthodes employées en simulation numérique. Afin de bien définir le cadre de cette thèse, on se concentrera sur les schémas implémentés dans le code de calcul qui a été utilisé : Turb'Flow.

A partir de la section 2.4.5, je présenterai les développements que j'ai effectués dans le cadre de cette thèse pour généraliser les schémas numériques spatiaux aux maillages non uniformes. Plusieurs points seront abordés dans ce cadre. Dans la section 2.4.5, on présentera la généralisation des interpolations décentrées amont, ainsi que la validation des formules générales proposées.

Dans la section 2.4.6, on présentera rapidement les limiteurs de flux utilisés avec les schémas décentrés amont sur des maillages non-uniformes, et on comparera ensuite ces limiteurs sur la base de simulations effectuées dans le cadre de cette thèse.

Dans la section 2.5, on rappellera le principe de fonctionnement des schémas spatiaux centrés, avant de décrire en détail les travaux de généralisation des interpolations effectués dans le cadre de cette thèse. On validera ces nouvelles formules sur un cas test.

Enfin, on analysera succinctement en 2.6 les techniques de discrétisation des flux diffusifs, et on proposera une méthode de généralisation aux maillages non uniformes.

### 2.2 Choix d'une discrétisation des équations de Navier-Stokes

Afin de simuler numériquement un écoulement, il est nécessaire de résoudre les équations de Navier-Stokes moyennées (A.37 à A.43), équations détaillés en annexe A. Ces équations aux dérivées partielles étant naturellement définies de manière continue, mais présentant des non-linéarités fortes, une résolution analytique directe n'est pas possible dans le cas général. En conséquence, il est

nécessaire de les discrétiser, tant sur le plan spatial que temporel afin de pouvoir ensuite calculer itérativement la solution.

### 2.2.1 Discrétisation temporelle

Le premier point important lors de la discrétisation des équations de Navier-Stokes est le choix d'une discrétisation temporelle. Pour le solveur RANS utilisé, Turb'Flow, le traitement des termes temporels a déjà fait l'objet de plusieurs études successives [4, 171, 13].

Toutefois, les simulations effectuées dans cette étude sont essentiellement des simulations **stationnaires**. En conséquence, le traitement des termes temporels n'intervient que dans la phase de convergence du calcul. Lorsque le calcul est convergé, et donc que l'état stationnaire est atteint, les termes temporels sont normalement nuls. La discrétisation temporelle n'intervient alors plus dans la précision du résultat stationnaire obtenu. En conséquence, on ne détaillera pas ici les techniques de discrétisation temporelle. Elles sont présentées pour mémoire en annexe B.

### 2.2.2 Discrétisation spatiale

Plusieurs types de discrétisations et d'approximations des termes spatiaux intervenant dans les équations sont possibles [9].

- **Différences finies** : La discrétisation la plus connue est sans aucun doute celle des différences finies. On remplace alors les dérivées spatiales (continues) en un point par une approximation discrète évaluée au moyen d'une série de Taylor sur le voisinage discret de ce point. La technique est particulièrement adaptée à la discrétisation spatiale puisque un maillage introduit naturellement cette notion de voisinage discret. Cette méthode est extrêmement simple et permet une assez bonne précision, pour peu que les dérivées soient évaluées avec suffisamment de points. En contrepartie, elle est connue pour ne pas être conservative et ne convient donc pas à la simulation précise d'écoulements.

Cette technique ne convient donc pas à notre étude.

- **Éléments finis** : La deuxième grande classe est celle des éléments finis, très utilisée en mécanique des solides. Dans cette technique, le milieu est décomposé en un ensemble discret d'éléments généralement tétraédriques. Les équations à résoudre sont multipliées par une fonction test, puis intégrées sur l'ensemble du domaine. La solution est approchée en définissant un ensemble de fonctions de forme, ces fonctions étant à support compact, rattachées à un élément particulier et nulles en dehors. La solution numérique du problème est obtenue en reportant les approximations construites pour chaque élément dans l'équation intégrale qui est alors résolue. La technique est intéressante car elle s'appuie sur un maillage non structuré et permet donc de simuler faiblement des géométries complexes. En revanche, le coût numérique de la résolution est important et l'approche reste non conservative.

On ne retiendra pas non plus cette discrétisation pour notre étude.

- **Volumes finis** : La troisième grande modélisation est celle par volumes finis. L'espace est au départ divisé en un ensemble fini de volumes de contrôle sur lesquels on intègre les équations différentielles conservatives. De plus, on fait l'hypothèse que la taille des volumes de contrôle est suffisamment petite relativement aux échelles de variation du champ, ce qui permet alors de considérer ce dernier comme quasiment constant sur chaque cellule. Il en résulte une écriture simple et facile à comprendre sur les plans physiques et numériques. En contrepartie, on

introduit des interpolations afin de déterminer les variables au niveau des parois séparant les cellules. Moyennant un niveau de précision élevé sur ces interpolations, il est possible d'obtenir une discrétisation spatiale assez *précise*.

C'est donc cette approche qui a été retenue lors du développement du code Turb'Flow, et qui sera utilisée pour effectuer les simulations numériques présentées dans cette étude.

Les méthodes précédentes demandent la construction d'un maillage afin de discrétiser l'espace. Les maillages sont caractérisés par la donnée d'un certain nombre de nœuds de positions définies et d'un graphe établissant les relations entre les différents nœuds. La notion de volume définie auparavant est compatible avec la description nodale puisque dans un cas tridimensionnel, trois nœuds non alignés forment une surface, plusieurs surfaces délimitant un volume polyédrique. Par la suite, on parlera de voisins pour deux nœuds directement connectés.

On distingue usuellement deux types de maillages possibles :

- **Les maillages non structurés :** Les volumes de contrôle ont une forme quelconque, ce qui n'implique donc pas de contraintes sur le nombre d'éléments voisins. L'avantage de cette discrétisation spatiale est une très grande souplesse dans la description de géométries complexes. Il est possible de s'adapter facilement à de brusques changements de direction d'une paroi solide mais aussi de raffiner localement le maillage sans affecter le reste de l'espace. Le prix de cette flexibilité est une complexité de traitement algorithmique non négligeable. En premier lieu, la génération d'un maillage non structuré est assez complexe et demande des techniques adaptées. En outre, le graphe de connectivité étant quelconque il doit être stocké afin de savoir quelles sont les relations internodales pour pouvoir échanger facilement des informations. En dernier lieu, les nœuds ne présentant pas à priori de structure particulière dans l'espace, il est très difficile de définir des approximations d'ordre élevé au moyen de méthodes classiques telles que les volumes finis. L'utilisation d'un maillage non structuré restreint de facto la précision possible et ne sera donc pas retenue.
- **Les maillages structurés :** Le maillage est organisé en familles de lignes, les lignes au sein d'une même famille ne se croisant pas et croisant une seule fois les lignes des autres familles, générant ainsi les nœuds. Pour la discrétisation spatiale tridimensionnelle, on peut définir des indices notés habituellement  $(i, j, k)$ , chaque indice assurant la numérotation ordonnée d'une famille. Un nœud est de cette manière repéré via le triplé d'indices. Le cas de maillage structuré le plus simple est le maillage cartésien uniforme. L'espace est ainsi doté d'une structure facile à implémenter dans un algorithme, avec laquelle on dispose implicitement de la table de connectivité. Chaque point du maillage aura au plus six voisins directs, chacun ne variant que de plus ou moins une unité sur un seul indice. Le traitement des maillages structurés est efficace, précis et peu coûteux en terme de mémoire. En outre, on peut décrire l'espace au moyen de repères curvilignes attachés aux lignes de maillage ce qui permet aussi de définir des directions privilégiées : le repérage d'une paroi solide est ici trivial, puisque cette dernière correspondra à une surface d'indice constant. En contrepartie, ces maillages sont assez rigides au sens où la modification d'une zone de l'espace affecte potentiellement le reste de l'espace, puisque les lignes de même famille doivent rester non sécantes. Le raffinement local du maillage est à ce titre complexe puisqu'on introduit de nouvelles lignes. De plus, ils sont parfois difficiles d'emploi sur des géométries complexes présentant des courbures fortes : on peut être amené à les déformer trop intensément. Les maillages structurés se prêtent naturellement à une

décomposition en bloc, laquelle permet de réduire un peu la problématique de maillage. Cette étude sera donc basée sur des simulations en maillage structuré.

Dans la suite, on ne traitera que les maillages structurés, en remarquant cependant que ces derniers ne sont qu'un cas particulier des maillages non-structurés. Le choix de cette solution a été fait lors de la conception du logiciel de calcul Turb'Flow [4, 171] afin d'assurer un traitement informatique simple et efficace.

Le dernier aspect de la discrétisation spatiale concerne la position des nœuds relativement aux cellules de calcul. Cette remarque n'a de sens que dans l'hypothèse d'une modélisation basée sur des volumes. Il existe dans ce cas deux manières distinctes de construire un volume de contrôle (Fig. 2.1). La première possibilité est de considérer que les nœuds sont situés au centre des cellules de calcul. On parle alors de schéma *cell-center*. Dans l'autre cas, dit *cell-vertex*, les nœuds sont aux sommets du volume de contrôle. Dans le premier cas, la valeur des variables conservatives enregistrée au nœud est facilement assimilable à la valeur moyenne de ces variables sur la cellule. Dans la deuxième approche, la valeur moyenne doit être déterminée à partir des valeurs aux sommets ce qui peut introduire une erreur. À l'opposé, dans la première représentation la valeur du champ, et surtout celle de ses dérivées, doit être interpolée au niveau des interfaces entre cellules, le calcul étant beaucoup plus simple et précis avec l'autre structure.

C'est l'approche *cell-center* qui a été retenue pour le code de calcul utilisé.

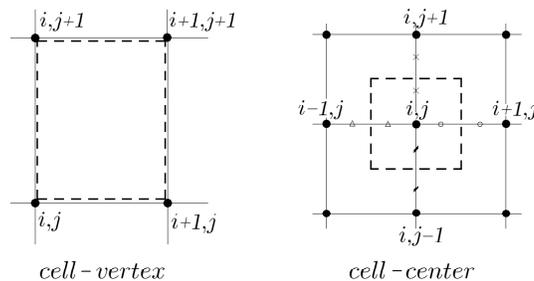


FIG. 2.1 – Approches *cell-vertex* et *cell-center*

## 2.3 Formulation Volumes Finis

On supposera dans toute cette partie que l'on traite un nœud suffisamment loin des frontières du bloc ou du domaine de calcul pour avoir un nombre suffisant de voisins dans le domaine. Le traitement des conditions aux limites est spécifique et est présenté en annexe B.

On cherche la solution d'une équation aux dérivées partielles de forme canonique :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = S \quad (2.1)$$

où  $A$  et  $S$  sont des grandeurs soit scalaires soit vectorielles, et  $\vec{B}$  une grandeur soit vectorielle soit tensorielle. Dans le cadre de la formulation en volumes finis sur un maillage structuré, cette équation est exprimée en repère curviligne puis intégrée sur des volumes de contrôle élémentaires contigus  $\mathcal{V}$  couvrant l'ensemble de l'espace. Dans le cas de calcul instationnaire ou pseudo-instationnaire, le

maillage et donc les cellules d'intégration peuvent être mobiles et déformables. Cette dernière caractéristique est nécessaire pour simuler des configurations avec des parois mobiles comme le flottement d'une aube. Il est en outre possible de cette manière de générer un maillage auto-adaptatif dont la densité de points se règle automatiquement sur les structures principales de l'écoulement (couche limite, onde de choc,...), cette technique étant valable y compris pour un écoulement stationnaire.

On introduit donc  $\vec{W}$  la vitesse de la surface  $\mathcal{S}(t)$  des cellules d'intégration. L'équation standard (2.1) devient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} A dV + \int_{\mathcal{S}(t)} \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathcal{V}(t)} S dV \quad (2.2)$$

$\vec{C}$  est une grandeur tensorielle ou vectorielle prenant en compte la vitesse pariétale  $\vec{W}$  et  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface  $\mathcal{S}(t)$  et pointant vers l'extérieur de la cellule  $\mathcal{V}(t)$ . L'expression (2.2) peut être écrite beaucoup plus simplement si on la transpose dans le repère curviligne. On notera dans la suite  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  les coordonnées dans le repère curviligne (Fig. 2.2).

Dans ce repère, en se souvenant qu'on a choisi une approche de type *cell-center*, les cellules d'intégration sont des hexaèdres dont les frontières sont définies par les surfaces telles que  $\xi^{i\pm} = \xi^i \pm \frac{1}{2}$ , ce qui impose alors  $\mathcal{V}^i = 1$  et pour chacune des 6 surfaces de la cellule  $\mathcal{S}^{i\pm} = 1$ .

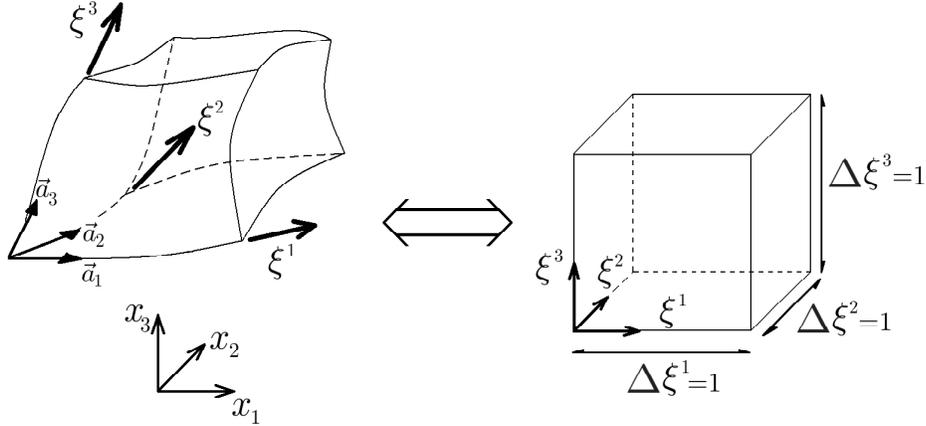


FIG. 2.2 – Changement de repère sur un maillage structuré

On rappelle que les vecteurs  $\vec{a}_i$  de la base covariante associés aux directions  $\xi^i$  sont tangents aux lignes de maillage. Les vecteurs contravariants  $\vec{a}^i$  sont définis comme  $\vec{a}^i = \vec{\nabla} \xi^i$ . Ils sont donc par définition orthogonaux aux iso-surfaces de  $\xi^i$ , ce qui, pour des cellules de petite taille, équivaut à dire que ce sont les normales aux surfaces  $\mathcal{S}^i$ .

En appliquant le changement de repère, on obtient :

$$\int_{\mathcal{V}^i} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} A) \prod_{j=1}^3 d\xi^j \pm \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_{\mathcal{S}^{i\pm}} \sqrt{g} \vec{C} \cdot \vec{a}^i \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^3 d\xi^j \right\} = \int_{\mathcal{V}^i} \sqrt{g} S \prod_{j=1}^3 d\xi^j \quad (2.3)$$

où  $\sqrt{g} = \det \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} \right\}$  est le jacobien de la transformation géométrique. On remarquera que le jacobien peut être interprété comme le volume de la cellule d'intégration.

Le cœur de la formulation en volumes finis est de supposer que les variations du champ aérodynamique sont sur des échelles spatiales suffisamment grandes pour pouvoir considérer que les variables aérodynamiques sont constantes à l'échelle de la cellule d'intégration. On peut alors remplacer les intégrandes dans l'équation (2.3) par des valeurs moyennes. Pour tout triplé d'entiers  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{g}A) \Big|_{\xi^1, \xi^2, \xi^3} + \sum_{i=1}^3 \left\{ \pm F^i \Big|_{\xi^{i \pm \frac{1}{2}}} \right\} = \sqrt{g}S \Big|_{\xi^1, \xi^2, \xi^3} \quad (2.4)$$

Les  $F^i \Big|_{\xi^{i \pm \frac{1}{2}}}$  sont les flux aux interfaces  $\xi^i \pm \frac{1}{2}$ ,  $F^i$  étant par ailleurs défini comme  $F^i = \sqrt{g}\vec{C} \cdot \vec{a}^i$ .

Dans cette hypothèse, on peut de plus caractériser la grandeur  $C$  avec les formules suivantes :  $\vec{C} = \vec{B} - A\vec{W}$  si  $C$  est vectorielle,  $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} \otimes \vec{W}$  sinon.

L'expression (2.4), et plus généralement la formulation en volumes finis, impliquent une certaine qualité du maillage. En premier lieu, il est évident que la taille des mailles doit être assez faible pour capter les petites structures de l'écoulement. Les zones présentant de forts gradients devront donc être densément maillées. D'autre part, [4] note que les mailles voisines doivent être de taille et d'orientation proches afin d'éviter des discontinuités fortes du jacobien  $\sqrt{g}$  et des vecteurs contravariants  $\vec{a}^i$ . On suppose en outre que le jacobien est positif, ce qui est implicitement représenté par l'utilisation de la racine carrée dans la notation. La conséquence principale de cette contrainte est d'interdire les cellules croisées comme illustrées sur la figure suivante (Fig. 2.3) :

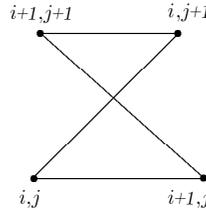


FIG. 2.3 – Structure de maillage croisé

A partir de ce formalisme, on peut expliciter les équations de Navier-Stokes moyennées et adimensionnées (A.37 à A.43) comme suit.

### Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\rho \vec{V}] = 0 \quad (2.5)$$

En utilisant la notation symbolique précédente, on a :

$$A = \rho \quad (2.6)$$

$$\vec{B} = \rho \vec{V} \quad (2.7)$$

$$\vec{C} = \rho (\vec{V} - \vec{W}) \quad (2.8)$$

$$S = 0 \quad (2.9)$$

$$F^i = \sqrt{g}\rho V^i \quad (2.10)$$

en posant  $-\vec{W} \cdot \vec{a}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial t}$  et  $V^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \xi^i}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial \xi^i}{\partial x_3} u_3 + \frac{\partial \xi^i}{\partial t} = (\vec{V} - \vec{W}) \cdot \vec{a}^i$ . La vitesse  $V^i$  est donc la vitesse contravariante du fluide relative au maillage mobile dans la direction  $\xi^i$ .

### Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p \vec{I} - \frac{1}{Re} \vec{\tau}_{l+t} \right] = \vec{0} \quad (2.11)$$

Soit encore :

$$\vec{A} = \rho \quad (2.12)$$

$$\vec{B} = \rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p \vec{I} - \frac{1}{Re} \vec{\tau}_{l+t} \quad (2.13)$$

$$\vec{C} = \rho \vec{V} \otimes (\vec{V} - \vec{W}) + p \vec{I} - \frac{1}{Re} \vec{\tau}_{l+t} \quad (2.14)$$

$$\vec{S} = \vec{0} \quad (2.15)$$

$$\vec{F}^i = \sqrt{g} \left[ \rho \vec{V} V^i + p \vec{a}^i - \frac{1}{Re} \vec{\tau}_{l+t} \cdot \vec{a}^i \right] \quad (2.16)$$

### Conservation de l'énergie

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ (\rho E + p) \vec{V} - \frac{1}{Re} \left\{ \gamma \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \vec{\nabla} e + \vec{\tau}_{l+t} \cdot \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \right\} \right] = 0 \quad (2.17)$$

où :

$$A = \rho E \quad (2.18)$$

$$\vec{B} = (\rho E + p) \vec{V} - \frac{1}{Re} \left\{ \gamma \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \vec{\nabla} e + \vec{\tau}_{l+t} \cdot \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \right\} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \vec{C} &= (\rho E + p) (\vec{V} - \vec{W}) + p \vec{W} \\ &\quad - \frac{1}{Re} \left\{ \gamma \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \vec{\nabla} e + \vec{\tau}_{l+t} \cdot \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$S = 0 \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} F^i &= \sqrt{g} \left[ (\rho E + p) V^i - p \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{Re} \left\{ \gamma \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \vec{\nabla} e + \vec{\tau}_{l+t} \cdot \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \right\} \cdot \vec{a}^i \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

### Conservation de l'énergie cinétique turbulente

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho k \vec{V} - \frac{1}{Re} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \right] = S_k \quad (2.23)$$

où :

$$A = \rho k \quad (2.24)$$

$$\vec{B} = \rho k \vec{V} - \frac{1}{Re} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \quad (2.25)$$

$$\vec{C} = \rho k (\vec{V} - \vec{W}) - \frac{1}{Re} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \quad (2.26)$$

$$S = \sqrt{g} S_k \quad (2.27)$$

$$F^i = \sqrt{g} \left[ \rho k V^i - \frac{1}{Re} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \cdot \vec{a}^i \right] \quad (2.28)$$

**Conservation de la dissipation spécifique turbulente** On a choisi pour cette étude le modèle de turbulence à deux équations  $k-\omega$  de Kok [107]. En conséquence, la deuxième variable turbulente à traiter est la dissipation spécifique turbulente  $\omega$ .

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho \omega \vec{V} - \frac{1}{Re} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \vec{\nabla} \omega \right] = S_\omega \quad (2.29)$$

où :

$$A = \rho \omega \quad (2.30)$$

$$\vec{B} = \rho \omega \vec{V} - \frac{1}{Re} \left( \mu + \frac{\mu_\omega}{\sigma_\omega} \right) \vec{\nabla} \omega \quad (2.31)$$

$$\vec{C} = \rho \omega (\vec{V} - \vec{W}) - \frac{1}{Re} \left( \mu + \frac{\mu_\omega}{\sigma_\omega} \right) \vec{\nabla} \omega \quad (2.32)$$

$$S = \sqrt{g} S_\omega \quad (2.33)$$

$$F^i = \sqrt{g} \left[ \rho \omega V^i - \frac{1}{Re} \left( \mu + \frac{\mu_\omega}{\sigma_\omega} \right) \vec{\nabla} \omega \cdot \vec{a}^i \right] \quad (2.34)$$

Au final, il est possible de réécrire le système des équations à résoudre sous la forme condensée suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} \mathbf{q}) \Big|_{\xi^1, \xi^2, \xi^3} + \sum_{i=1}^3 \left[ \mathbf{F}^i \left( \xi^i + \frac{1}{2} \right) - \mathbf{F}^i \left( \xi^i - \frac{1}{2} \right) \right] = \sqrt{g} \mathbf{S} \Big|_{\xi^1, \xi^2, \xi^3} \quad (2.35)$$

On aura au préalable défini le vecteur des variables conservatives  $\mathbf{q}$  :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{V} \\ \rho E \\ \rho k \\ \rho \omega \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

De même, on remarque en observant les équations (2.10), (2.16), (2.22), (2.28) et (2.34) que le flux à une interface de la cellule est systématiquement décomposable en deux parties, la seconde étant

pondérée par le coefficient  $\frac{1}{R_e}$ . On définit donc le vecteur des flux  $\mathbf{F}^i$  dans la direction  $\xi^i$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^i &= F_c^i - \frac{1}{R_e} F_v^i \\ &= \sqrt{g} \begin{pmatrix} \rho V^i \\ \rho \vec{V} V^i + p \vec{a}^i \\ (\rho E + p) V^i - p \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \\ \rho k V^i \\ \rho \omega V^i \end{pmatrix} - \frac{1}{R_e} \sqrt{g} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\tau}_{l+t} \\ \gamma \left( \frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_t}{P_{rt}} \right) \vec{\nabla} e + \vec{\tau}_{l+t} \cdot \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \\ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \\ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \vec{\nabla} \omega \end{pmatrix} \cdot \vec{a}^i \end{aligned} \quad (2.37)$$

Et pour finir :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{0} \\ 0 \\ \sqrt{g} S_k \\ \sqrt{g} S_\omega \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

$$V^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \xi^i}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial \xi^i}{\partial x_3} u_3 + \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \quad (2.39)$$

$$p = (\gamma - 1) \left[ \rho E - \frac{1}{2} \frac{(\rho \vec{V})^2}{\rho} - \rho k \right] \quad (2.40)$$

Conventionnellement les deux composantes  $F_c^i$  et  $F_v^i$  sont qualifiées respectivement de flux convectif et diffusif. Cette appellation vient initialement de l'écriture des équations dans un cas Eulérien où seul le terme  $F_c^i$  est non nul, cas correspondant bien à la convection des grandeurs conservatives. La notion de flux diffusif n'apparaît qu'avec l'introduction de la viscosité.

Maintenant que l'on dispose des équations exprimées de manière semi-discrète pour chaque cellule élémentaire définie dans un repère curviligne selon une formulation de type volumes finis, il est nécessaire de détailler les techniques de discrétisation spatiale associées à la résolution de ce système.

## 2.4 Discrétisation spatiale des flux convectifs - schémas décentrés amont

On traitera spécifiquement dans cette partie, ainsi que dans les sections 2.5 et 2.6, du calcul des flux exprimés pour les variables conservatives classiques  $\rho$ ,  $\rho \vec{V}$  et  $\rho E$ . On présentera aussi de nouveaux développements permettant d'améliorer la précision du calcul. Le traitement des variables turbulentes  $k$  et  $\omega$  n'a pour sa part pas fait l'objet d'analyses détaillées dans cette étude, et il sera présenté donc en annexe B.2.

Les termes convectifs des équations discrétisées peuvent être traités en utilisant des schémas spatiaux décentrés amont (aussi appelés schémas "upwind"). Ceux-ci sont construits en prenant

en compte la physique de l'écoulement via les phénomènes de propagation d'ondes dans différentes directions. Ces schémas présentent plusieurs avantages notables :

- Ils sont très bien adaptés par construction à des ondes de choc et plus généralement aux écoulements supersoniques
- Ils sont naturellement dissipatifs et par conséquent ils ne demandent pas l'adjonction d'une dissipation numérique artificielle spécifiée par l'utilisateur.

Parmi les schémas décentrés amont, on distingue usuellement deux grandes catégories :

1. Les schémas à séparation de flux ("Flux Vector Splitting", FVS) : ils reposent sur une décomposition du flux convectif à l'interface déterminée par les caractéristiques locales de l'écoulement. Ils sont réputés rapides et robustes, quoique souffrant d'une précision réduite.
2. Les schémas à différences de flux ("Flux Difference Splitting", FDS) : ce sont historiquement les premiers schémas développés, ils sont élaborés sur la résolution exacte ou approchée d'un problème de Riemann à l'interface de la cellule. Ils sont en conséquence assez précis mais sont aussi lents à cause du traitement algorithmique nécessaire.

### 2.4.1 Schéma à séparation de flux de Van Leer

Ce schéma est initialement dérivé à partir de celui de Steger et Warming [176]. Il est donné ici pour faciliter la compréhension des mécanismes des schémas à séparation de flux : il est en effet très simple et présente un grand nombre de caractéristiques qui seront reprises par les schémas FVS plus évolués. Le schéma de Van Leer est basé sur la décomposition de chaque composante  $\mathbf{F}_c^i$  du flux convectif en deux contributions distinctes  $\mathbf{F}^{i+}$  et  $\mathbf{F}^{i-}$  :

$$\mathbf{F}_c^i = \mathbf{F}^{i+} + \mathbf{F}^{i-} \quad (2.41)$$

Les flux  $\mathbf{F}^{i+}$  et  $\mathbf{F}^{i-}$  sont déterminés de manière à ce que les matrices jacobiniennes associées  $\frac{\partial \mathbf{F}^{i+}}{\partial(\sqrt{g}\mathbf{q})}$  et  $\frac{\partial \mathbf{F}^{i-}}{\partial(\sqrt{g}\mathbf{q})}$  n'aient respectivement aucune valeur propre négative et positive.

Il existe en théorie une infinité de fonctions respectant ces critères, c'est pourquoi il est nécessaire de se donner des contraintes supplémentaires. Celles choisies par Van Leer sont les suivantes :

- Les  $\mathbf{F}^{i\pm}$  doivent être continus et tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{i+} &= \mathbf{F}_c^i \text{ pour un nombre de Mach } M > 1 \\ \mathbf{F}^{i-} &= \mathbf{F}_c^i \text{ pour un nombre de Mach } M < -1 \end{aligned}$$

Concrètement, cela revient à respecter la propagation strictement ascendante ou descendante de l'information dans les cas supersoniques.

- Les composantes de  $\mathbf{F}^{i\pm}$  doivent reproduire les symétries de  $\mathbf{F}_c^i$  par rapport au nombre de Mach  $M^i$ .

$$\mathbf{F}^{i+}(M) = \pm \mathbf{F}^{i-}(-M) \text{ si } \mathbf{F}_c^i(M) = \pm \mathbf{F}_c^i(-M)$$

- $\frac{\partial \mathbf{F}^{i\pm}}{\partial(\sqrt{g}\mathbf{q})}$  doit être continue.
- $\frac{\partial \mathbf{F}^{i\pm}}{\partial(\sqrt{g}\mathbf{q})}$  possède une valeur propre qui s'annule dans le cas d'un écoulement subsonique.
- Les  $\mathbf{F}^{i\pm}$ , de même que  $\mathbf{F}_c^i$ , sont des expressions polynomiales du nombre de Mach du plus petit ordre possible.

Le flux convectif dans la direction  $i$  est donc décomposé selon le Mach contravariant  $M^i = \frac{V^i}{c\|\vec{a}^i\|}$  de la manière suivante :

- Pour un écoulement supersonique ascendant :  $M^i \leq -1$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{i+} &= \vec{0} \\ \mathbf{F}^{i-} &= \mathbf{F}_c^i\end{aligned}\tag{2.42}$$

- Pour un écoulement subsonique :  $-1 < M^i < 1$

$$\mathbf{F}^{i\pm} = \sqrt{g} \|\vec{a}^i\| f_{masse}^{\pm} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c}{\gamma\|\vec{a}^i\|}(-M^i \pm 2) \frac{\partial \xi^i}{\partial x_1} + u_1 \\ \frac{c}{\gamma\|\vec{a}^i\|}(-M^i \pm 2) \frac{\partial \xi^i}{\partial x_2} + u_2 \\ \frac{c}{\gamma\|\vec{a}^i\|}(-M^i \pm 2) \frac{\partial \xi^i}{\partial x_3} + u_3 \\ f_{energie}^{\pm} \end{pmatrix}\tag{2.43}$$

où

$$f_{masse}^{\pm} = \pm \frac{1}{4} \rho c (M^i \pm 1)^2\tag{2.44}$$

et

$$\begin{aligned}f_{energie}^{\pm} &= \frac{c^2}{\gamma^2 - 1} \left[ -(\gamma - 1)M^{i2} \pm 2(\gamma - 1)M^i + 2 \right] \\ &\quad + (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - \frac{c}{\gamma} \frac{\partial \xi^i}{\partial t} (-M^i \pm 2)\end{aligned}\tag{2.45}$$

- Pour un écoulement supersonique descendant :  $M^i \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{i+} &= \mathbf{F}_c^i \\ \mathbf{F}^{i-} &= \vec{0}\end{aligned}\tag{2.46}$$

L'ordre de ce schéma dépend très étroitement de la manière dont sont évalués les flux. Une des techniques les plus classiques est l'utilisation d'une formulation de type MUSCL (Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws), introduite par Van Leer [184]. Cette méthode sera présentée plus loin.

Ce schéma présente l'avantage d'être robuste et de donner une solution assez régulière au voisinage du point sonique en raison des critères choisis pour la construction des  $\mathbf{F}^{i\pm}$ .

Néanmoins, il est aussi excessivement dissipatif à faible nombre de Mach et ne conserve pas l'enthalpie totale [80].

### 2.4.2 Schéma de Liou

Plus qu'un schéma, il s'agit en fait d'une famille de schémas développés successivement pour essayer d'améliorer la formulation. Ces schémas ont été initiés par Liou [118] avec le schéma AUSM (Advection Upstream Splitting Scheme), suivi peu après par le schéma AUSM+ [119, 120]. Ils visent à corriger les défauts constatés du schéma de Van Leer. En ce sens, on optera par la suite pour

une décomposition du flux convectif en une partie  $C^i$  regroupant les termes purement convectifs et une autre,  $P^i$ , traduisant les termes de pression. Cette technique est motivée par le fait que les phénomènes purement convectifs ne jouent pas le même rôle que les phénomènes acoustiques. A l'image du schéma de Van Leer, chacune de ces contributions est ensuite scindée en deux expressions vérifiant l'unicité de signe pour les valeurs propres des matrices jacobiennes associées.

Pour le schéma AUSM+, on obtient :

$$\mathbf{F}_c^i = C^i + P^i \quad (2.47)$$

avec :

$$C^i = \sqrt{g}c^m \begin{pmatrix} M^{i+}\rho^L + M^{i-}\rho^R \\ M^{i+}(\rho u_1)^L + M^{i-}(\rho u_1)^R \\ M^{i+}(\rho u_2)^L + M^{i-}(\rho u_2)^R \\ M^{i+}(\rho u_3)^L + M^{i-}(\rho u_3)^R \\ M^{i+}(\rho E + p)^L + M^{i-}(\rho E + p)^R \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$P^i = \sqrt{g} \begin{pmatrix} 0 \\ (p^{i+}p^L + p^{i-}p^R)\frac{\partial \xi^i}{\partial x_1} \\ (p^{i+}p^L + p^{i-}p^R)\frac{\partial \xi^i}{\partial x_2} \\ (p^{i+}p^L + p^{i-}p^R)\frac{\partial \xi^i}{\partial x_3} \\ -(p^{i+}p^L + p^{i-}p^R)\frac{\partial \xi^i}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Pour la partie convective,  $c^m$  est la vitesse moyenne du son au sens de Liou au niveau de l'interface, et les  $M^{i\pm}$  sont définis par la relation :

$$M^{i\pm} = \frac{1}{2}(M^i + |M^i|) \quad (2.50)$$

$M^i$  est le nombre de Mach au sens de Liou. De cette manière, selon le signe de  $M^i$ , on ne retient dans le calcul du flux convectif que l'état à gauche ou à droite de l'interface. On notera qu'il est possible de définir aussi une vitesse contravariante au sens de Liou :

$$V_l^i = M^i c^m \|\vec{a}^i\|$$

Le problème est alors de définir un nombre de Mach représentatif des conditions aérodynamiques au niveau de l'interface de la cellule traitée, en tenant compte notamment des états gauches et droits. Pour cela, on décompose le nombre de mach  $M^i$  comme :

$$M^i = \mathcal{M}^+(M^L) + \mathcal{M}^-(M^R) \quad (2.51)$$

où :

$$\mathcal{M}^\pm(M^{L/R}) = \begin{cases} \pm \frac{1}{4}(M^{L/R} \pm 1)^2 \pm \beta_{liou}(M^{L/R^2} - 1)^2 & \text{si } |M^{L/R}| < 1 \\ \frac{1}{2}(M^{L/R} \pm |M^{L/R}|) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.52)$$

$M^L$  et  $M^R$  étant les nombres de Mach définis de manière classique pour les états gauches et droits relativement à la vitesse  $c^m$  :

$$M^{L/R} = \frac{V}{c^m}$$

Le terme de pression s'explique de manière assez similaire. On définit ainsi :

$$p^\pm(M^{L/R}) = \begin{cases} \frac{1}{4}(M^{L/R} \pm 1)^2(2 \mp M^{L/R}) \pm \alpha_{liou} M^{L/R}(M^{L/R^2} - 1)^2 & \text{si } |M^{L/R}| < 1 \\ \frac{1}{2}(1 \pm \text{signe}(M^{L/R})) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.53)$$

Les coefficients  $\alpha_{liou}$  et  $\beta_{liou}$  sont choisis de sorte que :

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{M}^\pm}{dM^2} \right|_{M=0} = 0 \quad (2.54)$$

$$\left. \frac{d^2 p^\pm}{dM^2} \right|_{M=\pm 1} = 0 \quad (2.55)$$

Liou rapporte que les valeurs  $\alpha_{liou} = 3/16$  et  $\beta_{liou} = 1/8$  donnent les meilleurs résultats sur les problèmes testés.

Il reste toutefois à définir la vitesse du son moyenne à l'interface  $c^m$ , laquelle est utilisée directement pour le calcul de la partie purement convective ainsi que pour la définition des  $M^{L/R}$ . L'utilisation d'une vitesse du son commune dans ce dernier cas est naturelle puisque l'interface est soumise dans le cas général à l'influence des états gauches et droits.

Il existe a priori un large éventail de possibilités pour définir  $c^m$  mais Liou [119] signale que parmi plusieurs formulations testées, la meilleure est la simple moyenne arithmétique :

$$c^m = c^m(\xi^i - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} [c(\xi^i - 1) + c(\xi^i)] \quad (2.56)$$

Ce schéma, bien que meilleur que celui de Van Leer (notamment pour la conservation d'enthalpie), reste sujet à deux problèmes majeurs.

- Il est encore sur-dissipatif dans les zones de faible vitesse.
- Il tend à générer des oscillations de pression proches d'une instabilité pair/impair dans les zones de forts gradients et/ou de faible vitesse.

#### 2.4.2.1 Correction de la dissipation artificielle pour les écoulements à basse vitesse

Pour corriger le premier défaut, la sur-dissipation du schéma dans les zones de basse vitesse, Liou et Edwards [42, 122] introduisent une nouvelle expression de la vitesse du son à l'interface inspirée du traitement effectué par le préconditionneur de Weiss [193]. On rappelle que les méthodes de préconditionnement matriciel sont utilisées pour accélérer la convergence du calcul. Le mauvais conditionnement des matrices ralentit fortement la convergence des calculs stationnaires, notamment dans les zones à basse vitesse où les valeurs propres  $u$  et  $u+c$  sont d'ordres de grandeur très différents. Pour corriger ce mauvais conditionnement, on applique un préconditionneur  $\Gamma$  tel que les valeurs propres de  $\Gamma^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial \mathbf{w}}$  ( $\mathbf{w}$  étant le vecteur des variables primitives) soient  $V^i$ ,  $V^{i'} \pm c'$ , avec [42] :

$$V^{i'} \pm c' = \frac{(1 + M_{ref}^2)}{2} \left[ V^i \pm c \frac{\sqrt{(1 - M_{ref}^2)^2 M^2 + 4M_{ref}^2}}{(1 + M_{ref}^2)} \right] \quad (2.57)$$

$$M_{ref}^2 = \frac{\min [c^2, \max(V^2, V_{co}^2)]}{c^2} \quad (2.58)$$

$V_{co}$  étant une vitesse de coupure spécifiée par l'utilisateur.

Cette valeur ne sert théoriquement qu'à éviter l'apparition de singularités au point de stagnation, mais en contrepartie elle affecte la correction : trop grande, elle implique une correction faible des valeurs propres.

On peut montrer que la dissipation du schéma AUSM+ est issue du terme de pression  $P^i$ . Elle peut être scindée en deux parties, l'une proportionnelle à la vitesse du son à l'interface  $c_m$ , et l'autre proportionnelle à  $\frac{1}{c_m}$ . Liou et Edwards proposent donc tout naturellement un terme d'échelle  $f_{\frac{1}{2}}$ , calqué sur les équations de préconditionnement, tel que la vitesse du son utilisée par le schéma s'écrive :

$$c_m = f_{\frac{1}{2}} \bar{c}_m \quad (2.59)$$

$$f_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{(1 - M_{ref \frac{1}{2}}^2)^2 M^2 + 4 M_{ref \frac{1}{2}}^2}}{(1 + M_{ref \frac{1}{2}}^2)}$$

$\bar{c}_m$  est donné par l'équation (2.56).

La formulation (2.59) fait elle aussi intervenir la notion de Mach de coupure. Plus ce dernier est choisi grand, plus la dissipation à basse vitesse sera forte. A l'inverse, une petite valeur entraîne une dégradation dans la capture des ondes de choc.

On précisera cependant que la correction de la dissipation numérique **n'est pas synonyme** de préconditionnement, ce dernier pouvant être employé indépendamment de la correction. En particulier, il n'existe pas de raison théorique de relier le Mach de coupure associé au préconditionnement avec celui associé à la dissipation. Cependant, pour une question de facilité d'utilisation, le code Turb'flow fait intervenir une unique valeur pour régler les deux mécanismes.

#### 2.4.2.2 Correction des instabilités de pression

La correction des oscillations de pression apparaissant dans les zones à basse vitesse avec des forts gradients est plus difficile. Selon Liou, le problème vient d'une dissipation associée trop faible qui ne limite donc pas les sur/sous-prédictions. Liou [121] propose une nouvelle version baptisée AUSM<sup>+</sup>-up dans laquelle il redéfinit les mécanismes de correction précédents avec un nouveau nombre de Mach de coupure. Cependant, cette version a montré une forte instabilité générale pour la simulation des grandes configurations examinées dans la présente étude. Un schéma plus récent, développé par Shima et Kitamura (SLAU - [168]) semble plus prometteur.

### 2.4.3 Schéma à différence de flux - Schéma de Roe

#### 2.4.3.1 Principes généraux des schémas à différence de flux

Les schémas à différence de flux ont été parmi les premiers schémas décentrés développés. Le premier est celui de Godunov [183, 60], dans lequel on représente en un instant l'écoulement discrétisé sur chaque cellule comme un ensemble d'états constants, ce qui équivaut donc à traiter un

problème du type tube à choc au niveau de chaque interface. En résolvant exactement les problèmes de Riemann sur l'intégralité de la surface de la cellule, on peut ainsi déterminer l'évolution du champ à l'intérieur de cette dernière, sur un intervalle de temps suffisamment petit afin d'éviter les interactions entre les ondes montantes et descendantes. On peut alors recalculer l'état moyen sur la cellule au bout de ce pas de temps et recommencer le processus. Cette méthode est assez attractive du point de vue théorique, mais elle souffre nettement de la complexité des problèmes à résoudre.

### 2.4.3.2 Schéma de Roe

Pour corriger les défauts du schéma de Godunov, Roe [156] propose un schéma reposant sur la résolution approchée des problèmes de Riemann. Le flux convectif à l'interface  $\xi^i - \frac{1}{2}$  s'écrit :

$$\mathbf{F}_c^i(\xi^i - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_c^i(\mathbf{q}^L) + \mathbf{F}_c^i(\mathbf{q}^R)] - \sqrt{g}|K^i| \frac{\mathbf{q}^L - \mathbf{q}^R}{2} \quad (2.60)$$

Les flux  $\mathbf{F}_c^i$  sont définis selon la formule (2.37), ce qui permet de prendre en compte directement le mouvement du maillage.

La matrice jacobienne  $K^i$  est choisie à partir de critères physiques et mathématiques. Un des choix possibles est de construire cette matrice à partir d'un changement de variables. On moyenne les variables conservatives au sens de Roe :

$$\begin{aligned} \rho_{roe} &= \sqrt{\rho^L \rho^R} \\ \forall j \geq 2, \quad (q_j)_{roe} &= \frac{\sqrt{\rho^L} q_j^L + \sqrt{\rho^R} q_j^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \end{aligned} \quad (2.61)$$

On définit alors :

$$|K^i| = R^i(\mathbf{q}_{roe}) |\Lambda^i| L^i(\mathbf{q}_{roe}) \quad (2.62)$$

où  $R^i$  (resp.  $L^i$ ) est la matrice des vecteurs propres droits (resp. gauches) et  $\Lambda^i$  la matrice diagonale constituée des valeurs propres de  $\frac{\partial \mathbf{F}_c^i}{\partial(\sqrt{g}\mathbf{q})}$ .

Le schéma de Roe est robuste et précis notamment pour les écoulements avec des ondes de choc, mais il ne respecte pas la condition d'entropie et peut produire des solutions non-physiques.

## 2.4.4 Schémas d'ordre élevé

Jusqu'à présent, les différents schémas décentrés n'ont pas été détaillés en terme d'ordre spatial. Les formulations proposées ne tiennent compte pour l'instant que des états à gauche et à droite de la cellule  $\mathbf{q}^L$  et  $\mathbf{q}^R$ .

### 2.4.4.1 Interpolation MUSCL

En pratique, on contrôle la précision du schéma en déterminant plus ou moins précisément ces états au voisinage de l'interface. Une des méthodes les plus utilisées à l'heure actuelle est la technique MUSCL (Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) initialement développée par Van Leer [184]. Cette formulation fait intervenir une interpolation d'ordre variable pour les états gauches et droits en fonction des valeurs du champ conservatif stocké aux nœuds adjacents. Au premier ordre, les valeurs  $\mathbf{q}^L$  et  $\mathbf{q}^R$  sont déterminées pour chaque direction en copiant directement la valeur des deux nœuds encadrant l'interface. Pour des ordres élevés, on fait intervenir des interpolations plus élaborées.

**Remarque :** Afin de faciliter la compréhension, on remarquera qu'une reconstruction précise à l'ordre 1 présente une erreur directement proportionnelle à la distance, soit encore avec un développement en série de Taylor à partir du point  $x_0$  :

$$\mathbf{q}_{ordre1} = \mathbf{q}(x_0) + \mathcal{O}(\Delta x) = \mathbf{q}(x_0) + \Delta x \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x}$$

En conséquence, une telle reconstruction ne peut reproduire exactement qu'une distribution spatiale constante pour  $\mathbf{q}$ . De la même manière, une interpolation au second ordre ne peut reconstruire exactement qu'une variation linéaire, etc.

Pour un maillage structuré uniforme, l'interpolation MUSCL s'écrit (Fig. 2.4) :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\xi^{i-\frac{1}{2}}}^L &= Q^{L/R}(\mathbf{q}_{\xi^i}, \mathbf{q}_{\xi^{i-1}}, \mathbf{q}_{\xi^{i-2}}) \\ \mathbf{q}_{\xi^{i-\frac{1}{2}}}^R &= Q^{L/R}(\mathbf{q}_{\xi^{i-1}}, \mathbf{q}_{\xi^i}, \mathbf{q}_{\xi^{i+1}}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

où

$$\begin{aligned} Q^{L/R}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \mathbf{q}_1 + \sigma \frac{1}{4} [(1 + \kappa)(\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1) + (1 - \kappa)(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)] \\ &= \frac{1}{4} \sigma (1 + \kappa) \mathbf{q}_0 + \left(1 - \frac{1}{2} \kappa \sigma\right) \mathbf{q}_1 - \frac{1}{4} \sigma (1 - \kappa) \mathbf{q}_2 \end{aligned} \quad (2.64)$$

où  $\kappa$  et  $\sigma$  sont des constantes contrôlant globalement l'ordre de la reconstruction.  $\sigma = 0$  équivaut à écrire que  $Q^{L/R}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \mathbf{q}_1$ , ce qui constitue donc un schéma du premier ordre. On utilise  $\sigma = 1$  pour les interpolations d'ordre supérieur.

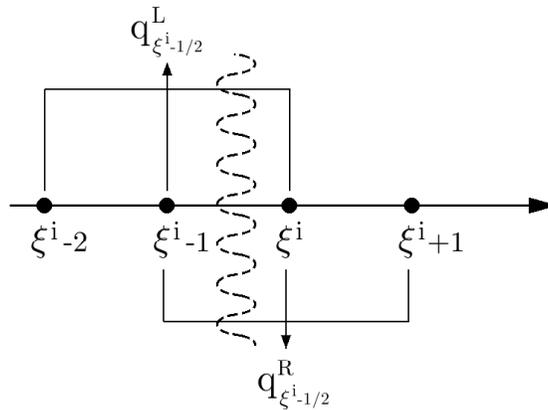


FIG. 2.4 – Détermination des états gauches et droits par une approche MUSCL

Une fois  $\sigma$  réglé à 1, le paramètre le plus important est donc  $\kappa$ , lequel permet de déterminer directement la précision de l'interpolation.

On obtient les cas de figure suivants :

- $\kappa = 0$  : schéma de Fromm [53].

Ce schéma est précis au second ordre. L'interpolation se résume alors à :

$$\mathbf{q}^{L/R} = \mathbf{q}_1 \pm \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} \Delta x_{interface} \quad (2.65)$$

où  $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x}$  est évaluée par différences finies centrées autour de  $\mathbf{q}_1$  et  $\Delta x_{interface}$  est la distance séparant le point  $\mathbf{q}_1$  de l'interface où on effectue la reconstruction.

Pour un maillage uniforme, on obtient donc :

$$\mathbf{q}^{L/R} = \mathbf{q}_1 \pm \frac{\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_0}{2} \quad (2.66)$$

- $\kappa = -1$  : schéma totalement décentré du second ordre.
- $\kappa = 1$  : schéma centré du second ordre
- $\kappa = \frac{1}{2}$  : schéma "QUICK" (Quadratic Upwind Interpolation) précis au second ordre
- $\kappa = \frac{1}{3}$  : schéma partiellement décentré du troisième ordre "CUI" (Cubic Upwind Interpolation).

Le schéma du second ordre appliqué par défaut dans le code de calcul Turb'Flow est le schéma de Fromm.

Les interprétations graphiques des interpolations  $\kappa = 0$  et  $\kappa = \pm 1$  sont données sur la figure (Fig. 2.5)

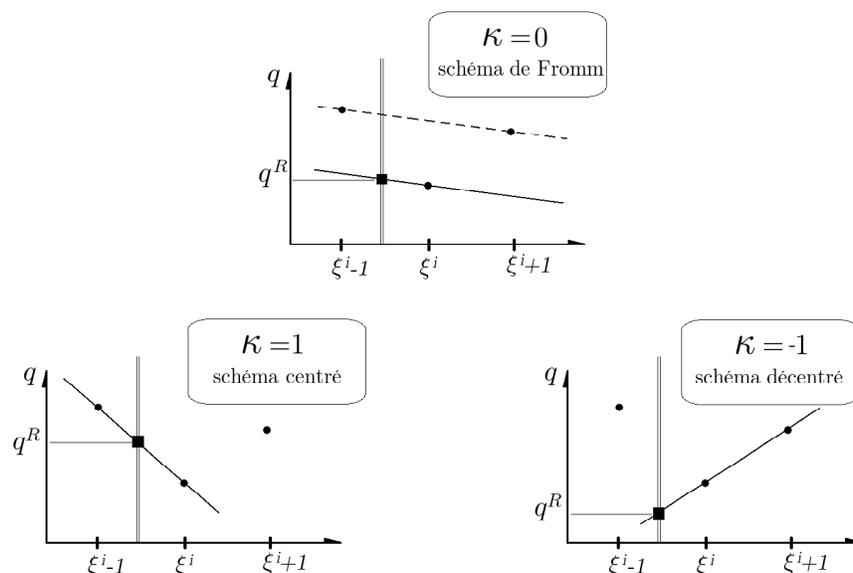


FIG. 2.5 – Construction graphique des interpolations MUSCL pour  $\kappa = 0$ ,  $\kappa = 1$  et  $\kappa = -1$

Comme on l'a précisé, cette formulation n'est a priori valable que dans le cas d'un maillage uniforme et monodimensionnel. Les hypothèses faites pour le calcul des intégrales surfaciques et volumiques dans le cadre de l'approche en volumes finis, à savoir que  $\mathbf{q}$  est constant dans les directions orthogonales à la direction d'interpolation, limitent donc la précision à l'ordre 2.

Une autre restriction porte sur la monotonie du schéma spatial ainsi obtenu. Un schéma est dit monotone s'il n'introduit pas d'extrema lors de la convection d'une distribution initiale monotone. Il existe en pratique plusieurs techniques et critères traduisant la monotonie de manière plus ou moins

rigide. Une des formes les plus employées à l'heure actuelle est le critère TVD (Total Variation Diminishing). Pour un cas monodimensionnel, elle se traduit par :

$$\sum_i |\mathbf{q}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{q}_i^{n+1}| \leq \sum_i |\mathbf{q}_{i+1}^n - \mathbf{q}_i^n| \quad (2.67)$$

Le critère TVD (2.67) implique la monotonie puisque l'apparition d'un extremum augmentera clairement la somme sur le maillage des écarts entre points voisins. Il constitue cependant un cadre plus général. On peut montrer que ce critère implique des restrictions sur les coefficients utilisés dans la formule d'interpolation associée. On montre en particulier [117, 3] que pour un schéma TVD appliqué à l'équation de convection monodimensionnelle :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + a \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

la solution discrétisée à l'instant  $n + 1$  par un schéma de second ordre peut s'écrire :

$$q_i^{n+1} = q_i^n - C_{j-1}^+(q_i^n - q_{i-1}^n) + C_j^-(q_{i+1}^n - q_i^n)$$

avec les conditions suivantes sur les coefficients  $C^\pm$  pour garantir que le schéma est TVD :

$$\begin{aligned} C_j^\pm &\geq 0 \\ C_j^+ + C_j^- &\leq 1 \end{aligned}$$

On retiendra qu'il existe en pratique d'autres formulations pour le calcul des états gauches et droits autour de l'interface. Ces techniques sont généralement établies sur des maillages non-structurés, ce qui constitue une généralisation par rapport aux maillages structurés. La méthode proposée par Barth et Jespersen [7] s'appuie sur un calcul tridimensionnel des gradients des variables au sein de la cellule d'intégration. Ces gradients sont ensuite utilisés pour extrapoler la solution à l'interface. On trouvera aussi dans [26, 23, 36] un certain nombre d'autres techniques de reconstruction pouvant même traiter des maillages non-uniformes. On se concentrera néanmoins dans la suite sur l'interpolation MUSCL, laquelle est aujourd'hui utilisée dans le code de calcul Turb'Flow que nous avons utilisé.

#### 2.4.4.2 Limiteurs de pentes pour la formulation MUSCL

Avec de telles considérations, il est évident que l'interpolation MUSCL (2.64) ne satisfait pas le critère TVD dans le cas général. Seule l'interpolation au premier ordre ( $\sigma = 0$ ) permet de garantir la monotonie. D'autre part, il peut être nécessaire de dégrader localement l'ordre d'interpolation afin d'augmenter la dissipation et ainsi prévenir l'apparition d'instabilités numériques. Pour ces deux raisons, relativement semblables, on modifie dans un premier temps la formulation (2.64) en posant :

$$\begin{aligned} Q^{L/R}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \mathbf{q}_1 + \sigma \frac{1}{4} \Phi [(1 + \kappa \Phi)(\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1) + (1 - \kappa \Phi)(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)] \\ &= \frac{1}{4} \sigma \Phi (1 + \kappa \Phi) \mathbf{q}_0 + \left(1 - \frac{1}{2} \kappa \sigma \Phi^2\right) \mathbf{q}_1 - \frac{1}{4} \sigma \Phi (1 - \kappa \Phi) \mathbf{q}_2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

La fonction  $\Phi$  correspond à un limiteur de pente conçu pour empêcher les oscillations au voisinage de forts gradients. Cette fonction est définie à partir du champ aérodynamique sur une zone locale

et varie continûment entre 0 et 1. De même que pour  $\sigma$ ,  $\Phi = 0$  correspond à une interpolation du premier ordre, le cas  $\Phi = 1$  étant au contraire une reconstruction d'ordre élevé.

Il est préférable de calculer la valeur de  $\Phi$  pour chaque variable aérodynamique traitée puisque dans certains cas, notamment pour des surfaces de contact comme l'interface entre deux phases, toutes les variables ne sont pas discontinues. Cette approche est plus coûteuse informatiquement mais plus cohérente du point de vue physique.

Il existe en théorie une infinité de fonctions possibles pour  $\Phi$ , mais on restreindra le choix avec des conditions de continuité et de dérivabilité qui assurent un changement monotone du schéma tant sur le plan spatial que temporel. Les limiteurs retenus jusqu'à très récemment dans le code Turb'Flow sont les suivants :

- Limiteur de Van Albada (formulation de Mulder [140]) :

$$\Phi(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{2|(\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1)(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)| + \varepsilon}{(\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1)^2 + (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)^2 + \varepsilon} \quad (2.69)$$

$\varepsilon$  étant une constante petite  $10^{-9}$  utilisée pour éviter une division par zéro dans les zones de faible gradient. Il n'affecte pas le fonctionnement du limiteur dans les zones de fort gradient, mais il peut en revanche provoquer un déclenchement parasite du limiteur dans les parties où l'écoulement est quasiment constant.

- Tangente hyperbolique :

$$\Phi(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = 1 - \tanh^2 \left\{ \min \left( 10, \nu [(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - (\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1)]^2 \right) \right\} \quad (2.70)$$

$\nu = 20$  étant un paramètre réglant la sensibilité du limiteur.

L'expression précédente fait intervenir la différence entre deux gradients plutôt que leur quotient. Ceci implique que l'ordre de grandeur des termes est important et demande donc une adimensionnalisation correcte.

Le limiteur de Van Albada se déclenche très facilement, faisant rapidement chuter la précision au premier ordre. Il est donc responsable d'une erreur numérique assez importante, mais en contrepartie, il génère un schéma robuste bien adapté aux écoulements avec des ondes de choc. A l'opposé, le limiteur en tangente hyperbolique descend assez lentement vers 0 garantissant ainsi une bonne précision spatiale, au risque de ne pas agir assez efficacement et de laisser apparaître des oscillations.

### 2.4.5 Généralisation des formules d'interpolation pour les schémas décentrés amont

Jusqu'à présent, nous avons décrit les grandes techniques de discrétisation spatiale implémentées dans le code Turb'Flow. Cette description avait pour but de donner le contexte des travaux de généralisation des schémas aux maillages non uniformes que j'ai effectués au cours de ma thèse et que je vais maintenant présenter.

On remarquera ici que les formules utilisées couramment pour l'interpolation des variables aux interfaces (MUSCL et limiteurs de pente) ne font pas intervenir d'information sur le maillage. Elles ont été écrites de manière strictement indicielle et établies dans le cadre de maillages cartésiens uniformes. En conséquence, elles ne sont pas adaptées à la simulation d'écoulements sur des grilles présentant des tailles de maille variables, ce qui se traduit concrètement par l'introduction d'une erreur numérique et donc par une plus grande dissipation du schéma spatial associé. Un des remèdes

classiques à ce problème est une restriction du rapport de taille de maille lors de la construction du maillage, le rapport maximum étant fixé à 1.3 afin de rester proche des conditions optimales d'utilisation des formulations ; cette réponse peut néanmoins se révéler très défavorable, notamment dans le cadre de géométries complexes présentant un grand nombre de parois solides, car elle conduit à multiplier les plans de maillage et rend donc le calcul très lourd et lent du point de vue informatique. C'est pourquoi il est intéressant de proposer des formules d'interpolation généralisées aux maillages quelconques, afin de gagner un peu de souplesse du point de vue de la phase de maillage, souvent fastidieuse, puis de calcul. On notera cependant que l'approche proposée dans la suite reste mono-directionnelle, i.e. on continuera à négliger les variations du champ dans le plan orthogonal à la direction d'interpolation.

#### 2.4.5.1 Interpolation des variables - Remarque préalable

On ne traite dans cette partie que ce qui touche à l'interpolation directe du champ aérodynamique visant à construire les états gauches et droits de l'interface. La problématique relevant des limiteurs sera traitée dans la partie suivante.

La généralisation du schéma MUSCL aux maillages non-uniformes fait suite aux travaux de G. Oliveira [146], lequel avait proposé une première méthode, basée sur une interpolation du flux à l'interface, et non des variables conservatives [116]. Cependant, cette formulation n'a jamais donné de résultat probant.

Dans ce qui suit, les reconstructions de type MUSCL qui seront données correspondront à l'interpolation de  $q^R$ , la formulation pour  $q^L$  s'obtenant de manière évidente en décalant et en permutant les indices des points considérés autour de l'interface.

On rappelle que la formulation implémentée dans le code Turb'Flow repose sur une approche de type volumes finis. On a donc, en négligeant les termes sources :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_\xi} A dV + \int_{\partial\mathcal{V}_\xi} \vec{C} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (2.71)$$

où  $A$  (respectivement  $\vec{C}$ ) est une grandeur scalaire ou vectorielle (resp. vectorielle ou tensorielle). On voit donc ainsi que le traitement mathématique n'est pas effectué directement sur  $A$  mais plutôt sur sa valeur moyenne au sens spatial  $\bar{A}_\xi = \frac{1}{V_\xi} \int_{\mathcal{V}_\xi} A dv$ . L'approche de type volumes finis suppose bien évidemment que  $\lim_{V_\xi \rightarrow 0} \bar{A}_\xi = A(\xi)$ . En pratique, c'est donc la moyenne du champ aérodynamique qui est stockée informatiquement au niveau du nœud  $\xi$ , *mais elle ne peut néanmoins pas être rattachée avec un sens physique à un point précis de la cellule.*

#### Remarque

Afin de rester cohérent avec la définition classique de l'interpolation (2.64), on fera l'hypothèse que la reconstruction des variables aux différentes interfaces peut se traiter comme autant de problèmes monodimensionnels. Les formules seront établies pour une interpolation dans la direction  $\xi^i$

Dans la suite, on notera par souci de simplicité :

- $x_\xi^i$  : la coordonnée curviligne le long de la ligne de maillage pour laquelle est effectuée l'interpolation.  $x_{\xi^i}$  repère le point de coordonnée indicielle  $\xi^i$  sur cette ligne.

- $x$  est la coordonnée curviligne d'une position quelconque le long de la ligne de maillage précédente.
- Par extension, les différences notées  $(x_A - x_B)$  devront être comprises au sens de la distance euclidienne entre les points  $a$  et  $b$
- Du fait de l'approche en volumes finis, les valeurs moyennes sur les cellules  $\bar{q}_{\xi^i}$  du champ aérodynamique *sont les valeurs stockées aux nœuds*  $q_{\xi^i}$  classiquement utilisées jusque là.

Dans le cas monodimensionnel évoqué en hypothèse,  $x$  fait référence à la (seule) coordonnée spatiale au sens classique.

### 2.4.5.2 Schéma du troisième ordre

On se concentre ici sur l'interpolation du troisième ordre. S'il ne s'agit définitivement pas de la formulation la plus simple, elle est en revanche très utile pour mettre en relief un certain nombre de caractéristiques des méthodes d'interpolation qui seront par la suite réutilisées pour la généralisation des autres formules. La formulation MUSCL (2.64) pour chaque variable aérodynamique  $q$  peut aussi être écrite, selon [75], comme une fonction continue :

$$q(x) = \bar{q}_{\xi^i} + \frac{1}{\Delta x}(x - x_{\xi^i})\partial_{\xi^i}q + \frac{3\kappa}{2\Delta x^2} \left[ (x - x_{\xi^i})^2 - \frac{\Delta x^2}{12} \right] \partial_{\xi^i}^2 q, \quad \forall x \in [x_{\xi^{i-1/2}}, x_{\xi^{i+1/2}}] \quad (2.72)$$

avec :

- $\Delta x$  la largeur du volume de contrôle selon  $\xi^i$  :

$$\Delta x = x_{\xi^{i+1/2}} - x_{\xi^{i-1/2}} \quad (2.73)$$

- $\partial_{\xi^i}q$  et  $\partial_{\xi^i}^2q$  les valeurs des dérivées premières et secondes de la fonction  $q(x)$  évaluées de manière indicelle pour la cellule de calcul :

$$\partial_{\xi^i}q = \frac{\bar{q}_{\xi^{i+1}} - \bar{q}_{\xi^{i-1}}}{2} \quad (2.74)$$

$$\partial_{\xi^i}^2q = (\bar{q}_{\xi^{i+1}} - 2\bar{q}_{\xi^i} + \bar{q}_{\xi^{i-1}}) \quad (2.75)$$

- $\bar{q}_{\xi^i}$  étant la valeur moyenne sur la cellule  $\xi^i$  :

$$\bar{q}_{\xi^i} = \frac{1}{\Delta x} \int_{\xi^{i-1/2}}^{\xi^{i+1/2}} q(x) dx \quad (2.76)$$

Il convient à ce niveau de préciser le rôle de chacun des différents termes de cette formule.

On suppose une certaine répartition  $q_{\xi^{i-1}}, q_{\xi^i}, q_{\xi^{i+1}}$  du champ aérodynamique autour de l'interface  $\xi^i - 1/2$ , le maillage étant pour l'instant supposé unidirectionnel et uniforme. On peut donc déterminer deux valeurs interpolées :

- la valeur à l'interface de la parabole  $p(x)$  telle que  $p(x_{\xi^i}) = q_{\xi^i}$ ,  $p(x_{\xi^{i-1}}) = q_{\xi^{i-1}}$ ,  $p(x_{\xi^{i+1}}) = q_{\xi^{i+1}}$ . Cette approche est la plus intuitive pour effectuer une reconstruction qu'on espère au troisième ordre. On notera ici que cette parabole peut être obtenue en utilisant  $\kappa = 1/2$  dans la formule (2.72). On trouve la valeur suivante :

$$q_{\xi^{i-1/2}, MUSCL-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}q_{\xi^i} + \frac{3}{8}q_{\xi^{i-1}} - \frac{1}{8}q_{\xi^{i+1}} \quad (2.77)$$

- La valeur à l'interface donnée par la reconstruction MUSCL au troisième ordre ( $\kappa = 1/3$ )

$$q_{\xi^i-1/2, MUSCL-\frac{1}{3}} = \frac{5}{6}q_{\xi^i} + \frac{1}{3}q_{\xi^i-1} - \frac{1}{6}q_{\xi^i+1} \quad (2.78)$$

Ces deux formulations, bien que basées sur une approche parabolique, sont donc différentes. La première n'est en particulier pas précise au troisième ordre. Si on représente la parabole obtenue dans l'équation 2.72 et la parabole  $p(x)$ , on remarque un écart constant (Fig. 2.6).

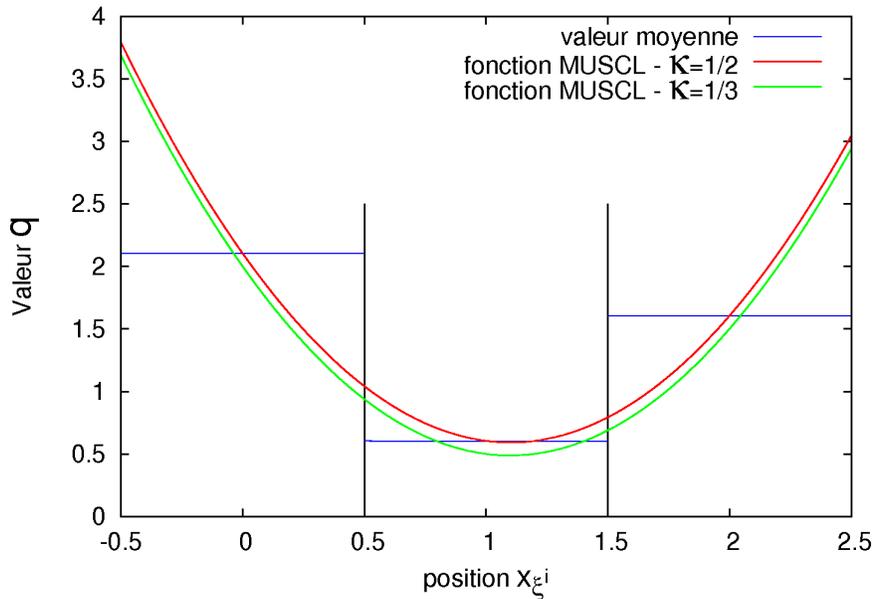


FIG. 2.6 – Comparaison des interpolations MUSCL pour  $\kappa = 1/2$  et  $\kappa = 1/3$

Sur cette figure, on a représenté la distribution de  $q$  en fonction de la position pour les reconstructions de type  $\kappa = 1/2$  et  $\kappa = 1/3$ . Les séparateurs verticaux correspondent aux interfaces entre cellules et les traits bleus indiquent la valeur moyenne  $\bar{q}$  telle que stockée à chaque nœud. Ces derniers sont localisés à  $x_{\xi^i-1} = 0$ ,  $x_{\xi^i} = 1$ ,  $x_{\xi^i+1} = 2$ , se situant de plus à équidistance des interfaces, gauche et droite, de la cellule de calcul qui leur est associée.

L'écart entre ces deux formulations vaut :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} (q_{\xi^i+1} - 2q_{\xi^i} + q_{\xi^i-1}) \quad (2.79)$$

soit encore en identifiant les différents termes,

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \partial_{\xi^i}^2 q$$

Ce terme, que l'on retrouve dans l'expression (2.72), est donc la correction qu'il est nécessaire d'apporter pour pouvoir garantir la précision au troisième ordre dans le cadre des volumes finis.

Nous allons maintenant étudier plus précisément son origine. Si on suppose que  $q(x)$  est une fonction quadratique, on peut alors écrire le développement en série de Taylor autour du point  $x_{\xi^i}$

suivant :

$$q(x) = q(x_{\xi^i}) + \frac{dq}{dx}(x - x_{\xi^i}) + \frac{1}{2} \frac{d^2q}{dx^2}(x - x_{\xi^i})^2 \quad (2.80)$$

soit, en appliquant la relation (2.76),

$$\bar{q}_{\xi^i} = q(x_{\xi^i}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{d^2q}{dx^2} \Delta x^2 \quad (2.81)$$

ce qui permet de retrouver la forme obtenue pour  $\kappa = 1/3$  de l'équation (2.72) en remplaçant  $q(x_i)$  par l'expression (2.81). En d'autres termes, pour  $\kappa = 1/3$ , la formulation (2.72) est donc le développement en série de Taylor exact d'une parabole  $q(x)$  connue par ses dérivées premières et secondes ainsi que par au moins une valeur *moyenne* sur un intervalle, ce qui correspond donc clairement à une discrétisation de type volumes finis.

Le terme de correction  $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \partial_{\xi^i}^2 q$  introduit dans la formulation correspond à l'écart entre la valeur au nœud de la distribution réelle  $q(x)$  et sa valeur moyenne sur la cellule entourant ce nœud.

Par ailleurs, on peut aussi envisager l'influence du choix de la discrétisation spatiale sur le calcul des dérivées. Pour le moment, celles-ci ont été évaluées directement en utilisant les formules classiques, issues d'une approche de type différences finies. Néanmoins, en supposant que  $q(x)$  est une fonction polynomiale d'ordre supérieur ou égal à deux, on peut écrire les égalités suivantes :

$$\forall k, \bar{q}_k = \frac{1}{\Delta x} \int_{\xi^{i+k-1/2}}^{\xi^{i+k+1/2}} \left[ q(x_{\xi^i}) + \frac{dq}{dx}(x - x_{\xi^i}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2q}{dx^2}(x - x_{\xi^i}) + O(x - x_{\xi^i})^3 \right] dx \quad (2.82)$$

soit encore

$$\bar{q}_{\xi^{i-1}} = q(x_{\xi^i}) - \frac{dq}{dx} \Delta x + \frac{13}{24} \frac{d^2q}{dx^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \quad (2.83)$$

$$\bar{q}_{\xi^i} = q(x_{\xi^i}) + \frac{1}{24} \frac{d^2q}{dx^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \quad (2.84)$$

$$\bar{q}_{\xi^{i+1}} = q(x_{\xi^i}) + \frac{dq}{dx} \Delta x + \frac{13}{24} \frac{d^2q}{dx^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \quad (2.85)$$

A partir des équations précédentes, on détermine l'expression des dérivées spatiales premières et secondes basées non pas sur les valeurs nodales mais sur les valeurs moyennes :

$$\left. \frac{dq}{dx} \right|_{\xi^i} = \frac{\bar{q}_{\xi^{i+1}} - \bar{q}_{\xi^{i-1}}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.86)$$

$$\left. \frac{d^2q}{dx^2} \right|_{\xi^i} = \frac{\bar{q}_{\xi^{i+1}} - 2\bar{q}_{\xi^i} + \bar{q}_{\xi^{i-1}}}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \quad (2.87)$$

Ainsi, les expressions (2.86) et (2.87) sont identiques dans la forme à celles obtenues classiquement dans le cadre des différences finies. La seule différence à considérer est l'utilisation des valeurs moyennes sur les cellules de calcul  $\bar{q}_k$  au lieu des valeurs aux nœuds  $q_k$  de la distribution. De plus, ces expressions sont exactes pour une parabole discrétisée sur un maillage uniforme, quelle que soit la méthode de discrétisation utilisée.

En conséquence, on voit avec la formulation proposée par Hirsch [75] que la fonction d'interpolation MUSCL est valable pour une distribution physique  $q(x)$  connue uniquement par des valeurs moyennes  $\bar{q}_{\xi^i}$  sur des cellules de calcul voisines, toutes les expressions nécessaires à l'expression de  $q(x_{interface})$  étant évaluées sur la base des  $\bar{q}$ .

Ce résultat n'est vraiment visible que dans le cas d'une reconstruction au troisième ordre. En effet, pour les reconstructions d'ordre inférieur, la fonction d'interpolation est au mieux linéaire, au pire constante. Dans ces conditions précises, sur un maillage uniforme, il y a égalité entre la valeur moyenne de la fonction sur la cellule à l'interface et la valeur nodale de la distribution, puisque

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \left[ q(x=0) + \frac{dq}{dx}x \right] dx = q(x=0) \quad (2.88)$$

Pour ce type de reconstruction, l'utilisation d'une approche de type volumes finis, ou différences finies, est donc totalement transparente, le résultat étant le même. En revanche, cette particularité cesse d'exister dès que le maillage n'est plus uniforme car le noeud n'est à priori plus équidistant des deux interfaces, ce qui introduit un nouveau terme dans le second membre de l'équation (2.88).

Compte tenu de ces remarques, il est judicieux de définir de nouveaux points de référence géométriques pour généraliser les formules d'interpolation : on ne considèrera plus directement le noeud mais plutôt le centroïde de la cellule, i.e. le point à équidistance des deux interfaces. Les noeuds ne sont plus utilisés que pour définir la position de chaque interface, celle-ci restant à équidistance entre deux noeuds voisins. Ces différents éléments géométriques sont représentés sur la figure (Fig. 2.7).

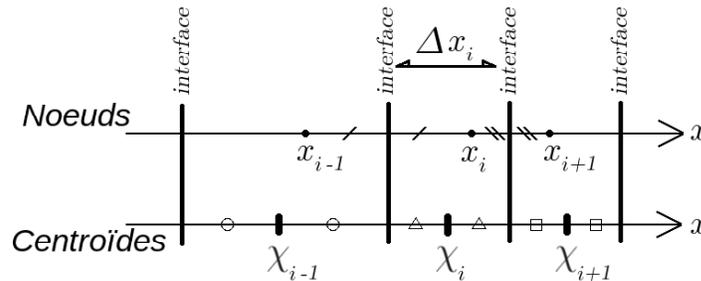


FIG. 2.7 – Positions des noeuds et des centroïdes pour un maillage quelconque

La démarche à suivre pour généraliser la formule d'interpolation du troisième ordre à un maillage quelconque est maintenant simple : dans un premier temps, on détermine la parabole telle que ses valeurs moyennes sur chaque cellule soient égales aux valeurs stockées aux noeuds. A partir de cette fonction, on calcule ensuite aisément la valeur à l'interface. En utilisant les notations définies sur la figure (Fig. 2.7), et en simplifiant encore la notation de l'indice de maillage  $\xi^i$  par  $i$ , on trouve ainsi pour une parabole :

$$P(x) = a_2(x - \chi_i)^2 + a_1(x - \chi_i) + a_0 \quad (2.89)$$

les intégrales de  $P(x)$  sur chaque cellule donnent :

$$\begin{aligned}\bar{q}_i &= \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\chi_i - \Delta x_i/2}^{\chi_i + \Delta x_i/2} P(x) dx \\ &= a_0 + a_2 \frac{\Delta x_i^2}{12}\end{aligned}\quad (2.90)$$

$$\begin{aligned}\bar{q}_{i-1} &= \frac{1}{\Delta x_{i-1}} \int_{\chi_{i-1} - \Delta x_{i-1}/2}^{\chi_{i-1} + \Delta x_{i-1}/2} P(x) dx \\ &= a_0 - \frac{1}{2} a_1 (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) + \frac{1}{3} a_2 \left( \Delta x_{i-1}^2 + 3 \Delta x_{i-1} \frac{\Delta x_i}{2} + 3 \frac{\Delta x_i^2}{4} \right)\end{aligned}\quad (2.91)$$

$$\begin{aligned}\bar{q}_{i+1} &= \frac{1}{\Delta x_{i+1}} \int_{\chi_{i+1} - \Delta x_{i+1}/2}^{\chi_{i+1} + \Delta x_{i+1}/2} P(x) dx \\ &= a_0 + \frac{1}{2} a_1 (\Delta x_{i+1} + \Delta x_i) + \frac{1}{3} a_2 \left( \Delta x_{i+1}^2 + 3 \Delta x_{i+1} \frac{\Delta x_i}{2} + 3 \frac{\Delta x_i^2}{4} \right)\end{aligned}\quad (2.92)$$

La résolution du système linéaire formé par les équations (2.90), (2.91) et (2.92) est assez fastidieuse et ne sera pas donnée ici.

On obtient au final le système partiel suivant :

$$a_2 = \frac{3 \left( \frac{\bar{q}_{i-1} - \bar{q}_i}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} + \frac{\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_i}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right)}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \quad (2.93)$$

$$a_1 = \frac{2(\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_i)}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} - \frac{2}{3} a_2 \left( \Delta x_{i+1} + \frac{\Delta x_i}{2} \right) \quad (2.94)$$

$$a_0 = \bar{q}_i - a_2 \frac{\Delta x_i^2}{12} \quad (2.95)$$

En posant  $\partial_x q_k = 2 \frac{\bar{q}_{k+1} - \bar{q}_k}{\Delta x_{k+1} + \Delta x_k}$ , et en calculant directement la valeur de la parabole à l'interface  $i - 1/2$ , on trouve que :

$$\bar{q}_{i-1/2, 3^{eme} ordre}^L = \bar{q}_{i-1} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \partial_x q_{i-1} - \frac{\Delta x_i \Delta x_{i-1}}{2(\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} (\partial_x q_{i-1} - \partial_x q_{i-2}) \quad (2.96)$$

$$\bar{q}_{i-1/2, 3^{eme} ordre}^R = \bar{q}_i - \frac{\Delta x_i}{2} \partial_x q_{i-1} - \frac{\Delta x_i \Delta x_{i-1}}{2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + \Delta x_{i+1})} (\partial_x q_i - \partial_x q_{i-1}) \quad (2.97)$$

On vérifie que dans le cadre d'un maillage uniforme, i.e.  $\Delta x_{i+1} = \Delta x_i = \Delta x_{i-1}$ , les expressions précédentes dégènèrent bien vers la formulation MUSCL donnée en (2.72).

Néanmoins, la version généralisée se caractérise par une plus grande complexité, notamment du point de vue de l'implémentation informatique puisqu'elle fait intervenir trois tailles de cellules, elles-mêmes calculées à partir de deux distances inter-nœuds. Les opérations de calcul de distance font intervenir des racines carrées coûteuses sur le plan algorithmique, une interpolation de ce type sera donc plus lente que dans sa version indicielle. Plusieurs cas tests ont été essayés avec cette formulation et seront présentés un peu plus loin (p. 31).

### 2.4.5.3 Interpolation du second ordre

On applique ici la même démarche que celle utilisée dans la partie précédente pour étendre la validité des méthodes d'interpolation d'ordre 2 aux maillages non uniformes.

Il convient à ce stade de ne plus se référer directement à l'expression (2.72) pour décrire ces méthodes dans la mesure où cette dernière expression continue ne correspond pas aux méthodes d'interpolation linéaire. Par exemple, le schéma centré ( $\kappa = 1$ ) qui se traduit dans les faits par une moyenne directe entre les valeurs de part et d'autre de l'interface est décrit par cette expression comme fonction parabolique. L'expression (2.72) ne donne de valeur correcte pour les interpolations du second ordre qu'à la position de l'interface. On se référera plutôt à la description des méthodes faites dans la section précédente lors de la présentation pour un maillage uniforme.

Dans tous les cas, ces schémas d'interpolation peuvent donc s'écrire :

$$\bar{q}_{i-1/2} = q(\chi_i) + \frac{dq}{dx}(x_{i-1/2} - \chi_i) \quad (2.98)$$

ou encore avec la relation (2.88) :

$$\bar{q}_{i-1/2} = \bar{q}_i + \frac{dq}{dx}(x_{i-1/2} - \chi_i) \quad (2.99)$$

La différence essentielle entre les schémas est donc le calcul de la dérivée  $\frac{dq}{dx}$ . Elle ne peut plus être exprimée directement en fonction des valeurs moyennes  $\bar{q}$  en appliquant des expressions issues des différences finies. Les nouvelles expressions à utiliser sont données ci-dessous.

- Schéma centré : la dérivée première est calculée de manière centrée autour de l'interface. On obtient donc :

$$\left. \frac{dq}{dx} \right|_{centre} = 2 \frac{\bar{q}_i - \bar{q}_{i-1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \quad (2.100)$$

et

$$\bar{q}_{i-1/2}^{R-centre} = \frac{(\Delta x_{i-1} \bar{q}_i + \Delta x_i \bar{q}_{i-1})}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \quad (2.101)$$

- Schéma totalement décentré amont : la dérivée est ici calculée de manière totalement décentrée par rapport à l'interface.

$$\left. \frac{dq}{dx} \right|_{decentre} = 2 \frac{\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_i}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \quad (2.102)$$

$$\bar{q}_{i-1/2}^{R-decentre} = \bar{q}_i \frac{2\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} - \bar{q}_{i+1} \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \quad (2.103)$$

- Schéma de Fromm : la dérivée est calculée de manière centrée par rapport au noeud  $i$

$$\left. \frac{dq}{dx} \right|_{Fromm} = \frac{\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_{i-1}}{\frac{\Delta x_{i+1}}{2} + \Delta x_i + \frac{\Delta x_{i-1}}{2}} \quad (2.104)$$

$$\bar{q}_{i-1/2}^{R-Fromm} = \bar{q}_i - \frac{\Delta x_i (\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_{i-1})}{\Delta x_{i+1} + 2\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \quad (2.105)$$

Une fois de plus, on vérifie aisément qu'on retrouve les expressions classiques pour le cas d'un maillage uniforme.

#### 2.4.5.4 Validation des formulations généralisées

Pour vérifier la validité des nouvelles formules d'interpolation, on considérera le cas "Ringleb" proposé par G. Chiocchia [21]. Il s'agit d'un écoulement non-visqueux de gaz parfait dans un canal courbe, en régime subsonique ou supersonique et présentant des symétries particulières. Il est possible d'obtenir une solution analytique de l'écoulement, laquelle donne en particulier la forme des lignes de courant.

Afin de tester les différentes formulations, on a retenu trois maillages distincts, représentés sur la figure (Fig. 2.8).

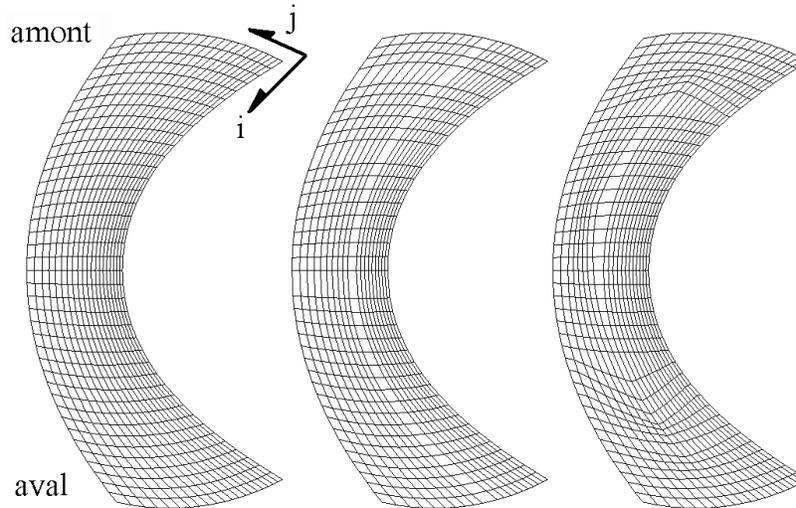


FIG. 2.8 – Maillages utilisés pour le cas Ringleb

1. **Maillage de référence** Le premier maillage (gauche) est le maillage de référence. Il est construit en utilisant les lignes de courant pour constituer les lignes de maillage selon  $j$ , les lignes selon  $i$  étant orthogonales à la direction de l'écoulement. On remarque qu'il est très régulier, avec notamment une faible déformation des mailles, et des rapports de taille très proches de 1 pour des mailles voisines. Il est donc en terme de qualité assez similaire à un maillage idéal, c'est-à-dire un maillage cartésien uniforme.
2. **Maillage déraffiné** Le deuxième maillage (centre) est une version dérivée du maillage de référence en supprimant directement des lignes de maillage. On a ainsi supprimé trois lignes de maillage dans la direction  $i$ , deux se situant dans la zone supérieure qui est aussi la zone amont du cas, et une au niveau du col. De la même manière, on a supprimé une ligne de maillage dans la direction  $j$ , à peu près en milieu de veine. Les rapports de taille de maille maximaux obtenus sont de l'ordre de 2 pour les deux directions. Les trous pratiqués dans ce maillage présentent néanmoins la particularité de sous-discrétiser la forme des parois et sont responsables de quelques problèmes.
3. **Maillage déformé** Le troisième maillage (droite) est obtenu en déformant localement le maillage de référence. La déformation est toujours maximale à mi-chemin entre les parois, et nous avons choisi de ne pas altérer les premières mailles au niveau de chaque frontière afin de garder une discrétisation correcte de celles-ci. Les rapports de taille maximaux obtenus sont

ici un peu plus importants. On obtient en particulier un rapport de 2.5 dans la direction de l'écoulement (la direction  $i$ ) et 3 dans la direction transversale.

L'écoulement reste subsonique, avec un nombre de Mach maximal de 0.9. La température totale amont est de  $298K$ . Le fluide considéré est de l'air, considéré comme un gaz parfait.

Nous avons choisi de tester les interpolations MUSCL corrigées d'ordre 2 ( $\kappa = 0$  - schéma de Fromm) et d'ordre 3 ( $\kappa = \frac{1}{3}$ ). Elles sont utilisées par le schéma de Liou (AUSM+-up).

La figure (Fig. 2.9) illustre la répartition de nombre de Mach pour les schémas du second et du troisième ordre, en version indicielle ou corrigée, appliqués au maillage de référence et au maillage déraffiné.

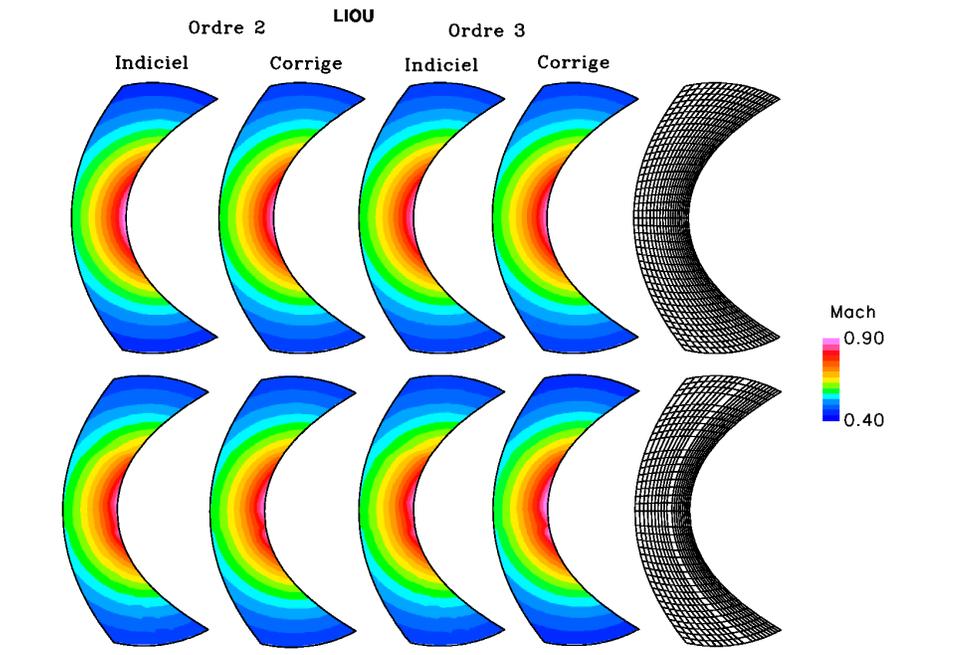


FIG. 2.9 – Cas test Ringleb - Nombre de Mach  $M$  - maillage de référence et maillage déraffiné

On a représenté sur cette figure les résultats donnés par les différents interpolateurs avec, de gauche à droite, l'interpolateur d'ordre 2 indiciel, corrigé, puis l'interpolateur d'ordre 3 indiciel et corrigé. La première ligne donne les champs dans le cas du maillage de référence, la seconde les donne pour le maillage déraffiné.

On ne voit pas d'influence majeure des deux premiers sauts de maille dans la direction  $i$ . En revanche, le saut de maille au niveau du col perturbe assez fortement la zone de vitesse maximale aussi bien pour les versions indicielles que corrigées. Les versions géométriques sont néanmoins un peu plus proches de l'écoulement de référence. Le saut de maille en  $j$  est par contre parfaitement repérable sur les versions indicielles, amenant une oscillation transversale du nombre de Mach. Ce défaut est presque totalement supprimé par les interpolations géométriques.

La carte de pression statique montre les mêmes défauts que le nombre de Mach. En revanche, la carte de pression totale (Fig. 2.10) apporte beaucoup plus d'informations. On rappelle à ce niveau que l'écoulement étant non visqueux et sans paroi mobile, la pression totale doit théoriquement

rester constante. Le niveau de référence est  $P_t^{ref} = 100000 Pa$ . Toute variation de la pression autour de ce niveau sera donc assimilable à l'erreur numérique induite, entre autre, par l'interpolation.

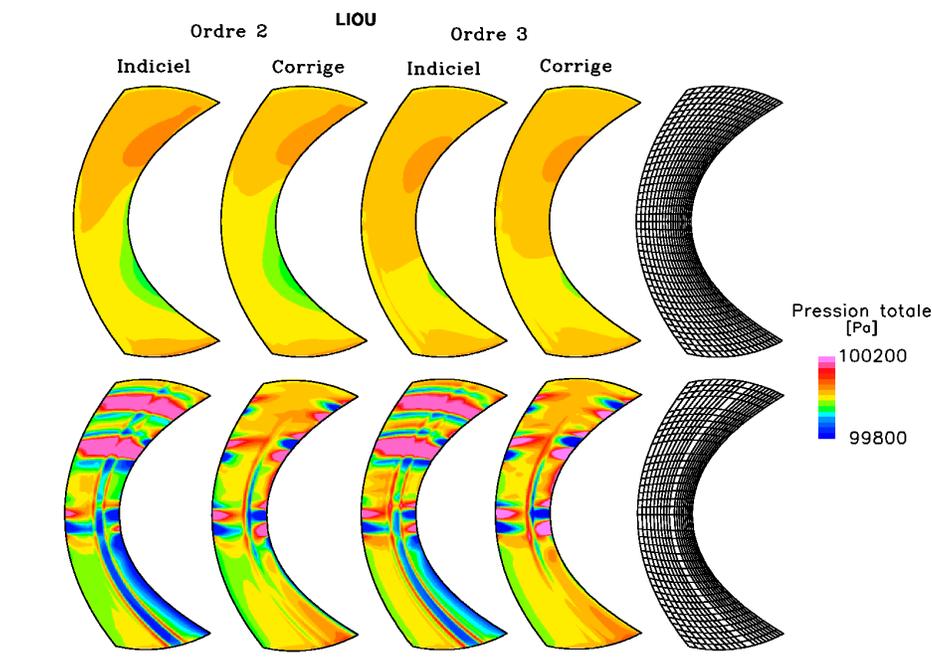


FIG. 2.10 – Cas test Ringleb - Pression Totale  $P_t$ - maillage de référence et maillage déraffiné

On commencera par remarquer que pour le maillage standard, on observe déjà une faible variation de  $P_t$ , les schémas d'ordre 3 étant toutefois plus proches de la solution théorique que les schémas d'ordre 2. Pour un même ordre de reconstruction, les approches indicielles ou géométriques donnent un résultat sensiblement identique. On peut en conclure que l'erreur observée à ce niveau n'est pas liée à la technique d'interpolation. Elle est due aux approximations qui sont faites lors de la discrétisation du problème et au schéma spatial utilisé (schéma de Liou)

On constate tout de suite que les versions corrigées donnent un bien meilleur résultat que les versions indicielles, tant pour le second que pour le troisième ordre.

Au niveau des deux sauts de maille de la partie haute, les versions indicielles génèrent un saut important de pression, avec une amplitude dépassant 200 Pa dans deux cas. A l'inverse, les versions géométriques ne génèrent aucune erreur notable en milieu de veine. Seules les zones aux parois présentent une oscillation de  $P_t$  dans la direction de l'écoulement. Dans la direction transversale, les versions corrigées donnent aussi un meilleur résultat au niveau du saut. On observe néanmoins une seule oscillation au passage du trou, laquelle reste néanmoins très largement inférieure à l'erreur générée par les interpolations indicielles à ce niveau. L'erreur générée a presque disparu au niveau du plan de sortie, à la différence des versions indicielles pour lesquelles on observe un "sillage" d'erreur qui se propage du plan amont au plan aval.

On remarque néanmoins que les schémas corrigés semblent un peu moins bons au niveau de la paroi au voisinage des trous. Sur la paroi intérieure, on observe, au niveau du trou au col, des oscillations de plus forte amplitude, mais elles ne sont en revanche pas suivies d'une zone de basse pression convectée jusqu'à la sortie comme on en voit une dans les cas indiciels.

De manière plus générale, toutes les perturbations apparaissant au niveau des parois sont dues à une mauvaise discrétisation conduisant à une mauvaise évaluation de la courbure.

On considère maintenant le maillage déformé, pour lequel, rappelons-le, les premières mailles au niveau des parois n'ont pas été modifiées. Le champ de pression totale associé au maillage de référence et au maillage déformé est représenté dans la figure suivante (Fig. 2.11).

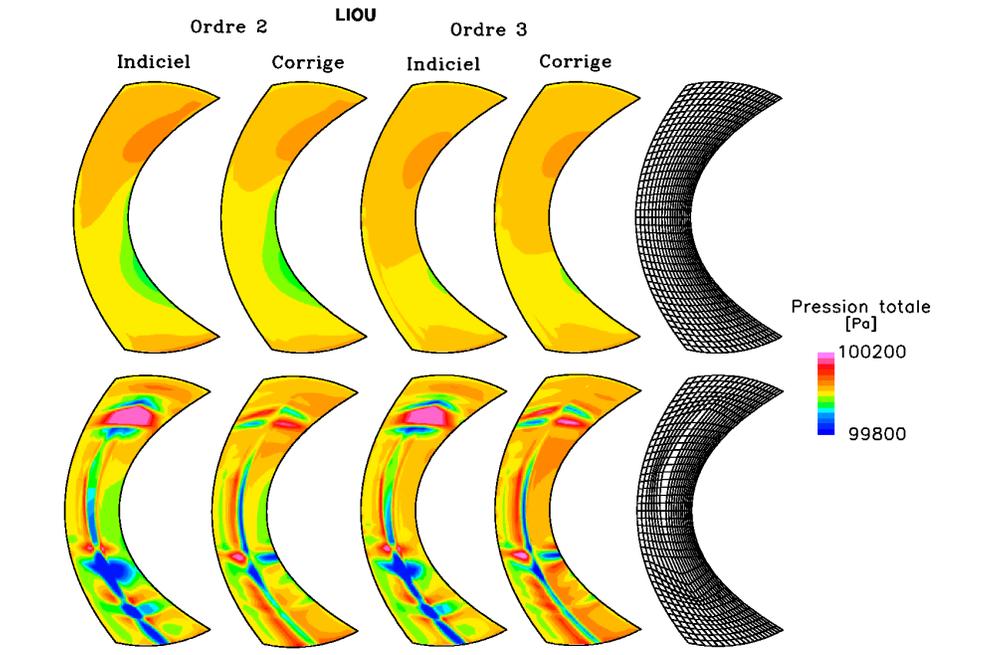


FIG. 2.11 – Cas test Ringleb - Pression Totale  $P_t$ - maillage de référence et maillage déformé

On remarque que les oscillations qui apparaissaient le long de l'écoulement dans le maillage déraffiné ont disparu. En contrepartie, on assiste à une dégradation des conditions en milieu de veine, aussi bien pour les interpolations indicielles que géométriques. La supériorité de ces dernières reste néanmoins évidente. Le seul point problématique est l'apparition d'une erreur rattachée à la déformation transversale et se convectant jusqu'au plan de sortie. Le défaut est observable pour toutes les interpolations, ce qui peut laisser penser que la qualité du maillage est trop insuffisante pour pouvoir simuler correctement un écoulement, quelle que soit l'interpolation d'ordre inférieur ou égal à trois.

En premier lieu, on peut remarquer que la déformation induit un certain cisaillement des mailles et de brusques changements de direction des lignes de maillage. Compte tenu des hypothèses qui prévalent lors de la construction des interpolateurs (on suppose en particulier que l'écoulement est monodimensionnel), l'erreur induite par ces changements ne pourra être réduite significativement, même avec une interpolation géométrique.

D'autre part, le problème vient peut-être aussi d'une taille de maille beaucoup trop grande pour pouvoir capter correctement les variations du champ aérodynamique avec un schéma d'ordre inférieur ou égal à trois. Il conviendrait alors de tester une interpolation d'ordre quatre (ou plus), mais elle reste à définir.

Au travers de ces deux exemples, on montre bien que l'interpolation géométrique permet un gain

substantiel de précision dans le cas de maillage avec des rapports importants de taille de mailles. Les formulations corrigées sont donc bien les bonnes. Toutefois, on soulignera que l'utilisation d'une interpolation géométrique ne permet pas de s'affranchir de toutes les contraintes de construction du maillage. Ce dernier doit rester suffisamment fin pour pouvoir capter les structures de l'écoulement, et on doit aussi limiter autant que possible les variations brusques de direction des lignes de maillage.

Enfin, on précisera que l'emploi d'une formulation géométrique peut parfois s'accompagner d'une déstabilisation du schéma spatial. Comme elle est plus précise que la formulation indicelle sur un maillage quelconque, elle génère aussi moins d'erreurs et donc de dissipation numérique. Il se peut alors que des instabilités numériques apparaissent.

## 2.4.6 Généralisation des limiteurs

### 2.4.6.1 Limiteurs de flux

Pour généraliser la notion de limiteur aux maillages non uniformes, on adopte une approche légèrement différente de celle présentée en (2.4.4). Waterson et Deconinck [192] proposent une très bonne revue des techniques actuelles. En se basant sur un formalisme introduit par Roe [157], ils définissent des *limiteurs de flux*  $\Psi$  tels que, par exemple, l'état à droite de l'interface s'écrive :

$$q_{\xi^i - \frac{1}{2}}^R = q_{\xi^i} - \frac{\Delta x}{2} \Psi(r) \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\xi^i + \frac{1}{2}} \quad (2.106)$$

où :

$$r = \frac{\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\xi^i - \frac{1}{2}}}{\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\xi^i + \frac{1}{2}}} \quad (2.107)$$

avec  $\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\xi^i \pm \frac{1}{2}}$  définie de manière centrée autour de l'interface  $\xi^i \pm \frac{1}{2}$  (Fig. 2.12)

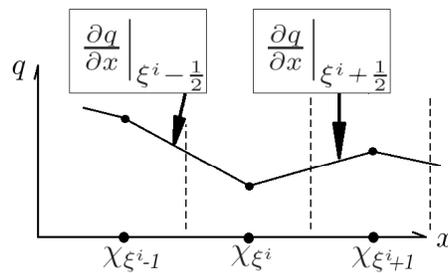


FIG. 2.12 – Définition des grandeurs pour les limiteurs de flux

et :

$$\Delta x = x_{\xi^i + \frac{1}{2}} - x_{\xi^i - \frac{1}{2}} \quad (2.108)$$

Avec ce formalisme, Waterson et Deconinck reformulent l'expression  $MUSCL - \kappa$  (2.64) :

$$\Psi_{MUSCL-\kappa}(r) = \frac{1 + \kappa}{2} r + \frac{1 - \kappa}{2} \quad (2.109)$$

Cette formulation permet de retrouver les reconstructions au second ordre mais elle n'est **pas correcte** pour le cas  $\kappa = \frac{1}{3}$  sur un maillage non uniforme. La formule corrigée  $\kappa = 1/3$  donnée en (2.97) s'écrit en revanche très simplement dans ce cadre :

$$\Psi_{\kappa=\frac{1}{3}}(r) = \frac{(\Delta x_{\xi^i} + \Delta x_{\xi^{i+1}})r + \Delta x_{\xi^{i-1}}}{\Delta x_{\xi^{i-1}} + \Delta x_{\xi^i} + \Delta x_{\xi^{i+1}}} \quad (2.110)$$

Lorsqu'on dépasse le simple cadre de la formulation MUSCL précédemment étudiée, on se rend compte au travers de (2.106) que tous les limiteurs  $\Psi$  sont en fait des interpolateurs à part entière, et non de simples corrections apportées à une formule de reconstruction comme c'est le cas des limiteurs de pente décrits. Cette conception présente l'avantage de clarifier le fonctionnement de l'interpolation et notamment la gestion de l'ordre de reconstruction. En règle générale, les limiteurs sont définis de manière non-linéaire. Cette non-linéarité est obligatoire pour maintenir la monotonie (condition nécessaire mais pas suffisante), car, selon un théorème célèbre donné par Godunov, le seul schéma linéaire en  $r$  monotone est le schéma du premier ordre.

Cependant, parmi tous les limiteurs recensés par [192], beaucoup, sinon tous, font appel de manière plus ou moins directe à l'expression (2.109). La raison en est assez simple : c'est la seule formulation qui permet de contrôler simplement l'ordre de reconstruction, au moins pour un maillage uniforme.

Les limiteurs de flux doivent par ailleurs satisfaire un certain nombre de conditions afin de garantir un comportement correct. On retiendra en particulier :

- $\Psi(1) = 1$ . Cette condition assure que le limiteur préserve la linéarité d'une fonction. On vérifie aisément que les schémas MUSCL (2.109 - 2.110) satisfont cette condition.
- $\Psi'(0)$  doit être borné pour assurer que l'interpolation sera bornée. En effet,  $r = 0$  est une valeur critique car elle marque la limite en comportement monotone ( $r > 0$ ) et un extremum  $r < 0$ . Les conditions TVD/positivité données dans l'article cité imposent par ailleurs des restrictions supplémentaires sur la valeur de  $\Psi'(0)$ .

Avec le formalisme utilisé, il est évident que les limiteurs de flux doivent être "actifs" seulement pour les valeurs extrêmes de  $r$ ,  $r = 0$  et  $r \rightarrow \infty$ . Dans le cas où  $r \approx 1$ , c'est à dire pour un écoulement ne présentant pas de fortes variations de gradient, un cas de "repos" en quelque sorte, il est souhaitable qu'ils soient assez voisins des schémas de type  $MUSCL - \kappa$ . De cette manière, on peut définir simplement l'ordre d'un limiteur en le comparant avec l'un des interpolateurs MUSCL.

Les limiteurs de flux peuvent être divisés en deux grandes catégories d'implémentation :

- Les limiteurs linéaires par morceaux ("Piecewise-linear") : comme leur nom l'indique, ils sont définis par une succession de segments.
- Les limiteurs définis par une fraction rationnelle ("Polynomial Ratio").

On peut aussi définir une notion de symétrie avec la relation suivante :

$$\Psi_{sym}(r) = \frac{1}{r} \Psi_{sym}(r)$$

Parmi tous les limiteurs *précis au second ordre* présentés par Waterson et Deconinck, on a retenu :

- Limiteur de **Van Albada** :

$$\Psi_{VA}(r) = \frac{r(r+1)}{r^2+1} \quad (2.111)$$

Pour  $r \approx 1$ , ce limiteur est comparable au schéma de Fromm. De fait, on pourra remarquer que cette expression est identique (au  $\varepsilon$  près) à l'utilisation du limiteur de pente "Van Albada" (2.69) couplé avec un schéma de Fromm dans la formule (2.68). En revanche, il ne donne pas d'interpolation au premier ordre pour des extrema, ce qui pose problème quant au caractère TVD du schéma obtenu. Ce limiteur présente l'avantage d'être défini de manière continue.

- **OSP**RE (Optimal Symetric Polynomial Ratio Expression) :

$$\Psi_{OSP}RE(r) = \frac{3r(r+1)}{2(r^2+r+1)} \quad (2.112)$$

Comparativement au limiteur de Van Albada, cette expression permet d'étendre un peu la plage de similitude avec le schéma de Fromm.

- **MUSCL**

$$\Psi_{MUSCL} = \max \left[ 0, \min \left( 2r, \frac{r+1}{2}, 2 \right) \right] \quad (2.113)$$

Comme le limiteur de Van Albada, le limiteur MUSCL imite l'interpolation de Fromm pour  $r \approx 1$ , la différence étant ici que ce limiteur reproduit exactement ce schéma pour  $\frac{1}{3} \leq r \leq 3$

- **UMIST**

$$\Psi_{UMIST} = \max \left[ 0, \min \left( 2r, \frac{1}{4} + \frac{3}{4}r, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}r, 2 \right) \right] \quad (2.114)$$

Le limiteur imite le schéma QUICK ( $\kappa = \frac{1}{2}$ ) pour  $r \leq 1$  et le schéma  $\kappa = -\frac{1}{2}$  pour  $r \geq 1$

- **SMART**

$$\Psi_{SMART} = \max \left[ 0, \min \left( 2r, \frac{1}{4} + \frac{3}{4}r, 2 \right) \right] \quad (2.115)$$

Ce limiteur est relativement proche du "UMIST", mais il reproduit par contre le schéma QUICK pour une plage plus grande :  $\frac{1}{5} \leq r \leq \frac{7}{3}$ . A la différence des limiteurs précédents, il n'est pas symétrique.

- **SMARTER**

$$\Psi_{SMARTER} = (r + |r|) \frac{(3r+1)}{2(r+1)^2} \quad (2.116)$$

Bien qu'ayant un nom proche du "SMART", ce limiteur est défini comme une fraction rationnelle, ce qui donne une expression continue pour  $\Psi$  mais pas pour  $\Psi'$ . Il imite aussi le schéma QUICK pour  $r \approx 1$  et n'est pas symétrique.

Pour les limiteurs précis au troisième ordre (sur un maillage uniforme), on retiendra :

- **Koren** [108]

$$\Psi_{Koren} = \max \left[ 0, \min \left( 2r, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}r, 2 \right) \right] \quad (2.117)$$

L'expression de ce limiteur est relativement proche de celle du "SMART". Cependant, il atteint la précision spatiale au troisième ordre en imitant le schéma  $\kappa = \frac{1}{3}$  pour  $\frac{1}{4} \leq r \leq \frac{5}{2}$

- **SPL-1/3** (Symetric Piecewise-Linear 1/3)

$$\Psi_{SPL-13} = \max \left[ 0, \min \left( 2r, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}r, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}r, 2 \right) \right] \quad (2.118)$$

Le limiteur SPL-1/3 peut être vu comme une extension du UMIST au troisième ordre. Il est similaire à l'interpolation  $\kappa = \frac{1}{3}$  pour  $\frac{1}{4} \leq r < 1$  et à la formulation  $\kappa = -\frac{1}{3}$  pour  $1 < r \leq 4$ .

- **H-CUI** (Harmonic CUI)

$$\Psi_{HCUI} = \frac{3(r + |r|)}{2(r + 1)^2} \quad (2.119)$$

Comme les autres limiteurs d'ordre 3, celui-ci imite le schéma CUI au voisinage de  $r = 1$ .

On voit que nombre des limiteurs présentés sont symétriques. Il n'existe pas de justification établie de cette propriété. Cependant, Waterson et Deconinck ont constaté au travers de tests que le schéma de Fromm, le seul schéma *MUSCL* -  $\kappa$  symétrique, donnait des résultats étonnamment bons comparativement aux schémas plus évolués dont les schémas du troisième ordre. Ils supposent que ce bon comportement est lié à la propriété de symétrie.

#### 2.4.6.2 Application des limiteurs de flux à des cas tests

**Ringleb** On reprend le même cas test que celui utilisé pour la validation des interpolations géométriques (p. 31). On retrouve en particulier trois maillages, celui de référence, le maillage déraffiné et le maillage déformé.

On commencera par comparer la formulation MUSCL proposée par Waterson et Deconinck (2.109) pour  $\kappa = \frac{1}{3}$  et l'interpolation géométrique MUSCL du troisième ordre (2.110). Les cartes de pression totale pour ces deux formulations appliquées aux maillages déraffinés et déformés sont données en figure (Fig. 2.13).

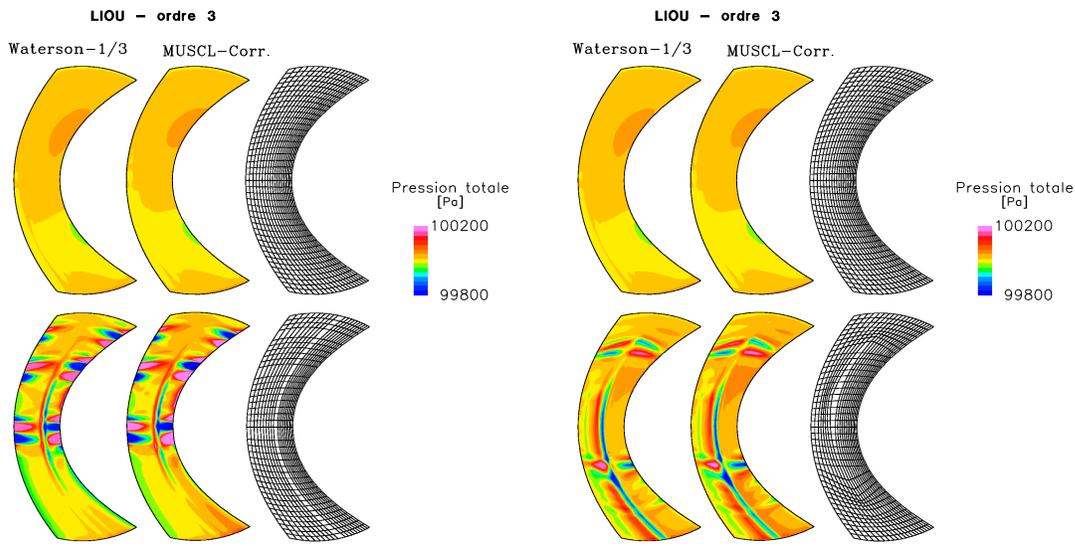


FIG. 2.13 – Interpolation  $\kappa = 1/3$  de Waterson et interpolation MUSCL du troisième ordre - Cas Ringleb -  $P_t$

On voit que dans les deux configurations de maillage, l'interpolation MUSCL et celle de Waterson et Deconinck donnent sensiblement la même erreur. En évaluant l'erreur moyenne sur la veine, on trouve à chaque fois des valeurs comparables, si ce n'est égales. Il est un peu décevant de constater que la formulation MUSCL, la seule théoriquement du troisième ordre, donne des résultats assez comparables à ceux fournis par une formulation du second ordre sur un maillage quelconque. Cela peut signifier que les autres erreurs, générées par le traitement global des équations RANS, sont plutôt du second ordre. De plus, le cas test n'est peut être pas assez "difficile" pour faire apparaître des différences.

Considérons maintenant les limiteurs du second ordre. On rappelle qu'il s'agit des limiteurs de Van Albada, MUSCL, OSPRE, SMART SMARTER et UMIST. L'observation des champs de pression statique et nombre de Mach ne fait apparaître aucune différence entre ces limiteurs pour le maillage standard. On représente sur la figure (Fig. 2.14) les champs de pression totale obtenus pour le maillage standard. De gauche à droite et de haut en bas, on a les cas : ordre 2 sans limiteur (Fromm), Van Albada, MUSCL, OSPRE, SMART, SMARTER, UMIST.

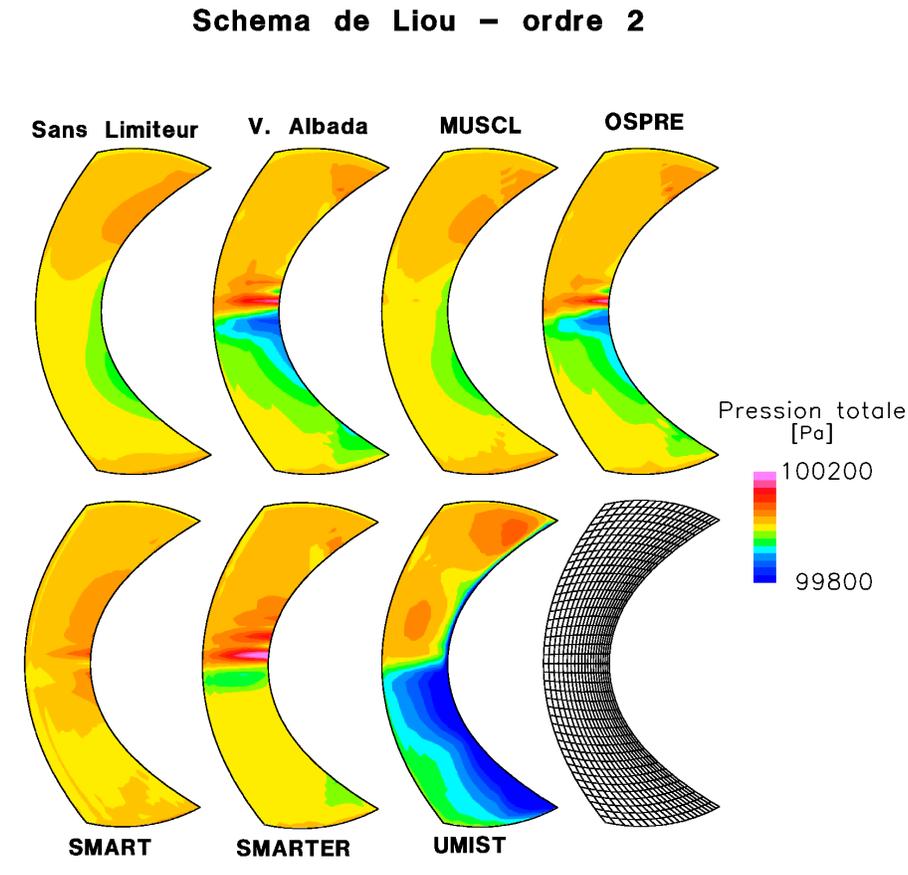


FIG. 2.14 – Cas Ringleb standard-  $P_t$  - Comparaison des limiteurs du second ordre

On remarque tout de suite que les limiteurs de Van Albada, OSPRE et UMIST sont très dissipatifs. A partir du col, la pression totale chute assez fortement, jusqu'à 160 Pa pour le UMIST. A l'inverse, les limiteurs SMART, MUSCL et dans une certaine mesure SMARTER donnent de bons

résultats. Le MUSCL est celui qui donne la solution la plus proche du cas non limité, ce qui est cohérent avec sa définition (il imite le schéma de Fromm).

Le col est un point critique, puisqu'à cet endroit, la variation des grandeurs aérodynamiques le long de l'écoulement s'inverse, ce qui correspond au cas  $r \leq 0$ . Le traitement de cette valeur particulière est problématique puisqu'elle introduit une ou plusieurs oscillations de  $P_t$  pour tous les limiteurs sauf le MUSCL. Toutefois, le problème est assez complexe à expliquer puisque le limiteur MUSCL comme le UMIST ou le SMART prennent la même valeur en ce point, avec des conséquences très différentes. Ces oscillations ne dépendent pas non plus de la symétrie ou de la définition, soit linéaire par morceaux, soit continue.

On applique ensuite ces différents limiteurs à des maillages fortement non uniformes. On ne représentera que le cas du maillage déformé, le maillage déraffiné générant des comportements assez similaires. La figure (Fig. 2.15) illustre ce cas de figure, avec la même structuration des visualisations que la figure (Fig. 2.14).

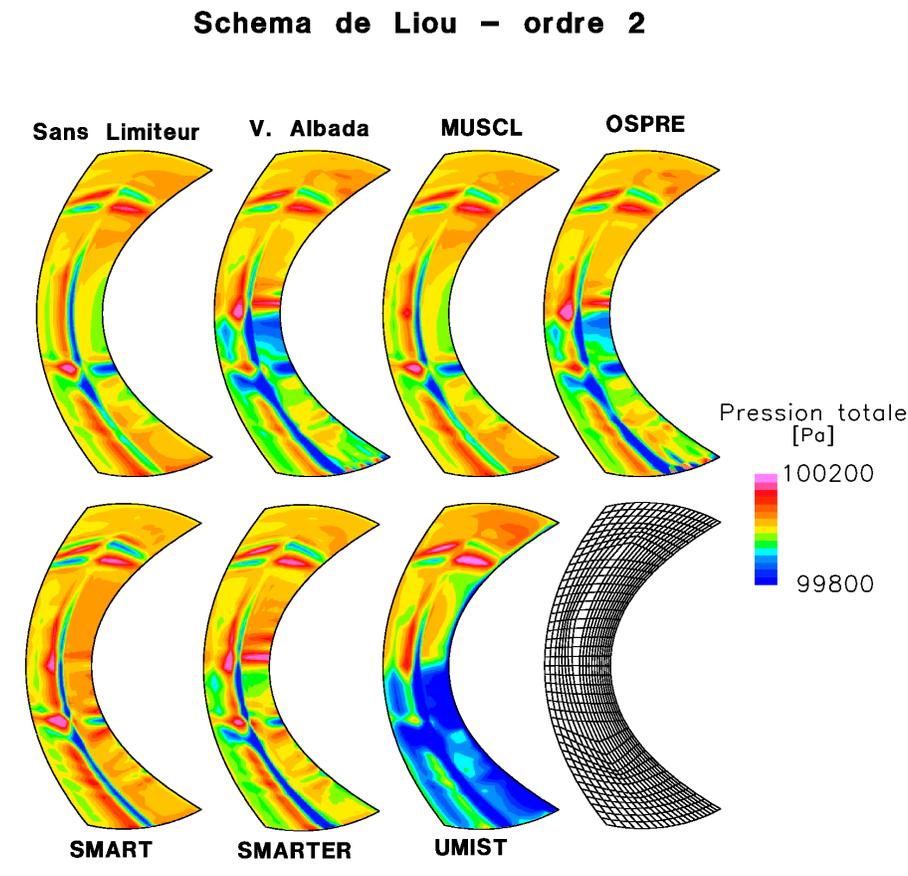


FIG. 2.15 – Cas Ringleb déformé-  $P_t$  - Comparaison des limiteurs du second ordre

On retrouve les défauts précédemment constatés, à savoir une sur-dissipation pour les limiteurs Van Albada, OSPRE et UMIST. La formule SMARTER semble aussi être dissipée fortement, notamment dans la zone en aval du col. À l'inverse, MUSCL et SMART continuent de bien se comporter, le MUSCL restant une fois de plus proche du schéma non limité. On notera que le problème

d'oscillation dans la direction transversale, qui apparaît à la suite de la déformation dans cette même direction, est aussi visible pour des grandeurs telles que le nombre de Mach et la pression statique dans les cas Van Albada, OSPRE, SMARTER et UMIST. Malgré la forte dissipation qu'ils génèrent en aval du col, ces limiteurs ne sont pas capables d'atténuer suffisamment les variations parasites.

On représente enfin les champs obtenus avec les limiteurs du troisième ordre. La figure (Fig. 2.16) montre sur la première ligne les champs de pression totale obtenus avec, de gauche à droite, l'interpolateur du "troisième" ordre ( $\kappa = 1/3$ ) donné par Waterson et Deconinck, le limiteur H-CUI, le limiteur KOREN et le SPL-1/3 sur le maillage de référence, et sur la deuxième ligne les cas relatifs au maillage déformé.

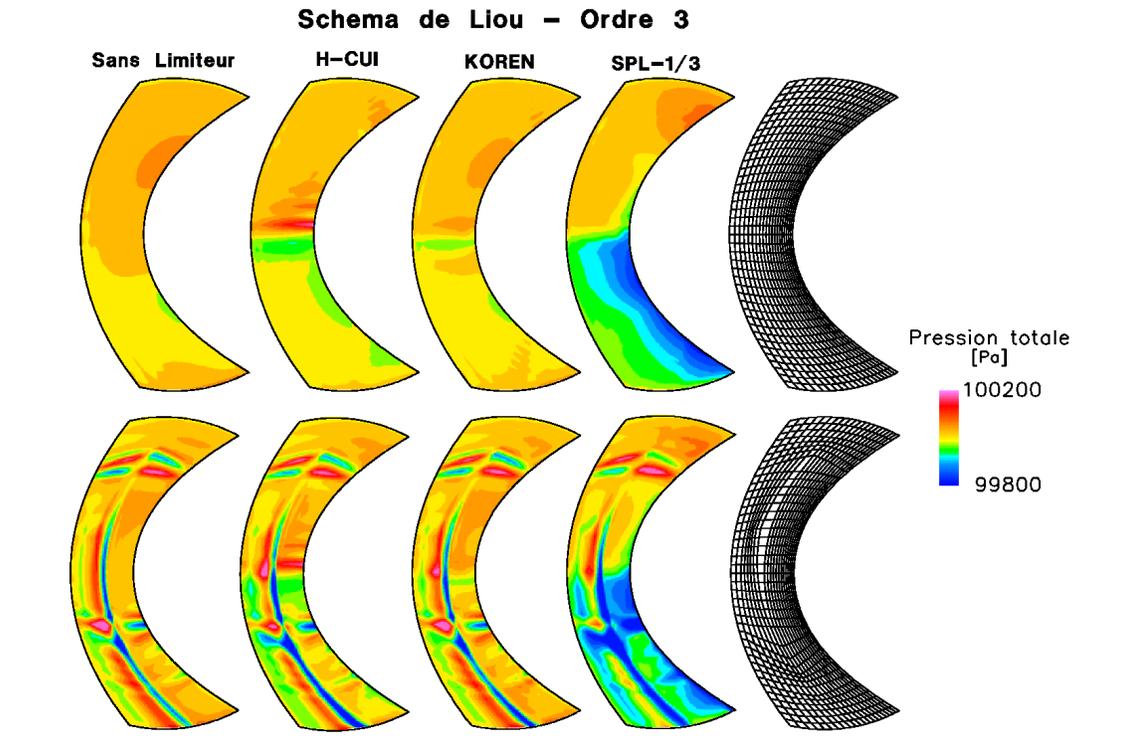


FIG. 2.16 – Cas Ringleb -  $P_t$  - Comparaison des limiteurs du troisième ordre

Tous les limiteurs introduisent à nouveau des oscillations au niveau du col. Le SPL-1/3 est quant à lui fortement dissipatif, la zone affectée étant une fois de plus celle en aval du col. On remarque que pour le maillage standard comme pour le maillage déformé, le meilleur limiteur, au sens où il minimise l'erreur, est le KOREN.

L'examen des champs de pression statique et de nombre de Mach ne révèle aucune différence notable entre les différents limiteurs.

**Convection d'un scalaire passif** Le deuxième cas test envisagé est la convection bidimensionnelle d'un profil de scalaire passif par un écoulement turbulent. Ce cas est illustré sur la figure suivante (Fig. 2.17)

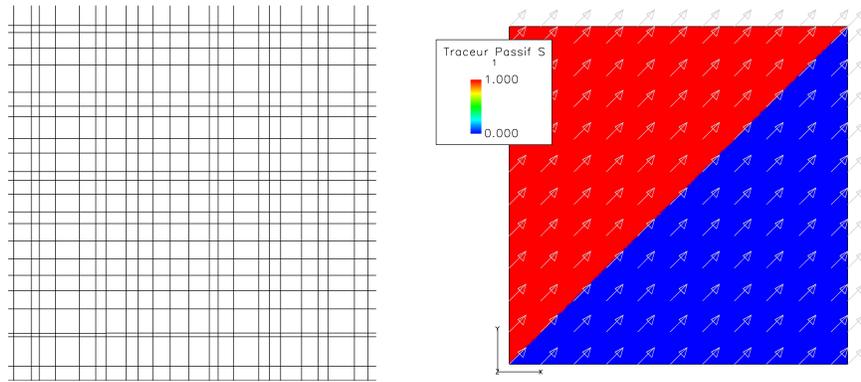


FIG. 2.17 – Convection d'un scalaire passif - détail du maillage et champ initial

On convecte diagonalement une distribution de scalaire passif sur un maillage presque cartésien uniforme. Cependant, comme le montre le détail sur la figure (Fig. 2.17), la répartition des points dans les deux directions est soumise à une perturbation aléatoire, de sorte que la taille de maille n'est pas constante. Le champ initial de scalaire passif est défini par deux états, un pour la partie triangulaire supérieure du maillage, et zéro pour la partie inférieure. Le champ de vitesse, uniforme, est colinéaire avec la diagonale ainsi définie.

Le champ aérodynamique est considéré comme étant dans les conditions standard de température et de pression. La vitesse le long de la diagonale est  $V = 50 \text{ m.s}^{-1}$ . Le traitement de la convection du scalaire passif est assuré en utilisant une interpolation décentrée avec ou sans limiteur de flux.

On trace ensuite les coupes selon une des deux coordonnées du profil de scalaire passif. Les courbes suivantes s'appuient sur une coupe effectuée à  $y$  constant, à mi-largeur. Le profil théorique est une marche verticale.

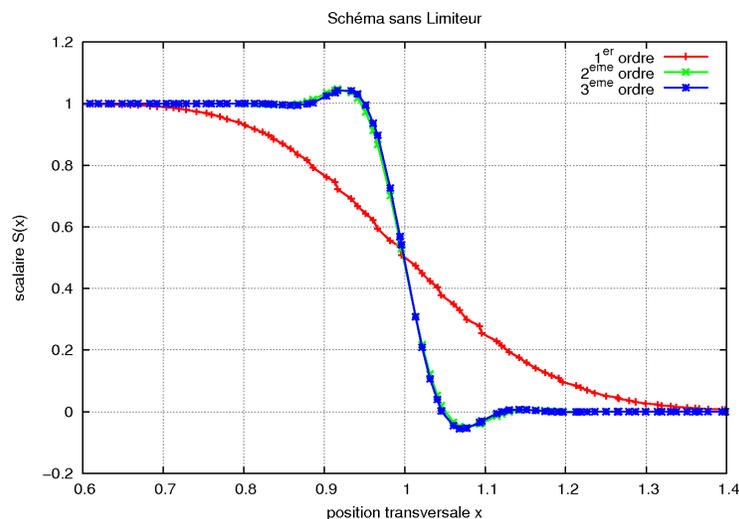


FIG. 2.18 – Comparaison des profils du scalaire pour les schémas non limités

On constate sur la courbe (Fig. 2.18) que le profil de scalaire est complètement lissé par une

interpolation au premier ordre. A l'inverse, les interpolations au second et troisième ordre préservent l'essentiel du profil théorique, avec une pente encore forte. Cependant, ils introduisent aussi une sous-estimation et une sur-estimation de part et d'autre de la marche. On retrouve ici graphiquement le théorème de Godunov [157] qui stipule qu'une interpolation linéaire (au sens de la variable  $r$ ) d'ordre supérieur à un ne peut être monotone. L'interpolation au second ordre donne un profil très voisin de celui au troisième ordre, ce dernier restant toutefois légèrement plus abrupt.

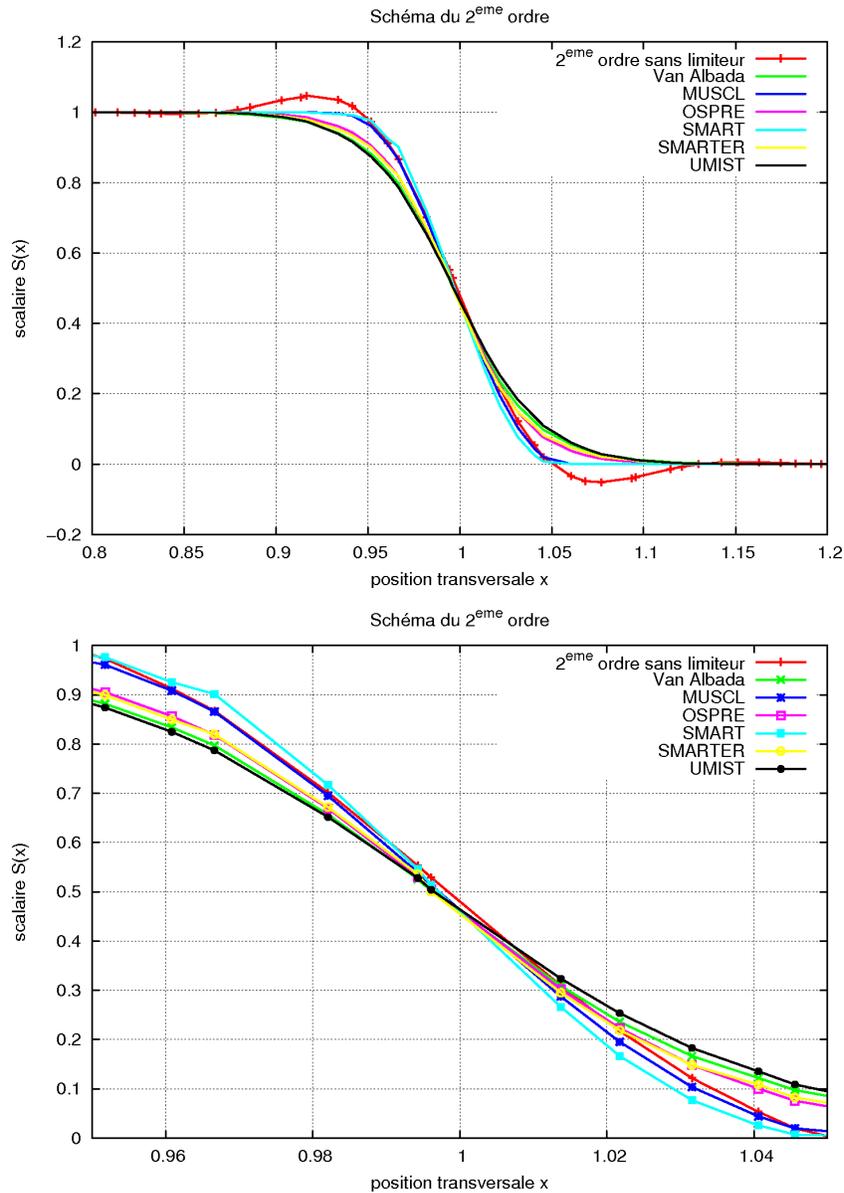


FIG. 2.19 – Comparaison des profils de scalaire pour les limiteurs du second ordre

La figure (Fig. 2.19) montre les profils obtenus avec les différents limiteurs du second ordre ainsi que l'interpolation non limitée. Deux limiteurs se distinguent d'emblée. Il s'agit du MUSCL et du SMART, lesquels donnent des profils quasiment confondus avec le profil non limité à l'exception

des deux petites sur/sous-prédictions de ce dernier. Le SMART donne même un profil un peu plus vertical.

A l'opposé, les autres limiteurs tendent à lisser le profil, le plus mauvais étant, sans surprise, le UMIST. Parmi ces limiteurs "médiocres", le OSPRE est le meilleur.

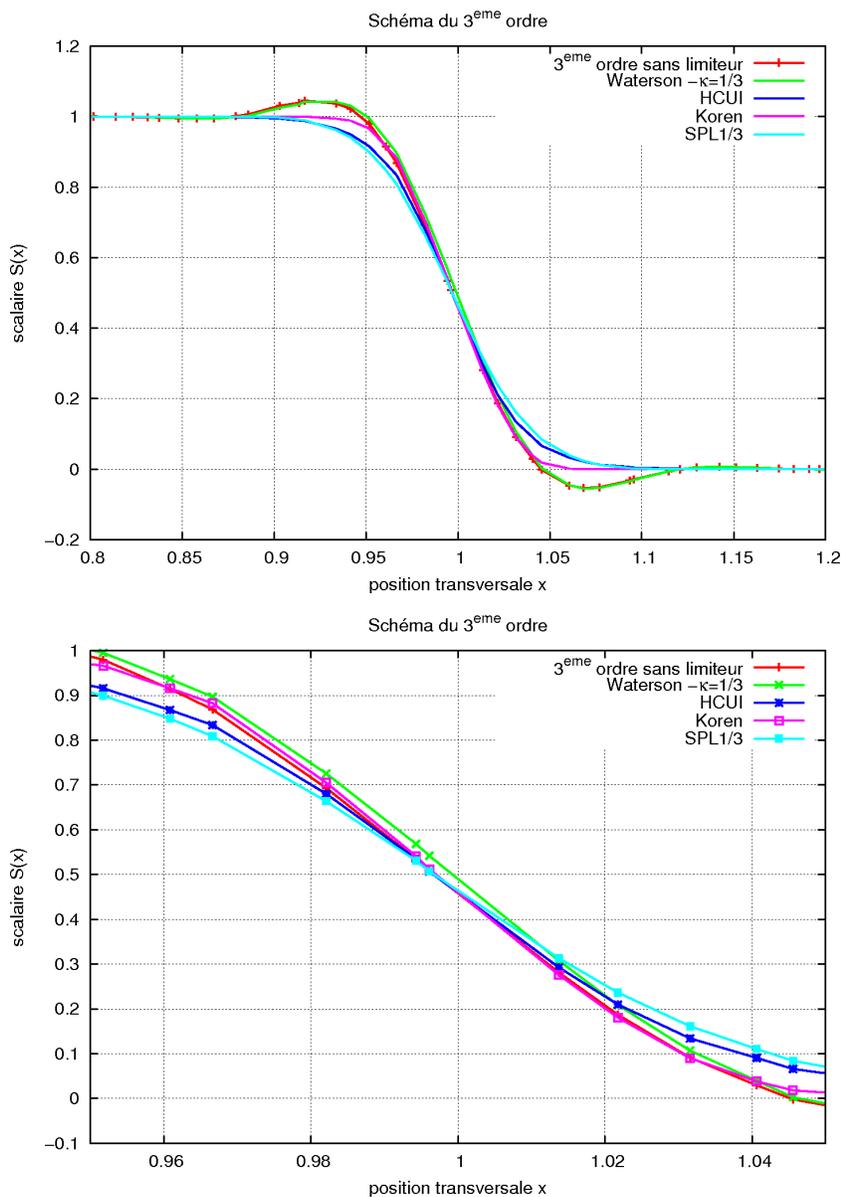


FIG. 2.20 – Comparaison des profils du scalaire pour les limiteurs du troisième ordre

On montre sur la figure (Fig. 2.20) les profils obtenus pour les schémas d'ordre 3. On y a tracé le profil correspondant à une interpolation du troisième ordre et celui donné par la formule de Waterson et Deconinck pour ce même ordre. On retrouve la hiérarchie précédemment observée : le limiteur SPL-1/3 reste le plus diffusif, le Koren étant le meilleur. De la même manière, les deux

interpolations non limitées donnent des résultats sensiblement identiques.

**Conclusion sur l'emploi des limiteurs** On vient de voir au travers de deux exemples que les différents limiteurs ont des spécificités marquées. Par exemple, le limiteur au second ordre UMIST est systématiquement plus dissipatif que les autres. Il pourra donc être employé pour stabiliser une convergence. Si on recherche à l'inverse une bonne précision, le MUSCL ou le SMART semblent être de bons candidats. Ils sont faiblement dissipatifs et imitent très bien les schémas non limités, tout en corrigeant la monotonie.

Pour le traitement au troisième ordre en espace, le limiteur Koren est de loin le plus précis. Le plus dissipatif est le SPL-1/3.

## 2.5 Discrétisation spatiale des flux convectifs - schémas centrés

### 2.5.1 Schéma spatial centré

Les schémas centrés sont une alternative possible pour traiter les termes convectifs des équations de Navier-Stokes discrétisées (2.37). On a vu que les schémas décentrés sont bien adaptés aux écoulements transsoniques car ils sont construits pour privilégier une direction de propagation. Ils sont en outre naturellement et suffisamment dissipatifs pour être stables, ce qui constitue un avantage non négligeable. En revanche, ils sont un peu moins pertinents pour les écoulements à basse vitesse. Ils sont alors trop diffusifs, introduisant de fait une erreur numérique qui est parfois non négligeable.

A l'opposé, les schémas centrés ne distinguent, de par leur structure, aucune direction particulière. Ils sont à ce titre couramment employés pour des écoulements à basse vitesse et donc faiblement compressibles, l'information se propageant alors indifféremment dans toutes les directions de l'espace. Ils sont en outre naturellement non dissipatifs, ce qui constitue à la fois une force et un défaut. Cette propriété est particulièrement intéressante pour obtenir une bonne précision, mais elle rend aussi le schéma naturellement instable. Il faut alors ajouter une dissipation numérique artificielle pour éviter la divergence. La différence fondamentale avec les schémas décentrés réside dans le fait que cette fois, il est possible de contrôler directement l'importance et l'ordre de cette dissipation.

Ces schémas ont été popularisés par Jameson. La version la plus classique, connue sous l'acronyme JST (Jameson, Smith, Turckel) [90], a été exprimée pour les maillages structurés, avec des extensions ultérieures sur des maillages non-structurés [87, 129]. Le flux à l'interface est évalué à partir de la valeur du champ interpolé de manière centrée :

$$\mathbf{F}_c^i(\xi^i - \frac{1}{2}) = \mathbf{F}_c^i(\mathbf{q}_{\xi^i - \frac{1}{2}}) \quad (2.120)$$

où  $\mathbf{F}_c^i(\mathbf{q})$  est exprimé comme dans l'équation (2.37) (p. 13).

La reconstruction de  $\mathbf{q}_{\xi^i - \frac{1}{2}}$  peut se faire classiquement selon deux ordres de précision distincts :

- **2eme ordre** : il s'agit de l'approche initialement proposée par Jameson. On a alors, pour un maillage uniforme :

$$\mathbf{q}_{\xi^i - \frac{1}{2}}^{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{\xi^i - 1} + \mathbf{q}_{\xi^i}) \quad (2.121)$$

L'expression précédente correspond à une moyenne arithmétique simple du champ de part et d'autre de l'interface. Un autre point de vue possible est de considérer cette expression comme

le résultat de l'application d'un schéma centré autour de l'interface tel que défini avec  $\kappa = 1$  pour une approche MUSCL par exemple.

• **4eme ordre**

$$\mathbf{q}_{\xi^i - \frac{1}{2}}^{IV} = -\frac{1}{12}\mathbf{q}_{\xi^i - 2} + \frac{7}{12}\mathbf{q}_{\xi^i - 1} + \frac{7}{12}\mathbf{q}_{\xi^i} - \frac{1}{12}\mathbf{q}_{\xi^i + 1} \quad (2.122)$$

Les deux expressions précédentes peuvent être regroupées sous la forme unique :

$$\mathbf{q}_{\xi^i - \frac{1}{2}} = -\frac{\hat{\sigma}}{12}\mathbf{q}_{\xi^i - 2} + \frac{\hat{\sigma} + 6}{12}\mathbf{q}_{\xi^i - 1} + \frac{\hat{\sigma} + 6}{12}\mathbf{q}_{\xi^i} - \frac{\hat{\sigma}}{12}\mathbf{q}_{\xi^i + 1} \quad (2.123)$$

où  $\sigma$  contrôle l'ordre,  $\sigma = 0$  générant le schéma précis au second ordre et  $\sigma = 1$  le schéma du quatrième ordre. Le choix de l'ordre de reconstruction est limité par le centrage du schéma. Plus concrètement, l'interpolation devra se baser sur autant de points à gauche qu'à droite de l'interface, ce qui implique nécessairement une interpolation définie comme un polynôme d'ordre impair et donc une précision spatiale paire.

L'adjonction de la dissipation numérique s'effectue au moyen de dérivées spatiales secondes et quatrièmes [90] du champ aérodynamique. La dissipation est initialement conçue pour éliminer les instabilités de type pair/impair, ce qui justifie en partie l'utilisation de dérivées secondes ou d'ordre supérieur.

On introduit donc un flux dissipatif numérique  $\mathbf{F}_d^i$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_d^i(\xi^i - \frac{1}{2}) = \sqrt{g} (V^i + c \|\vec{a}^i\|)_{\xi^i - \frac{1}{2}} & \left[ +\frac{1}{2}\varepsilon_2(\mathbf{q}_{\xi^i} - \mathbf{q}_{\xi^i - 1}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{8}\varepsilon_4(\mathbf{q}_{\xi^i + 1} - 3\mathbf{q}_{\xi^i} + 3\mathbf{q}_{\xi^i - 1} - \mathbf{q}_{\xi^i - 2}) \right] \end{aligned} \quad (2.124)$$

Le premier terme entre crochets, pondéré par  $\varepsilon_2$ , correspond à la dérivée spatiale première de  $\mathbf{q}$  évaluée de manière centrée autour de l'interface. Le second terme, pondéré par  $\varepsilon_2$ , est pour sa part la dérivée spatiale troisième.

En supposant que les grandeurs  $(V^i + c \|\vec{a}^i\|)_{\xi^i \pm \frac{1}{2}}$  ne varient pas d'une interface à l'autre, lorsqu'on écrit le bilan des flux diffusifs sur la cellule, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_d^i(\xi^i + \frac{1}{2}) - \mathbf{F}_d^i(\xi^i - \frac{1}{2}) = \sqrt{g} (V^i + c \|\vec{a}^i\|)_{\xi^i} & \left[ +\varepsilon_2 \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{\xi^i + 1} - 2\mathbf{q}_{\xi^i} + \mathbf{q}_{\xi^i - 1}) \right. \\ & \left. + \varepsilon_4 \frac{1}{8}(\mathbf{q}_{\xi^i + 2} - 4\mathbf{q}_{\xi^i + 1} + 6\mathbf{q}_{\xi^i} - 4\mathbf{q}_{\xi^i - 1} + \mathbf{q}_{\xi^i - 2}) \right] \end{aligned} \quad (2.125)$$

On retrouve alors que les coefficients  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_4$  pondèrent respectivement des dérivées d'ordre deux et d'ordre quatre évaluées de manière centrée autour du nœud  $\xi^i$ .

En pratique, ces coefficients sont imposés par l'utilisateur pour régler le niveau de dissipation du second et quatrième ordre. Jameson [84] propose en outre de relier ces deux coefficients au moyen de la formule :

$$\varepsilon_4 = \max[0, (K - \varepsilon_2)]$$

$K$  étant une constante arbitraire et  $\varepsilon_2$  étant automatiquement déterminé à partir du champ en se basant sur la dérivée spatiale seconde de pression statique. Cette formulation n'a pas toujours

donné de bons résultats et elle a été abandonnée dans Turb'Flow au profit d'un contrôle total par l'utilisateur.

Au final, on exprime le flux complet à l'interface comme la somme du flux convectif et du flux dissipatif :

$$\mathbf{F}_c^i(\xi^i - \frac{1}{2}) = \mathbf{F}_c^i(\mathbf{q}_{\xi^{i-\frac{1}{2}}}) + \mathbf{F}_d^i(\xi^i + \frac{1}{2}) \quad (2.126)$$

### 2.5.2 Généralisation du schéma centré aux maillages non uniformes

Les schémas centrés présentés jusqu'à présent sont ceux implémentés classiquement dans le code Turb'Flow. Cette partie sera consacrée au développement de schémas centrés adaptés aux maillages non uniformes. Ces développements ont été réalisés dans le cadre de cette thèse.

Toutes les formules qui viennent d'être présentées, ainsi que l'interprétation qui a pu en être faite, ne sont valables que dans le cas d'un maillage uniforme. Par exemple, l'expression d'une dérivée seconde sous la forme indicielle  $\frac{1}{2}(\mathbf{q}_{\xi^{i+1}} - 2\mathbf{q}_{\xi^i} + \mathbf{q}_{\xi^{i-1}})$  n'a de sens que pour des tailles constantes de maille dans la directions  $\xi^i$ .

L'introduction d'un maillage non uniforme implique donc nécessairement un certain nombre de corrections pour éviter l'apparition d'erreurs numériques indésirables. On se place ici dans le même cadre que l'approche effectuée pour généraliser la formulation MUSCL (p. 23). La généralisation de l'interpolation associée au schéma centré peut être effectuée de la même manière que celle pour les schémas décentrés.

#### 2.5.2.1 Correction de l'interpolation du champ au second ordre

L'interpolation étant précise au second ordre, cela revient à considérer que  $\mathbf{q}_{\xi^{i-\frac{1}{2}}}^{II}$  est déterminée via une fonction linéaire :

$$q^{II}(x_{\xi^i}) = Ax_{\xi^i} + B \quad (2.127)$$

telle que :

$$\begin{cases} \int_{\xi^{i-\frac{1}{2}}}^{\xi^i+\frac{1}{2}} q^{II}(x) dx = \mathbf{q}_{\xi^i} \\ \int_{\xi^{i-\frac{3}{2}}}^{\xi^i-\frac{1}{2}} q^{II}(x) dx = \mathbf{q}_{\xi^{i-1}} \end{cases} \quad (2.128)$$

On pose  $\Delta_{\xi^i} = x_{\xi^{i+1}} - x_{\xi^i}$ .

En résolvant le système (2.128) pour  $A$  et  $B$ , on trouve au final :

$$\mathbf{q}_{\xi^{i-\frac{1}{2}}}^{II} = \mathbf{q}_{\xi^i} \left( 1 - \frac{0.5(\Delta_{\xi^i} + \Delta_{\xi^{i-1}})}{\frac{1}{4}\Delta_{\xi^{i+1}} + \frac{1}{2}\Delta_{\xi^{i-1}} + \frac{1}{4}\Delta_{\xi^{i-2}}} \right) + \mathbf{q}_{\xi^{i-1}} \frac{0.5(\Delta_{\xi^i} + \Delta_{\xi^{i-1}})}{\frac{1}{4}\Delta_{\xi^{i+1}} + \frac{1}{2}\Delta_{\xi^{i-1}} + \frac{1}{4}\Delta_{\xi^{i-2}}} \quad (2.129)$$

On peut simplifier cette formule en remarquant que pour une distribution linéaire  $q(x)$ , la valeur en  $x$  de la fonction est égale à la valeur moyenne de cette même fonction sur une cellule au niveau du barycentre de cette dernière. En reprenant les notations utilisées pour le MUSCL, on trouve :

$$\mathbf{q}_{\xi^{i-\frac{1}{2}}}^{II} = \mathbf{q}_{\xi^i} \left( 1 - \frac{\chi_{\xi^i} - x_{\xi^{i-\frac{1}{2}}}}{\chi_{\xi^i} - \chi_{\xi^{i-1}}} \right) + \mathbf{q}_{\xi^{i-1}} \frac{\chi_{\xi^i} - x_{\xi^{i-\frac{1}{2}}}}{\chi_{\xi^i} - \chi_{\xi^{i-1}}} \quad (2.130)$$

Ce résultat est illustré sur la figure (Fig. 2.21).

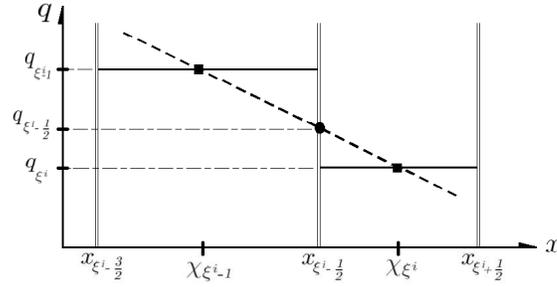


FIG. 2.21 – Interpolation généralisée pour un schéma centré au second ordre

### 2.5.2.2 Correction de l'interpolation du champ au quatrième ordre

On cherche ici à déterminer  $\mathbf{q}_{\xi^i - 1/2}^{II}$  comme l'expression d'une cubique  $q^{IV}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ . En appliquant une nouvelle fois l'identification des intégrales sur les cellules, on trouve le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\xi^i - 5/2}^{\xi^i - 3/2} q^{IV}(x) dx = \mathbf{q}_{\xi^i - 2} \\ \int_{\xi^i - 3/2}^{\xi^i - 1/2} q^{IV}(x) dx = \mathbf{q}_{\xi^i - 1} \\ \int_{\xi^i - 1/2}^{\xi^i + 1/2} q^{IV}(x) dx = \mathbf{q}_{\xi^i} \\ \int_{\xi^i + 1/2}^{\xi^i + 3/2} q^{IV}(x) dx = \mathbf{q}_{\xi^i + 1} \end{array} \right. \quad (2.131)$$

La résolution de ce système est extrêmement fastidieuse. Nous n'avons pas réussi à dégager d'expressions analytiques simples permettant de calculer  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . La solution retenue dans cette étude a été de résoudre numériquement ce système pour chaque interface afin d'en déduire directement l'expression de  $q_{\xi^i - 1/2}^{IV}(x)$ , la valeur interpolée à l'interface étant ensuite calculée par :

$$\mathbf{q}_{\xi^i - 1/2} = q_{\xi^i - 1/2}^{IV}(x_{\xi^i - 1/2})$$

### 2.5.2.3 Correction de la dissipation artificielle

Le dernier terme à corriger dans ces équations reste la dissipation artificielle du second et quatrième ordre. Le traitement est un peu plus complexe que l'interpolation des variables aérodynamiques à l'interface.

La dissipation est initialement conçue comme la somme d'une dérivée spatiale seconde et d'une dérivée quatrième. Cependant, dès le premier article, Jameson et al. [90] proposent de décomposer chaque dérivée en deux dérivées d'ordre inférieur évaluées à chaque interface de la cellule. Le schéma JST original fait en outre intervenir des pondérations de ces dérivées dépendant de l'interface traitée, ce qui limite les possibilités d'écrire la dissipation comme un unique terme mélangeant dérivées secondes et quatrièmes. L'implémentation retenue dans le code Turb'Flow (2.121 et 2.122) est soumise au même problème. Il ne semble pas exister à l'heure actuelle un consensus clair pour déterminer exactement la nature optimale de la dissipation artificielle appliquée au schéma centré.

On trouve aussi facilement des implémentations faisant intervenir des dérivées premières/troisièmes que des dérivées secondes/quatrièmes.

En conséquence, il est possible de corriger la dissipation de plusieurs manières :

- On remplace dans l'expression de  $\mathbf{F}_d^i$  les versions indicielles actuelles des dérivées premières et troisièmes par des versions généralisées aux maillages non-uniformes. On notera que ces valeurs peuvent être obtenues directement lors de la phase d'interpolation au quatrième ordre puisque les coefficients du polynôme  $q^{IV}(x)$  sont aussi :

$$A = \frac{1}{6}q^{IV(3)}(x) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 q}{\partial x^3}$$

$$B = \frac{1}{2}q^{IV(2)}(0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

$$C = q^{IV(1)}(0) = \frac{\partial q}{\partial x}$$

L'expression de la dissipation est cependant toujours scindée entre les interfaces, et compte tenu de la complexité des dérivées sur un maillage uniforme, il n'est généralement pas possible d'obtenir une contribution globale sur la cellule égale à la somme d'une dérivée seconde et d'une dérivée quatrième.

Cette approche est la plus cohérente avec le traitement de la dissipation artificielle réalisée jusqu'à présent.

- On calcule directement les expressions généralisées des dérivées secondes et quatrièmes.

Pour la deuxième technique, la solution vient peut-être du calcul sur des maillages non-structurés. Comme il n'existe pas de direction privilégiée, les schémas centrés non-structurés font intervenir directement un opérateur Laplacien tridimensionnel  $\nabla^2(q)$  pour calculer l'équivalent des termes en dérivée seconde [9]. La dissipation du quatrième ordre est quant à elle générée par la composition du Laplacien avec lui-même  $\nabla^2[\nabla^2(q)]$ . Il est parfaitement licite d'utiliser cette approche dans la mesure où les maillages structurés ne sont qu'un cas particulier de maillage non structuré.

L'opérateur Laplacien étant relativement coûteux à calculer, on utilise plus couramment des pseudo-Laplaciens  $L(q)$ . La version la plus commune de  $L$  est donnée par Frink [52]. Pour un maillage structuré, il s'écrit :

$$L(q_\xi) = \sum_{j \text{ voisins}} \theta_{\xi\Phi_j} (q_{\Phi_j} - q_\xi)$$

les  $\theta_{\xi\Phi_j}$  sont des coefficients de pondération dépendant de la géométrie et plus particulièrement de la position du point de coordonnées indicielles  $\Phi_j$  par rapport à celui de coordonnées indicielles  $\xi$ .

Pour l'expression des dérivées quatrièmes, on peut choisir de composer le pseudo-Laplacien précédent avec lui-même  $D(q) = L(L(q))$ . Cependant, Haselbacher et Blazek [71] observent que cet opérateur peut générer des instabilités sur des maillages quadrilatéraux et donc plus spécifiquement sur des maillages structurés. Ils proposent un nouvel opérateur du quatrième ordre construit en effectuant une soustraction entre deux pseudo-Laplaciens :

$$L^I(q_\xi) = \sum_{j \text{ voisins}} (q_{\Phi_j} - q_\xi)$$

$$L^{II}(q_\xi) = \sum_{j \text{ voisins}} \frac{1}{2} [(\vec{\nabla}q)_{\Phi_j} + (\vec{\nabla}q)_\xi] \cdot (\vec{x}_{\Phi_j} - \vec{x}_\xi)$$

où  $\vec{x}$  est le vecteur position. Ces formulations sont exactes pour une approximation d'une fonction quadratique en différences finies sur un maillage cartésien uniforme.

En remarquant que l'erreur de troncature du quatrième ordre associée à l'opérateur  $L^{II} - L^I$  est, à un facteur quatre près, proportionnelle à celle du pseudo-Laplacien de Frink, ils définissent un nouvel opérateur :

$$D(q) = L_{Frink}(q) - 4[L^{II}(q) - L^I(q)]$$

Ce point n'a malheureusement pas été testé par manque de temps. Il pourra donc faire l'objet d'études futures.

#### 2.5.2.4 Application à des cas tests

Afin de tester la validité des nouvelles formulations proposées pour l'interpolation des variables aux interfaces, nous nous sommes concentrés sur un nouveau cas test. On ne pourra pas utiliser efficacement le cas Ringleb car le schéma centré est mieux adapté aux cas à basse vitesse. Or, ce cas présente des zones de forte vitesse ( $M \approx 0.9$ ) et on obtient donc une erreur assez importante du fait même de l'utilisation de ce schéma.

Le nouveau cas test est construit sur la propagation d'une onde sinusoïdale de pression statique remontant l'écoulement. Il s'agit d'un cas monodimensionnel assez simple. On impose une fluctuation temporelle sinusoïdale de la pression statique au niveau du point aval du maillage. Les conditions limites amont sont la masse volumique et la quantité de mouvement. Le maillage est par ailleurs décomposé en deux zones :

1. une zone aval avec une taille de maille constante. Cette zone est suffisamment longue pour pouvoir y observer 3.5 périodes de la sinusoïde. On dispose de 52 points par longueur d'onde.
2. Une zone amont avec une progression géométrique de la taille de maille. Les mailles à l'amont du maillage sont de grande dimension, afin de filtrer l'oscillation de pression. La première maille en amont a typiquement une longueur équivalente à la longueur d'onde de la fluctuation remontante.

La fluctuation de pression a une fréquence de 400 Hz et une amplitude de 0.1 Pa, autour d'un niveau moyen  $P_s^{moyenne} = 101300$  Pa. On a pris soin de limiter cette dernière afin de rester dans un cas de propagation linéaire.

Le champ de fluctuation de pression statique ( $P_s - P_s^{moyenne}$ ) à une certaine date est représenté sur la figure (Fig. 2.22)

La zone uniforme est comprise entre l'abscisse  $x = 7$  et  $x = 10$  m. Les courbes représentées ont été obtenues avec les interpolations au second ordre. On constate la très nette disparition de la fluctuation. L'intérêt du filtrage est de supprimer toute fluctuation au niveau du point amont pour éviter toute instabilité.

Pour tester efficacement les capacités des interpolations, on crée des variations brusques de taille des mailles en supprimant quelques points au niveau de la zone uniforme. On a ainsi :

- un point enlevé à l'abscisse  $x = 8.65$ m. On obtient un rapport de taille de 2.
- deux points consécutifs retirés à  $x = 9.40$ m. Le rapport d'expansion est ici de 3.
- un point retiré à  $x = 9.82$ m.

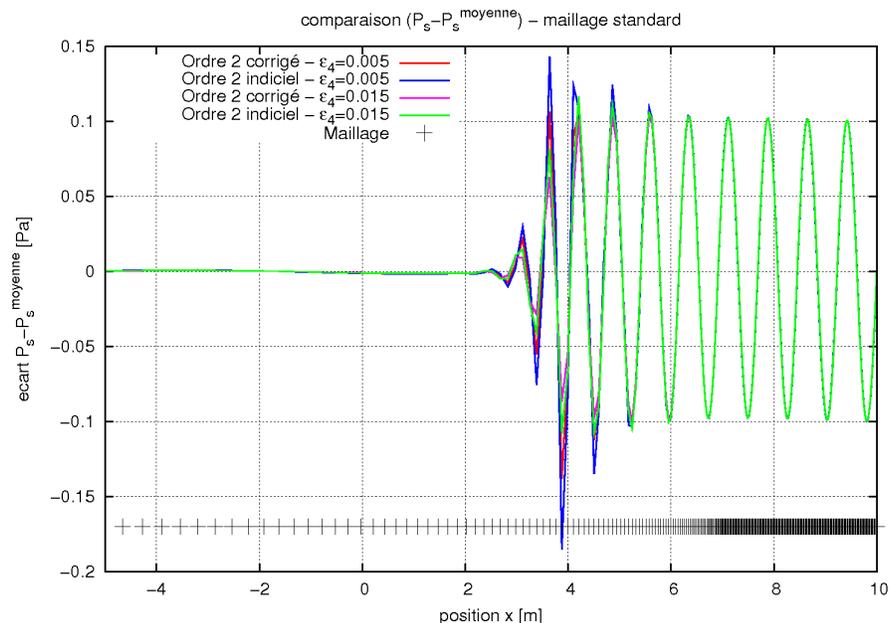


FIG. 2.22 – Fluctuation de pression remontante - vue générale

Quel que soit l'ordre du schéma utilisé, nous avons choisi d'appliquer une dissipation artificielle du quatrième ordre à 5% ou 15%.

Les figures (Fig. 2.23 et 2.24) illustrent le champ de pression statique autour du saut de maille de rapport 3 et d'un des sauts de rapport 2. Le schéma est pour l'instant au second ordre. Il est nécessaire de faire la visualisation lorsque les extrema de la sinusoïde sont au niveau des trous de maillage. Dans le cas contraire, la variation de pression est à peu près linéaire : on n'observe presque rien avec les interpolations utilisées. On a aussi tracé la répartition de pression théorique.

On voit très clairement sur ces courbes que les interpolations indicielles génèrent des oscillations assez conséquentes en aval du trou. À l'opposé, les versions corrigées restent régulières et proches de la référence.

En traçant l'erreur par rapport à la pression théorique (Fig. 2.25), on se rend compte que ces oscillations de pression affectent une grande partie de l'espace. Les interpolations géométriques ne présentent qu'un pic localisé. Pour un rapport de taille de maille égal à deux, ce pic est faible. Il est cependant beaucoup plus conséquent pour un rapport égal à trois. Cela pourrait indiquer que, pour ce cas test au moins, la progression de la taille des mailles doit rester limitée.

Il est intéressant de noter que le niveau moyen de l'erreur est le même, quelle que soit la dissipation artificielle ou la technique d'interpolation.

Le dernier point intéressant à observer est ce qui se produit au début de la zone de croissance des mailles. On aperçoit sur la figure (Fig. 2.22) que l'amplitude augmente assez sensiblement vers  $x = 4\text{m}$ . En regardant de plus près cette zone (Fig. 2.26), on voit qu'en plus d'une augmentation d'amplitude, l'entrée de la sinusoïde dans la zone à taille de maille variable s'accompagne d'un déphasage de l'onde par rapport à la distribution théorique. Au pic d'amplitude, la pression calculée est en opposition de phase avec la pression théorique, ce qui correspond à une erreur maximum.

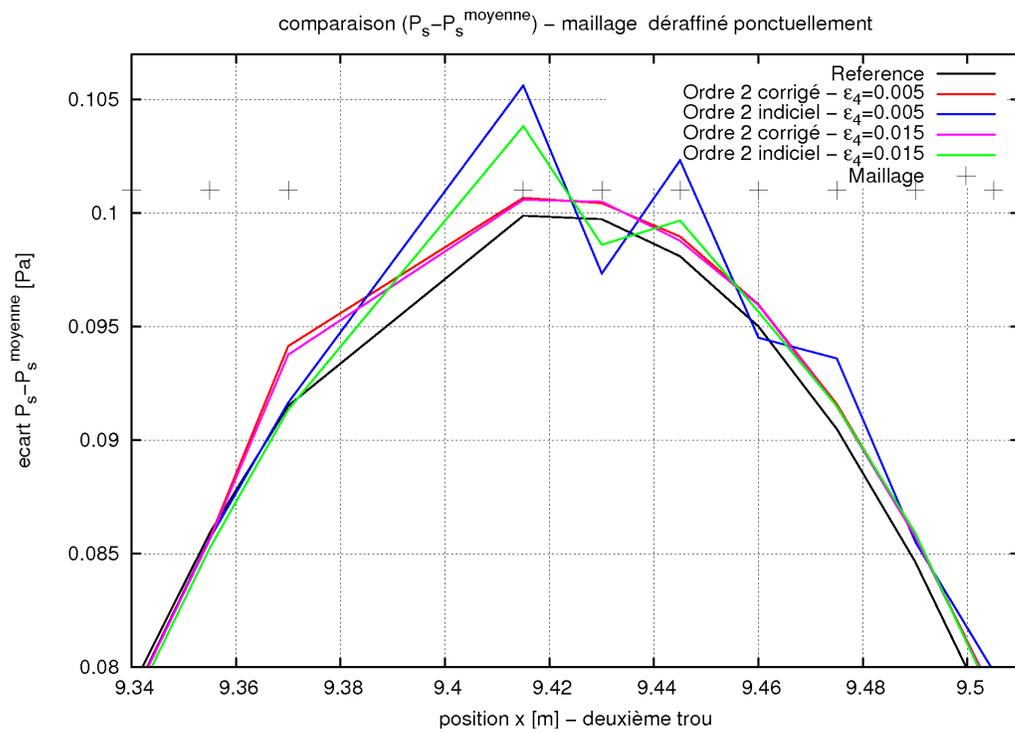


FIG. 2.23 – Reconstruction à l'ordre 2 - Large saut de maille

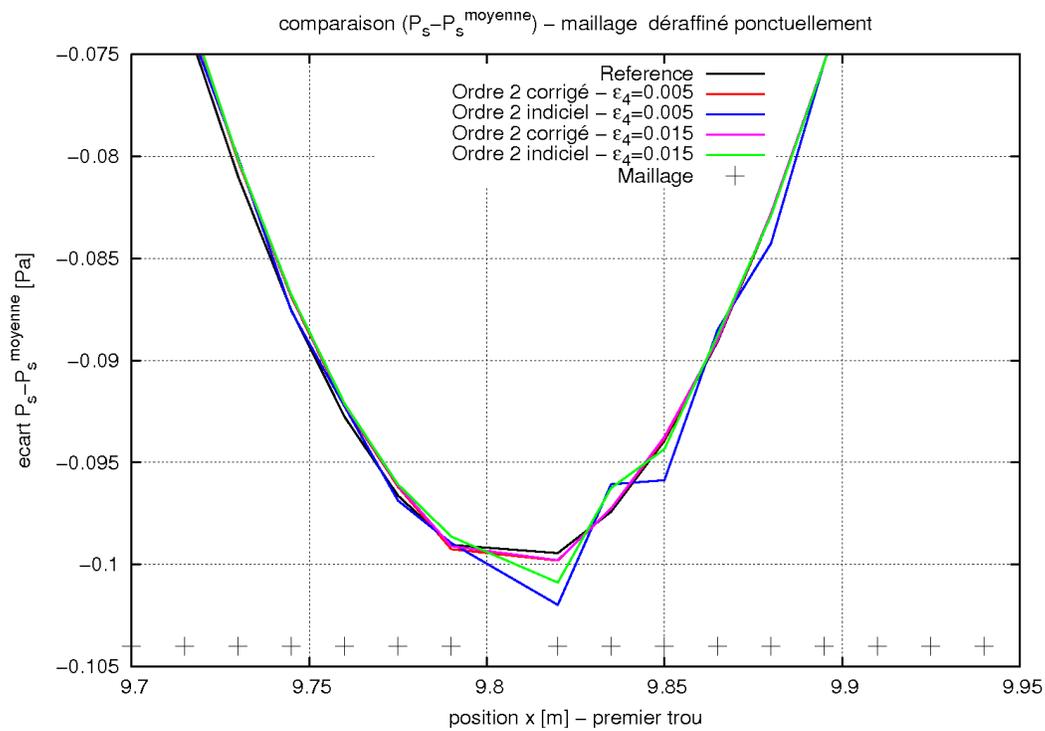


FIG. 2.24 – Reconstruction à l'ordre 2 - Petit saut de maille

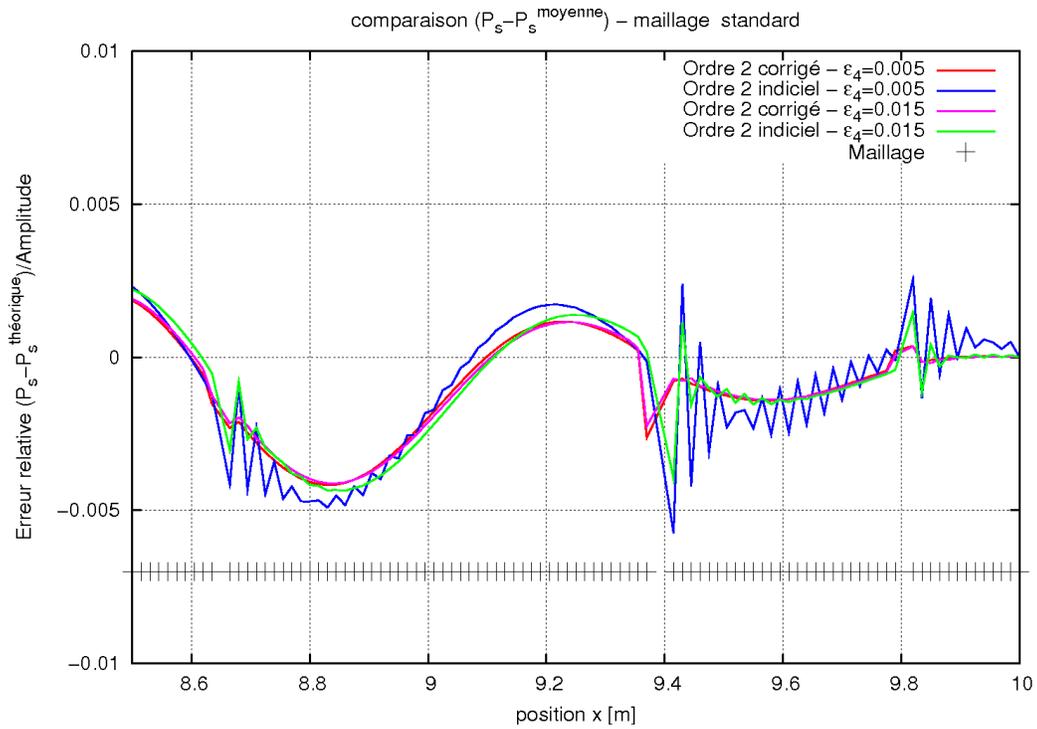


FIG. 2.25 – Erreur sur la pression statique - ordre 2

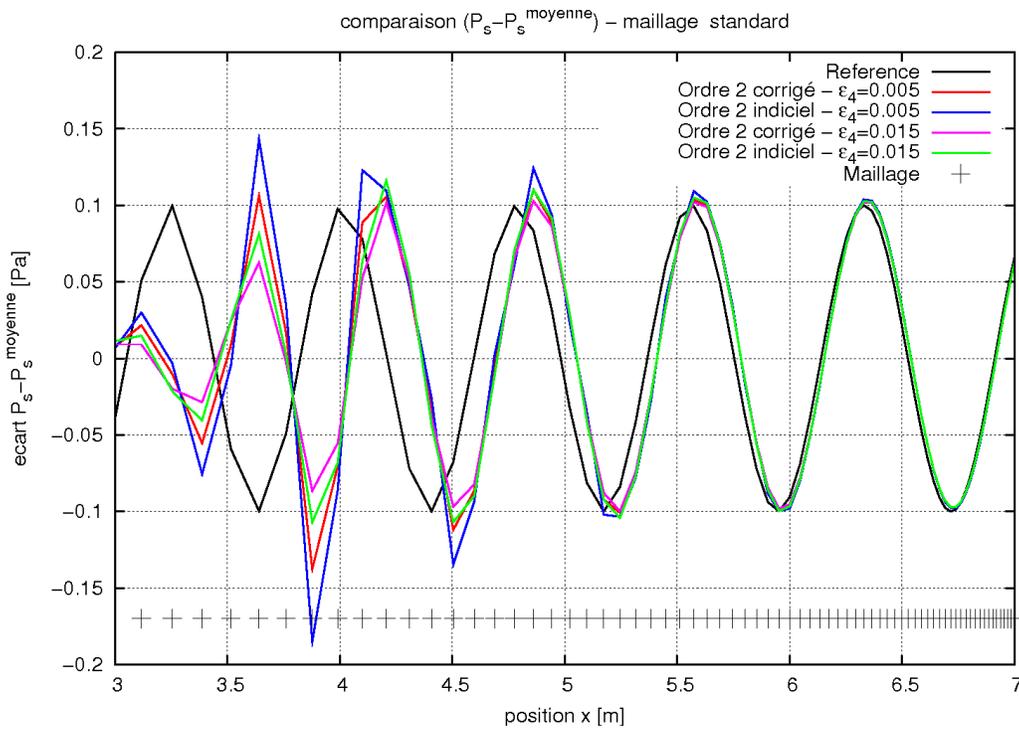


FIG. 2.26 – Pression statique au niveau de la zone géométrique - schéma d'ordre 2

L'utilisation d'une interpolation géométrique ne change rien au problème du déphasage. En revanche, elle réduit assez notablement l'amplitude de la fluctuation de pression. Ainsi, pour le schéma indiciel avec une dissipation  $\varepsilon_4 = 0.005$ , l'amplitude maximum est de 18 Pa contre 14 seulement pour la version géométrique. Un test sur un maillage deux fois plus dense montre que le problème n'est pas dû à une sous-discrétisation de la sinusoïde.

Considérons maintenant les interpolations du quatrième ordre. On a tracé sur les figures (Fig. 2.27 et 2.28) les champs de pression au niveau des deux défauts de maillage précédemment étudiés.

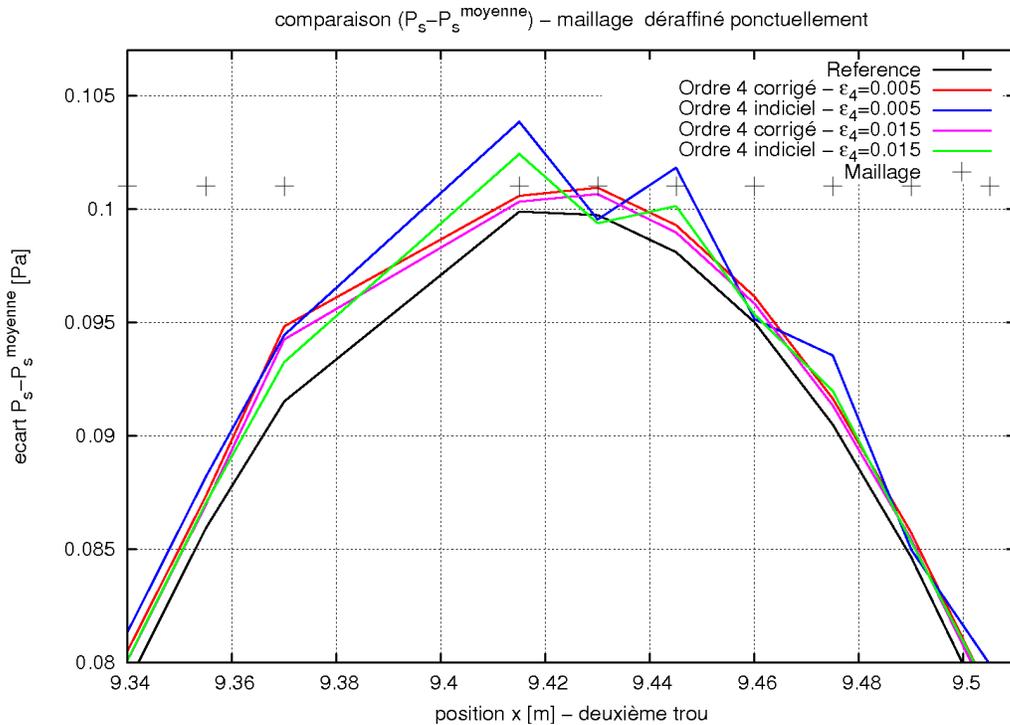


FIG. 2.27 – Reconstruction à l'ordre 4 - Large saut de maille

On constate à nouveau que les interpolations géométriques proposées permettent de s'affranchir des oscillations qui apparaissent avec les versions indicielles. La variation globale de l'erreur (Fig. 2.29) est différente, avec notamment une longueur d'onde beaucoup plus grande que dans le cas présenté en (Fig. 2.23). Ce résultat est cohérent avec le fait qu'une interpolation au quatrième ordre donne un spectre plus resserré autour de la fréquence réelle.

Un rapport de taille entre cellules adjacentes supérieur à trois semble ici aussi à déconseiller.

Pour finir, on considérera le champ de pression au niveau de la zone de variation du maillage. La figure (Fig. 2.30) montre que, cette fois, il n'existe pas de déphasage avec la théorie. On peut donc en conclure que l'erreur apparaissant pour les schémas d'ordre 2 est uniquement reliée à l'ordre d'interpolation.

D'autre part la sur-amplitude qui existait auparavant a ici presque totalement disparu. Seul le cas indiciel avec une faible dissipation présente encore une très légère surestimation. Les versions géométriques corrigent ce défaut.

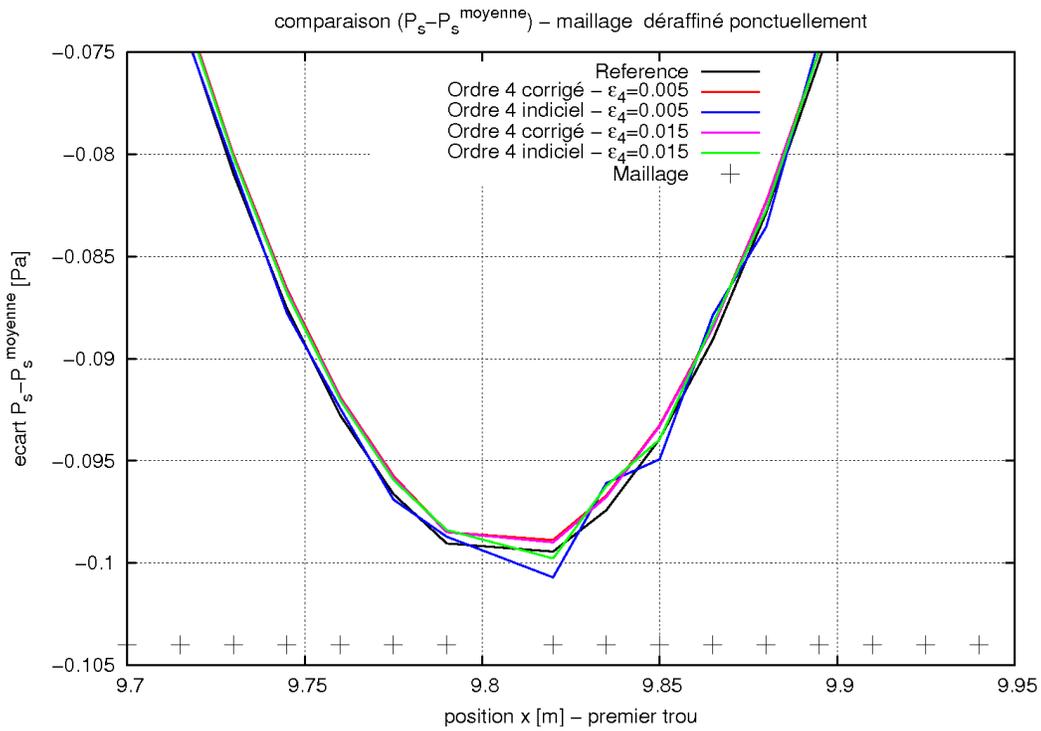


FIG. 2.28 – Reconstruction à l'ordre 4 - Petit saut de maille

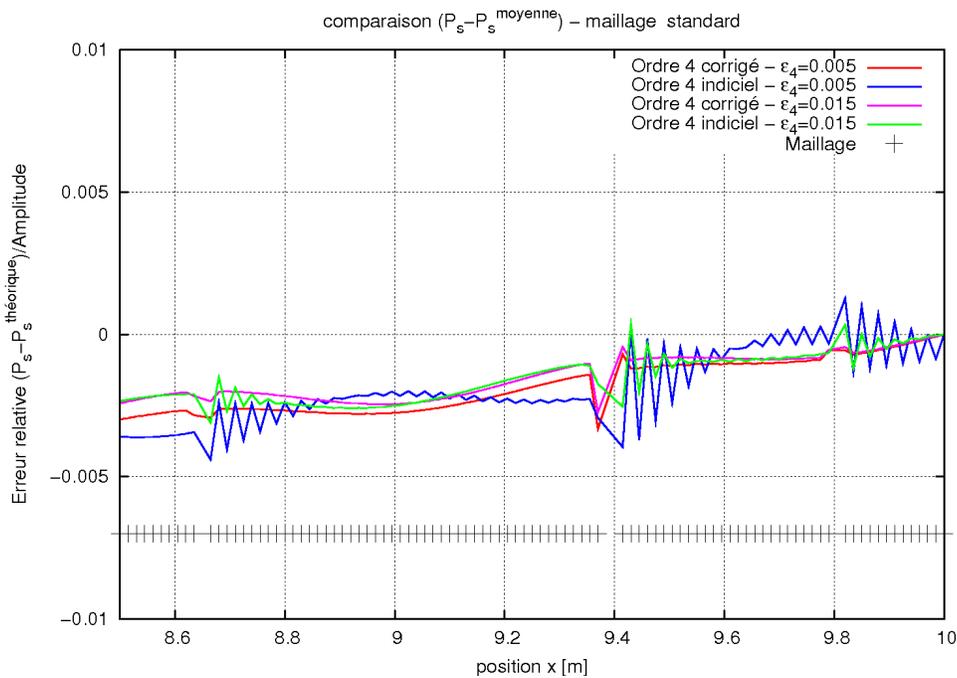


FIG. 2.29 – Erreur sur la pression statique - ordre 4

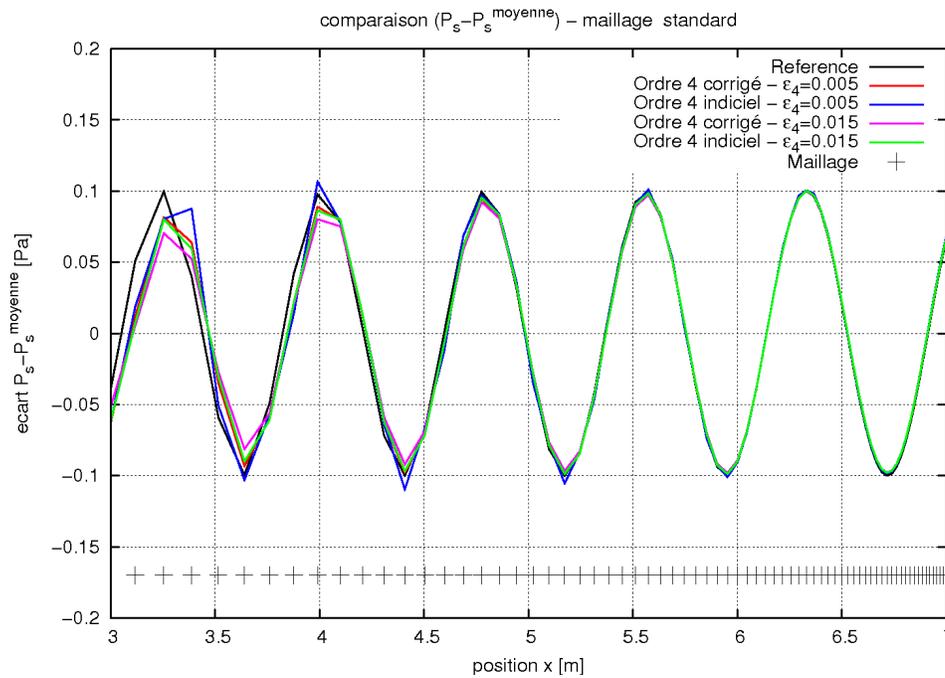


FIG. 2.30 – Pression statique au niveau de la zone géométrique - schéma d'ordre 4

Par ailleurs, l'amplitude de l'oscillation ne commence à baisser que pour  $x \leq 4$  m ce qui laisse supposer que le maillage est suffisamment dense jusqu'à cette position pour éviter le filtrage de l'onde. Dans l'absolu, on pourra retenir qu'une densité de 50 points par période est suffisante pour assurer une bonne précision avec un schéma du quatrième ordre.

Le dernier point remarquable est l'influence de la dissipation artificielle. On rappelle que les résultats présentés ici utilisent une modélisation de la dissipation artificielle construite sur la différence de dérivées premières et troisièmes exprimées indiciellement aux interfaces. Cette formulation est donc sensible aux non-uniformités de maillage.

La figure (Fig. 2.31) illustre l'erreur relative pour les interpolations du quatrième ordre sur le maillage "à trous" (traits pleins) et sur le maillage de référence (points). On choisit de préférence cet ordre pour illustrer le propos parce que c'est celui qui permet la meilleure reconstruction possible en supprimant par exemple les oscillations de basse fréquence observables dans l'erreur pour une reconstruction à l'ordre 2. La dissipation artificielle est uniquement au quatrième ordre, afin de ne pas dégrader l'ordre général du schéma.

Il est intéressant de noter que pour les versions avec une interpolation corrigée, notamment pour  $\varepsilon_4 = 0.05$ , l'erreur sur le maillage standard et sur le maillage ponctuellement déaffiné est globalement la même. A l'inverse, les interpolations indicielles génèrent des erreurs notablement différentes, surtout si la dissipation artificielle est faible. On observe donc clairement que la généralisation des interpolations permet un gain majeur en terme de précision sur des maillages non-uniformes.

D'autre part, on peut dégager l'influence de la dissipation artificielle et sa sensibilité aux non-uniformités du maillage. Pour l'interpolation généralisée, l'écart existant entre les deux courbes d'erreur  $\varepsilon_4 = 0.05$  et  $\varepsilon_4 = 0.15$  est uniquement dû à la variation de niveau de dissipation artificielle et à la sensibilité de cette dernière par rapport au maillage.

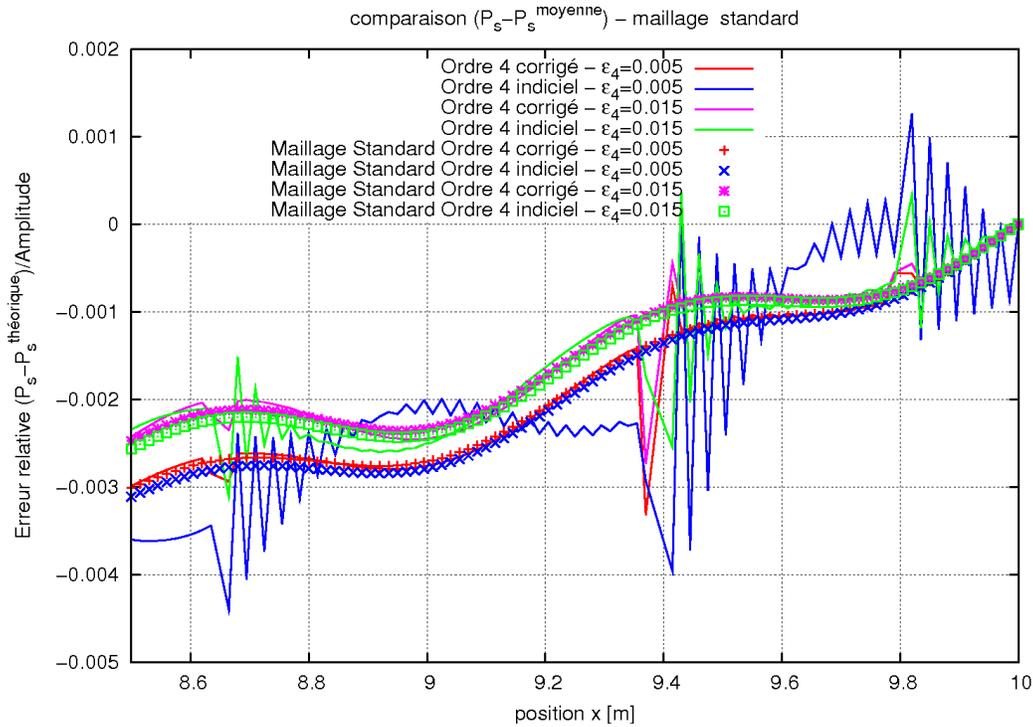


FIG. 2.31 – Influence du maillage sur l’erreur - schéma d’ordre 4

En toute logique, si les non-uniformités du maillage génèrent une erreur au travers de la dissipation artificielle, cette erreur devrait être trois fois plus importante pour le cas  $\varepsilon_4 = 0.15$  que celle pour  $\varepsilon_4 = 0.05$ . En conséquence, l’écart entre les deux courbes doit varier, au moins au niveau des sauts de mailles. Or, en comparant les courbes obtenues avec une interpolation généralisée sur les maillages uniformes et ceux présentant des sauts de mailles, on observe que l’écart existant entre les deux niveaux de dissipation est quasiment constant, y compris au niveau des petites oscillations résiduelles liées aux grandes mailles. Les écarts entre les courbes d’erreur sont donnés dans le tableau [2.1] pour les cas uniformes et non-uniformes à la position  $x=8.7\text{m}$ .

Maillage uniforme	Maillage non uniforme
0.057%	0.063%

TAB. 2.1 – Ecart sur l’erreur relative entre les cas  $\varepsilon_4 = 0.05$  et  $\varepsilon_4 = 0.15$  - position  $x=8.7\text{m}$ 

On peut donc en conclure que, pour cet écoulement, la dissipation artificielle du quatrième ordre a une influence mineure sur l’erreur de calcul dans le cadre de maillages non-uniformes. La plus grosse partie de l’erreur est associée (comme on pouvait s’y attendre) à l’interpolation. L’erreur générée par une expression indicielle de la dissipation appliquée à une non-uniformité de maillage est d’au moins un ordre de grandeur inférieure à l’erreur induite par la dissipation numérique elle-même. Il conviendrait néanmoins d’effectuer des tests sur un autre cas, conçu pour mettre un peu plus en avant le rôle de la dissipation numérique, afin de vérifier si le cas traité ici est assez sévère.

Sur la figure (Fig. 2.32), on a représenté l’erreur relative pour le cas des interpolations indicielles et géométriques du second ordre couplées à une dissipation artificielle du second ordre également.

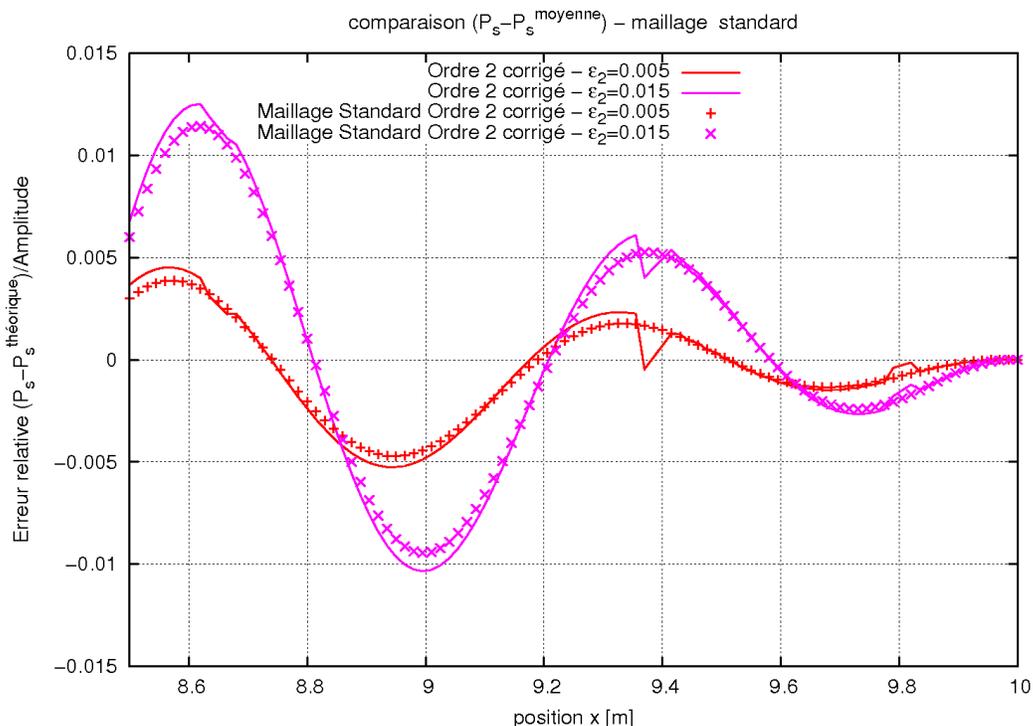


FIG. 2.32 – Influence du maillage sur l’erreur - schéma d’ordre 2

On voit toute de suite que cette dissipation génère une erreur nettement plus forte que celle du quatrième ordre, avec de plus un déphasage apparaissant entre les deux courbes. On retrouve à ce niveau une certaine cohérence avec les observations faites sur le déphasage au niveau de la zone géométrique, caractéristique des schémas du second ordre.

On remarque cette fois une assez nette différence entre les courbes correspondant aux maillages uniformes et non-uniformes pour une même dissipation. On trouve aussi que l’écart entre les courbes correspondant aux deux dissipations sur le maillage ponctuellement déraffiné varie sensiblement par rapport au cas uniforme.

Maillage uniforme	Maillage non uniforme
0.77%	0.83%

TAB. 2.2 – Ecart sur l’erreur relative entre les cas  $\varepsilon_2 = 0.05$  et  $\varepsilon_2 = 0.15$  - position  $x=8.6\text{m}$ 

L’erreur induite par l’utilisation d’une dissipation du second ordre exprimée indicieusement est cette fois un peu plus forte. On devra donc prendre certaines précautions en utilisant cette dissipation. Toutefois, comme cette dernière est beaucoup plus néfaste quant à la précision du calcul, on évitera autant que possible de l’utiliser. Seuls les cas vraiment instables devront être traités de cette manière ; il convient de toute façon de réviser un peu à la baisse les exigences de précisions dans de tels cas.

**Conclusion sur les interpolations centrées corrigées** On a démontré dans cette partie que les interpolations géométriques centrées du second et quatrième ordre permettent un gain sensible

de précision dans le cas de maillages avec de grands rapports de taille de maille. Un rapport égal à deux est traité sans problème particulier, mais un rapport supérieur sera peut-être critique.

L'utilisation d'une dissipation artificielle du quatrième ordre exprimée indicielement avec un maillage non-uniforme n'a qu'une influence négligeable sur l'erreur générale. On pourra donc se contenter en général de garder une expression purement indicielle, ce qui permet en outre de limiter la complexité algorithmique. A l'inverse, un soin particulier devra être apporté lors de l'utilisation de la dissipation artificielle du second ordre car elle semble plus sensible aux variations de tailles du maillage.

## 2.6 Discrétisation spatiale des flux diffusifs

Le dernier terme de l'équation(2.36) est le flux diffusif dans la direction  $\xi^i$  à l'interface  $\mathbf{F}_v^i$ . Rappelons que ce dernier s'écrit :

$$\mathbf{F}_v^i = \sqrt{g} \vec{\mathbf{F}}_v \cdot \vec{a}^i \quad (2.132)$$

où :

$$\vec{\mathbf{F}}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\tau}_{l+t} \\ \gamma \left( \frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_t}{P_{rt}} \right) \vec{\nabla} e + \vec{\tau}_{l+t} \cdot \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \end{pmatrix} \quad (2.133)$$

et :

$$\vec{\tau}_{l+t} = (\lambda + \lambda_t) \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \vec{I} + (\mu + \mu_t) \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^T \right) - \frac{2}{3} R_e \rho k \vec{I} \quad (2.134)$$

$$\vec{\nabla} \eta = \sum_{i=1}^3 \vec{a}^j \frac{\partial \eta}{\partial \xi^j} \quad (2.135)$$

$\eta$  étant une variable scalaire, sélectionnée parmi  $e$ ,  $k$  et  $\omega$ .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \sum_{j=1}^3 \vec{a}^j \frac{\partial \vec{V}}{\partial \xi^j} \quad (2.136)$$

$$\vec{\nabla} \cdot u_i = \sum_{j=1}^3 \vec{a}^j \frac{\partial u_i}{\partial \xi^j} \quad (2.137)$$

Le terme  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$  (resp.  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^T$ ) est formé par les vecteurs  $\vec{\nabla} \cdot u_i$  écrits en lignes (resp. en colonnes).

Au final, l'expression du flux diffusif fait intervenir des termes géométriques par l'intermédiaire des  $\vec{a}^j$  ainsi que le champ aérodynamique et ses dérivées spatiales. Toutes ces grandeurs doivent être connues à l'interface traitée.

Le choix a été fait antérieurement de calculer de manière exacte les termes métriques, à savoir  $\sqrt{g}$  et les vecteurs contravariants  $\vec{a}^j$ , afin d'éviter l'erreur introduite par une interpolation. A l'opposé, les variables conservatives sont bien interpolées pour obtenir la valeur à l'interface.

L'interpolation de ces variables aérodynamiques est effectuée par une simple moyenne arithmétique centrée :

$$\mathbf{q}_{\xi^{i-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} [\mathbf{q}_{\xi^{i-1}} + \mathbf{q}_{\xi^i}] \quad (2.138)$$

On déduit notamment de ces valeurs interpolées les composantes de vitesse  $u_i$  et l'énergie interne  $e$ . Il reste alors à calculer les gradients des grandeurs scalaires. Ceci est effectué en appliquant à toute variable scalaire  $A$  la relation suivante, valable pour tout espace curviligne (voir l'annexe D de [4]) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} A \Big|_{\xi^{i-\frac{1}{2}}} &= \vec{a}^i \Big|_{\xi^{i-\frac{1}{2}}} (\vec{\nabla} A \cdot \vec{a}^i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \vec{a}^j \Big|_{\xi^{i-\frac{1}{2}}} (\vec{\nabla} A \cdot \vec{a}^j) \\ &= \vec{a}^i \Big|_{\xi^{i-\frac{1}{2}}} [A_{\xi^i} - A_{\xi^{i-1}}] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \vec{a}^j \Big|_{\xi^{i-\frac{1}{2}}} \frac{A_{\xi^j} - A_{\xi^{j-1}}}{2} \end{aligned} \quad (2.139)$$

La molécule de calcul utilisée pour cette formule est illustrée sur la figure (Fig. 2.33)

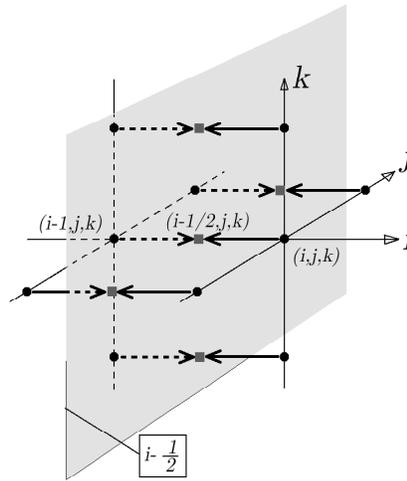


FIG. 2.33 – Molécule de calcul pour la discrétisation des flux diffusifs

**Généralisation aux maillages non uniformes** Le calcul du flux diffusif est déjà presque adapté aux maillages non uniformes. En effet, la relation (2.139) est valable pour tout maillage car elle est établie dans un espace purement indiciel. Les possibles variations géométriques sont prises en compte au travers des  $\vec{a}^i$ .

Le seul problème vient de l'interpolation des variables conservatives au niveau de l'interface. On remarquera simplement que la formule d'interpolation (2.138) est équivalente à un schéma centré du second ordre, et on appliquera en conséquence une correction en remplaçant cette formule par l'équation (2.128). Ce point, que nous n'avons pas eu le temps de tester, pourra faire l'objet d'une validation à l'avenir.

## 2.7 Synthèse sur les méthodes numériques pour la simulation

Dans ce chapitre, nous avons présenté les techniques de discrétisation numérique des équations de Navier-Stokes, en nous concentrant plus particulièrement sur la discrétisation spatiale implémentée

dans le solveur Turb'Flow que nous avons utilisé. Nous avons adopté une discrétisation de type volumes finis sur un maillage structuré car cette approche permet d'obtenir une bonne précision spatiale.

On traite d'abord la discrétisation spatiale de la partie convective des flux. Il existe aujourd'hui deux grandes catégories de schémas spatiaux pour la discrétisation des flux : les schémas décentrés amont et les schémas centrés. Parmi les schémas décentrés amont, on retrouve les schémas à séparation de flux tels que les schémas de Liou, ou bien à différence de flux, tel que le schéma de Roe. Toutefois, afin de monter en ordre de discrétisation et donc d'augmenter la précision spatiale, ces schémas font appel à des interpolations dont la plus classique est l'approche MUSCL.

On a montré que l'approche MUSCL telle qu'on peut la trouver dans la littérature n'est valable que pour des maillages uniformes. L'utilisation de cette approche sur des maillages non uniformes induit une erreur numérique qui vient perturber les calculs. Un des travaux effectués au cours de cette thèse a porté sur la généralisation de la formulation MUSCL aux maillages non uniformes. Avec les nouvelles formules d'interpolation du second et troisième ordre, on montre qu'on améliore sensiblement la qualité de la simulation sur les maillages quelconques.

Nous avons aussi abordé la généralisation aux maillages non uniformes des limiteurs, utilisés sur les schémas décentrés pour stabiliser le calcul en présence de gradients forts. Ma contribution à cette étude a porté sur le test des limiteurs généraux, apparus récemment dans le code Turb'Flow, afin de caractériser les différentes formulations possibles et trouver les meilleurs limiteurs du point de vue de la précision spatiale. On retiendra que les limiteurs SMART et MUSCL (second ordre) et Koren (troisième ordre) sont ceux qui ont le meilleur comportement.

Les schémas spatiaux centrés ont aussi été traités. Après un bref rappel de leur fonctionnement, nous nous sommes attachés à généraliser les interpolations du second et quatrième ordre utilisées dans ce cadre. Les nouvelles formulations ont ensuite été validées sur un cas test. On a ainsi mis en évidence une très nette amélioration de la qualité de la simulation sur les maillages non uniformes.

En dernier lieu, nous avons présenté le traitement des flux diffusifs qui est un peu différent de celui des flux convectifs. Le schéma utilisé est du type centré mais il est en grande partie adapté aux maillages non uniformes. Toutefois, après analyse, il ressort que la détermination du champ aérodynamique en certains points de l'espace ne tient pas compte des non-uniformités du maillage. Nous avons proposé une correction pour ce défaut, correction qui pourra faire l'objet de futures études.

On dispose à présent de techniques fiables et précises pour effectuer des simulations numériques. Ces simulations sont la base de l'analyse du nouveau traitement de carter. Nous allons donc présenter dans le chapitre 3 l'étude du nouveau traitement de carter. On commencera par définir précisément le problème et le traitement de carter envisagé, puis nous détaillerons le champ aérodynamique et les performances de ce nouveau dispositif. On présentera au chapitre 4 les techniques d'optimisation, avant de terminer au chapitre 5 l'étude du traitement de carter en l'optimisant et en l'appliquant à un ventilateur de refroidissement automobile.



# Chapitre 3

## Etude d'un traitement de carter

### 3.1 Introduction

Les techniques précises de simulation numérique qui sont utilisées pour cette étude ont été présentées et développées au chapitre 2. Nous allons maintenant effectuer l'analyse d'un nouveau traitement de carter applicable aux turbomachines basse vitesse équipées d'une virole. L'une des applications de ce traitement de carter est un ventilateur utilisé pour le refroidissement d'un moteur d'automobile. On commencera ce chapitre en analysant dans la partie 3.2.1 la problématique de l'écoulement de jeu, et plus particulièrement l'écoulement et les performances d'un ventilateur de refroidissement.

On présentera ensuite en 3.3 les différents traitements de carter possibles actuellement pour les turbomachines avec une virole. On mettra en évidence leurs insuffisances, ce qui nous conduira à proposer un nouveau traitement de carter. Ce traitement consiste en un rainurage hélicoïdal de la paroi carter. Le nouveau concept sera décrit, en précisant quelles sont ses origines.

Afin de valider et d'étudier le nouveau traitement de carter, nous le modéliserons dans la section 3.4. On décrira d'abord précisément le modèle utilisé. La géométrie du modèle est caractérisée par un certain nombre de paramètres géométriques qui sont donnés ici, et optimisés au chapitre 5.

On présentera aussi des modèles de jeux utilisés pour la validation du concept de traitement de carter et de la modélisation qui en a été faite.

Après avoir démontré que le nouveau traitement de carter apporte une amélioration sur l'écoulement de jeu, nous décrirons en détail la structure globale puis locale de l'écoulement autour du rainurage.

Nous déterminerons ensuite les effets de chaque paramètre géométrique sur les objectifs quantitatifs caractérisant le fonctionnement du traitement de carter.

Nous concluons ce chapitre par une synthèse sur les résultats présentés ici. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication [172].

### 3.2 Problématique du refroidissement automobile

#### 3.2.1 Contexte général

Le refroidissement des différents organes moteurs d'une automobile nécessite dans la plupart des cas l'utilisation d'un groupe moto-ventilateur destiné à assurer la circulation d'air au travers d'un

ou plusieurs échangeurs thermiques. Ce dispositif est utilisé essentiellement lorsque le véhicule est à l'arrêt ou circule à basse vitesse. Dans le cas contraire, l'écoulement généré par l'avancement du véhicule est suffisant pour assurer le refroidissement.

Un groupe moto-ventilateur (GMV) est constitué de trois pièces principales (Fig. 3.1) :

- Une roue mobile
- Un moteur électrique entraînant la roue mobile
- Un carter maintenant le moteur, parfois équipé de bras de liaison carénés faisant office de "roue" directrice de sortie.

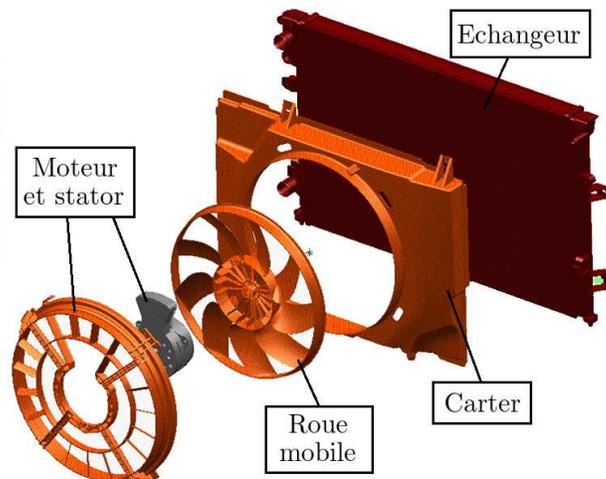


FIG. 3.1 – Eclaté d'un groupe moto-ventilateur automobile

Le GMV peut être placé soit à l'amont soit à l'aval d'un échangeur, selon la place allouée dans le bloc moteur. A l'heure actuelle, la plupart des pièces sont construites en matières plastiques pour des raisons économiques (prix du matériau, fabrication en grande série par moulage, etc...), ce qui limite de fait leur résistance mécanique.

La première conséquence de cette contrainte de construction est l'utilisation d'aubes à talons, c'est à dire des aubes reliées entre elles par une couronne de matière au niveau de leur tête. Par la suite, on désignera cette couronne par le terme *virole*. Celle-ci est utilisée pour rigidifier la roue mobile et limiter les mouvements de torsion et flexion des aubes, au moins au niveau de leur tête.

La deuxième conséquence, assez similaire à la précédente, est que le ventilateur présente assez facilement des déformations importantes. Celles-ci peuvent être causées, par exemple, par les efforts centrifuges sur la roue mobile, par une distorsion de l'écoulement amont ou aval (interaction avec d'autres éléments du moteur de l'automobile) ou bien par les vibrations globales auxquelles est soumis le véhicule. La vitesse de rotation standard, située autour de 3000 tr/min, est suffisante pour induire une déformation radiale, d'autant plus qu'avec la virole, une partie non négligeable de la masse de la roue mobile est située à fort rayon. Les vibrations du véhicule et de son moteur sont responsables de sollicitations appliquées à l'ensemble du GMV qui peuvent se traduire par un déplacement de l'axe de rotation (le moteur électrique étant lourd, son inertie peut conduire à déformer les autres pièces plastiques). Enfin, pour les interactions aérodynamiques, il est possible

d'exciter un ou plusieurs modes de structures et générer ainsi une déformée complexe, avec à la fois un déplacement axial et radial. Le flottement de la structure, bien que très rare, n'est pas non plus à exclure sous certaines conditions.

Afin de prévenir tout contact entre les parties fixes et mobiles du GMV, on impose des contraintes de construction sévères, avec notamment un jeu minimum  $\delta_{virole}$  important entre la virole et le carter, la limite étant usuellement  $\delta_{virole} \approx 2$  à 3 mm. Comparé au rayon des rotors, ce jeu introduit usuellement un rapport  $\frac{\delta}{R} \approx 2\%$ . Cette valeur indique que l'on se situe tout de même assez loin des critères de dessin utilisés pour des turbomachines "classiques" (turbomoteur, turbine à vapeur, ...). Dans ces derniers cas, la valeur 1% est souvent la limite supérieure admissible.

Comme on peut l'imaginer en observant l'éclaté (Fig. 3.1), les conditions d'entrée du ventilateur sont très loin d'être axiales pour un montage en aval de l'échangeur. En effet, si l'échangeur est à peu près uniformément alimenté, une partie importante du flux traversant le ventilateur vient donc des zones latérales (au sens du centrage du ventilateur relativement à l'échangeur), ce qui, compte tenu du faible espacement axial entre le radiateur et le rotor, conduit à un flux radial centripète.

De la même manière, pour un montage amont, le flux sortant du rotor devra être assez brutalement dévié dans la direction radiale afin de se répartir le plus possible sur l'échangeur.

Par ailleurs, l'écoulement présente, dans un montage réel, de fortes distorsions dans la direction azimutale. On cherche en effet à coupler un échangeur, de section rectangulaire, avec un rotor (i.e. un disque). La solution la plus simple à ces problèmes de distorsion et d'alimentation serait d'utiliser un ventilateur de diamètre supérieur, afin de maximiser la coïncidence entre l'aire balayée par ce dernier et celle de l'échangeur. Toutefois, cette approche se heurte très vite aux contraintes de conception des blocs moteurs actuels, pour lesquels on cherche à augmenter la compacité et réduire les coûts.

### 3.2.2 Analyse du ventilateur de référence Valéo

Les ventilateurs de refroidissement automobile sont des turbomachines un peu atypiques, à la fois par leurs conditions de fonctionnement et par leur géométrie.

En conditions réelles de fonctionnement, les ventilateurs sont soumis à des conditions d'entrée et/ou de sortie avec des composantes radiales importantes. Il est extrêmement difficile de qualifier ces conditions réelles car elles dépendent d'un très grand nombre de facteurs qui ne sont pas toujours maîtrisés.

Ces conditions sont d'abord très sensibles au type de montage choisi et à la qualité du montage. Deux modèles de moteurs peuvent par exemple utiliser le même rotor mais avec un montage différent. En deuxième lieu, elles dépendent aussi des conditions de fonctionnement de la voiture. L'écoulement sous capot est passablement complexe du fait des nombreux obstacles présents, et il varie selon la vitesse d'avancement du véhicule.

Pour écarter le problème des distorsions et des conditions variables, les configurations testées sont généralement isolées. Pour les calculs numériques, seul le rotor et un carter simplifié sont simulés ; l'échangeur, le moteur et les bras de support ne sont pas modélisés.

#### Remarque

Dans la suite, afin de garder une cohérence de notation, la coordonnée axiale sera  $\mathbf{x}$ , la coordonnée radiale sera notée  $\mathbf{z}$ , et la coordonnée azimutale  $\mathbf{y}$ .

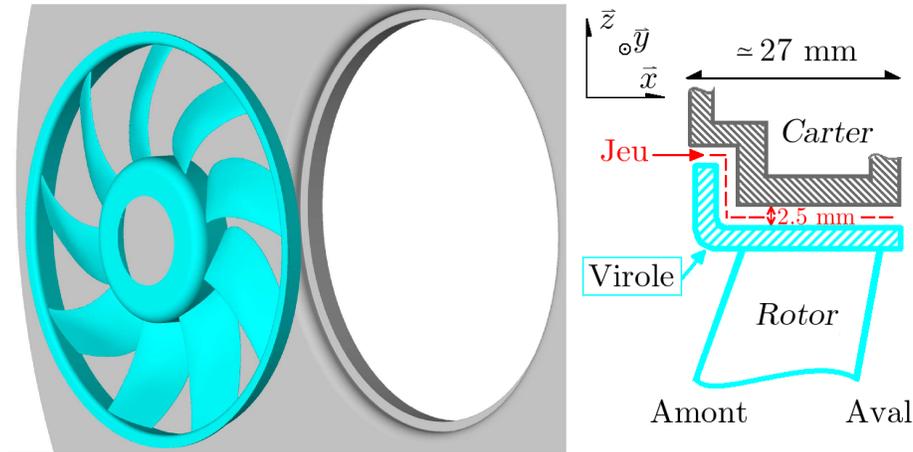


FIG. 3.2 – GMV fourni par Valéo - détail sur le jeu

La figure (Fig. 3.2) montre la géométrie de ventilateur fournie par Valéo qui servira de base à notre étude. On a aussi représenté un schéma du jeu en coupe méridienne pour illustrer la géométrie particulière du jeu. La virole est longue d'à peu près 27 mm, et le jeu entre le carter et la virole est de 2.5 mm.

Pour cette configuration, et plus généralement pour les ventilateurs de GMV, la virole présente un coude du côté amont du ventilateur. Ce coude est utilisé pour essayer d'améliorer les performances de la machine en modifiant un peu les caractéristiques de l'écoulement de jeu. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin.

Le ventilateur Valéo qui sera utilisé comme référence dans cette étude a déjà été optimisé du point de vue aérodynamique. Cette optimisation a été menée par la société Fluorem pour le compte de Valéo (étude similaire dans [68]). Elle a porté sur une paramétrisation de la forme des aubages. Les optimisations ont été effectuées sur trois profils bidimensionnels, correspondant en fait à trois positions radiales sur l'aube : 25, 50 et 75% de la hauteur. Pour cette phase, on définissait pour chaque profil le calage, la position du maximum de cambrure, l'épaisseur maximale, les tangentes aux bords d'attaque et de fuite.

La géométrie de référence dont nous disposons est donc le résultat d'une optimisation qui a permis d'améliorer les caractéristiques de base du ventilateur. Les performances du ventilateur seront évaluées dans la suite au point de fonctionnement nominal :

vitesse de rotation $\Omega$	3000 tr/min
débit volumique	1600 m <sup>3</sup> /h
pression statique aval	100 000 Pa
masse volumique amont	1.1739 kg/m <sup>3</sup>
taux de turbulence amont	5%

TAB. 3.1 – Conditions de fonctionnement nominales du ventilateur

Le fluide est de l'air assimilé à un gaz parfait. On suppose de plus que le ventilateur fonctionne en aspiration libre, à savoir sans pré-rotation de l'écoulement amont.

Dans la géométrie testée, la veine comportant le rotor et le carter est équipée de deux plénums de grande dimension.

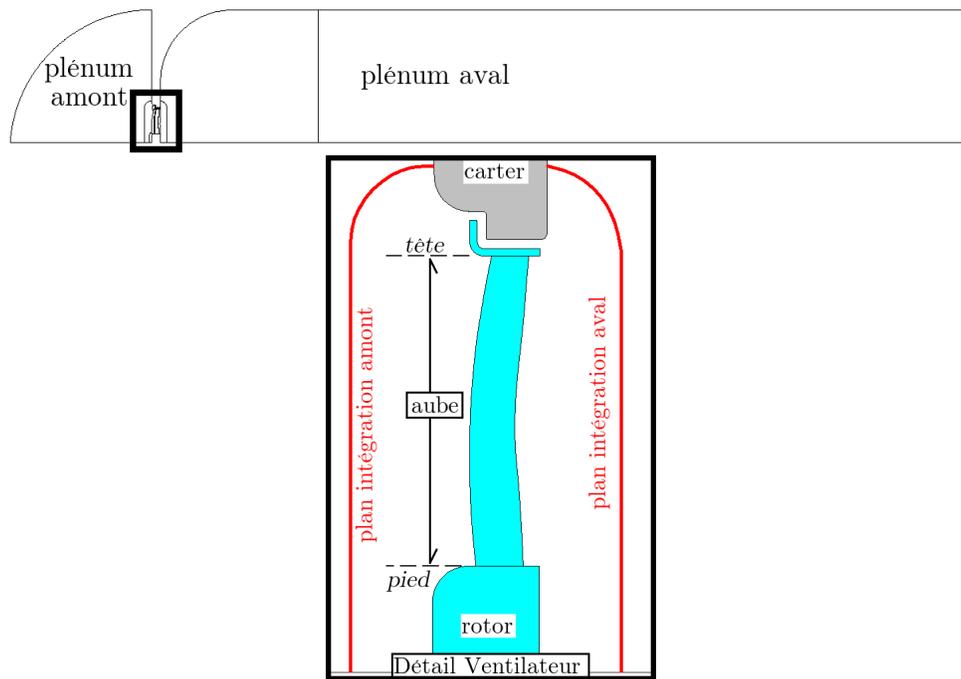


FIG. 3.3 – Configuration numérique simulée - Coupe méridienne

Comme on peut le voir sur la coupe méridienne (Fig. 3.3), les plénums sont nettement plus grands que le ventilateur. On impose sur le plénum amont un écoulement entrant normal à la surface sphérique. Sur le plénum de sortie, très allongé, on considère que le milieu est poreux, ce qui permet de lisser les inhomogénéités radiales et azimutales de la pression statique, laquelle est imposée sur le plan à l'extrême droite de la veine.

Sur la figure (Fig. 3.3), et plus particulièrement sur le détail au niveau du ventilateur, on a représenté en trait rouge la position des plans d'intégration servant au calcul des grandeurs moyennes en amont et en aval du ventilateur. Ces plans sont en particulier utilisés pour calculer les performances du rotor. L'aube et le jeu sont pris en compte directement dans le calcul des performances.

Les performances du ventilateur sont définies par l'augmentation de pression entre l'amont et l'aval (i.e. le taux de compression), ainsi que par le couple appliqué sur l'axe de rotation et le rendement. Pour la géométrie de référence, les performances sont données dans la table [3.2].

écart de pression aval-amont	198 Pa
couple	0.499 N.m
rendement	0.641

TAB. 3.2 – Performances du ventilateur - Configuration de référence

Comme on peut le remarquer, le rendement de la machine de référence (résultant d'une optimi-

sation rappelons-le) n'est pas exceptionnel. L'analyse du champ aérodynamique donne la réponse à ce problème.

La figure (Fig. 3.4) montre l'écoulement méridien moyen au niveau du rotor. On représente les composantes de vitesse axiale et azimutale.

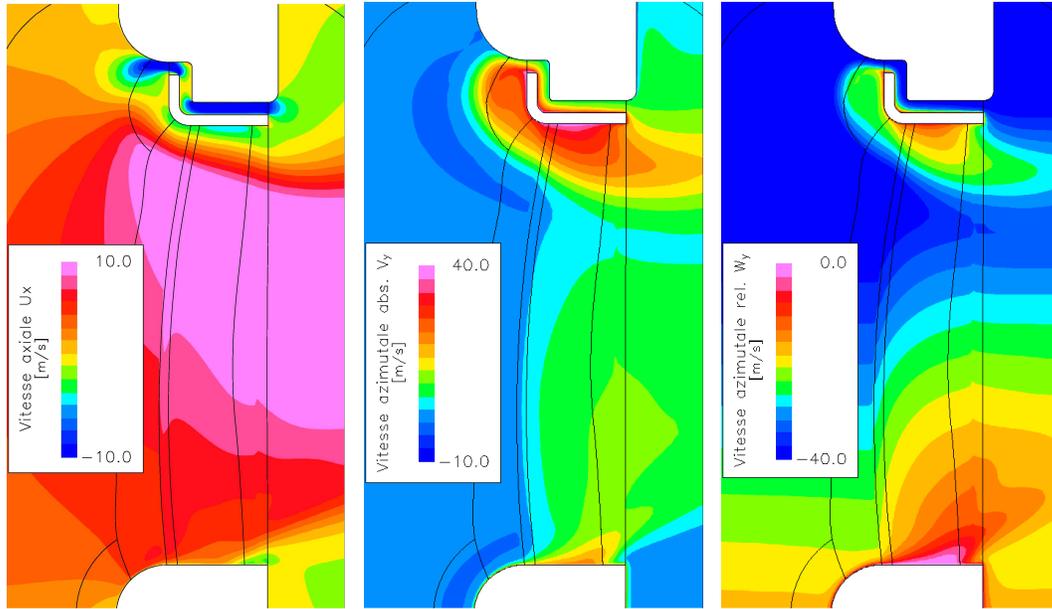


FIG. 3.4 – Composante axiale  $U_x$  (gauche), azimutale absolue  $V_y$  (centre) et relative  $W_y$  (droite) moyenne de vitesse au niveau du rotor - Configuration standard

On remarque que l'écoulement au voisinage de la virole est très différent du reste de l'aube. Cette zone est située entre environ 90% et 100% de la hauteur d'aube. L'écoulement se caractérise dans cette zone par une vitesse axiale plus faible, et même négative (le niveau jaune correspond à 0 m/s) dans la zone proche de la paroi inférieure de la virole. De même, la zone supérieure de l'aube est soumise à une vitesse azimutale absolue  $V_y$  beaucoup plus forte que le reste de l'aube, et une vitesse azimutale relative  $W_y$  beaucoup plus faible :

- pour la composante absolue, on remarque que l'amont de la roue est à peu près uniforme, avec une vitesse azimutale absolue  $V_y$  légèrement positive ( $\approx 0.5$  m/s). Cette vitesse correspond à la mise en rotation de l'écoulement amont (initialement sans  $V_y$ ) par les effets potentiels et visqueux remontant de l'aube. On reste cependant assez proche de conditions d'aspiration libre. En revanche, on trouve une zone de forte vitesse azimutale absolue en tête, assez loin devant la sortie du jeu. Cette zone de survitesse se propage ensuite jusqu'à la tête d'aube.
- Les variations de vitesse absolue en tête se traduisent par un déficit très marqué de vitesse azimutale relative  $W_y$  en amont : celle-ci augmente progressivement au fur et à mesure que le rayon augmente, puis elle chute brutalement dans la zone proche virole.

On remarque aussi un problème en pied d'aube, matérialisé par une vitesse azimutale relative  $W_y$  proche de zéro. Il s'agit en pratique d'un décollement des profils en pied d'aube. Ce mécanisme ne sera pas approfondi ici car il ne relève pas directement d'un effet du jeu.

On peut légitimement se demander d'où viennent ces perturbations du champ de vitesse en tête :

### 3.2.2.1 Déficit de vitesse axiale

Pour la vitesse axiale, le problème vient de la composante axiale du jet débouchant du jeu, dirigé vers l'amont. On observe au niveau de la sortie du jeu une poche de vitesse axiale très négative, de l'ordre de -10 m/s, correspondant au fluide sortant du jeu. Cette poche est assez étendue axialement et elle déborde même la partie du carter en surplomb du ventilateur. Elle impacte alors le fluide circulant verticalement le long de la paroi carter. L'interaction du fluide sortant du jeu avec le fluide venant de l'amont provoque l'apparition d'un tourbillon au niveau de la lèvre verticale de la virole, noté A sur la figure (Fig. 3.5).

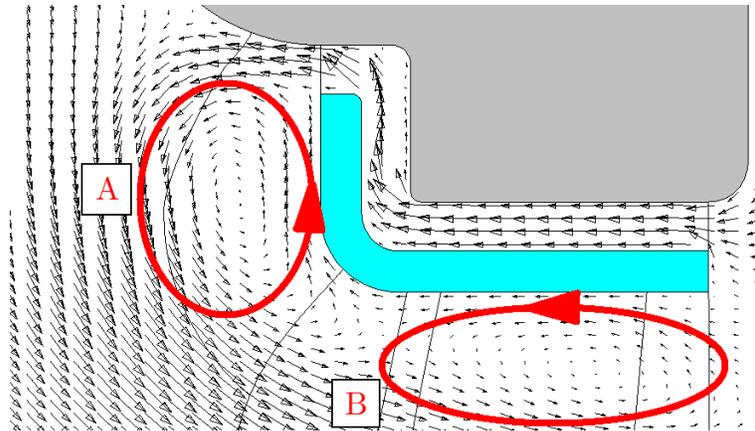


FIG. 3.5 – Champ vectoriel méridien de vitesse en tête d'aube

Comme on peut le voir, ce tourbillon s'étend suffisamment pour perturber l'écoulement en tête d'aube. Du fait de ce tourbillon A, le fluide amont se dirigeant *vers l'aube et donc vers l'aval* se trouve écarté de la paroi de la virole. Au voisinage de cette dernière, le fluide a plutôt tendance à remonter l'écoulement. En tête d'aube, le fluide proche de la virole est donc aspiré vers l'amont, ce qui génère un deuxième tourbillon méridien, noté B sur la figure (Fig. 3.5). Le tourbillon B dégrade significativement les conditions de fonctionnement de la tête d'aube, puisque dans cette zone, l'écoulement n'est plus cohérent avec un fonctionnement en ventilation.

De manière évidente les tourbillons A et B sont très fortement couplés puisque l'aspiration dans la zone proche virole générée par A bénéficie aussi à B. Le tourbillon A est pour sa part très lié à l'intensité du jet sortant du jeu. On peut supposer que plus ce jet sera rapide (en direction axiale), plus il pénétrera dans l'écoulement "sain" amont et plus le tourbillon A sera important.

### 3.2.2.2 Augmentation de la vitesse azimutale absolue

Pour la vitesse azimutale, le phénomène vient là aussi du fluide sortant du jeu. Dans le repère absolu, la vitesse azimutale sur les parois du rotor, et notamment de la virole, est donnée par :

$$V_y^{paroi} = R_z \times \Omega$$

où  $\Omega$  est la vitesse de rotation, et  $R_z$  le rayon de la paroi considérée.

En conséquence, plus la paroi se situe à un rayon élevé, plus la vitesse azimutale absolue sera forte. On représente sur la figure (Fig. 3.6) le détail du champ de vitesse azimutale au niveau de la virole.

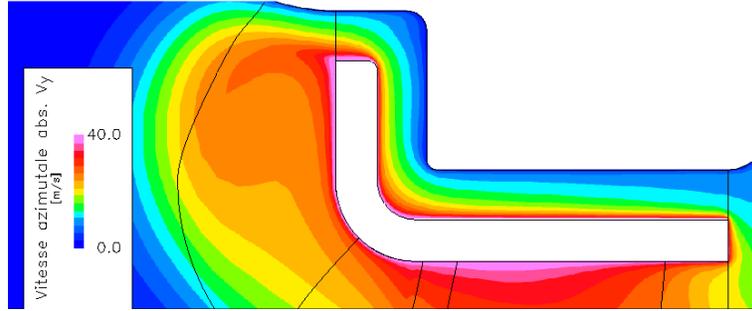


FIG. 3.6 – Vitesse azimutale absolue au voisinage de la virole - Configuration standard

On voit clairement le développement des couches limites à l'intérieur du jeu, caractérisées par un niveau de vitesse très élevé. Au niveau de la sortie du jeu, l'écoulement décolle légèrement dans la direction verticale, ce qui se repère par une plus grande extension radiale de la zone de forte vitesse. Il est à noter que la paroi de la virole en sortie du jeu étant la partie du rotor avec le plus grand rayon, cette zone présentera donc la plus forte vitesse azimutale absolue à la paroi mobile.

On repère aussi clairement l'entraînement du fluide en amont par la virole au niveau de la lèvre, symbolisé par une poche de vitesse élevée le long de la paroi verticale.

La couche limite en sortie de jeu fusionne avec celle le long de la paroi verticale pour donner naissance à une "langue" de vitesse élevée se développant en face de la sortie du jeu. Cette zone de survitesse azimutale se mélange ensuite progressivement avec le fluide amont qui n'a presque pas de vitesse selon la direction azimutale. La zone de mélange correspond en fait au tourbillon A présenté sur la figure (Fig. 3.5). Il s'agit donc bien de la zone d'interaction entre le flux issu du jeu et le flux amont.

Cette interaction entre flux amont et flux de jeu aboutit à la mise en rotation du fluide se dirigeant vers le ventilateur. Cela se traduit concrètement par l'apparition d'une poche de vitesse azimutale assez forte en face de la paroi verticale de la virole, poche qui est ensuite convectée vers la tête de l'aube. Dans le repère relatif, l'interaction du flux de jeu avec le flux amont induit une diminution sensible du niveau de vitesse azimutale relative.

De manière évidente, plus le fluide en sortie de rainure aura une vitesse azimutale élevée (dans le repère absolu), plus le mouvement de pré-rotation du flux amont induit par le flux de jeu sera important.

### 3.2.2.3 Couplage des deux effets de jeu et impact sur le ventilateur

La combinaison des deux mécanismes qui viennent d'être présentés impacte très fortement les conditions de fonctionnement en tête d'aube. Pour s'en convaincre, il suffit de tracer le profil amont d'angle relatif  $\beta$  (Fig. 3.7). On rappelle que cet angle est obtenu par :

$$\beta = \operatorname{atan} \frac{W_y}{U_x} = \operatorname{atan} \frac{V_y - R_z \Omega}{U_x}$$

On considère ici plutôt l'angle relatif, et non l'angle absolu, car il est plus pertinent vis à vis du rotor. Les profils sont tracés au niveau du plan amont de l'aube (trait rouge à gauche sur le schéma méridien - Fig. 3.7).

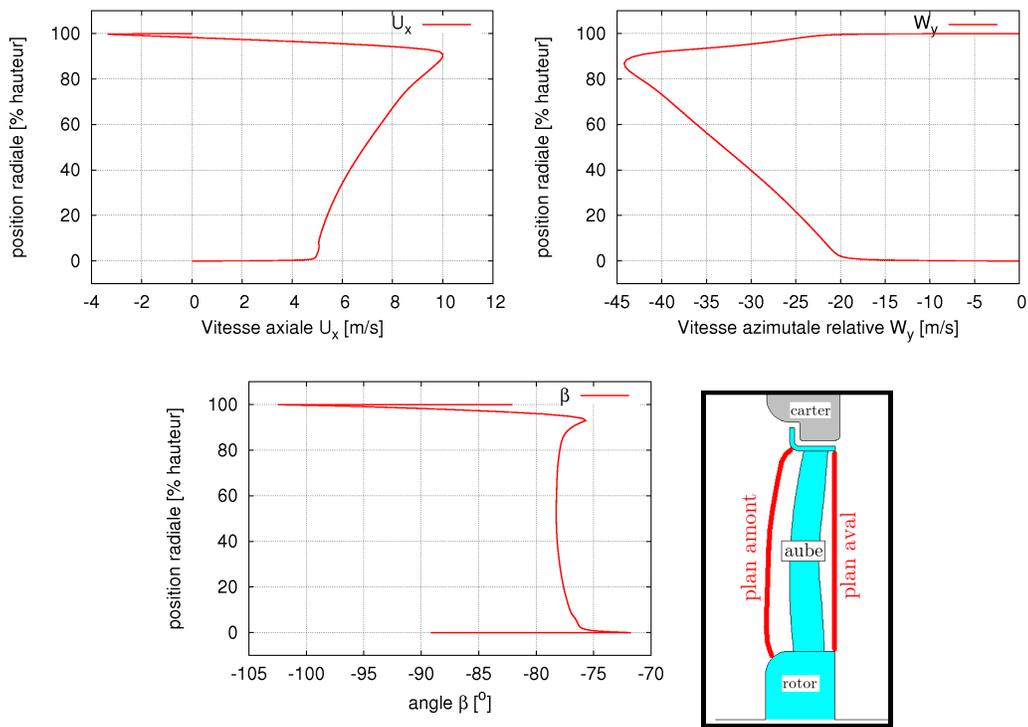


FIG. 3.7 – Profils amont des composantes  $U_x$ ,  $W_y$  et d'angle relatif  $\beta$  - Configuration standard

On retrouve très clairement les effets des structures générées en face de la sortie de jeu. Les deux composantes de vitesse montrent un gros déficit, entre environ 90% et 100%. On retrouve en particulier une zone de vitesse axiale négative, entre 97% et 100% de la hauteur.

Ces variations induisent une modification sensible de l'angle  $\beta$ . Entre 10% et 80% de la hauteur de l'aube il varie de moins de  $3^\circ$ . A l'opposé, entre 90% et 100% de la hauteur d'aube (soit à peu près 1 mm), il varie de  $28^\circ$ . On observe même un angle  $\beta$  au delà de  $-90^\circ$ , correspondant à la zone où le fluide circule de l'aval vers l'amont.

Pour ce qui est de la géométrie de l'aube, les variations sont bien moindres : entre 90% et 100% de la hauteur, le calage du bord d'attaque de l'aube évolue beaucoup plus lentement. Il en résulte une sur-incidence très forte sur la tête d'aube. On assiste alors au décrochage de l'aube sur cette partie, comme l'illustre la figure (Fig. 3.8).

Cette figure représente le champ vectoriel de vitesse relative, superposé à la carte de vitesse azimutale relative pour mieux faire apparaître la recirculation se développant sur l'extrados en aval du bord d'attaque. On remarquera au passage que la poche  $W_y$  positive correspondante se retrouve aussi sur la carte méridienne (Fig. 3.4 - droite) : on y observe une poche de  $W_y$  nulle sous la paroi horizontale inférieure de la virole. C'est la trace, dans une moyenne méridienne, du décrochage de la tête d'aube.

De manière générale, la désadaptation de l'écoulement en tête d'aube se traduit par une dégradation forte des performances, et notamment une augmentation des pertes.

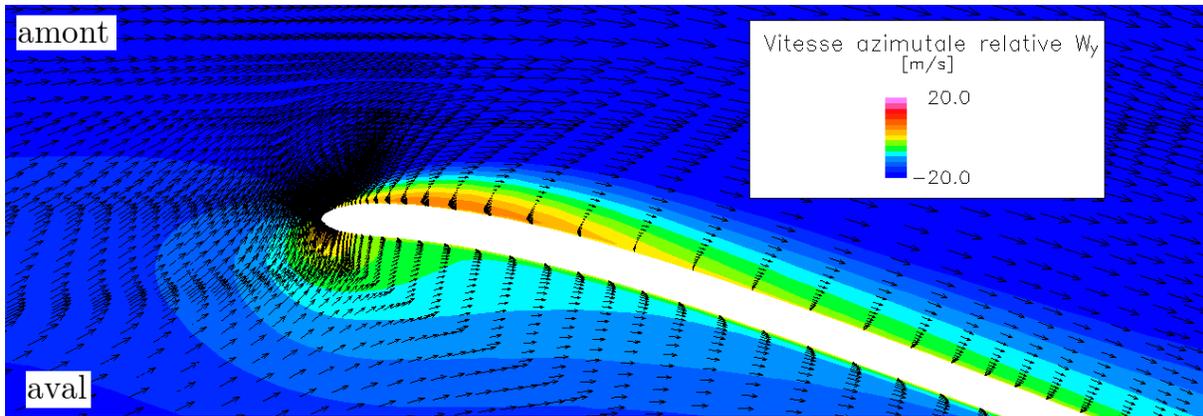


FIG. 3.8 – Champ de vitesse relative - Coupe aube à aube à 97% de hauteur

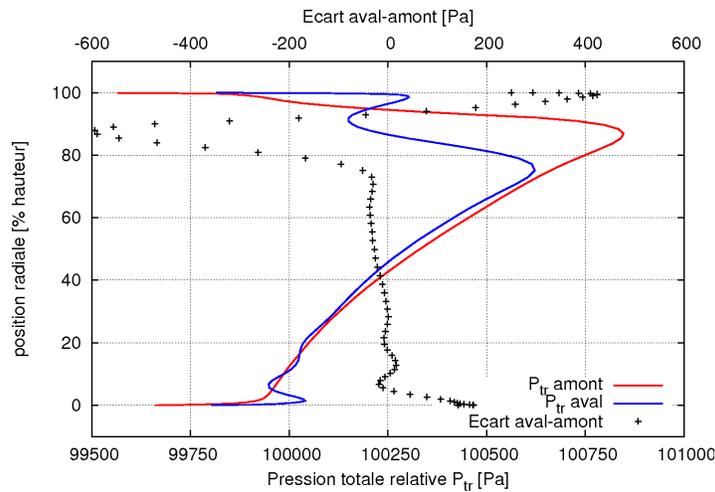


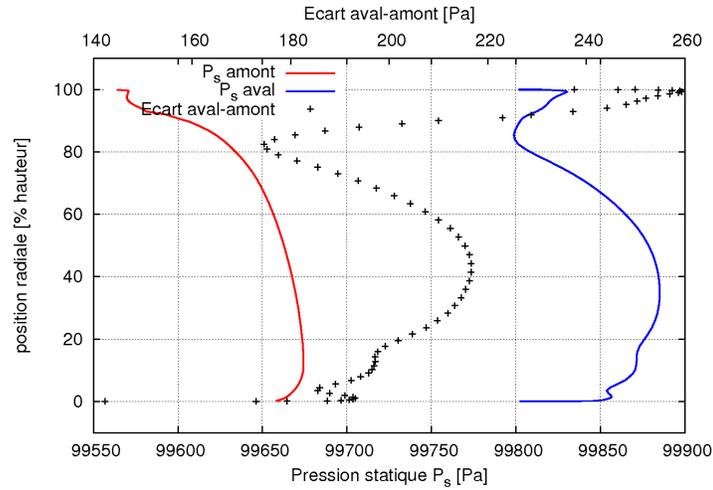
FIG. 3.9 – Profils de pression totale relative  $P_{tr}$  - Configuration standard

On voit facilement sur les profils de pression totale relative (Fig. 3.9) que les pertes augmentent en tête d'aube. Entre environ 75% et 95% de la hauteur, il y a une très nette diminution de  $P_{tr}$  entre l'amont et l'aval de la roue. Au delà de 95% l'écart s'inverse : la pression totale relative en aval est plus forte que l'amont. Il semblerait que ce soit lié au phénomène de recirculation (tourbillon B de la figure 3.5) qui entraîne une vitesse axiale négative dans cette zone. Il est cependant assez difficile d'expliquer précisément cette inversion des courbes.

Malgré ce comportement au proche voisinage de la virole, l'écart moyen entre les courbes amont et aval reste nettement négatif, en grande partie à cause de la chute observée entre 75% et 95% de la hauteur.

Les profils de pression statique sont représentés sur la figure (Fig. 3.10).

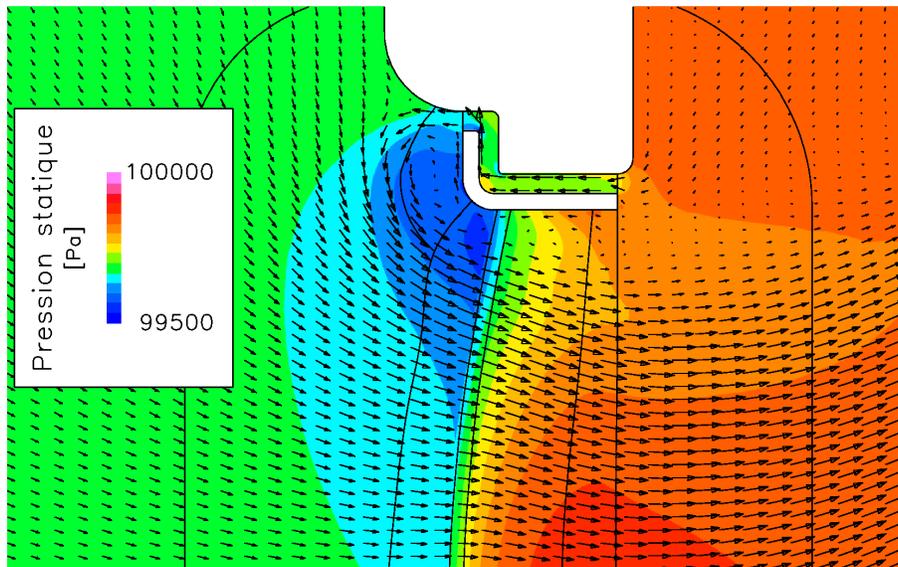
L'évolution radiale de  $P_s$  est un peu plus difficile. Pour le profil amont, on observe une décroissance monotone sur toute la hauteur. Ce comportement est à mettre en rapport avec l'augmentation de la vitesse liée au rayon. On peut par exemple vérifier sur la figure (Fig. 3.4 - gauche) que la composante  $U_x$  en amont augmente lorsqu'on se rapproche de la tête d'aube. La décroissance s'accélère

FIG. 3.10 – Profils de pression statique  $P_s$  - Configuration standard

entre 80% et 100% de la hauteur. C'est la conséquence des mécanismes tourbillonnaires mis en œuvre au débouché du jeu.

En aval, le profil est plus complexe. Hormis une légère oscillation due au décollement en pied,  $P_s$  croît de 0 à 40% de la hauteur, puis décroît de 40 à 85%, avant de re-augmenter entre 85 et 100%. Compte tenu de la hauteur des zones affectées, seule la recroissance finale (85-100%) est directement reliée aux effets du jeu.

Il semblerait que ce soit le blocage aérodynamique, lié au mouvement de l'aval vers l'amont (tourbillon B - Fig. 3.5) qui soit responsable de la remontée de  $P_s$  en aval. Pour clarifier ce point, on peut par exemple tracer la carte méridienne de pression statique en tête superposée au champ de vitesse (Fig. 3.11)

FIG. 3.11 – Champ méridien de pression statique  $P_s$  - Configuration standard

On voit ainsi que la zone en aval de l'aube, où la pression statique augmente, est aussi la zone de très faible vitesse qui correspond au tourbillon méridien B.

### 3.2.2.4 Synthèse sur les effets de jeu pour le ventilateur de référence

Comme on vient de le voir, une partie non négligeable des pertes est générée en tête d'aube, à cause de perturbations de l'écoulement induites par le jeu. L'écoulement sortant du jeu, dirigé de l'aval vers l'amont de la roue mobile, impacte le flux amont principal et dégrade les caractéristiques de ce dernier.

Les deux principaux facteurs de dégradation sont :

- La vitesse axiale du fluide sortant du jeu, et par extension, le débit circulant dans le jeu : elle génère un tourbillon en amont de la roue, tourbillon qui vient ensuite modifier sensiblement l'écoulement au niveau de la tête d'aube, et notamment la vitesse débitante en tête.
- La vitesse azimutale moyenne en sortie de jeu. Par mélange visqueux avec le flux amont, elle génère un mouvement de pré-rotation rapide en amont de la roue. La zone affectée est là aussi proche de la virole. Ce mouvement est assez perturbant car il modifie sensiblement les conditions en tête d'aube. La vitesse azimutale du fluide dans le jeu est intimement liée au mouvement même du rotor.

Ces deux effets sont présents simultanément, et ils conduisent à la désadaptation de la tête d'aube. La partie supérieure de l'aube ne fonctionne donc pas comme attendu.

Un troisième effet du jeu, plus global, n'a pas été directement abordé jusqu'à présent. Il s'agit de la diminution du débit utile pour le refroidissement. Ce débit de fuite est bien évidemment lié à la composante axiale de l'écoulement dans le jeu, c'est à dire à la vitesse débitante, et donc aux différentes structures de l'écoulement ; mais il s'agit surtout d'un indicateur de la performance du système de refroidissement.

En effet, le débit de fuite remontant vers l'amont du ventilateur au travers du jeu est, par définition, inutilisable pour le refroidissement automobile puisque le fluide mis en jeu ne traverse pas l'échangeur. En revanche, par conservation du débit, tout le fluide qui remonte vers l'amont finira par repasser au travers du ventilateur. Ainsi, une partie du débit circulant au travers du ventilateur ne sert qu'à entretenir le flux dans le jeu, le reste étant le débit venant de l'amont et servant au refroidissement. En terme de débit massique, on peut écrire :

$$\dot{m}_{\text{ventilateur}} = \dot{m}_{\text{refroidissement}} + \dot{m}_{\text{jeu}}$$

En conséquence, on peut imaginer un cas extrême (certes caricatural) où  $\dot{m}_{\text{ventilateur}} = \dot{m}_{\text{jeu}}$ . Il n'y alors plus de débit pour le refroidissement : tout le fluide traversant le ventilateur va ensuite passer dans le jeu. Bien évidemment, si  $\dot{m}_{\text{refroidissement}} = 0$ , le GMV ne sert alors strictement à rien. Dans un tel cas, on établit une sorte de boucle d'auto-alimentation du ventilateur où le fluide en aval du rotor revient en amont via le jeu.

On est, en pratique, assez loin d'une telle extrémité, mais le débit de jeu n'en demeure pas moins assez important. Pour le ventilateur de référence Valéo, au point de fonctionnement nominal, on a ainsi :

$\dot{m}_{refroidissement}$	1600 kg/h
$\dot{m}_{jeu}$	92 kg/h
$\dot{m}_{ventilateur}$	1692 kg/h
$\frac{\dot{m}_{jeu}}{\dot{m}_{ventilateur}}$	5.4%

Le débit de jeu n'est pas ici totalement négligeable. On peut donc considérer que l'on perd une partie de l'énergie fournie au ventilateur pour faire circuler du fluide au travers du jeu.

Pour conclure cette partie, on nuancera les "mauvaises" performances de ce ventilateur. D'après les informations fournies par Valéo, ce ventilateur a été dessiné de manière à *minimiser* les effets de la distorsion de l'écoulement en tête. La désadaptation de la tête d'aube est inévitable dans ces conditions de fonctionnement, mais le décollement du profil reste de taille modérée grâce au dessin de la roue qui tient compte de la présence d'un écoulement de jeu fort.

### 3.3 Traitement de carter proposé - Principes et objectifs

Comme on l'a vu dans la partie 3.2.2, les ventilateurs automobiles, et par extension les turbomachines avec des aubes à talon, sont soumis à des effets de jeu bien particuliers, liés à la présence d'une virole en tête d'aube. Les turbomachines avec des aubes à virole se distinguent des turbomachines à aubes "libres" par les mécanismes de l'écoulement de jeu. Pour une turbomachine à aubes libres, l'écoulement de jeu met directement en relation l'intrados et l'extrados de l'aube. Les perturbations générées sont visibles au niveau de l'aube et en aval (cf. le classique tourbillon de jeu se formant dans ce cas), mais assez peu souvent en amont de la roue. Ces perturbations induisent essentiellement des pertes plus grandes et des instabilités fortes conduisant, dans les cas extrêmes, au pompage.

Pour une machine avec une virole, on sépare complètement l'écoulement au niveau de l'aube de l'écoulement de jeu. En conséquence, les effets du jeu se font d'abord sentir en amont (ou en aval pour une turbine) de la roue considérée, et ils sont ensuite convectés jusqu'aux aubes. Il existe deux types de perturbation selon la catégorie de machine considérée :

- Compresseurs : l'écoulement de jeu circule de l'amont vers l'aval du compresseur, ce qui se traduit d'une part par une dégradation des conditions en amont de la roue considérée, et d'autre part par une baisse du débit utile du compresseur.
- Turbines : l'écoulement de jeu circule de l'amont vers l'aval de la roue. Ses effets portent sur la dégradation de l'écoulement en aval de la roue considérée, ce qui peut poser un problème certain en présence d'une autre roue en aval. L'écoulement de jeu permet aussi au fluide d'éviter les aubes, ce qui limite donc l'énergie récupérable par la roue

Le problème sur les turbomachines avec virole consiste à réduire le plus possible la perturbation induite par l'écoulement de jeu. Cela passe entre autre par :

- **la limitation du débit de jeu**
- **la limitation de la giration en sortie de jeu** (c'est à dire en amont de la roue)

Notre étude sera donc consacrée à proposer un traitement de carter qui satisfasse ces deux objectifs.

### 3.3.1 Traitements de carter existants

Il y a dans la littérature un très grand nombre d'articles et brevets concernant les traitements de carter applicables aux turbomachines. Nous ne considérerons que ceux qui traitent des machines avec viroles. Pour les autres configurations, et surtout pour les compresseurs sans virole, la motivation la plus souvent mise en avant pour le dessin d'un traitement de carter est le besoin d'améliorer la marge au pompage, quitte à dégrader légèrement les performances ([196, 145, 166] par exemple).

#### 3.3.1.1 Joint labyrinthisque

Le choix de traitement de carter adapté aux viroles est de facto beaucoup plus restreint. Le traitement de carter le plus connu dans cette catégorie est sans doute le joint labyrinthisque, couramment employé sur les turbines [155, 37, 200, 147] ou parfois sur les compresseurs [194].

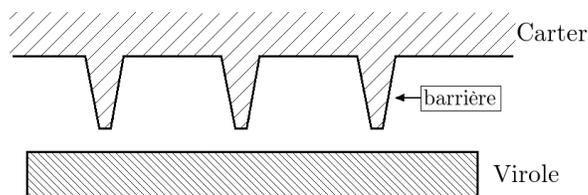


FIG. 3.12 – Schéma méridien du joint labyrinthisque

Ce joint permet généralement une très bonne réduction du débit, mais il est souvent beaucoup plus médiocre pour le problème de la giration. Les barrières qui constituent le labyrinthe génèrent des décollements dans le jeu et autorisent donc le développement de couches limites assez importantes. La couche limite attachée au rotor entraîne donc facilement le fluide en rotation. D'autre part, les études montrent [186, 197] que ce type de labyrinthe n'est vraiment efficace qu'en réduisant fortement les sections au niveau des barrières. Cela semble assez peu adapté au cas du ventilateur pour lequel le jeu minimum admissible  $\delta$  vaut 2-3 mm.

#### 3.3.1.2 "Bladelets"

Il s'agit d'un traitement de carter pour turbine assez spécial proposé par Wallis et al. [191] pour essayer de récupérer une partie de l'énergie cinétique associée au mouvement axial. Le dispositif se compose essentiellement de deux barrières ("fins") sortant de la paroi carter, et d'un ensemble d'aubes miniatures ("bladelets" ou "turning device") fabriquées sur la paroi de la virole.

Avec un tel système, les barrières servent à plaquer l'écoulement sur la virole et sur le système de déviation. Celui-ci agit de la même manière qu'une turbine. Les auteurs notent une légère diminution de la vitesse azimutale dans le jeu, du fait de ce système.

L'article ne fournit cependant aucune indication sur les performances de ce dispositif dans un mode dégradé, c'est à dire pour un jeu un peu plus élevé. Dans la configuration décrite, le jeu entre les barrières et la virole est de 0.5 mm. On peut légitimement se demander comment évoluerait l'écoulement de jeu pour un jeu plus élevé, proche des 2 à 3 mm envisagés pour le ventilateur.

Ce dispositif présente en outre l'inconvénient d'être difficile à fabriquer. La création des mini-aubes sur la virole peut être délicate en raison de leur petite taille. On retiendra l'idée générale de ce traitement, mais pas forcément les détails.

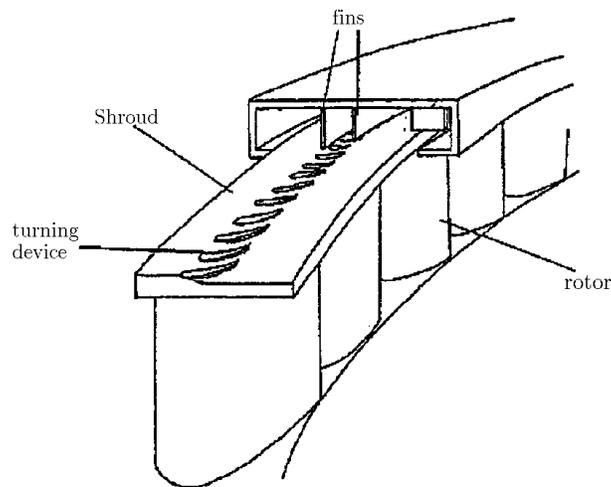


FIG. 3.13 – Configuration avec "bladelets" - reproduction de Wallis et al., 2001

### 3.3.1.3 Traitement de carter pour ventilateur automobile

Si l'on revient plus spécifiquement à la problématique du ventilateur automobile, on peut citer plusieurs systèmes conçus pour améliorer le fonctionnement du rotor.

**Forme de la virole** Le premier d'entre eux est la forme assez particulière de la virole sur laquelle nous ne nous sommes pas attardés jusqu'à présent (cf. Fig. 3.2). Le coude que fait la virole du côté de l'amont du ventilateur, et la lèvre radiale qui en résulte, sont couramment utilisés sur les ventilateurs automobiles actuels. Cette géométrie de la virole, et par extension du jeu est utilisée pour deux objectifs :

- Augmenter les pertes de charge dans le jeu, ce qui permet de *réduire le débit*. Le canal de jeu connaît deux changements brusques de direction qui sont responsables de plusieurs décollements de l'écoulement (Fig. 3.14).

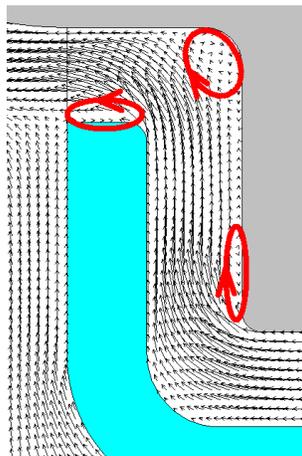


FIG. 3.14 – Décollements dans le jeu

Les recirculations qui se développent dans le jeu permettent de réduire un peu la section débitante, ce qui est assez intéressant du point de vue de la limitation de débit.

- Ecarter la sortie du jeu de la tête d'aube. De manière évidente, plus la lèvre radiale sera haute, plus la section de sortie du jeu sera éloignée de la tête d'aube. On espère limiter ainsi l'impact des structures apparaissant en sortie de jeu sur le fonctionnement du ventilateur.

L'utilisation d'une lèvre radiale n'est toutefois pas très pertinente du point de vue de la réduction de la giration. En effet, comme on augmente le rayon de la section de sortie de jeu, on augmente aussi la vitesse d'entraînement par la paroi. On obtient alors un niveau plus élevé de vitesse azimutale absolue en sortie de jeu.

**Obstacles dans le jeu** Il existe d'autres solutions pour essayer d'améliorer l'écoulement de jeu. Un brevet déposé par Siemens VDO Automotive [143] propose ainsi de mettre en place un labyrinthe assez spécial dans le jeu : il s'agit d'une sorte de crénelage triangulaire opposé à la lèvre radiale de la virole (3.15).

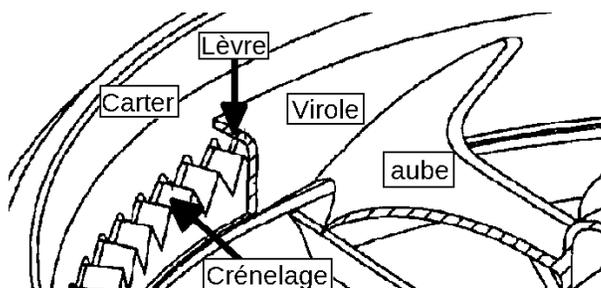


FIG. 3.15 – Traitement de carter Siemens

D'autres brevets [175, 198] envisagent d'utiliser des barrières purement axiales pour limiter la giration, mais pas forcément le débit. Dans l'ensemble, il n'existe pas à notre connaissance d'étude publiée prouvant l'efficacité de ces dispositifs et détaillant leur fonctionnement.

### 3.3.2 Principe du traitement de carter proposé

Le but de cette étude est de proposer un traitement de carter simple, et surtout robuste, afin de pouvoir l'appliquer à une large variété de turbomachines. Les ventilateurs de refroidissement automobiles sont une des premières applications de ce traitement de carter, mais on peut aussi espérer l'appliquer à des machines avec des conditions de fonctionnement différentes (turbine, géométrie avec un jeu minimal faible, ...).

Revenons sur les deux objectifs principaux que nous nous sommes fixés.

Pour limiter la giration en sortie de jeu, ce traitement de carter doit avoir une fonction de **guidage du fluide** afin de contrer le mouvement azimutal entraîné par la virole. Pour ce faire, la solution la plus évidente qui vient à l'esprit est de mettre en œuvre une sorte de stator avec des petites "aubes" (un peu comme la solution proposée par [191]) afin de dévier une partie de l'écoulement. Cependant, l'utilisation de *véritables* aubes n'est pas satisfaisante car :

- c'est un dispositif relativement complexe à fabriquer.

- on retombe dans la problématique de l'écoulement de jeu sur des aubes à tête libre : entre les aubes du traitement de carter et la virole, le jeu peut être important (2 à 3 mm pour un GMV), et le fonctionnement de ces mini-aubes risque d'être très perturbé, l'écoulement contournant les canaux interaubes.
- un traitement de carter de ce type serait assez sensible aux conditions de fonctionnement de la machine. De manière évidente, si le régime du ventilateur varie, entraînant avec lui une variation de l'incidence du fluide dans le jeu, les profils utilisés ne seront plus adaptés et risquent donc de ne pas fournir la déviation attendue.

Il faut donc disposer d'une géométrie beaucoup plus simple pour faire le traitement de carter.

Le deuxième objectif est la **limitation du débit** de jeu. L'écoulement dans le jeu étant essentiellement piloté par le différentiel de pression statique entre l'aval et l'amont du ventilateur, noté  $\Delta P_s^{\text{ventilateur}}$ . On comprend que plus les pertes de charge dans le jeu seront importantes, plus le débit circulant à même  $\Delta P_s^{\text{ventilateur}}$  sera faible. Vu autrement, si on se place à débit constant, plus les pertes de charge seront importantes *dans le jeu*, plus  $\Delta P_s^{\text{ventilateur}}$  sera élevé. Il nous faut donc disposer d'une géométrie qui **maximise les pertes de charge**, ce qui est assez inhabituel.

On privilégiera donc des géométries assez mauvaises du point de vue aérodynamique afin d'avoir le plus de dissipation possible. En d'autre terme, l'objectif est de concevoir une "turbomachine" (construite dans la veine de jeu) présentant les plus grandes pertes possibles.

Notre choix s'est porté sur **un rainurage hélicoïdal de la paroi carter**, inspiré des pompes à vide du type Holweck (cf. 3.3.3). Quel est l'intérêt de cette géométrie ?

- Les rainures hélicoïdales permettent de guider le fluide selon une direction bien précise. On peut ainsi communiquer au fluide une vitesse azimutale qui s'oppose au mouvement de la virole.
- Les rainures se prêtent assez bien à la génération de pertes de charge car on peut avoir des déviations brusques de l'écoulement qui conduiront à des décollements et donc à des pertes.

### 3.3.3 Origine du traitement de carter - Pompes Holweck

Le traitement de carter envisagé s'inspire en partie de la géométrie des pompes Holweck [77], qui sont des pompes turbomoléculaires utilisées pour des applications dans un vide assez poussé. Précisons immédiatement que si notre dispositif présente quelques similitudes du point de vue géométrique avec ces pompes, il n'est en aucun cas comparable du point de vue des conditions de fonctionnement.

Les pompes Holweck sont conçues en effet de façon à générer un débit au sein d'un gaz très raréfié ( $P_s \approx 0.1 - 1$  Pa), pour lequel le nombre de Knudsen  $K_n$  est fort.

$$K_n = \frac{\lambda}{d} \quad (3.1)$$

où  $\lambda$  est le libre parcours moyen et  $d$  une distance caractéristique de l'écoulement ou de la géométrie. Le nombre de Knudsen typique d'un écoulement compressible visqueux, assimilable à un milieu continu, est très inférieur à 0.01, alors que les pompes Holweck sont dessinées pour fonctionner sur la plage  $0.1 < K_n < 3$ , des valeurs supérieures à 1 équivalent à un régime moléculaire libre [10]. De la même manière, le nombre de Reynolds associé à ces pompes est de l'ordre de 100, ce qui est, ici aussi, bien loin des conditions caractéristiques d'un écoulement en turbomachine classique.

Dans ces conditions de fonctionnement, le milieu gazeux peut être assimilé à un ensemble de particules avec peu d'interactions. Le problème du pompage de fluide est alors de communiquer un mouvement axial à ces particules "isolées". Les lois usuelles, propres aux milieux continus, ne sont plus applicables, mais on peut en revanche considérer l'écoulement comme un problème de balistique à l'échelle moléculaire. Les pompes de type Holweck génèrent l'aspiration des particules au moyen de réflexions (ricochets) sur des parois inclinées.

Une pompe Holweck se compose habituellement de deux éléments principaux (Fig. 3.16) :

1. Un cylindre lisse, généralement en rotation
2. un cylindre rainuré, généralement fixe.

Ces deux éléments sont montés coaxialement. Dans la configuration "classique", le stator, rainuré sur sa face intérieure, entoure le cylindre lisse du rotor.

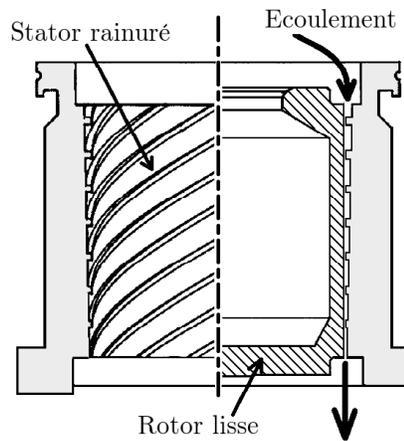


FIG. 3.16 – Coupe d'une pompe Holweck à rotor lisse

Dans le repère associé aux rainures, on communique un mouvement transversal relatif aux particules grâce à l'autre pièce. L'entraînement axial des particules est assuré par transfert de quantité de mouvement lors des chocs avec les parois. Il y a deux modélisations possibles, selon qu'on travaille ou non en régime moléculaire libre [163, 167, 169]. On peut ainsi soit utiliser une approche statistique de type Monte-Carlo, pour les régimes libres, soit un code visqueux plus classique, pour un milieu à peu près continu. Pour le régime libre, on peut, avec *une approximation très grossière*, assimiler la déflexion d'une particule par les rainures à une réflexion élastique sur une paroi sans frottement.

Il existe plusieurs études qui analysent les caractéristiques de pompage en fonction de paramètres géométriques comme la forme, l'angle, la hauteur ou la largeur des rainures ou encore le jeu [180, 169]. De manière assez évidente, il en ressort que les performances sont améliorées lorsque le jeu diminue. Pour ce qui est des autres paramètres, les résultats sont moins intuitifs.

- Angle des rainures : Tsui et al. [180] relèvent un angle de rainure optimal au sens du taux de compression. Cet optimum est, selon les auteurs, un compromis entre la surface des parois latérales des rainures, terme intervenant dans l'expression intégrale des échanges de quantité de mouvement, et la quantité de mouvement transmissible par les parois.

- Hauteur des rainures : une hauteur accrue amène, à débit constant, une réduction de la vitesse, ce qui se traduit en pratique par un risque accru d'inversion du débit au sein de la rainure. En conséquence, le taux de compression atteignable par la pompe est réduit.
- Largeur des rainures : des rainures plus larges permettent une meilleure répartition de pression, favorable à une augmentation de la compression

L'étude de Boulon et Mathes [10] montre de plus un écoulement assez complexe en régime faiblement visqueux. Ils présentent, dans un plan "aube à aube" (rainure à rainure ici), des recirculations apparaissant au niveau des entrées de rainures sur le côté "extrados". Ces tourbillons sont principalement liés au contournement des parois séparant les rainures.

**Lien avec le traitement de carter proposé** Plusieurs auteurs [41, 19, 20, 96] montrent expérimentalement et numériquement que les caractéristiques de pompage, et notamment le taux de compression, s'effondrent lorsque les niveaux de pression amont ou aval remontent vers des valeurs "élevées", c'est-à-dire de l'ordre de la dizaine de millibar. Ce résultat indique clairement que les pompes Holweck ne sont pas directement transposables à un cas opérant à proximité des conditions standard de température et de pression, ce qui est le cas de notre traitement de carter.

Pour renforcer la non-validité (directe) des résultats issus des études sur les pompes Holweck, on remarquera que les conditions de fonctionnement de ces machines sont sans commune mesure avec celles d'un ventilateur automobile, et plus généralement d'une turbomachine basse vitesse. En effet, les vitesses de rotation des pompes sont de l'ordre de plusieurs dizaines de milliers de tours par minute ( $\approx 20000 - 30000$  tr/min). De la même manière, les dimensions caractéristiques sont fortement contraintes, avec un jeu ne dépassant pas 0.5 mm : on est loin des 2.5 mm requis dans le cas du GMV.

Une autre limite vient du fonctionnement même de ces pompes. Le fluide y circule d'une zone de basse pression statique vers une zone de pression statique plus élevée. C'est, en première approche, contradictoire avec le fonctionnement espéré du traitement de carter appliqué à un compresseur. Pour ce dernier, le fluide dans le jeu circule de l'aval du compresseur, donc de la zone de haute pression, vers l'amont où la pression est plus faible. Cela montre en particulier que les pompes Holweck génèrent avant tout une compression, là où le traitement de carter envisagé privilégie surtout l'augmentation des pertes de charge.

On retiendra toutefois la structure géométrique de ces pompes. Celle-ci est fondamentalement proche de ce qui existe au niveau du jeu d'un GMV. En effet, l'analogie entre la paroi supérieure de la virole, c'est à dire la paroi inférieure délimitant le canal de jeu, et le rotor lisse d'une pompe Holweck est évidente. Le traitement de carter proposé, constitué d'un rainurage hélicoïdal du carter en regard de la virole peut donc être vu comme une version dérivée de la géométrie des pompes Holweck.

### Remarque

Définissons immédiatement la convention suivante : dans tout ce qui concernera le jeu, les termes **amont/entrée** et **aval/sortie** sont basés sur l'écoulement **dans le jeu**. Cette convention est vraiment importante dans le cas d'un ventilateur puisque *l'amont du jeu* se situe *en aval du ventilateur* et vice versa. L'entrée et la sortie du jeu sont définies comme les surfaces par lesquelles le fluide entre et sort du jeu.

## 3.4 Modélisation du traitement de carter

Avant toute chose, il convient de **valider le principe** même de ce traitement de carter et **d'analyser son fonctionnement**. A notre connaissance, il n'existe dans la littérature aucune étude permettant d'apporter des indications sur le fonctionnement d'un tel dispositif. Il faut aussi vérifier que ce traitement de carter ne perturbe pas défavorablement l'écoulement de jeu, puisqu'en creusant des rainures dans le carter, on agrandit localement la section de passage de l'écoulement de jeu.

On se concentrera donc dans cette partie sur la modélisation du traitement de carter proposé. Il est nécessaire de décrire entièrement le champ aérodynamique associé au rainurage afin de pouvoir comprendre les différents mécanismes permettant d'atteindre ou non les objectifs que nous nous sommes fixés. Il est cependant pertinent d'utiliser, dans un premier temps, un modèle assez *général et simple* du jeu et des rainures afin de pouvoir évaluer rapidement et précisément son principe. Comme la première application envisagée pour ce traitement de carter est le rotor du GMV, la modélisation sera construite à partir des dimensions caractéristiques de ce cas. On gardera cependant à l'esprit que ce traitement de carter est potentiellement applicable à d'autres types de turbomachines. Cette modélisation doit donc permettre idéalement de s'affranchir des certains effets technologiques liés au rotor, comme la présence d'un coude sur la virole.

L'étude est effectuée en grande partie à partir d'une paramétrisation de la géométrie. Cela permet de déterminer précisément l'influence des différentes grandeurs caractéristiques de la forme sur les champs aérodynamiques, et in fine, on peut optimiser le traitement de carter relativement aux objectifs de réduction du débit et de la giration.

### 3.4.1 Description du modèle de traitement de carter

#### 3.4.1.1 Définition géométrique du modèle

Nous avons choisi de commencer notre étude par un modèle général du traitement de carter et du jeu. Ce modèle doit permettre de vérifier le principe même du fonctionnement. Il doit être le plus simple possible pour pouvoir ensuite être transposé à des applications différentes. Voici les quatre principales données de construction du modèle :

1. En premier lieu, nous avons choisi d'étudier le traitement de carter dans un cas isolé, c'est-à-dire sans couplage direct avec un ventilateur. Cela permet d'imposer directement les conditions d'entrée et de sortie du canal de jeu. Ce point est impératif afin de pouvoir qualifier précisément le fonctionnement du traitement de carter. En particulier, il est intéressant de spécifier un débit donné afin de quantifier les pertes de charge et donc le différentiel de pression statique apparaissant entre l'entrée et la sortie.
2. Le deuxième point important est la suppression du coude de la virole, présent dans le jeu réel. Ceci est motivé par le fait qu'on cherche uniquement à quantifier les performances du nouveau traitement de carter. L'analyse du ventilateur de référence a montré que ce coude était responsable d'un certain nombre de structures particulières de l'écoulement (recirculations diverses) ; il est donc pertinent de ne pas la prendre en compte afin d'étudier seulement le nouveau dispositif.

3. Dans toutes les géométries étudiées, le rapport (hauteur du jeu)/(diamètre du ventilateur) est toujours très petit. Ces effets radiaux ne doivent pas être pris en compte dans un modèle qui se veut général. Le modèle sera donc construit sur une géométrie plane. Le canal de jeu reste délimité par deux parois, l'une fixe dans le repère absolu correspondant au carter, la deuxième étant animée d'un mouvement de translation latérale pour simuler le dessus de la virole. Cette vitesse correspond bien évidemment à la vitesse tangentielle observée sur la virole.
4. Les contraintes de fabrication peuvent conduire à des congés importants qui ont potentiellement une influence sur la structure de l'écoulement. La taille des congés, et donc les effets possibles, dépendent très fortement des techniques de fabrication utilisées (moulage, usinage, etc...). Dans notre modèle, nous ne tiendrons pas compte de ces effets technologiques. Les rainures seront donc définies avec des arêtes vives.

Deux géométries seront testées pour évaluer a posteriori les influences respectives de la forme cylindrique et des effets liés au congés.

On définit le repère cartésien absolu  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  qui sera utilisé pour cette modélisation simplifiée. La direction  $\vec{x}$  correspond à la direction axiale. L'écoulement va dans le sens défini par  $\vec{x}$ . La direction  $\vec{y}$  correspond, par analogie avec une géométrie cylindrique, à la direction azimutale. On suppose conventionnellement que le mouvement du "rotor" est dans le sens des  $y$  croissants. Enfin, la direction  $\vec{z}$  correspond à la direction radiale. On soulignera cependant que, en poursuivant l'analogie avec un cas cylindrique, on a la coordonnée  $z = -R$  puisque le vecteur  $\vec{z}$  est orienté du carter vers le rotor.

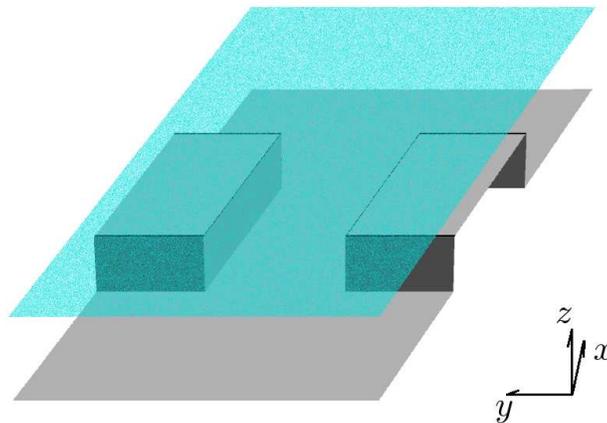


FIG. 3.17 – Modèle général de rainures - gros plan

Sur la figure (Fig. 3.17), on a représenté une vue en perspective du modèle de rainurage. Cette représentation est basée sur le maillage utilisé pour les simulations numériques. La surface pleine grise montre la paroi carter avec les rainures, tandis que la surface bleue translucide montre la position de la paroi "rotor". Cette dernière est parfaitement lisse et plane. Elle est animée d'un mouvement de translation uniforme dans la direction  $\vec{y}$ , avec une vitesse  $v=49.4801$  m/s, équivalente à la vitesse tangentielle de la surface extérieure de la virole (rayon  $R = 157.5$  mm) pour une vitesse de rotation  $\Omega = 3000$  tr/min.

Les parois carter et rotor s'étendent sur 27 millimètres dans la direction axiale, ce qui correspond à l'empattement total du rotor dans cette direction. Comme on peut le constater sur la figure précédente, seul un canal de rainure est réellement modélisé. On applique ensuite une condition de périodicité entre les deux faces latérales, ce qui équivaut donc à considérer un nombre infini de rainures, positionnées côte à côte. On appellera par la suite *obstacle* les protubérances de la paroi carter qui délimitent les rainures dans la direction transversale. Comme on peut le voir sur la figure (Fig. 3.17), le modèle numérique utilisé fait intervenir deux demi-obstacles encadrant la rainure.

Le jeu existant entre le sommet des rainures (et donc des obstacles) et la paroi mobile est ici fixé à  $\delta=2$  mm. Cette valeur correspond au minimum réalisable pour un GMV compte tenu des différentes contraintes de fabrication et d'assemblage.

Afin de faciliter la convergence, il a été nécessaire de rajouter des plénums, un au niveau de l'entrée, l'autre sur la sortie (Fig. 3.18). Ces volumes permettent d'atténuer les oscillations du champ aérodynamique qui peuvent apparaître en cours de convergence. Ces plenums s'étendent sur une longueur axiale de 39 mm. Les parois inférieures et supérieures sont supposées non-adhérentes, ce qui permet d'éviter le développement d'une couche limite qui n'aurait pas de sens physique du point de vue du ventilateur. Les parois latérales sont elles aussi traitées avec une condition de périodicité selon  $\vec{y}$ .

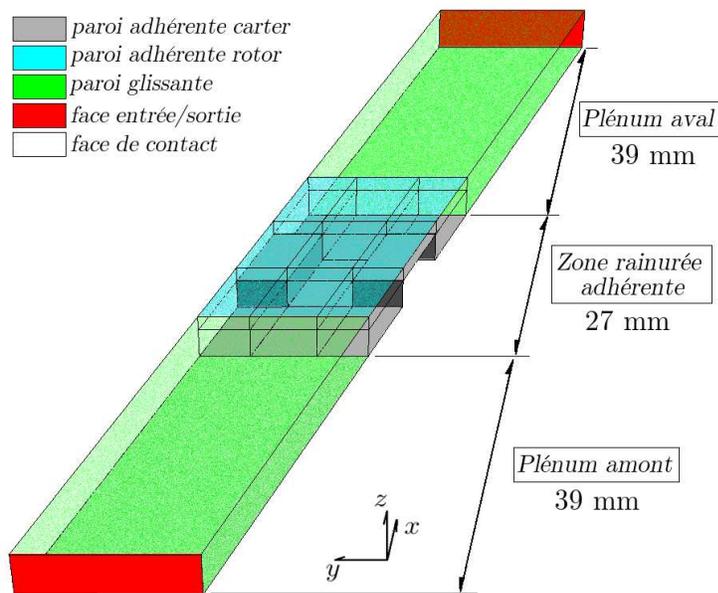


FIG. 3.18 – Positionnement des plénums et de la zone rainurée

### 3.4.1.2 Paramétrisation géométrique

La géométrie est paramétrée de sorte à pouvoir la modifier assez facilement. Nous avons retenu cinq paramètres géométriques qui sont :

- $\alpha$  : angle de la rainure par rapport à la direction tangentielle. On attirera ici l'attention du lecteur sur la convention suivante : si  $\alpha=90^\circ$ , les rainures sont alignées avec l'axe du ventilateur. On parlera de rainures "droites". Si  $\alpha < 90^\circ$ , les rainures sont hélicoïdales, partiellement

alignées avec l'écoulement entrant dans le jeu. Enfin, si  $\alpha > 90^\circ$ , les rainures sont aussi hélicoïdales, partiellement obliques par rapport à l'écoulement entrant dans le jeu.

- $N$  : nombre de rainures. Dans le cadre d'une modélisation plane, ce paramètre n'a de sens que pour définir la largeur totale  $l_{tot}$  occupée par une rainure et un obstacle. Cette distance est définie en établissant une analogie avec le cas réel, où les rainures sont réparties sur une surface cylindrique. On a alors la formule suivante :

$$l_{tot} = \frac{2\Pi R_0}{N} \quad (3.2)$$

où  $R_0$  est un rayon de référence. Ici, on a choisi  $R_0 = 157.5$  mm.

- $h$  : hauteur de la rainure. Il ne s'agit que de la hauteur de la rainure/obstacle, puisque, rappelons-le, le jeu entre le sommet des obstacles et le rotor est fixé à 2 mm.
- $w$  : largeur de la rainure.
- $L$  : longueur axiale de la rainure. Nous avons préféré ne pas étendre les rainures sur toute la longueur du jeu, afin de garder un degré de liberté lors de l'étude et de l'optimisation de la géométrie. Cela permet en outre de changer le positionnement axial des rainures dans le jeu. Nous avons ainsi modélisé des rainures commençant seulement à 9 mm de l'entrée du jeu. Cette distance a été gardée constante dans tous les tests effectués.

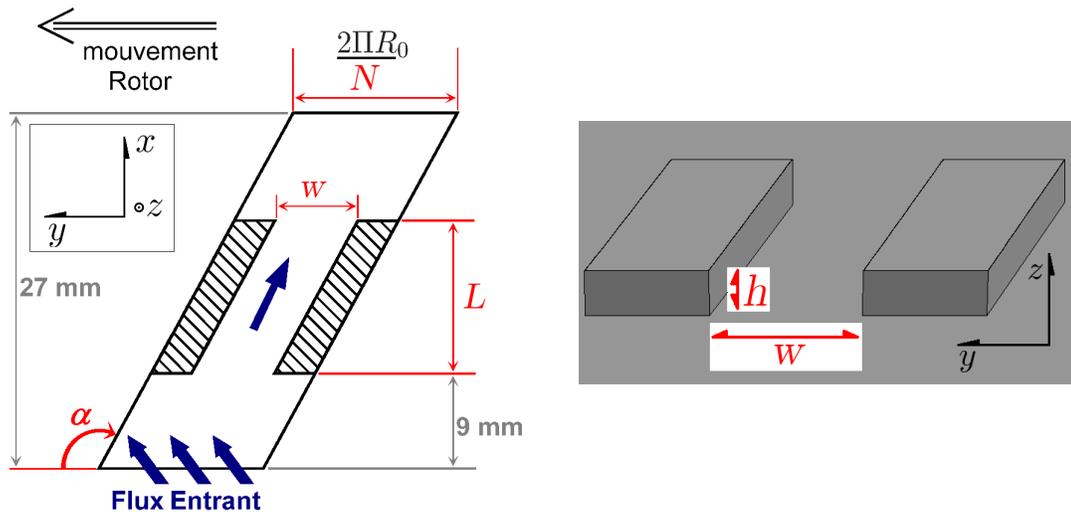


FIG. 3.19 – Paramétrisation géométrique des rainures

### 3.4.1.3 Conditions aux limites aérodynamiques

**Type de conditions aux limites imposées** Les conditions aérodynamiques imposées aux limites permettent de simuler, partiellement, la présence du rotor. Le cas étant subsonique (nombre de Mach maximum  $M_{max} \approx 0.3$ ), nous avons choisi d'imposer la pression statique en sortie, ainsi que la densité et la quantité de mouvement en entrée. Cette étude est donc faite en **imposant le débit** dans le jeu. Dans ces conditions, la diminution du débit est remplacée par l'augmentation du

différentiel de pression statique entre l'amont et l'aval du fluide. A même débit, plus ce différentiel de pression sera élevé, plus le rainurage sera efficace.

Les valeurs des grandeurs imposées ont été déterminées à partir de simulations d'un ventilateur standard en effectuant des moyennes azimutales et radiales sur les sections d'entrée et de sortie du jeu.

Ces conditions aux limites sont choisies pour être les plus générales possible, cela nous conduit donc à faire quelques hypothèses sur l'écoulement :

1. En premier lieu, les grandeurs imposées sont invariantes dans la direction  $\vec{y}$ . En pratique, les variations observées dans cette direction sur le ventilateur sont dues à la présence des aubages (sillages, ...). La modélisation du jeu étant isolée, il n'y a pas de raison de reproduire ces variations.
2. Les grandeurs imposées sont aussi constantes dans la direction  $\vec{z}$ . Il s'agit là aussi d'une généralisation puisque les variations dans cette direction dépendent de la géométrie "en dehors" du jeu, c'est à dire du ventilateur et de son environnement. Il n'est en particulier pas pertinent d'imposer des profils de type couches limites sur les composantes de quantité de mouvement pour deux raisons :
  - Cela supposerait qu'il existe des parois en dehors du domaine modélisé, or, on travaille sur un modèle isolé.
  - Les plénums ont des parois glissantes en haut et en bas. Les non-uniformités imposées seraient donc très vite dissipées.

Pour la pression statique imposée en sortie de jeu, les profils extraits du cas du ventilateur de référence montrent des évolutions fortement liées aux différents décollements dans le coude. On se contentera donc d'employer un profil constant selon  $\vec{z}$ .

3. On considèrera que l'écoulement entrant n'a pas de vitesse verticale. Le contraire ne serait pas cohérent avec la modélisation adoptée : les effets radiaux en entrée de jeu découlent du couplage avec l'ensemble du ventilateur, et notamment les aubages.

**Contraintes liées à la paramétrisation** Rappelons que la problématique de réduction du débit dans le jeu est synonyme de l'augmentation du différentiel de pression statique calculé dans le jeu à *débit constant*. En conséquence, pour pouvoir évaluer correctement la sensibilité du traitement de carter aux différents paramètres, il est nécessaire de garder le *même débit* quelle que soit la configuration testée. Cela impose donc d'adapter les conditions amont lorsque la géométrie du rainurage, et surtout la section des faces d'entrée et de sortie, varient.

Un seul paramètre est directement concerné par cette modification : il s'agit de la hauteur  $h$ . En effet, chaque canal modélisé a une section d'entrée :

$$S = (h + \delta) \cdot \frac{2\pi R_0}{N}$$

En établissant l'analogie avec le cas complet cylindrique, la section totale du jeu constitué par les  $N$  rainures est donc :

$$S = \left[ (h + \delta) \cdot \frac{2\pi R_0}{N} \right] \cdot N = 2\pi R_0 (h + \delta)$$

En conséquence, pour garantir que le débit *global* du jeu est constant, il suffit de faire varier la quantité de mouvement axiale selon la formule :

$$\rho U_x(h) = (\rho U_x)_{ref} \frac{\delta + h_{ref}}{\delta + h} \quad (3.3)$$

où  $h_{ref}$  est la hauteur de rainure de référence, et  $(\rho U_x)_{ref}$  est la quantité de mouvement axiale dans cette même configuration de référence. Dans notre cas, la hauteur de référence utilisée est  $h_{ref}=1$  mm.

Une deuxième modification est nécessaire pour garantir l'indépendance des paramètres. Il est impératif de garder un angle d'incidence à peu près constant au niveau de l'entrée des rainures. Si on ne respecte pas cette condition, le comportement des rainures par rapport au paramètre  $\alpha$  (en autre) peut être singulièrement affecté.

En conséquence, la modification du débit d'entrée par le paramètre  $h$  s'accompagne d'une modification de la vitesse transversale en entrée pour garder la même incidence :

$$\rho V_y(h) = \rho U_x(h) \cdot \frac{\rho V_y(h_{ref})}{\rho U_x(h_{ref})} \quad (3.4)$$

**Conditions aux limites** Au final, pour les configurations où  $h = h_{ref}=1$  mm, les valeurs des conditions aux limites sont :

Masse volumique amont $\rho$	1.16 kg.m <sup>-3</sup>
Quantité de mouvement axiale amont $\rho U_x$	6.61 kg.m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup>
Quantité de mouvement azimutale amont $\rho V_y$	14.95 kg.m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup>
Quantité de mouvement verticale amont $\rho W_z$	0 kg.m <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup>
Pression statique aval $P_s$	101114 Pa

TAB. 3.3 – Conditions aux limites

#### 3.4.1.4 Conditions numériques de simulation

L'écoulement dans les rainures est simulé en utilisant le schéma de Liou au second ordre. Le modèle de turbulence est le  $k - \omega$  de Kok, couplé à un limiteur de production d'énergie cinétique turbulente. L'intégration temporelle est assurée par un schéma de Runge-Kutta à 5 pas, couplé avec un préconditionnement bas-Mach.

Le maillage utilisé est découpé en 18 domaines. Le nombre total de points est d'environ 553 000 pour la version la plus dense (cf. annexe G). Des calculs ont été effectués sur une version déraffinée (un point sur deux éliminé dans chaque direction) comportant 69 000 nœuds afin d'alléger la charge informatique. Dans ce dernier cas, le critère  $y^+$  maximum observé localement sur la géométrie est de l'ordre de 10, le niveau moyen étant d'environ 1.5.

#### 3.4.2 Géométries de comparaison et de validation

Il nous faut vérifier que le traitement de carter proposé est vraiment *pertinent* du point de vue des objectifs utilisés. La création de rainures étant synonyme d'un agrandissement de la section de jeu, il est important de s'assurer que le traitement de carter n'engendre pas une régression par rapport à la situation initiale.

On utilise donc deux géométries supplémentaires pour définir l'écoulement dans le jeu sans rainurage. Ces géométries serviront de références et permettront d'évaluer l'amélioration ou la dégradation de l'écoulement de jeu dues au fonctionnement de notre modèle.

### 3.4.2.1 Canal lisse

Cette configuration bidimensionnelle (Fig. 3.20) correspond au jeu sans aucun traitement de carter. Il s'agit d'un canal plan long de 27 mm dans la direction axiale. Il est délimité en bas par une paroi fixe, et par une paroi supérieure animée d'un mouvement de translation selon la direction  $\vec{y}$ , identique à celui du cas rainuré.

Ce cas correspond à la limite vers laquelle tend le rainurage quand les rainures deviennent infiniment larges. Idéalement, le traitement de carter proposé doit permettre d'augmenter le différentiel de pression statique entre l'amont et l'aval (synonyme de réduction du débit) et de réduire la giration en sortie de jeu par rapport à ce cas.

La hauteur de ce canal est paramétrée afin de pouvoir la comparer avec le rainurage. Cette hauteur est égale à  $h+2$  mm, où  $h$  est le paramètre défini pour le rainurage.

La simulation du canal fait intervenir des plénums amont et aval de même dimension que pour le rainurage. Les conditions aux limites sont les mêmes que pour le rainurage. On utilisera donc les relations (3.3) et (3.4) afin de fixer les conditions amont en cas de variation du paramètre  $h$ .

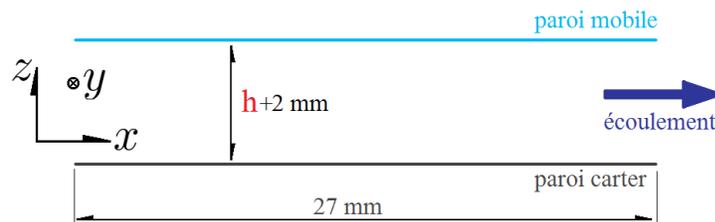


FIG. 3.20 – Description de la configuration en canal lisse

L'écoulement au travers de ce canal est extrêmement simple puisqu'il s'agit de la superposition d'un écoulement de Couette turbulent dans la direction transversale, et d'un écoulement de Poiseuille turbulent dans la direction axiale. Ces profils n'étant pas établis en entrée du canal lisse, ils évoluent donc selon la direction axiale.

### 3.4.2.2 Obstacle circonférentiel

La deuxième configuration bidimensionnelle est un jeu barré par un obstacle de même longueur et hauteur que ceux présents dans le cas rainuré (Fig. 3.21). Toutefois, cet obstacle est continu dans la direction transversale.

Ce cas est la limite "haute" du rainurage : il s'agit de la configuration vers laquelle tend le traitement de carter quand les rainures deviennent infiniment fines ou quand le nombre de rainures tend vers 0. De plus, cette configuration est ce qui se rapproche le plus des labyrinthes utilisés sur les turbines (cf. 3.3.1.1).

Comme pour les autres cas, la paroi carter est fixe dans le repère absolu, la paroi mobile étant animée d'un mouvement de translation selon  $\vec{y}$ .

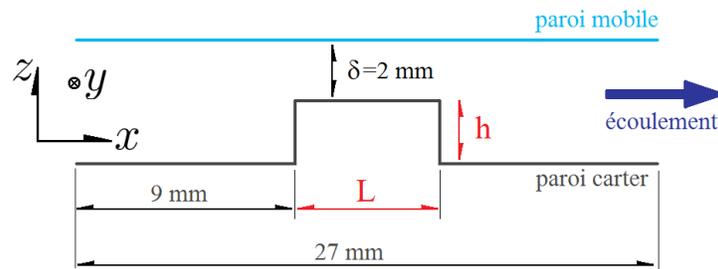


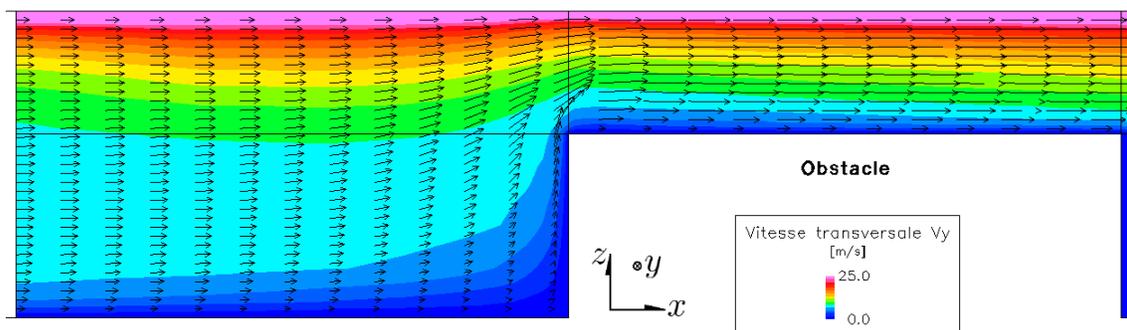
FIG. 3.21 – Description de la configuration avec un obstacle circonférentiel

Cette configuration est simulée numériquement en utilisant des plénums à l’amont et à l’aval. Ceux-ci sont de même longueur que dans le cas rainuré. Les conditions aux limites sont identiques au cas rainuré. On appliquera donc les relations (3.3) et (3.4) dans le cas d’une variation de hauteur  $h$ .

Ce cas est spécifiquement conçu pour vérifier que la présence des rainures apporte une amélioration dans l’écoulement de jeu. Il s’agit de la configuration avec la plus faible section débitante, localisée au droit de l’obstacle. Idéalement, le traitement de carter doit aussi améliorer le différentiel de pression statique (i.e. réduire le débit) et la limitation de la giration par rapport à ce cas.

La figure (Fig. 3.22) montre le champ vectoriel dans le plan de la simulation, ainsi que la carte de vitesse transversale  $V_y$ , en amont et au dessus de l’obstacle.

En amont de l’obstacle, l’écoulement est presque aussi simple que pour le canal droit. De l’entrée du jeu à une distance  $d \approx 1.5h$  de l’obstacle, l’écoulement est simplement la superposition d’un écoulement de Couette selon  $\vec{y}$  et de Poiseuille turbulent selon  $\vec{x}$ .

FIG. 3.22 – Ecoulement en amont et au dessus de l’obstacle circonférentiel -  $h=3$  mm,  $L=9$  mm

Au delà, pour une distance à l’obstacle  $d/h < 1.5$ , les effets potentiels remontant depuis l’obstacle donnent au fluide une vitesse verticale et ralentissent le mouvement axial dans la zone basse. De même, le mouvement transversal semble un peu affecté, avec la croissance de la zone de basse vitesse au carter.

Au niveau de l’obstacle, le fluide proche de la marche montante a perdu toute vitesse axiale au profit de la vitesse verticale. Le contournement de la marche montante est assez violent, mais

l'écoulement au dessus de l'obstacle retrouve très vite un comportement de type Poiseuille turbulent dans la direction axiale et Couette turbulent dans la direction transversale. La vitesse radiale est nulle.

La seule structure aérodynamique remarquable dans cette configuration est la recirculation qui apparaît en aval de la marche (Fig. 3.23). Il s'agit simplement du tourbillon, bien connu, apparaissant derrière une marche descendante [2].

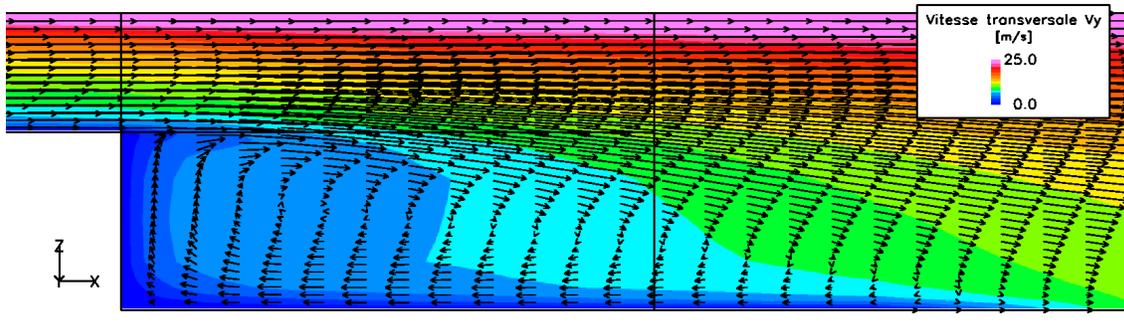


FIG. 3.23 – Recirculation derrière l'obstacle circconférentiel -  $h=3$  mm,  $L=9$  mm

Pour la configuration [ $h=1$  mm,  $L=9$  mm] présentée sur la figure (Fig. 3.23), le recollement de l'écoulement intervient à une distance  $d_r=4.67h=14$  mm en aval de l'obstacle. Pour les hauteurs testées (la longueur  $L$  est fixée à 9 mm), les distances de recollement sont données dans la table [3.4] :

Hauteur $h$	Distance de recollement $d_r$	$d_r/h$
1 mm	4.5 mm	4.5
2 mm	9 mm	4.5
3 mm	14 mm	4.67

TAB. 3.4 – Distances de recollement en aval de l'obstacle circconférentiel

Le tourbillon en aval de l'obstacle perturbe aussi l'écoulement transversal. Comme on le voit sur la figure (Fig. 3.23), il est lié à l'agrandissement de la zone de basse vitesse  $V_y$ .

### 3.4.2.3 Géométries avec effets technologiques

Pour modéliser le traitement de carter de la manière la plus générale possible, nous avons délibérément écarté des effets technologiques. Cela se traduit par :

- l'utilisation d'un canal parfaitement plan et non cylindrique (afin de ne pas introduire de biais en imposant un rayon précis).
- la présence d'arêtes vives au niveau des raccords entre surfaces, là où une géométrie obtenue par moulage présenterait des congés de raccordement.

Afin de valider plus finement le fonctionnement du traitement de carter *dans le cas du GMV*, nous avons donc ré-introduit des effets technologiques propres à ce cas. Deux configurations ont ainsi été testées :

- **Géométrie cylindrique** : La géométrie plane modélisée est déformée de manière à obtenir un canal de jeu qui soit une portion de couronne cylindrique (Fig.3.24). Le rayon moyen de la nouvelle géométrie est bien sûr le même que celui du carter sur un ventilateur réel. Dans ces conditions, la paroi mobile est animée d'un mouvement de rotation d'axe  $\vec{x}$ , c'est-à-dire l'axe du ventilateur.

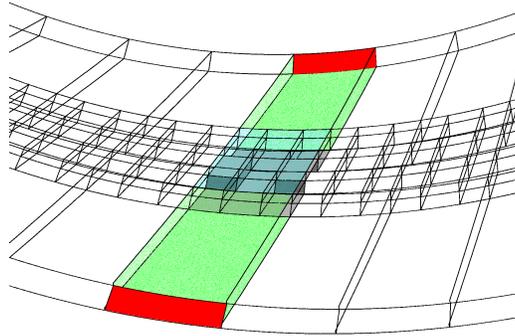


FIG. 3.24 – Géométrie cylindrique

- **Géométrie avec congés** : Toutes les arêtes de la géométrie simplifiée sont remplacées par des congés de raccordement. Ces congés ont un rayon d'environ 0.3 mm, valeur qui nous a été fournie par Valéo. La géométrie reste néanmoins construite sur une configuration plane.

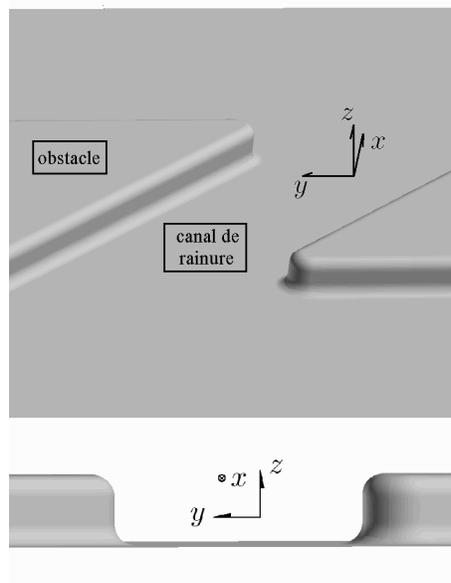


FIG. 3.25 – Géométrie avec congés de raccordement

Nous avons restreint l'étude des configurations avec congés aux cas les plus défavorables, c'est à dire ceux de faible profondeur :  $h=1$  mm. Comme on peut le voir sur la figure (Fig. 3.25), les congés ne sont, dans ces conditions, pas négligeables par rapport aux dimensions de la rainure. On peut donc s'attendre à ce qu'ils aient le maximum d'effet pour  $h=1$  mm.

### 3.4.3 Objectifs du traitement de carter - Notations

Dans la suite, le traitement de carter sera évalué en regard de plusieurs objectifs :

1. **Augmentation du différentiel de pression statique** : Les simulations faites ici sont à **débit imposé**. En conséquence, l'objectif de réduction du débit de jeu se traduit ici par une *augmentation* de l'écart entre la pression statique moyenne en sortie du jeu  $P_s^{\text{sortie}}$  et celle en entrée  $P_s^{\text{entrée}}$ . Il sera par convention noté  $\Delta P_s$ .

$$\Delta P_s = P_s^{\text{sortie}} - P_s^{\text{entrée}} \quad (3.5)$$

Avec une telle définition,  $\Delta P_s$  est négatif. On notera que l'objectif  $\Delta P_s$  traduit *partiellement* les pertes de charges. Le traitement de carter fonctionne un peu à la manière d'un stator de turbine : pour un même débit, plus les pertes seront élevées, plus le différentiel de pression statique  $\Delta P_s$  sera élevé *en valeur absolue*.

2. **Limitation de la giration** Le critère considéré est l'écart entre la vitesse azimutale moyenne en sortie de jeu  $V_y^{\text{sortie}}$  et celle en entrée  $V_y^{\text{entrée}}$ . Il sera noté  $\Delta V_y$ .

$$\Delta V_y = V_y^{\text{sortie}} - V_y^{\text{entrée}} \quad (3.6)$$

Cet objectif est un peu particulier car il dépend des conditions en entrée de jeu. Pour un ventilateur automobile, la vitesse azimutale en entrée de jeu  $V_y^{\text{entrée}}$  est positive. D'autre part, l'écoulement accélère naturellement à cause de la virole dans la configuration de référence, ce qui génère donc  $\Delta V_y > 0$ . Le traitement de carter doit donc *réduire*  $\Delta V_y$  et si possible l'amener dans le domaine négatif.

3. **Variation de pression totale** Ce critère est l'écart entre la pression totale absolue moyenne en sortie de jeu  $P_t^{\text{sortie}}$  et celle en entrée  $P_t^{\text{entrée}}$ . Il est noté  $\Delta P_t$

$$\Delta P_t = P_t^{\text{sortie}} - P_t^{\text{entrée}} \quad (3.7)$$

Ce critère permet d'évaluer la balance entre la réduction du débit (critère  $\Delta P_s$ ) et la limitation de la giration (critère  $\Delta V_y$ ). Dans une approche *monodimensionnelle*, on peut effet écrire que :

$$\Delta P_t = \Delta P_s + \frac{\rho}{4}(V_y^{\text{entrée}} + V_y^{\text{sortie}})\Delta V_y \quad (3.8)$$

Dans le repère absolu, l'augmentation de la giration se traduit par une augmentation de  $\Delta P_t$ , tandis que l'amélioration du différentiel de pression statique induit une diminution de  $\Delta P_t$ .

### 3.4.4 Validation du principe de traitement de carter

Commençons tout de suite par vérifier la validité du traitement de carter proposé. Pour cela, on comparera les valeurs des objectifs  $\Delta P_s$ ,  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$  obtenues avec le traitement de carter à celles obtenues pour le canal lisse et l'obstacle circonférentiel.

La configuration de rainurage étudiée est la suivante :

Angle de rainure $\alpha$	115 °
Hauteur de rainure h	3 mm
Largeur de rainure w	7.8 mm
Longueur de rainure L	9 mm
Nombre de rainures N	50

Le canal lisse et l'obstacle circonférentiel sont évalués sur des géométries équivalentes : on ainsi  $h=3$  mm pour les deux, et  $L=9$  mm pour l'obstacle circonférentiel. Les valeurs des critères d'évaluation pour ces trois cas sont données dans la table [3.5]

Configuration	$\Delta P_s$ [Pa]	$\Delta P_t$ [Pa]	$\Delta V_y$ [Pa]
Canal lisse	-7.5	60.9	5.25
Obstacle circonférentiel	-54.6	34.1	6.04
Rainure	-31.6	1.7	2.89
écart par rapport au canal	-24.1	-59.2	-2.36
écart par rapport à l'obstacle	+23.0	-32.4	-3.15

TAB. 3.5 – Validation du traitement de carter

Comme on le voit dans le tableau [3.5], le traitement de carter proposé améliore nettement l'écoulement de jeu par rapport au canal lisse. On a ainsi un gain de de 24.1 Pa sur l'objectif de pression statique, soit près de 320% de mieux que la configuration lisse. De même, on améliore notablement l'objectif de pression totale (-97%) et de vitesse transversale (-45%).

De même, le rainurage donne de très bons résultats par rapport à l'obstacle circonférentiel. S'il est moins bon sur  $\Delta P_s$  (+42%), il est largement meilleur sur la pression totale  $\Delta P_t$  (-95%) et sur la limitation de la giration  $\Delta V_y$  (-52%).

On peut donc dire que le traitement de carter est **pertinent** par rapport à des configurations plus simples. Il ne dégrade pas la situation par rapport au jeu sans traitement de carter, lequel est modélisé par le canal lisse.

### 3.4.5 Analyse de la structure globale de l'écoulement

#### 3.4.5.1 Remarques préliminaires

Dans toute la suite de cette section, la géométrie de référence étudiée sera, sauf mention contraire :

Angle de rainure $\alpha$	115 °
Hauteur de rainure $h$	3 mm
Largeur de rainure $w$	7.8 mm
Longueur de rainure $L$	9 mm
Nombre de rainures $N$	50

TAB. 3.6 – Géométrie de référence pour l'étude du rainurage

D'autre part, on définira quelques notations utilisées dans la suite. Afin de faciliter la localisation au niveau des rainures, on notera **Ge,De,Gs,Ds** les coins gauches et droits en entrée et en sortie des rainures, comme illustré sur la figure (Fig. 3.26)

D'autre part, on désignera dans la suite par **jeu** la zone rainurée adhérente, par opposition aux deux plénums. Avec notre modélisation, le jeu fait donc 27 mm de long dans la direction axiale.

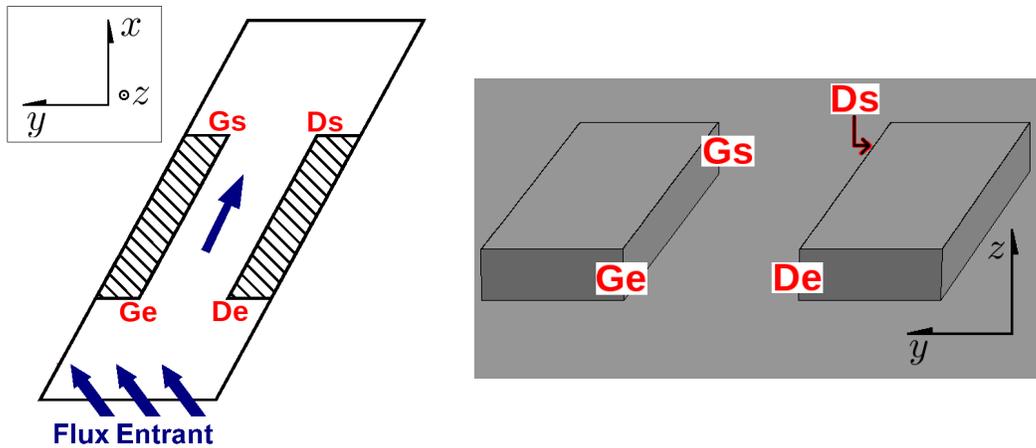


FIG. 3.26 – Repérage des coins au niveau de la rainure

Les expressions **entrée/sortie de jeu** renvoient donc aux plans d'entrée et de sortie **de la zone rainurée adhérente** (Fig. 3.27 - droite).

On définira aussi la **zone supérieure** du jeu comme étant la zone comprise entre le sommet des rainures et la paroi mobile. Avec la modélisation adoptée, rappelons que cette zone est haute de  $\delta=2$  mm. Cette zone est définie par opposition à la **zone des rainures** qui s'étend sur toute la hauteur  $h$  des rainures (Fig. 3.27 - gauche).

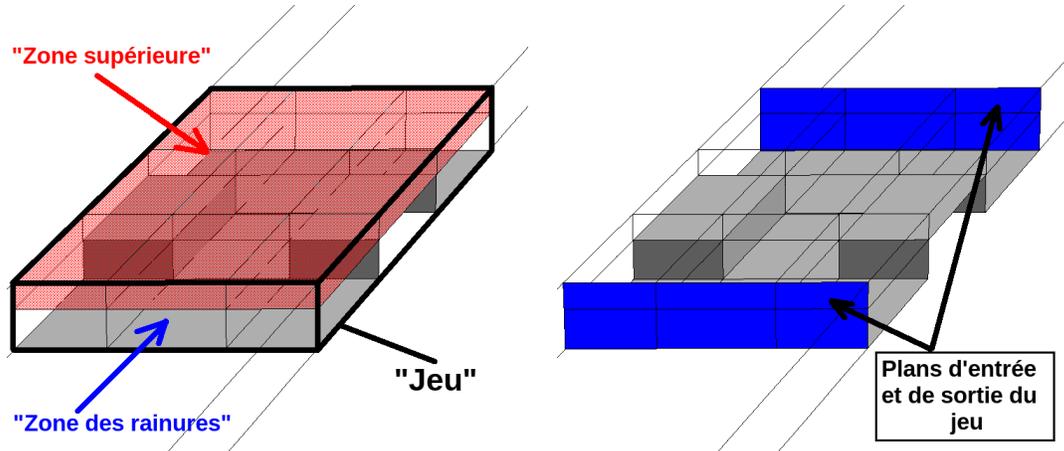


FIG. 3.27 – Définitions des différentes zones et plans remarquables du jeu

### 3.4.5.2 Evolution dans les pléniums

Pour le plénium amont, l'écoulement est à peu près uniforme sur les premiers 50% de la longueur du domaine (soit 14.5 mm en partant du plan d'entrée du plénium). A partir de la mi-longueur, on commence à observer des effets potentiels remontant depuis le jeu. Cela se traduit concrètement par l'apparition d'un déficit de vitesse axiale près des parois carter et rotor, compensé par une légère accélération en milieu de veine. Il s'agit d'effets de blocage générés par le développement des couches

limites sur les parois adhérentes. Ce déficit s’amplifie au fur et à mesure que l’on se rapproche du jeu, jusqu’à obtenir un profil correspondant à un écoulement de Poiseuille turbulent (non établi) en entrée de jeu. Pour ce qui est de la composante transversale de vitesse, la distribution est uniforme sur environ 90% de la longueur axiale du plénum. Les effets potentiels sont ici beaucoup plus limités puisqu’on ne perçoit l’entraînement par la paroi mobile et le ralentissement par la paroi carter, que sur les 10% restants de la longueur du plénum. En entrée de jeu on obtient un profil ressemblant à un écoulement de Couette turbulent. La figure (Fig. 3.28) illustre ces profils pour la configuration de référence [3.6].

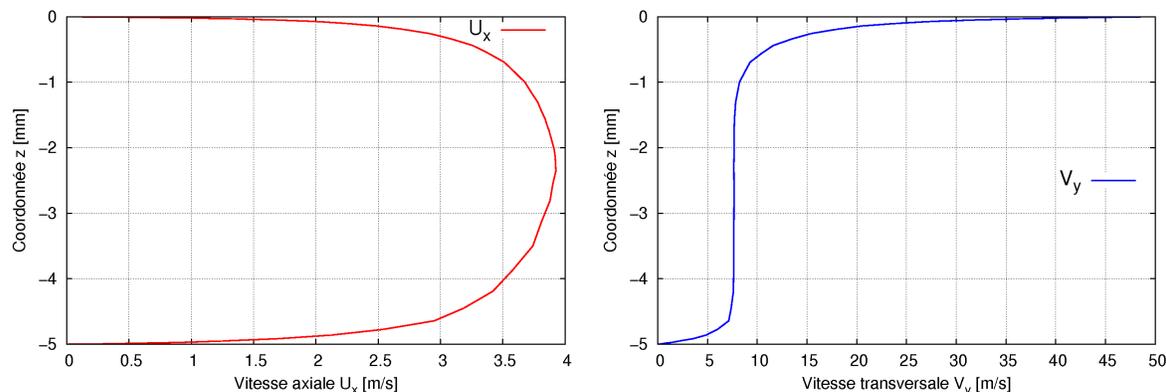


FIG. 3.28 – Profils de vitesse en entrée de jeu

Sur ces courbes, la paroi carter est située à  $z=-5$  mm, la paroi mobile étant à  $z=0$  mm. Ces profils sont invariants dans la direction transversale  $\vec{y}$ .

Pour le plénum aval, on assiste à un lissage progressif des profils obtenus en sortie de jeu. On récupère ainsi une distribution de vitesse à peu près uniforme selon  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  au niveau de la face de sortie du plénum.

### 3.4.5.3 Champ de vitesse dans le jeu

Dans cette sous section on ne considèrera que la structure générale de l’écoulement au niveau du jeu. On ne décrira donc pas dans le détail certains mécanismes aérodynamiques, tels que les tourbillons, lesquels seront présentés dans une partie suivante (p. 107).

Le champ aérodynamique possède une structure principale relativement simple, facilement décomposable entre la zone supérieure et la zone des rainures. Comme on peut le voir sur la figure (Fig. 3.29), ces deux zones présentent des écoulements assez différents.

Sur cette figure, on a représenté le champ vectoriel de vitesse à deux hauteurs différentes. La première carte est tracée à mi-hauteur de la rainure, la seconde carte est tracée à mi-hauteur de la zone supérieure.

Pour la zone supérieure, l’écoulement est uniforme en première approximation. Il présente une composante de vitesse transversale  $V_y$  importante (12.7 m/s en moyenne). On remarque toutefois une accélération progressive de  $V_y$  lorsqu’on avance dans le canal. Cette accélération du fluide résulte d’une vitesse transversale trop faible en entrée de la zone adhérente, couplée à l’entraînement par la paroi mobile. On rappelle que cette paroi est située à seulement 1 mm du plan de tracé de la carte ; les effets visqueux sont donc assez forts.

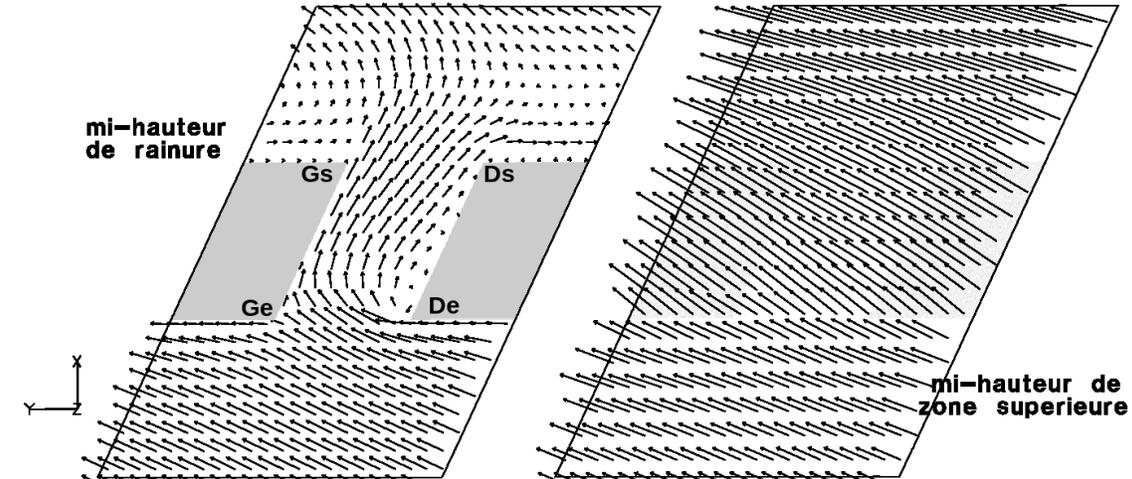


FIG. 3.29 – Champ de vitesse au niveau du jeu

Pour la vitesse axiale, on constate une légère augmentation au droit de la rainure et des obstacles. Cette augmentation n'est que la conséquence de la réduction de section passant à ce niveau. Pour ce traitement de carter, la section de la veine en amont et en aval des rainures est :

$$S_{amont} = \frac{2\Pi R_0}{N} \times (h + \delta) \quad (3.9)$$

Au droit des rainures, la section passante n'est plus que :

$$S_{contraction} = \frac{2\Pi R_0}{N} \times \delta + h \times w \quad (3.10)$$

Comme  $S_{contraction} < S_{amont}$  et que le cas peut être considéré comme quasi incompressible, la conservation du débit impose que  $U_x^{amont} < U_x^{contraction}$ .

Pour la partie basse, on observe un écoulement un peu plus complexe. L'écoulement loin en amont de la rainure est à peu près uniforme. La présence des obstacles implique qu'à l'approche de la rainure, le fluide infléchit sa trajectoire dans la direction  $\vec{y}$ . Dans la zone juste devant ces obstacles, le fluide n'a (heureusement) plus de vitesse axiale. L'écoulement s'engage alors dans la rainure. A l'intérieur de celle-ci, on remarque que le fluide adopte une trajectoire à peu près parallèle aux parois, soit une trajectoire inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à la direction  $\vec{y}$ . En sortant de la rainure, le fluide n'est plus guidé latéralement et les effets de cisaillement transversaux reprennent alors le dessus. On assiste ainsi à la déviation du fluide vers la gauche, suivant, une fois de plus, le mouvement généré par la paroi mobile.

La figure (Fig. 3.30) montre les cartes des trois composantes de la vitesse, visualisées à mi-hauteur de rainure et de zone supérieure.

- **Vitesse axiale  $U_x$**  : Le champ de vitesse axiale  $U_x$  ne présente dans l'ensemble pas de caractéristiques inattendues. On retrouve l'accélération axiale correspondant à la réduction de section au niveau des rainures (3.9 et 3.10). A cause de cette accélération, l'écoulement sortant de la rainure prend la forme d'un jet, bien visible grâce à son niveau élevé de vitesse.

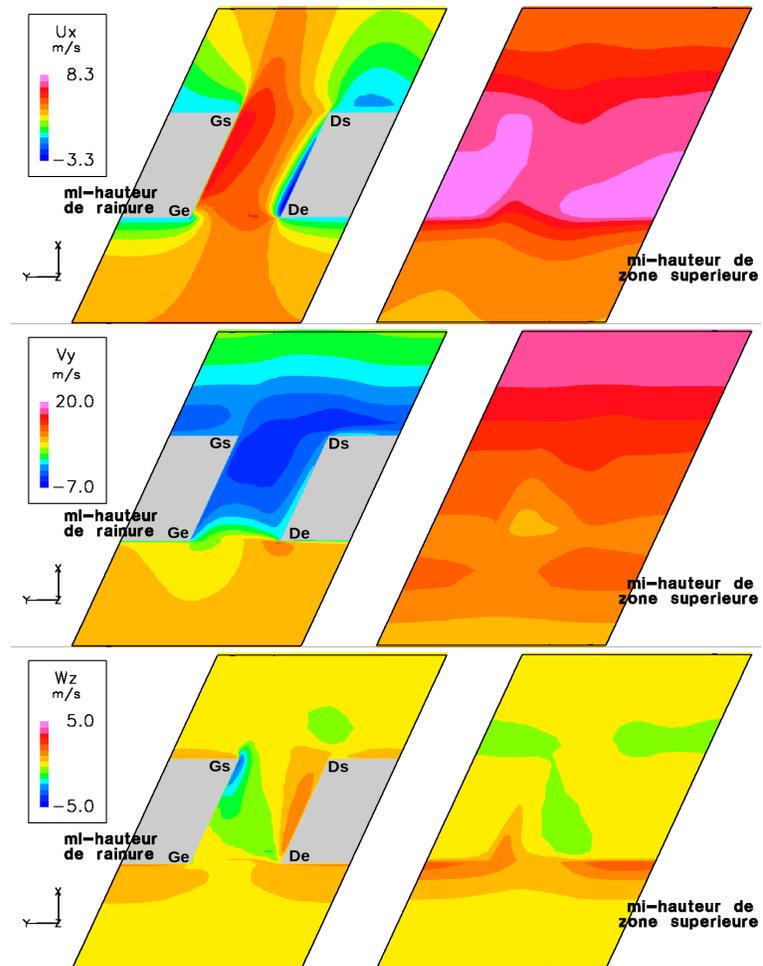


FIG. 3.30 – Composantes de vitesse au niveau du jeu

On observe aussi dans la rainure quelques poches de vitesse négative (dans la rainure au coin **De**, en aval des coins **Gs** et **Ds**), lesquelles proviennent de structures tourbillonnaires. Dans la zone supérieure, on perçoit l'influence de la rainure en contrebas, symbolisée par une vitesse un peu moins élevée au milieu de la veine.

- **Vitesse transversale  $V_y$**  : La composante transversale  $V_y$  est plus variable. Dans la section supérieure, la variation est essentiellement axiale, même si on retrouve là aussi l'influence de la rainure sous-jacente, matérialisée par une légère sous-vitesse en milieu de canal. Au niveau inférieur, on distingue trois grandes zones :
  - la zone en amont des rainures, caractérisée par une vitesse transversale positive élevée
  - la rainure, avec une vitesse négative forte
  - la zone en aval, avec une augmentation progressive de  $V_y$

Les distributions de vitesse dans la rainure et dans la zone aval sont couplées, puisque c'est principalement l'inclinaison de la rainure qui permet d'obtenir une vitesse négative. En première approche, si on suppose que l'écoulement dans la rainure est uniforme sur la section et à peu près colinéaire à celle-ci, on obtient donc une vitesse transversale moyenne  $V_y$  donnée par la formule :

$$V_y^{rainure} = V_{rainure} \cos(\alpha) \quad (3.11)$$

où  $V_{rainure}$  est la composante de vitesse colinéaire à la rainure.

En conséquence, si on suppose que  $V_{rainure} > 0$ , c'est à dire que l'écoulement dans la rainure ne remonte (globalement) pas la veine, les angles  $\alpha$  supérieurs à  $90^\circ$  permettront de générer naturellement une vitesse transversale négative. Cette vitesse négative est fort intéressante dans le cadre de la réduction de la giration en sortie puisqu'elle s'oppose au mouvement du rotor.

En aval, la remontée progressive du niveau de  $V_y$  correspond au mélange (visqueux) entre d'une part le jet sortant de la rainure, et d'autre part le fluide de la zone supérieure. Le cisaillement transversal provoqué par la paroi mobile induit cette accélération.

- **Vitesse verticale  $W_z$**  : On remarque que dans l'ensemble, la composante verticale  $W_z$  est très inférieure aux deux autres : le niveau jaune correspond ici à une vitesse comprise entre  $\pm 0.3$  m/s. Seules les zones au voisinage des obstacles possèdent une vitesse  $W_z$  un peu plus importante, ce qui correspond en pratique au mouvement de contournement de ces obstacles. Le mouvement du fluide est ascendant à l'amont des obstacles, et descendant à l'aval. On repère ce mouvement jusque dans la zone supérieure de la veine.

**Profils de vitesse au niveau du jeu** L'évolution verticale des grandeurs aérodynamiques est aussi intéressante. On tracera pour cela les profils de ces grandeurs, moyennées dans la direction transversale, au niveau des plans d'entrée et de sortie du jeu (cf. Fig. 3.27).

Les profils en entrée et sortie de jeu des différentes composantes de la vitesse, ainsi que de l'incidence, sont tracés en figure (Fig. 3.31). L'incidence est ici définie comme l'angle  $i = \text{atan}(\frac{V_y}{U_x})$ .

La géométrie utilisée est celle de référence [3.6]. En conséquence, le rainurage s'étend de la coordonnée  $z = -5$  mm à  $z = -2$  mm.

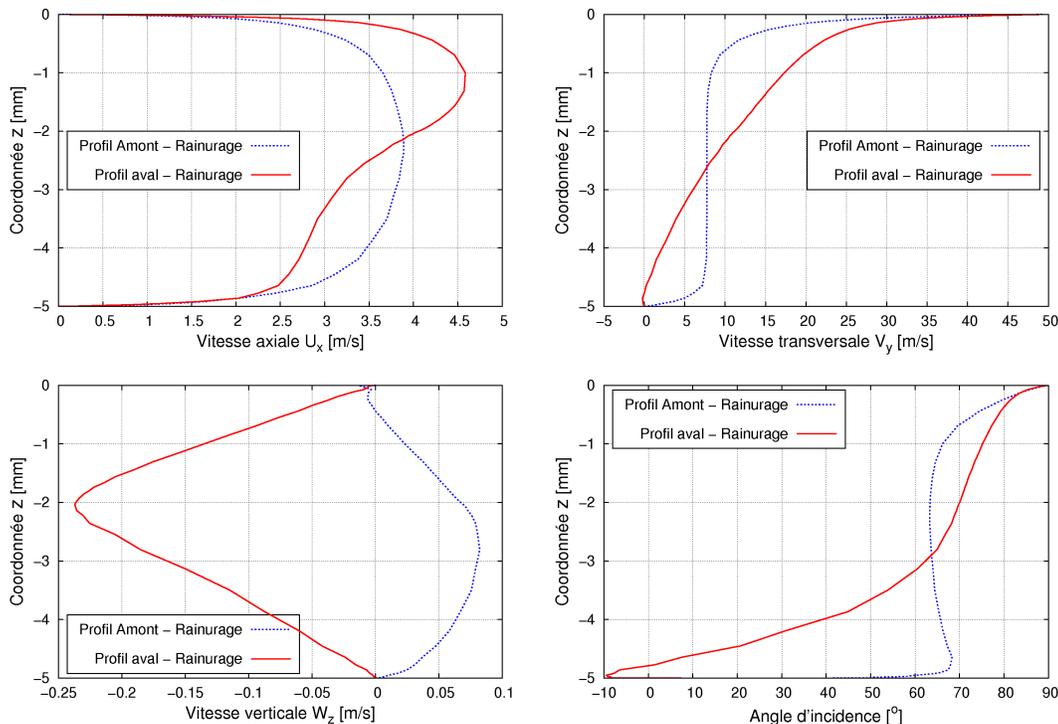


FIG. 3.31 – Profils de vitesse et d'incidence en entrée et en sortie de jeu avec rainures

Le point le plus remarquable est l'évolution de ces profils entre l'entrée et la sortie. On voit ainsi apparaître sur les profils de vitesse axiale  $U_x$  et transversale  $V_y$  un déficit entre l'aval et l'amont au niveau de la zone  $[z=-5, \dots, -2 \text{ mm}]$  correspondant au sillage des rainures et des obstacles. Ce déficit est accompagné d'un excédent de vitesse dans la zone supérieure. Pour la vitesse  $U_x$ , cette augmentation vient compenser le déficit de la zone des rainures pour assurer la conservation du débit dans la veine. Pour la vitesse  $V_y$ , la survitesse en zone supérieure est la conséquence de l'accélération transversale rencontrée dans les paragraphes précédents. La sous-vitesse en regard des rainures traduit pour sa part les effets de déviation et la génération de vitesse négative liés aux rainures. On remarque même pour  $V_y$  qu'il existe, au niveau de la sortie, une zone de vitesse négative, comprise approximativement entre  $z=-5 \text{ mm}$  et  $z=-4.5 \text{ mm}$ . Pour ces deux grandeurs, on retrouve les profils de type Couette et Poiseuille au niveau du plan d'entrée.

Pour ce qui est de la vitesse verticale  $W_z$ , on observe à l'amont un mouvement globalement ascendant. Ce mouvement correspond au contournement des obstacles par le dessus. Le plan étant assez éloigné (9 mm) des obstacles, ce mouvement constaté relève donc principalement d'un effet potentiel remontant la veine. À l'inverse, le mouvement en aval est plutôt descendant, le maximum de vitesse étant à la même hauteur que le sommet des rainures.

L'angle d'incidence est à peu près constant en amont. Les variations observées dans ce plan interviennent essentiellement au niveau des parois carter et rotor, soit au niveau des couches limites associées. En dehors des couches limites, l'angle d'incidence moyen est d'environ  $63^\circ$ . Pour le plan aval, on retrouve les effets décrits pour  $U_x$  et  $V_y$ . On remarque en particulier la forte décroissance dans la zone basse. On retrouve ainsi la zone de vitesse transversale négative, caractérisée ici par

un angle d'incidence négatif.

**Comparaison avec le canal lisse et l'obstacle circconférentiel** Il est intéressant de comparer les profils obtenus avec le rainurage à ceux obtenus dans les cas "canal lisse" et "obstacle circconférentiel". On met ainsi en évidence les avantages et les défauts du nouveau traitement de carter. Indiquons immédiatement que la comparaison n'est vraiment pertinente qu'au niveau du plan aval, l'écoulement en amont du jeu est très similaire pour les trois cas.

On représente sur la figure (Fig. 3.32) les profils aval de vitesse axiale  $U_x$  et transversale  $V_y$  pour deux hauteurs d'obstacle différentes (ou ouverture équivalente dans le cas du canal lisse),  $h=1$  mm et  $h=3$  mm. Le paramètre  $h$  est en effet le seul qui soit commun aux trois cas.

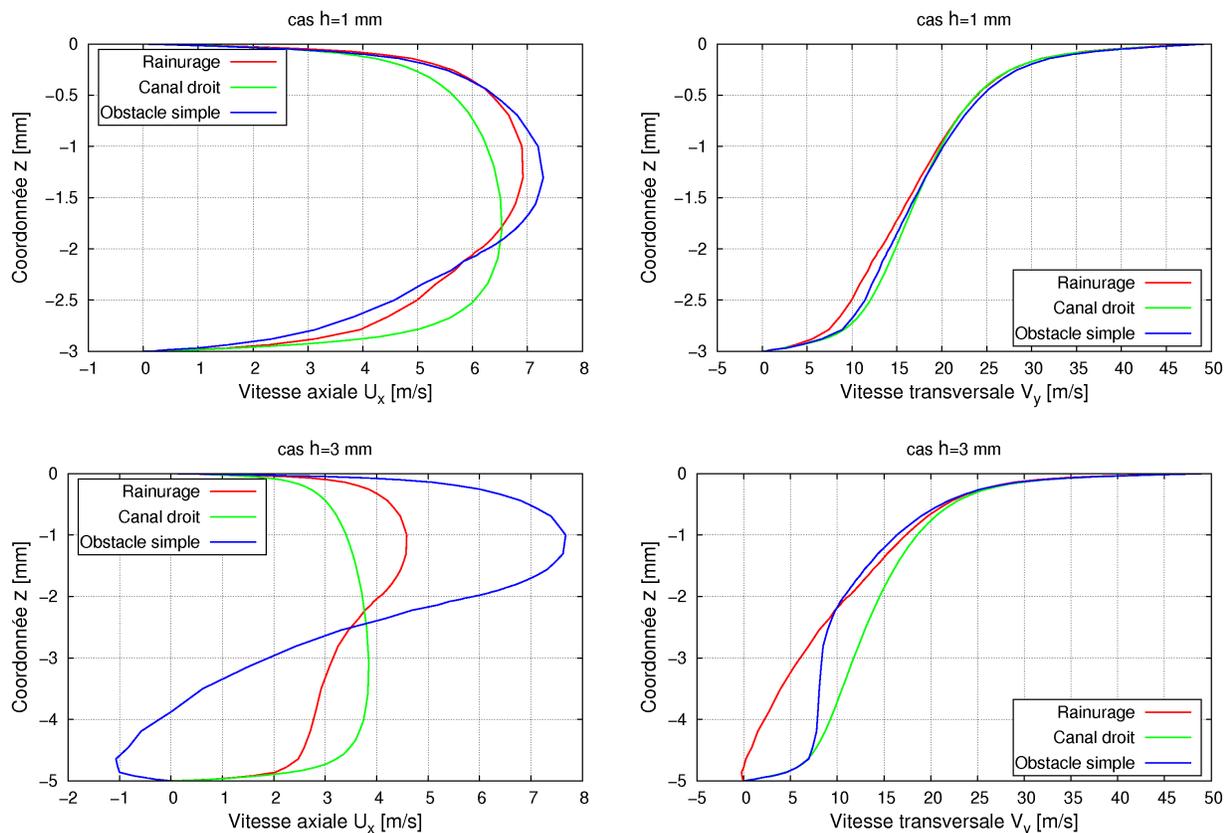


FIG. 3.32 – Comparaison des profils aval de vitesse axiale et transversale

En ce qui concerne la vitesse transversale, on remarque que pour les deux cas, le rainurage génère une vitesse inférieure aux deux autres cas, ce qui est donc clairement un avantage dans l'objectif de réduction de la giration en sortie de jeu.

- Dans le cas  $h=1$  mm, les trois cas sont néanmoins assez proches, ce qui est, somme toute, assez logique : l'obstacle, ou les rainures, étant petits devant la partie libre de la veine, ils ne modifient pas trop fortement l'écoulement par rapport à la configuration lisse. La différence se fait principalement dans la zone basse, c'est à dire dans le sillage des obstacles, au dessous

de  $z=-2$  mm. Dans cette zone basse, le rainurage génère une vitesse nettement plus faible que les cas de comparaison. La différence est ainsi de 2 m/s (pour un niveau d'environ 10 m/s) au niveau  $z=-2.5$  mm. Ceci est dû au fait que le traitement de carter génère une petite zone de vitesse négative, juste en aval de la rainure. Cette zone disparaît assez vite, mais on retrouve toutefois un déficit de vitesse persistant en aval et notamment au niveau du plan de tracé des profils. L'obstacle circonférentiel et le canal lisse sont proches dans la zone basse, bien que le sillage de l'obstacle soit important avec une vitesse inférieure au cas lisse. En remontant vers la paroi mobile ( $z=0$  mm), la hiérarchie évolue un peu. Tout d'abord, la vitesse du cas rainuré augmente jusqu'à atteindre le niveau observé sur le canal lisse. L'obstacle simple génère lui aussi un surcroît de vitesse, et il dépasse ainsi le niveau du canal droit. Au dessus de  $z=-1.5$  mm, les courbes du rainurage et de l'obstacle simple sont à peu près parallèles, ce qui traduit donc que les mécanismes d'entraînement dans la direction  $\vec{y}$  sont équivalents.

- Dans le cas  $h=3$  mm, les trois configurations diffèrent nettement. Le rainurage reste la géométrie la plus efficace en terme de réduction de la vitesse transversale. La zone de vitesse négative, beaucoup plus étendue, permet d'avoir une vitesse plus faible par rapport aux deux autres configurations, l'écart à  $z=-4$  mm étant d'environ 5 m/s. Le sillage de l'obstacle simple est ici beaucoup plus marqué, le maximum d'écart avec le canal droit étant atteint à  $z=-2$  mm, soit au niveau du sommet de cet obstacle. Précisons que ce sillage ne présente toujours pas de zone notable de vitesse négative ; la seule structure reste le décollement en aval. Grâce à ce déficit accru, l'obstacle simple est maintenant plus lent que le canal droit sur toute la hauteur de veine. Il est même un peu plus lent que le cas rainuré sur la partie haute, au dessus de  $z=-2$  mm, ce qui correspond en fait à la trace du jet passant dans la zone supérieure. Cette sous-vitesse transversale en zone haute résulte de la survitesse axiale : le fluide passant entre le sommet de l'obstacle et la paroi rotor allant plus vite, la déviation transversale est plus difficile à réaliser.

Pour la vitesse axiale, la hiérarchie des configurations est la même pour les deux hauteurs. Elle correspond à la présence des obstacles et de leur sillage. La partie haute, comprise entre  $z=0$  et  $-2$  mm correspond au jet passant par dessus les obstacles (s'ils existent), la partie basse est influencée par le sillage. Comme l'obstacle simple est le cas présentant la plus faible section passante, il est logique qu'il soit celui qui a la plus forte vitesse en zone supérieure. On retrouve aussi dans ce cas l'influence de la recirculation verticale en aval, présentée auparavant (Fig. 3.23). Dans le cas  $h=3$  mm, on voit ainsi apparaître une zone de vitesse négative. Le déficit de vitesse dans le sillage est systématiquement plus important dans le cas de l'obstacle simple. Ceci vient simplement du fait que pour les rainures, il existe un débit en partie basse, lequel vient remonter légèrement le niveau de vitesse axiale proche carter.

#### 3.4.5.4 Répartition de débit dans le jeu

En fonction de ces observations, il peut être intéressant de considérer la répartition de débit entre la rainure et la partie supérieure de la veine.

Le débit est calculé sur les plans d'entrée et de sortie de la rainure, représentés en rouge sur la figure (Fig. 3.33). De manière évidente, ces plans ne définissent pas un volume fermé et le débit peut donc varier d'un plan à l'autre. Cette variation de débit est en soit pertinente car elle dépend des effets verticaux au sein de la rainure.

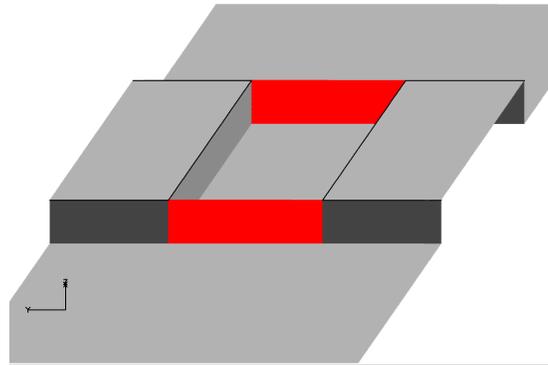


FIG. 3.33 – Plans d'intégration sur la rainure

Le graphique (Fig. 3.34) présente la variation du débit massique en entrée et sortie de rainure, adimensionné par le débit massique total, en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $h$ . La variation de hauteur s'effectue normalement à débit constant, mais nous avons aussi représenté une configuration  $h=2$  mm pour laquelle la *vitesse* est constante par rapport au cas  $h=1$  mm. Ce cas particulier permet de vérifier l'influence du niveau de vitesse pour une même géométrie.

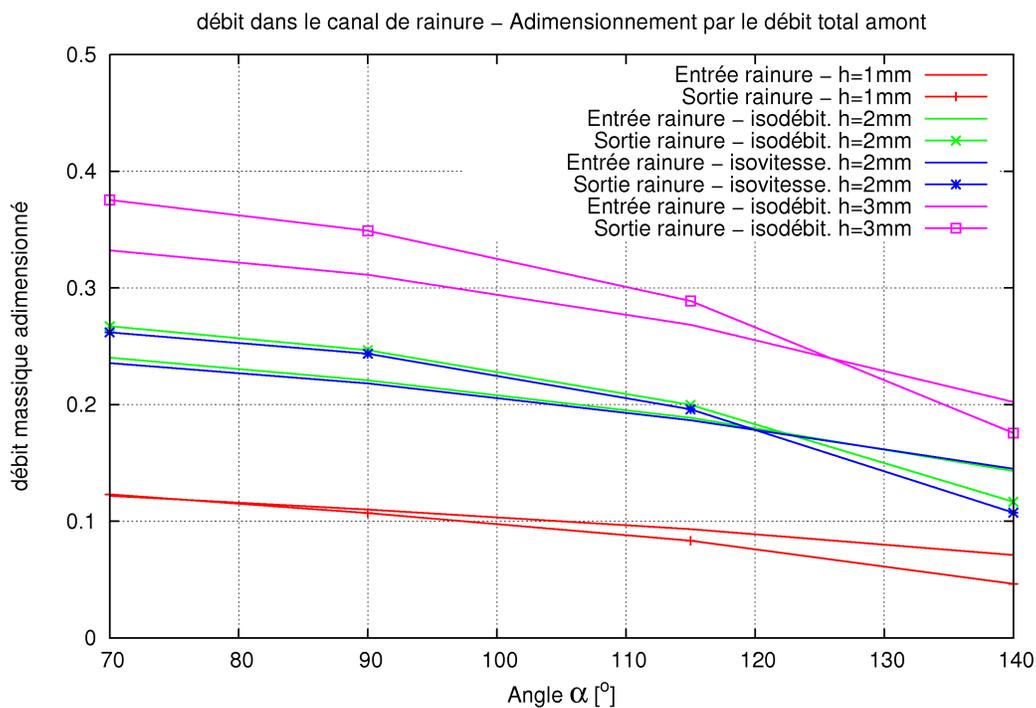


FIG. 3.34 – Fraction de débit passant dans la rainure

On constate que la répartition globale de débit est proportionnelle à la hauteur de rainure, quelle que soit la valeur de  $\alpha$ . D'autre part, on remarque aussi que le niveau de vitesse n'affecte pas beaucoup la répartition, les courbes à iso-vitesse et iso-débit étant presque confondues pour le cas

$h=2$  mm. Dans le cas à iso-vitesse, le débit adimensionné est légèrement inférieur (à peine 1%) par rapport au cas iso-débit. En dehors de l'erreur de mesure, on peut penser que cet écart vient d'une légère différence dans les niveaux de dissipation visqueuse.

Quelle que soit la hauteur, l'augmentation de l'angle induit une diminution du débit passant par la rainure. Ce phénomène s'accompagne en outre d'une inversion dans la répartition entre entrée et sortie. Le cas  $\alpha=140^\circ$  présente ainsi systématiquement un débit de sortie plus fort que le débit d'entrée, alors que le cas  $\alpha=70^\circ$  connaît une répartition contraire. Cela signifie que les effets radiaux plongeants sont plus importants pour les angles forts. L'angle  $\alpha^*$  pour lequel se produit l'inversion de répartition dépend de la hauteur de la rainure. Pour  $h=1$  mm, on trouve ainsi  $\alpha^* \approx 70^\circ$ , tandis que pour  $h \geq 2$  mm,  $120^\circ \leq \alpha^* \leq 130^\circ$ .

On constate une fois de plus que l'obstacle circonférentiel constitue un cas limite du rainurage, pour  $\alpha$  tendant vers  $0$  ou  $180^\circ$ . En théorie, cet obstacle correspond à des rainures dans lesquelles aucun fluide ne circule, or on voit ici que le débit dans la rainure diminue fortement quand l'angle augmente.

On peut étudier encore un peu plus finement la répartition de débit en faisant intervenir directement le rapport de section. Dans la figure (Fig. 3.35), on a tracé la vitesse débitante moyenne au niveau de la rainure, adimensionnée par la vitesse débitante moyenne sur la rainure et la zone supérieure :

$$V_{adim} = \frac{\dot{m}_{rainure}}{S_{rainure}} \left( \frac{S_{Total}}{\dot{m}_{total}} \right)^{-1}$$

où

$$S_{rainure} = hw$$

et  $S_{Total}$  est donnée par la formule (3.10).

Cette grandeur correspond en fait à un indice d'équilibrage de la vitesse débitante :

- Si  $V_{adim}=1$ , la vitesse débitante est équilibrée sur l'ensemble [rainure+zone supérieure]. Plus concrètement, cela signifie que la répartition de débit se fait au prorata des surfaces.
- Si  $V_{adim}<1$ , alors la vitesse débitante moyenne dans la rainure est plus faible que celle dans la zone haute. Le fluide tend alors à contourner les rainures en passant au dessus.
- Si  $V_{adim}>1$ , alors la vitesse débitante moyenne dans la rainure est plus forte que celle dans la zone haute. Le fluide privilégie les rainures (cas assez rare).

Comme on le voit sur la figure, la rainure présente à peu près toujours un indice de répartition inférieur à 1. Seule la géométrie [ $\alpha=70^\circ$ ,  $h=3$  mm] connaît une répartition de vitesse à l'avantage de la rainure. L'écart par rapport au cas uniforme est cependant marginalement faible. La rainure est donc (presque) toujours en sous-vitesse par rapport à la partie supérieure de la veine. On remarque toutefois que plus  $h$  augmente, plus l'indice de répartition augmente. De la même manière, cet indice augmente quand l'angle  $\alpha$  diminue.

L'augmentation de la circulation de fluide dans la rainure est un point important, car elle montre que la rainure est alors utilisée plus efficacement. Cette variation tient compte à la fois des phénomènes de blocage aérodynamique, liés au champ de pression statique par exemple, et au blocage par les effets visqueux (couche limite, ...). On voit ainsi que le blocage global est bien plus fort dans le cas  $h=1$  mm que dans les autres cas. On peut s'en convaincre encore plus facilement en examinant la vitesse moyenne débitante dans la rainure, adimensionnée cette fois par la vitesse débitante moyenne en *amont* des rainures (Fig. 3.36).

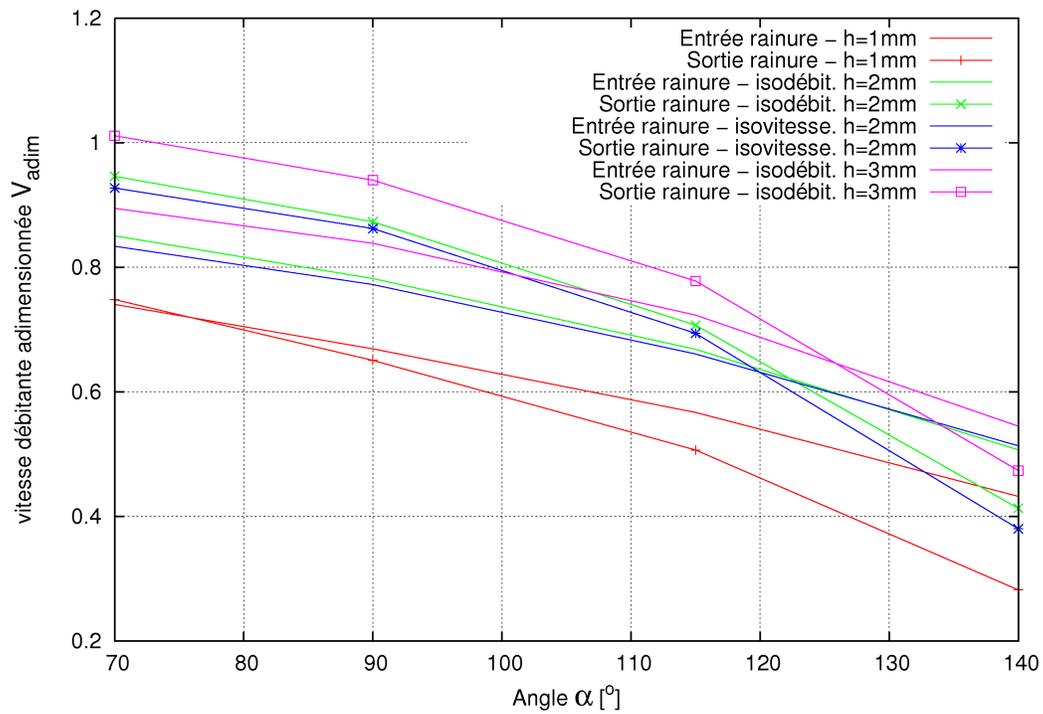


FIG. 3.35 – Equilibrage de vitesse débitante au niveau des rainures

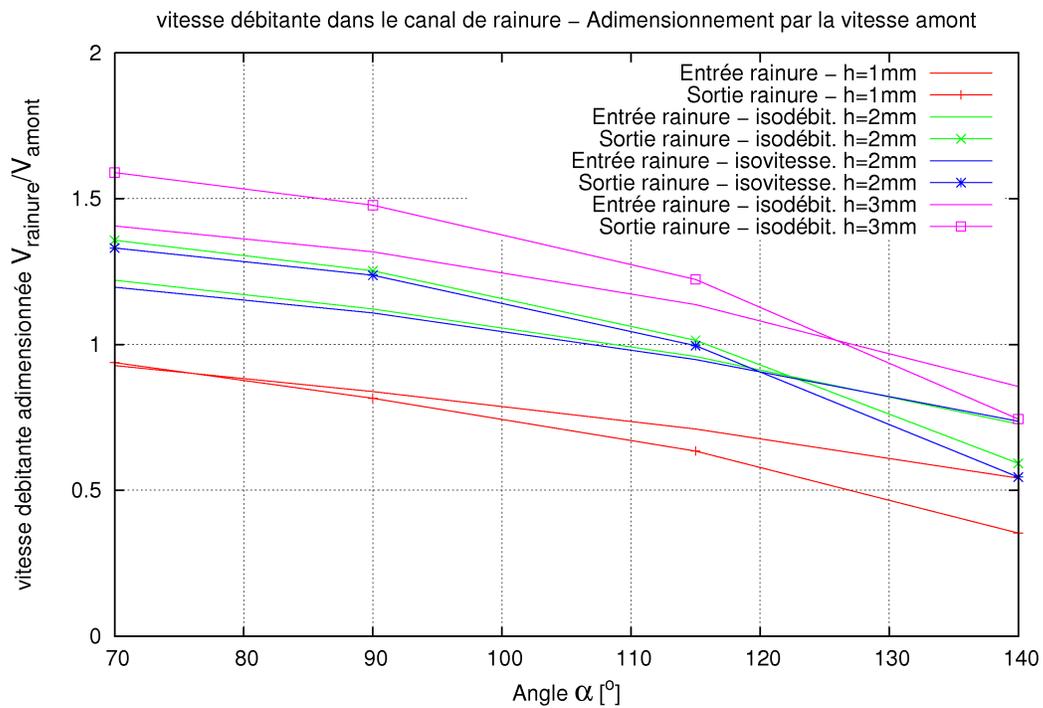


FIG. 3.36 – Vitesse débitante moyenne adimensionnée dans la rainure

On constate que pour  $h=1$  mm, la vitesse débitante dans la rainure est inférieure à celle en amont, alors que du fait de la réduction de section au niveau des rainures, on devrait observer une accélération. Le blocage responsable du déficit de vitesse est, pour les rainures peu profondes, en grande partie lié aux effets visqueux. Pour cette géométrie, on mesure que la couche limite carter a une épaisseur d'environ 0.5 mm, soit près la moitié de la hauteur de la rainure. Dans de telles conditions, il est évident que le débit sera très faible dans la rainure.

La réduction de la vitesse associée à l'augmentation de l'angle  $\alpha$  peut aussi être conçue comme le résultat d'un blocage aérodynamique et visqueux. La section de la rainure perpendiculaire à son axe dépend de l'angle  $\alpha$  :

$$S = h \times (w \cdot \sin \alpha) \quad (3.12)$$

Le maximum de section est atteint pour  $\alpha=90^\circ$ . En conséquence, l'écoulement sera davantage soumis aux effets visqueux dans des rainures fortement inclinées ( $\alpha \mapsto 0^\circ$  ou  $\alpha \mapsto 180^\circ$ ). Cependant, si la réduction de section était le seul effet, la courbe devrait être symétrique par rapport à  $\alpha = 90^\circ$ , ce qui n'est visiblement pas le cas. Il existe donc d'autres mécanismes, liés à la pression ou à la viscosité, qui viennent modifier le blocage global de la rainure.

### 3.4.5.5 Champ de pression statique dans le jeu

Considérons enfin les champs de pression au niveau de la rainure. La première grandeur à observer est la pression statique, puisqu'il s'agit d'un des objectifs fixés.

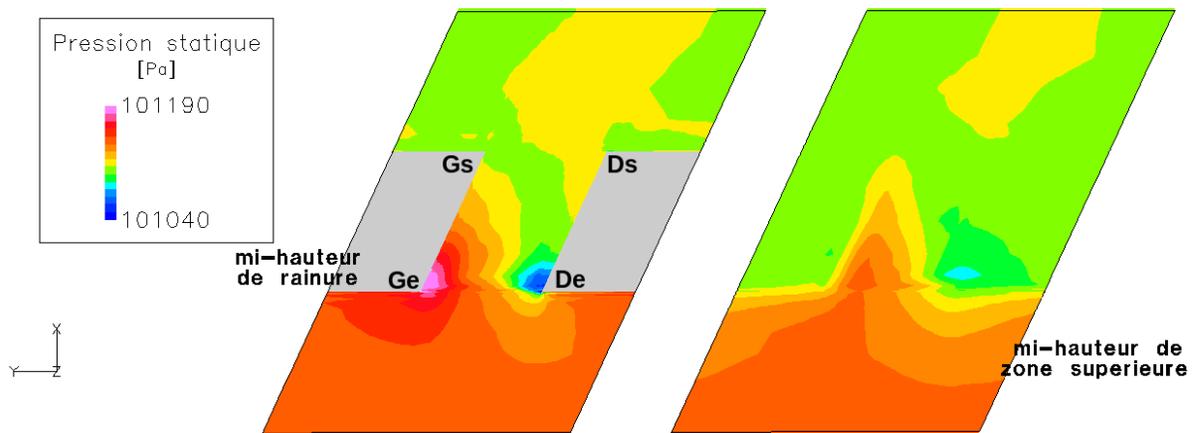


FIG. 3.37 – Carte de pression statique à mi-hauteur de rainure et de zone supérieure

La figure (Fig. 3.37) donne la carte à mi-hauteur de rainure et de zone supérieure pour la configuration de référence [3.6]. La pression en amont est à peu près uniforme. Le champ ne commence à varier qu'au voisinage de la rainure.

Le zone autour du coin **Ge** présente une nette surpression, localisée ici à l'intérieur de la rainure, tandis que la paroi opposée (**De**) est en dépression. Cette surpression s'explique par la présence d'un point d'arrêt : l'écoulement entrant dans la rainure se dirige majoritairement vers la paroi gauche **Ge**, sur laquelle il vient finalement buter. La dépression est, elle, associée à la déviation brutale du fluide entrant dans la rainure au niveau du coin **De**. La déviation peut générer un décollement qui sera décrit plus loin. Cette répartition de pression se retrouve sur une bonne partie de la rainure.

L'amplitude de ces extrema varie avec l'angle de la rainure. La pression au point d'arrêt vers **Ge** augmente avec  $\alpha$ , et elle est donc maximale pour  $\alpha=140^\circ$ . Cette augmentation est simplement due au fait que, pour  $\alpha=140^\circ$ , la paroi gauche est quasiment perpendiculaire à l'écoulement entrant dans la rainure. A l'opposé, pour  $\alpha=45^\circ$ , la paroi est presque alignée avec l'écoulement et le point d'arrêt dans la rainure est très faible.

Ce comportement du champ de pression statique explique en partie la réduction de débit associée à l'angle : pour les angles élevés, le champ de pression statique en entrée de rainure s'oppose à l'écoulement, au contraire des angles faibles pour lesquels le blocage est faible.

Le champ de pression en aval présente quelques zones de légère dépression ainsi qu'une surpression dans l'axe de la rainure. Dans l'ensemble, ces variations sont à relier à des structures tourbillonnaires que nous verrons un peu plus tard.

### 3.4.5.6 Champ de pression totale dans le jeu

La carte de pression totale à mi-hauteur (Fig. 3.38) présente globalement la même topologie que la carte de pression statique. Dans ce repère, une augmentation de la pression totale correspond à un apport d'énergie par la paroi mobile, une baisse étant une perte d'énergie liée à un phénomène dissipatif.

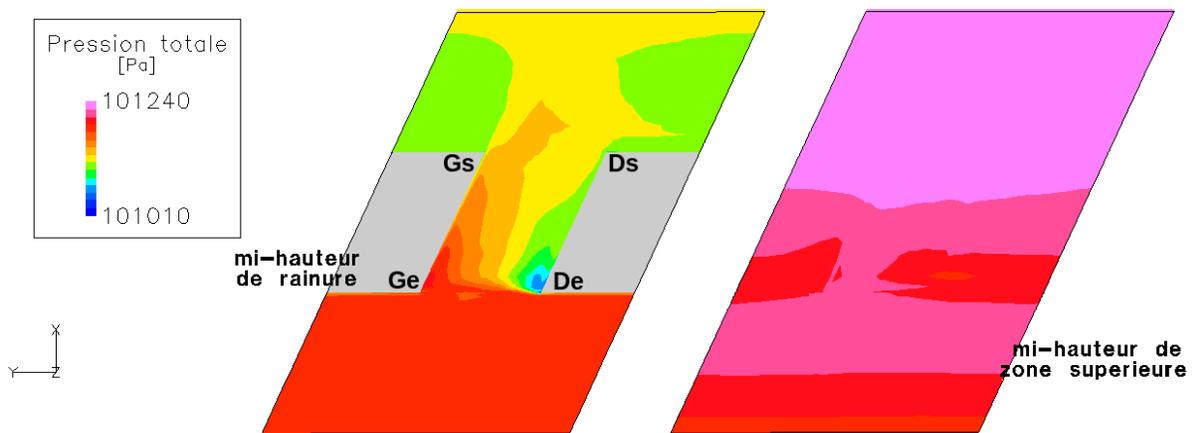


FIG. 3.38 – Carte de pression totale à mi-hauteur de rainure et de zone supérieure

A cette hauteur, la pression totale diminue entre l'entrée et la sortie du jeu. On repère deux zones de pression totale faible, la première se situe au coin d'entrée droit, la seconde en aval des obstacles.

Les profils de pression totale (Fig. 3.39) indiquent une baisse de niveau entre l'amont et l'aval dans la partie inférieure (-2 mm / -5 mm). Cette baisse correspond au sillage des obstacles et des rainures. En partie supérieure, le niveau de pression remonte à cause de l'entraînement par la paroi mobile. Selon que la dissipation au niveau de la rainure compense ou non l'apport de la paroi, il est possible d'avoir une augmentation de la pression totale moyenne entre l'entrée et la sortie.

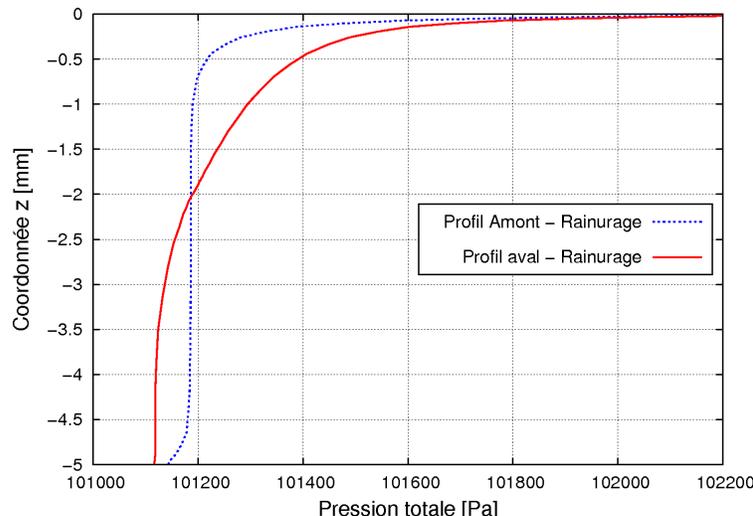


FIG. 3.39 – Profils de pression totale

### 3.4.6 Structures tourbillonnaires de l'écoulement au niveau des rainures

Dans le détail, l'écoulement au niveau des rainures est beaucoup plus complexe. On observe habituellement plusieurs structures tourbillonnaires majeures, localisées en différents endroits de la géométrie. On trouve ainsi :

- Un décollement en entrée de rainure, d'axe de rotation  $\vec{z}$
- Un tourbillon à l'intérieur de la rainure. Son axe de rotation est à peu près colinéaire avec la rainure.
- Un tourbillon, ou plutôt un ensemble de décollements d'axe  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  se développant en aval de l'obstacle.

Ces structures sont d'origines assez différentes. Certaines correspondent à des décollements, d'autres sont générées par des mécanismes plus complexes. Compte-tenu de l'exiguïté de la géométrie, ces structures interagissent de manière plus ou moins forte.

#### 3.4.6.1 Décollement d'entrée de rainure

Il s'agit de la première recirculation notable. Ce décollement se développe dans un plan "aube à aube" ( $\vec{x}, \vec{y}$ ), il a donc un axe tourbillonnaire orienté selon  $\vec{y}$ . Il est situé en entrée de la rainure, au niveau du coin **De**.

Dans cette partie, nous allons d'abord décrire la structure de ce tourbillon ainsi que ses origines. Nous analyserons ensuite sa sensibilité aux paramètres  $\alpha$  et  $w$ .

Comme on peut le voir sur la figure (Fig. 3.40), cette structure est en fait liée au décollement du fluide entrant dans la rainure. La coupe présentée est effectuée à mi-hauteur de rainure, pour la configuration [3.6].

A cause de la présence de l'obstacle et de la giration du fluide en amont des rainures, l'écoulement subit une très forte déviation en entrant dans la rainure, et plus particulièrement au niveau du coin **De**. Dans le cas représenté, le fluide circulant en amont de l'obstacle est quasiment aligné avec la

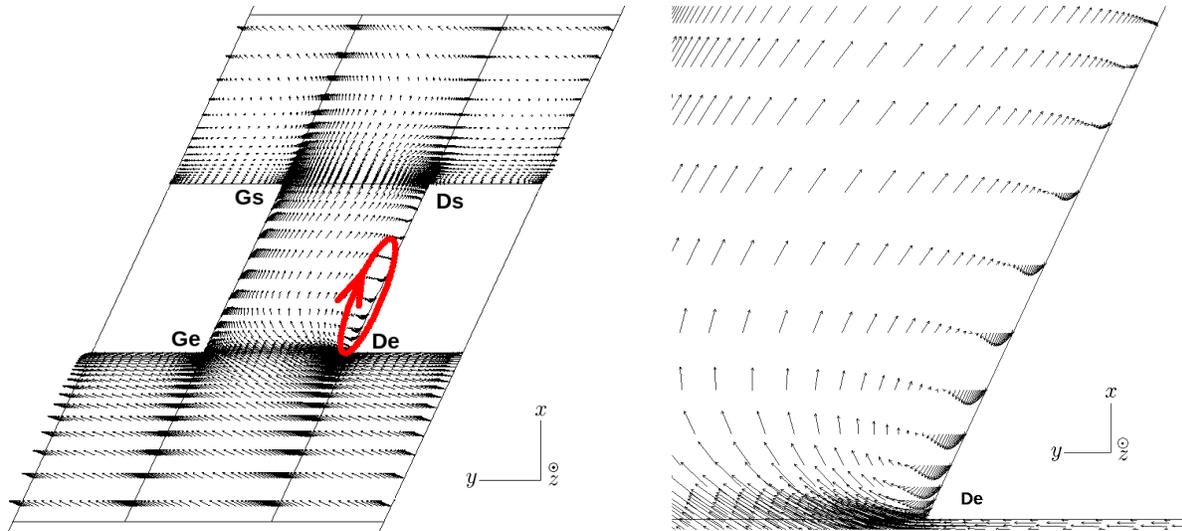


FIG. 3.40 – Recirculation en entrée de rainure - Coupe à mi-hauteur de rainure

direction  $\vec{y}$ . En entrant dans la rainure, il tend à s'aligner avec cette dernière, soit une déviation d'environ  $\alpha=115^\circ$ . Dans de telles conditions, il est évident qu'une recirculation puisse se former au niveau du coin **De**. On observe alors un décollement de forme classique le long de la paroi droite de la rainure, s'étendant, à partir de l'arête incriminée, sur une bonne partie du canal.

Comme on peut le voir sur la figure (Fig. 3.41), cette structure s'étend aussi sur toute la hauteur de la rainure. On a représenté en rouge l'iso-surface de vitesse axiale nulle, délimitant la poche dans laquelle l'écoulement remonte vers l'arête **De**. La vue de gauche représente la rainure par trois quarts arrière (l'écoulement va donc de la droite vers la gauche) tandis que la vue de droite représente cette recirculation vue dans l'axe de la rainure depuis l'amont.

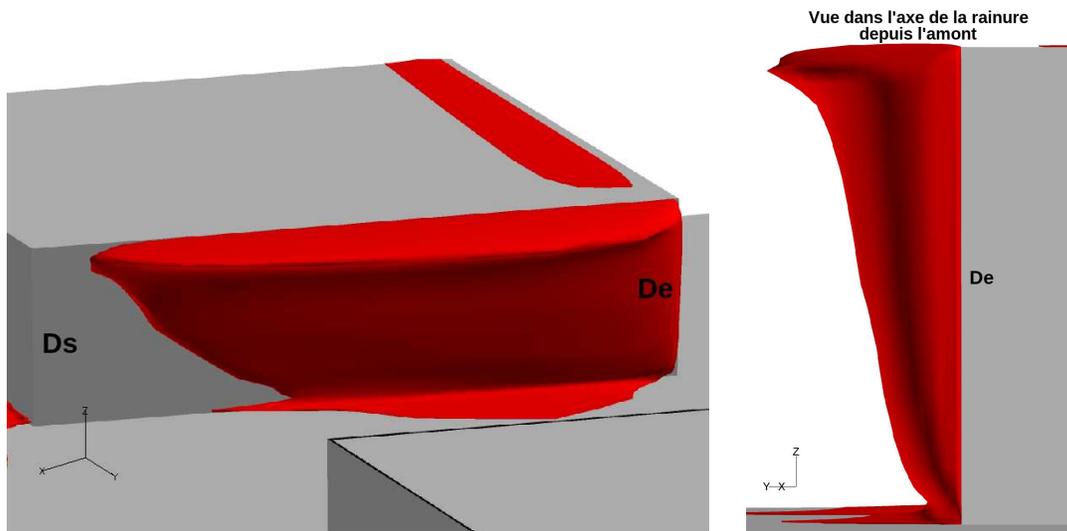


FIG. 3.41 – Etendue du décollement en entrée de rainure

On remarque néanmoins que la recirculation est moins étendue en bas qu'en haut. L'explication

de ce phénomène n'est pas liée à l'incidence de l'écoulement au niveau l'arête **De**. On constate que près de cette arête, l'incidence est à peu près constante sur toute la hauteur.

En revanche, la norme de vitesse joue un rôle important. Dans la zone basse, l'écoulement est assez lent du fait des couches limites se développant sur la paroi carter. Au fur et à mesure que l'on remonte vers le sommet de l'obstacle, la vitesse du fluide augmente. En parallèle, le champ de pression statique au voisinage de l'arête ne présente pas de variation notable dans la direction verticale. En conséquence, le fluide est moins dévié au sommet qu'à la base, ce qui induit une recirculation plus forte.

Un deuxième effet peut aussi intervenir dans l'extension de cette recirculation. Il s'agit de la perturbation du champ par l'écoulement circulant au dessus des rainures. Celui-ci est animé d'une forte vitesse transversale et vient "souffler" la partie haute du tourbillon, lequel tend alors à s'élargir. Cela peut notamment expliquer la croissance brutale observée dans la partie haute, comprise approximativement entre 80 et 100% de la hauteur de rainure.

**Effet de l'angle  $\alpha$**  Cette recirculation est logiquement sensible à l'angle de la rainure. La relation avec ce paramètre est néanmoins complexe, avec une non-linéarité forte. Le tableau suivant donne la distance de recollement en fonction de l'angle, ainsi que l'épaisseur maximum moyenne selon  $\vec{y}$  de la zone de vitesse débitante négative.

angle $\alpha$	distance de recollement [mm]	épaisseur selon $\vec{y}$ [mm]
45 °	6.0	0.5
70 °	7.8	0.7
90 °	8.1	0.8
115 °	8.2	0.7
140 °	7.1	0.6

TAB. 3.7 – Evolution de la recirculation d'entrée - influence de l'angle de rainure

La présence d'un maximum de longueur et d'épaisseur est à relier aux deux mécanismes opposés que sont la diminution de la vitesse dans la rainure et l'alignement de cette dernière avec le flux entrant.

Pour un angle élevé,  $\alpha=140^\circ$  par exemple, la déviation que subit le fluide en entrant dans la rainure est énorme. Pour le fluide circulant transversalement devant l'obstacle, cette déviation avoisine les  $140^\circ$ . On peut logiquement attendre un décollement de très grande amplitude. Toutefois, en raison du blocage aérodynamique, la vitesse du fluide à l'intérieur de la rainure est assez faible. Ce deuxième phénomène tend, lui, à réduire la taille du décollement.

A l'opposé, pour des angles faibles, la vitesse dans la rainure est assez élevée, mais la déviation du fluide est plus petite, réduisant ainsi la taille du décollement.

Un deuxième mécanisme agit en parallèle : considérons la fermeture des rainures donnée par la relation (3.12). Quand  $\alpha$  s'écarte de  $90^\circ$ , la largeur "passante"  $w \cdot \sin \alpha$  de la rainure diminue, conduisant à une augmentation de la composante perpendiculaire à l'axe de rainure du gradient de pression statique. De cette manière, le fluide est mieux guidé dans le plan rainure à rainure, ce qui peut induire une diminution de cette recirculation.

**Effet de la largeur de la rainure  $w$**  La largeur de la rainure joue aussi un rôle dans l'évolution de la recirculation. Une rainure large conduira à l'apparition d'une recirculation plus grosse. L'expli-

cation de ce phénomène vient là aussi de la variation de section (3.12) et des gradients transversaux associés.

### Synthèse sur le décollement d'entrée

- **Intérêt du décollement d'entrée :** Au final, cette recirculation est assez intéressante du point de vue de l'augmentation du différentiel de pression statique au travers du jeu. En effet, en plus de pertes aérodynamiques, elle est responsable d'une obturation partielle du canal de rainure. Dans le cas présenté en (Fig. 3.40 et 3.41) la zone de débit négatif s'étend en moyenne sur près de 0.8 mm dans la direction  $\vec{y}$ , soit environ 10% de la largeur du canal.
- **Sensibilité aux paramètres :** Le décollement d'entrée est essentiellement sensible à deux paramètres, l'angle  $\alpha$  et la largeur  $w$  de la rainure. Dans les deux cas, on met en évidence l'importance de la déviation et de la vitesse du fluide en entrée de rainure. Plus la déviation est faible (angles faibles), plus ce décollement sera petit. De même, plus la vitesse dans la rainure sera faible ( $\alpha$  grands ou  $w$  petits), plus le décollement en entrée sera réduit.

#### 3.4.6.2 Tourbillon colinéaire à la rainure

Nous avons présenté dans la sous-section précédente le décollement en entrée, première des trois structures tourbillonnaires présentes au niveau des rainures. Le deuxième tourbillon à étudier est totalement lié à la rainure. Il s'agit d'un tourbillon occupant toute la section de la rainure. Dans toute la suite, ce tourbillon sera simplement désigné par l'expression **tourbillon de rainure**.

Dans la suite, on présentera en détail la structure complexe de ce tourbillon, ainsi que les mécanismes qui en sont à l'origine. On s'attachera ensuite à décrire l'influence des paramètres sur ce tourbillon. On analysera en particulier les effets de l'angle  $\alpha$ , de la hauteur  $h$  et de la largeur  $w$ .

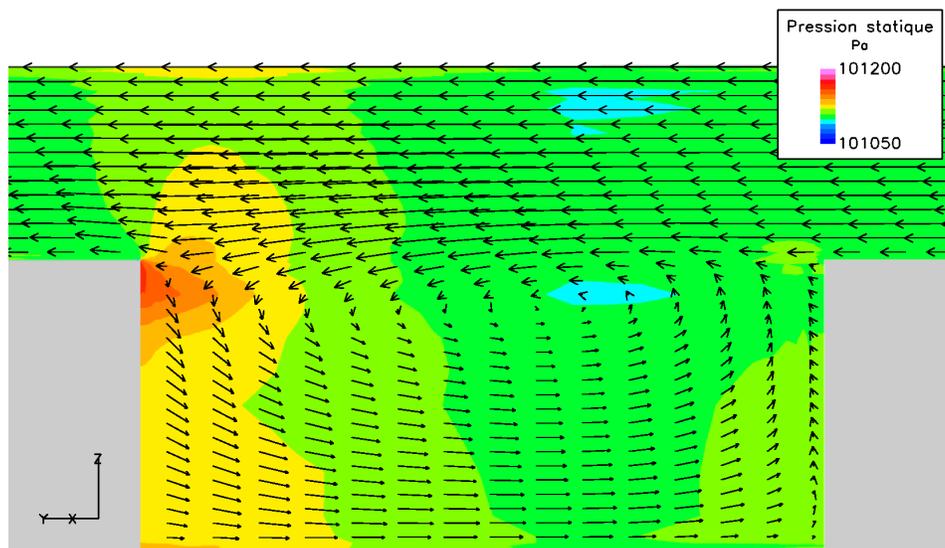


FIG. 3.42 – Vortex de rainure - Champ vectoriel et pression statique à mi-longueur de la rainure

La figure 3.42 illustre le champ de vitesse dans une coupe perpendiculaire à la rainure, située à

mi-longueur de cette dernière. On a superposé au champ vectoriel la carte de pression statique dans ce même plan. La paroi mobile va de la droite vers la gauche de la figure.

On remarque clairement le tourbillon dans la rainure. En partie basse du canal, le fluide est animé d'une vitesse transversale  $V_y$  négative, alors que dans la partie haute, cette vitesse est positive. De la même manière, au niveau des parois latérales gauches (respectivement droites), le fluide plonge vers le bas de la rainure (respectivement remonte vers le sommet). Le cœur de ce tourbillon est situé dans la partie haute de la rainure, à peu près à mi-largeur. On peut le repérer facilement grâce à la légère dépression qu'il génère.

Ce mécanisme tourbillonnaire est complètement lié au mouvement transversal du fluide en amont et au dessus des rainures, lequel est induit par la rotation du ventilateur. Ce mécanisme est assez complexe car il tient à la fois du tourbillon de passage et du tourbillon de raclage, comme celui qui apparaît parfois au niveau du jeu en tête d'aube des rotors de turbines axiales actuelles. Dans cette analogie, les obstacles jouent le rôle des aubes, la paroi mobile est assimilable au carter de la turbine. Ce qu'on observe ici dans le repère absolu correspond au champ dans le repère relatif de la turbine.

Le tourbillon apparaît dès le plan d'entrée de la rainure. Puisque l'écoulement amont circule avec une vitesse  $V_y$  positive, l'obstacle à gauche de la rainure constitue une surface d'arrêt pour le mouvement transversal. Il en résulte une surpression sur le côté gauche de la rainure. Le gradient de pression transversal, combiné à la couche limite sur la paroi basse de la rainure, entraîne l'apparition d'une vitesse transversale négative comme illustré en (Fig. 3.43). Sur cette figure, le niveau coloré en jaune correspond à la vitesse nulle. Cet écoulement de retour, similaire au tourbillon de passage se prolonge à l'intérieur de la rainure. Il se couple néanmoins à un deuxième mécanisme majeur.

Comme on peut le constater sur la carte de pression statique de la figure (Fig. 3.42), lorsque le fluide venant de la partie (libre) supérieure rencontre le mur gauche, cela se traduit par un point d'arrêt localisé vers le sommet de la rainure et donc une pression statique élevée dans cette zone seulement. Cette surpression locale va provoquer la déviation d'une partie de l'écoulement vers le bas de la rainure. En raison de la conservation du débit, on assiste alors à l'apparition d'un écoulement de retour transversal et d'un écoulement montant au niveau de la paroi verticale opposée. Ce mécanisme est stable puisque la dépression au centre de la rainure, générée par la déviation des lignes de courant, attire à son tour vers le bas une partie de l'écoulement de la zone haute. Ce mécanisme de raclage et le tourbillon de passage précédemment évoqués se combinent pour former un unique tourbillon occupant toute la section de la rainure (Fig. 3.42 et 3.43).

Bien que nous n'ayons pas eu l'occasion de le vérifier, on peut très logiquement imaginer que si le mur gauche est plus haut que le mur droit (le sommet des obstacles est donc en biais), cette structure sera encore plus forte car la zone d'arrêt sera d'autant plus étendue.

Cette structure interagit fortement avec la recirculation d'entrée présentée en 3.4.6.1. En effet, lorsque l'on trace la trajectoire des particules circulant au niveau du cœur de ce tourbillon, on remarque un couplage fort avec la recirculation en entrée.

Sur la figure (Fig. 3.44), on représente la trajectoire de particules lâchées au niveau de la recirculation d'entrée. Les trajectoires obtenues sont groupées et colorées en bleu, rouge et magenta pour les distinguer plus facilement. Le lâcher de particules a été effectué de manière à capter le mieux possible le cœur du tourbillon de rainure.

Sur la vignette du haut, la géométrie est vue de l'amont en perspective plongeante. On a ajouté la carte de pression totale en sortie de rainure. Cela permet de vérifier que les trajectoires passent bien par la zone de  $P_t$  minimum, donc sont proches du cœur de la structure tourbillonnaire.

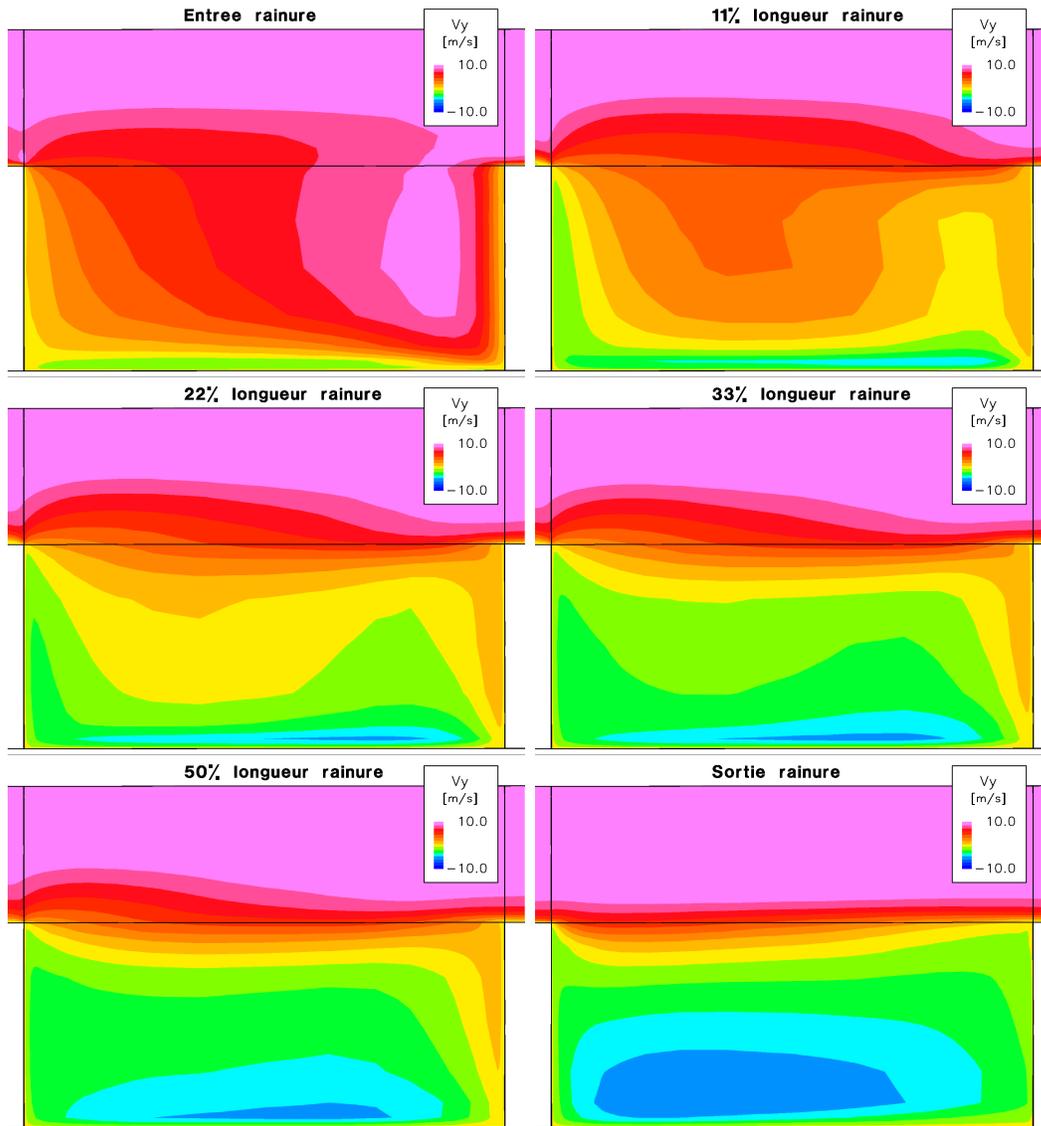


FIG. 3.43 – Cartographie de vitesse transversale  $V_y$  le long de la rainure

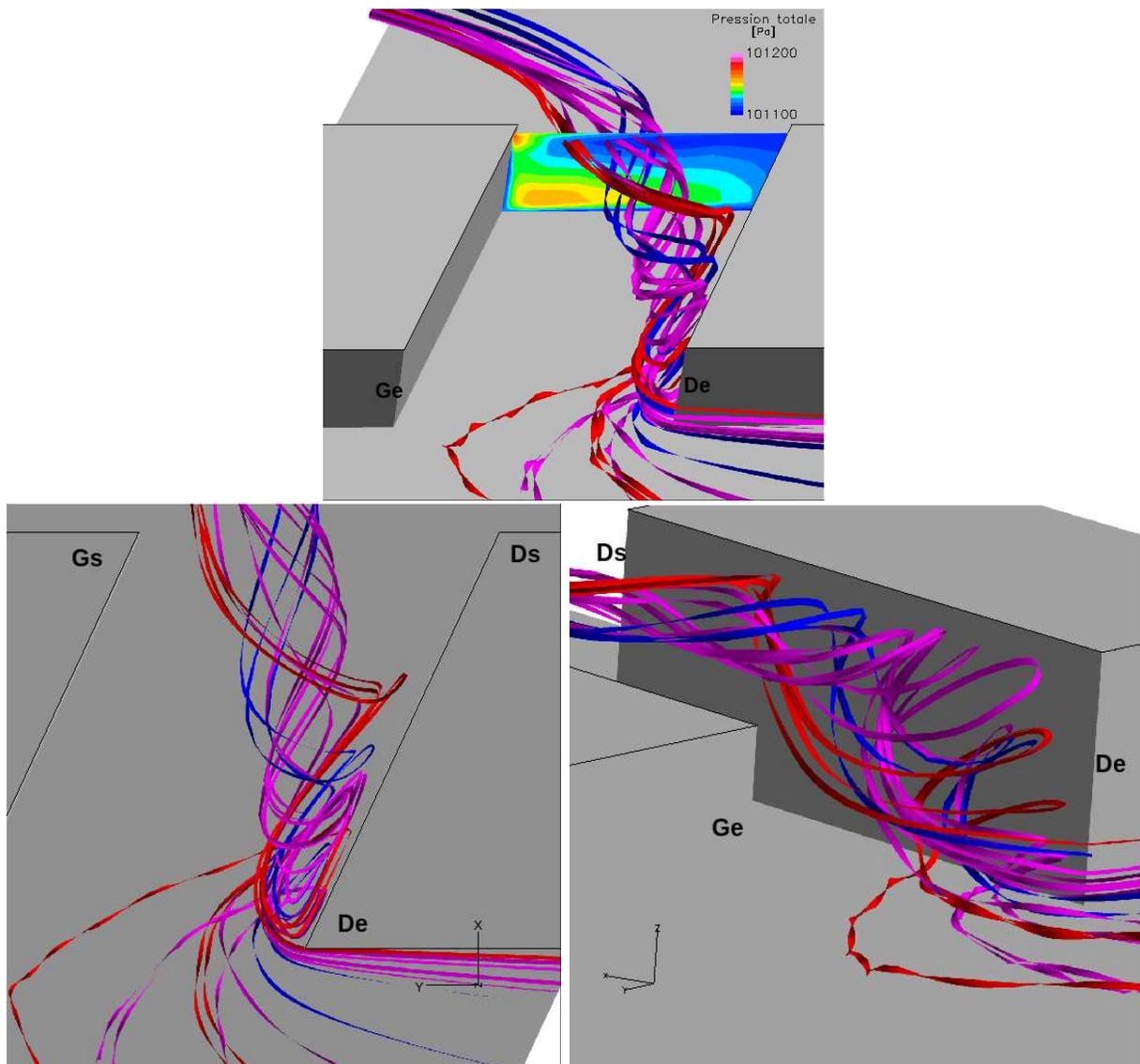


FIG. 3.44 – Trajectoires des particules au niveau du tourbillon de rainure

La vignette en bas à gauche montre les trajectoires projetées dans le plan horizontal. On voit clairement que toutes les particules sont à un moment ou un autre impliquées dans la recirculation au niveau du coin **De**.

La vignette inférieure droite montre les lignes de courant au niveau de la recirculation d'entrée dans une vue en perspective. Le point le plus remarquable est le mouvement radial qui anime toutes ces trajectoires. Par exemple, celles colorées en magenta montent brutalement jusqu'au sommet de la rainure, où elles sont déviées soudainement pour adopter une direction plus horizontale.

Pour autant, on ne peut pas affirmer que ce tourbillon est issu de la recirculation d'entrée puisqu'on a montré que la structure de ce tourbillon commençait à se mettre en place dès le début du rainurage, dans une zone éloignée du coin où apparaît le décollement. L'effet de ce couplage se fait plutôt sentir dans l'évolution de cette structure, et plus précisément dans l'influence des paramètres géométriques.

Ce tourbillon est particulièrement intéressant pour l'objectif de réduction de la giration en sortie de jeu. En effet, il génère une vitesse  $V_y$  négative qui, par moyenne, permet de diminuer le niveau global de ce critère en aval des rainures. Cette structure est convectée en aval des rainures et on retrouve son influence sur une certaine distance (Fig. 3.45). Cette distance d'influence peut aller jusqu'à  $1.5 \times L$  dans certains cas.

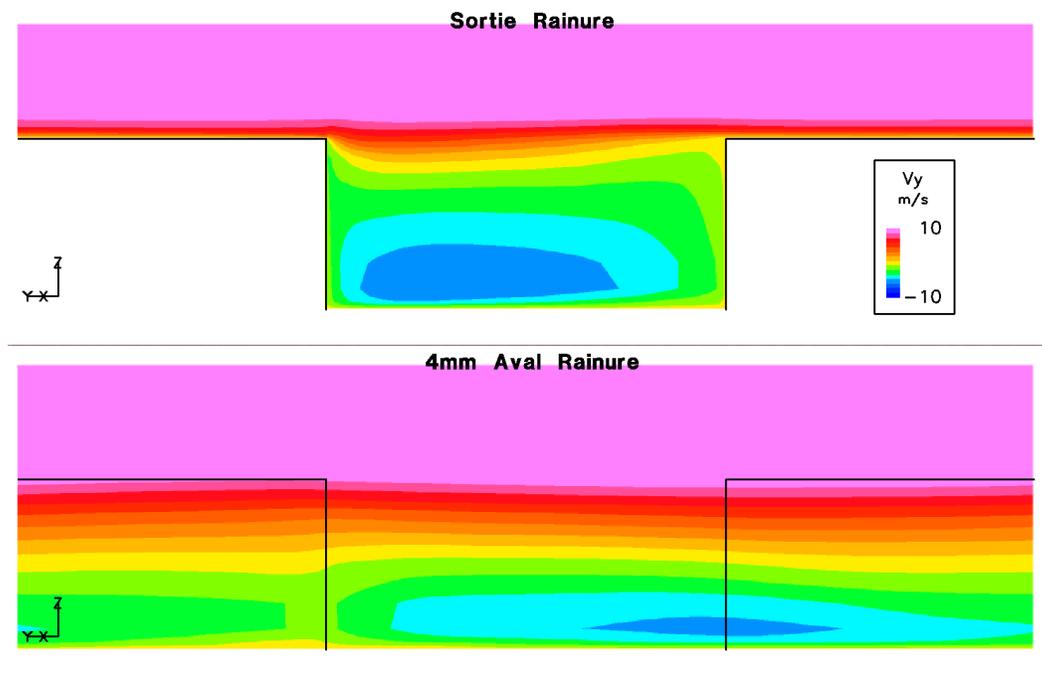


FIG. 3.45 – Carte de vitesse  $V_y$  - Sortie et aval de la rainure

La figure (Fig. 3.45) montre la carte transversale de vitesse  $V_y$  en sortie de rainure et 4mm en aval des rainures. Le niveau jaune correspond à une vitesse nulle. On voit sur ces deux cartes que le profil de vitesse présente une partie négative en bas de la veine. On retrouve en aval la structure du tourbillon de rainure, caractérisée par une vitesse négative importante, même si on commence aussi à sentir des interactions avec d'autres structures présentées plus loin.

Dans les configurations testées, le tourbillon de rainure est essentiellement sensible à trois paramètres géométriques. Il s'agit de l'angle, de la hauteur et de la largeur des rainures.

**Effet de l'angle  $\alpha$**  Quel que soit l'angle  $\alpha$  simulé, le tourbillon de rainure a toujours été observé. Cependant, on note une disparition progressive de la zone de vitesse transversale négative en fond de rainure au fur et à mesure que l'angle diminue.

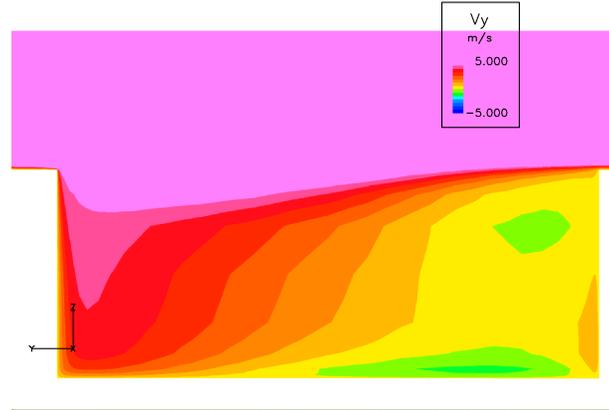


FIG. 3.46 – Carte de vitesse transversale - Coupe en sortie de rainure

La figure (Fig. 3.46) donne la carte de vitesse transversale en sortie de rainure pour la configuration [ $\alpha=70^\circ$ ,  $h=3$  mm,  $w=7.8$  mm,  $L=9$  mm,  $N=50$ ]. Là où, sur la figure (Fig. 3.45) par exemple, on avait une vitesse  $V_y$  négative dans un cas d'angle "fort" ( $\alpha=115^\circ$ ), la vitesse  $V_y$  est maintenant globalement positive ou nulle (ou *très* faiblement négative). On perd ainsi en efficacité sur l'objectif de réduction de la giration.

Pour des angles encore plus faibles ( $\alpha=45^\circ$ ) par exemple, la vitesse transversale reste positive dans toute la section de rainure. Ce phénomène s'explique par la modification de la direction globale du tourbillon. En effet, il n'apparaît clairement structuré que lorsqu'on regarde dans l'axe de la rainure. On peut alors définir un nouveau repère ( $\vec{X}_R, \vec{Y}_R, \vec{z}$ ) associé à la rainure :  $\vec{X}_R$  est le vecteur colinéaire à l'axe de la rainure, et  $\vec{Y}_R = \vec{z} \wedge \vec{X}_R$ .

$$\begin{aligned}\vec{X}_R &= \sin(\alpha)\vec{x} + \cos(\alpha)\vec{y} \\ \vec{Y}_R &= -\cos(\alpha)\vec{x} + \sin(\alpha)\vec{y}\end{aligned}\tag{3.13}$$

Dans ce repère, on observe bien une vitesse  $V_{Y_R} = \vec{V} \cdot \vec{Y}_R$  négative en fond de rainure, sans pour autant avoir une vitesse  $V_y$  négative dans la même zone : il suffit d'avoir  $U_x = \vec{V} \cdot \vec{x} > 0$  et  $V_y = \vec{V} \cdot \vec{y} = 0$  par exemple. En règle générale, on évitera d'utiliser des rainures avec un angle d'hélice faible car, comme on le verra un peu plus loin, elles ne permettent ni une bonne réduction de la giration, ni un niveau élevé de pertes de charge.

De manière plus générale, la trajectoire du tourbillon est dépendante de l'angle de la rainure. La figure suivante (Fig. 3.47) illustre les trajectoires des particules proches du cœur pour trois angles,  $\alpha=70^\circ$ ,  $115^\circ$  et  $140^\circ$ .

On voit que pour des angles faibles, le cœur du tourbillon reste proche de la paroi droite, alors que pour des angles plus élevés, il tend à traverser la rainure. Pour  $\alpha=140^\circ$ , les trajectoires atteignent

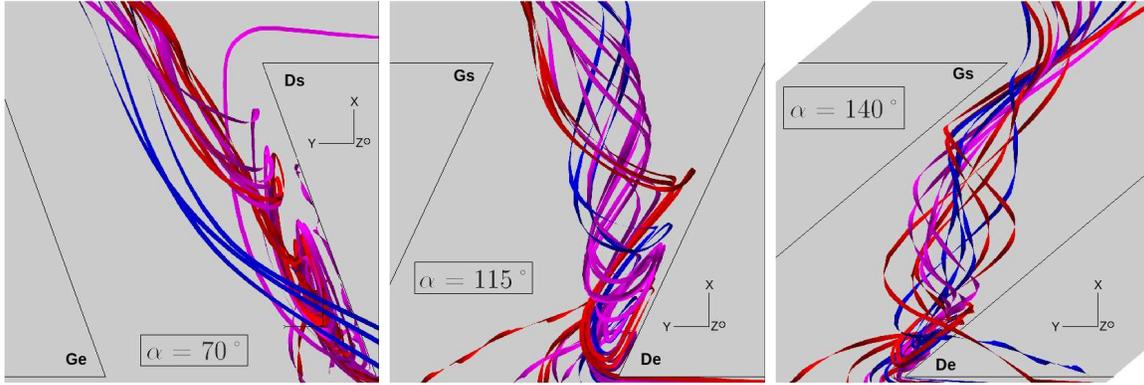


FIG. 3.47 – Trajectoire du cœur tourbillonnaire - cas  $\alpha = 70^\circ, 115^\circ, 140^\circ$

le mur gauche puis le longent jusqu'à la sortie de la rainure, au coin **Gs**. En dehors de ce dernier cas, la trajectoire globale du tourbillon s'incline dans le sens  $y$  croissant.

Cette modification de la trajectoire du tourbillon s'accompagne d'une modification de l'hélicité associée. Le tableau [3.8] donne le niveau moyen d'hélicité ( $H = \overrightarrow{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{V}$ ) sur une section droite, située à 90% de la longueur du canal, en fonction de l'angle, les autres paramètres géométriques sont fixés aux valeurs de la configuration de référence [3.6] :  $h=3$  mm,  $w=7.8$  mm,  $L=9$  mm,  $N=50$ .

angle $\alpha$	Hélicité [ $\text{m.s}^{-2}$ ]	$\ \vec{V}\ $ [m/s]	$\ \overrightarrow{rot}\vec{V}\ $ [ $\text{s}^{-1}$ ]
$45^\circ$	-9868	6.9	7130
$70^\circ$	-11477	5.9	7417
$90^\circ$	-14436	5.5	7796
$115^\circ$	-12836	5.3	7824
$140^\circ$	-7061	4.3	6647

TAB. 3.8 – Variation de l'hélicité moyenne en sortie de rainure relativement à l'angle

Il apparaît que l'hélicité connaît un pic, situé aux alentours de  $\alpha=90^\circ$ . Seules les configurations extrêmes, et plus particulièrement celle à  $140^\circ$ , ont des niveaux faibles. Pour cette configuration ( $\alpha=140^\circ$ ), la diminution de l'hélicité est due à la baisse simultanée du niveau de vitesse et de vorticité dans la rainure. Pour le cas  $45^\circ$ , le problème vient plutôt d'une petite chute de la vorticité, liée à une "meilleure" orientation de la rainure vis à vis de l'écoulement incident et transversal.

**Effet de la hauteur  $h$**  La hauteur influence directement les caractéristiques du tourbillon de rainure. On donne en table [3.9] les variations de l'hélicité et de la vitesse transversale  $V_y$  moyenne, calculées sur une section droite située à 90% de la longueur de la rainure. Les autres paramètres sont fixés :  $\alpha=115^\circ$ ,  $w=7.8$  mm,  $L=9$  mm,  $N=50$  (configuration de référence)

On remarque clairement que l'hélicité diminue de manière monotone lorsque la hauteur de rainure augmente. Ce phénomène est lié à une diminution générale du niveau de cisaillement dans le canal de rainure. Pour une faible profondeur, il existe un cisaillement très fort dans la direction transversale entre, d'une part, le fluide de la partie supérieure, entraîné rapidement par le rotor selon  $+\vec{y}$ , et d'autre part, le fluide circulant, en bas de la rainure, dans la direction  $-\vec{y}$ . Il en résulte un niveau de vorticité, et donc d'hélicité, extrêmement élevé. Quand la rainure devient plus profonde,

Hauteur	Hélicité [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ]	Vitesse transversale $V_y$ [ $\text{m}/\text{s}$ ]
1 mm	-34060	1.2
2 mm	-24735	2.5
3 mm	-12836	2.5
4 mm	-8500	2.3

TAB. 3.9 – Variation de l'hélicité et de la vitesse transversale moyenne en sortie de rainure relativement à la hauteur

la vitesse moyenne du fluide en partie supérieure ne varie pas, mais en revanche les gradients de vitesse diminuent, conduisant à un cisaillement et une vorticité plus faible.

En parallèle de la variation d'h  licite, on observe que la vitesse transversale  $V_y$  augmente, stagne puis diminue quand  $h$  augmente. La faible valeur trouvée pour  $h=1$  mm est explicable par les effets visqueux accrus dans ce cas. Le cisaillement transversal est alors important. Il est de plus couplé à une dimension de rainure assez faible devant les tailles des couches limites aux parois carter. L'ensemble limite le développement d'un écoulement de retour fort en fond de rainure. Pour des rainures plus profondes, ces effets visqueux sont beaucoup moins importants. Ils autorisent donc une vitesse  $V_y$  plus grande. La stagnation est un peu plus surprenante. On s'attendrait en effet à ce que le niveau moyen diminue légèrement. En effet, le paramètre  $h$ , pour des grandes valeurs, n'affecte quasiment pas le champ de pression en sommet de rainure. La quantité de fluide plongeant vers le fond de rainure est donc à peu près constante en première approximation. En conséquence, comme la section verticale augmente avec  $h$ , la conservation du débit appliqué au débit transversal implique que  $V_y$  diminue. On retrouve bien ce phénomène sur les cartes de vitesse transversale (Fig. 3.48) et entre les cas  $h=3$  mm et  $h=4$  mm.

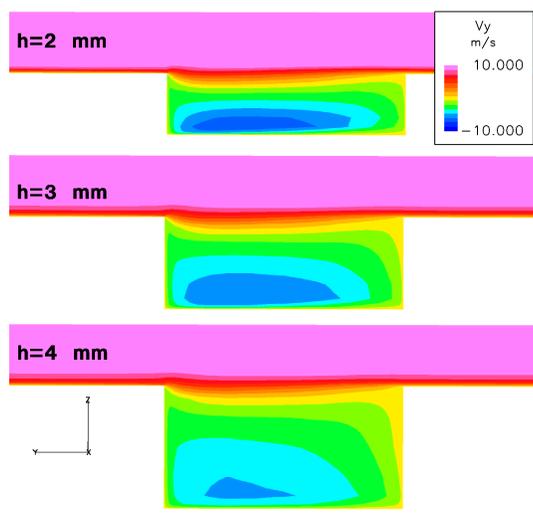


FIG. 3.48 – Effets de la hauteur sur  $V_y$  en sortie de rainure

Cette stagnation correspond en fait à un maximum, situé aux alentours de  $h=2.5$  mm. Ce maximum est obtenu par un compromis entre la diminution des effets visqueux, qui autorise une augmentation de la vitesse transversale, et la diminution "mathématique" de cette vitesse liée, par conservation du débit, à l'augmentation de  $h$ .

**Effet de la largeur  $w$**  La largeur des rainures affecte légèrement le mouvement du cœur. En effet, pour une rainure plus large, on constate que celui-ci prend une trajectoire davantage inclinée vers la gauche. Ce phénomène correspond simplement à la diminution des gradients de pression transversaux qui est liée à l'augmentation de la largeur. Les effets du point d'arrêt sur le mur gauche se font moins sentir, ce qui permet aux trajectoires des particules de s'orienter un peu plus dans la direction  $\vec{y}$ .

Sur les configurations testées, ( $w=7.8\text{mm}$  et  $w=10.8\text{ mm}$ ), l'hélicité reste à peu près stable. Les valeurs mesurées sont  $-12836\text{ m.s}^{-2}$  pour  $w=7.8\text{ mm}$  et  $-13120\text{ m.s}^{-2}$  pour  $w=10.8\text{ mm}$ . On constate néanmoins une légère baisse de la vitesse transversale moyenne en sortie de rainure. Elle passe de  $2.5\text{ m/s}$  pour  $w=7.8\text{ mm}$  à  $1.9\text{m/s}$  pour  $w=10.8\text{ mm}$ . Cette diminution est due à une augmentation de la vitesse transversale en partie haute de la rainure. Cette augmentation est générée par un plus grand enfoncement vers le bas du fluide venant de la partie supérieure de la veine. La figure (Fig. 3.49) montre l'effet du paramètre  $w$  sur le champ de  $V_y$  en sortie de rainure. Les autres paramètres sont  $\alpha=115^\circ$ ,  $h=3\text{ mm}$ ,  $L=9\text{ mm}$ ,  $N=50$ .

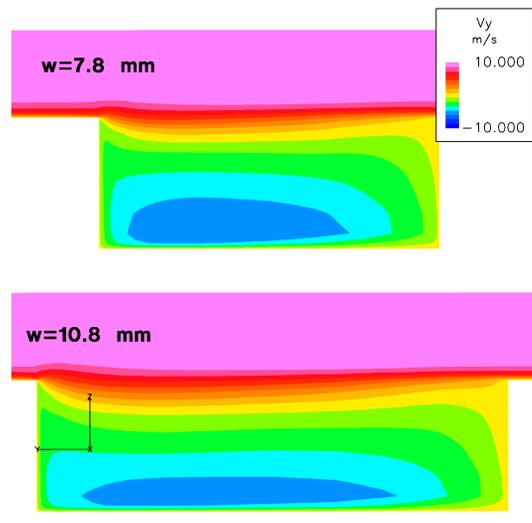


FIG. 3.49 – Effets de la largeur sur  $V_y$  en sortie de rainure

**Synthèse sur le tourbillon de rainure** Le tourbillon de rainure est une structure à peu près co-linéaire à la rainure, générée par le mouvement transversal du fluide entraîné par la paroi mobile. Ce tourbillon est couplé assez fortement avec le décollement d'entrée puisque son cœur tourbillonnaire vient de ce décollement.

- **Intérêt** : Le tourbillon de rainure est utile pour le traitement de carter car il peut faire apparaître ou renforcer une zone de vitesse transversale négative importante, laquelle s'oppose au mouvement global du fluide entraîné par la paroi mobile. Ceci peut permettre de limiter la giration du fluide en sortie de jeu.
- **Sensibilité aux paramètres** : Le tourbillon de rainure est sensible à trois paramètres. Pour l'angle  $\alpha$  cette dépendance s'exprime essentiellement par l'apparition d'une vitesse transversale négative, observée pour  $\alpha \geq 70^\circ$ . En ce qui concerne la hauteur  $h$ , des rainures profondes permettent un meilleur développement du tourbillon en raison d'une diminution des effets

visqueux. On obtient ainsi un optimum sur la vitesse transversale négative pour  $h \approx 2.5$  mm. Une augmentation de la largeur  $w$  se traduit par une diminution de la vitesse transversale négative à cause de l'augmentation du cisaillement au sein de la rainure.

Après avoir décrit les deux premières structures tourbillonnaires, à savoir le décollement en entrée de rainure et le tourbillon colinéaire à la rainure, nous allons maintenant présenter la troisième grande structure qui correspond à la superpositions de tourbillons en aval de l'obstacle.

### 3.4.6.3 Tourbillons arrières

La troisième structure remarquable est une zone tourbillonnaire de grande taille apparaissant en aval des obstacles. Cette zone est le lieu d'interaction de trois sous-structures tourbillonnaires distinctes. Ces différentes structures, et les interactions résultantes, sont complexes du point de vue de leur sensibilité aux paramètres.

Nous allons montrer qu'il existe :

1. une recirculation méridienne, sensible aux paramètres angle  $\alpha$ , hauteur  $h$ , largeur  $w$  et nombre de rainures  $N$ .
2. une structure horizontale, elle-même constituée de deux sous-structures qui sont des décollements aux coins de l'obstacle. Ces décollements sont sensibles aux paramètres  $\alpha$ ,  $h$ ,  $w$  et  $N$ .
3. un couplage fort entre les deux sous-structures horizontales

**Recirculation méridienne** La première sous-structure caractéristique en aval est la recirculation dans le plan méridien (Fig. 3.50)

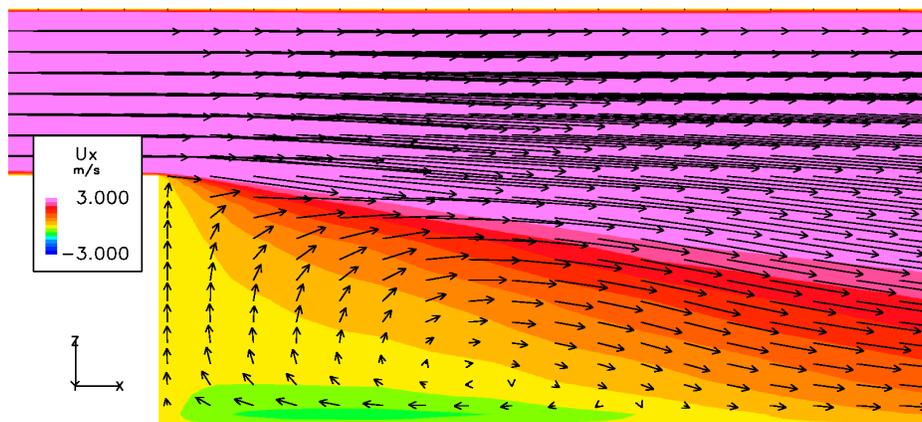


FIG. 3.50 – Tourbillon arrière - Recirculation dans le plan méridien

Cette recirculation est similaire à celle qu'on rencontre derrière une marche descendante. Elle correspond simplement au sillage de l'obstacle dans le plan méridien. Toutefois, elle est sensiblement différente dans la forme.

- Elle ne s'étend pas sur toute la largeur de la veine. Assez logiquement, elle disparaît en face de la sortie des rainures. Le maximum d'extension de la structure dans la direction axiale se situe environ au milieu de l'obstacle (dans la direction transversale). Comme on peut le voir sur la figure (Fig. 3.51), la poche de vitesse axiale négative en aval de l'obstacle a une longueur variable (la configuration représentée est la configuration [3.6]). Elle est ainsi plus longue du côté du coin **Ds** que du coin **Gs**.

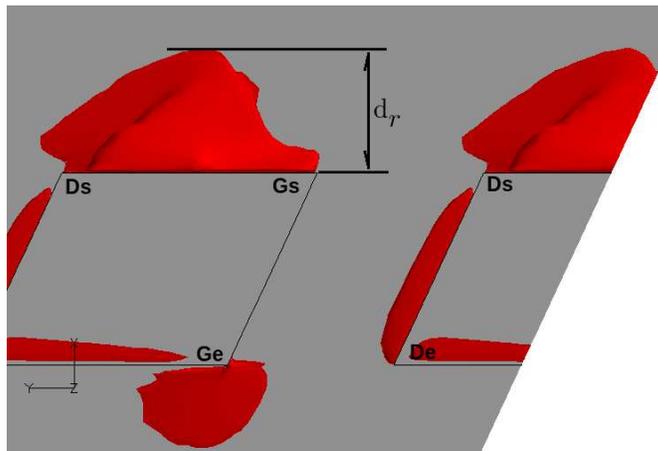


FIG. 3.51 – Tourbillon arrière - Poche de vitesse axiale négative

Par la suite, les distances  $d_r$  de recollement que nous donnerons correspondent au point de recollement le plus en aval, comme illustré sur la figure (Fig. 3.51).

- Elle est plus petite que le "vrai" tourbillon de marche. On compare la structure obtenue dans le cas rainuré à celle obtenue dans le cas de l'obstacle circconférentiel (cf. 3.4.2). Pour la configuration [ $\alpha=140^\circ$ ,  $h=3$  mm,  $w=7.8$  mm,  $L=9$  mm,  $N=50$ ], on obtient par exemple un recollement de l'écoulement 8 mm en aval de l'obstacle. Pour un obstacle circconférentiel similaire, le recollement n'intervient que 14 mm en aval de la marche, soit une différence de 42%.

De manière logique, cette structure dépend de la hauteur des rainures et donc de l'obstacle. Ainsi, pour [ $\alpha=115^\circ$ ,  $w=7.8$  mm,  $L=9$  mm,  $N=50$ ] on obtient les distances de recollement suivantes :

Hauteur h	distance $d_r$ de recollement	$d_r/h$
1 mm	3 mm	3
2 mm	5 mm	2.5
3 mm	6 mm	2
4 mm	6 mm	1.5

TAB. 3.10 – Extension de la recirculation méridienne - influence de la hauteur

La longueur de recollement augmente entre  $h=1$  et  $h=2$  mm, puis stagne. Nous supposons que ce phénomène est lié aux conditions de simulation. Le débit est, rappelons-le, constant, ce qui se traduit par une diminution de la vitesse quand la hauteur  $h$  croît. La section au niveau des rainures augmente elle aussi, ce qui se traduit par un jet en sortie de rainure plus faible (on compte ici le

flux passant au-dessus des rainures comme celui passant dans les rainures). Au final, les mécanismes générant le tourbillon méridien sont moins énergétiques, et on peut alors attendre un recollement rapide.

On trouve la confirmation de cette hypothèse en comparant le cas avec rainures à l'obstacle circconférentiel. Les résultats pour les paramètres [ $\alpha=115^\circ$ ,  $w=7.8$  mm,  $L=9$  mm,  $N=50$ ] sont présentés dans la table [3.11].

Hauteur h	$d_r/h$ Rainure	$d_r/h$ Obstacle
1 mm	3	4.5
2 mm	2.5	4.5
3 mm	2	4.65

TAB. 3.11 – Extension de la recirculation méridienne - Comparaison du cas avec rainures et de l'obstacle circconférentiel

Dans le cas de l'obstacle circconférentiel, la section passante au niveau de l'obstacle est la même quel que soit h puisque le jeu  $\delta$  ne varie pas. En conséquence, la conservation du débit impose qu'au dessus de l'obstacle, la vitesse axiale ne varie pas. L'intensité des mécanismes de génération de la recirculation méridienne est inchangée, et on retrouve donc un rapport  $d_r/h$  à peu près constant pour l'obstacle circconférentiel. Pour la rainure, la vitesse diminue, et le rapport  $d_r/h$  diminue aussi.

De la même manière, l'angle des rainures affecte légèrement la taille de cette structure ( $h=3$  mm,  $L=9$  mm,  $w=7.8$  mm,  $N=50$ ).

angle $\alpha$	distance $d_r$ de recollement
$45^\circ$	5 mm
$70^\circ$	5 mm
$90^\circ$	5 mm
$115^\circ$	6 mm
$140^\circ$	8 mm

TAB. 3.12 – Extension de la recirculation méridienne - influence de l'angle

Il est intéressant de constater que cette variation n'intervient que pour les angles élevés. Ce phénomène est en grande partie lié aux modifications du débit au sein de la rainure, modifications qui entraînent :

1. un soufflage plus ou moins important des structures en aval des rainures.
2. une modification du débit passant par-dessus les rainures, et donc une modification des caractéristiques de tourbillon de marche.

Les deux derniers paramètres géométriques affectant cette recirculation sont la largeur et le nombre de rainures. En effet, ces paramètres permettent de régler la largeur  $l$  de l'obstacle selon la formule :

$$l_{obstacle} = \frac{2\pi R_0}{N} - w \quad (3.14)$$

Quand la largeur augmente, l'obstacle s'affine, ce qui se traduit par un sillage plus faible. La recirculation méridienne suit cette tendance :

Largeur de rainure $w$	distance $d_r$ de recollement
7.8 mm	6 mm
9 mm	4.5 mm

TAB. 3.13 – Extension de la recirculation méridienne - influence de la largeur de rainure

Les valeurs données dans la table [3.13] ont été obtenues avec [ $\alpha=115^\circ$ ,  $h=3$  mm,  $L=9$  mm,  $N=50$ ]. Cette diminution de la taille du décollement s'accompagne d'une diminution de la dépression au niveau du cœur du tourbillon.

De la même manière, le nombre de rainures  $N$  joue aussi : pour  $N$  élevé, la largeur  $l^{obstacle}$  diminue et on retrouve une réduction du tourbillon arrière. A l'opposé, pour un  $N$  faible, les obstacles sont très larges. On commence donc à se rapprocher de la configuration "obstacle circonférentiel" et la recirculation grossit en conséquence. Les variations, obtenues avec [ $\alpha=115^\circ$ ,  $h=3$  mm,  $L=9$  mm,  $w=7.8$  mm], sont données dans la table [3.14].

Nombre de rainures $N$	distance $d_r$ de recollement
25	8 mm
50	4.5 mm
75	3.0 mm

TAB. 3.14 – Extension de la recirculation méridienne, influence du nombre de rainures

**Sous-structures horizontales** La deuxième caractéristique de la zone en aval de la rainure est sa structure horizontale très complexe. On observe en effet deux mécanismes distincts dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ . Ces sous-structures sont en interactions fortes ; il en résulte une structure horizontale globale complexe et surtout très sensible à la forme du rainurage.

1) La première structure est un décollement apparaissant au niveau du coin **Ds** (Fig. 3.52). Cette recirculation, tournant dans le sens horaire, est une conséquence du jet débouchant de la rainure.

La structure est présente sur toute la hauteur  $h$ . Elle est néanmoins plus imposante en fond de rainure qu'en tête. Très logiquement, la taille et l'intensité de ce décollement dépendent de l'angle de la rainure. Plus ce dernier sera élevé, plus la recirculation associée sera importante.

2) La deuxième structure est un autre décollement situé cette fois au niveau du coin **Gs**. Cette structure tourne dans le sens trigonométrique. Elle est donc opposée à la précédente.

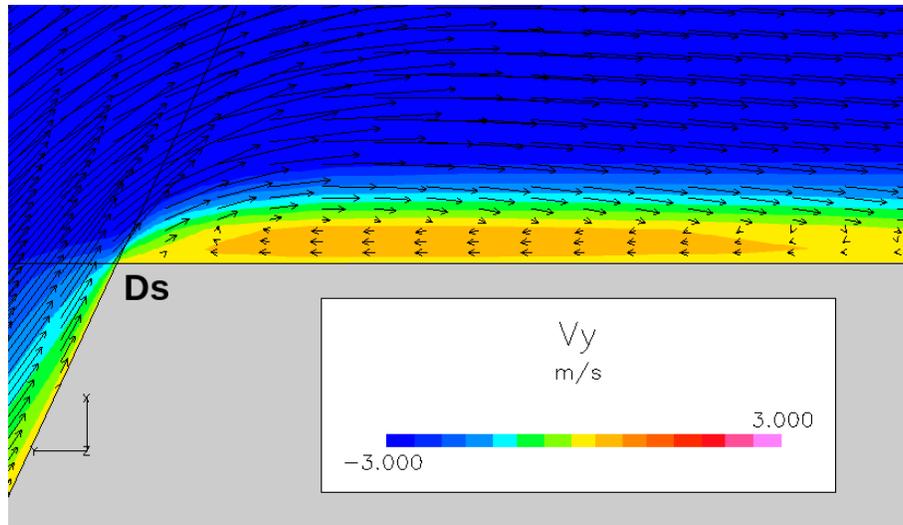


FIG. 3.52 – Décollement aval à droite de la rainure - Coupe à mi-hauteur de la rainure

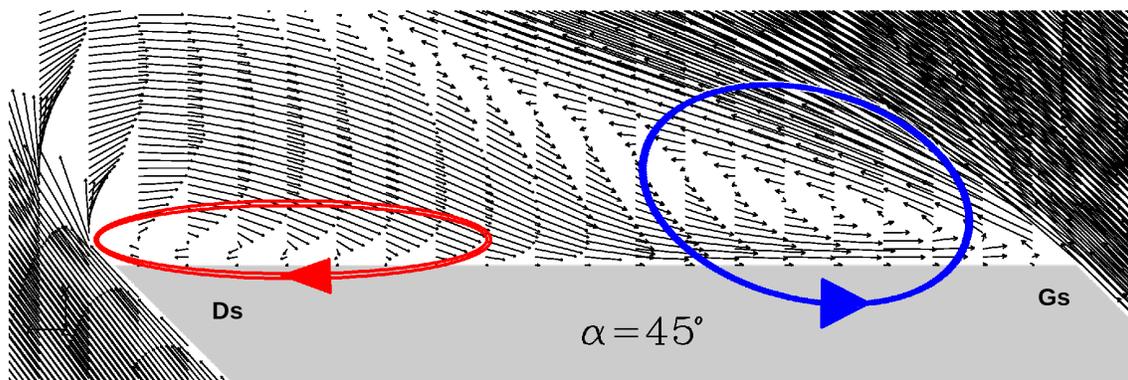


FIG. 3.53 – Décollements aval à gauche et à droite des rainures - Coupe à  $0.33h$

La figure (Fig. 3.53) donne le champ vectoriel de vitesse dans une coupe horizontale juste en aval d'un obstacle. La configuration étudiée est  $[\alpha=45^\circ, h=3 \text{ mm}, w=7.8 \text{ mm}, L=9 \text{ mm}, N=50]$ . La coupe est effectuée à 33% de la hauteur de la rainure. Le tourbillon à gauche (coin **Ds**) est signalé par l'ellipse rouge, celui de droite par l'ellipse bleue. En raison de la faible largeur de l'obstacle, ces deux tourbillons sont en interaction.

Attardons-nous sur les mécanismes qui engendrent ces deux décollements. Pour le décollement au niveau de **Ds**, le problème est dû au mouvement transversal du fluide dans la direction  $-\vec{y}$ . Ce phénomène est assez surprenant car :

- ce mouvement est observé dans toutes les configurations, y compris celles où l'écoulement dans la rainure ne présente pas de vitesse transversale négative.
- le mouvement va à l'encontre du mouvement transversal généré par la paroi mobile. On peut remarquer que pour le cas de l'obstacle circonférentiel il n'existe pas de mouvement similaire.

L'explication vient du champ de pression statique au niveau de la sortie de rainure.

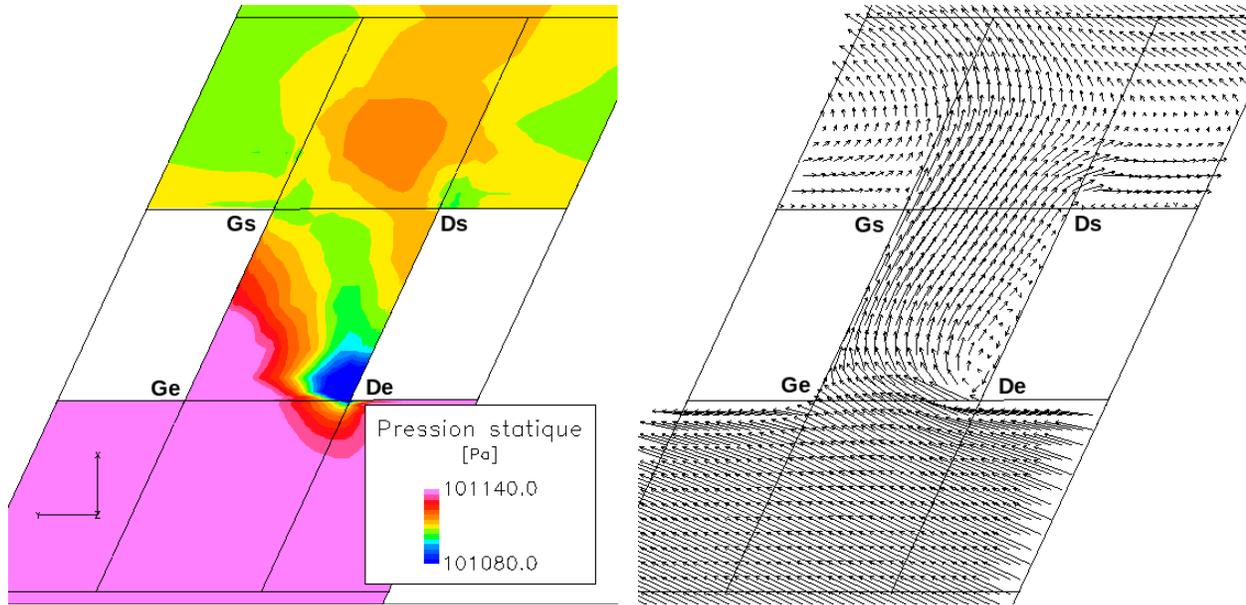


FIG. 3.54 – Champs de pression statique et de vitesse à mi-hauteur de la rainure,  $\alpha = 115^\circ$

Comme on peut le voir sur la figure (Fig. 3.54), la sortie de la rainure est le lieu d'une surpression locale. Cette surpression, dans l'axe de la rainure, est opposée à plusieurs dépressions, localisées dans le sillage de l'obstacle :

- deux dépressions obtenues au niveau des angles.
- la dépression due à la recirculation dans le plan méridien.

Cette augmentation de pression localisée est à mettre en relation avec la déviation des lignes de courant dans le plan horizontal, déviation elle-même générée par le mélange entre le flux sortant de la rainure et celui circulant au-dessus des rainures. A cause de la paroi mobile, cet écoulement possède une vitesse transversale forte, qu'il communique donc au fluide en zone basse. On voit nettement cette déviation sur le champ vectoriel. Cette surpression est observable dans absolument toutes les géométries testées, et elle s'étend verticalement sur quasiment toute la hauteur de veine.

En conséquence, il existe deux déviations possibles pour le fluide sortant de la rainure :

- Coin **Ds**. Le fluide est soumis à un gradient de pression orienté globalement selon  $-\vec{y}$ . Les lignes de courant obloquent donc vers la droite. En pratique, peu de fluide suit cette trajectoire opposée au mouvement de la paroi mobile car le gradient de pression n'est pas très important : seules les particules les moins énergétiques pourront tourner suffisamment pour longer la paroi arrière de l'obstacle. Les particules avec plus d'énergie seront légèrement déviées, mais au fur et à mesure qu'elles progresseront selon l'axe  $\vec{x}$ , les effets de cisaillement transversaux prendront le pas et conduiront au final à la déviation selon  $+\vec{y}$ .
- Coin **Gs**. Le gradient de pression statique va de pair avec les effets de cisaillement. Le fluide acquiert donc une vitesse transversale  $V_y$  positive.

L'angle de la rainure est très important pour cet écoulement. Pour des angles  $\alpha$  importants ( $\alpha \gg 90^\circ$ ), le fluide sortant de la rainure possède déjà naturellement une vitesse transversale négative du fait même de l'inclinaison de la rainure. L'angle de cette déviation étant  $(180 - \alpha)$ , il

est évident que plus la rainure sera couchée, moins la déviation sera importante. On pourra alors attendre une zone de vitesse  $V_y$  négative importante, en taille et en amplitude. L'étude des champs aérodynamiques confirme bien ce phénomène puisque le flux de masse le plus important est relevé pour  $\alpha=140^\circ$ .

Ce mécanisme est en outre soumis à un couplage fort avec les autres structures de l'écoulement.

1. On a vu que le tourbillon dans la rainure était responsable d'une zone de survitesse transversale négative en fond de rainure. Ce phénomène vient donc faciliter encore plus la déviation du fluide vers la droite, au moins dans la zone proche de la paroi carter.
2. La recirculation méridienne en aval de l'obstacle intervient elle aussi. Dans la zone inférieure du canal, cette recirculation se traduit par l'apparition d'une vitesse axiale négative. Cette caractéristique se retrouve dans la trajectoire des particules venant du jet de rainure. Celles-ci sont vite déviées puis plaquées contre la paroi arrière de l'obstacle (Fig. 3.53 par exemple).

La conjugaison de ces différents mécanismes implique concrètement que le décollement en **Ds** est fortement variable selon la hauteur de la rainure.

Pour une rainure inclinée à  $140^\circ$ , la déviation du fluide vers la droite est facilitée du fait de la conjugaison des mécanismes précédents. Il en résulte une extension très importante de la recirculation en **Ds**. Celle-ci atteint alors l'autre côté de l'obstacle, venant s'intercaler, dans la direction axiale, entre l'obstacle et la recirculation issue de **Gs**. Ce phénomène n'est toutefois visible que pour des rainures assez profondes, et dans la partie basse. La figure (Fig. 3.55) montre le champ de vitesse en aval de l'obstacle pour la configuration [ $\alpha=140^\circ$ ,  $h=3$  mm,  $w=7.8$  mm,  $L=9$  mm,  $N=50$ ].

On voit sur la figure qu'au niveau du coin **Gs** la recirculation venant de **Ds** impacte directement le jet sortant de la rainure. Cela se traduit notamment par une zone de vitesse transversale  $V_y$  positive proche de l'obstacle sur toute la largeur. Les deux vignettes inférieures montrent en gros plan l'écoulement au niveau du coin **Gs**. On peut y constater que plus on descend vers le fond de la rainure, plus la recirculation venant de **Ds** est marquée. On observe en particulier à 16% de hauteur un écoulement de retour dans la direction axiale qui n'est pas visible à 50%. Cela s'explique par la structure du champ en aval de l'obstacle. A 16%, on voit sur la gauche que le champ est animé d'un mouvement axial négatif assez important, dû en grande partie au couplage avec la recirculation méridienne. A l'opposé, à 50% le champ de vitesse est quasiment parallèle à l'obstacle. Le mouvement axial est alors globalement nul et le soufflage lié au fluide sortant de la rainure interdit le développement d'une grosse zone de vitesse axiale négative.

Ce phénomène de chevauchement des recirculations aux grands angles n'est visible que pour des rainures assez profondes. Pour les rainures peu profondes, le cisaillement dans la direction transversale est tel que le mouvement selon  $-\vec{y}$  diminue assez considérablement. En conséquence, le décollement en **Ds** est plus petit. Pour  $h \leq 2$  mm, le décollement en **Ds** reste de taille moyenne et n'atteint donc pas l'autre côté.

Cette configuration particulière des différents décollements horizontaux est très intéressante du point de vue des pertes de charge car elle présente des zones de cisaillement, et donc de dissipation, très importantes. Cette dissipation est aussi intéressante pour la limitation de  $V_y$ .

De manière plus générale, la conjugaison des mécanismes précédents induit une variation assez forte de la taille du décollement selon la position verticale. Ainsi, pour les cas où  $\alpha$  est inférieur à  $140^\circ$ , le décollement n'apparaît qu'en bas des rainures. La zone au sommet ne présente pas (ou

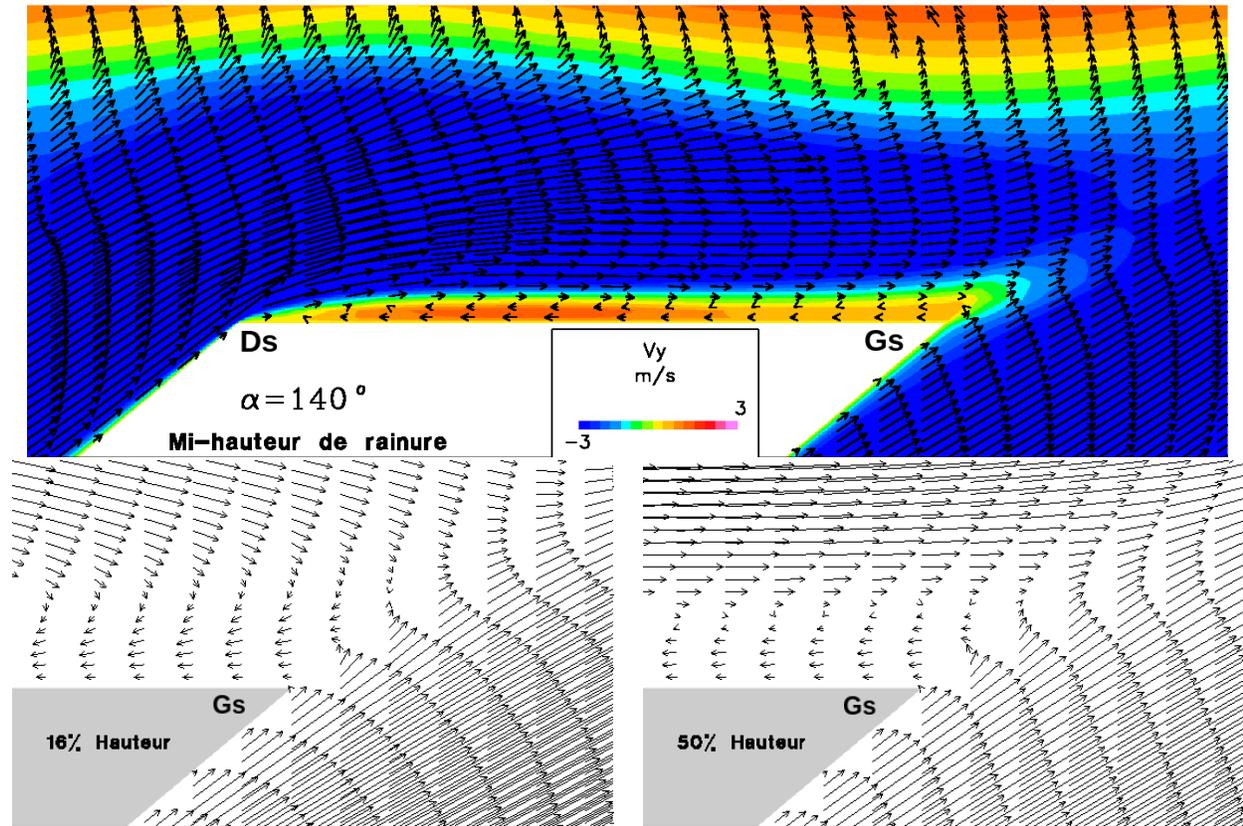


FIG. 3.55 – Champ de vitesse en aval de l'obstacle pour  $\alpha = 140^\circ$

très peu) de vitesse transversale négative. Pour la configuration de référence [3.6] de cette étude par exemple, le décollement ne commence qu'à 1 mm du sommet des rainures. Il grossit ensuite transversalement et axialement au fur et à mesure que l'on se rapproche du fond de la rainure.

Comme on peut le pressentir, ce tourbillon est sensible à quatre paramètres :

- On a déjà présenté en grande partie l'influence de l'angle de la rainure : plus celui-ci est élevé, plus la déviation du fluide dans la direction  $-\vec{y}$  sera importante et donc plus le décollement en  $Ds$  sera gros. Pour les angles  $\alpha = 45^\circ$  et  $70^\circ$ , le mécanisme global de génération du décollement n'est pas assez puissant pour contrer le mouvement transversal moyen. Il en résulte une recirculation de très faible taille (à peine 1 mm de largeur selon  $\vec{y}$  pour  $\alpha = 70^\circ$ ) ne se développant que dans le fond de rainure, là où les effets visqueux réduisent suffisamment la vitesse transversale de l'écoulement.
- De la même manière, la hauteur  $h$  de la rainure conditionne fortement la présence et l'évolution de ce décollement. Pour  $[\alpha = 115^\circ, w = 7.8 \text{ mm}, L = 9 \text{ mm}, N = 50]$ , une rainure de seulement  $h = 1 \text{ mm}$  de hauteur ne présentera aucun décollement de ce type. Cette recirculation n'apparaît que pour  $h \geq 2 \text{ mm}$ , et elle devient de plus en plus visible avec l'augmentation de la hauteur. Ce phénomène est entièrement dû au problème du cisaillement transversal et du mouvement global selon  $\vec{y}$ , et il rejoint la remarque déjà faite sur l'absence de recirculation en sommet d'obstacle.

- La largeur  $w$  de la rainure joue aussi un rôle.

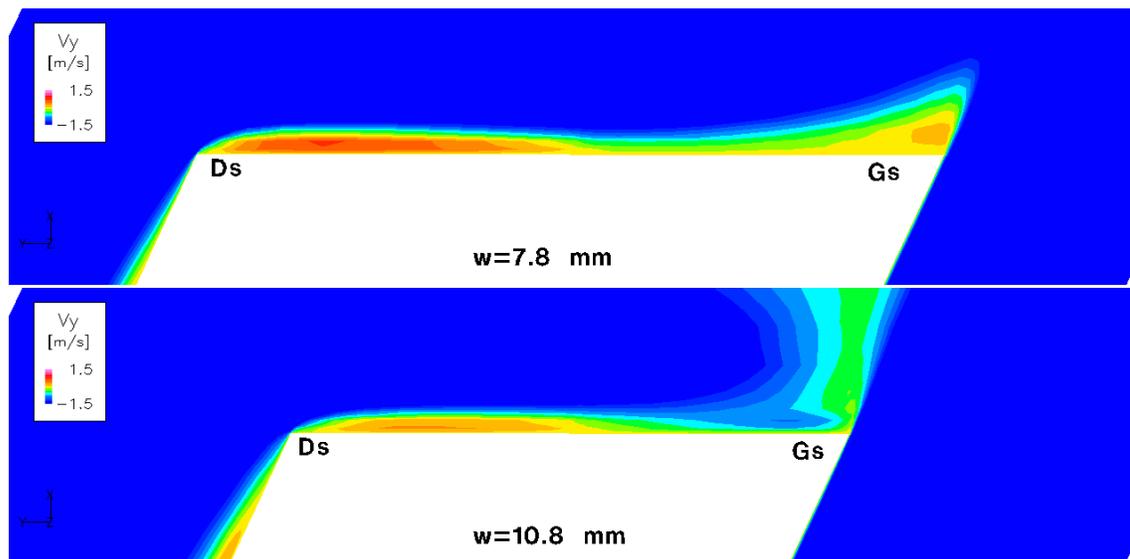


FIG. 3.56 – Evolution du champ de vitesse  $V_y$  à mi-hauteur en aval de l'obstacle en fonction du paramètre  $w$

On constate sur la figure (Fig. 3.56) que la zone de vitesse  $V_y$  positive proche de la paroi est moins marquée pour le cas  $w=10.8$  mm. Les autres paramètres sont fixés à  $[\alpha=115^\circ, h=3$  mm,  $L=9$  mm,  $N=50]$ . Ceci est dû au rétrécissement de l'obstacle (3.14) :

1. la dépression associée à la recirculation méridienne étant plus faible, la déviation du fluide selon  $-\vec{y}$  est moindre
2. l'obstacle étant moins large, les interactions entre les structures pouvant se développer au niveau des coins **Ds** et **Gs** se renforcent.

Les effets de couplage avec d'autres structures peuvent aussi intervenir, mais ils sont probablement d'ordre inférieur. Pour le tourbillon de rainure, on a vu par exemple que le niveau de vitesse en fond de rainure restait à peu près stable. L'alimentation par ce tourbillon de la recirculation au coin **Ds** ne devrait donc pas être affectée outre mesure, au moins pour la partie basse.

- Le dernier paramètre ayant une influence significative sur ce décollement est le nombre de rainures  $N$ . On a vu que la largeur de l'obstacle était déterminée à la fois par  $w$  et  $N$  selon la formule (3.14). En conséquence, l'augmentation du nombre de rainures a le même effet que la diminution de  $w$  : l'obstacle étant moins large, la recirculation en **Ds** tend à s'atténuer. Toutefois, la diminution du nombre de rainures et donc l'élargissement des obstacles (à  $w$  constant) génère un extremum pour la taille de ce décollement. Entre  $N=50$  et  $N=25$ , le décollement diminue ; le point de réattachement se rapproche du coin **Ds** de l'obstacle. Il est difficile de dégager les causes exactes de ce phénomène mais on peut supposer que cela vient d'un couplage un peu moins important avec le décollement du coin **Gs**. Les deux décollements sont de facto plus éloignés quand  $N$  diminue.

Pour le décollement au coin **Gs** de l'obstacle, les mécanismes en jeu sont un peu plus simples. Ce tourbillon bénéficie à la fois de la remontée de fluide venant de la gauche de l'obstacle et de la déviation selon  $\vec{y}$  (et plus généralement du mouvement dans cette direction) du jet sortant de la rainure. Le couplage de ces deux flux distincts permet de générer de la vorticité, la "rotation" s'effectuant par ailleurs dans le sens trigonométrique.

Dans beaucoup de configurations, cette recirculation grossit considérablement, jusqu'à occuper toute la largeur de l'obstacle. Cette croissance est justifiée par le couplage avec les deux flux précédemment cités, lesquels se développent sur des distances proches de la largeur.

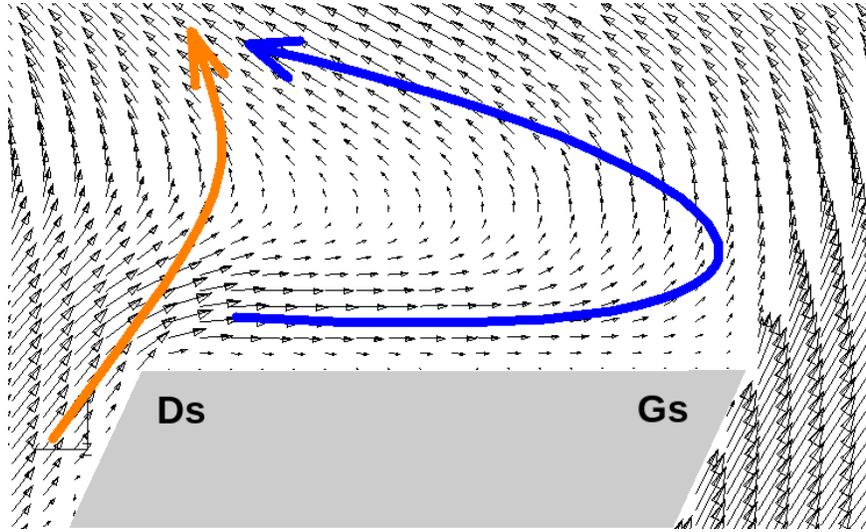


FIG. 3.57 – Déformation de la recirculation arrière droite - plan à mi-hauteur de rainure

Dans ces conditions, il est bien souvent difficile de voir une structure tourbillonnaire marquée, avec, par exemple, des particules qui suivent des trajectoires quasi-elliptiques. La figure (Fig. 3.57) correspondant à la géométrie de référence de cette étude [3.6], montre cette difficulté de visualisation. On y retrouve bien la courbure de l'écoulement avec une structure tournant dans le sens trigonométrique, soulignée par la flèche bleue. Cette structure s'étend sur toute la largeur de l'obstacle. En revanche, elle n'est pas "fermée" du côté de **Ds** au sens où il n'existe pas de zone de vitesse axiale négative. A la place, on constate la présence d'un flux axial direct, souligné par la flèche orange, provenant du jet en sortie de rainure. On notera que plus on se rapproche du sommet de la rainure, plus ce jet est énergétique, et donc moins la recirculation est "fermée".

Le comportement de la recirculation en **Gs** est lui aussi plus simple. Comme elle dépend très fortement du mouvement généré par la paroi mobile, on retrouve cette structure dans toutes les géométries de rainures testées. Elle ne semble dépendre que de l'angle  $\alpha$  et de la hauteur  $h$ .

- Pour l'angle  $\alpha$ , on retrouve les différents mécanismes présentés auparavant. La variation du flux selon  $-\vec{y}$  induite par  $\alpha$  est importante. Dans le cas où ce flux est faible ( $\alpha < 90^\circ$ ), le jet sortant de la rainure tourne très vite vers la gauche. Le cœur de la recirculation reste alors proche de la paroi et du coin **Gs**. Dans le cas contraire, l'écoulement transversal proche paroi atteint facilement le coin **Gs** où il rencontre le jet. Il provoque une légère sur-déviation de ce jet vers la droite, puis l'ensemble des deux flux oblique vers la gauche. Dans ces conditions, la recirculation est généralement de grande taille.

- Pour la hauteur  $h$ , on retrouve une fois de plus l'influence du phénomène de cisaillement transversal. Plus la rainure sera profonde, plus ce cisaillement sera faible, autorisant le développement du décollement. On peut en avoir une idée en considérant l'évolution verticale du décollement. En sommet de rainure, il est inexistant ; seul le mouvement  $V_y > 0$  est présent. Lorsque l'on descend vers le fond de la rainure, la vitesse transversale diminue, autorisant la mise en place de l'écoulement avec  $V_y < 0$ . La recirculation commence à se structurer. En fond de rainure, la zone de vitesse transversale négative est très importante (dans les cas adaptés, i.e. pour un angle  $\alpha$  supérieur à  $90^\circ$ ) et la recirculation atteint son maximum de taille.

A la différence de ce qui a été observé pour la recirculation en **Ds**, ni la largeur  $w$  ni le nombre de rainures  $N$  ne semblent avoir d'autre effet que de limiter la taille du sillage et donc, in fine, l'étendue de la recirculation en **Gs**.

**Couplage des structures horizontales et méridiennes** Au final, les structures horizontales et méridiennes en aval de l'obstacle se couplent pour donner naissance à un écoulement relativement complexe. Un effet important de ce couplage est le mouvement vertical communiqué au fluide engagé dans les recirculations horizontales. On assiste par exemple à la remontée du fluide le long de l'obstacle au niveau des recirculations issues des coins **Ds** et **Gs**. De la même manière, ces recirculations viennent à leur tour affecter la trajectoire des particules engagées dans un mouvement globalement méridien.

Cependant, l'une des conséquences les plus marquantes de ce couplage est peut-être obtenue pour la configuration [ $\alpha=140^\circ$ ,  $h=1$  mm,  $w=7.8$  mm,  $L=9$  mm,  $N=50$ ]. Lorsqu'on trace les iso-surfaces de vitesse axiale nulle, on découvre une zone de vitesse négative en face de la rainure (Fig. 3.58) dans le voisinage de la paroi carter.

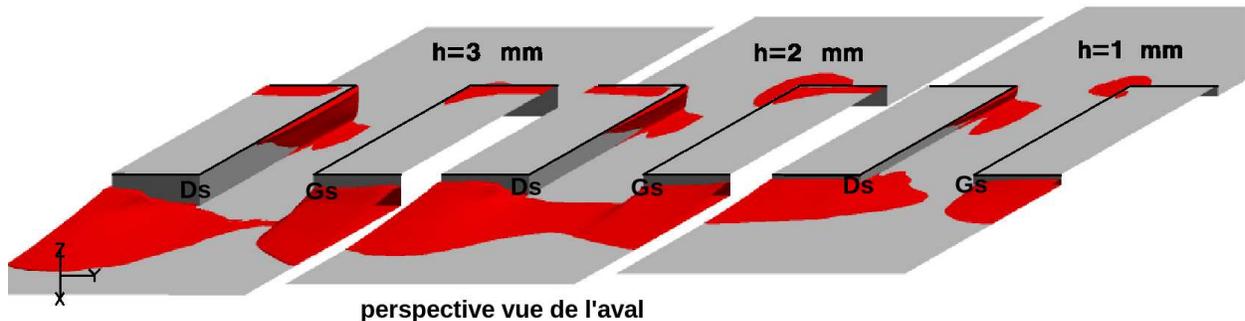


FIG. 3.58 – Débordement des tourbillons arrière

On constate ci-dessus que la poche de vitesse axiale négative est une extension de la zone de recirculation arrière. On remarquera que cette zone, en plus de s'étendre transversalement, rentre dans la rainure.

Cette zone particulière résulte de la conjonction de trois phénomènes :

- l'absence d'un jet réellement énergétique sortant de la rainure, le seul à même de souffler cette zone de vitesse négative. En effet, pour une rainure faiblement profonde, on a vu que les effets visqueux (couche limite principalement) occupaient une partie non négligeable de la section du canal. Le débit passe alors majoritairement par la zone supérieure de la veine.

- la présence d'un écoulement de retour fort lié à la recirculation méridienne. On rappelle que l'extension maximale la recirculation méridienne est obtenue pour  $\alpha=140^\circ$ .
- le mouvement du fluide lié à la recirculation venant de **Gs**. En raison de la faiblesse du jet sortant de la rainure, notamment en bas de la rainure (cf. premier point), le décollement venant de **Gs** n'est pas "soufflé" sur son côté gauche (contrairement à ce qui est présenté en Fig. 3.57), et il génère donc un mouvement selon  $-\vec{x}$ .

Cette zone de vitesse axiale négative est très intéressante car elle génère un surcroît de blocage aérodynamique en sortie de rainure. On peut ainsi améliorer un peu l'objectif de réduction du débit (ici l'augmentation du différentiel de pression statique entre amont et aval).

#### 3.4.6.4 Effets technologiques sur la modélisation générale du jeu

Tous les résultats présentés jusque là ont été obtenus avec une modélisation générale du jeu visant à s'affranchir des effets technologiques pour étudier précisément le fonctionnement du nouveau traitement de carter. La géométrie modélisée est donc plane avec des angles vifs. On peut alors légitimement se poser la question des effets technologiques sur le traitement de carter, et notamment dans le cas du ventilateur automobile, c'est à dire un cas cylindrique ( $R \approx 155$  mm), présentant des congés au niveau de toutes les arêtes. C'est pourquoi on considère maintenant les deux géométries présentées en 3.4.2.

**Géométrie cylindrique** Pour la première géométrie, à savoir la veine cylindrique, il n'y a aucune différence notable avec ce qui vient d'être présenté. On retrouve toutes les structures aérodynamiques. Seules les caractéristiques de ces dernières varient un peu.

Sur la configuration testée, qui correspond à la configuration de référence [3.6], on trouve une recirculation d'entrée légèrement plus courte :

Géométrie	distance de recollement [mm]
plane	8.2
cylindrique	7.2

TAB. 3.15 – Effet de la géométrie cylindrique sur le décollement d'entrée

Le tourbillon colinéaire à la rainure ne semble pas affecté outre mesure par le passage en géométrie cylindrique. On continue d'assister à la migration du cœur tourbillonnaire, avec le même couplage entre ce tourbillon et le décollement d'entrée. Seul le niveau d'hélicité varie. En sortie de rainure, on a ainsi :

Géométrie $\alpha$	Hélicité [ $\text{m.s}^{-2}$ ]
plane	-12836
cylindrique	-16100

TAB. 3.16 – Effet de la géométrie cylindrique sur le tourbillon de rainure

Cette variation de l'hélicité est due à un niveau de vortacité un peu plus élevé que dans le cas plan. Cela se traduit plus concrètement par un niveau de vitesse azimutale négative beaucoup plus fort en fond de rainure. Sur ce point, le passage à une configuration cylindrique s'avère bénéfique.

Comme ce tourbillon est plus intense, on peut imaginer qu'il tend à plaquer le fluide sur la paroi droite (**De-Ds**) de la rainure, ce qui limite de facto l'extension de la recirculation d'entrée.

Le dernier point remarquable dans cette configuration est l'extension axiale de la recirculation méridienne.

Géométrie $\alpha$	distance $d_r$ de recollement [mm]	$d_r/h$	vitesse verticale/radiale[m/s]
plane	6	2.0	0.24
cylindrique	7	2.3	0.18

TAB. 3.17 – Effet de la géométrie cylindrique sur le tourbillon méridien

La table [3.17] donne l'extension maximale de la recirculation ainsi que la vitesse radiale/verticale moyenne mesurée sur un plan à 3 mm en aval de la rainure. Les vitesses sont données en valeur absolue, mais toutes deux correspondent à un écoulement plongeant vers le carter. Cette variation de vitesse est cohérente avec la croissance de la recirculation. Elle est un peu plus surprenante en regard des effets de centrifugation qui interviennent dans le cas cylindrique. En toute logique, ces effets devraient au contraire renforcer la vitesse vers le carter pour la géométrie cylindrique. Il n'y a pas de structure particulière justifiant ce phénomène.

**Géométrie avec congés** La géométrie avec congés étudiée ici est la configuration la plus défavorable, puisque le rapport entre le rayon  $r_c$  des congés et la hauteur des rainures  $h$  est important. Ici, on a choisi  $r_c=0.3$  mm et  $h=1$  mm, ce qui donne  $r_c/h\approx 0.33$ . Pour la géométrie avec des congés de raccordement, la différence avec la modélisation générale est un peu plus marquée. Tout d'abord, il convient de souligner que l'on retrouve bien les structures principales, qui sont pour la plupart des décollements liés aux angles vifs :

- le décollement au coin d'entrée droit de la rainure
- le tourbillon de rainure
- le décollement aval dans le plan méridien
- les deux décollements aval dans le plan horizontal

Toutefois, ces structures sont assez fortement modifiées, comme on pouvait s'y attendre, par la présence de congés au niveau des arêtes. Ainsi, le décollement en entrée de rainure rétrécit fortement. Dans le cas  $\alpha=140^\circ$ , il a quasiment disparu comme on peut le voir sur la figure (Fig. 3.59).

Sur cette figure, on a représenté les iso-surfaces de vitesse axiale nulle. Les différents cas sont vus sur le côté, l'observateur étant sur le côté gauche de la rainure. L'écoulement circule donc de droite à gauche. Les fines iso-surfaces au niveau de la paroi amont de l'obstacle (sorte d'effet moiré) relèvent d'un problème de représentation de la paroi solide.

Pour le décollement en entrée, les distances de recollement sont alors :

angle $\alpha$	Congés - distance de recollement [mm]	Sans congés - distance de recollement [mm]
45 °	1.9	6
70 °	4.2	7.8
90 °	6.5	8.1
115 °	1.6	8.2
140 °	$\approx 0$	7.1

TAB. 3.18 – Evolution de la recirculation d'entrée - Effet des congés

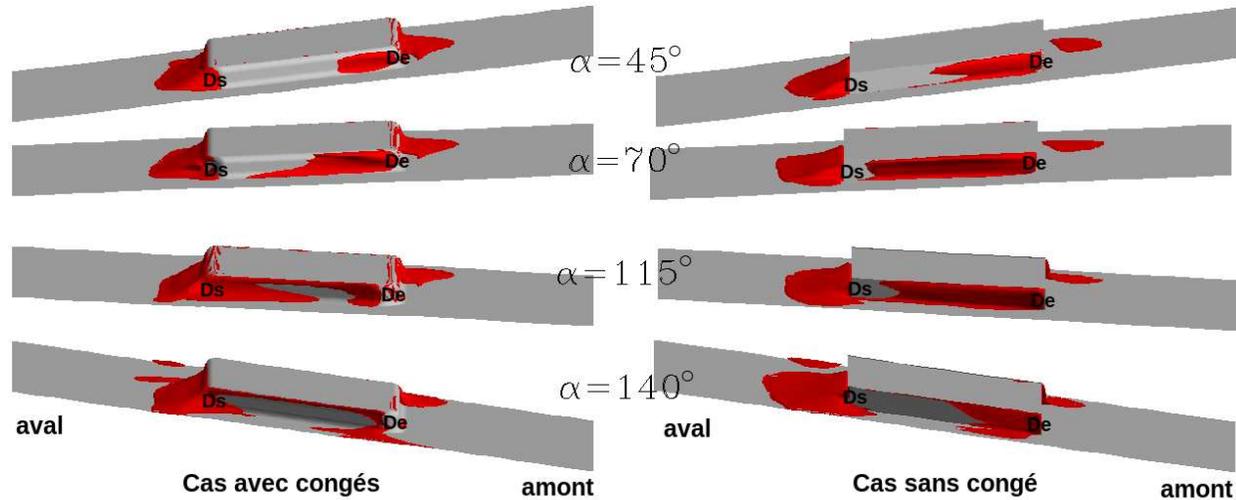


FIG. 3.59 – Poches de vitesse axiale négative. Comparaison des cas avec et sans congés

On notera sur la figure (Fig. 3.59) que si le décollement en entrée a diminué, il est apparu en revanche une poche de vitesse négative venant de l'aval de la rainure. Cette structure est clairement visible pour  $\alpha=115^\circ$ . Cet écoulement de retour semble causé par le blocage au niveau de la sortie de la rainure. Le gradient de pression axial est suffisant pour provoquer un écoulement de retour dans la couche limite sur l'obstacle. Cette particularité disparaît pour les angles inférieurs à  $90^\circ$ .

Le tourbillon arrière est passablement modifié. En premier lieu, l'extension de la zone de vitesse négative diminue et elle devient, de plus, assez insensible à l'angle  $\alpha$  comme on peut le voir en (Fig. 3.59). Elle n'atteint ici qu'environ 2.5 mm, à comparer aux 3 mm observés dans un cas plan similaire.

La deuxième modification en arrière de l'obstacle porte sur les décollements apparaissant dans le plan horizontal. En raison des congés de raccordement, ces structures sont beaucoup plus petites et peuvent être positionnées différemment. Par exemple, pour la recirculation au niveau du coin **Ds** de l'obstacle, on observe une migration du tourbillon dans le cas  $\alpha=45^\circ$  par rapport au cas présenté sur les figures (Fig. 3.52 et 3.53)

On voit sur le champ de vitesse présenté en (Fig. 3.60) que le décollement se situe maintenant au niveau du congé. Il n'est à peu près visible que pour cette configuration car on y dispose à la fois d'une vitesse forte dans le canal de rainure, et d'une déviation importante du fluide sortant du côté droit de la rainure.

On remarque en outre, sur la droite de la figure (Fig. 3.60), la présence d'un écoulement selon  $-\vec{y}$  le long de la paroi de l'obstacle. Comparativement au cas sans congé, cet écoulement de retour est beaucoup moins énergétique et étendu. Nous supposons que cette faiblesse est plus liée à la faible hauteur de l'obstacle qu'à la présence de congés.

On soulignera que toutes les géométries avec congés testées ont été construites en prenant une hauteur  $h$  de 1 mm. Ce cas est une configuration extrême du point de vue de la présence des congés puisque le rapport entre rayon de congé et hauteur des rainures est important (0.33). Il s'agit de l'une des pires situations possibles, et on peut donc s'attendre à avoir de très grands effets liés aux

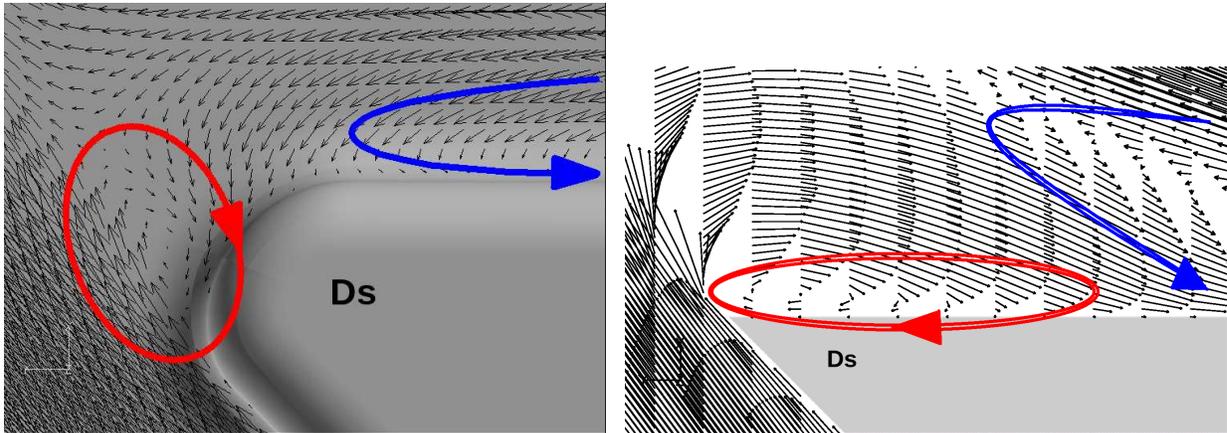


FIG. 3.60 – Décollement arrière en **Ds** avec et sans congés - cas  $\alpha=45^\circ$

congés. On retiendra ici que la structure du champ aérodynamique est qualitativement la même que dans la modélisation générale du traitement de carter, malgré l'influence importante des congés. L'étude précédente, réalisée sur le modèle général des rainures, est donc valide, et la présence des structures décrites ne dépend pas de l'utilisation des congés.

La présence des congés a un effet surprenant au sens où elle génère une nouvelle recirculation. Comme on peut l'apercevoir sur les figures (Fig. 3.59) il existe des poches de vitesse axiale négative assez importantes en amont des obstacles et des rainures. Un phénomène aussi important n'a jamais été observé dans le cas de la géométrie simplifiée, ni même de la géométrie cylindrique.

Ces écoulements de retours sont situés principalement au niveau du coin Ge. Si on trace le champ de vitesse dans une coupe axiale à ce niveau, on voit alors apparaître une structure tourbillonnaire proche de la paroi carter. La figure (Fig. 3.61) montre des coupes selon le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$  au niveau du coin Ge pour les cas avec et sans congés, les géométries correspondant aux paramètres  $[\alpha=45^\circ, h=1 \text{ mm}, w=7.8 \text{ mm}, L=9 \text{ mm}, N=50]$ . On a représenté le champ vectoriel de vitesse, superposé au champ de pression statique dans ce plan.

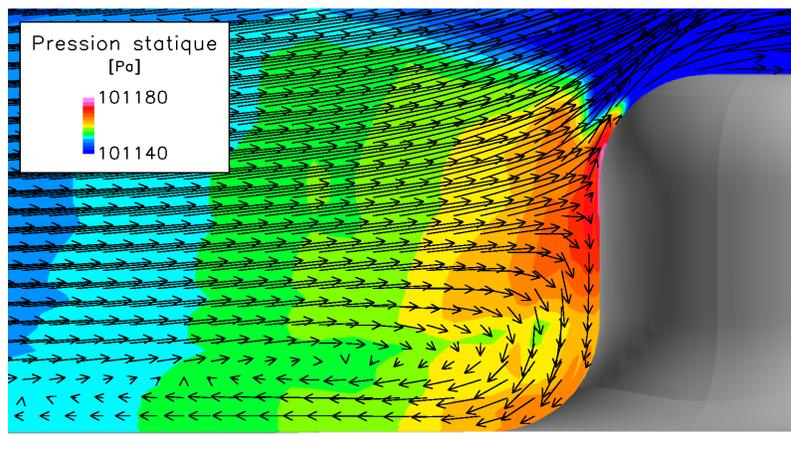


FIG. 3.61 – Recirculation amont - Cas avec congés

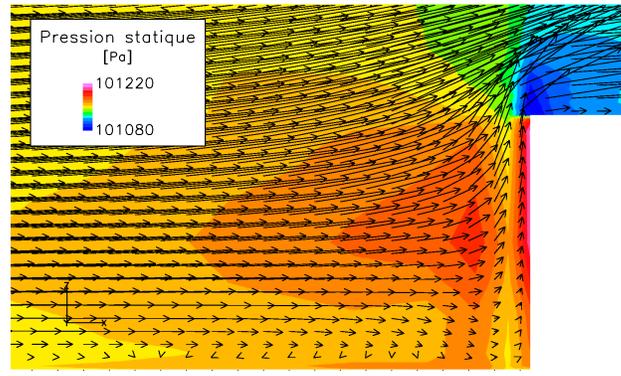


FIG. 3.62 – Ecoulement amont - Cas sans congé

Cette déviation du fluide vers le bas est due au point d'arrêt que constitue la paroi verticale. On peut alors légitimement se demander pour quelle raison cette recirculation apparaît uniquement dans un cas avec congés. Si le congé en bas de l'obstacle n'était pas présent, le fluide dévié vers le bas de la veine longerait la paroi à la verticale et rencontrerait la paroi carter horizontale, générant ainsi un nouveau point d'arrêt et donc une contre-pression s'opposant à la descente. Dans le cas avec un congé en bas, le fluide est dévié plus doucement ce qui permet de minimiser la surpression et autorise donc un écoulement vertical significatif.

Il existe aussi de manière évidente un couplage avec la déviation du fluide en entrée de rainure puisque la recirculation apparaît d'abord à ce niveau. Elle ne s'étend sur la largeur de l'obstacle que pour des angles  $\alpha$  faibles.

Considérons pour cela l'écoulement au niveau de l'arête **Ge**. L'obstacle joue le rôle d'une surface d'arrêt. Il en résulte que la majeure partie du fluide oblique alors vers la rainure, mais on observe aussi qu'une autre partie du fluide contourne ce "bord d'attaque" qu'est l'arête **Ge**, pour s'en aller devant l'obstacle. Ce mécanisme est déjà présent dans le cas de la géométrie simplifiée, mais il reste de faible amplitude. Dans les cas avec congés, le contournement du "bord d'attaque" est facilité par la courbure de la paroi qui limite les problèmes de déviation brusque. En revanche, la courbure entraîne l'apparition d'une vitesse axiale négative plus importante.

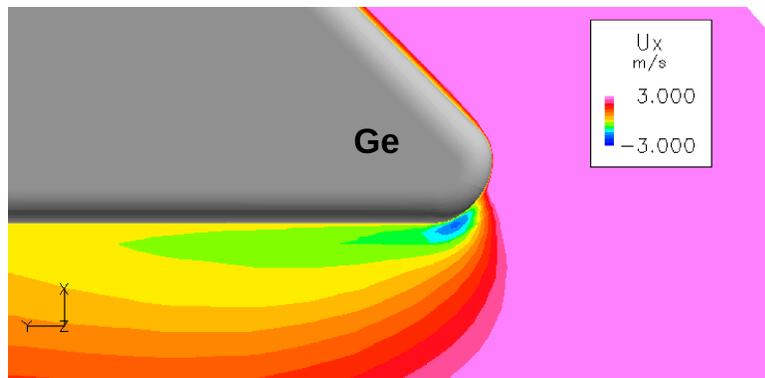


FIG. 3.63 – Ecoulement amont - Champ de vitesse axiale à 40% de hauteur de rainure

Sur la figure (Fig. 3.63), on constate ainsi que, pour le cas  $\alpha=45^\circ$  au niveau du congé **Ge**, la vitesse axiale  $U_x$  fait un pic à environ -3 m/s, la vitesse axiale moyenne en amont étant de 6 m/s. Pour un cas sans congé,  $U_x$  ne descend jamais en dessous -0.5 m/s au niveau de l'arête. Cette survitesse locale s'observe pour d'autres inclinaisons. Nous pensons que ce petit pic de vitesse négative joue le rôle de déclencheur dans la formation de la recirculation amont.

#### 3.4.6.5 Synthèse sur l'analyse des structures tourbillonnaires

On a présenté dans cette partie plusieurs structures tourbillonnaires présentes au niveau de la rainure.

- La première d'entre elle est un décollement en entrée de la rainure. Ce décollement est causé par la déviation importante du fluide entrant dans la rainure. Ce tourbillon est intéressant pour le traitement de carter car il engendre une réduction de section, limitant ainsi le débit dans la rainure. On peut en attendre un gain sur l'objectif de réduction du débit dans le jeu.
- La deuxième structure est un tourbillon colinéaire à la rainure. Ce tourbillon est engendré par le mouvement transversal du fluide circulant au dessus des rainures, mouvement lui-même entraîné par la paroi mobile. Par certains aspects, ce tourbillon évoque à la fois le tourbillon de raclage et le tourbillon de passage connus dans les turbines. L'intérêt principal de ce tourbillon est qu'il peut générer une vitesse transversale négative s'opposant au mouvement transversal global du fluide. On peut limiter la giration du fluide en sortie de jeu.
- La troisième structure fait partie d'une macro-structure arrière. Il s'agit d'une recirculation méridienne apparaissant derrière les obstacles séparant les rainures. Cette recirculation se forme de la même manière que la recirculation derrière une marche descendante, bien qu'elle n'en partage pas les caractéristiques exactes (elle est plus petite). Elle induit des pertes de charge qui peuvent être utiles dans l'objectif de réduction du débit. Dans certaines conditions, cette structure peut s'étendre devant la rainure et limite le débit dans la rainure.
- La quatrième structure fait aussi partie de la macro-structure arrière. C'est un décollement sur la gauche de l'obstacle, au coin aval **Ds**. Ce décollement intervient au débouché de l'écoulement dans la rainure. Cette structure est essentiellement utile pour les pertes qu'elle engendre.
- La cinquième et dernière structure est un décollement à droite de l'obstacle, au coin aval **Gs**. Il est lui aussi inclus dans la macro-structure arrière. Il s'agit là aussi d'une structure engendrée par l'écoulement sortant de la rainure. Cette structure, couplée avec la précédente, permet de créer des pertes, ainsi qu'une poche de vitesse transversale négative.

Ces différentes structures tourbillonnaires évoluent en fonction des paramètres géométriques  $\alpha$ ,  $h$ ,  $w$  et  $N$ . On a représenté dans la table [3.19] l'influence de ces paramètres sur chaque structure. Un "+" symbolise une croissance du tourbillon quand le paramètre associé augmente, un "-" traduisant une diminution du tourbillon. On notera par un 0 les cas où le paramètre n'a pas d'influence. Comme on peut le voir, il n'existe pas de tendance simple puisque chaque paramètre agit positivement sur certaines structures, et négativement sur d'autres. On note en outre trois maxima, l'un pour le décollement d'entrée en fonction de l'angle, un autre pour le tourbillon de rainure en fonction de la hauteur, et le dernier pour le décollement de **Ds** en fonction de  $N$ .

Structure	angle $\alpha$	hauteur h	largeur w	nombre N
Décollement entrée	max. vers $115^\circ$	0	+	0
Tourbillon de rainure	+	max. vers 2.5 mm	-	0
Recirculation méridienne	+	+	-	-
Décollement <b>Ds</b>	+	+	-	max. vers 50
Décollement <b>Gs</b>	+	+	0	0

TAB. 3.19 – Influence des paramètres  $\alpha$ , h, w et N sur les structures tourbillonnaires

### 3.4.7 Analyse quantitative de l'influence des paramètres sur les objectifs

Après l'analyse de la structure du champ aérodynamique, l'étude du nouveau traitement de carter a été consacrée à la caractérisation de cette géométrie par rapport aux différents paramètres de dessin. Pour cette partie de l'étude, l'espace paramétrique a été parcouru rapidement au moyen de calculs RANS classiques obtenus avec le code Turb'Flow.

Les variations du champ aérodynamique, et notamment des structures locales, ont été décrites dans les sections 3.4.5 et 3.4.6. Cette section sera donc plus spécifiquement dédiée à l'étude des grandeurs qui caractérisent le traitement de carter (écart de pression statique, totale, de vitesse tangentielle, ...).

Nous allons maintenant détailler successivement les effets de chacun des cinq paramètres :

- la longueur L de la rainure
- la largeur w de la rainure
- le nombre N de rainures
- l'angle  $\alpha$  de la rainure
- la hauteur h de la rainure

Pour cela, on évaluera les variations des objectifs  $\Delta P_s$ ,  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$  par rapport à chaque paramètre. Rappelons qu'avec ce traitement de carter, nous cherchons à minimiser le débit dans le jeu, ce qui, compte tenu des conditions de simulation à débit imposé, revient à maximaliser (en valeur absolue) le différentiel de pression statique  $\Delta P_s$ . On cherche aussi à limiter la giration en sortie de jeu, ce qui se traduit ici par une diminution de l'écart de vitesse transversale  $\Delta V_y$ . On utilise enfin le différentiel de pression totale  $\Delta P_t$  qui réalise un compromis entre les critères de pression statique et de vitesse transversale. On cherche donc à minimiser l'écart de pression totale  $\Delta P_t$ .

#### 3.4.7.1 Longueur de la rainure L

Dans la majeure partie du parcours de l'espace des paramètres, nous avons gardé une longueur  $L=9$  mm. Toutefois, nous avons aussi testé quelques configurations avec le solveur classique Turb'Flow en faisant varier L. Ces configurations ont été construites en utilisant les valeurs suivantes de paramètres :

L	9, 12 mm
$\alpha$	$140^\circ$
h	1 mm
w	7.8 mm
N	50

On rappelle que les rainures ne commencent que 9 mm après le début de la zone adhérente. Cette valeur étant constante, de même que la longueur totale du canal adhérent (27 mm), l'augmentation de la distance  $L$  a pour effet de diminuer l'espace entre la face aval des rainures (et donc des obstacles) et la face de sortie de la zone adhérente.

Les variations des objectifs  $\Delta P_s$ ,  $\Delta P_t$ ,  $\Delta V_y$  sont présentées dans la table [3.20].

Rainurage	$\Delta P_s$ [Pa]	$\Delta P_t$ [Pa]	$\Delta V_y$ [m/s]
L=9 mm	-32.3	35.7	4.15
L=12 mm	-35.6	32.2	4.20
variation (12mm-9mm)	-3.3	-3.5	+0.05

TAB. 3.20 – Effets de la longueur  $L$  sur les objectifs aérodynamiques pour le rainurage

Comme on peut le voir, la longueur n'a qu'un effet marginal sur l'écart de vitesse tangentielle  $\Delta V_y$ . Compte tenu des incertitudes numériques, cet écart n'est pas significatif. On observe en revanche des variations un peu plus fortes sur les objectifs de pression. Vis à vis de nos objectifs, il semblerait qu'une rainure longue soit à privilégier.

Il est intéressant de comparer ces variations à celles obtenues en changeant la longueur  $L$  de l'obstacle circconférentiel [3.21].

Obstacle circconférentiel	$\Delta P_s$ [Pa]	$\Delta P_t$ [Pa]	$\Delta V_y$ [m/s]
L=9 mm	-34.0	46.0	4.25
L=12 mm	-36.4	45.7	4.35
variation (12mm-9mm)	-2.4	-0.3	+0.1

TAB. 3.21 – Effets de la longueur  $L$  sur les objectifs aérodynamiques pour l'obstacle circconférentiel

Pour cette configuration sans rainure, on remarque déjà que les pertes de charge sont un peu plus importantes qu'avec des rainures, ce qui se traduit entre autre par un niveau de  $\Delta P_s$  inférieur. La variation du critère  $\Delta P_s$  est, elle, comparable avec ce qui est observé en présence de rainures (-2.4 Pa contre -2.3 Pa). Cependant, on constate que le niveau de pression totale stagne, ce qui est justifié par l'augmentation de la vitesse transversale. Cette dernière augmentation mérite d'être clarifiée.

On a tracé sur la figure (3.64) les variations, pour deux longueurs de *l'obstacle circconférentiel*, de la vitesse transversale moyenne en fonction de la position axiale dans le jeu. Les lignes verticales noires délimitent la longueur de l'obstacle. Deux types de moyennes sont utilisés. Sur la courbe de gauche, on utilise une moyenne surfacique ; elle n'est pas cohérente avec les résultats présentés jusqu'à présent (moyennes pondérées par le débit), mais elle met bien en relief certains phénomènes. Les discontinuités au début et à la fin de l'obstacle sont dues à la présence des couches limites sur les parois verticales : l'intégration dans ces couches limites produit une vitesse moyenne forcément plus basse. Sur la courbe de droite, on utilise une pondération par la vitesse débitante lors de la moyenne.

La vitesse transversale suit une tendance globalement croissante. Une fois de plus, cette augmentation est causée par le mouvement de la paroi mobile. Au niveau de l'obstacle, la pente est rigoureusement la même pour les deux cas : le fluide passant entre l'obstacle et la paroi mobile

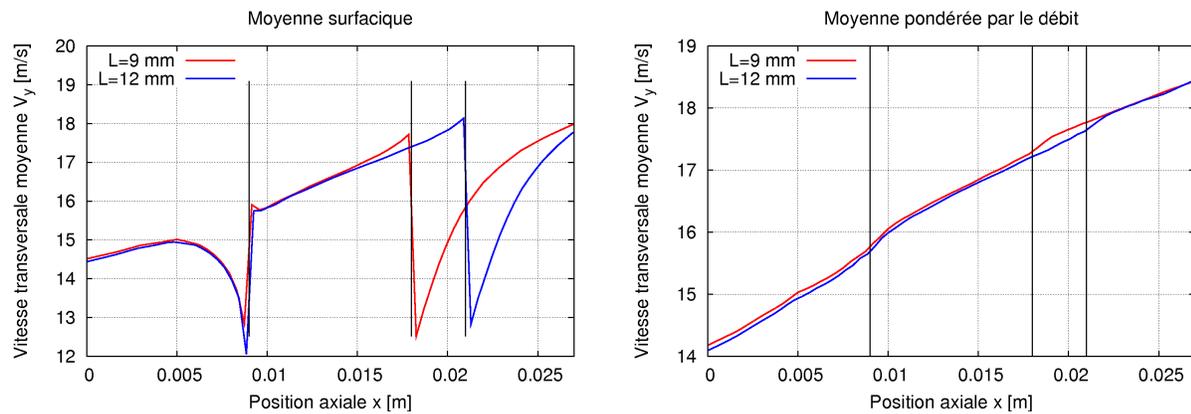


FIG. 3.64 – Evolution longitudinale de la moyenne de  $V_y$  pour l'obstacle circconférentiel

(hauteur de veine  $\delta=2$  mm) est soumis au même cisaillement. En conséquence, plus l'obstacle sera long, plus la vitesse tangentielle en aval de l'obstacle sera élevée.

On remarque sur les deux courbes que l'accélération transversale en aval de l'obstacle est plus forte pour  $L=12$  mm. En conséquence, les niveaux de  $V_y$  en sortie se rejoignent. Cela montre que le cisaillement est plus efficace sur la zone aval pour des rainures longues, peut-être à cause de la plus grande quantité de mouvement selon  $\vec{y}$  du jet sortant de la zone supérieure. En s'écartant de l'obstacle, cet effet semble toutefois s'atténuer : à la limite, on devrait avoir le même niveau de sortie si le canal adhérent était infiniment long, niveau correspondant à un écoulement de Couette turbulent.

On trace maintenant l'évolution de la vitesse transversale moyenne pour les rainures (Fig. 3.65).

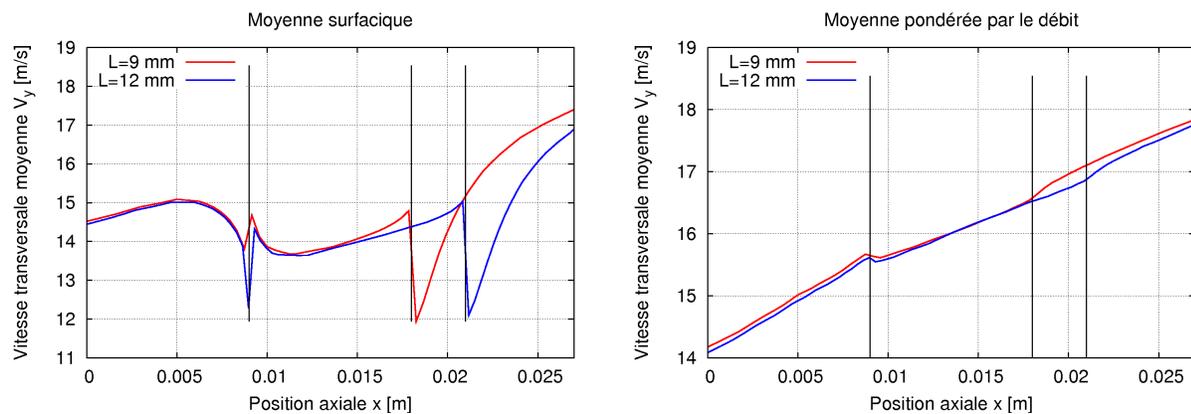


FIG. 3.65 – Evolution longitudinale de la moyenne de  $V_y$  pour le rainurage

On retrouve les mêmes caractéristiques que précédemment, à savoir une très forte similitude jusqu'au niveau de la rainure et une variation n'intervenant qu'au travers d'une accélération transversale subie pendant plus longtemps pour  $L=12$  mm.

Toutefois, les niveaux en sortie ne se rejoignent pas cette fois. Il existe donc un mécanisme permettant de limiter plus efficacement l'augmentation de giration.

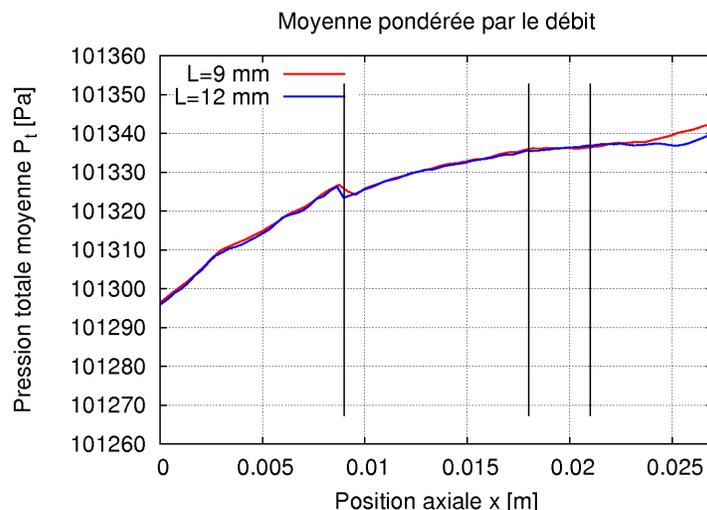


FIG. 3.66 – Evolution longitudinale de la moyenne de  $P_t$  pour le rainurage

Pour la pression totale (Fig. 3.66), le comportement des rainures semble globalement le même jusqu'à la fin des rainures, même si on remarque une légère différence à l'entrée des rainures, le cas  $L=12$  étant légèrement plus dissipatif. En ce sens, on peut confirmer que le paramètre  $L$  n'a pas ou très peu d'effet sur les différentes structures tourbillonnaires de l'écoulement.

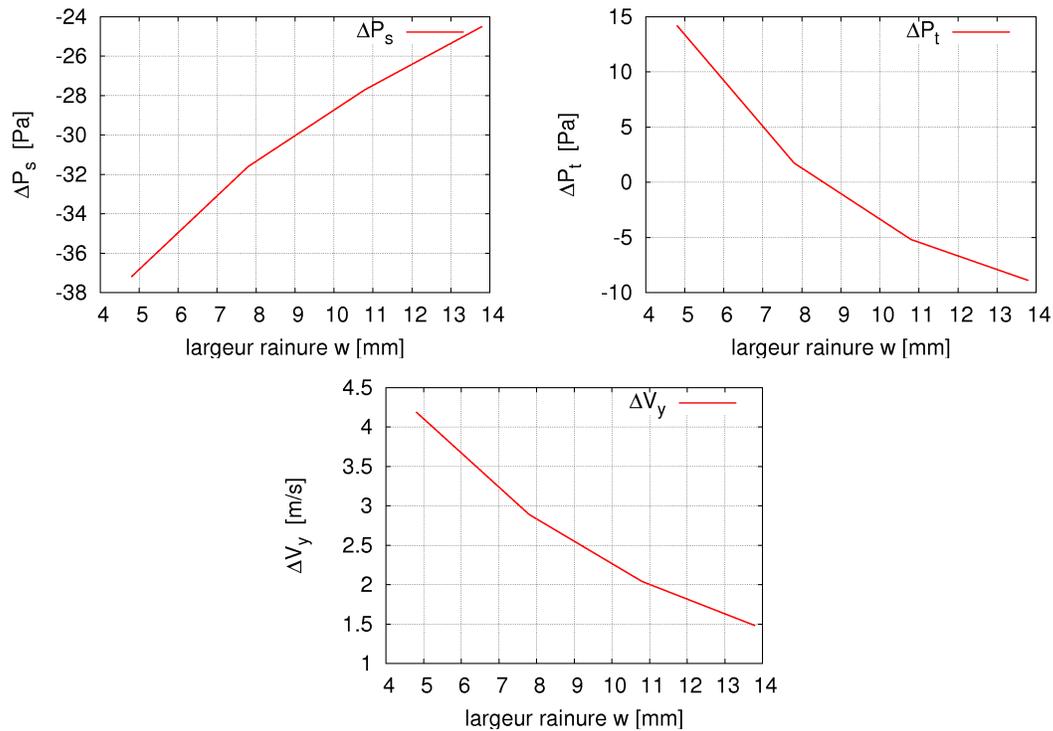
En revanche, on observe une différence nette en aval des rainures : il existe un changement de pente assez net, où la pression totale va soudain se mettre à augmenter plus vite. Ce point est situé dans les deux cas à environ 6 mm en aval de la rainure. Il semble être lié à la recirculation de sortie, bien qu'il ne corresponde ni au point de ré-attachement, ni au point de disparition de la vitesse transversale négative. Même si la différence est faible, la pente dans le cas  $L=12$  mm est légèrement plus forte, ce qui est cohérent avec ce qu'on a observé dans le cas de l'obstacle circulaire. Toutefois, cette variation intervient cette fois beaucoup trop tard pour que les niveaux se rejoignent au niveau du plan de sortie (situé à  $x=27$  mm).

**Synthèse sur la longueur  $L$**  La longueur de la rainure n'a pas d'influence significative sur l'écart de vitesse transversale  $\Delta V_y$ . En revanche, l'augmentation de la longueur  $L$  permet d'améliorer légèrement les écarts de pression  $\Delta P_s$  et  $\Delta P_t$ . Les effets de l'allongement ne sont visibles qu'en aval des rainures.

### 3.4.7.2 Largeur de la rainure $w$

Après la longueur de la rainure, le deuxième paramètre que nous allons étudier est la largeur  $w$  de la rainure. La largeur de la rainure a un effet monotone sur tous les objectifs du problème. On a représenté sur la figure (Fig. 3.67) les variations de ces critères autour de la configuration :

w	7.8 mm
L	9 mm
$\alpha$	115 °
h	3 mm
N	50

FIG. 3.67 – Effets du paramètre  $w$  sur les objectifs

La première remarque que l'on puisse faire est que le paramètre  $w$  affecte significativement tous les objectifs. Toutefois les variations s'opposent : une diminution de la pression totale ou de la vitesse se traduira nécessairement par une diminution en valeur absolue de l'écart de pression statique.

L'amélioration de  $\Delta P_s$  observée pour les faibles valeurs de  $w$  est logique : puisque les rainures se referment, le traitement de carter se comporte de plus en plus comme un simple obstacle circconférentiel. Pour ce dernier, le  $\Delta P_s$ , obtenu à géométrie équivalente, est de -54 Pa. L'accélération de la descente pour les petits  $w$  est probablement liée aux effets visqueux qui deviennent, en part relative, de plus en plus importants au sein de la rainure. A l'inverse, la faible amplitude de l'écart de pression statique pour les grandes largeurs traduit simplement la disparition progressive des obstacles, responsables de la majeure partie du blocage. On se rapproche alors du cas du canal droit, lequel présente l'écart de pression statique minimum : -7.5 Pa.

Pour les écarts de pression totale et de vitesse, la variation observée est aussi cohérente avec le comportement aux limites précédemment observé : pour des rainures larges, la surface horizontale des obstacles est assez faible. La zone de cisaillement entre les sommets des obstacles et la paroi mobile est donc faible, limitant ainsi l'accélération en zone supérieure. D'autre part, on vérifie que

la répartition de débit évolue en faveur de la rainure. Pour une rainure de 13.8 mm de large, 40 % du débit passent par la rainure, contre 30% pour  $w=7.8$  mm. Cette variation est au prorata de la variation de section, ce qui signifie que les effets non-linéaires liés au blocage ne jouent quasiment pas. En conséquence, pour un angle  $\alpha$  au-delà de  $90^\circ$ , la quantité de mouvement selon  $-\vec{y}$  en sortie de rainure est plus importante et elle permet une meilleure limitation de la giration globale.

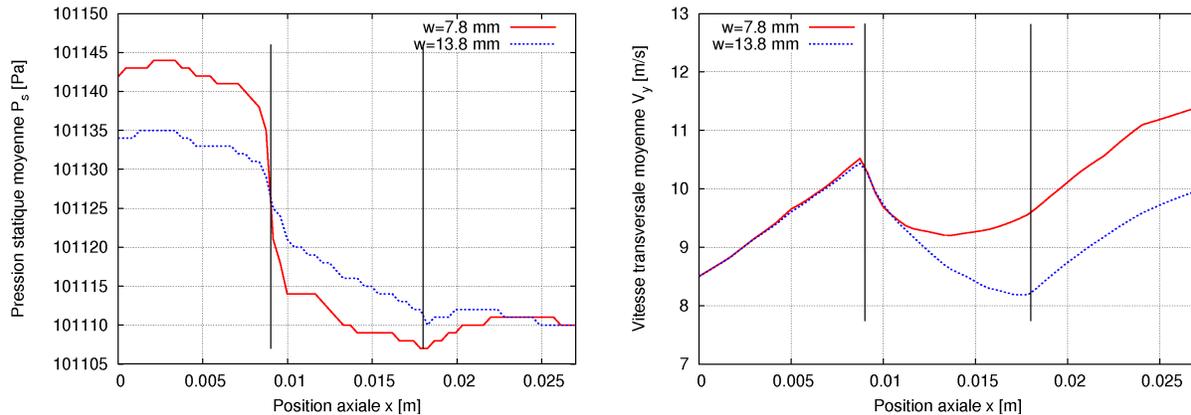


FIG. 3.68 – Evolution longitudinale des moyennes de  $P_s$  et  $V_y$  - paramètre  $w$

Comme on peut le constater sur la figure (Fig. 3.68) présentant les évolutions longitudinales de pression statique et de vitesse transversale moyenne, la modification du paramètre  $w$  a essentiellement des effets au niveau de la rainure.

Pour la pression statique, la chute observée en entrée de rainure ( $x=0.009\text{m}$ ) est très fortement atténuée par une rainure plus large. C'est la conséquence de la réduction de la section transversale des obstacles : la surface d'arrêt est plus faible, ce qui se traduit par une moyenne plus faible. D'autre part, on constate que l'évolution de  $P_s$  est beaucoup plus progressive pour  $w=13.8$  mm, ce qui signifie que les gradients de pression axiaux sont mieux répartis à l'intérieur de la rainure. Lorsqu'on observe le champ de vitesse, on se rend compte que la déviation du fluide est beaucoup plus progressive dans le cas  $w=13.8$  mm. Le fluide ne s'aligne pas immédiatement avec la rainure : le canal étant plus large, la déviation en entrée peut se faire plus doucement que dans le cas  $w=7.8$  mm.

De même, on repère une pression statique un peu plus forte juste en aval de la rainure, dans la zone  $0.018 < x < 0.02$ . Ce petit changement correspond à la réduction de la recirculation arrière, liée au rétrécissement des obstacles.

Pour la vitesse transversale, l'effet de la rainure ne devient perceptible qu'environ 3 mm après l'entrée. Les courbes correspondant aux cas  $w=7.8$  mm et  $w=13.8$  mm, jusqu'alors confondues, se séparent, le cas  $w=13.8$  mm descendant beaucoup plus fortement que le cas  $w=7.8$  mm. Cette combinaison est due à la baisse du cisaillement transversal ainsi qu'au maintien des caractéristiques du tourbillon colinéaire à la rainure.

**Synthèse sur la largeur  $w$**  La largeur  $w$  de la rainure a un effet monotone sur les trois objectifs de l'étude. L'élargissement des rainures permet de faire diminuer les objectifs  $\Delta V_y$  et  $\Delta P_t$ , au détriment du différentiel de pression statique  $\Delta P_s$ . Des rainures larges permettent de guider une part importante du fluide passant dans le jeu, limitant ainsi la giration. Cependant, la section débitante du jeu augmente dans un tel cas et le fluide circule plus facilement, réduisant le  $\Delta P_s$ .

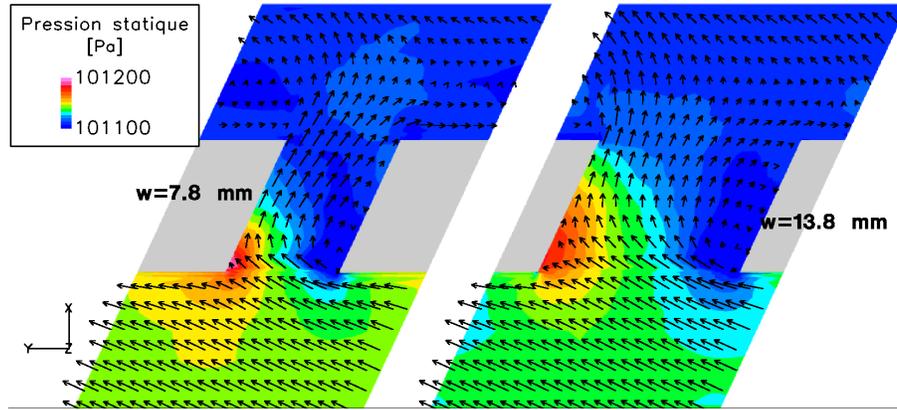


FIG. 3.69 – Carte de pression statique et vitesse à mi-rainure - Effets de la largeur

### 3.4.7.3 Nombre de rainures $N$

Le troisième paramètre à étudier est le nombre de rainures  $N$ . On présente sur la figure (Fig. 3.70) les variations des trois critères aérodynamiques relativement à ce paramètre.

Les courbes de la figure (Fig. 3.70) ont été obtenues pour la configuration suivante :

$\alpha$	115°
$w$	7.8 mm
$L$	9 mm
$h$	3 mm

Les évolutions des différentes grandeurs sont monotones. Elles présentent de plus une certaine similitude avec les effets de la largeur  $w$ . Ceci est parfaitement logique au regard de la paramétrisation choisie. En effet, la largeur des obstacles est déterminée à la fois par les paramètres  $w$  et  $N$  :

$$l_{obstacle} = \frac{2\pi R_0}{N} - w$$

En conséquence, on peut s'attendre à retrouver un certain nombre des mécanismes déjà observés.

De manière évidente, la diminution du nombre de rainures va se traduire par une augmentation des critères de giration et de pression totale, ainsi que par un accroissement du différentiel de pression statique. Comme la veine est alors barrée en grande partie par un obstacle, le jeu réduit qui en résulte permet une forte accélération transversale et un blocage important de la veine. On voit clairement ici que l'on tend vers le cas limite de l'obstacle circconférentiel, correspondant à  $N=0$ .

A l'inverse, pour un grand  $N$ , la largeur des obstacles diminue. On s'approche donc d'une configuration beaucoup plus ouverte, responsable d'un faible différentiel de pression statique  $\Delta P_s$  (à cause, entre autre, de faible pertes de charge) mais aussi d'une "faible" augmentation de la giration et de la pression totale. On ne peut néanmoins pas comparer les configurations avec beaucoup de rainures au canal droit. En premier lieu, il existe une limite théorique au nombre de rainures, limite pour laquelle  $l_{obstacle} = 0$ . Cette limite dépend bien sûr de la valeur de  $w$ . En abordant cette limite, les obstacles deviennent infiniment fins, mais ils restent toutefois présents. La rainure existe toujours et toutes les caractéristiques de déviation du fluide liées aux obstacles demeurent. On peut ainsi

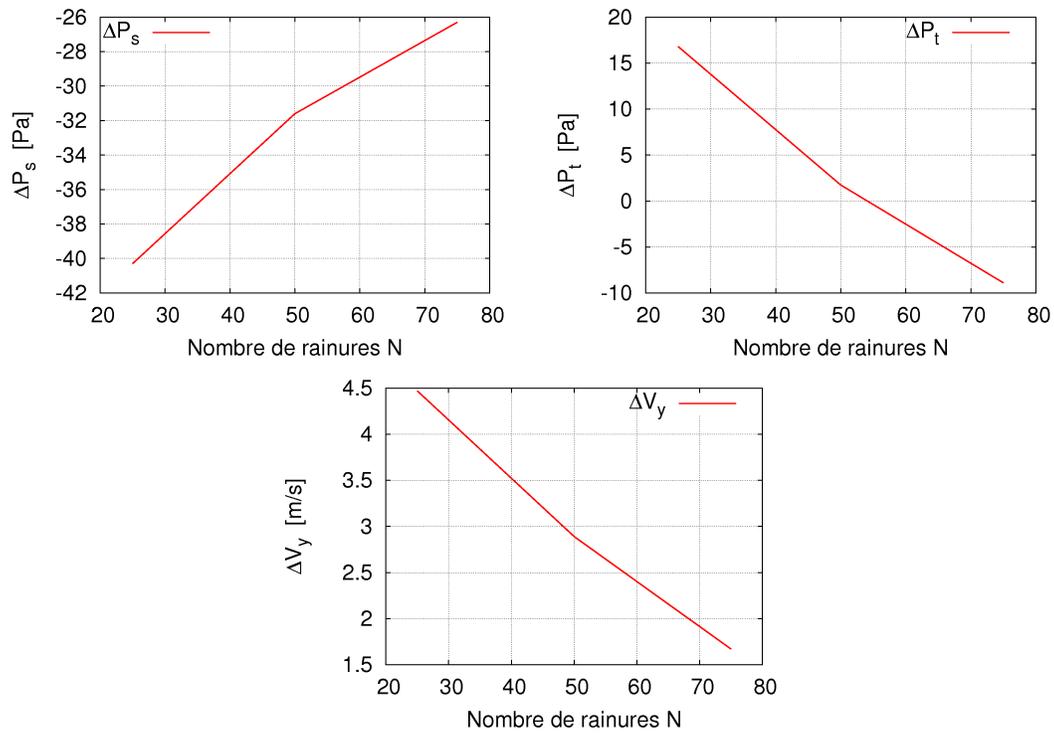


FIG. 3.70 – Effets du paramètre N sur les objectifs

attendre des performances supérieures, notamment pour  $\Delta V_y$ , par rapport au canal plan. C'est bien le cas ici :

configuration	$\Delta P_s$ [Pa]	$\Delta P_t$ [Pa]	$\Delta V_y$ [m/s]
Canal droit	-7.45	60.9	5.25
Rainures N=75	-26.1	-8.7	1.67

TAB. 3.22 – Comparaison des objectifs entre le canal droit et le cas rainuré - influence de N

Si on trace maintenant les évolutions longitudinales des écarts de pression statique totale et de vitesse transversale (Fig. 3.71), on observe un certain nombre de différences par rapport au paramètre de largeur  $w$ .

Tout d'abord, il n'y a plus d'étalement du gradient de pression statique le long de la rainure. La plus grande partie du  $\Delta P_s$  se crée au niveau de l'entrée des rainures. On remarque que l'amplitude du saut de  $P_s$  en entrée varie assez fortement entre  $N=25$  et  $N=50$ . C'est la conséquence de l'augmentation de la section perpendiculaire à l'écoulement pour les obstacles. La zone d'arrêt est alors plus étendue, pour un niveau de pression à peu près équivalent. Il en résulte une valeur moyenne plus forte. On précisera que la section transversale des obstacles ne joue pas vraiment sur le niveau de pression observé au point d'arrêt. Cette pression dépend essentiellement de la vitesse, laquelle est constante selon  $N$ .

De même, on observe en sortie des rainures une pression statique inférieure. Elle découle de la présence d'une recirculation aval beaucoup plus importante. On a vu précédemment que la diminution du nombre de rainures permettait le développement de la recirculation aval, en favorisant

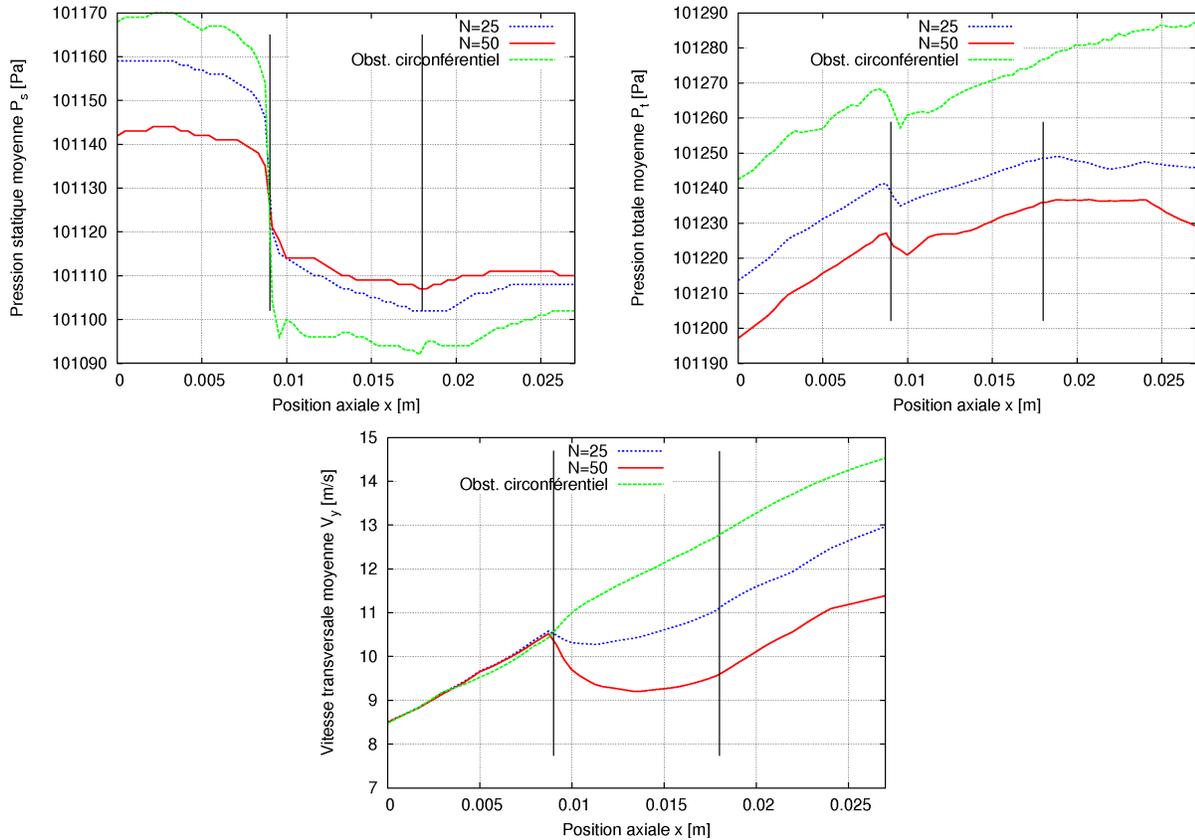


FIG. 3.71 – Evolution longitudinale des moyennes de  $P_s$ ,  $P_t$  et  $V_y$  - paramètre  $N$

essentiellement la composante méridienne. Comme ce tourbillon est responsable d'une chute de la pression statique, plus il sera étendu spatialement (en azimuth notamment), plus la valeur moyenne de  $P_s$  en aval des rainures sera basse et plus la zone de dépression se prolongera axialement.

Pour la vitesse transversale  $V_y$ , les variations observées découlent de la répartition du débit entre la rainure et la zone supérieure. On peut vérifier que la diminution du nombre de rainures n'affecte pas significativement le champ de vitesse à l'intérieur de la rainure. En revanche, le rapport de section entre la surface débitante de la rainure et celle de la zone supérieure évolue clairement en faveur de cette dernière. La répartition de débit est donc modifiée : la fraction de débit passant par la zone supérieure augmente. En conséquence, une plus grande partie du fluide est soumis au cisaillement transversal intense présent dans la zone supérieure et on obtient au final un niveau de vitesse moyen plus élevé.

L'influence de la rainure, bien visible pour  $N=50$ , est beaucoup plus faible pour  $N=25$ . On se rapproche du cas de l'obstacle circconférentiel, qui présente une variation de  $V_y$  monotone et quasiment linéaire.

Pour la pression totale  $P_t$ , on note une évolution très similaire pour  $N=25$  et  $N=50$ . L'écart entre les courbes est justifié par la différence de  $P_s$  observée à l'amont du jeu. La seule différence de comportement remarquable se situe en aval de la rainure : la pression totale diminue pour  $N=25$  et stagne pour  $N=50$ . Comme en parallèle  $V_y$  ne présente pas de différence, on peut lier ce phénomène

à la dissipation induite par la recirculation arrière : pour  $N=25$ , le tourbillon arrière est plus gros et donc plus dissipatif en moyenne.

**Synthèse sur le nombre de rainures  $N$**  Le paramètre nombre de rainures  $N$  a un effet monotone sur les trois objectifs. L'augmentation de  $N$  permet d'améliorer le guidage du fluide et donc les objectifs  $\Delta V_y$  et  $\Delta P_t$ . Comme pour la largeur des rainures, l'augmentation du nombre de rainures induit par contre une dégradation de l'objectif de pression statique  $\Delta P_s$ . En effet, des rainures nombreuses augmentent sensiblement la section dans le jeu, et favorisent donc les forts débits.

#### 3.4.7.4 Angle de la rainure $\alpha$

On a étudié jusqu'à présent trois paramètres ( $L, w$  et  $N$ ) qui présentaient des influences monotones sur les objectifs. Le quatrième paramètre, l'angle de la rainure  $\alpha$ , est un paramètre intéressant à plus d'un titre. On a déjà vu qu'il influençait la plupart des structures de l'écoulement, mais il est aussi responsable de variations assez particulières des objectifs. Les courbes tracées sur la figure (Fig. 3.72) ont été obtenues pour des configurations autour de :

w	7.8 mm
L	9 mm
h	3 mm
N	50

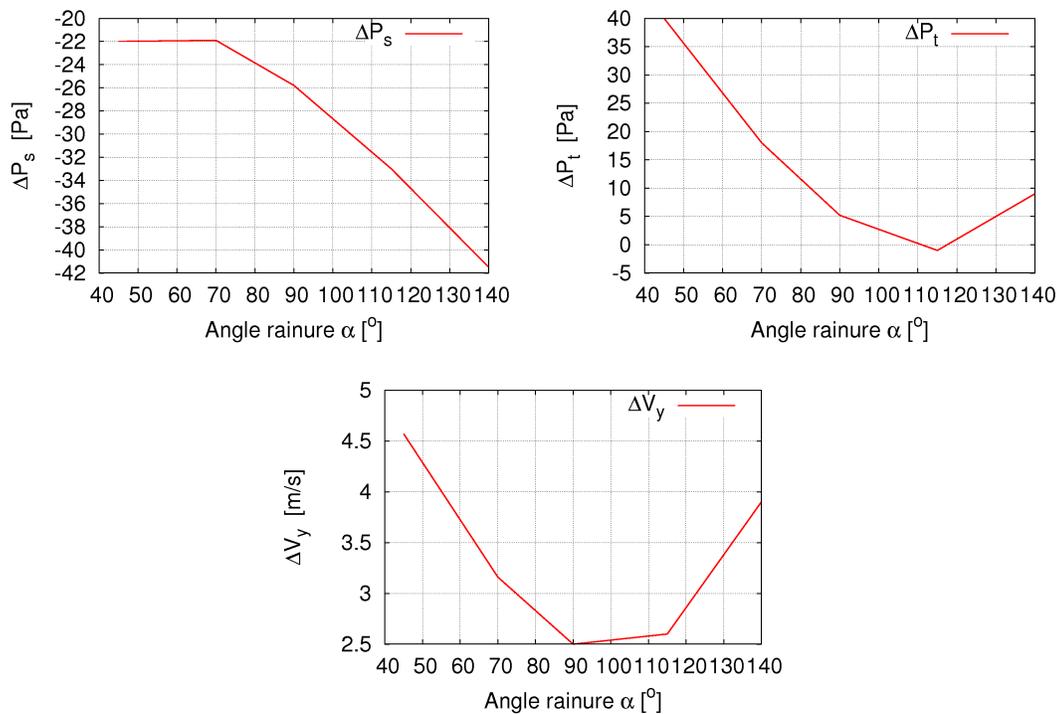


FIG. 3.72 – Effets du paramètre  $\alpha$  sur les objectifs

Le point le plus frappant est la présence d'un optimum pour la pression totale et la vitesse : cet optimum est situé vers  $\alpha=100^\circ$ . À l'inverse, l'objectif de pression statique évolue de manière monotone, même si on remarque une sorte de plateau pour  $\alpha=45^\circ$ . La variation de  $\Delta P_s$  est cohérente avec ce qui a été observé jusqu'à présent :

- la diminution du débit dans la rainure, avec le cas de l'obstacle circconférentiel obtenu en limite.
- l'augmentation des pertes à cause du renforcement des structures tourbillonnaires.

La stagnation pour les  $\alpha$  faibles est un peu plus surprenante. Mais si on suppose que le rainurage tend une fois de plus vers l'obstacle circconférentiel pour  $\alpha \approx 0^\circ$ , on doit alors retrouver des  $\Delta P_s$  importants en diminuant encore plus  $\alpha$ . On rappelle en effet que, pour cette profondeur, l'écart de pression statique obtenu avec l'obstacle circconférentiel est  $\Delta P_s^{obs.} = -54.9$  Pa. La variation de cet objectif étant a priori continue, la tangente horizontale observée sur la courbe est justifiée.

La présence de l'optimum pour la giration et la pression totale est à relier aux mécanismes de limitation de la vitesse transversale par l'orientation de la rainure et de réduction du débit dans celle-ci. On a vu sur les figures (Fig. 3.34 à 3.36) que l'accroissement de l'angle se traduisait concrètement par une diminution de la section passante de la rainure et donc au final du débit.

À l'inverse, on a aussi vu que l'inclinaison de la rainure permettait de générer naturellement une zone de vitesse transversale négative selon la formule (3.13) :

$$V_y^{rainure} = U_x^{rainure} \tan(90 - \alpha) \quad (3.15)$$

Cette vitesse négative peut être encore amplifiée dans la zone proche carter par quelques structures comme le tourbillon colinéaire à l'axe de la rainure.

On se trouve donc ici en face d'un compromis :

- Soit on va vers  $\alpha \gg 90^\circ$  pour générer de la vitesse transversale très négative. On limite cependant le débit dans la rainure, ce qui, avec la relation (3.13) limite de la même manière la contre-vitesse accessible.
- Soit on choisit d'augmenter le débit dans la rainure, avec  $\alpha \ll 90^\circ$ , mais on perd alors la possibilité de générer une vitesse tangentielle négative.

Au final, seules les configurations avec un angle  $\alpha$  proche de  $90^\circ$  permettent d'avoir à la fois un débit conséquent dans la rainure et une bonne génération de vitesse négative. Le décalage de l'optimum vers les  $\alpha > 90^\circ$  n'est que la conséquence de la formule précédente : en négligeant les divers tourbillons, la génération de vitesse tangentielle négative ne peut se faire que pour  $\alpha > 90^\circ$ .

On retrouve sur les évolutions axiales (Fig. 3.73) la plupart des caractéristiques observées pour ce paramètre. Ainsi, pour la pression statique, le saut le plus important est obtenu en entrée de rainure pour  $\alpha=140^\circ$ . De même, on rencontre les effets de l'angle sur la recirculation arrière. Les angles forts sont responsables d'une structure beaucoup plus marquée et dissipative, ce qui se traduit en terme de pression statique par un niveau en aval de la rainure nettement plus bas pour  $\alpha=140^\circ$ . On remarquera aussi sur la courbe de pression totale que, pour  $\alpha=70^\circ$ , la pente en aval ( $0.018 < x < 0.022$ ) de l'obstacle est positive, contrairement aux deux autres configurations pour lesquelles cette pente est nulle ( $\alpha=115^\circ$ ) ou négative  $\alpha=140^\circ$ .

Les variations de vitesse sont elles aussi assez remarquables. Les différences apparaissent au niveau de la rainure. La courbe  $\alpha=70^\circ$  se détache clairement des deux autres. La diminution de  $V_y$  est faible dans ce cas, ce qui est cohérent avec l'inclinaison de la rainure, et la moyenne se remet

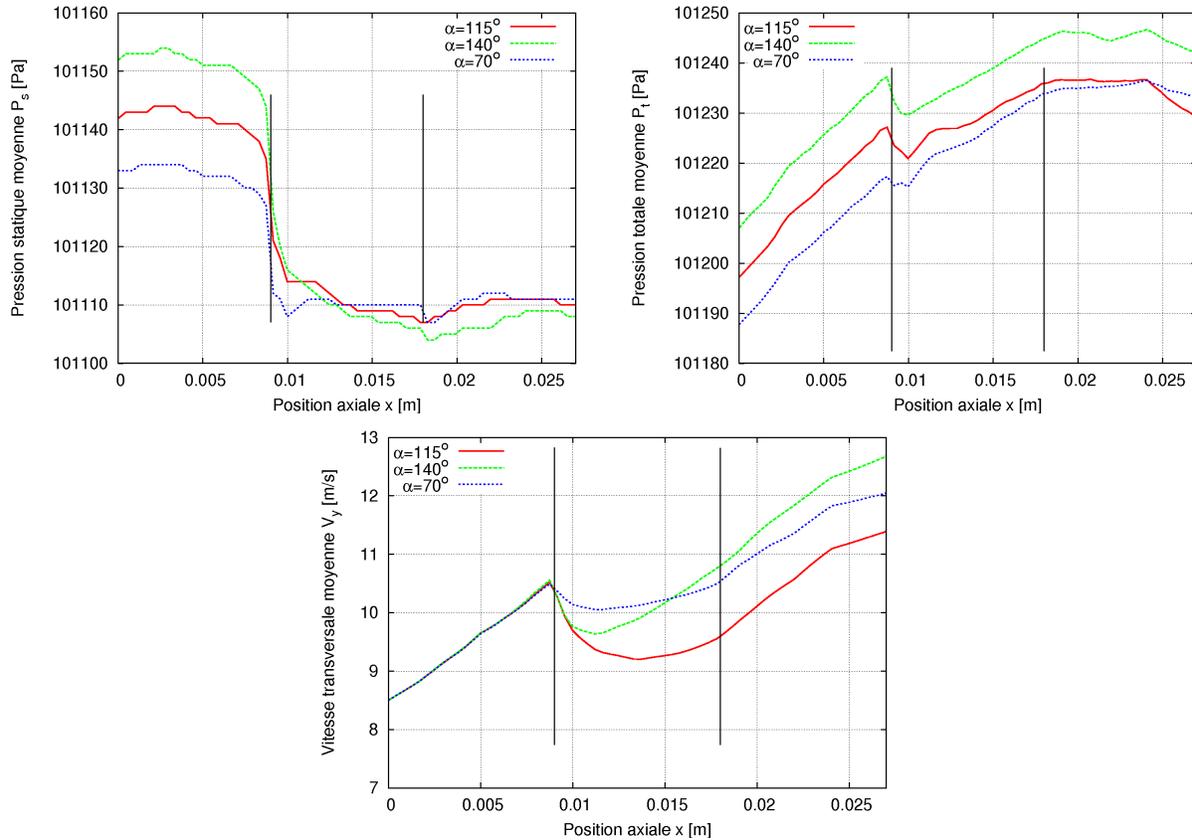


FIG. 3.73 – Evolution longitudinale des moyennes de  $P_s$ ,  $P_t$  et  $V_y$  - paramètre  $\alpha$

donc très vite à monter sous l'influence de l'entraînement de la paroi mobile. On rappelle que, dans le cas  $\alpha=70^\circ$ , on observe encore une légère vitesse transversale négative en fond de rainure, vitesse générée par le vortex colinéaire au canal.

Pour le cas  $\alpha=140^\circ$ , la vitesse transversale évolue de la même manière que pour  $\alpha=115^\circ$  dans les premiers millimètres de la rainure. Toutefois la chute est moins importante et la moyenne remonte assez rapidement. On remarque en outre que pour cet angle élevé, la remontée du niveau de vitesse se fait selon une pente très proche de celles en amont ou en aval de la rainure. Cela traduit bien que le principal mécanisme en jeu ici est l'entraînement par la paroi mobile du fluide en zone supérieure. L'écoulement dans la rainure n'est pas suffisant pour induire une réduction vraiment notable.

Curieusement les niveaux de pertes en entrée de rainure, caractérisés par la variation rapide de  $P_t$ , sont assez similaires entre  $140^\circ$  et  $115^\circ$ . Pour ces deux angles, les recirculations d'entrée sont néanmoins nettement plus dissipatives que pour  $\alpha=70^\circ$ .

**Synthèse sur l'angle  $\alpha$**  L'angle de la rainure  $\alpha$  est intéressant car il induit un optimum pour le critère de giration  $\Delta V_y$  et celui de pression totale  $\Delta P_t$ . Cet optimum est localisé vers  $\alpha=100^\circ$  pour ces deux critères. Il s'explique par le compromis fait entre d'une part un débit fort dans la rainure (cas où  $\alpha \rightarrow 0^\circ$ ) et d'autre part une vitesse transversale négative forte (cas où  $\alpha \rightarrow 180^\circ$ ). En parallèle, l'angle  $\alpha$  a une influence monotone sur  $\Delta P_s$ . Pour cet objectif, les meilleures configurations

sont celles avec un angle fort ( $\alpha \rightarrow 180^\circ$ ).

### 3.4.7.5 Hauteur de la rainure $h$

Le dernier paramètre à traiter est la hauteur de la rainure  $h$ . Les courbes présentées en (Fig. 3.74) correspondent à des configurations du type :

$\alpha$	115°
$w$	7.8 mm
$L$	9 mm
$N$	50

REMARQUE : en raison d'un problème de calcul, les cas présentés ici ont été obtenus en imposant une adhérence partielle sur la paroi supérieure du plénum avant. On a ainsi généré une rampe de vitesse transversale afin de limiter les problèmes au niveau du raccord entre le plénum et la paroi mobile. Ceci a pour conséquence d'augmenter un peu le niveau de vitesse transversale (jusqu'à 9% de variation) en entrée et donc d'accroître l'angle d'incidence amont. Il aurait été intéressant de faire en parallèle une étude paramétrique physique portant par exemple sur l'angle d'incidence amont. Ceci n'a malheureusement pas été possible dans le temps qui nous était imparti.

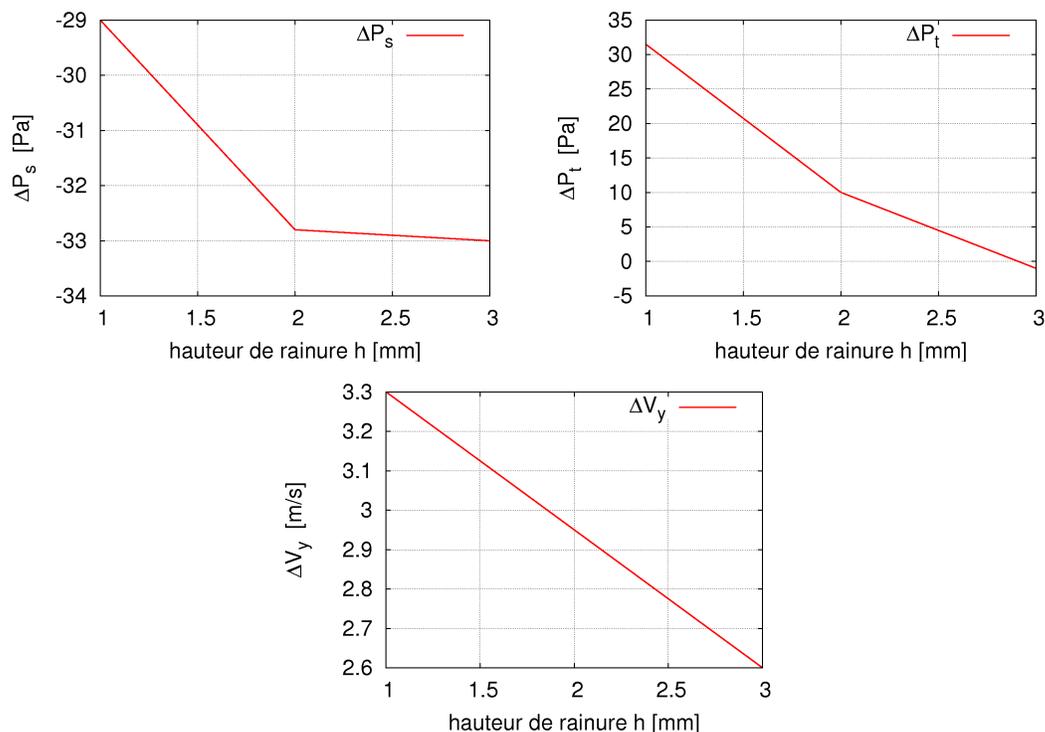


FIG. 3.74 – Effets du paramètre  $h$  sur les objectifs

Le paramètre  $h$  a un effet monotone assez fort sur les écarts de pression totale  $\Delta P_t$  et de vitesse transversale  $\Delta V_y$ . Plus la rainure est profonde, plus l'augmentation de vitesse est faible. Ce point est cohérent avec les mécanismes d'alimentation de la rainure observés précédemment : plus la rainure

est profonde, plus une part importante du débit y passe. On génère ainsi pour  $\alpha=115^\circ$  un flux de masse avec une composante négative assez importante selon  $-\vec{y}$ , ce qui permet par la suite de contrer plus efficacement le mouvement dû au rotor. La variation de  $P_t$  retranscrit essentiellement le phénomène de limitation de  $V_y$ .

La variation de  $\Delta P_s$  est un peu plus inattendue : le niveau varie assez brutalement entre  $h=1$  mm et  $h=2$  mm, mais il est presque constant entre  $h=2$  mm et  $h=3$  mm. Ceci suggère la présence d'un optimum local, situé quelque part entre 2 et 3 mm. Jusqu'à présent, nous n'avons rien remarqué au niveau du champ qui puisse présager d'un tel comportement.

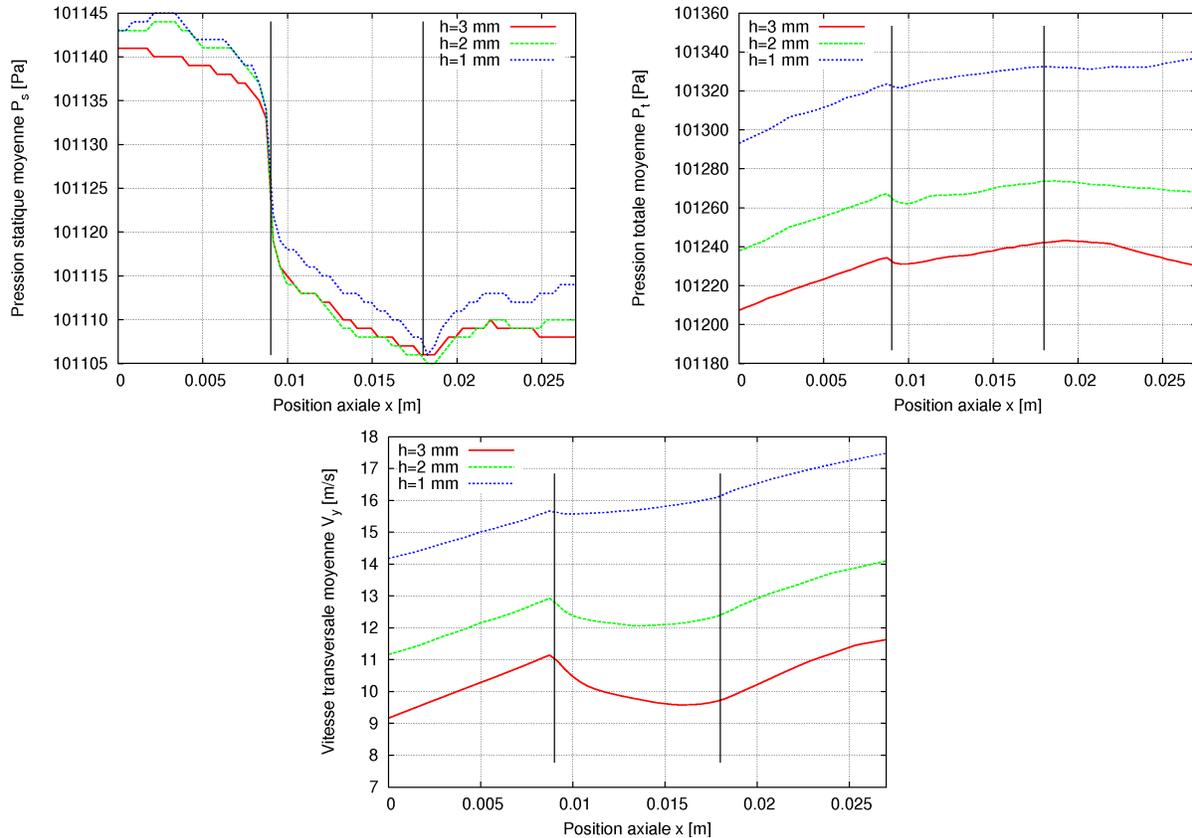


FIG. 3.75 – Evolution longitudinale des moyennes de  $P_s$ ,  $P_t$  et  $V_y$  - paramètre  $h$

Les évolutions des grandeurs aérodynamiques données en (Fig. 3.75) n'apportent pas d'indice probant sur cet extremum. Les évolutions de  $P_s$  au niveau de la rainure sont à peu près les mêmes pour  $h=2$  mm et  $h=3$  mm. La seule différence sensible est l'amplitude du saut de pression en entrée de la rainure, ce saut diminue quand  $h$  augmente. Cependant, cette différence s'atténue sur la zone amont et on retrouve à peu près la même pression au plan d'entrée du jeu.

On voit sur l'évolution de  $V_y$  que la diminution au niveau de la rainure s'amplifie pour les grandes hauteurs. On retrouve ici les effets de l'accroissement du débit circulant dans la rainure lorsque  $h$  augmente. On notera que les accélérations en amont et en aval des rainures sont similaires puisque les courbes suivent alors la même pente.

Pour la pression totale, le seul point remarquable est le comportement en sortie. Pour les rainures profondes, on assiste à une baisse de  $P_t$  dans la zone  $0.02 < x < 0.027$  m. Cette diminution est d'autant

plus forte que le paramètre  $h$  est grand. Bien qu'on ne puisse à l'heure actuelle ni le confirmer, ni l'infirmier, on peut supposer que cette variation est en lien avec la recirculation arrière, légèrement plus importante dans le cas  $h=3$  mm.

**Synthèse sur la hauteur  $h$**  La hauteur  $h$  a une influence monotone sur le critère de giration  $\Delta V_y$  et sur celui de pression totale  $\Delta P_t$ . On améliore ces deux critères en augmentant la hauteur  $h$ . Cette amélioration est à relier à l'augmentation de la fraction du débit de jeu passant dans la rainure. Une part croissante du fluide est ainsi guidée. Pour le différentiel de pression statique  $\Delta P_s$ , il semblerait qu'il y ait un optimum localisé vers  $h=2.5$  mm. Il n'y a pas d'explication claire de ce phénomène.

### 3.4.7.6 Effets du débit

Dans l'ensemble des cas présentés jusqu'ici, le débit a toujours été gardé constant, ce qui se traduit notamment par une baisse de vitesse lors de l'augmentation de la hauteur  $h$ . Nous avons toutefois essayé quelques configurations dans lesquelles la vitesse est restée constante. Cela entraîne une augmentation du débit lors de l'augmentation de  $h$ . Les résultats suivants ont été obtenus pour la configuration [ $\alpha=115^\circ$ ,  $h=2$  mm,  $w=7.8$  mm,  $L=9$  mm,  $N=50$ ]. Cette "paramétrisation" physique a été faite en ne changeant ni l'angle d'incidence amont, ni la vitesse de la paroi mobile.

Vitesse Amont $\ \vec{V}\ $ [m/s]	$\Delta P_s$ [Pa]	$\Delta P_t$ [Pa]	$\Delta V_y$ [m/s]
10.58	-33	10	2.95
14.10	-46	-37.5	0.52

TAB. 3.23 – Effets du niveau de vitesse sur le fonctionnement des rainures

On peut constater que les rainures sont nettement plus efficaces dans le cas d'une vitesse forte. Le différentiel de pression statique est beaucoup plus fort, de même que les pertes de charge ( $\Delta P_t$  est ici négatif), ce qui est parfaitement normal compte tenu de l'évolution de la vitesse. De même, la limitation de la giration est très importante puisque le fluide n'accélère presque plus (en moyenne) selon la direction transversale : l'écoulement de sortie de jeu a la même giration que l'écoulement de sortie.

On peut voir sur les évolutions longitudinales (Fig. 3.76), que la majeure partie de la variation sur la pression se fait au niveau de l'entrée de la rainure. La vitesse étant plus forte, il est logique que les dépressions et surpressions au niveau de l'entrée de la rainure soient plus fortes. La pression au niveau des points d'arrêt est elle aussi plus élevée. Les pertes de charge dans la rainure sont un peu plus fortes à grande vitesse. L'augmentation de  $P_t$  dans la rainure est beaucoup plus faible pour  $V=14.1$  m/s que pour  $V=10.58$  m/s. Le comportement en aval semble inchangé.

Pour la vitesse transversale, on constate que la seule différence majeure entre les deux courbes se situe au niveau de la rainure. Pour une vitesse élevée, la rainure permet une réduction beaucoup plus importante de la moyenne de  $V_y$ . Ce phénomène est logique en regard des problématiques de répartition de débit. On a vu (Fig. 3.34) que la répartition de débit entre la rainure et la zone supérieure n'était quasiment pas affectée par le niveau de vitesse amont. En conséquence, la vitesse axiale  $U_x^{rainure}$  dans la rainure augmente dans les mêmes proportions que la vitesse amont. Par le biais de la relation (3.15), la vitesse  $V_y$  se décale encore plus vers les valeurs très négatives.

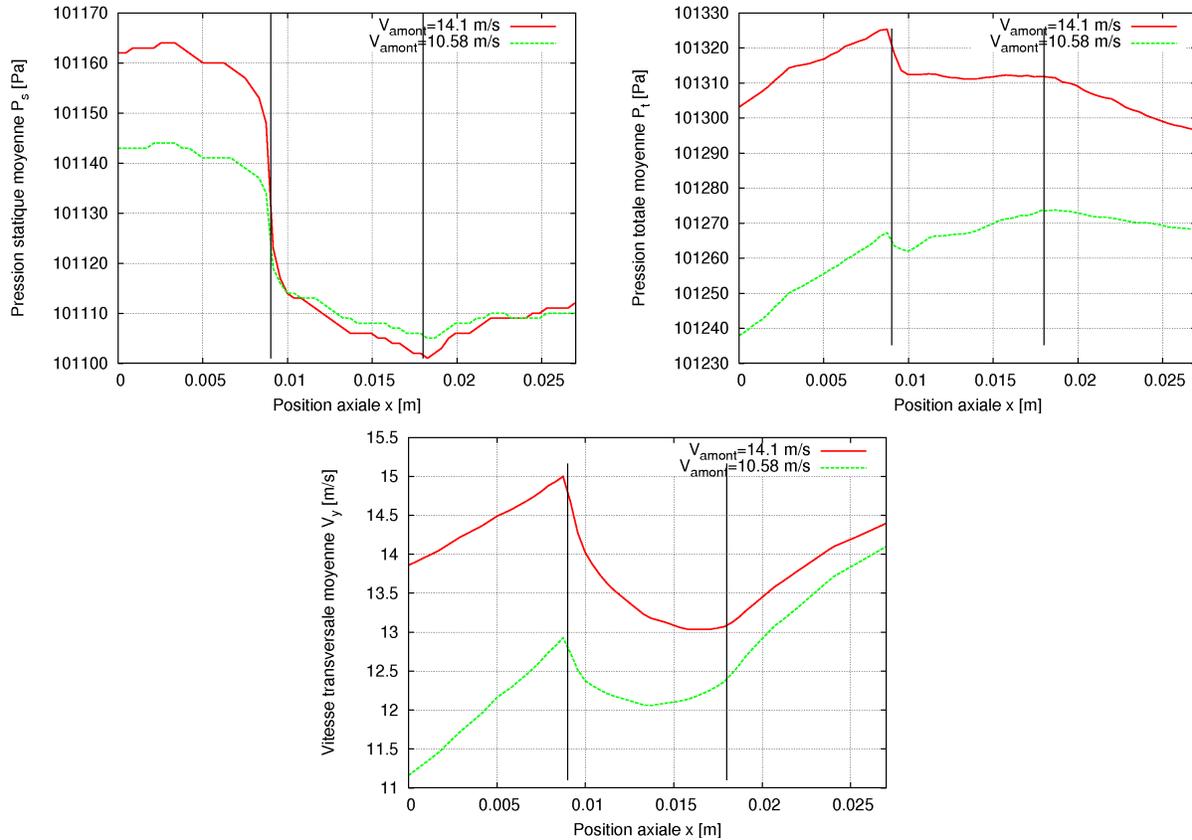


FIG. 3.76 – Evolution longitudinale des moyennes de  $P_s$ ,  $P_t$  et  $V_y$  - Vitesse amont

Pour le fluide dans la zone haute, l'accélération est un peu moins forte pour  $V=14.1$  m/s : on peut en effet remarquer que dans la partie de la courbe  $V_y = f(x)$  en amont des rainures, essentiellement soumise au phénomène de cisaillement, la pente est moins forte pour le cas  $V=14.1$  mm. Ce résultat est cohérent avec le comportement limite de l'écoulement dans un canal cisailé infiniment long : le fluide va accélérer progressivement jusqu'à atteindre une valeur  $V_y$  moyenne d'équilibre. Cette valeur maximale correspond à l'écoulement de Couette turbulent établi. Dans notre cas, comme le niveau de vitesse est plus élevé, l'écart avec la valeur d'équilibre est plus faible et on peut donc attendre une accélération  $\frac{dV_y}{dx}$  plus faible. En conséquence, pour  $V=14.1$  m/s, l'augmentation de vitesse dans la zone supérieure n'est plus suffisante pour compenser la diminution de  $V_y$  dans la rainure et on observe donc une forte diminution du niveau moyen global.

Sur l'évolution de  $P_t$ , on voit clairement que les structures dans les rainures sont plus dissipatives pour  $V=14.1$  m/s, et notamment au niveau de l'entrée. On vérifie par exemple sur le champ de vitesse que le décollement en entrée est un peu plus important pour les hautes vitesses. Les pertes en aval augmentent avec  $V$  en raison du mélange assez "violent" entre le fluide de la zone supérieure et celui venant de la rainure.

### 3.4.7.7 Récapitulatif sur l'étude de l'influence de chaque paramètre

Dans la section 3.4.7, nous avons étudié quantitativement l'influence de chacun des cinq paramètres géométriques ( $L$ ,  $w$ ,  $N$ ,  $\alpha$  et  $h$ ) sur les objectifs de pression statique  $\Delta P_s$ , de pression totale  $\Delta P_t$  et de giration  $\Delta V_y$ . On observe des comportements assez différents selon les paramètres, avec un antagonisme quasi systématique entre d'une part le critère  $\Delta P_s$ , et d'autre part les critères  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$ .

Les influences de chacun des paramètres sur les objectifs sont résumées dans le tableau [3.24]. Dans ce tableau, un "+" traduit une amélioration de l'objectif quand le paramètre associé augmente,

Paramètre	$\Delta P_s$	$\Delta P_t$	$\Delta V_y$
longueur $L$	+ (faible)	+ (faible)	0
largeur $w$	-	+	+
nombre $N$	-	+	+
angle $\alpha$	+	optimum $\alpha=100^\circ$	optimum $\alpha=100^\circ$
hauteur $h$	optimum(?) $h=2.5$ mm	+	+

TAB. 3.24 – Influences des paramètres sur les objectifs

un "-" signifiant pour sa part une dégradation de l'objectif considéré.

Nous avons aussi essayé de quantifier les effets d'une augmentation du débit sur le fonctionnement de la rainure. Il semblerait que les rainures soient nettement plus efficaces à haut débit : les trois objectifs considérés sont alors améliorés. On observe en particulier une nette augmentation des pertes.

Les résultats présentés dans la section 3.4.7 sont des résultats mono-paramétriques. Nous n'avons pas considéré ici de couplages entre les paramètres, ce qui aurait demandé un grand nombre de simulations supplémentaires, et donc un temps important. Afin d'optimiser le traitement de carter, ces couplages devront être pris en compte, ce qui nécessite d'utiliser une technique adaptée permettant de limiter le temps de calcul.

## 3.5 Synthèse sur l'étude détaillée du traitement de carter

### 3.5.1 Validation et analyse du nouveau traitement de carter

Nous nous sommes attachés à décrire dans cette partie un nouveau traitement de carter constitué d'un rainurage hélicoïdal du carter et destiné en premier lieu aux ventilateurs de refroidissement automobile. On a ainsi pu montrer que ce traitement de carter était pertinent. Il permet en particulier d'améliorer les caractéristiques de l'écoulement de jeu :

- Critère  $\Delta P_s$  : on améliore ce critère par rapport au canal sans traitement de carter. Le rainurage est cependant légèrement moins efficace qu'une simple obstacle circconférentiel du point de vue des pertes de charge.
- Critère  $\Delta V_y$  : le rainurage permet une réduction significative de la giration en sortie de jeu, en grande partie grâce à l'écoulement dans les rainures. Il surclasse aussi bien le canal sans traitement de carter que l'obstacle circconférentiel.
- Critère  $\Delta P_t$  : le rainurage améliore nettement cet objectif par rapport aux deux autres configurations.  $\Delta P_t$  traduisant les échanges énergétiques dans le jeu, on retrouve bien les améliorations

sur les deux autres objectifs : une augmentation des pertes de charge, couplée à une limitation de l'entraînement par la paroi mobile.

L'analyse du champ aérodynamique donne des réponses sur le fonctionnement du rainurage. La limitation de la giration en sortie est ainsi due à la déviation du fluide par les rainures, déviation qui peut être amplifiée par une série de structures tourbillonnaires. Ces tourbillons sont assez fortement couplés en raison de l'exiguïté de la géométrie.

L'analyse paramétrique de la géométrie a montré la sensibilité du champ aérodynamique aux différents paramètres. Il s'avère que plusieurs tourbillons présents au niveau des rainures sont assez sensibles aux mêmes paramètres, tel que l'angle de rainure  $\alpha$  ou la largeur  $w$ . L'étude de l'influence des paramètres géométriques sur les trois critères montre quelques spécificités comme un optimum de  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$  en fonction de l'angle  $\alpha$ . Compte tenu des couplages entre les tourbillons, il est assez difficile de prévoir le comportement de ces structures, et in fine des critères, en cas de variation simultanée de plusieurs paramètres.

### 3.5.2 Suite de l'étude

Pour la suite de l'étude, c'est à dire l'optimisation du traitement de carter en vue de l'utiliser sur le ventilateur de référence Valéo, il est nécessaire de disposer de techniques autorisant une évaluation rapide des géométries, ainsi que d'une méthode d'optimisation adéquate.

En effet, pour l'instant, tous les résultats présentés ont été obtenus sur la base de simulations "classiques" de l'écoulement utilisant le solveur Turb'Flow présenté partiellement au chapitre 2. Cette approche est générale et nécessaire afin de caractériser globalement les performances du traitement de carter sur l'espace paramétrique. Toutefois, en raison de la précision requise pour le dépouillement, la convergence de chaque simulation est assez longue, atteignant souvent une dizaine de jours. Dans ces conditions, il n'est pas possible de parcourir finement l'espace des paramètres afin de dégager une solution optimale.

Pour cette raison, on présentera dans le chapitre 4 les différentes techniques d'optimisation existant aujourd'hui, afin de montrer les avantages et défauts de chacune relativement au cas traité ici. On rappelle que le traitement de carter est ici caractérisé par trois objectifs, et cinq paramètres. Il nous faut donc choisir une technique qui soit adaptée à ce cas. On détaillera donc dans ce chapitre la méthode de paramétrisation adoptée pour pouvoir, à partir d'une géométrie de référence, reconstruire rapidement le champ aérodynamique pour d'autres géométries. Cette technique de reconstruction, qui repose sur le calcul des dérivées du champ aérodynamique de référence par rapport aux paramètres, fait en outre l'objet de quelques développements destinés à améliorer la précision de la reconstruction. On présentera enfin dans ce chapitre une technique de visualisation innovante adaptée à ce genre d'optimisation multi-paramétriques et multi-objectifs.



## Chapitre 4

# Méthodes pour l'optimisation et la paramétrisation

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons les techniques d'optimisation afin de choisir la méthode la mieux adaptée à l'optimisation du traitement de carter. On commencera par définir en 4.2 le cadre mathématique des techniques d'optimisation, en se concentrant plus particulièrement sur les problèmes multi-paramétriques et multi-objectifs.

Dans les sections 4.3 à 4.6, nous dresserons un panorama des différentes techniques d'optimisation possibles, en essayant de montrer les avantages et les inconvénients de chacune relativement au cas de l'optimisation du traitement de carter. On analysera un peu plus en détail les algorithmes génétiques (4.6), car il s'agit de la méthode la mieux adaptée à notre cas, et donc celle que nous avons retenue pour l'optimisation.

Dans la section 4.7, on s'intéressera à une technique de paramétrisation. Cette technique est implémentée dans le code paramétrique Turb'Opty. L'approche paramétrique autorise une prédiction rapide de l'écoulement pour n'importe quel jeu de paramètres donné. Cette technique est décrite ici car elle permet de contourner un des défauts majeurs associé aux algorithmes génétiques. Ces derniers demandent d'évaluer un très grand nombre de configurations, ce qui est souvent difficile avec une approche RANS classique en raison du temps de calcul requis.

Nous présenterons rapidement en 4.8 l'algorithme génétique retenu pour optimiser le traitement de carter. Il s'agit de l'algorithme baptisé NSGA-II.

Enfin, nous présenterons des techniques de post-traitement adaptées à des grandes populations d'échantillons. Une des caractéristiques des algorithmes génétiques est en effet de fournir une population optimale, parfois composée de plusieurs centaines d'individus. L'analyse d'une telle population ne peut se faire facilement qu'en adoptant des techniques adaptées.

### 4.2 Cadre général des méthodes d'optimisation

Cette section est consacrée à la définition du cadre des techniques d'optimisation. On définira donc proprement les problèmes d'optimisation, ainsi que les notions de dominance qui sont fondamentales pour les problèmes d'optimisation multi-objectifs.

La notion même d'optimisation peut paraître de prime abord assez triviale car il s'agit d'une démarche courante, que chacun est amené à effectuer sur un grand nombre de problèmes. Elle est intimement liée au choix, puisque ce dernier se fait en se basant sur la meilleure satisfaction possible de critères établis par l'acteur, à savoir une optimisation de la solution choisie vis à vis de ces critères.

Néanmoins, de manière plus ou moins inconsciente, nous effectuons ces optimisations en suivant un certain nombre de règles et en appliquant naturellement des procédures bien précises et définies, selon la complexité du problème envisagé.

Dans le cas le plus général possible, une optimisation vise à répondre à plusieurs critères distincts, souvent contradictoires, en s'appuyant sur plusieurs paramètres découplés entre eux. On entend par paramètres découplés des paramètres qui ne modifient pas de la même manière la situation à optimiser ; on évitera ainsi de prendre simultanément un paramètre et son opposé. Dans ces conditions, il existe souvent non pas un optimum, mais plutôt un ensemble de solutions optimales, ce cas de figure étant décrit plus précisément dans la suite. D'un point de vue strictement pratique, on ne peut utiliser souvent qu'une seule solution, ce qui implique alors de faire un nouveau choix parmi ces optima. Cette phase est laissée à l'utilisateur qui prendra en compte des informations de niveau supérieur, non directement impliquées dans l'optimisation, afin de déterminer le dessin le plus pertinent parmi les optima.

A titre d'exemple, on donnera le cas d'un bureau d'étude dessinant un ventilateur en considérant simultanément le taux de pression et le débit au travers de la roue. Si on suppose que le taux de pression n'augmente que lorsque le débit diminue, on voit donc qu'il existe un ensemble de configurations réalisant un compromis entre la compression et le débit. Pour faire son choix, le concepteur devra prendre en compte des critères supplémentaires comme l'importance de la plage de fonctionnement du système, la robustesse de la configuration, le prix de construction, etc... Ces informations n'entrent pas directement en compte dans la détermination du ventilateur et sont propres à "la sensibilité" du concepteur, ou plutôt au contexte général de la conception.

Nous allons présenter les différentes approches qui prévalent dans les problèmes d'optimisation, ainsi que les principales définitions mathématiques sur lesquelles reposent toutes les techniques.

### 4.2.1 Notion d'optimisation

On définit dans un premier temps les termes qui seront utilisés par la suite. On qualifiera de *paramètre* ou *variable de dessin*, *variable de décision*, *variable de conception* les données (scalaire ou vectorielle)  $\mathbf{x}$  modifiées par le processus d'optimisation pour aboutir à une ou plusieurs solutions optimales. On appelle *critère*, *fonction objectif*, *fonction coût* ou *fonction d'adéquation* les fonctions qui sont minimisées par l'optimisation. Enfin, on désigne par *contraintes* les relations supplémentaires que doivent vérifier les paramètres tout au long du processus d'optimisation.

Dans ce qui suit, on considérera comme problème d'optimisation le cas général suivant :

$$(P_{\text{général}}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{minimiser} & f_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, I \\ \text{tel que} & g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, J \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{avec} & x_p^L < x_p < x_p^R \quad p = 1, \dots, P \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Les problèmes d'optimisation sont donc réduits à la minimisation de fonctions critères définies dans des espaces munis de relations d'ordre, les paramètres étant soumis à un ensemble de contraintes dont la forme générale peut être exprimée comme une relation de supériorité et/ou d'égalité. Les différentes techniques utilisables pour tenir compte de tous les aspects du problème

seront présentées plus loin. On appellera *espace paramétrique* l'espace auquel appartient le vecteur paramètre  $\mathbf{x}$  et *espace objectif* l'espace de définition des critères à minimiser. Ensuite, afin de disposer d'une approche unifiée, on supposera, sans perte de généralité, que la ou les fonctions objectifs considérées doivent toujours être minimisées. Le cas d'un critère maximisable se traite de manière triviale en multipliant la fonction associée par -1.

Dans le cas où les  $f_i$ ,  $g_j$  et  $h_k$  seraient linéaires, le problème  $P_{\text{général}}$  est dit multi-objectifs linéaire. Selon Deb [28], il existe dans ce cas un certain nombre de propriétés mathématiques assurant la convergence des méthodes d'optimisation. En revanche, dans les cas non linéaires, la convergence des méthodes ne peut être prouvée.

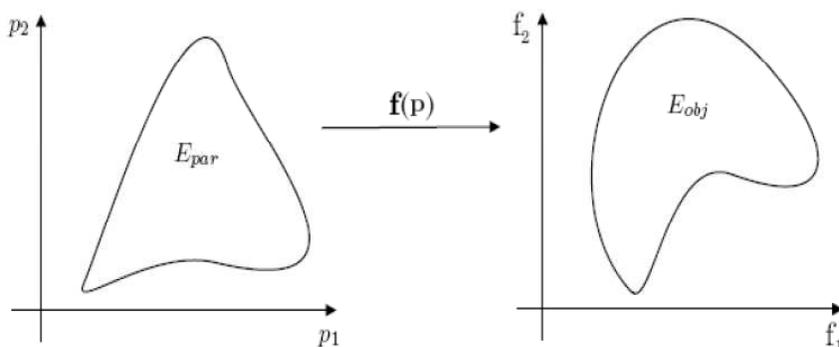


FIG. 4.1 – Espace paramétrique et espace objectif

La figure (Fig. 4.1) illustre les différents espaces sur lesquels on travaille, dans le cas d'une optimisation bi-paramétrique bi-objectifs ( $I=P=2$ ). En fonction des différents critères et contraintes imposées, soit directement sur  $\mathbf{x}$ , soit indirectement via les  $g_j$  et  $h_k$ , les ensembles  $E_{par}$  et  $E_{obj}$  ne sont pas forcément fermés, ni même continus. Par abus de langage, on assimilera par la suite les espaces objectifs et paramétriques aux ensembles  $E_{par}$  et  $E_{obj}$  qui définissent la zone "faisable" de ces espaces, la seule zone intéressante en pratique pour l'utilisateur.

#### 4.2.2 Optimisation Multi-objectifs - Optimalité de Pareto

Il s'agit du cas envisagé dans notre étude, puisque l'optimisation du traitement de carter comporte, rappelons-le, trois objectifs distincts. Pour les techniques spécifiques à l'optimisation mono-objectif, le lecteur se reportera à l'annexe C. Dans le contexte de l'optimisation multi-objectifs, le problème  $P_{\text{général}}$  revient à minimiser simultanément plusieurs objectifs en tenant compte de certaines contraintes. Sauf cas particuliers, qui seront détaillés plus loin, il n'existe pas de solution unique à ce problème. Pour illustrer ce propos, considérons l'exemple suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{minimiser} \left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = 1/x \\ \text{et} \\ f_2(x) = x \end{array} \right. \\ \text{soumis à } x \geq 0.1 \end{array} \right.$$

On voit clairement que la minimisation de  $f_1$  nécessite la plus grande valeur possible de  $x$ , au contraire de l'amélioration de  $f_2$ . Selon ses besoins, on pourra soit privilégier une solution minimisant

$f_2$ , soit une autre minimisant  $f_1$ . Du strict point de vue du processus d'optimisation, il n'est donc pas possible de départager ces différentes solutions. On perçoit ainsi au travers de cet exemple très simple la principale difficulté émergeant des optimisations multi-objectifs, à savoir la multiplicité des solutions optimales pour un problème donné. Cette limite provient du caractère contradictoire des critères. La notion de solution exacte est remplacée par celle de compromis entre les différents critères.

Dans le cas où les fonctions objectifs ne sont pas contradictoires, la cardinalité de l'espace des objectifs chute à 1 et il redevient possible de trouver une solution unique au problème. Dans l'exemple précédent, en remplaçant  $f_1$  par  $f_1(x) = x^2$ , la solution optimale est déterminée de manière triviale : il s'agit de  $x=0.1$ .

En considérant le cas le plus général possible, on introduit maintenant la notion de dominance de Pareto pour décrire les problèmes multi-objectifs. On définit ainsi :

**Définition 4.1 :** [DOMINANCE DE PARETO]

Soient deux individus  $\mathbf{x}_a$  et  $\mathbf{x}_b$  de l'espace paramétrique.  $\mathbf{x}_a$  domine  $\mathbf{x}_b$  ( $\mathbf{x}_a \preceq \mathbf{x}_b$ ) au sens de Pareto si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, I] \quad & f_i(\mathbf{x}_a) \leq f_i(\mathbf{x}_b) \\ \exists j \in [1, I] \quad & \text{tel que } f_j(\mathbf{x}_a) < f_j(\mathbf{x}_b) \end{aligned}$$

La notion de dominance de Pareto introduit la comparaison de deux individus sur tous leurs critères. Elle établit ainsi une relation d'ordre dans l'espace paramétrique au moyen de relations exprimées dans l'espace objectif, le seul muni de relations d'ordre classiques (une par dimension de ce dernier espace). Par la suite, afin de considérer les relations de dominance entre les individus, notamment du point de vue graphique, on se référera en priorité à l'espace des objectifs, celui-ci servant de base à l'établissement de la dominance, mais on gardera à l'esprit que ces relations sont définies entre individus de l'espace paramétrique. La définition précédente est souvent qualifiée de faible dans la mesure où des individus peuvent donner quelques critères égaux tout en étant dominés. On définit donc une relation de dominance forte.

**Définition 4.2 :** [DOMINANCE FORTE DE PARETO]

Soit deux individus  $\mathbf{x}_a$  et  $\mathbf{x}_b$  de l'espace paramétrique.  $\mathbf{x}_a$  domine strictement  $\mathbf{x}_b$  ( $\mathbf{x}_a \prec \mathbf{x}_b$ ) au sens de Pareto si et seulement si :

$$\forall i \in [1, I] f_i(\mathbf{x}_a) < f_i(\mathbf{x}_b)$$

En pratique, la définition la plus utilisée est la première, car il s'agit aussi de la plus générale. Ces deux relations sont par nature asymétriques ( $a \preceq b \not\Leftarrow b \preceq a$ ) et transitives (si  $a \preceq b$ ,  $b \preceq c$ , alors  $a \preceq c$ ). Si aucune de ces deux définitions n'est satisfaite par deux individus, ce qui correspond aux cas suivants :

- Selon les conventions de la définition de dominance, il existe au moins un objectif  $k$  pour lequel  $f_k(\mathbf{x}_a) > f_k(\mathbf{x}_b)$
- Tous les critères ont la même valeur pour  $\mathbf{x}_a$  et  $\mathbf{x}_b$

les individus ne se dominent pas et peuvent en conséquence être considérés comme équivalents au sens de Pareto.

Sur la figure (Fig. 4.2) on illustre de manière graphique la notion de dominance appliquée avec un espace objectif à deux dimensions. Dans cet espace, l'individu de référence est représenté par le point noir à l'intersection des quatre cadrans. Il domine strictement les individus du cadran en

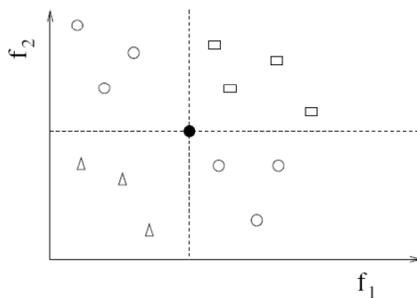


FIG. 4.2 – Illustration 2D de la notion de dominance

haut à droite, représentés par des rectangles. Il est aussi strictement dominé par ceux du cadran en bas à gauche, représentés par des triangles. Enfin, il n'existe pas de relation de dominance avec les individus des deux cadrans restants. Lorsqu'elle existe, la dominance de  $a$  sur  $b$  est faible ou stricte, selon que  $b$  se situe ou non sur une frontière inter-cadrans issue de  $a$ .

A ce niveau on voit apparaître la possibilité d'ordonner les individus, ce qui introduit naturellement la décomposition d'une population  $E$  en un ensemble de groupes, appelés aussi *fronts*, classés par ordre de dominance.

**Définition 4.3 :** [FRONT AU SENS DE PARETO]

Soit un espace  $E_{par}$  muni d'une relation de dominance au sens de Pareto. On définit un front comme l'ensemble des individus  $x \in E_{par}$  tels qu'il n'existe pas de relation de dominance entre eux.

On introduit ensuite la notion de rang entre les différents fronts constituant la population.

**Définition 4.4 :** [RANG DES FRONTS AU SENS DE PARETO]

Soit un espace  $E_{par}$  muni d'une relation de dominance au sens de Pareto. Soit deux sous-ensembles disjoints  $A$  et  $B$  d'éléments de  $E_{par}$  tels que  $A$  et  $B$  constituent des fronts au sens de Pareto.  $A$  est de plus haut rang que  $B$  si et seulement si

$$\forall x \in A, \forall y \in B, x \preceq y$$

De cette manière, on peut introduire la notion la plus importante relativement au problème d'optimisation. On définit ainsi le *front de Pareto*, ou *front Pareto-optimal* comme étant le front de plus haut niveau au sein de la population.

**Définition 4.5 :** [FRONT PARETO-OPTIMAL]

Soit un espace  $E_{par}$  muni d'une relation de dominance au sens de Pareto. Le front de Pareto  $P$  est défini par :

$$\Pi = \{x \in E_{par} \mid \nexists x' \in E_{par} \mid x' \preceq x\}$$

Ce front a la particularité de ne posséder que des individus non dominés et dominant le reste de la population. Il s'agit des *optima de Pareto*, ou bien encore des *solutions Pareto-optimales*. C'est bien évidemment ce front qu'on cherche à atteindre lors d'une optimisation, puisqu'il s'agit de l'ensemble des individus réalisant les meilleurs compromis possibles entre les différents critères.

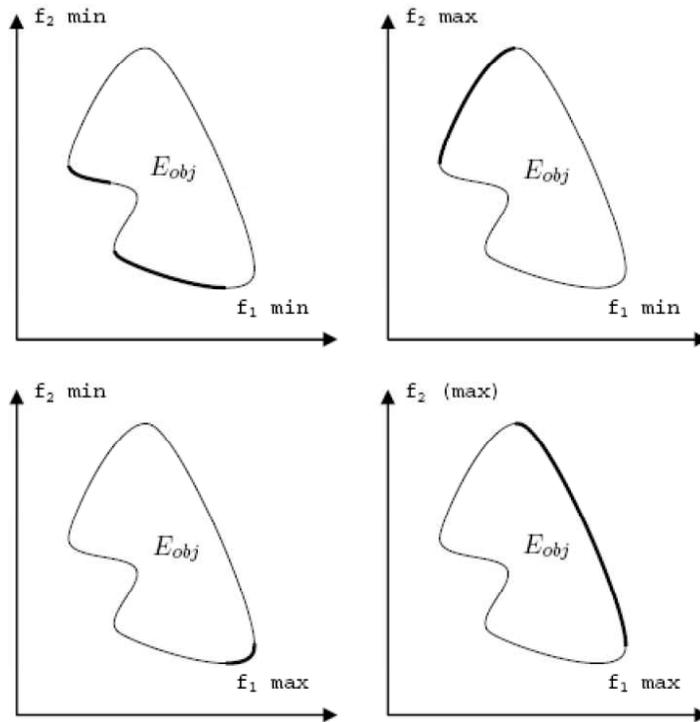


FIG. 4.3 – Localisation des fronts Pareto-optimaux dans différentes configurations

A titre d'exemple, la figure suivante (Fig. 4.3) donne la forme et la position du front de Pareto pour une optimisation bi-objectifs ( $I=2$ ) dans plusieurs cas, selon que l'on minimise ou maximalise les critères.

On voit ainsi aisément que le front de Pareto est limité par un ensemble de solutions pour lesquelles la tangente à la frontière de  $E_{obj}$  est parallèle à l'une ou l'autre des directions mono-objectif. En ce sens, la courbure de cette frontière joue un rôle très important dans la définition du front. On peut notamment obtenir des fronts de Pareto discontinus comme illustré par le cas où  $f_1$  et  $f_2$  sont minimisées. Il n'existe cependant pas de règle générale basée sur la convexité/concavité des ensembles permettant de prédire la continuité du front de Pareto.

On notera ici que le front de Pareto peut aussi être discontinu dans l'espace des objectifs si l'ensemble des solutions faisables  $y$  est représenté comme la réunion de plusieurs sous-ensembles disjoints. Il s'agit d'un cas de figure assez peu fréquent, généré notamment par des fonctions objectifs discontinues.

De la même façon que le cas classique où  $I = 1$ , il est possible de définir des fronts Pareto-optimaux locaux.

**Définition 4.6 :** [FRONT PARETO-OPTIMAL LOCAL]

Soit un espace  $E_{par}$  muni d'une relation de dominance au sens de Pareto. Le front  $P_l$  est un front de Pareto local si et seulement s'il existe une valeur  $\epsilon$  telle que :

$$\Pi_l = \{\mathbf{x} \in E_{par} \mid \nexists \mathbf{x}' \in E_{par} \mid \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \leq \epsilon \text{ et } \mathbf{x}' \preceq \mathbf{x}\}$$

Graphiquement, ces fronts se traduisent notamment par des replis de la frontière de  $E_{obj}$  en

arrière du front Pareto-optimal global.

Il est possible de généraliser la notion de dominance en s'affranchissant du concept de Pareto. Cela passe par une redéfinition de la relation de dominance d'un point de vue géométrique (dominance de cône), ou par l'utilisation d'équilibres issus de la théorie des jeux. Quelques unes de ces définitions sont présentées en annexe C. Elles ne seront pourtant pas retenues car elles présentent l'inconvénient d'être assez complexes à mettre en œuvre.

Nous allons maintenant effectuer un panorama des différentes techniques générales d'optimisation qui peuvent être envisagées pour notre étude. On cherchera la technique la mieux adaptée à notre cas.

### 4.3 Méthodes Inverses

On commencera ce panorama des différentes techniques d'optimisation en se focalisant sur les méthodes inverses. Dans la pratique industrielle, il est extrêmement courant de devoir répondre à un problème défini par un cahier des charges précis. Pour le dessin d'une turbomachine par exemple, on peut souhaiter obtenir une distribution particulière de pression sur l'aube ou un profil de vitesse précis, voire une géométrie "moyenne", ces objectifs ayant été déterminés en amont en se basant sur des méthodes analytiques de dessin et/ou l'expérience de concepteurs.

Une fois ce problème posé, il reste à définir la forme ou les conditions de fonctionnement qui vont effectivement amener à l'objectif. C'est le cœur même des méthodes d'optimisation *inverses*, ainsi qualifiées car partant d'une spécification imposée par l'utilisateur pour aboutir à la définition de la géométrie et des conditions, à l'inverse de la démarche classique qui consiste à initialiser une géométrie puis à la modifier pour aboutir à la solution optimale.

Bien évidemment, ces méthodes inverses ne conduisent pas forcément à une solution Pareto-optimale du point de vue de la physique globale, mais plutôt vers une solution qui sera optimale du point de vue des préférences de l'utilisateur, ce qui peut donc être considéré comme un biais dans la recherche.

Il existe dans la littérature un grand nombre de méthodes dites inverses, certaines présentant néanmoins de fortes similitudes avec les méthodes d'optimisation précitées. On distinguera dans la suite les méthodes réellement inverses des approches de type inverse, les premières faisant intervenir un traitement mathématique spécifique du problème, les secondes n'étant qu'une reformulation d'un problème traité par une méthode directe ou métaheuristique.

#### 4.3.1 Méthode inverse

Dans une approche véritablement inverse, le champ aérodynamique est calculé en respectant les contraintes imposées par le cahier des charges, et on n'en déduit qu'ultérieurement la forme de la géométrie ou les conditions de fonctionnement. Dans le cadre d'une conception géométrique, ce qui est le cas de la très grande majorité des problèmes traités, cette approche est fondamentalement restreinte à une approche de type Eulérienne.

De manière canonique, un problème inverse géométrique se pose comme suit :

1. On définit un écoulement "moyen" grâce à une ligne de courant moyenne par exemple.
2. On définit une ou plusieurs sections géométriques de référence délimitant l'écoulement sur certaines zones de l'espace. Classiquement, on spécifie des sections amont et aval d'où part

(ou arrive) la ligne de courant moyenne. Le nombre et la position de ces sections doivent être compatibles avec la physique de l'écoulement envisagée.

3. On définit des conditions aérodynamiques en nombre suffisant pour pouvoir fermer mathématiquement le problème.

Supposons que l'on ait réussi à déterminer un champ aérodynamique répondant aux données du problème. On cherche alors la position des parois solides qui soient compatibles avec cet écoulement. Pour une approche Eulérienne, on sait que le champ de vitesse est tangent à une paroi solide. En conséquence, en traçant les lignes de courant issues du contour de la section de référence, on détermine la paroi compatible avec l'écoulement (Fig. 4.4). En revanche, pour une approche visqueuse la vitesse est nulle à la paroi : il n'existe donc pas de ligne de courant associée ; la détermination de la paroi est alors impossible.

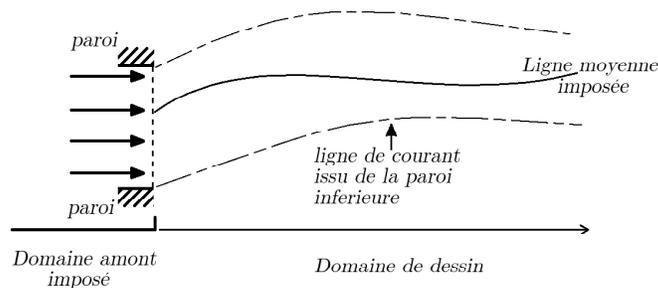


FIG. 4.4 – Fonctionnement conceptuel des méthodes inverses

On remarquera que l'explication qui vient d'être donnée convient à un grand nombre de problèmes. Dans le cadre des fluides parfaits, il est possible de faire une correspondance simple entre les différentes grandeurs aérodynamiques. Pour une turbomachine, on peut par exemple relier directement la distribution méridienne de pression au champ de vitesse.

Le point critique de ces méthodes inverses est donc de déterminer l'écoulement en fonction des données initiales. De nombreuses formulations ont été proposées. On retiendra celle de Matjinouche [127] construite sur une extrapolation du champ en série de Taylor, et Keller [100].

On remarquera que ces méthodes sont spécialement bien adaptées aux écoulements supersoniques. En effet, moyennant la donnée de la forme d'une onde de choc et des conditions amont, on peut facilement déterminer l'écoulement en aval de ce choc. Cette technique est utilisée par Jones [95, 94] pour déterminer la forme d'un corps supersonique en "découpant la paroi" dans les lignes de courant, en aval d'un choc oblique et issues du bord d'attaque.

La principale limite d'utilisation des méthodes inverses est l'hypothèse d'un écoulement non visqueux. Elles ne sont donc pas bien adaptées aux écoulements réels à basse vitesse. Tiow et al. [178] proposent une solution (partielle) à ce problème en introduisant un modèle de contrainte visqueuse au sein du modèle Euler, mais ils introduisent aussi un processus itératif de détermination de la forme. Ce processus allonge notablement le temps de convergence, et il est assez difficile à régler.

### 4.3.2 Approche inverse

Parallèlement aux méthodes inverses, on trouve aussi des approches que nous qualifierons d'inverses puisqu'elles introduisent un traitement inverse du problème d'optimisation au sens où l'on

cherche seulement à minimiser l'écart entre la distribution d'une variable  $X$  et une distribution souhaitée  $\bar{X}$ .

Dans ce cas de figure, la fonction objectif peut être génériquement définie comme :

$$f_{inv} = \int (X - \bar{X}) dv$$

De cette manière, l'approche inverse n'est ni plus ni moins qu'un problème d'optimisation traitable par une méthode directe ou métaheuristique. Jameson et al. [85, 89, 185] ont fait le choix d'une résolution directe avec un calcul du gradient par état adjoint, mais il existe d'autres exemples pour lesquels on emploie un algorithme génétique [165].

**Synthèse sur les méthodes inverses** Une méthode réellement inverse n'est pas utilisable pour l'optimisation du traitement de carter car elle suppose que l'écoulement est non visqueux, ce qui est faux dans le cas du rainurage.

L'avantage des approches inverses est qu'elles autorisent un traitement visqueux classique puisque les optimiseurs itératifs ne requièrent aucune hypothèse sur cet aspect. En outre, elles sont plus robustes au sens où elles acceptent des spécifications irréalistes. Si la distribution imposée n'est pas valable physiquement, l'optimisation s'en approchera le plus possible en restant physique. Une méthode inverse peut dans une telle configuration ne donner aucun résultat.

Les approches inverses ne sont cependant pas idéales pour l'optimisation du traitement de carter car elles introduisent implicitement un biais : les objectifs vers lesquels doit tendre l'optimisation résultent d'un choix subjectif de l'utilisateur. D'autre part, elles ne sont pas capables de trouver l'ensemble du front de Pareto, ce qui limite la portée de l'optimisation. On ne retiendra donc pas ces méthodes pour l'optimisation du rainurage.

## 4.4 Méthodes d'optimisation directes

Après les méthodes inverses, la deuxième grande classe de techniques d'optimisation que nous étudierons est celles des méthodes d'optimisation directes.

On commencera par remarquer qu'un processus d'optimisation repose avant tout sur un parcours de l'espace des paramètres. Ce parcours tient compte plus ou moins directement de l'évolution des objectifs relativement à ces mêmes paramètres. Cette prise en compte des critères de calcul peut se faire selon plusieurs méthodes, ce qui introduit donc différentes démarches d'optimisation.

De manière schématique, on trouve d'une part les méthodes reposant sur l'évaluation directe de la sensibilité des critères par rapport aux objectifs. Ces méthodes, dites *directes*, font essentiellement appel à des calculs de gradient. D'autre part, certaines approches utilisent une vision dérivée des mécanismes évolutionnistes pour trouver les solutions optimales. Il s'agit principalement des algorithmes dits génétiques. Dans cette dernière voie, les fonctions objectifs retenues par l'utilisateur ne sont exploitées qu'au travers de l'évaluation et du classement des individus. Les approches évolutionnaires seront présentées en 4.5

### 4.4.1 Principe des méthodes directes

De manière totalement intuitive, lorsqu'on est confronté à une configuration non-optimale répondant à un problème donné, on cherche à l'améliorer via une correction. Cette correction est d'autant

plus facile à trouver que l'on connaît un peu les variations des objectifs autour de la configuration étudiée. Il est cependant rare qu'une seule correction suffise pour arriver à la solution optimale, et il est donc nécessaire de progresser par une série de corrections/évaluations. Ce simple exemple illustre toute la philosophie des méthodes de descente : elles font évoluer itérativement des individus jusqu'à obtenir la solution optimale. Le point crucial est bien la correction qui est appliquée à chaque itération.

Supposons que l'on soit confronté à un certain problème ( $P_{optim}$ ) tel que défini en (C.2). On ne considère en particulier qu'une seule fonction objectif scalaire  $f$ . On peut alors définir des iso-surfaces, en fonction de l'objectif, dans l'espace des paramètres. L'optimisation équivaut alors à parcourir ces iso-surfaces à la recherche de celle de plus bas niveau. On parle aussi de techniques de "descente". Graphiquement, le processus peut être représenté par le déplacement du point d'étude au travers de ces iso-surfaces. La figure suivante (Fig. 4.5) donne une illustration pour le cas  $P=2$ .

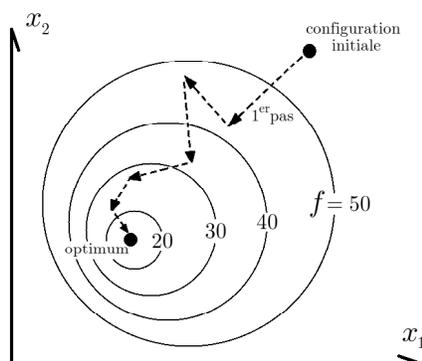


FIG. 4.5 – Représentation de la direction de descente - cas bi-paramétrique

On voit immédiatement que la découverte de la zone optimale se fera d'autant plus rapidement que chaque pas est orienté dans le sens de la descente. Une trajectoire qui resterait à peu près parallèle aux iso-surfaces n'a que peu de chance de converger. Par définition, le gradient de la fonction objectif est orthogonal aux iso-surfaces. Il est donc naturel de l'utiliser pour déterminer la direction de descente. On parlera alors de méthode de gradient d'ordre  $o \geq 1$  selon que l'on considère ou non les dérivées suivantes de la fonction objectif. Ces méthodes font partie de la classe générale des *approches déterministes*.

Les méthodes directes sont des méthodes itératives. La boucle d'itération repose en partie sur le calcul du gradient d'une fonction objectif et peut s'écrire canoniquement sous la forme :

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \downarrow \cdot \vec{\nabla} f^i \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{x}^i$  est le point de l'espace paramétrique retenu à l'itération  $i$ ,  $\downarrow$  est un scalaire, et  $\vec{\nabla} f$  est le gradient d'une fonction objectif (de préférence la fonction objectif à optimiser) évalué au point  $\mathbf{x}^i$ .

L'optimum est trouvé par une méthode directe quand  $\vec{\nabla} f^i$  est nul.

Pour plus de détails sur ces méthodes, on se reportera au petit panorama des méthodes directes présenté dans l'annexe D.

### 4.4.2 Limites principales des méthodes de descente

Les méthodes directes sont cependant soumises à plusieurs limites notables :

- Elles sont par construction limitées à une optimisation mono-objectif. Si plusieurs critères sont considérés simultanément, il existe alors plusieurs gradients possibles et donc plusieurs choix possibles pour la direction de descente. La solution la plus simple est de prendre une direction égale à la somme pondérée de ces différents gradients :

$$\vec{\delta} = \sum_I \omega_i \vec{\nabla} f_i$$

L'opérateur  $\vec{\nabla}$  étant linéaire, cette approche équivaut donc à utiliser une unique fonction de pondération agrégée telle que définie précédemment dans une descente selon la plus forte pente. On retrouve alors tous les problèmes liés à cette dernière méthode. Pour les descentes au second ordre, l'adaptation est sensiblement la même, la matrice Hessienne étant évaluée pour la fonction agrégée. Il existe néanmoins quelques variantes dans la définition d'une fonction objectif unique. On retiendra en particulier la méthode de Gauss-Newton [1] pour laquelle :

$$f_{\text{agrégée}} = \sum_{i=1}^I [f_i(\mathbf{x})]^2$$

Cette définition de  $f_{\text{agrégée}}$  permet de faire quelques simplifications dans le calcul de la Hessienne, mais l'algorithme de descente reste similaire à celui d'une méthode de Newton classique.

- Elles ne renvoient qu'une seule configuration optimale. Comme cela a été précisé auparavant, on ne travaille que sur une seule fonction objectif, qui est elle-même utilisée pour évaluer, et si possible améliorer, un seul individu. On peut imaginer un algorithme procédant à l'amélioration simultanée de plusieurs individus en utilisant les techniques déjà décrites. Cet algorithme n'est cependant qu'un ensemble d'optimisations menées parallèlement et indépendamment, puisque chaque correction se base sur des informations obtenues *localement* sur la zone voisine du point à améliorer, sans tenir compte des autres solutions traitées.
- Elles sont sensibles aux extrema locaux. Mathématiquement, la convergence est assurée par la décroissance de l'amplitude de la correction  $\vec{\delta}$  au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'extremum. En particulier, si  $\vec{\delta}$  est proportionnelle au gradient de  $f$ , la convergence est assurée au voisinage d'un extremum au sens mathématique du terme, puisque par définition, on a alors la relation bien connue :

$$\forall p \in [1, \dots, P], \left. \frac{\partial f}{\partial x_p} \right|_{\text{extremum}} = 0$$

Cependant, il n'existe pas de critère mathématique simple permettant, à partir d'informations locales, de déterminer si un extremum est local ou global. En conséquence, la convergence risque de se focaliser sur le premier point extrême trouvé. Le problème se réduit alors au parcours de la cuvette d'influence de chaque extremum.

- Par définition, ces méthodes ne sont applicables qu'à des cas où  $f$  est continue et dérivable, voire deux fois dérivable. Elles doivent en particulier faire appel à des approximations des différentielles successives de  $f$  afin de garder une formulation robuste, ce qui induit bien évidemment une erreur dans l'évaluation des directions de descente. Elles sont donc réputées

pour ne pas converger (ou converger très médiocrement) dans les cas où la fonction objectif est discontinue. De manière plus générale, elles sont aussi connues pour avoir des performances très variables en fonction des cas considérés.

**Synthèse sur les méthodes directes** A la vue de toutes ces limitations, nous avons choisi de ne pas utiliser de méthodes directes. Les optimisations envisagées dans cette étude sont multi-paramétriques et surtout multi-objectifs, ce qui pose un problème évident de traitement avec les méthodes directes. D'autre part, la mauvaise gestion des extrema locaux par ces méthodes est aussi problématique. Dans le cas envisagé, c'est à dire le ventilateur de refroidissement automobile (cf. chapitre 3), nous ne sommes pas en mesure de garantir l'absence d'extrema locaux. Les variations et les mécanismes observés sont suffisamment complexes pour générer ce type d'optima.

## 4.5 Méthodes métaheuristiques - méthodes d'ordre 0

La troisième et dernière grande classe de méthodes d'optimisation est celle des méthodes *métaheuristiques*, aussi appelées *méthodes d'ordre 0*. Dans cette classe, les algorithmes utilisés pour le parcours de l'espace paramétrique ne font pas appel à des informations de haut niveau, telles que les gradients, mais se basent sur une **population** qui évolue au cours du temps. En règle générale, ces méthodes sont inspirées de mécanismes naturels, physiques, biologiques et sociologiques. L'évolution va du simple choix aléatoire à une simulation de population soumise à une pression sélective. Toutes ces approches ont en commun d'utiliser des phénomènes statistiques et sont généralement appelées *stochastiques*. Comme pour les méthodes directes, la progression vers les optima s'effectue itérativement.

L'un des plus gros inconvénients des méthodes directes est leur sensibilité aux problèmes présentant des optima locaux, et plus généralement aux problèmes d'optimisation multimodaux. Par construction, ces méthodes sont limitées à l'exploration de l'espace au travers d'un seul individu et ne sont donc pas capables de repérer plusieurs minima simultanément, seule condition permettant de qualifier le caractère local ou global.

De cette limitation évidente vient le besoin de générer des méthodes robustes, aptes à traiter des problèmes multimodaux. Ainsi sont apparues les méthodes métaheuristiques. Elles sont dans leur très grande majorité basées sur un ensemble de solutions qui sont modifiées progressivement pour aboutir au front de Pareto. De cette manière, on peut espérer placer des individus dans plusieurs "bassins" optimaux et ainsi décrire une bonne partie du front de Pareto.

### 4.5.1 Méthodes évolutionnaires principales

On se limitera ici aux méthodes qui font intervenir une évolution de la population copiée sur les mécanismes *biologiques* régissant l'évolution des êtres vivants.

#### 4.5.1.1 Marche au hasard

A ce niveau, on citera ce qui est sans doute la plus simple des méthodes métaheuristiques en général : la *marche au hasard* ("random walk"). Le principe de cette approche est de sélectionner aléatoirement initialement un individu de la population et de le modifier avec une perturbation

d'amplitude et de direction aléatoires. Si le nouvel individu ainsi obtenu est meilleur que l'ancien, il le remplace et subit à son tour une modification, sinon on recommence la perturbation à partir de l'ancien. On parcourt ainsi l'espace paramétrique de manière totalement erratique. On notera que la méthode peut être appliquée à une population complète, cependant tous les individus évolueront indépendamment.

Par certains aspects, cette méthode est une sorte de "chaînon manquant" entre les méthodes de recherche directe et les méthodes évolutionnaires; elle fait intervenir une modification qui dépend uniquement de l'individu traité, comme les méthodes directes, mais elle introduit aussi l'utilisation de population, la notion d'élitisme (cette notion sera définie plus loin) ainsi que d'un mécanisme typiquement biologique, la mutation (i.e. une modification aléatoire). On comprend aisément que cette méthode est intrinsèquement limitée en terme de convergence car la progression vers le front de Pareto peut demander beaucoup d'itérations et on ne peut être sûr que tous les individus ne tombent pas sur un optimum global. Elle n'est donc pas couramment utilisée.

#### 4.5.1.2 Algorithmes génétiques

Pour tenter d'éviter les travers de la marche au hasard, des algorithmes plus évolués baptisés *algorithmes évolutionnaires* ("Evolutionary algorithms") ont été introduits. Cette classe compte de nombreux représentants, qui se basent sur des approches différentes. L'une des sous-classes la plus représentative et utilisée est celle des **algorithmes génétiques**. Ces algorithmes se prêtent particulièrement bien à l'optimisation sur des cas multi-paramétriques et multi-objectifs. Ils convergent assez efficacement vers le front de Pareto, et peuvent traiter des populations de très grande taille, ce qui assure au final une bonne description du front. Ils sont en outre assez simples d'emploi et robustes.

Ce sont ces algorithmes qui ont été sélectionnés pour l'optimisation du traitement de carter. Ils seront décrits plus en détail dans la section 4.6.

#### 4.5.1.3 Stratégie d'évolution

Parmi les algorithmes évolutionnaires, on peut également citer les stratégies d'évolution ("evolution strategy"), introduites par Rechenberg [153] et Schwefel [164]. Ces méthodes sont définies par la donnée de deux entiers,  $\mu$  et  $\lambda$ , qui caractérisent respectivement la taille de la population traitée et le nombre de nouveaux individus créés à chaque itération. Elles sont notées  $(\mu+\lambda)$ -ES. Leur principe de base est simple : pour créer un nouvel individu, on commence par sélectionner un "parent"  $\mathbf{x}$  au hasard parmi les  $\mu$  disponibles. On lui applique alors une modification selon la formule :

$$\mathbf{x}_{mod} = \mathbf{x} + \mathbf{N}(\sigma, 0)$$

où  $\mathbf{N}(\sigma, 0)$  est un vecteur de perturbation déterminé aléatoirement à partir de la distribution Gaussienne de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma$ . Ainsi, tous les paramètres de l'individu de départ sont affectés par la modification. Une fois les  $\lambda$  nouveaux individus créés, ils sont ajoutés aux  $\mu$  précédents, l'ensemble  $(\mu+\lambda)$  est trié pour ne garder que les  $\mu$  meilleurs. En général, on préconise de garder un rapport  $\mu/\lambda$  de l'ordre de 5. Il existe d'autres approches (notées  $(\mu,\lambda)$ -ES) qui ne font pas intervenir la recombinaison de populations, le choix des meilleurs individus s'effectuant uniquement parmi les  $\lambda$  créés. Cela suppose en particulier que  $\lambda > \mu$ .

On remarquera à ce niveau qu'une approche (1+1)-ES est quasiment identique à une marche au hasard, si ce n'est la détermination de la perturbation appliquée.

Le paramètre utilisateur  $\sigma$  est délicat à régler [92]. Il est implicitement lié au nombre de paramètres et au niveau de convergence. Trop petit, il n'autorise pas de grosse perturbation et peut donc ralentir la marche vers le front de Pareto. Trop grand, il génère un bruit freinant la convergence. Il existe de nombreux articles proposant des implémentations variables de  $\sigma$ .

#### 4.5.1.4 Progamation évolutive

On peut aussi évoquer les algorithmes de type "evolution programming" ([50] entre autres), qui sont très voisins des stratégies d'évolution  $(\mu+\mu)$ -ES. Leur principale caractéristique est une mutation basée sur l'adaptation des individus. De plus, le processus de sélection des individus en fin d'itération est basé sur un classement selon une mesure locale de l'adaptation : chaque individu est comparé à  $\eta \leq 2\mu$  autres, tirés aléatoirement pour établir un "score", le tri final étant effectué sur ce score. L'un des problèmes de cette méthode est une fois de plus le choix par l'utilisateur de constantes numériques qui doivent faire l'objet d'un réglage.

#### 4.5.1.5 Evolution différentielle

Une autre méthode évolutionnaire possible est baptisée *évolution différentielle*. Proposée par Price et Storn [177, 149], elle fait intervenir une perturbation un peu plus déterministe que les stratégies d'évolution, au sens où cette modification se base sur l'écart existant entre des individus de la population [151, 187]. On sélectionne aléatoirement un individu de référence dans la population. En outre, on calcule la perturbation :

$$\delta = C(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

où les  $\mathbf{x}_i$  sont des individus tirés au hasard dans la population et  $C$  est une constante imposée par l'utilisateur entre 0 et 1. On crée un nouvel individu en appliquant cette modification à un troisième individu tiré au hasard. Les paramètres de ce nouvel individu et de la référence sont mélangés semi-aléatoirement pour donner un "enfant". Si la dernière entité est meilleure que l'individu de référence, elle est gardée, sinon elle disparaît. La structure globale de ces algorithmes reste très similaire aux méthodes évolutionnaires, mais il est aussi possible d'y introduire des croisements entre individus.

#### 4.5.1.6 Approche prédateur-proie

Une dernière méthode intéressante est celle du prédateur et de la proie de Laumanns et al. [112]. Elle est fondée sur une représentation spatiale de la population traitée, chaque individu étant placé sur un nœud d'un maillage cartésien. On sélectionne quelques individus comme des prédateurs, les autres constituant évidemment leurs proies. Chaque prédateur ne traite qu'une fonction objectif, ce qui restreint (un peu) le champ d'application de ces algorithmes. Un prédateur attrape la plus mauvaise des quatre proies qui l'entourent. Ce qui a pour conséquence de remplacer cette proie par un individu généré en modifiant un de ses voisins immédiats. Le prédateur se déplace alors aléatoirement sur un nœud voisin et le processus recommence. In fine, chaque individu de la population aura normalement côtoyé les différents prédateurs au moins une fois, ce qui assure l'optimisation de tous les objectifs. Sémantiquement, il s'agit d'une méthode darwinienne avec une sélection des individus par un système de prédation. Néanmoins ces méthodes sont assez nouvelles et doivent encore faire leurs preuves.

**Remarque :** Dans l'ensemble, ce panorama des méthodes "génétiques" n'est pertinent qu'à titre introductif. Les frontières entre les différentes sous-classes se sont estompées au cours du temps car les améliorations apportées aux différents algorithmes s'inspirent souvent des mécanismes des classes voisines. Il est même possible de coupler des techniques évolutionnaires avec des méthodes directes pour accélérer la convergence [101].

On notera que les méthodes évolutionnaires s'appliquent à un très large champ de problèmes. Les plus classiques, traités dans cette étude, sont bien évidemment les problèmes de dessins géométriques et de détermination de conditions de fonctionnement. Cependant, il est aussi possible d'adapter les codes à des problèmes traitant des variables booléennes, voire à des optimisations de programmes. Cette dernière catégorie, connue sous le nom de programmation génétique [148], vise à optimiser des algorithmes pour obtenir la meilleure efficacité informatique possible.

## 4.5.2 Autres méthodes métaheuristiques

### 4.5.2.1 Approche sociale - colonies de fourmis

Il existe d'autres méthodes métaheuristiques, qui s'appuient sur des comportements sociaux entre agents. La plus célèbre est celle des *colonies de fourmis* ("ant colony"), développée récemment dans le cadre des problèmes de minimisation de trajet, elle a déjà fait l'objet de nombreuses variantes [39, 40]. Elle établit une analogie avec le parcours des fourmis qui cherchent une source de nourriture en allant d'étape en étape, tout en essayant de minimiser le trajet emprunté par la plupart des agents. L'algorithme fait en particulier intervenir un marquage des chemins avec une "phéromone", le chemin le plus marqué étant idéalement le plus court et le plus souvent choisi par les fourmis. Ces algorithmes restent adaptables à des cas multi-objectifs où la notion de distance géométrique n'intervient pas directement, mais l'opération est assez délicate [48, 133]. En règle générale, les algorithmes de ce type travaillent sur un espace paramétrique discrétisé, ce qui exclut de fait un certain nombre de solutions et limite un peu leur application. Ils souffrent pour le moment d'un manque de compétitivité comparativement à d'autres méthodes comme les algorithmes génétiques. Ils ne sont cependant qu'au début de leur développement, on peut espérer qu'ils combleront ce retard dans les années à venir.

### 4.5.2.2 Approche thermodynamique - recuit simulé

En dernier lieu, on donnera en exemple les méthodes de *recuit simulé* ("simulated annealing") [105, 18, 92] qui cherchent à imiter l'évolution d'un matériau sous l'effet d'un recuit : la structure cristalline du matériau va se modifier un peu pour abaisser son niveau d'énergie interne. Ces algorithmes se basent donc sur une modélisation thermodynamique de la population : l'adaptation  $f$  de chaque individu est assimilée à un niveau d'énergie interne. A l'image des stratégies d'évolution, on crée de nouveaux individus en appliquant une perturbation semi-aléatoire. Le nouvel individu peut être meilleur ou pire que l'individu de départ. Dans le second cas, il peut quand même remplacer l'individu d'origine selon une probabilité calquée sur la loi thermodynamique de Boltzmann :

$$P(f_{orig}, f_{mod}, T) = e^{\frac{f_{orig} - f_{mod}}{T}}$$

où  $T$  est une température virtuelle qui décroît au cours du temps.

Physiquement, cela revient à accepter une (légère) augmentation de l'énergie interne tant que la température reste élevée, pour passer une barrière énergétique. Les augmentations sont en revanche

limitées à basse température. Du point de vue de l'optimisation, on autorise de légères dégradations des individus au début du processus afin de faciliter l'exploration de l'espace paramétrique. En fin de convergence, il convient de limiter autant que possible ces pertes pour se concentrer uniquement sur les optima. La décroissance peut être effectuée de manière continue ou par paliers [128]; dans la seconde approche, on peut considérer qu'on effectue une série de sous-optimisations assez imparfaites, mais de plus en plus restrictives quant à la diversité de la population et donc de plus en plus précises.

## 4.6 Algorithmes génétiques

Cette partie vise à présenter de manière générale les algorithmes génétiques. On exposera de manière globale les principaux mécanismes de fonctionnement, ainsi que les limites associées à une optimisation avec ces algorithmes. Pour plus de détails sur les algorithmes génétiques, et notamment sur les opérateurs génétiques, on se reportera à l'annexe E.

### 4.6.1 Principe de fonctionnement des algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques sont assurément l'un des concepts d'optimisation, parmi les plus prometteurs et efficaces, actuellement développé. Cette technique s'appuie sur les mécanismes évolutifs introduits par Darwin en 1859 [25]. Le postulat de base est assez simple : si une population est soumise à une pression sélective, elle évoluera au cours du temps en privilégiant les individus les mieux adaptés relativement aux critères de sélection - il s'agit de ce qui est désigné (abusivement) comme "la survie du mieux adapté".

Cette population est de plus soumise à deux mécanismes principaux :

- Le mélange/échange de caractères lors de la phase de reproduction. Cette phase implique en outre la sélection de quelques individus aptes à se reproduire.
- La création de nouveaux caractères lors de mutation de certains individus.

L'évolution se fait au travers d'opérations découlant directement de la génétique : la reproduction, et donc la combinaison entre les matériels génétiques de deux individus (si possible) distincts, et aussi la mutation correspondant à une altération aléatoire du matériel génétique.

Avec une telle approche, la recherche de solution optimale n'a pas le caractère totalement aléatoire d'une marche au hasard, puisque les phases de reproduction restreignent sévèrement les zones de recherche. A l'opposé, la mutation permet d'accéder directement et aléatoirement à des zones de l'espace paramétrique, facilitant ainsi son exploration. L'une des caractéristiques des algorithmes génétiques est de déterminer des régions d'intérêt et d'affiner ensuite la recherche dans ces zones, tout en continuant d'explorer l'espace paramétrique ; le point critique est la balance faite entre l'exploration et l'exploitation.

Pour les algorithmes génétiques, on parlera de population de taille  $N$ . On travaille sur une population de taille constante au fil des générations, chaque génération étant séparée d'une autre par des phases de modifications "génétiques" décrites plus loin. Cette population comprend donc des individus dont certains peuvent être sélectionnés pour servir à la reproduction. On parle alors d'individus *parents*, les individus produits par la reproduction étant naturellement les *enfants*. Chaque individu est généré par un ensemble de *gènes* qui sont les paramètres. Les gènes d'un individu peuvent être regroupés en un même bloc appelé *chromosome*.

On appellera par la suite *population reproductrice*, *groupe reproducteur* ("mating pool") l'ensemble des individus sélectionnés pour la reproduction. Il faut souligner ici que cette population n'est pas un sous-ensemble de la population globale du point de vue mathématique car il peut contenir plusieurs fois le même individu, selon la technique de sélection employée.

On définit par ailleurs *l'adaptation* ("fitness") d'un individu comme l'adéquation de cet individu aux critères de choix qui prévalent sur l'ensemble de la population. Cette donnée peut être définie en pratique de nombreuses façons.

- Dans le cas mono-objectif le plus simple, l'adaptation correspond à la valeur de l'objectif.
- Pour des cas multi-objectifs, il est possible d'utiliser des fonctions agrégées déjà présentées qui introduisent de fait un biais. Il est aussi possible de définir une adaptation basée sur le classement en fronts de la population. Généralement, les individus qui appartiennent au front non-dominé ont un rang égal à 1, le front suivant étant naturellement le numéro 2, etc...

Cette dernière classification est l'une des plus populaires à l'heure actuelle car elle limite le choix de valeurs arbitraires par l'utilisateur et elle correspond mathématiquement à une approche Pareto-optimale. Dans la suite, sauf mention contraire, l'adaptation de chaque individu sera donc supposée fondée sur cette technique.

## 4.6.2 Mécanismes généraux des algorithmes génétiques

Il existe dans la littérature un grand nombre d'implémentations possibles d'algorithmes génétiques, cependant toutes partagent la même structure fondamentale en trois phases majeures :

1. Une phase de tri des individus selon leur adaptation aux critères spécifiés par l'utilisateur
2. Une deuxième phase de choix de quelques individus
3. Une phase de reproduction à partir des individus sélectionnés dans l'étape précédente et des mutations appliquées à quelques autres. Cela permet d'avancer vers le front de Pareto et d'explorer l'espace paramétrique.

L'enchaînement des trois phases permet de passer d'une génération à une autre. La population a alors évolué : on a créé de nouveaux individus, que l'on espère meilleurs, et on a éliminé les plus mauvais individus de la génération précédente.

### 4.6.2.1 Sélection des individus

Le premier mécanisme fondamental des algorithmes génétiques est la **sélection** des meilleurs individus de la population afin d'assurer la création de nouveaux individus de bonne qualité, et in fine, une amélioration de la population. C'est en grande partie grâce à cette sélection que la population va pouvoir évoluer rapidement vers un optimum. On considère en effet que les mauvais individus (au sens de Pareto) présents dans la population sont de toute façon trop loin de la zone d'intérêt et ne peuvent sensiblement freiner la convergence de l'algorithme. Afin d'être pertinente, la création d'une nouvelle génération doit se faire autant que possible à partir d'individus prometteurs. En considérant que ces derniers transmettront leurs "bonnes" caractéristiques au cours de la reproduction, cette dernière opération devant apporter une amélioration au passage, on peut attendre que la nouvelle génération soit en générale meilleure que la précédente. Il existe plusieurs méthodes pour traiter le passage d'une génération à une autre, mais dans toutes les implémentations existantes les pires individus finissent par "mourir", c'est à dire qu'ils sont retirés de la population traitée. On s'assure de cette manière que seules les caractéristiques favorables sont conservées au final.

Afin d'effectuer la sélection, il est nécessaire de disposer :

- D'un opérateur de classement de la population. La manière la plus simple de classer la population est de trier selon l'adaptation des individus. Il est possible de rajouter des critères supplémentaires afin d'améliorer le classement (on verra un peu plus loin le problème de la préservation de la diversité)
- D'un opérateur de sélection permettant, en fonction de l'adaptation des individus, de ne sélectionner que les meilleurs individus. Il existe aujourd'hui deux type principaux d'opérateurs de sélection, par tournoi ou par tirage, qui sont présenté plus en détail en annexe E.1.

Les algorithmes génétiques sont naturellement capables de trouver le front de Pareto, en répartissant la population optimale sur le front. Cependant, il peut être souhaitable d'accélérer cette répartition en préservant la diversité des individus au sein de la population. On utilise pour cela des critères supplémentaires mesurant la densité locale la population. Les zones les moins denses sont bien entendu privilégiées afin de disperser le plus possible les individus Pareto-optimaux. Les critères les plus employés, le "sharing" et la "crowding distance" sont présenté en annexe E.6.

#### 4.6.2.2 Reproduction

Le deuxième mécanisme fondamental est la **reproduction** des individus. En effet, si on se contente de créer une nouvelle génération par simple copie des "meilleurs" individus de la précédente, il est évident que l'algorithme va stagner. Afin d'éviter une convergence prématurée, il est donc nécessaire de créer de la diversité via une phase de reproduction, de "brassage" génétique. Ce besoin fait écho à la perte générée par la sélection qui est une opération intrinsèquement restrictive quant à la diversité des individus de la population. Pour cette raison, les différents mécanismes de sélection et de reproduction sont complémentaires et devront donc être choisis ensemble pour aboutir à la meilleure efficacité possible.

La phase de reproduction est caractérisée par un opérateur de **croisement**. Ce dernier vise à échanger le matériel "génétique", i.e. les paramètres des parents, pour générer les enfants. Présenté de manière simpliste, le croisement permet de récupérer les "bonnes" valeurs de paramètres et de les combiner pour former des individus qui réalisent une adaptation supérieure à celle des parents. Pour illustrer cela, on considérera l'exemple trivial suivant : on cherche à minimiser  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . Supposons que l'on dispose de deux parents,  $(x_1^I=1, x_2^I=0)$  et  $(x_1^{II}=0, x_2^{II}=1)$ . Idéalement, le croisement doit permettre de récupérer les valeurs  $x_2^I=0$  et  $x_1^{II}=0$  et de les combiner, l'enfant résultant étant le meilleur individu possible.

En pratique, les opérateurs de croisement sont un peu plus complexes. Ils peuvent tenir compte des contraintes imposées, et peuvent aussi introduire une diversité supplémentaire en modifiant la valeur des paramètres transmis par les parents. Dans certains cas de figure, notamment pour une population proche du front de Pareto, le croisement peut être amené à réduire la diversité pour se focaliser sur les optima. Chaque opérateur possède des caractéristiques propres, comme le nombre de parents et d'enfants, mais tous sont utilisés de la même manière. On commence par sélectionner au hasard autant de parents que nécessaire pour effectuer une reproduction. On applique ensuite le croisement avec une probabilité  $p_c$ , généralement fixée par l'utilisateur. Si le croisement a bien lieu, on récupère les enfants pour les placer dans la nouvelle génération, sinon, on copie directement les parents dans la nouvelle génération. On répète l'opération jusqu'à obtenir les  $N_e$  enfants attendus.

Les opérateurs de croisement sont présentés de manière détaillée en annexe E.2.1 et E.3.1. On

a distingué les opérateurs de croisement conçus pour un codage binaire des chromosomes de ceux conçus pour un codage réel.

### 4.6.2.3 Mutation

Le troisième mécanisme important utilisé par les algorithmes génétiques est la **mutation**. Il s'agit la plupart du temps de la modification aléatoire d'un ou plusieurs paramètres d'un individu, dans le but de créer un nouvel individu positionné différemment dans l'espace paramétrique. La mutation peut se concevoir comme un bruit au sens numérique du terme puisqu'il s'agit d'un changement aléatoire des caractéristiques d'un individu. On ne contrôle donc ni l'amplitude, ni la direction de la modification apportée. Idéalement, cette opération permet de faire un grand saut dans l'espace paramétrique afin d'arriver dans des zones encore inexplorées. Il s'agit toutefois d'un outil utile pour la seule exploration : il n'existe aucune garantie que le résultat d'une telle opération soit bénéfique en terme d'optimisation, car une solution peut être dégradée de cette manière. Ce défaut apparent est compensé par les phases de sélection et de reproduction qui tendent à éliminer les pires individus au profit des meilleurs.

La mutation permet de maintenir une certaine diversité au sein de la population, laquelle peut être réduite par les phases de sélection et parfois de croisement. Elle compense en particulier le caractère de recherche locale induit par les opérateurs de croisement qui génèrent des enfants possédant des paramètres proches ou identiques à ceux des parents. Ce mécanisme est particulièrement intéressant pour des espaces paramétriques discontinus.

Supposons que l'espace paramétrique soit divisé en deux zones disjointes et distantes et que la population initiale soit intégralement localisée dans une de ces zones. Une recherche de proche en proche ne pourra pas sauter le fossé séparant les zones. Avec les mutations, on peut espérer que quelques individus au moins apparaîtront dans la deuxième zone et on pourra ainsi évaluer son potentiel.

Dans les principaux algorithmes génétiques, la mutation vient après la phase de reproduction. Elle est appliquée à tous les enfants avec une probabilité  $p_m$  arbitrairement fixée et souvent faible.

De manière évidente, les opérateurs de mutation et de croisement entrent en conflit. Le premier permet d'assurer une exploration large de l'espace paramétrique, le deuxième, couplé à la sélection, autorisant l'optimisation de la population à partir de quelques solutions prometteuses.

On perçoit ainsi la difficulté qui peut apparaître avec le réglage des deux probabilités  $p_c$  et  $p_m$  :

- Si on choisit de privilégier la mutation, avec une probabilité  $p_m \ll p_c$ , les nombreuses mutations vont modifier assez profondément la topologie de la population générée, avec un risque non négligeable de dégrader beaucoup d'individus à chaque génération. De cette manière, pour créer la génération suivante, la sélection et les croisements s'effectueront sur un nombre restreint de solutions de bonne qualité, la convergence étant à terme fortement compromise.
- A l'inverse, si on choisit de privilégier le croisement, la population va évoluer vers le voisinage des meilleures solutions qu'elle contient, ignorant ainsi les zones lointaines. Le front de Pareto, s'il est trouvé (on n'écarte pas totalement le risque de tomber sur un optimum local) peut être assez mal décrit, toutes les solutions optimales étant alors proches.

Les nombreuses études réalisées sur ce sujet s'accordent toutes pour utiliser une probabilité de croisement  $p_c$  de l'ordre de 0.9 et une probabilité de mutation  $p_m$  de l'ordre de 0.1.

#### 4.6.2.4 Elitisme

Le quatrième point important est l'**élitisme**. Il ne s'agit pas à proprement parler d'un mécanisme fondamental des algorithmes génétiques car il est possible de ne pas l'utiliser. Cependant, l'élitisme permet d'accélérer assez sensiblement la convergence de la population vers le front de Pareto.

Le passage d'une génération à une autre peut se faire de deux manières différentes. Dans une première approche, qualifiée *d'élitiste*, les individus de deux générations successives sont comparés afin d'éliminer tous les enfants qui présentent une mauvaise adaptation. De cette manière, des individus peuvent survivre sur plusieurs générations. Le but d'une telle démarche est d'empêcher la population de passer par des phases de régression. A l'opposé, dans une approche non élitiste, l'arrivée d'une nouvelle génération se traduit par la disparition d'une partie voire même de l'intégralité de la génération précédente, hormis des individus sélectionnés pour la reproduction qui peuvent survivre. Par exemple, on peut imaginer un algorithme pour lequel on génère  $N_e \leq N$  enfants, qui viennent remplacer les  $N_e$  plus mauvais individus de la génération précédente.

Dans les deux approches, seules les phases de tri et de sélection garantissent que les meilleures caractéristiques sont globalement transmises et donc assurent en grande partie la convergence vers un optimum.

**Structure globale d'un algorithme génétique** La structure globale d'un algorithme génétique est schématisée en (Fig. 4.6).

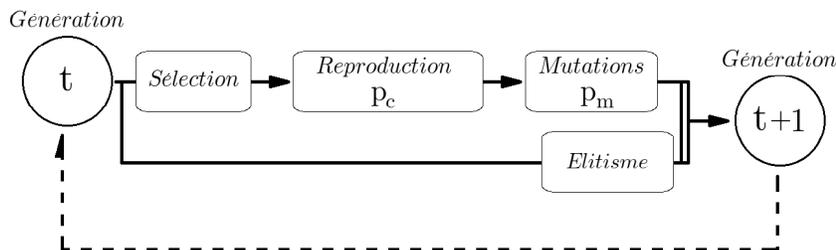


FIG. 4.6 – Structure générale d'un algorithme génétique

On nuancera cependant la description précédente de l'enchaînement des différents opérateurs pour passer d'une génération à une autre. En effet, une des forces des algorithmes génétiques est d'autoriser un renouvellement plus continu de la population, comme c'est le cas en biologie, en effectuant *progressivement* le renouvellement de la population. On peut, en particulier, ne pas créer simultanément les  $N$  enfants et remplacer les  $N$  parents, mais plutôt créer  $n \ll N$  enfants, les introduire dans la population existante (en y supprimant  $n$  individus pour garder une taille constante) et traiter le groupe ainsi obtenu comme une nouvelle génération. Les opérateurs de sélection, de croisement et de mutation sont inchangés. De cette manière, il est possible de paralléliser à l'extrême un algorithme génétique, y compris en utilisant du matériel informatique très hétérogène, puisque dès qu'une machine renverra les enfants qu'elle traitait, ceux-ci seront utilisés dans la population sans attendre le retour des autres calculateurs [66].

### 4.6.3 Problème lié à l'utilisation des algorithmes génétiques

Indépendamment de tout réglage ou du choix des opérateurs de sélection/croisement/mutation, les algorithmes génétiques sont sujets à un problème majeur au niveau de l'évaluation des individus. En effet, le principe de base des algorithmes génétiques est de faire évoluer une population de plus ou moins grande dimension. Cette évolution passe par la création de nombreux nouveaux individus qu'il faut ensuite évaluer afin de pouvoir les classer au sein de la population. En général, on crée à chaque génération autant d'individus que ceux de la génération précédente, soit  $N$  individus.

Or, afin d'avoir des algorithmes performants, il est souhaitable d'avoir un nombre d'individus  $N$  important (quelques centaines). Multiplié par le nombre de générations nécessaires pour arriver à convergence (de quelques dizaines à quelques centaines de générations généralement), on obtient alors un nombre d'individus à évaluer très important. En mécanique des fluides, l'évaluation de chaque individu (i.e. écoulement) avec un calcul RANS direct peut être longue. Dans le cas du traitement de carter, les calculs RANS directs convergent en plusieurs dizaines d'heures. En conséquence, il est *impossible* d'optimiser une géométrie telle que le rainurage avec une approche directe, les temps de calcul étant totalement irréalistes (plusieurs centaines de milliers d'heures de calcul).

La solution à ce problème est d'utiliser un **métamodèle**, c'est à dire un modèle approché analytique ou semi-analytique permettant de prédire rapidement les performances d'un individu. Pour être pertinent, le métamodèle doit pouvoir être construit assez vite et sans demander trop d'échantillons évalués précisément. Il existe en pratique un grand nombre de métamodèles. On trouvera un panorama non exhaustif de ces techniques en annexe E.9.

Parmi les métamodèles possibles, nous utiliserons l'approche paramétrique implémentée dans le code Turb'Opty. Cette approche est décrite dans la section suivante.

## 4.7 Méthodes numériques pour la paramétrisation

Dans cette partie on se concentrera sur les différents aspects liés à la technique de paramétrisation de l'écoulement. On présentera dans un premier temps les motivations de l'approche paramétrée, ainsi que les principes généraux mis en œuvre dans le solveur dédié Turb'Opty. On détaillera dans un second temps les méthodes de reconstruction du champ aérodynamique associées à une approche paramétrique.

### 4.7.1 Motivation de l'approche paramétrée

La justification de l'approche paramétrée dans l'optimisation du traitement de carter vient de l'utilisation des algorithmes génétiques. On a vu dans la section 4.6 que ceux-ci demandaient un très grand nombre d'évaluations afin de converger. En mécanique des fluides, ses évaluations sont généralement très coûteuses en temps avec une approche directe (RANS,...) en mécanique des fluides. Il est donc nécessaire de recourir à un métamodèle. Celui-ci doit permettre de prédire rapidement les performances de n'importe quelle configuration déterminée par un jeu de paramètres donné. L'approche paramétrique est un de ces métamodèles.

Dans le cadre d'une approche paramétrique, on ne calcule pas directement le champ aérodynamique pour les différentes configurations. On calcule en revanche les dérivées simples et croisées de ce champ relativement aux paramètres en une configuration de référence. De cette manière, il suffit ensuite de reconstruire le champ, à partir de la configuration de référence, pour chaque combinaison

de paramètres par une technique adaptée. Schématiquement, le calcul numérique des dérivées peut se faire en dérivant analytiquement les équations de Navier-Stokes continues puis en discrétisant les équations dérivées [125], ou bien en dérivant les équations de Navier-Stokes discrétisées. Cette dernière approche est la solution retenue par la société Fluorem SAS pour la construction de leur solveur paramétrique Turb'Opty [135, 134]. Cette approche sera détaillée dans la suite.

Avec une telle méthodologie, le coût informatique et temporel est fortement réduit. Les deux principales étapes en terme de coût sont :

1. L'obtention d'un champ aérodynamique de référence par une simulation RANS classique.
2. Le calcul des dérivées du champ relativement à chaque paramètre. Au pire, chaque dérivée peut être évaluée en un temps de l'ordre d'un calcul RANS, mais les développements récents des techniques de résolution de systèmes linéaires ont permis de réduire ce temps à seulement 10% du temps nécessaire à un calcul de champ.

La phase de reconstruction du champ n'est pour sa part pas trop critique. En utilisant des reconstructions de type série de Taylor ou de Padé, le champ extrapolé peut être déterminé en quelques secondes ou minutes, même pour des écoulements très complexes.

De cette manière, on dispose d'un outil permettant de générer rapidement un grand nombre de configurations, lesquelles vont ensuite pouvoir être utilisées par des algorithmes d'optimisation pour effectuer une optimisation objective et automatisée [68, 103, 102].

#### 4.7.2 Théorie de la paramétrisation

On ne considère ici que la paramétrisation d'un champ stationnaire. Le calcul des dérivées temporelles est un peu plus délicat ; on trouvera un exemple remarquable de traitement temporel dans [81, 82].

La paramétrisation étudiée est basée sur l'écriture différentielle des équations de Navier-Stokes pour un état stationnaire de référence. À l'équilibre, celles-ci se résument à :

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}(\mathbf{p}), \mathbf{p}) = 0 \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{F}$  est le vecteur résultant de la somme des flux convectifs et visqueux,  $\mathbf{q}$  le vecteur des variables conservatives,  $\mathbf{p}$  étant le vecteur formé par les paramètres. Toutes ces grandeurs sont exprimées dans leur état de référence. La relation (4.3) est valable aussi bien sous forme analytique exacte que sous sa forme discrétisée relativement à un maillage. En différenciant l'équation (4.3) par rapport à  $\mathbf{p}$ , on obtient :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \right|_p (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{p}} \cdot \Delta \mathbf{p} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}} \right|_q (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \cdot \Delta \mathbf{p} = 0 \quad (4.4)$$

On notera dans la suite  $\mathbf{G}$  la matrice jacobienne  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{q}^{(n)} = \frac{d^n \mathbf{q}}{d\mathbf{p}^n}$  la dérivée n-ième des variables conservatives par rapport aux paramètres et  $\mathbf{R} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \Delta \mathbf{p}$  la variation des flux induite par  $\Delta \mathbf{p}$ . L'équation (4.4) s'écrit alors sous forme condensée :

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{q}^{(1)} \cdot \Delta \mathbf{p} = \mathbf{R} \quad (4.5)$$

En dérivant successivement n-1 fois cette équation par rapport à  $\mathbf{p}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G} \cdot \mathbf{q}^{(2)} \cdot \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{R}^{(1)} - \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(1)} \cdot \Delta \mathbf{p} \\
 \mathbf{G} \cdot \mathbf{q}^{(3)} \cdot \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{R}^{(2)} - \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{q}^{(1)} \cdot \Delta \mathbf{p} - 2\mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)} \cdot \Delta \mathbf{p} \\
 &\dots \\
 \mathbf{G} \cdot \mathbf{q}^{(n)} \cdot \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{R}^{(n-1)} - \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i \mathbf{G}^{(i)} \cdot \mathbf{q}^{(n-i)} \cdot \Delta \mathbf{p}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Les équations précédentes sont aussi valables pour le calcul des dérivées croisées, quoique la notation retenue puisse être un peu abusive dans ce dernier cas. En effet, pour deux paramètres  $p_1$  et  $p_2$ , on a par exemple :

$$\mathbf{R} = - \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_1} \Delta p_1 + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_2} \Delta p_2 \right] = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1} \\ \frac{\partial}{\partial p_2} \end{pmatrix} (\mathbf{F}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \end{pmatrix} = - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}} \Delta \mathbf{p}$$

On remarque que pour déterminer les  $\mathbf{q}^{(n)}$ , le système linéaire à résoudre ne change que dans la définition du second membre. En particulier, la matrice à inverser,  $\mathbf{G}$ , est la même dans toutes les équations. Dans le cas (malheureusement assez rare) où une méthode de résolution directe du système linéaire est possible, il suffit donc de procéder une seule fois à l'inversion matricielle et de stocker la matrice inverse pour pouvoir résoudre facilement tous les systèmes linéaires. C'est un très gros avantage de la méthode puisque l'inversion de la matrice est toujours la phase la plus longue et la plus difficile pour un système linéaire de grande taille.

On notera que la matrice des coefficients du système linéaire n'est autre que la matrice jacobienne des flux. La génération de cette matrice peut alors se faire simplement et sans gros effort. En effet, les solveurs RANS implicites classiques font largement appel à cette dernière, laquelle est donc bien connue et fait souvent l'objet de routines de calcul dédiées.

Comme on vient de le voir, la théorie de la paramétrisation est formellement assez simple : elle fait uniquement appel à une formule récursive mettant en jeu la matrice jacobienne des flux, ses dérivées successives par rapport aux paramètres, ainsi que les dérivées successives des flux par rapport aux paramètres. Toutes les grandeurs utilisées ici de manière directe, ou sous forme dérivée, sont des grandeurs intervenant usuellement dans une résolution numérique classique des équations de Navier-Stokes. On les retrouve en particulier dans le code Turb'Flow. D'autre part, on constatera que quelle que soit la nature des paramètres choisis, ils peuvent être traduits assez naturellement en conditions physiques gérées par le code :

- Pour les modifications de la géométrie, le traitement du paramètre s'effectue au travers de la modification des conditions aux limites sur les parois solides, avec notamment la modification des directions normales en certains points et donc des quantités caractéristiques associées à cette paroi, ces grandeurs étant explicitement traitées lors du calcul d'un écoulement.
- Pour les modifications purement aérodynamiques du champ, c'est-à-dire des modifications de grandeurs aérodynamiques ne faisant pas intervenir de variation de la géométrie (conditions aux limites par exemple), il est toujours possible d'exprimer le paramètre "externe" imposé par l'utilisateur en terme de paramètres "internes" comme les grandeurs conservatives ou

primitives. Par exemple, une variation du débit massique (paramètre externe) peut s'exprimer comme une variation de la quantité de mouvement (paramètre interne) à un terme de surface près.

Au fil de ces constatations, il paraît naturel de ne pas développer entièrement un code paramétré, mais plutôt de le construire à partir d'un code de calcul classique. C'est le choix qui a été fait pour la génération du logiciel Turb'Opty. Ce dernier a été obtenu en dérivant, au moyen d'un dérivateur automatique, la fonction  $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  réécrite en partant de celle exprimée dans le code Turb'Flow. On dispose ainsi d'un code de calcul gérant à la fois les différentes grandeurs aérodynamiques et géométriques, "l'héritage" du solveur RANS, ainsi que les versions dérivées de ces grandeurs par rapport aux paramètres, le tout permettant d'exprimer la relation (4.6). On garde en outre une certaine cohérence d'implémentation entre les deux parties, et on réduit fortement le risque d'introduire de nouvelles erreurs grâce au caractère automatique du dérivateur. On ne s'étendra pas sur le dérivateur qui est propre à la société Fluorem, mais on soulignera que l'usage d'un dérivateur automatique introduit certaines contraintes sur l'implémentation du code à dériver. Si les opérations de base (addition, multiplication,...) ne posent bien évidemment aucun problème, il existe des opérateurs qui ne sont pas dérivables en tout point.

En premier lieu, il convient d'éviter autant que possible, pour des raisons évidentes, les opérateurs mathématiques bien connus tels que la valeur absolue, la tangente, et plus généralement toutes les fonctions qui ne sont pas  $\mathcal{C}^\infty$ . Cependant, il existe aussi d'autres opérateurs, directement liés à la partie purement algorithmique, qui peuvent aussi poser problème. L'emploi d'une condition "si" sur une grandeur dérivable (if... then...) est emblématique. Mathématiquement, cette opération peut être interprétée comme une fonction de Heaviside  $H(\text{critère})$ , laquelle n'est bien évidemment pas dérivable. L'application de la dérivation automatique suppose donc une évaluation préliminaire du code pour détecter les problèmes.

Dans le cas de parties non dérivables, deux alternatives sont possibles :

1. On modifie la structure du code, dans la mesure du possible, pour éliminer les opérations illicites.
2. En dernier recours, on remplace les instructions problématiques par des versions dérivables, généralement plus faibles car approchées. Par exemple, une instruction 'if' peut être conceptuellement remplacée par une fonction  $0.5[1 + \tanh(ax)]$ ,  $a$  étant une constante donnée.

Le traitement des termes temporels n'est ici pas pertinent dans la mesure où Turb'Opty s'appuie sur un état stationnaire. Il n'existe donc pas de notion de progression en temps pour la paramétrisation, mais seulement un état de convergence lié à la résolution du système matriciel. A l'heure actuelle, Turb'opty est basé sur l'implémentation de Turb'flow pour un schéma spatial centré du second ordre. On retrouve de ce fait dans la paramétrisation plusieurs paramètres numériques que l'utilisateur doit régler. Les dissipations artificielles au deuxième et quatrième ordre du schéma spatial (p. 46) en sont deux exemples. On remarquera néanmoins que ces paramètres numériques n'ont pas exactement la même signification que dans l'approche RANS standard, et les réglages pour la paramétrisation peuvent être différents de ceux de la simulation directe.

La limite technique majeure de la paramétrisation est la phase de résolution des systèmes linéaires, lesquels reposent généralement sur des matrices  $\mathbf{G}$  assez creuses et mal conditionnées. On se reportera à l'annexe F pour quelques exemples de méthodes de résolution adaptées à ce genre de problème.

### 4.7.3 Extrapolation du champ aérodynamique

Une fois que les dérivées  $\mathbf{q}^{(n)}$  des variables aérodynamiques par rapport aux paramètres ont été déterminées, il reste encore à reconstruire le champ aérodynamique en tout point pour pouvoir faire l'exploitation. Cette reconstruction est fondamentalement une *extrapolation* à partir de la solution de référence. Deux techniques principales existent pour cette opération.

#### 4.7.3.1 Série de Taylor

C'est la méthode d'extrapolation la plus courante et la plus connue. Pour un problème sans couplage entre les paramètres, on écrit simplement en tout point du champ :

$$\mathbf{q}_{Taylor} = \mathbf{q}(\mathbf{p}) + \mathbf{q}^{(1)} \cdot \Delta\mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}^{(2)}}{2} \cdot (\Delta\mathbf{p})^2 + \dots + \frac{\mathbf{q}^{(n)}}{n!} \cdot (\Delta\mathbf{p})^n = \mathbf{q}(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) - \mathcal{O}(\Delta\mathbf{p})^{n+1}$$

Le couplage entre les paramètres se traite facilement en ajoutant dans la formule précédente les dérivées croisées. Cette méthode est souvent utilisée en raison de sa grande simplicité d'implémentation, ainsi que pour le caractère régulier de l'extrapolation générée. Elle est de fait bien adaptée aux cas présentant des variations régulières.

#### 4.7.3.2 Approximant de Padé

L'extrapolation du champ peut aussi être effectuée au moyen de séries de Padé. Celles-ci sont définies comme des fractions rationnelles :

$$\mathbf{q}_{Padé} = \frac{P_\nu(\Delta\mathbf{p})}{Q_\mu(\Delta\mathbf{p})}$$

où  $P_\nu$  et  $Q_\mu$  sont des polynômes de degrés respectifs  $\nu$  et  $\mu$ . Les coefficients de ces polynômes sont déterminés via le système :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{Ref} &= \frac{P_\nu(0)}{Q_\mu(0)} \\ \mathbf{q}^{(1)} &= \frac{P_\nu^{(1)}(0)Q_\mu(0) - P_\nu(0)Q_\mu^{(1)}(0)}{[Q_\mu(0)]^2} \\ \dots & \end{cases}$$

Evidemment, l'usage des séries de Padé est restreint par le nombre  $n$  de dérivées disponibles. On suppose conventionnellement que  $Q_\mu(0) = 1$ . Pour que le système précédent soit fermé, il faut alors  $\mu + \nu = n$ .

On voit que ces séries sont assez souples d'emploi. Elles constituent une généralisation des séries de Taylor (cas  $\mu = 0$ ). Leur utilisation est recommandée quand le champ à reconstruire présente des discontinuités et surtout des pôles. Dans ce dernier cas, la série de Taylor n'est pas adaptée au voisinage d'un pôle.

En contrepartie, le choix des degrés  $\nu$  et  $\mu$  peut poser certains problèmes et doit être adapté au cas traité. L'utilisation d'un  $\mu \neq 0$  génère par exemple un pôle dans la reconstruction d'une variable, ce qui peut s'avérer hautement non physique.

### 4.7.3.3 Autres techniques

Les deux méthodes précédentes sont les plus utilisées actuellement, cependant, on gardera à l'esprit qu'il existe d'autres alternatives. Les séries de Fourier peuvent par exemple être utilisées, surtout si l'un des paramètres est connu pour générer un comportement périodique. Il est aussi possible d'utiliser des lois puissances ou des polynômes de Chebychev. Chacune de ces méthodes a démontré ses avantages et ses inconvénients sur divers cas pratiques, si bien qu'on ne saurait à l'heure actuelle énoncer une règle générale d'utilisation.

### 4.7.4 Effets de l'extrapolation sur les variables non conservatives

Nous venons de présenter les différentes techniques de reconstruction du champ aérodynamique à partir des dérivées calculées par le solveur paramétrique. Cette reconstruction ne porte, dans un premier temps, que sur les variables conservatives et turbulentes, à savoir dans le cas le plus général  $\rho$ ,  $\rho U$ ,  $\rho V$ ,  $\rho W$ ,  $\rho E$ ,  $\rho k$  et  $\rho \omega$ . Cette approche présente une certaine cohérence avec le traitement de l'écoulement par un calcul de CFD classique, mais il existe cependant une limite au post-traitement qui peut être effectué sur cette base.

#### 4.7.4.1 Problématique

Comme il est physiquement impossible de calculer une infinité de dérivées, toute reconstruction sera forcément soumise à une erreur de troncature, laquelle peut être plus ou moins forte selon la différence d'ordre entre la physique du problème paramétré et la reconstruction. En pratique, il est très rare que les écoulements présentent des variations notables au-delà de quelques ordres. On peut donc assez légitimement restreindre le calcul des dérivées aux quelques premiers ordres (typiquement 2 ou 3). Avec cette démarche, on peut espérer limiter assez fortement l'erreur de reconstruction des variables conservatives.

Cependant, la plupart des problèmes d'optimisation sont construits sur des critères non-conservatifs ; la pression statique sur la surface d'un aubage et le rendement d'une roue aubagée sont deux exemples extrêmement courants parmi d'autres. Très souvent, ces grandeurs aérodynamiques sont exprimées sous forme d'une fonction non linéaire des variables conservatives. Or la non-linéarité de cette définition peut poser un problème quant à l'erreur de reconstruction.

Illustrons ce propos par un exemple portant sur la pression statique  $P_s$ . Pour un gaz parfait, cette dernière s'exprime par la relation :

$$P_s = (\gamma - 1) \left[ \rho E - \frac{1}{2\rho} (\rho U + \rho V + \rho W)^2 \right] = f(\rho, \rho U, \rho V, \rho W, \rho E) \quad (4.7)$$

Supposons dans un premier temps que le problème soit quelconque. En tout point du maillage, la pression statique reconstruite à partir de l'extrapolation en série de Taylor s'exprimera :

$$P_s(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = (\gamma - 1) \left[ \rho E(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) + \epsilon_{\rho E} - \frac{1}{2(\rho(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) + \epsilon_{\rho})} (\rho U(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) + \epsilon_{\rho U} + \rho V(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) + \epsilon_{\rho V} + \rho W(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) + \epsilon_{\rho W})^2 \right] \quad (4.8)$$

Les  $\epsilon_X$  sont définis comme l'erreur de reconstruction pour la variable conservative  $X$ . Au regard de la formule (4.8), on comprend qu'il est possible d'obtenir une amplification de l'erreur de troncature en reconstruisant les variables non conservatives. Une autre conséquence de ce problème est que certaines grandeurs ne respectent pas la physique du problème.

#### 4.7.4.2 Exemple d'un écoulement monodimensionnel

Supposons maintenant que le problème paramétrique traité repose sur un écoulement uniforme non visqueux dans un canal droit aligné selon  $\vec{x}$  pour lequel le paramètre est la valeur de pression statique en sortie, notée  $p$ . On a alors :

$$P_s = (\gamma - 1) \left[ \rho E - \frac{(\rho U)^2}{2\rho} \right] \quad (4.9)$$

En toute rigueur, la pression statique est uniforme et égale à  $p$ , et on obtient donc théoriquement pour tout  $p$  :

$$\begin{aligned} \frac{dP_s}{dp} &= 1 \\ \frac{d^2P_s}{dp^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

On suppose en outre que les conditions amont de ce canal sont caractérisées par la donnée de la pression totale  $P_t$  et de la température totale  $T_t$ . Comme le champ est ici uniforme quel que soit  $p$ , le calcul des dérivées premières des grandeurs conservatives peut être effectué analytiquement en résolvant le système constitué par les conditions aux limites dérivées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_s}{\partial p} \Big|_{\text{r-sortie}} = \frac{\partial p}{\partial p} \Big|_r = (\gamma - 1) \left( \frac{\partial \rho E}{\partial p} \Big|_r - U_r \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_r + \frac{U_r^2}{2} \frac{\partial \rho U}{\partial p} \Big|_r \right) = 1 \\ \frac{\partial CL1}{\partial p} \Big|_{\text{r-entrée}} = \frac{\partial P_t}{\partial p} \Big|_{\text{r-entrée}} = \dots = 0 \\ \frac{\partial CL2}{\partial p} \Big|_{\text{r-entrée}} = \frac{\partial T_t}{\partial p} \Big|_{\text{r-entrée}} = \dots = 0 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

La notation  $X_r$  appliquée aux grandeurs conservatives ou à leurs dérivées indique que la valeur est donnée par l'écoulement de référence autour duquel on va extrapoler les solutions. Dans la suite de cette partie, on gardera l'indice  $r$  pour signifier une valeur prise à l'état de référence.

En résolvant ce système, et de manière plus générale, en résolvant le système dérivé  $n$  fois, on peut montrer au moins numériquement que les variables conservatives admettent des dérivées troisièmes non nulles.

Considérons maintenant la dérivée de la pression statique  $\bar{P}_s$  évaluée à partir des variables conservatives reconstruites, lesquelles seront aussi notées avec un surlignage. On obtient :

$$\frac{\partial \bar{P}_s}{\partial p} = (\gamma - 1) \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{E}}{\partial p} - \bar{U} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial p} + \frac{\bar{U}^2}{2} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}}{\partial p} \right) \quad (4.12)$$

Au point de référence, on montre sans aucune difficulté que  $\left. \frac{\partial \bar{X}}{\partial p} \right|_r = \left. \frac{\partial X}{\partial p} \right|_r$  quelle que soit la variable  $X$ . On retrouve (heureusement) à partir de (4.11) que :

$$\left. \frac{\partial \bar{P}_s}{\partial p} \right|_r = 1 \quad (4.13)$$

De la même façon, on retrouve bien que :

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{P}_s}{\partial p^2} \right|_r = (\gamma - 1) \left[ \left. \frac{\partial^2 \rho \bar{E}}{\partial p^2} \right|_r - \bar{U}_r \left. \frac{\partial^2 \rho \bar{U}}{\partial p^2} \right|_r + \frac{\bar{U}_r^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial p^2} \right|_r - \frac{1}{\bar{\rho}} \left( \left. \frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial p} \right|_r - \bar{U}_r \left. \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial p} \right|_r \right) \right] = 0 \quad (4.14)$$

Cependant, si on considère les variations de la pression statique reconstruite par rapport au paramètre "pression statique"  $p$ , il apparaît comme on pouvait s'y attendre un écart avec la courbe théorique comme l'illustre la figure (Fig. 4.7). On y a tracé la pression statique  $\bar{P}_s$  reconstruite à partir des variables conservatives extrapolées en fonction du paramètre de pression statique  $p$ , et ce pour différents nombres de Mach incidents. Le réglage du nombre de Mach du champ de référence  $Mach_{ref}$  est effectué en modifiant la pression totale amont.

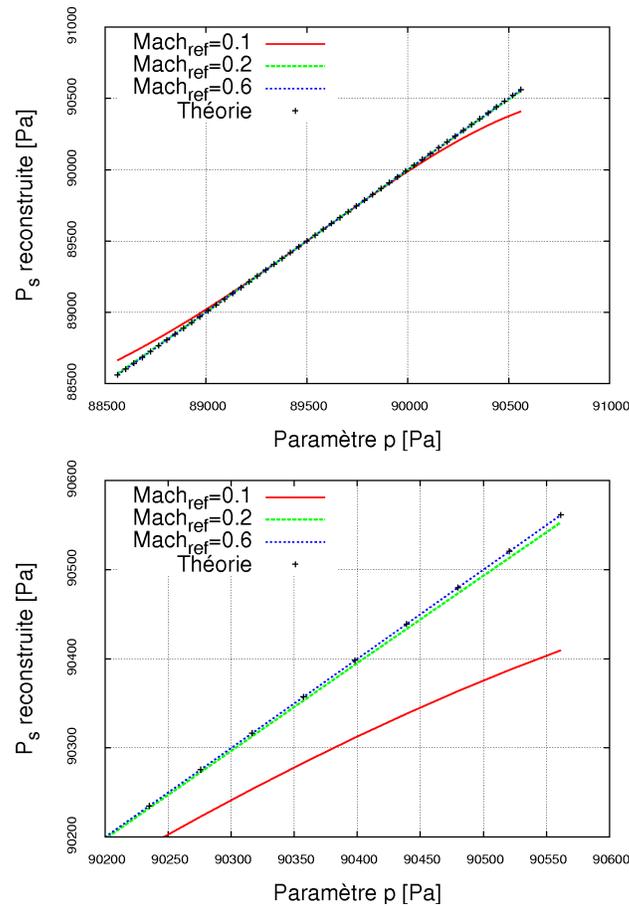


FIG. 4.7 – Reconstruction de  $P_s$  à partir des variables conservatives extrapolées

D'où vient exactement cet écart ? Si on écrit la dérivée troisième de  $P_s$ , on obtient analytique-

ment :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 P_s}{\partial p^3} = (\gamma - 1) & \left[ \frac{\partial^3 \rho E}{\partial p^3} - \frac{\partial U}{\partial p} \frac{\partial^2 \rho U}{\partial p^2} - U \frac{\partial^3 \rho U}{\partial p^3} \right. \\ & \left. + U \frac{\partial U}{\partial p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} + \frac{U^2}{2} \frac{\partial^3 \rho}{\partial p^3} - \frac{\partial \rho}{\partial p} \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right)^2 - 2\rho \frac{\partial U}{\partial p} \frac{\partial^2 U}{\partial p^2} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

En arrêtant le calcul des dérivées à l'ordre 2 et en utilisant une série de Taylor ad hoc, on a supposé que les variables conservatives reconstruites  $\bar{X}$  avaient un comportement quadratique, et que par conséquent  $\left. \frac{\partial^3 \bar{X}}{\partial p^3} \right|_r = 0$ .

En réinjectant cette hypothèse de calcul dans la formule (4.15) donnant  $\left. \frac{\partial^3 \bar{P}_s}{\partial p^3} \right|_r$ , il ne reste alors plus que les termes comportant les dérivées premières et secondes, lesquelles ne sont pas nulles.

$$\left. \frac{\partial^3 \bar{P}_s}{\partial p^3} \right|_r = (\gamma - 1) \left[ - \left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \right|_r \left. \frac{\partial^2 \rho \bar{U}}{\partial p^2} \right|_r + \bar{U}_r \left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \right|_r \left. \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial p^2} \right|_r - \left. \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial p} \right|_r \left( \left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \right|_r \right)^2 - 2\bar{\rho}_r \left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} \right|_r \left. \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial p^2} \right|_r \right] \quad (4.16)$$

En conséquence, on montre que  $\left. \frac{\partial^3 \bar{P}_s}{\partial p^3} \right|_r \neq 0$ , ce qui contredit la théorie. On en déduit que  $\frac{\partial^2 \bar{P}_s}{\partial p^2}$  et  $\frac{\partial \bar{P}_s}{\partial p}$  sont variables, ce qui explique la déviation par rapport à la courbe théorique.

Il est intéressant de constater sur la figure (Fig. 4.7) que l'écart sera d'autant plus grand que le nombre de Mach de l'écoulement sera faible, ou, en d'autres termes, que  $P_s$  et  $P_t$  seront proches. Ce résultat n'est pas forcément intuitif et mérite d'être expliqué. On commencera par supposer que l'écoulement est incompressible, ce qui permet alors d'annuler tous les termes dérivés de  $\rho$ . De manière plus générale, il est fondé de négliger les dérivées de  $\rho$  relativement aux dérivées de la vitesse ou de la quantité pour une large plage de nombre de Mach puisque les variations de la masse volumique restent très inférieures en norme à celles de la vitesse. On peut en particulier écrire :

$$\frac{\partial \rho U}{\partial p} \approx \frac{\partial U}{\partial p}$$

On remarque que dans l'équation (4.16), en tenant compte des hypothèses qui viennent d'être formulées, il ne reste plus que des termes pondérés par  $\frac{\partial \bar{U}}{\partial p}$ . Or, en utilisant la relation suivante donnant le lien entre pression totale et pression statique :

$$P_t = P_s \left( 1 + \frac{U^2}{2C_p T_s} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.17)$$

Il est possible de montrer que la dérivée de  $U$  relativement à  $P_s$  (et donc  $p$ ) s'écrit dans notre cas :

$$\frac{\partial U}{\partial P_s} = - \frac{(\gamma - 1) C_p \frac{T_t}{P_t} \left( \frac{P_s}{P_t} \right)^{-1/\gamma}}{\gamma U} = - \frac{(\gamma - 1) C_p \frac{T_t}{P_t} \left( \frac{P_s}{P_t} \right)^{-1/\gamma}}{\gamma \sqrt{2C_p T_t \left[ 1 - \left( \frac{P_s}{P_t} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]}} \quad (4.18)$$

On trouve ainsi que pour  $\frac{P_s}{P_t} \rightarrow 1$ , la dérivée de  $U$  par rapport à  $P_s$  tend vers  $-\infty$ . Une conséquence de ce comportement est alors une augmentation en valeur absolue de la dérivée  $\frac{\partial^3 \bar{P}_s}{\partial p^3}$ , et par suite, une

divergence plus rapide de la courbe de  $P_s$  reconstruite par rapport à la courbe théorique. Ce résultat est illustré sur la figure (Fig. 4.8) qui montre l'évolution de  $U$  en fonction de  $p$  pour plusieurs nombres de Mach de référence (et donc plusieurs valeurs de  $P_t$ ). A l'inverse, lorsque  $P_t \rightarrow \infty$ ,  $U \rightarrow \sqrt{2C_p T_t}$  et  $\frac{\partial U}{\partial p} \rightarrow 0$

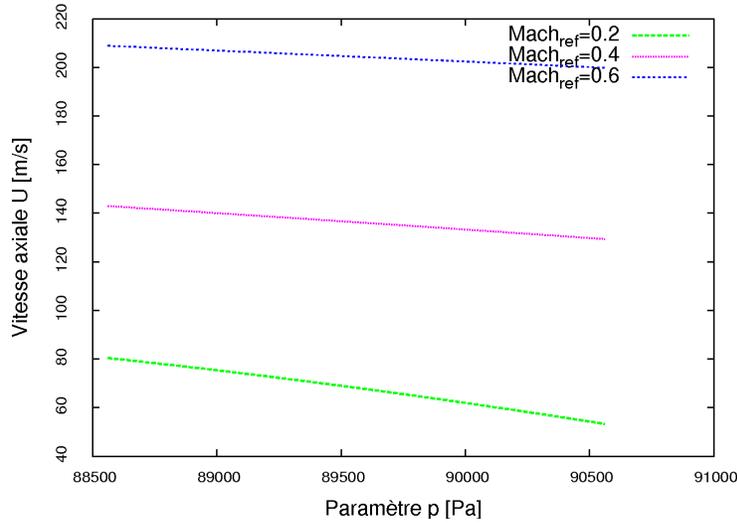


FIG. 4.8 – Evolution de la vitesse  $U$  en fonction de la pression statique  $p$

Cependant, il est très important de constater qu'à partir d'un nombre de Mach égal à 0.2, l'erreur de reconstruction est négligeable, même en bord de plage paramétrique. Sur la figure (Fig. 4.7), on peut mesurer qu'au maximum, l'erreur est :

$Mach_{ref}$	Ecart max. $P_s$ [Pa]	Ecart relatif $P_s$
0.1	102.1	$1.15 \cdot 10^{-3}$
0.2	7.58	$0.86 \cdot 10^{-4}$
0.6	0.09	$1.0 \cdot 10^{-6}$

TAB. 4.1 – Erreur de reconstruction de  $P_s$

Bien que ce cas soit objectivement très simple, on peut néanmoins en déduire que pour des écoulements avec des nombres de Mach moyens (supérieurs à 0.2) ou forts, la reconstruction de la pression statique  $P_s$  à partir des variables conservatives extrapolées est licite. En revanche, pour des écoulements à très faible nombre de Mach, il est impératif de trouver une solution alternative pour déterminer la pression statique.

L'approche envisagée consiste à reconstruire directement les critères non-conservatifs en fonction des paramètres, sans passer par l'intermédiaire des variables conservatives extrapolées. Plus concrètement, pour un critère non-conservatif  $X$  quelconque, on détermine les dérivées  $\frac{\partial X}{\partial \mathbf{p}}$ ,  $\frac{\partial^2 X}{\partial \mathbf{p}^2}$ , etc... pour reconstruire ensuite  $X$  par la méthode de son choix (série de Taylor par exemple).

Dans cette optique, la solution la plus simple est d'exprimer analytiquement les dérivées de  $X$  par rapport aux paramètres comme des fonctions des dérivées des variables conservatives. Ceci peut

être fait en dérivant la relation exprimant  $X$  à partir de  $\mathbf{q}$ . Il suffit ensuite de calculer les dérivées du critère à partir des dérivées fournies par le solveur paramétrique.

Dans l'exemple traité, on utilise ainsi la relation (4.12). Comme la dérivée seconde obtenue de la même manière avec (4.14) est nulle, la reconstruction de la pression statique par rapport au paramètre pression statique avec une série de Taylor est alors exacte.

Dans le cas général, l'expression des  $\frac{\partial^n X}{\partial \mathbf{p}^n}$  est plus complexe, notamment si la définition de  $X$  fait intervenir des termes intégraux. Il faut alors prendre en compte les déformations de la géométrie relativement aux paramètres. La caractérisation des méthodes de reconstruction fait aujourd'hui l'objet d'un développement mené par M. Buisson [16].

#### 4.7.4.3 Application à l'étude du traitement de carter

Quelques essais de reconstruction ont été effectués avec l'aide de M. Buisson sur le cas traité par cette étude, à savoir le traitement de carter pour ventilateurs. On a ainsi cherché à quantifier les améliorations/dégradations apportées par une reconstruction en variables non conservatives sur les objectifs de cette étude, lesquels sont le différentiel de pression statique,  $\Delta P_s$ , de pression totale  $\Delta P_t$  et de vitesse transversale  $\Delta V_y$ . Deux nouvelles reconstructions (sur la base d'une série de Taylor) ont été envisagées :

- la reconstruction de la pression statique  $P_s$  au lieu de l'énergie totale  $\rho E$ . Les six autres variables reconstruites restent conservatives ( $\rho$ ,  $\rho U$ ,  $\rho V$ ,  $\rho W$ ,  $\rho k$  et  $\rho \omega$ )
- la reconstruction de la température totale  $T_t$  au lieu de l'énergie totale  $\rho E$ .

On a représenté sur la figure (Fig. 4.9) les variations des trois objectifs de l'étude en fonction du paramètre d'angle  $\alpha$ , et ce pour les simulations RANS directes (calculs Turb'Flow) et pour les reconstructions envisagées. Le calcul des dérivées (et donc les reconstructions) est effectué à partir du point  $\alpha=115^\circ$ .

La première remarque que l'on puisse faire ici est que la technique de reconstruction n'a pas d'effet sur l'objectif de vitesse  $\Delta V_y$ . Ceci est logique dans la mesure où les reconstructions choisies ne varient pas sur le calcul de la vitesse. On observe en revanche quelques légères différences sur les objectifs de pression statique et de pression totale.

Pour le différentiel de pression statique  $\Delta P_s$ , la reconstruction en température totale est assez similaire à celle en variables conservatives. On observe seulement une *très* légère dégradation pour les angles  $\alpha$  faibles, compensée par une petite amélioration aux grands  $\alpha$ . Pour la reconstruction en  $P_s$ , on retrouve une légère dégradation ( $<1$  Pa) du résultat pour  $\alpha \approx 90^\circ$ . A l'inverse, l'amélioration est plus sensible pour  $\alpha \approx 140^\circ$  puisque le niveau de  $\Delta P_s$  remonte de 1.5 Pa vers le point Turb'Flow. On reste cependant assez loin du point obtenu par simulation RANS directe, ce qui peut laisser penser que le principal problème vient de l'ordre de reconstruction (ordre 2) qui est probablement trop bas.

Pour l'écart de pression totale  $\Delta P_t$ , les tendances sont inversées. Pour les angles faibles ( $\alpha \approx 90^\circ$ ), les différentes techniques de reconstruction donnent des résultats à peu près similaires (l'écart entre les trois courbes reconstruites est inférieur à 0.5 Pa). Pour les angles forts ( $\alpha \approx 140^\circ$ ), la reconstruction conservative est cette fois la meilleure. La reconstruction portant sur la pression statique est celle qui s'écarte le plus du point Turb'Flow.

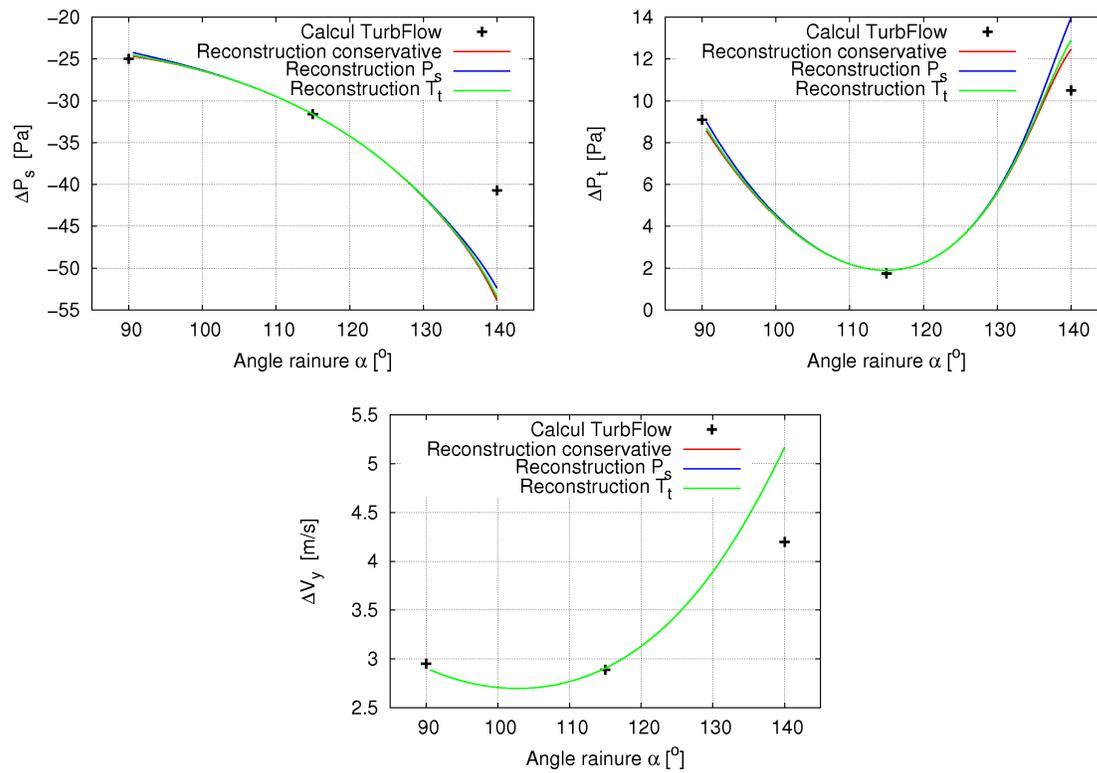


FIG. 4.9 – Reconstruction à l'ordre 2 des objectifs  $\Delta P_s$ ,  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$  - effet des variables de reconstruction

Nous avons aussi essayé des reconstructions basées sur la température statique  $T_s$  (remplaçant  $\rho E$ ) ou les composantes de vitesse  $U, V, W$  (au lieu des composantes de la quantité de mouvement). Toutefois, ces reconstructions ont donné des résultats **quasi-identiques** à une reconstruction portant simplement sur les variables conservatives. Elles ne seront donc pas plus détaillées ici.

A partir de ces résultats, on peut voir que le choix des variables de reconstruction n'est pas absolument critique pour l'étude du traitement de carter. Tout d'abord, les problèmes d'ordre de reconstruction semblent générer une erreur bien plus importante que celle liée aux variables reconstruites. D'autre part, il n'y a pas ici de reconstruction *idéale* puisque une amélioration pour un objectif s'accompagne d'une dégradation pour un autre. Par exemple, la reconstruction en  $P_s$  améliore la prédiction de  $\Delta P_s$  mais dégrade celle de  $\Delta P_t$ . Compte tenu de ces remarques, nous avons fait le choix de **garder la reconstruction conservative** pour le reste de l'étude du traitement de carter.

#### 4.7.4.4 Synthèse

Pour conclure cette partie, on remarquera que la reconstruction est fortement dépendante des conditions de simulation, et plus spécifiquement des conditions aux limites imposées. Dans l'exemple d'écoulement monodimensionnel considéré dans cette partie, il suffit de remarquer que si  $\rho$  et  $\rho U$  avaient été imposées à l'amont en lieu de  $P_t$  et  $T_t$ , le système des conditions aux limites dérivées (4.11) aurait été beaucoup plus simple. Les dérivées retournées par le solveur paramétrique auraient alors permis une reconstruction extrapolée exacte.

Dans ces conditions, on aurait eu :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial p} \\ \frac{\partial \rho U}{\partial p} \\ \frac{\partial \rho E}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\gamma-1} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \\ \frac{\partial^2 \rho U}{\partial p^2} \\ \frac{\partial^2 \rho E}{\partial p^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui implique que pour  $\bar{P}_s$  reconstruite à partir des variables conservatives extrapolées :

$$\frac{\partial \bar{P}_s}{\partial p} = 1, \quad \frac{\partial^2 \bar{P}_s}{\partial p^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \bar{P}_s}{\partial p^3} = 0$$

Il serait donc intéressant à l'avenir de définir, au travers d'un large éventail de cas pratiques, des "règles" spécifiant l'ordre de grandeur de l'erreur de reconstruction attendue pour diverses modélisations, reconstructions et critères représentatifs de la mécanique des fluides (pression, rendement, etc...).

## 4.8 Algorithme Génétique NSGA-II

### 4.8.1 Caractéristiques de l'algorithme

Afin de pouvoir effectuer des optimisations, il a été nécessaire de se doter d'un algorithme génétique performant et adapté à un grand nombre de cas. Il n'était pas très pertinent de développer

entièrement un algorithme, tant pour une question de temps que de technique nécessaires. La sélection s'est ainsi orientée vers une des très nombreuses implémentations disponibles dans la littérature. Le choix a été fait lors du travail de fin d'études de M. Buisson [14] qui a recensé les algorithmes les plus performants puis a programmé les routines permettant le couplage entre l'algorithme retenu et les différents solveurs, extrapolateurs et outils de post-traitement liés à Turb'Opty.

L'algorithme retenu est le Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm-II (NSGA-II) développé par Pratap et Deb [31] au sein du Kampur Genetic Algorithm Laboratory (KanGAL). Cet algorithme est une version dérivée du NSGA proposé par le même laboratoire [174], mais incluant la notion d'élitisme et simplifiant l'opérateur de diversité.

Le NSGA-II est aujourd'hui l'un des algorithmes les plus répandus, sinon le plus utilisé. De nombreuses études font état de son efficacité sur divers problèmes [38, 104, 31, 28], ce qui en fait un candidat idéal pour des optimisations générales. Contrairement à son prédécesseur, cet algorithme utilise une procédure de tri rapide en rangs de Pareto, ainsi qu'un opérateur de diversité basé sur la crowding distance, au lieu du sharing utilisé par NSGA. Dans les deux cas, il s'agit de rendre l'algorithme plus efficace du point de vue matériel en limitant le nombre d'opérations et de paramètres numériques. L'élitisme est quant à lui introduit pour accélérer la convergence de l'optimisation. Le code source de l'algorithme utilisé provient de l'Illinois Genetic Algorithms Laboratory (IlliGAL).

#### 4.8.2 Structure de NSGA-II

L'algorithme peut être décomposé en trois grandes phases, appliquées successivement au sein d'une boucle itérative principale. La structure de l'algorithme NSGA-II est représentée sur la figure (Fig. 4.10).

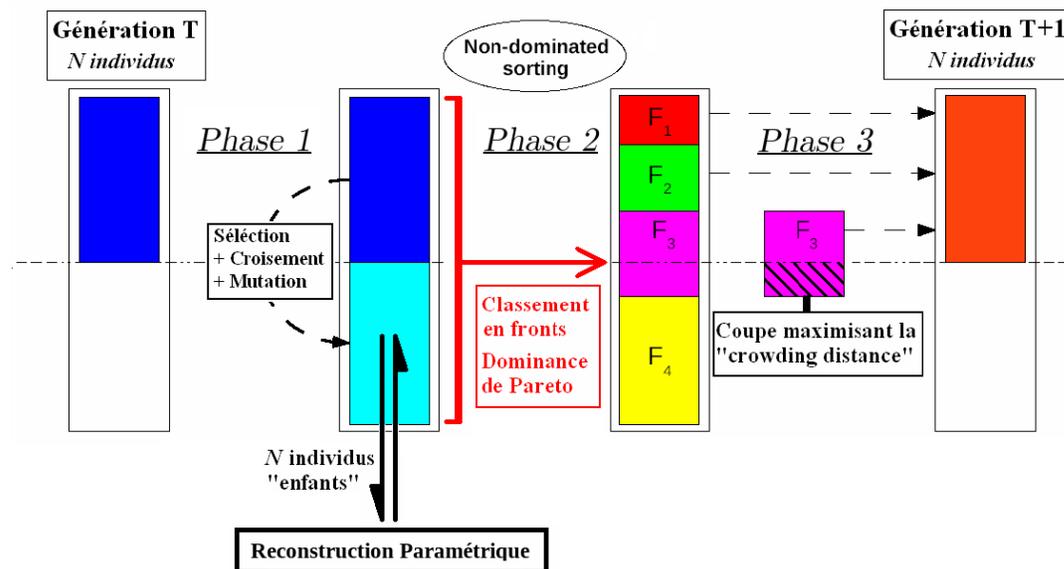


FIG. 4.10 – Structure de l'algorithme NSGA-II

La première de ces phases effectuée par un tournoi (cf. annexe E.1) la sélection de  $N$  individus

appelés à se reproduire, puis effectue le croisement en appliquant un croisement du type "Simulated Binary Crossover" (SBX - cf. annexe E.3.1 pour plus de détails sur cet opérateur) et une mutation polynomiale (cf. annexe E.3.2). Les deux opérateurs génétiques sélectionnés (SBX et mutation polynomiale) permettent d'assurer une reproduction efficace de la population tout en assurant une exploration de l'espace paramétrique.

La taille de tournoi  $S$  sera prise égale à deux. La sélection des individus se fait en premier lieu sur le rang au sens de Pareto, mais en cas d'égalité, on utilisera alors une comparaison en terme de crowding distance.

La seconde phase introduit l'évaluation et le classement des individus. Cette opération peut être subdivisée en deux étapes successives.

1. La première consiste donc à évaluer les nouveaux individus. Tous les membres de la population  $Q^t$  sont envoyés vers le solveur/approximateur utilisé pour obtenir en retour les valeurs des  $f_i$  associées. Dans notre cas, les individus sont évalués par reconstruction paramétrique à partir des résultats fournis par le code Turb'Opty.
2. La seconde étape de cette phase est le classement en rangs de Pareto. Comme cela a été précisé en introduction, l'algorithme NSGA-II fait intervenir l'élitisme pour accélérer la convergence. Ce mécanisme est ici simplement implémenté en combinant la population initiale de l'itération  $P^t$  à la population des enfants  $Q^t$ . On note par suite  $P_{comb}^t$  la population combinée :

$$P_{comb}^t = P^t \cup Q^t$$

Par définition,  $P_{comb}^t$  est une population de taille  $2N$ . Cette population est ensuite triée en fronts successifs  $F_k$ . La phase de tri, conceptuellement identique à celle de NSGA, a néanmoins sensiblement été améliorée du point de vue informatique. Pour réduire le temps de traitement, on attribue à chaque individu  $i$  un groupe  $S_i$  constitué par les individus qu'il domine. Une fois les groupes constitués, la création des fronts ne requiert plus le parcours de l'ensemble de la population.

Comme on peut le remarquer, au sortir de ces deux premières phases, on dispose d'une population de taille  $2N$  qui doit bien évidemment être réduite à  $N$  pour éviter une divergence du nombre d'individus. Il est donc impératif de faire un deuxième tri qui ne perturbe pas pour autant la classification établie. On "élaguera" la population  $P_{comb}^t$  en gardant les  $k'$  meilleurs fronts. Cependant, il est rarissime que ces  $k'$  fronts regroupent exactement  $N$  individus, ce qui implique de pratiquer une coupe dans le dernier front. C'est ici qu'intervient la notion de crowding distance. Elle est utilisée pour établir un classement des individus à l'intérieur des fronts. La troisième phase est le calcul de ce critère. Elle est effectuée pour l'ensemble de la population, et ce pour deux raisons :

1. On ne "connaît" pas encore à ce niveau combien de fronts seront retenus pour la population  $P^{t+1}$
2. Le mécanisme de sélection fait lui aussi potentiellement appel à cette grandeur. Elle doit donc être déterminée préalablement pour tous les individus qui seront retenus dans  $P^{t+1}$

Cette phase pourra, à l'avenir être légèrement améliorée en déterminant préalablement le nombre  $k'$  de fronts retenus et en ne calculant la distance que pour ces fronts.

Ces trois phases sont combinées au sein d'une boucle itérative. Cette boucle opère le passage de la population  $P_{comb}^t$  à la nouvelle génération  $P^{t+1}$  en découpant selon la crowding distance le dernier front  $k'$  retenu.

## 4.9 Post-traitement de l'optimisation

Une fois l'optimisation effectuée, il reste à en dépouiller le résultat pour essayer, entre autre, de comprendre la physique sous-jacente du cas traité et si possible, de dégager des résultats supplémentaires comme les grandes tendances d'évolution et la sensibilité des objectifs relativement à chaque paramètre. En effet, il conviendra de remarquer que l'optimisation retourne une ou plusieurs solutions optimales et, même si le processus peut s'appuyer sur des informations spécifiques, telles que les gradients des objectifs relativement aux paramètres, ces informations sont généralement perdues lors de la restitution à l'utilisateur. D'autre part, il peut être nécessaire de quantifier des critères externes, tels que la robustesse d'une configuration ou la variation d'un paramètre par rapport à un autre au sein d'une population optimale, difficiles voire impossibles à intégrer dans le processus d'optimisation. Ces critères ne peuvent alors être déterminés que par un post-traitement effectué après l'optimisation.

La problématique du post-traitement en sortie d'optimisation s'inscrit dans le cadre de la visualisation d'un ensemble de données, une *base de données*. Le plus gros problème de l'optimisation multi-paramétrique et multi-objectifs est la dimension  $D$  importante de l'espace à dépouiller, qui est constitué de la réunion des espaces paramétriques et objectifs. De manière générale,  $D = N + I \gg 3$ , cet espace dépasse de fait largement les systèmes de représentation accessibles à l'être humain, lequel reste assez naturellement limité aux espaces à trois ou quatre dimensions.

### 4.9.1 Méthodes de visualisation classiques

Dans un premier temps, on cherche à représenter directement les variables en sortie d'optimisation, c'est-à-dire les objectifs et les valeurs de paramètres correspondants, afin d'essayer de trouver et comprendre les relations existantes. De manière plus concrète, on représente le front de Pareto à la fois dans l'espace paramétrique et dans l'espace objectif.

On se heurte alors très vite à un problème majeur : comment représenter efficacement une hypersurface, ou un hypervolume défini dans un espace de grande dimension ? La solution la plus "simple" et intuitive consiste à projeter cette surface (ou volume) dans plusieurs sous espaces de dimensions 2 ou 3.

Supposons qu'on dispose d'un cas bi-paramétrique tri-objectifs ( $P = 2, I = 3$ ). Représenter le front de Pareto dans l'espace objectif ne pose aucun problème, pas plus que dans l'espace paramétrique. Mais comment représenter le front dans ces deux espaces simultanément ? Pour avoir l'analyse la plus fiable possible, on doit alors représenter le front en le projetant

- Soit sur tous les plans  $(x_i, x, j)$ ,  $(x_i, f_j)$  et  $(f_i, f_j)$ . Dans notre cas, on obtient  $1+6+3=10$  projections à faire.
- Soit dans tous les espaces  $(x_i, x_j, f_k)$ ,  $(x_i, f_j, f_k)$  et  $(f_i, f_j, f_k)$ . On obtient  $3+6+1=10$  autres graphiques.

Le plus gros problème avec une telle approche est de pouvoir identifier les mêmes individus d'un graphique à un autre. Il n'existe en effet aucune raison pour que l'agencement dans un sous-espace paramétrique ressemble à celui dans un sous-espace objectif, les populations apparaissant souvent sous la forme de nuages de points. Au-delà de trois ou quatre graphiques à traiter, comprendre ce qui est représenté devient un vrai défi.

### 4.9.2 Partitionnement de population

On dépassera ici le strict cadre de la visualisation pour traiter d'autres aspects du post-traitement. Il peut souvent être nécessaire d'effectuer un partitionnement de la population fondé sur une ressemblance entre les individus. L'intérêt de la technique est de classer la population en plusieurs catégories distinctes afin de faciliter ensuite la compréhension des différents mécanismes physiques ou de faire facilement un choix dans une classe donnée. On commencera par définir une partition de Voronoï associée à un élément  $\mathbf{x}$ .

**Définition 4.7 :** [PARTITION DE VORONOÏ]

Soit un ensemble  $E$  et un sous-ensemble fini  $F$  d'éléments de  $E$ . Soit un élément  $a \in F$ . On définit  $V_a$  la partition de Voronoï associée à  $a$  comme :

$$V_a = \{x \in E \text{ tels que } \exists b \in F, d(x, a) \geq d(x, b)\} \quad (4.19)$$

où  $d(.,.)$  est une distance définie dans  $E$

Dit autrement, la partition de Voronoï associée au point  $a$  est la partie de l'espace qui est plus proche de  $a$  que de tout autre point  $b$  issu d'un ensemble fini.

La méthode de partitionnement la plus répandue aujourd'hui est le partitionnement moyen sur  $k$  ensembles ("k-means clustering"). On définit ainsi  $k$  partition de Voronoï dans la population optimale, les centres  $\mathbf{g}_k$  de ces partitions sont par ailleurs définis comme leur centre de gravité. Pour trouver ces centroïdes, on minimise les erreurs  $E_k$  exprimées dans la formule suivante :

$$E_k = \sum_i \|\mathbf{x} - \mathbf{g}_{c(\mathbf{x}_k)}\| \quad (4.20)$$

où  $c(\mathbf{x}_k)$  est l'indice du centroïde le plus proche de  $\mathbf{x}_k$ .

En pratique, la construction des partitions s'effectue itérativement en modifiant progressivement la position des  $\mathbf{g}_k$ . L'initialisation est effectuée en sélectionnant  $k$  individus au hasard. Le choix du nombre de partitions n'est pas anodin. Le meilleur partitionnement  $Q$  possible minimise l'indice de Davies-Bouldin [188] :

$$DB(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \max_{l \neq j} \left( \frac{S(Q_j) + S(Q_l)}{d_c(Q_j, Q_l)} \right) \quad (4.21)$$

où  $S(Q_j)$  est la moyenne des distances  $\|\mathbf{x} - \mathbf{g}_j\|$ ,  $\mathbf{x} \in Q_j$  et  $d_c(Q_j, Q_l)$  est la distance entre les centres de partitions. Globalement, minimiser cet indice revient à avoir les ensembles les plus compacts possibles et/ou les plus nettement séparés.

La méthode souffre de trois limites. Tout d'abord, si on souhaite trouver le meilleur partitionnement, il est nécessaire d'effectuer plusieurs tests en faisant varier  $k$  ce qui n'est pas toujours pratique. On peut néanmoins se contenter d'un nombre arbitraire de partitions mais on risque alors de trouver un mauvais partitionnement.

D'autre part, la forme des partitions est implicitement déterminée par la distance utilisée. En utilisant une distance euclidienne, les partitions seront donc globalement sphériques. En outre, il est impossible d'obtenir une partition concave.

La dernière limite de la méthode, et son plus gros défaut, est l'initialisation aléatoire. Deux partitionnements à  $k$  ensembles effectués sur une même population aboutiront généralement à deux ensembles de partitions différents. Cette non-répétabilité de la méthode enlève vite tout crédit au résultat obtenu.

### 4.9.3 Self-Organizing Map

#### 4.9.3.1 Présentation des SOM

Les Self-Organizing Maps (SOM) ont été introduites par T. Kohonen au début des années quatre-vingt [106]. Il s'agit en fait d'une classe particulière de réseau de neurones destinés à structurer les populations de grande dimension. Il existe en pratique une large variété d'applications possibles pour ces algorithmes, mais nous nous concentrerons uniquement sur la visualisation. Les SOM fonctionnent alors comme des projecteurs de la population sur des plans.

De par leur principe de base, les SOM se prêtent très bien à la visualisation d'ensembles d'éléments. Il s'agit d'une méthode de projection d'une population sur un plan, respectant les propriétés topologiques de cette dernière. Par propriété topologique, on entend généralement la conservation de la structure de la population : si deux individus sont assez similaires, il est souhaitable qu'ils soient représentés côte à côte. Le support de visualisation n'est plus la 3D mais un ensemble de cartes, chaque carte reprenant une seule information.

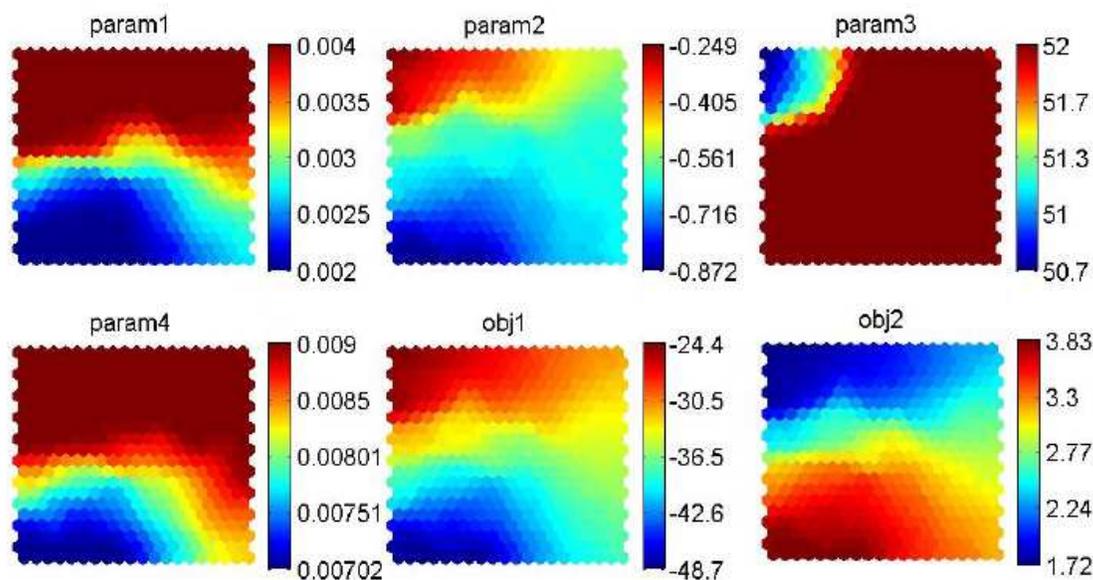


FIG. 4.11 – Exemple de représentation SOM

La figure (Fig. 4.11) illustre une cartographie donnée par une méthode SOM. Il s'agit de la visualisation d'une population sortant d'une optimisation à quatre paramètres et deux objectifs. Chaque carte traite une seule dimension du problème, soit un paramètre, soit un objectif, la valeur étant représentée par un code de couleurs.

Comment doit-on comprendre ce type de visualisation ? On utilisera pour cela l'analogie avec un document géographique. Pour un même pays, c'est-à-dire une même forme géographique, il est possible de représenter plusieurs informations. On peut par exemple montrer la densité de population, le revenu moyen local, l'altitude, la pluviométrie ... Dans tous les cas, seule la carte de

couleur associée à l'information change, la position des régions ou des villes ne varie bien évidemment pas.

La visualisation par SOM s'appuie exactement sur le même principe. Pour une carte, chaque point représente un individu donné, la position de l'individu restant la même d'une carte à l'autre. On peut ainsi facilement comparer tous les objectifs et paramètres. C'est cette structuration dans un espace géométrique qui fait défaut aux méthodes de visualisation classiques.

De la même manière, on peut espérer définir des partitions en se fondant sur les similitudes entre individus, qui ressortent ici facilement.

Pour pouvoir poursuivre notre étude, nous avons choisi d'utiliser un algorithme SOM déjà disponible. Notre choix s'est porté sur celui donné dans la "SOM Toolbox" développée par l'université d'Helsinki [189]

### 4.9.3.2 Construction des SOM

Les SOM sont à la base des réseaux constitués de  $Q$  neurones. Cette technique est plus particulièrement proche des Radial Basis Functions du point de vue du concept. On associe à chaque neurone une position donnée, et fixe, dans un plan. On utilise pour ce faire un treillis de points, lequel peut être à structure carrée ou hexagonale, cette dernière étant la plus courante car elle garantit une meilleure compacité. Dans les deux cas, la topologie est régulière et la distance entre deux points voisins est égale à l'unité.

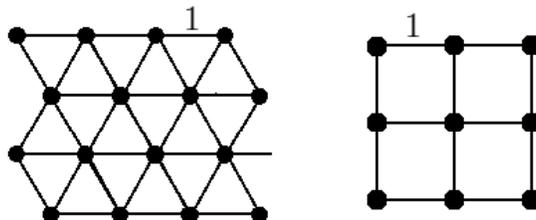


FIG. 4.12 – Treillis hexagonal et rectangulaire

Par ailleurs, on associe à chaque neurone  $j$  un vecteur prototype  $\mathbf{m}_j$ , de dimension  $I + P$ . Pour établir l'analogie avec les RBF, le vecteur  $m_j$  correspond à la définition des centres des fonctions  $c_j$ . La règle la plus fondamentale dans un réseau de neurones SOM est que la valeur du vecteur prototype peut varier, mais en aucun cas le point où celui-ci sera représenté.

La phase cruciale lors de l'utilisation des SOM est l'apprentissage par le réseau de neurones. Il s'agit d'un apprentissage non supervisé, au sens où on ne contrôle pas la sortie de l'algorithme, et on le laisse s'organiser automatiquement. Il existe deux types d'apprentissage. Le premier est séquentiel et présente l'avantage de la simplicité. Le second est matriciel, et il garantit une certaine robustesse au processus.

L'apprentissage se caractérise par une mise à jour des vecteurs prototypes pour imiter le mieux possible la population à projeter tout en gardant une notion de similitude entre neurones géographiquement voisins.

**Définition 4.8 :** [BEST MATCHING UNIT]

On appelle *BMU* d'un individu  $\mathbf{Ind}_i$  de la population à projeter le vecteur prototype  $\mathbf{m}_c$  qui minimise la distance euclidienne avec  $\mathbf{Ind}_i$  parmi tous les neurones possibles :

$$\|\mathbf{Ind}_i - \mathbf{m}_c\|^2 = \min_j \sum_{k=1}^{I+P} (\text{Ind}_i^k - m_j^k)^2$$

où  $\text{Ind}_i^k$  et  $m_j^k$  sont respectivement les  $k$ -ièmes coordonnées des vecteurs  $\mathbf{Ind}_i$  et  $\mathbf{m}_j$ .

Concrètement, le BMU est le neurone (ou plutôt le vecteur prototype associé) qui représente le mieux un individu de la population à traiter.

**4.9.3.3 Apprentissage séquentiel**

L'apprentissage est ici effectué en considérant, successivement et itérativement, un seul individu de la population à la fois. Pour chaque itération ( $t$ ) de l'apprentissage, on sélectionne donc aléatoirement un individu  $\mathbf{Ind}_i$ .

Le BMU  $\mathbf{m}_c(t, i)$  de l'individu est alors déterminé, puis on met à jour l'ensemble des vecteurs prototypes selon la formule :

$$\mathbf{m}_j(t+1) = \mathbf{m}_j(t) + \alpha(t)h_{cj}(t)[\mathbf{Ind}_i - \mathbf{m}_j] \quad (4.22)$$

où  $\alpha(t)$  et  $h_{cj}(t)$  sont respectivement le taux d'apprentissage et la valeur de la fonction de voisinage (dans le plan treillis de représentation) pour le point du treillis associé à  $\mathbf{m}_j$ .

$$h_{cj}(t) = e^{-\frac{d_{cj}^2}{2\sigma_t^2}} \quad (4.23)$$

où  $\sigma_t$  est un rayon caractéristique dépendant de l'itération et  $d_{cj}$  est la distance euclidienne entre les points correspondant à  $\mathbf{m}_c$  et  $\mathbf{m}_j$ .

$\sigma_t$  est une fonction décroissante afin de limiter les corrections globales ( $\sigma$  grand) qui tendent à perturber l'apprentissage au bout d'un certain temps.

La définition qui vient d'être faite de  $h_{cj}$  correspond à une Gaussienne centrée sur  $c$  et de largeur caractéristique  $\sigma_t$ . Il existe en pratique de nombreuses autres définitions, avec des domaines d'influence de formes et de tailles différentes. Cependant, la définition gaussienne reste le meilleur compromis en terme de vitesse d'apprentissage et de précision obtenue [46].

La notion de distance est absolument essentielle car elle assure que des individus voisins sur la carte seront (probablement) voisins en terme de paramètres et objectifs. La correction appliquée avec un certain rayon d'efficacité permet de rapprocher le BMU et ses voisins de l'individu sélectionné.

$\alpha(t)$  est une fonction du temps habituellement décroissante. On considère en effet que plus il y aura eu d'itérations, plus la correction devra être minime pour assurer une convergence. Cette fonction peut aussi être interprétée comme une pondération de l'amplitude de la Gaussienne  $h_{cj}$ , ce qui correspond de fait à un paramètre influençant la force des corrections pour une distance  $d_{cj}$  donnée.

L'inconvénient de cette méthode est le caractère aléatoire de l'apprentissage. Il est ainsi possible d'obtenir, en répétant l'apprentissage, deux topologies différentes pour une même population.

#### 4.9.3.4 Apprentissage matriciel

Dans cette deuxième approche, l'apprentissage est effectué en utilisant simultanément plusieurs individus, généralement les  $N$  présents dans la population à traiter. On définit ainsi une matrice  $P$  de dimensions  $Q \times N$  telle que :

- $P_{ki} = 1$  si  $\mathbf{m}_k$  est le BMU de l'individu  $\mathbf{Ind}_i$
- $P_{ki} = 0$  sinon

Concrètement, cela revient à établir le partitionnement au sens de Voronoï de la population à traiter, les partitions étant définies par rapport aux  $\mathbf{m}_k$ . On retiendra en particulier que plusieurs individus  $\mathbf{Ind}_i$  peuvent avoir le même BMU.

Une fois la matrice  $P$  déterminée, on met à jour les vecteurs prototypes :

1. Pour chaque neurone  $k$ , on calcule la somme  $\mathbf{s}_k$

$$\mathbf{s}_k(t) = \sum_{i=1}^{n_{V_k}} \mathbf{Ind}_i \quad (4.24)$$

où  $n_{V_k}$  est le nombre d'individus dans la partition de Voronoï  $V_k$ , soit aussi le nombre de termes non nuls sur la  $k$ -ième ligne de la matrice  $P$ .

2. On corrige les vecteurs prototypes :

$$\forall k = 1, \dots, Q, \quad \mathbf{m}_k(t) = \frac{\sum_{c=1}^Q h_{ck}(t) \mathbf{s}_c(t)}{\sum_{c=1}^Q h_{ck}(t) n_{V_c}} \quad (4.25)$$

où  $h_{ck}$  est une fonction de voisinage définie comme précédemment. On obtient alors en tout point une valeur moyenne pondérée de la population, les coefficients de pondération étant les  $h_{ck}$

Ces deux étapes sont répétées au sein d'un processus itératif jusqu'à obtenir une convergence suffisante. A la différence de l'apprentissage séquentiel, il n'existe pas ici de taux d'apprentissage  $\alpha(t)$ , mais la notion d'évolution temporelle est quand même implémentée au travers de la fonction de voisinage  $h_{ck}$  et du rayon de voisinage  $\sigma_t$  correspondant.

Cette technique a l'avantage de ne pas présenter le caractère aléatoire de la précédente. Puisque tous les individus  $\mathbf{Ind}_i$  sont traités simultanément, il n'existe pas de choix possible et donc pas de risque de changements dans l'apprentissage. En contrepartie, cette technique utilise plus intensivement la mémoire en raison du traitement matriciel ; on traite en effet (au moins) une matrice de taille  $N \times Q$  qu'il est nécessaire de stocker intégralement.

Pour ce qui est des vitesses de convergence, la complexité d'une itération de l'apprentissage est de l'ordre de  $N \times Q \times (I + P)$ , celle de l'apprentissage est à moitié moins coûteuse si  $N \gg Q$  mais en revanche, elle est de l'ordre de  $Q^2$  si  $Q \gg N$ .

#### 4.9.3.5 Taille des cartes

La taille des cartes reconstituées est importante pour la précision de la reconstruction. Plusieurs cas de figure sont possibles en fonction du nombre  $Q$  de neurones choisis.

- Si le nombre de neurones est inférieur à la taille  $N$  de la population à représenter ( $Q < N$ ), il existera obligatoirement des neurones représentant plusieurs individus simultanément. On introduit alors un effet de moyenne lié aux partitions de Voronoï.
- Si  $Q = N$ , il est en théorie possible de représenter exactement la population pour peu que l'apprentissage soit suffisamment long. Cette dernière remarque suppose néanmoins que le rayon de voisinage décroisse en dessous de 1 afin d'assurer la similitude entre seulement un individu et un vecteur prototype (son BMU)
- Si  $Q > N$ , il existera des partitions de Voronoï vides, ce qui signifie aussi que certains neurones, et donc les vecteurs prototypes associés, sont déterminés uniquement par l'influence distante d'autres neurones. Dans ce cas, on obtient une interpolation locale de la population.

Le premier et le dernier cas introduisent une notion d'approximation dans la représentation de la population. Cette "erreur" n'est généralement pas critique, pour peu que  $Q \approx N$ . De manière générale, il est souhaitable d'avoir  $Q \geq N$ , puisque, dans un cas certes extrême, un seul neurone ne pourra jamais représenter correctement la diversité de plusieurs individus ; à l'opposé de trop nombreux neurones représenteront toute la diversité et parfois un peu plus.

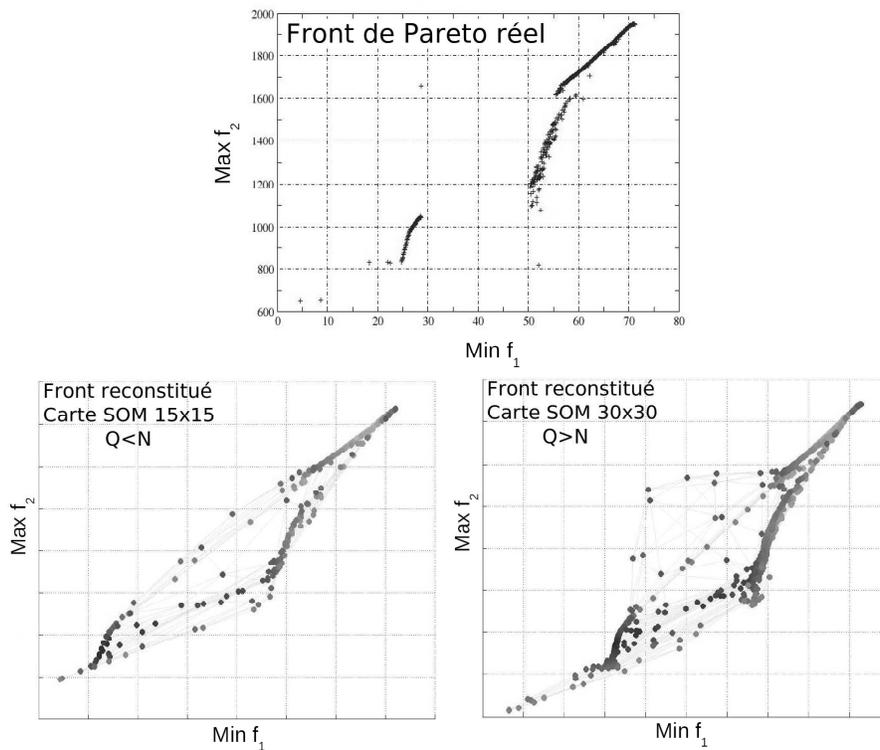


FIG. 4.13 – Introduction de vecteurs prototypes interpolés par la SOM

L'approximation générée peut cependant être observée lorsque la population Pareto-optimale est discontinue dans au moins une dimension parmi les  $I + P$  possibles. Le meilleur moyen de s'en rendre compte est de tracer le "front" obtenu avec les vecteurs prototypes, et le front de Pareto réel.

On voit nettement sur la figure (Fig. 4.13) que des points apparaissent au niveau de la discontinuité pour la reconstruction SOM. Ceci est dû au phénomène d'interpolation qui se produit lors de

l'apprentissage sur une trop grande carte, ou bien à la moyenne opérée par ce même apprentissage sur une carte trop petite. Dans les deux cas, on retrouve alors des solutions qui ne sont pas vraiment Pareto-optimales.

Il est possible d'évaluer le niveau général d'interpolation associée à la SOM en calculant le nombre d'individus associés, au sens du BMU, à chaque vecteur prototype. De manière évidente, les vecteurs prototypes purement interpolés ne sont généralement le BMU d'aucun individu de la population optimale. En traçant cette information sur une carte respectant la topologie des cartes issues de la SOM, on peut alors déterminer quelles sont les zones approchées et quelles sont les zones vraiment représentatives de la population.

#### 4.9.3.6 Initialisation des cartes

Afin de garder une cohérence entre les différentes dimensions traitées lors de l'apprentissage, il est nécessaire de reformuler un peu le problème. En effet, pour chaque paramètre ou objectif, on peut attendre un niveau moyen et un écart type différents des autres dimensions, ce qui peut conduire au final à un biais dans la mise à jour. Pour cela, on choisit généralement de normaliser les données du problème afin d'effectuer un traitement standard par la suite.

On définit ainsi :

$$\widehat{Ind}_{ij} = \frac{Ind_{ij} - \bar{g}_j}{\sqrt{N}\mu_j} \quad (4.26)$$

où  $\bar{g}_j$  est la moyenne de la j-ème composante des vecteurs  $\mathbf{Ind}$

$$\bar{g}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Ind_{ij}$$

et  $\mu_j$  est l'écart type de la j-ème composante :

$$\mu_j^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Ind_{ij} - \bar{g}_j)^2$$

En pratique, cette opération revient à faire un changement de repère dans l'espace traité de dimension  $I + P$  traité. Le nouveau centre est le barycentre  $\mathbf{G} = (\bar{g}_{j=1, \dots, I+P})$

En faisant cette opération, on ne résout cependant pas le problème de l'initialisation des cartes. On ne dispose toujours pas d'informations permettant de définir deux directions pour chaque paramètre ou objectif considéré. L'idéal serait de pouvoir projeter la population dans un plan de l'espace traité afin d'en sortir deux vecteurs de base. La projection ne doit néanmoins pas être faite au hasard pour ne pas altérer la qualité de la visualisation.

La détermination du plan de projection est connue sous le nom d'Analyse en Composantes Principales. Il s'agit concrètement de déterminer le plan qui conserve le plus d'informations possibles du nuage de points à projeter. Ce plan est déterminé par la position du point  $\mathbf{G}$  et par deux vecteurs linéairement indépendants notés  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$ .

Le problème peut s'écrire formellement comme suit :

$$\text{trouver } \mathbf{a}_1 \text{ et } \mathbf{a}_2 \text{ tels que } \sum_{i=1}^N \left\| \mathbf{Ind}_i - \mathbf{Ind}_i^{(a_1, a_2)} \right\|_2^2 \text{ soit minimale}$$

où  $\mathbf{Ind}_i^{(a_1, a_2)}$  est le projeté orthogonal de  $\mathbf{Ind}_i$  sur le plan cherché.

Avec le théorème de Pythagore appliqué au triangle formé par les points  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{Ind}_i^{(a_1, a_2)}$  et  $\mathbf{Ind}_i$ , on montre que cette formulation est équivalente à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{a}_1 \text{ tel que } \sum_{i=1}^N \|\mathbf{G} + (\mathbf{Ind}_i \cdot \mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1\|_2^2 \text{ soit maximale} \\ \text{Trouver } \mathbf{a}_2 \text{ orthogonal à } \mathbf{a}_1 \text{ tels que } \sum_{i=1}^N \|\mathbf{G} + (\mathbf{Ind}_i \cdot \mathbf{a}_2)\mathbf{a}_2\|_2^2 \text{ soit maximale} \end{array} \right.$$

La détermination de  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  fait intervenir la matrice de corrélation  $R = \hat{X}^T \cdot \hat{X}$  où  $\hat{X}$  est la matrice de taille  $N \times (I + P)$  constituée par tous les individus à représenter écrits en lignes après avoir été normalisés.  $R$  est une matrice carrée symétrique définie positive de taille  $(I + P) \times (I + P)$ . La matrice  $R$  traduit la corrélation de chacun des  $I + P$  vecteurs composantes relativement aux autres composantes. Chaque vecteur composante donne la valeur d'un paramètre ou d'un objectif pour tous les individus de la population.

On montre que les vecteurs  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont les vecteurs propres de  $R$  associés respectivement à la plus grande valeur propre  $\lambda_1$  et la seconde plus grande valeur propre  $\lambda_2$  [15].

L'intérêt de sélectionner ces deux vecteurs est qu'on maximalise ainsi la variance de la population dans le plan de projection. En effet, la matrice  $R$  ne possède sur sa diagonale que des 1, correspondant à l'écart type de chaque composante pour les  $\mathbf{Ind}$ . La trace de  $R$  caractérise la dispersion, dans l'espace initial, de la population à projeter. Les valeurs propres de  $R$  correspondent donc à l'écart type de chaque composante exprimé dans la base des vecteurs propres, et la somme de ces valeurs propres correspond aussi à la dispersion de la population. En sélectionnant les deux plus grandes valeurs propres, on s'assure de maximaliser l'écart type de la population projetée sur le plan correspondant.

Plus la fraction  $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sum_{j=1}^{I+P} \lambda_j}$  est proche de 1, meilleure sera la projection dans le plan engendré par  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$

#### 4.9.3.7 Informations supplémentaires associées aux SOM

**Validité de la représentation et corrélation entre variables.** La matrice  $R$  utilisée pour l'analyse en composantes principales sur la population fait intervenir la corrélation de chaque variable, paramètre ou objectif, exprimée pour l'ensemble de la population. On peut ainsi espérer dégager des similitudes entre ces différentes composantes afin, par exemple, de prédire quel sera l'objectif le plus influencé par un paramètre.

On peut pour cela considérer un à un les termes  $R_{ij}$  de la matrice  $R$ . Trois cas remarquables se présentent :

- $R_{i,j} = 1$  : les composantes  $i$  et  $j$  sont positivement corrélées. Toute variation de l'une induira une variation de l'autre dans le même sens au sein de la population optimale
- $R_{i,j} = 0$  : les composantes sont statistiquement décorréliées.
- $R_{i,j} = -1$  : les composantes sont négativement corrélées. Elles évolueront donc en sens inverse au sein de la population optimale.

Les termes  $R_{ij}$  peuvent aussi être perçus comme le cosinus de l'angle existant entre les vecteurs composantes associés. De manière évidente, il existe une infinité de cas possibles entre les trois

configurations remarquables présentées, traduisant une plus ou moins grande corrélation entre les différentes composantes.

Il est possible de représenter graphiquement la corrélation entre les différentes composantes. Pour cela, il est pratique de projeter ces vecteurs dans un plan conservant le maximum d'informations au sein de la population. On peut alors appliquer l'analyse en composantes principales non pas aux individus, mais aux paramètres et objectifs de la population.

Dans ce but, on considère la matrice  $R' = \hat{X} \cdot \hat{X}^T$ , de taille  $N \times N$ . En appliquant la même démarche, on obtient la meilleure projection en utilisant les vecteurs  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  associés aux deux plus grandes valeurs propres de  $R'$ . De manière évidente, on a  $R' = R'^T$ . On peut en déduire que les  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{b}_i$  sont liés.

$$\forall i, \mathbf{b}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \hat{X} \mathbf{a}_i$$

Si la matrice  $R$  a déjà été diagonalisée, il n'est donc pas nécessaire de répéter l'opération pour  $R'$  afin de trouver ses vecteurs propres.

Les vecteurs  $\mathbf{b}_{1,2}$  sont de dimension  $N$ . Ils permettent de projeter les vecteurs composantes en respectant le plus possible les corrélations existant au sein de la population optimale. On obtient alors une représentation comme illustrée sur la figure (Fig. 4.14).

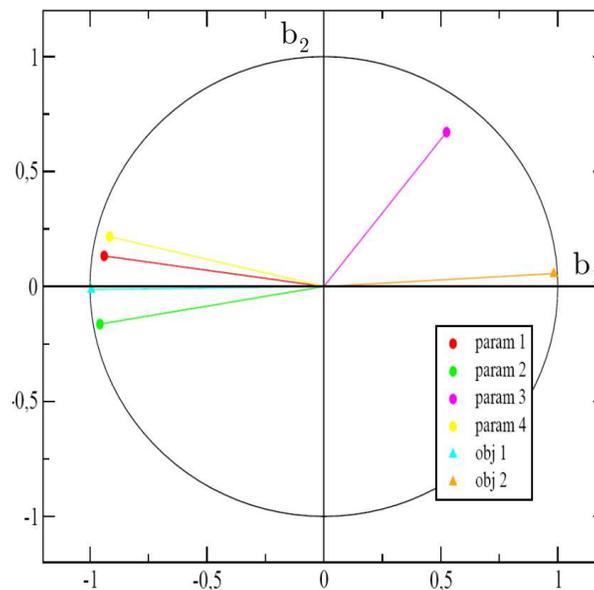


FIG. 4.14 – Analyse en composantes principales sur les variables - visualisation des corrélations

Deux informations majeures apparaissent sur cette figure :

- En premier lieu, les coordonnées de chaque vecteur composante projeté dans ce plan correspondent à la corrélation du vecteur composante original avec les deux vecteurs de base  $\mathbf{b}_{1,2}$ . En d'autres termes, si le vecteur composante est représenté exactement dans ce plan, la norme du vecteur projeté est égale à 1. Une norme inférieure traduit l'approximation faite lors de la projection.
- En deuxième lieu, les angles existant entre les différents vecteurs traduisent le degré de corrélation que l'on cherche à représenter

Sur la figure, on voit donc que les deux objectifs sont bien représentés par la projection, et qu'ils sont négativement corrélés. On trouve aussi que les paramètres 1, 2 et 4 sont globalement positivement corrélés avec le premier objectif, seul le paramètre 3 se distingue d'abord par une mauvaise projection, et ensuite une décorrélation assez forte avec le reste des variables.

**Partitionnement.** Une autre information peut être issue de la SOM. Il s'agit du partitionnement de la population optimale. En effet, les SOM représentent les individus en intégrant une notion de topologie, c'est à dire de ressemblance entre des vecteurs prototypes voisins. Même si ce ne sont pas des algorithmes de partitionnement, ils tendent à générer des zones cohérentes du point de vue d'un ou plusieurs paramètres ou objectifs. Il est cependant possible d'avoir des discontinuités entre deux zones cohérentes, notamment si la population traitée est elle-même discontinue. Pour caractériser les différentes discontinuités existant dans les cartes générées par la SOM, on introduit le critère de la "U-Matrix" [182, 54], qui évalue la distance euclidienne entre les vecteurs prototypes de deux neurones voisins. Concrètement, pour un treillis hexagonal, chaque point est comparé, au sens de la distance euclidienne sur les vecteurs prototypes, avec ses six voisins. On représente ensuite ce critère en utilisant la structure des cartes standard.

On arrive ainsi à mettre en évidence dans une seule carte toutes les discontinuités ou variations brusques qui apparaissent pour l'ensemble des paramètres et objectifs. On peut alors avoir une idée assez précise du partitionnement possible de la population.

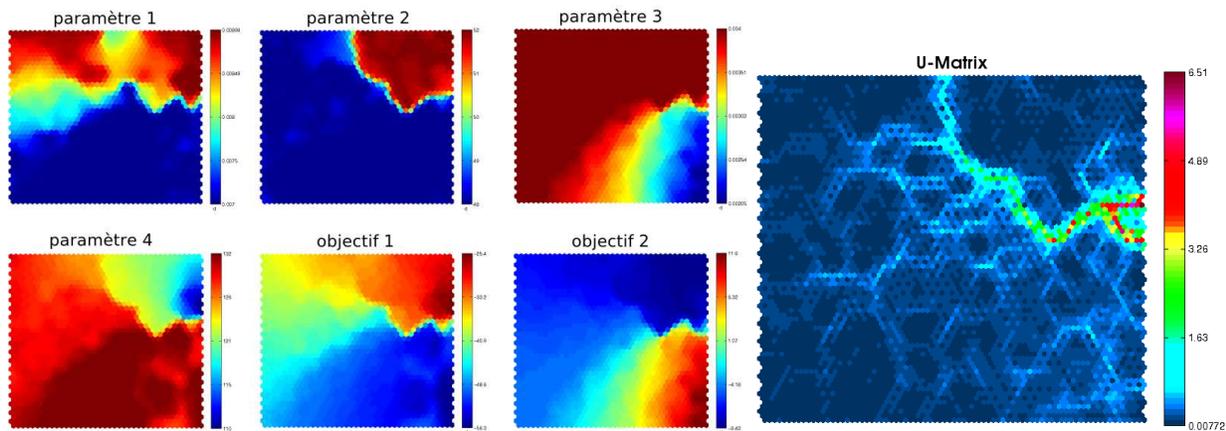


FIG. 4.15 – Représentation de la distance U-Matrix

Sur la figure (Fig. 4.15), on observe la cartographie de distance "U-Matrix" associée à une population optimale. On repère très nettement dans le coin gauche supérieur une zone homogène, i.e. avec une faible distance inter-individus, séparée du reste de la carte par un saut de distance. Cette zone se retrouve nettement pour le deuxième paramètre, et dans une moindre mesure pour les paramètres 1,4 et le premier objectif.

On peut caractériser la "force" d'une frontière en déterminant la distance au sens U-Matrix associée. Plus cette mesure sera élevée, plus les zones séparées seront distinctes, et ce de deux manières :

- Seules quelques variables présentent cette frontière, mais avec une grande variation au travers de la séparation.

- Toutes les variables présentent cette frontière, de manière plus ou moins marquée.

Sur la carte présentée, on voit donc qu'il existe deux frontières fortes, séparant deux enclaves du reste de la carte. La première a déjà été décrite. La seconde, de petite taille, est collée au bord de la carte. Elle correspond à une différence de comportement entre, d'un côté le paramètre 2, et de l'autre le reste des variables. Hormis cette petite enclave, la frontière apparaissant à mi-hauteur de la carte est commune à toutes les variables.

On distingue en revanche un réseau assez confus de petites frontières, ressortant faiblement sur la carte. Elle mettent en évidence les petites variations qui apparaissent pour les différentes variables. Toutes ne sont cependant pas pertinentes du point de vue de la compréhension ou du partitionnement, car elles ne délimitent pas de zone vraiment évidente de la carte.

On soulignera que l'utilisation de la norme U-Matrix n'est vraiment pertinente que pour un cas comportant beaucoup de variables, car elle apporte alors une aide substantielle à l'utilisateur pour synthétiser et, dans un sens, superposer les différentes cartes. Sur un cas aussi simple que celui présenté en (Fig. 4.15), il est possible de trouver ces frontières d'un simple regard.

**Robustesse.** La robustesse d'un dessin peut aussi être *esquissée* par une visualisation de type SOM. Elle est plus ou moins liée à la notion de partitionnement précédemment exposée. En effet, il est facile avec ces représentations de repérer les zones sur lesquelles les objectifs varient peu relativement aux paramètres, correspondant donc aux zones de dessins robustes. A l'inverse, on peut aussi identifier des zones critiques pour lesquels un paramètre est à peu près constant, et les objectifs sont discontinus.

De manière plus générale, les SOM permettent de trouver immédiatement les plages de variation des différents paramètres et objectifs. On peut alors facilement discerner quels sont les paramètres ayant peu d'influence, de ceux qui sont critiques.

Cependant, la notion de robustesse n'est souvent ici que partielle dans la mesure où les cartes s'appuient sur la population optimale, et donc des ensembles de paramètres optimaux. On ne peut pas, dans le cas général, dégager l'influence d'un seul paramètre à partir d'une cartographie SOM optimale. En effet, le déplacement sur la carte équivaut presque toujours à la variation simultanée de plusieurs paramètres. Ce couplage interdit toute prédiction de la sensibilité monoparamétrique des objectifs.

Sur la figure (Fig. 4.15), on remarque que le troisième paramètre est constant dans la zone supérieure de la carte. Si on cherche, par exemple, à maximaliser l'objectif 1 ( $f_1$ ), il est alors impératif de s'assurer que le troisième paramètre est bien à sa valeur maximale puis de procéder au réglage des autres paramètres. En ce sens, le troisième paramètre est critique et il introduit une notion de non-robustesse du dessin.

## 4.10 Synthèse sur la paramétrisation et l'optimisation

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes techniques d'optimisation en les analysant par rapport à l'optimisation envisagée pour le traitement de carter. Il ressort de cette étude que les algorithmes génétiques sont aujourd'hui les plus aptes à traiter efficacement l'optimisation du rainurage.

Cependant, le principal défaut des algorithmes génétiques est le besoin d'évaluer de nombreux individus. Si ce besoin n'est pas traité de manière efficace, l'utilisation d'un algorithme génétique

se heurte très vite à des temps de calcul totalement irréalisables. Une solution à ce problème est d'utiliser une approche paramétrée, ce qui est faisable avec le code Turb'Opty. Nous avons présenté cette technique, ainsi que les différentes contraintes de reconstruction qui lui sont propres.

L'algorithme génétique utilisé dans cette étude, NSGA-II, a ensuite été décrit. Il a été modifié pour pouvoir tenir compte de la paramétrisation du traitement de carter.

Enfin, nous avons présenté une technique de post-traitement de l'optimisation, ou plus précisément de la population optimale retournée par l'algorithme génétique. Cette technique, baptisée Self Organizing Map, permet de caractériser finement la structure de la population optimale, et elle donne accès à des informations supplémentaires telles que la robustesse d'une configuration.

Maintenant que nous disposons d'outils adaptés pour effectuer des optimisations, nous allons achever l'étude du traitement de carter. Dans le chapitre 5, nous analyserons l'optimisation du traitement de carter qui a été faite au cours de cette thèse, puis nous appliquerons le nouveau traitement de carter optimisé à un ventilateur de refroidissement automobile.

## Chapitre 5

# Optimisation et application du traitement de carter

### 5.1 Introduction

Après avoir détaillé au chapitre 4 les techniques d'optimisation utilisées dans le cadre de cette thèse, nous allons achever dans ce chapitre l'étude du traitement de carter qui avait été initiée au chapitre 3. Nous nous concentrerons ici sur l'optimisation du traitement de carter et sur son application au ventilateur de refroidissement automobile étudié.

Dans un premier temps, nous présenterons les résultats issus de la paramétrisation du modèle de rainurage, avec une comparaison entre la paramétrisation et l'approche directe (cf. 3.4.7) sur les variations des objectifs aérodynamiques caractérisant le traitement de carter.

Le rainurage sera ensuite optimisé dans la section 5.3. On présentera les fronts de Pareto obtenus, et on analysera la structure de la population optimale. A la fin de cette section, une géométrie optimale sera retenue afin d'être appliquée au ventilateur.

Dans la section 5.4, nous présenterons les résultats de l'application du traitement de carter sur le ventilateur étudié, application qui vise à démontrer la validité et l'efficacité du rainurage sur le contrôle de l'écoulement de jeu en conditions réelles.

### 5.2 Paramétrisation Turb'Opty - couplages entre paramètres

Au chapitre 3 (section 3.4.7), les influences des différents paramètres ont été présentées sans notion de couplage. Or, du fait de l'évolution du champ aérodynamique, on peut attendre des variations un peu différentes lorsqu'on modifie plusieurs paramètres simultanément. On a vu par exemple que le vortex dans la rainure était sensible à l'angle, la profondeur, ou bien encore la largeur des rainures.

Dans cette partie, nous traiterons donc spécifiquement des effets de couplage que l'on peut attendre. Toutefois, comme une étude directe de ces effets aurait demandé un très grand nombre de simulations, on se basera donc sur le calcul paramétrique effectué avec Turb'Opty. Ce solveur permettant de calculer les dérivées croisées du second ordre, on dispose ainsi d'une bonne approximation des interactions entre les paramètres, pris deux à deux.

### 5.2.1 Evaluation des résultats paramétrisés avec Turb'Opty - Comparaison avec Turb'Flow

La détermination des dérivées du champ aérodynamique a été effectuée avec le solveur Turb'Opty en utilisant les techniques présentées au chapitre 4 (page 175). La paramétrisation est basée sur le modèle du traitement de carter présenté au chapitre 3. La base de données a été construite à partir de la configuration de référence suivante :

$\alpha$	115 °
h	3 mm
w	7.8 mm
L	9 mm
N	50

TAB. 5.1 – Géométrie de base utilisée pour le calcul paramétrique

Le calcul a été effectué en utilisant un schéma centré au second ordre, avec une dissipation numérique du quatrième ordre réglée à  $1.10^{-1}$ . A titre d'information, le calcul a été effectué sur le maillage déraffiné une fois dans chaque direction, soit environ 69 000 points.

La résolution du système linéaire (4.5) a été effectuée en utilisant une méthode GMRES (cf. annexe F), couplée à une factorisation LU de préconditionnement. Cette technique de préconditionnement est extrêmement coûteuse en terme de mémoire, puisque pour notre cas, il fallait disposer d'environ 62 Go de mémoire. Elle est en contrepartie très efficace puisque le système préconditionné se résout en quelques itérations. Avec une telle méthode, le calcul de chaque dérivée demande environ 90 minutes.

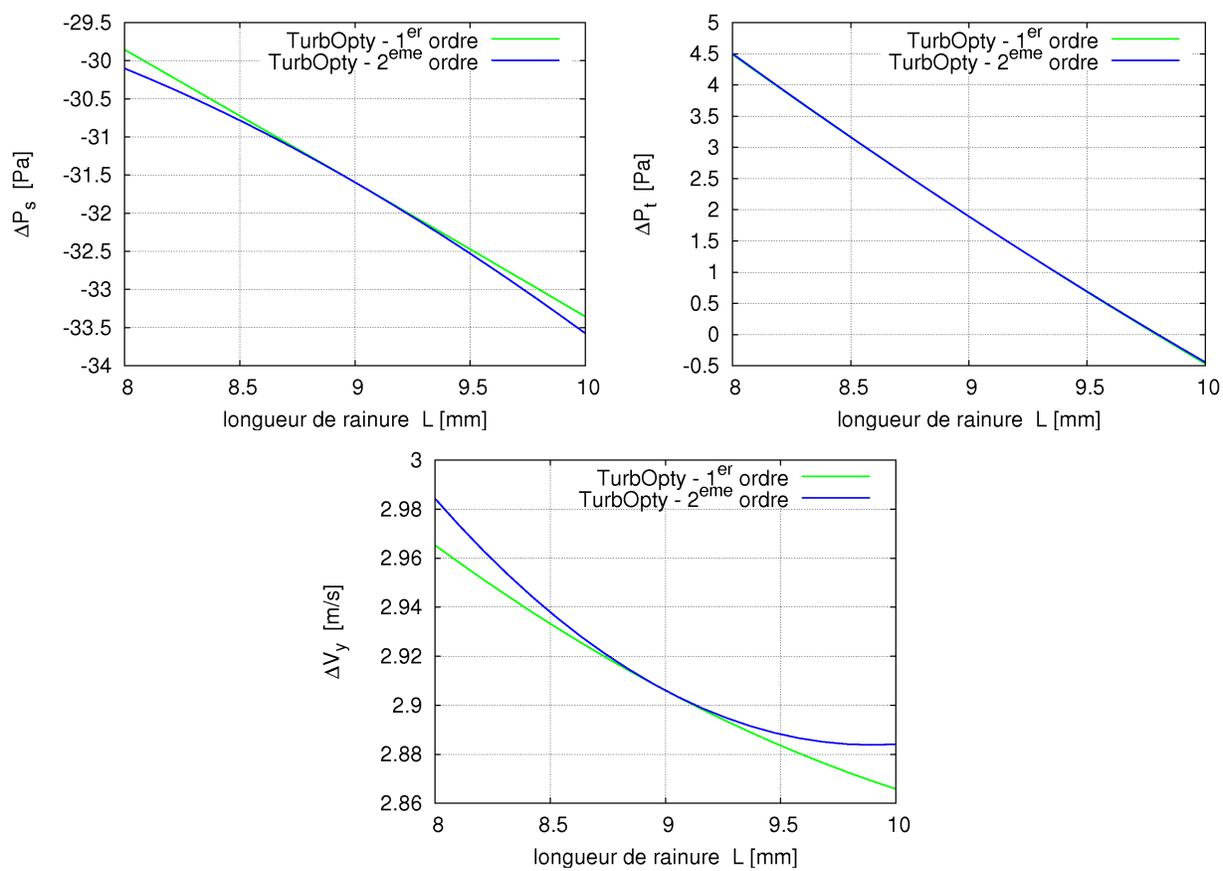
Nous avons été contraints de faire un calcul en turbulence figée, c'est à dire en supposant que les dérivées de variables turbulentes  $\rho k$  et  $\rho \omega$  étaient nulles. En effectuant les premiers calculs de dérivées, nous nous sommes rendus compte que ces deux variables dégradaient très fortement le conditionnement de la matrice du système linéaire. La résolution du système linéaire devenait alors très difficile, voire impossible. En outre, il s'est avéré que les quelques dérivées obtenues étaient d'assez mauvaise qualité, conduisant à une erreur bien supérieure à celle commise en négligeant la variation de la turbulence.

### 5.2.2 Etude des variations obtenues par la paramétrisation

On retrouve par la paramétrisation la plupart des variations observées jusqu'ici avec les calculs RANS classiques. Les champs aérodynamiques sont reconstruits en utilisant une série de Taylor appliquée aux variables conservatives.

#### 5.2.2.1 Longueur L

La figure (Fig. 5.1) présente les variations des objectifs obtenues après paramétrisation pour la variable L. Les deux courbes sur chaque graphique correspondent à deux ordres de reconstruction. Pour le "1<sup>er</sup> ordre", la reconstruction est effectuée en n'utilisant que la dérivée première des variables conservatives par rapport aux paramètres. Pour le "2<sup>eme</sup> ordre", on utilise les dérivées premières et secondes.

FIG. 5.1 – Effets du paramètre  $L$  sur les objectifs - paramétrisation

On retrouve les mêmes tendances que pour les cas présentés auparavant, cas correspondant à une hauteur  $h=1$  mm et évalués avec le solveur RANS classique. L'objectif de pression statique décroît en fonction de  $L$ , à l'opposé de la pression totale. La variation de  $\Delta V_y$  reste encore une fois très faible. La plage de reconstruction est cependant elle aussi limitée.

Les effets de la longueur de rainure sont essentiellement du premier ordre comme on peut le constater sur les courbes. L'écart entre les courbes au premier et second ordre est très faible, notamment pour  $\Delta P_t$ . Pour l'objectif  $\Delta P_s$ , la dérivée seconde tend à faire baisser le niveau. Pour  $\Delta V_y$ , on peut considérer que l'écart n'a pas vraiment de sens vu les très faibles amplitudes.

### 5.2.2.2 Largeur $w$

On dispose, pour ce paramètre, de points de comparaison obtenus avec le solveur Turb'Flow. Les résultats présentés dans la figure (Fig. 5.2) permettent donc de vérifier la qualité des dérivées obtenues.

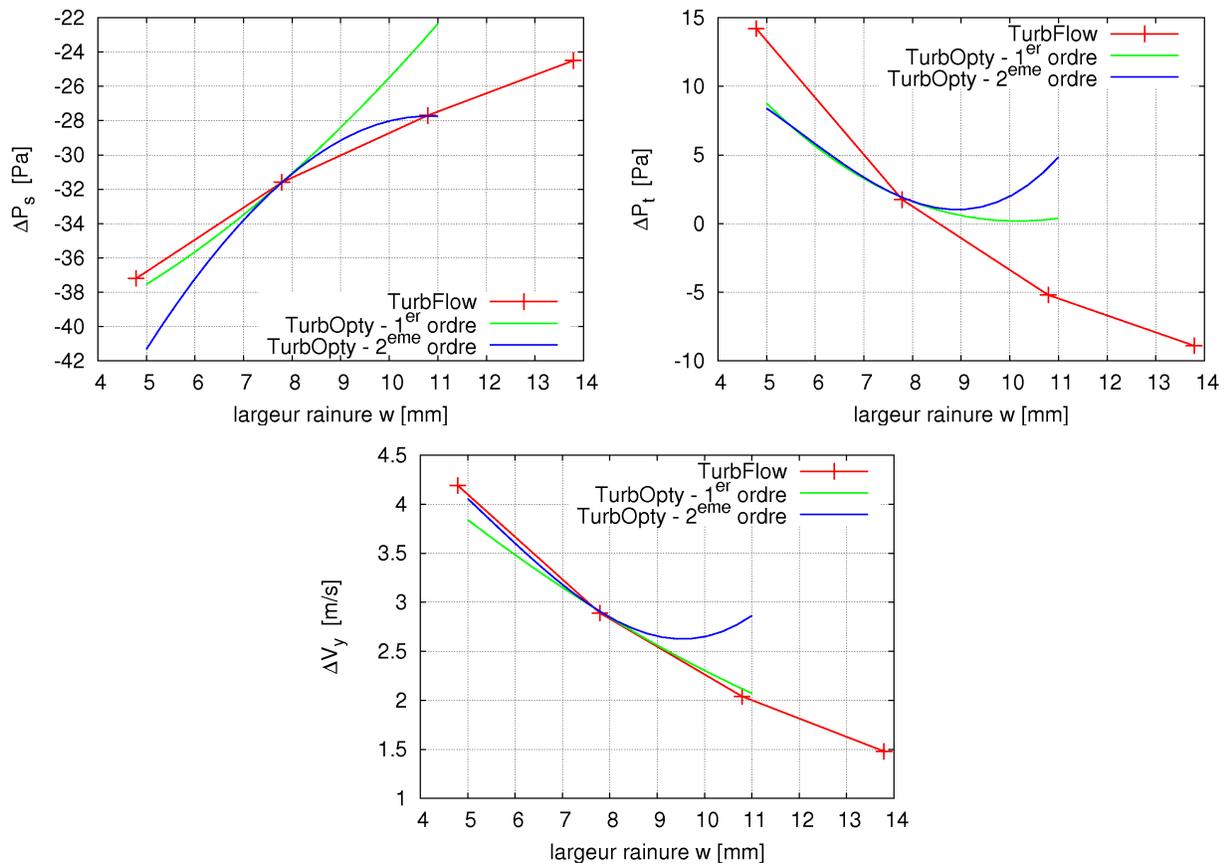


FIG. 5.2 – Effets du paramètre  $w$  sur les objectifs - paramétrisation

Comme on peut le constater, on retrouve les bonnes tendances, même si pour  $\Delta P_s$  et  $\Delta P_t$ , les pentes au niveau du point de référence ne sont pas pleinement satisfaisantes :

- La variation de  $\Delta P_s$  est surestimée.
- La variation de  $\Delta P_t$  est sous-estimée.

Les effets du second ordre sont ici assez importants. On remarquera d'abord qu'ils génèrent une inflexion des courbes cohérentes avec les échantillons de comparaison. Pour  $\Delta P_s$ , les effets du second ordre permettent de rattraper en partie l'erreur de pente. Pour  $w=10.8$  mm, on a ainsi un bon accord entre la paramétrisation et le calcul direct. A l'opposé, ils dégradent les résultats pour  $w < 7.8$  mm.

Pour  $\Delta P_t$ , le second ordre n'améliore pas vraiment la solution. Les variations pour  $w < 7.8$  mm sont quasiment inchangées par rapport au premier ordre. De l'autre côté, pour  $w > 7.8$  mm, on assiste plutôt à la dégradation de la solution. Cette dégradation se traduit en particulier par la création d'un optimum local qui ne semble pas physique au regard de l'échantillon de comparaison.

Pour  $\Delta V_y$ , la concordance entre les courbes est bien meilleure. On retrouve ainsi directement la bonne pente, et les effets du second ordre permettent de se rapprocher encore plus des configurations testées pour  $w < 7.8$  mm. Toutefois, pour  $w > 7.8$  mm, un optimum local apparaît pour ce critère aussi.

### 5.2.2.3 Nombre de rainures N

On dispose, là aussi, d'échantillons de comparaison obtenus par calcul direct. Les résultats sont présentés sur la figure (Fig. 5.3).

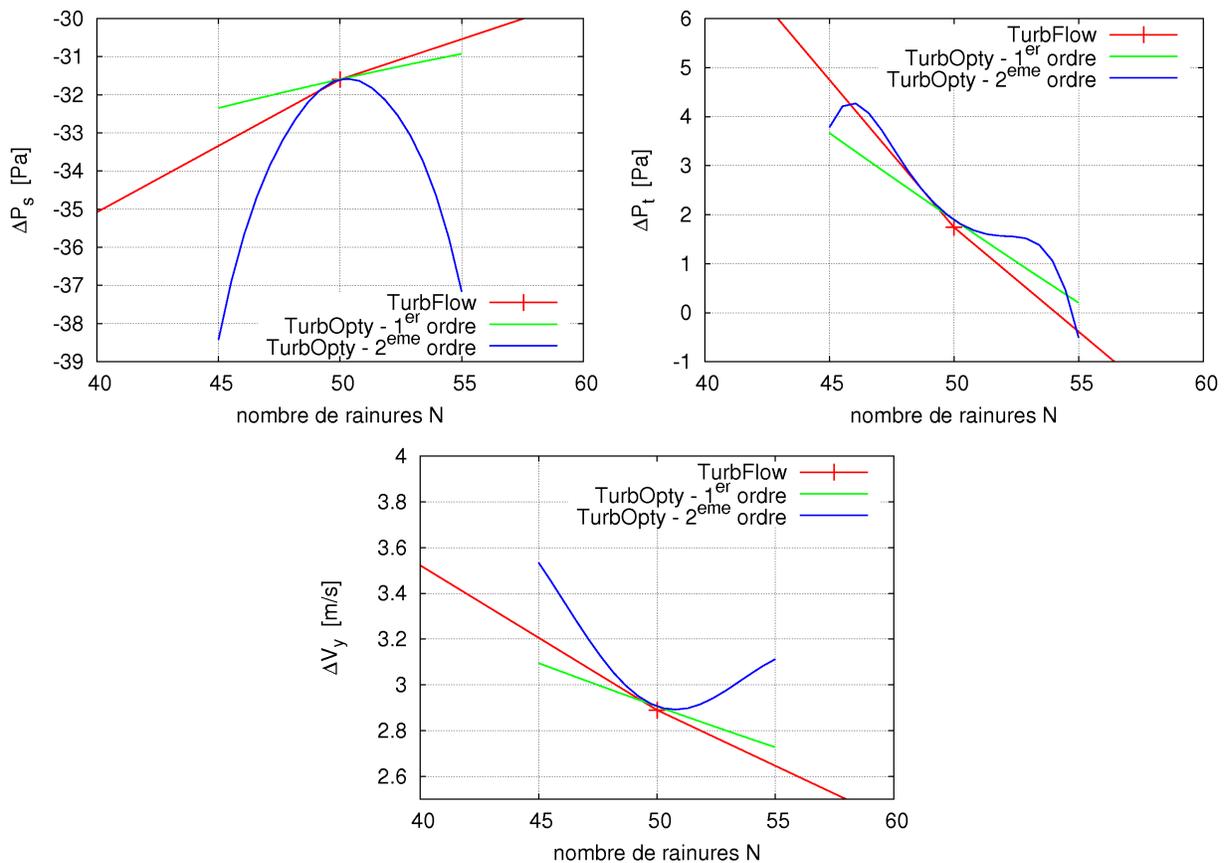


FIG. 5.3 – Effets du paramètre N sur les objectifs - paramétrisation

Comme on peut le constater, le résultat de la paramétrisation n'est pas très bon pour ce paramètre. Si les variations au premier ordre peuvent être satisfaisantes, celles au second ordre sont en revanche assez mauvaises. On notera toutefois que les points obtenus directement avec Turb'Flow sont à  $N=25,50$  et  $75$ . Avec une telle répartition, il est difficile de quantifier précisément avec Turb'Flow le comportement des objectifs autour de  $N=50$ , c'est à dire sur la plage balayée par la reconstruction Turb'Opty. Des calculs directs dans le proche voisinage de  $N=50$  ( $N=52$  par exemple) auraient été plus judicieux pour la comparaison.

La sensibilité au second ordre du critère  $\Delta P_s$  est beaucoup trop forte. Une faible variation du nombre de rainures,  $\pm 10\%$  par exemple, génère un changement de près de  $7$  Pa de  $\Delta P_s$ , soit plus de  $25\%$ .

De la même manière, on observe une variation assez curieuse de  $\Delta P_t$ , avec une sorte de "vague" de part et d'autre du point de référence.

Cette mauvaise qualité de la reconstruction au second ordre pourrait être due à de forts effets du troisième ordre. Cette hypothèse reste néanmoins à confirmer en calculant les dérivées troisièmes du champ par rapport à  $N$ .

La paramétrisation est peut-être à reprendre pour ce paramètre. En effet, nous avons choisi de paramétrer directement  $N$ , alors que les dimensions du rainurage sont proportionnelles à  $\frac{1}{N}$ . Il en résulte une erreur de troncature sur les variations du maillage par rapport à  $N$ . Par exemple, l'abscisse transversale  $y$  d'un point de maillage dépend directement de la largeur  $l = \frac{2\pi R_0}{N}$ . En conséquence les dérivées  $\frac{\partial^n y}{\partial N^n}$  sont non nulles quel que soit l'ordre  $n$  de dérivation. Or, on ne retient ici que les dérivées premières et secondes. A l'opposé, si on avait choisi de paramétrer  $\frac{1}{N}$ , la relation entre l'abscisse  $y$  et le paramètre  $\frac{1}{N}$  aurait été linéaire, et seule la dérivée première  $\frac{\partial y}{\partial (1/N)}$  aurait été non nulle. Ce point devra faire l'objet d'une future vérification.

Il est aussi probable que les dérivées secondes soient simplement mauvaises, en raison des simplifications faites (turbulence figée notamment).

Quelle que soit la raison véritable, on peut vérifier que la qualité de la reconstruction en fonction de  $N$  est assez faible : pour les valeurs de paramètre éloignées de la référence, on remarque que le débit ne se conserve plus, avec des variations atteignant quelques pour cent.

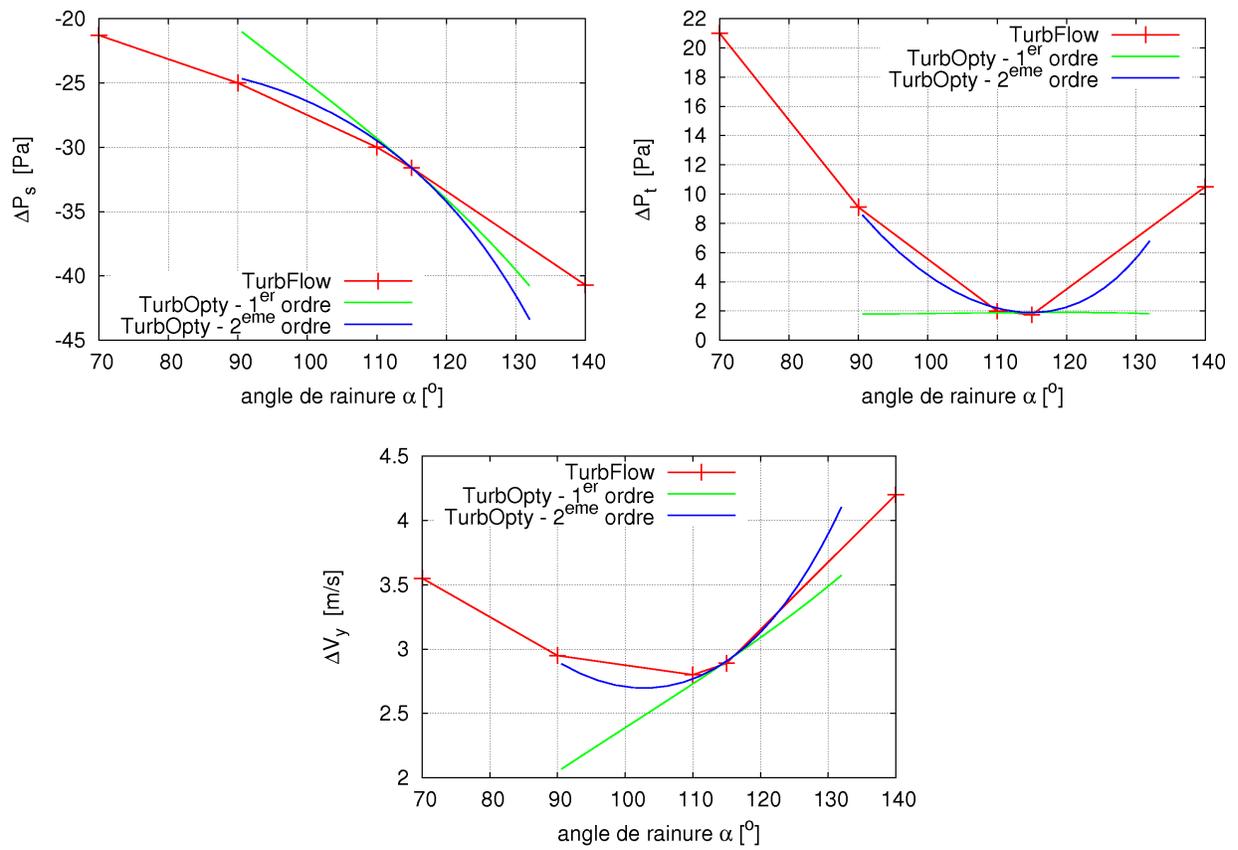
En pratique, on limitera donc la plage d'exploration de ce paramètre au voisinage de la configuration de référence afin de limiter les erreurs commises. On prendra  $N$  dans l'intervalle  $[48-52]$ .

#### 5.2.2.4 Angle $\alpha$

Le paramètre  $\alpha$  est assez intéressant puisqu'il présente une valeur optimale. Les courbes (Fig. 5.4) permettent de valider les résultats du calcul paramétrique. Afin d'obtenir une paramétrisation géométrique exacte à l'ordre 2, le paramètre traité avec Turb'Opty est  $\frac{1}{\tan\alpha}$ . Les positions des points de maillage sont liées *linéairement* à ce paramètre "intermédiaire". On peut ensuite passer sans aucun problème de ce paramètre à l'angle  $\alpha$  (la relation est bijective sur la plage  $0^\circ - 180^\circ$ ).

Il y a ici un très bon accord entre les reconstructions et les points de comparaison. L'erreur la plus importante est observée pour  $\Delta P_s$ . La pente n'est pas totalement correcte à la référence, mais les effets du second ordre viennent corriger en partie le problème puisque la reconstruction à  $90^\circ$  est presque exacte.

Pour les critères  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$ , la reconstruction au premier ordre donne le bon comportement, avec de plus une variation quasi-linéaire. Les dérivées secondes permettent de retrouver la bonne

FIG. 5.4 – Effets du paramètre  $\alpha$  sur les objectifs - paramétrisation

courbure. On voit ainsi que la courbe au second ordre passe presque parfaitement par les points  $\alpha=115^\circ$ ,  $\alpha=110^\circ$  et  $\alpha=90^\circ$ .

On peut donc en conclure que les effets aérodynamiques au niveau de l'optimum sont essentiellement du second ordre.

En parallèle, le calcul paramétrique permet de déterminer plus finement la position de l'optimum. Si on se base sur le critère de vitesse, il semblerait que l'optimum soit à environ  $\alpha=104^\circ$ .

### 5.2.2.5 Hauteur h

On ne dispose pour ce paramètre que d'un seul point de comparaison cohérent avec la configuration de référence. Ce point est situé à  $h=4$  mm. On rappelle que les variations observées en 3.4.7.5 correspondaient à des cas présentant une adhérence partielle dans les plénums. Ce choix discutable avait été imposé par des problèmes de convergence. Pour le calcul paramétrique, on est revenu à une configuration standard, c'est à dire sans adhérence des plénums

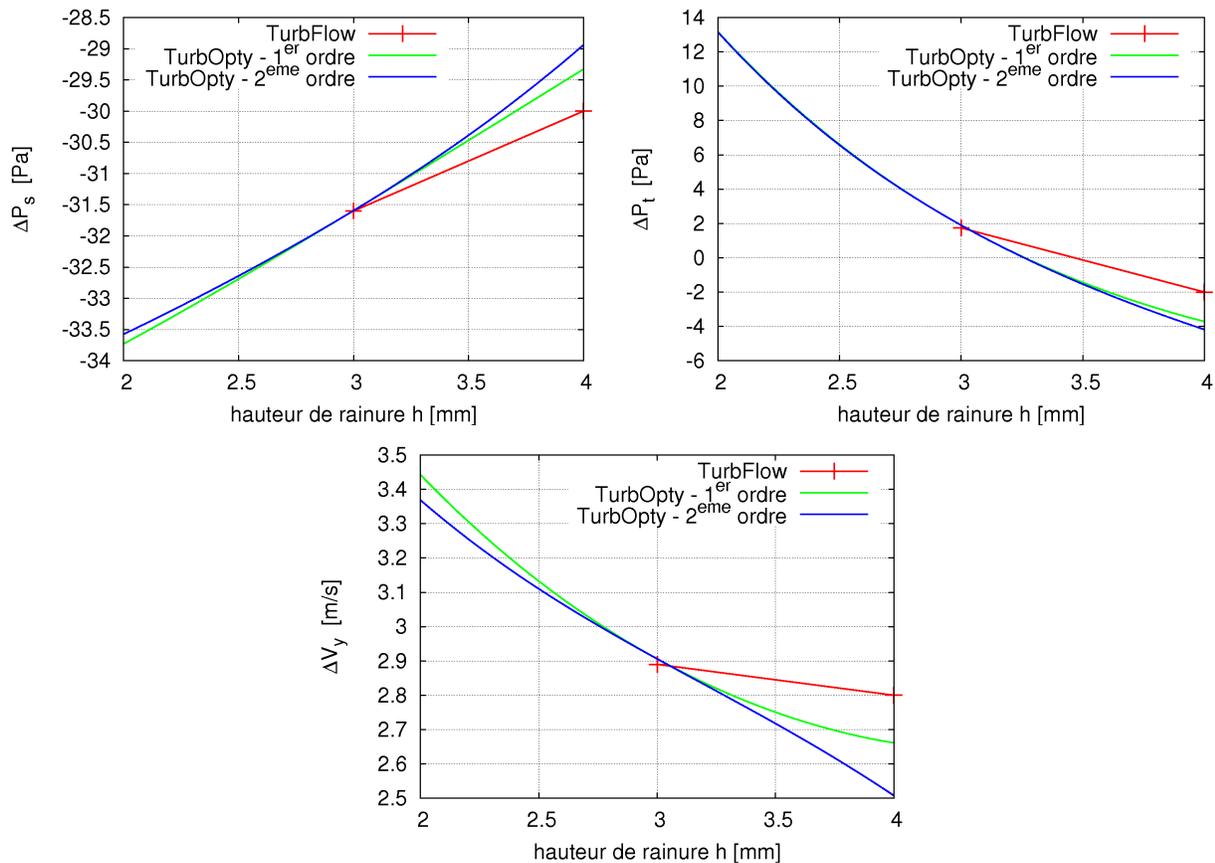


FIG. 5.5 – Effets du paramètre h sur les objectifs - paramétrisation

Le point le plus remarquable sur la figure (Fig. 5.5) est l'inversion de la pente pour  $\Delta P_s$  par rapport aux cas étudiés en 3.4.7.5. Toutefois, on avait vu dans ces cas que entre  $h=2$  mm et  $h=3$  mm, l'objectif de pression statique stagnait. Nous avons alors supposé que l'on se trouvait en présence d'un optimum situé quelque part entre 2 et 3 mm. La variation observée ici vient confirmer

l'hypothèse d'un optimum, mais sa localisation est à revoir. On souffre cependant d'un problème de cohérence entre les données, lié aux conditions d'adhérence imposées ou non dans le plénum amont. Ce point sera clarifié lors de l'étude de couplage entre paramètres.

Dans l'ensemble, l'observation de la figure révèle des variations correctes. La pente est un peu différente de ce qui est observé en calcul direct, mais les variations du second ordre viennent un peu rattraper l'écart avec les calculs directs. Toutefois, compte-tenu du faible nombre d'échantillons de comparaison, on évitera de conclure précisément sur le degré de validité des dérivées.

Pour ce paramètre, les dérivées secondes jouent un rôle faible puisque les courbes au premier et au second ordre sont proches. La majeure partie des variations constatées résulte d'effets du premier ordre.

### 5.2.3 Couplages entre paramètres

Nous traiterons dans cette partie des effets de couplage entre paramètres. Avec l'approche de reconstruction choisie, c'est-à-dire les séries de Taylor, les effets de couplage sont générés par le terme de dérivée croisée :

$$Q(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = Q(x_1, x_2) + \left[ \frac{\partial Q}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial_2 Q}{\partial x_1^2} \frac{(\Delta x_1)^2}{2} \right] + \left[ \frac{\partial Q}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial_2 Q}{\partial x_2^2} \frac{(\Delta x_2)^2}{2} \right] + \left[ \frac{\partial_2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \right]$$

Ces effets ne seront donc perceptibles que lorsque les deux paramètres s'écarteront de leurs valeurs de référence.

Les effets de couplage sont d'importance variable selon les doublets de paramètres et les objectifs considérés. Les variations liées au nombre de rainures  $N$  sont ainsi pas ou très peu couplées à tous les autres paramètres. Par exemple, pour les objectifs  $\Delta P_s$  et  $\Delta P_t$ , les effets de couplage se traduisent souvent par une différence de quelques pour cent entre la reconstruction n'utilisant pas les dérivées croisées et la reconstruction avec le couplage.

Ce découplage peut parfois être justifié en considérant les différents mécanismes aérodynamiques en jeu. Pour le doublet  $(N, L)$ , on a une séparation forte des mécanismes affectés par chacun des paramètres :  $N$  va essentiellement agir sur les recirculations aval et le blocage, tandis que  $L$  n'a d'effet que sur l'accélération transversale.

Dans d'autre cas, la faiblesse des couplages est plus inattendue. Pour  $(N, w)$  par exemple, on pourrait attendre des effets plus forts puisque ces paramètres sont proches géométriquement, et ils agissent tous deux par exemple sur  $\Delta P_s$ .

Malgré la faiblesse de ces couplages, on garde quand même une cohérence par rapport aux résultats monoparamétriques observés. Ainsi, pour le doublet  $(w, N)$ , le couplage permet d'améliorer  $\Delta P_s$  dans des configurations comportant "beaucoup" de rainures ( $N=52$ ) fines ( $w=4.8$  mm). A l'opposé une configuration avec beaucoup de rainures larges voit son objectif  $\Delta P_s$  se dégrader par effet de couplage. Les effets sur  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$  sont eux aussi cohérents.

Parmi les paramètres découplés du point de vue des objectifs, on trouve :

- $\alpha$  et  $L$  : c'est assez logique dans la mesure où les effets de  $\alpha$  sont visibles, entre autre, horizontalement au niveau de la sortie de rainure. La longueur affecte pour sa part la recirculation méridienne en aval. Ceci peut en outre suggérer que les effets de couplage entre les structures horizontales et méridiennes en aval des obstacles ne sont pas très importants du point de vue des objectifs fixés.
- $\alpha$  et  $N$  : le découplage n'est valable que pour  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$ . Les effets sont un peu plus importants pour le critère de pression statique et ils sont cohérents avec les résultats monodirectionnels. On privilégie ainsi des rainures peu nombreuses et fortement inclinées pour améliorer ce critère.
- $h$  et  $N$  : ces paramètres affectent tous les deux la recirculation aval. On retrouve donc que le couplage des différentes structures dans la recirculation aval affecte peu les objectifs pour les configurations étudiées.
- $N$  et  $w$  (faiblement couplés)
- $N$  et  $L$  : découplage des mécanismes aérodynamiques affectés par les deux paramètres

Le premier couplage remarquable, qu'on puisse trouver, intervient entre  $\alpha$  et  $h$  pour l'objectif de pression  $\Delta P_s$ . Ce couplage est assez faible par essence mais il aboutit à une évolution intéressante des lois de variation de l'objectif.

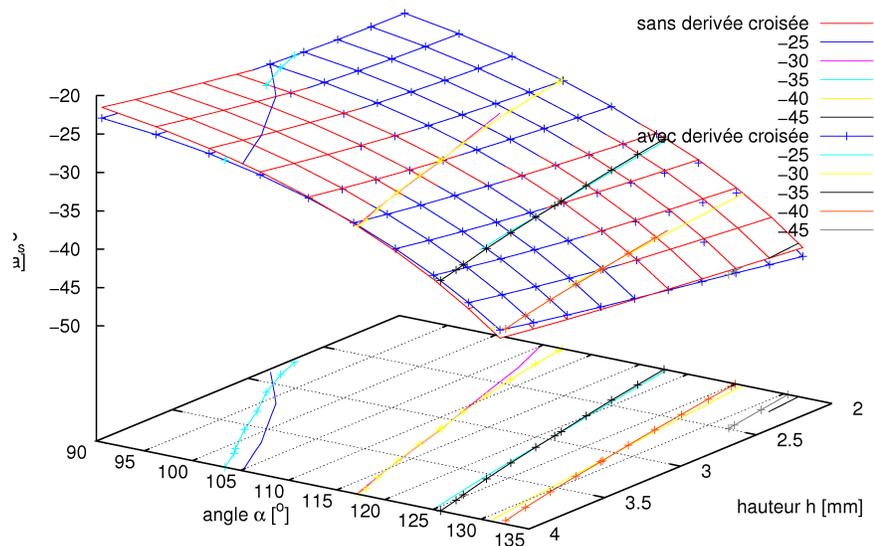


FIG. 5.6 – Couplage entre  $h$  et  $\alpha$  - objectif  $\Delta P_s$

On a tracé sur la figure (Fig. 5.6) les variations de  $\Delta P_s$  en fonction de  $\alpha$  et  $h$ . On représente simultanément les surfaces obtenues en utilisant ou non les dérivées croisées. On a aussi tracé les isobares pour aider la visualisation.

Comme on peut le constater, l'effet du couplage dégrade légèrement le niveau de pression pour  $\alpha$  et  $h$  simultanément grands ou petits. Pour des configurations "croisées" (petit angle/grande hauteur ou vice versa), le couplage améliore l'objectif  $\Delta P_s$ . Il en résulte un vrillage de la surface tracée avec les dérivées croisées.

On peut mettre ce vrillage en rapport avec le comportement observé dans les analyses monodirectionnelles pour  $h$ . Malgré les problèmes de cohérence entre les calculs entraînés par l'utilisation ou non d'adhérence en amont, on peut tracer le même type de surface sur la base des calculs Turb'Flow (Fig. 5.7). On a représenté sur cette figure deux surfaces distinctes. La première, sans marque particulière, correspond aux cas adhérents en amont. La seconde, tracée avec des croix, correspond au cas sans adhérence ; elle est donc totalement cohérente avec la paramétrisation.

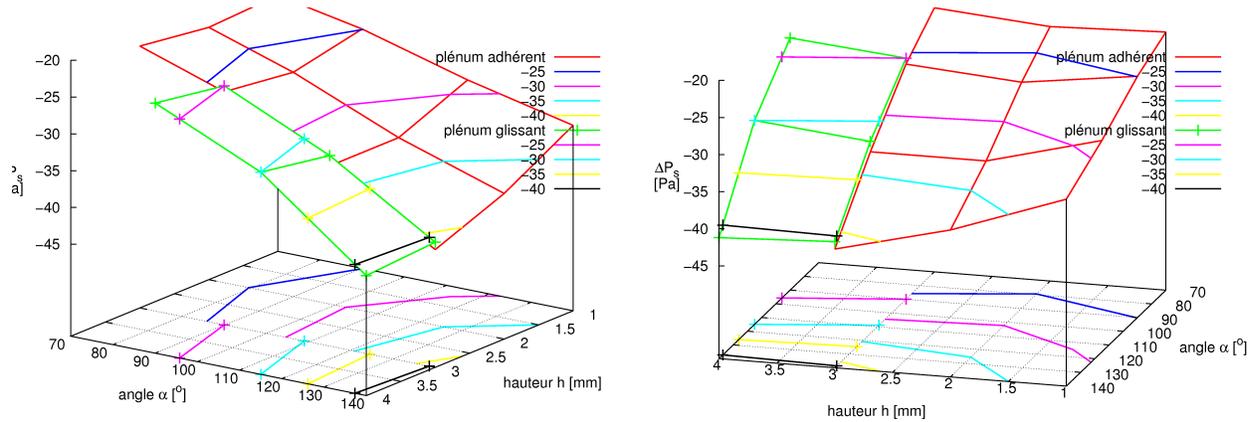


FIG. 5.7 – Couplage entre  $h$  et  $\alpha$  - comportement optimal avec  $h$

On voit d'abord sur cette figure que les surfaces obtenues avec ou sans adhérence sont très proches. Si on se base sur les isobares, on constate de plus qu'il n'y a pas de forts changements des pentes : les isobares de l'une sont dans la continuité des isobares de l'autre. Hormis le léger décalage entre les courbes, on pourra dans un premier temps supposer que les deux cas (adhérent/glissant) se "prolongent" mutuellement.

On voit dans ces conditions qu'il existe un optimum en  $h$  dont la position varie selon  $\alpha$ . Pour  $\alpha \leq 90^\circ$ , l'optimum est situé vers  $h=2$  mm. Pour  $\alpha=115^\circ$ , il se positionne entre  $h=2$  mm et  $h=3$  mm. En revanche, pour  $\alpha=140^\circ$ , on peut penser, faute d'un nombre suffisant de points, que cet optimum n'existe plus. On a en effet  $\Delta P_s(h=4, \alpha=140) < \Delta P_s(h=3, \alpha=140)$ , ce qui rend donc la variation de  $\Delta P_s$  monotone par rapport à  $h$ .

La disparition de l'optimum (ou au moins son décalage vers les très grandes valeurs de  $h$ ) lors de l'augmentation de  $\alpha$  n'est pas totalement illogique en regard des comportements limites. Les variations de  $\Delta P_s$  observées pour l'obstacle circonférentiel sont monotones. Or, cette géométrie est la limite vers laquelle tend le rainurage quand  $\alpha$  tend vers  $180^\circ$ . On devrait donc, in fine, retrouver un comportement monotone relativement à  $h$  en augmentant  $\alpha$ .

Au final, le vrillage constaté sur la courbe paramétrisée est peut-être dû à ce mécanisme d'optimum. Cependant, la tendance d'évolution de l'optimum est alors inversée : si cet optimum existe, la figure (Fig. 5.6) le donne plutôt vers  $h=4$  mm pour  $\alpha=70^\circ$ , et vers  $h=2$  mm pour  $\alpha=140^\circ$ . On peut alors légitimement se demander si le choix de l'adhérence sur les plénums amont n'est pas responsable de cette différence.

Pour ces deux paramètres, les effets de couplages sur  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$  sont un peu plus conséquents. La différence maximale est d'environ 5 Pa entre les surfaces de pression totale tracées avec et sans dérivées croisées. Le couplage n'affecte que marginalement la position du minimum de  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$ . Celui-ci reste vers  $\alpha=110^\circ$ .

Un autre couplage remarquable est obtenu pour le doublet  $(\alpha, w)$  sur les objectifs  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$ .

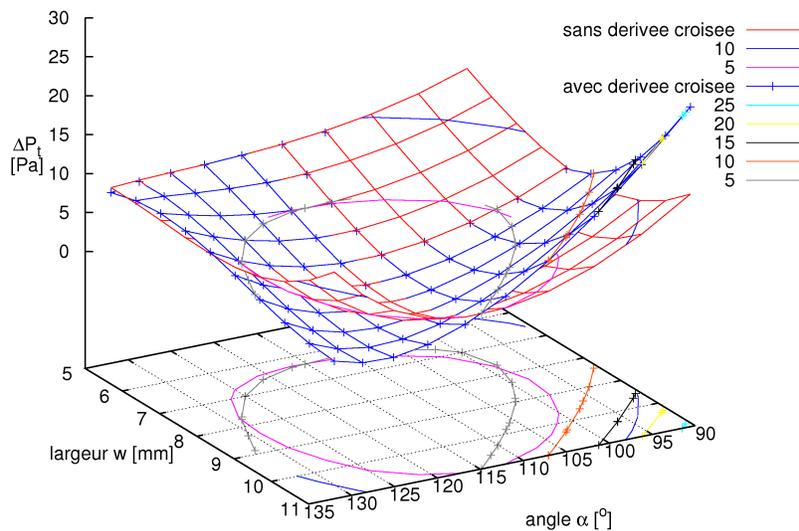


FIG. 5.8 – Couplage entre  $h$  et  $\alpha$  - comportement optimal avec  $h$

La reconstruction sur  $w$  seulement génère elle aussi des optima, très discutables, pour ces deux objectifs. En conséquence, la reconstruction en fonction des deux paramètres va générer une cuvette en superposant ces deux optima, comme on peut le voir sur la figure (Fig. 5.8). L'introduction des dérivées croisées vient limiter ce défaut en "ouvrant" la cuvette du côté des rainures larges et très inclinées. La vallée créée est oblique, ce qui introduit donc une dépendance de l'optimum en angle vis à vis de la largeur.

Ce phénomène n'est pas aberrant dans la mesure où l'optimum en angle de  $\Delta P_t$  est en grande partie lié au problème de débit dans la rainure. En ouvrant de plus en plus la rainure, on peut espérer que les phénomènes de blocage diminueront : cela permettra, à angle constant, d'avoir une meilleure répartition de débit en faveur de la rainure et au final une meilleure réduction de la giration et de la pression totale en sortie. Cependant, comme l'ouverture des rainures s'accompagne d'une baisse du différentiel amont/aval de pression statique, il pourra être nécessaire d'augmenter l'angle pour compenser. On retrouve ainsi le déplacement de l'optimum observé sur les courbes.

Parmi les autres paramètres présentant des couplages, on a :

- $H$  et  $L$  : le couplage est surtout sensible pour  $\Delta V_y$ . Il favorise les rainures longues et hautes.
- $H$  et  $w$  : le couplage affecte  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$ .
- $w$  et  $L$  : les couplages favorisent des configurations avec des rainures longues et fines pour obtenir un bon  $\Delta P_s$ . Ceci est, une fois de plus, cohérent avec ce qu'on peut trouver sur l'obstacle circulaire. A l'opposé, pour réduire la giration, le couplage indique des rainures longues et larges. Une telle configuration est effectivement adaptée à cet objectif puisque :
  1. des rainures larges permettront d'obtenir un écoulement selon  $-\vec{y}$  important
  2. des rainures longues permettront un meilleur guidage dans la rainure. On peut espérer gagner encore un peu plus sur le niveau de  $V_y$  en sortie de rainure et donc sur la réduction

de giration. D'autre part, comme la sortie des rainures se rapproche de la sortie du jeu, on diminue automatiquement les phénomènes de re-énergétisation du fluide en aval.

## 5.3 Optimisation du traitement de carter modélisé

### 5.3.1 Conditions de l'optimisation

Après les études directes et paramétriques, nous avons procédé à une optimisation du traitement de carter modélisé sur la base de la paramétrisation Turb'Opty. L'optimisation a été effectuée en utilisant l'algorithme NSGA-II présenté en 4.8, sur une population de 500 individus. Le but de cette optimisation est de dégager un ensemble de géométries optimales, donc efficaces, pour les adapter ensuite à un ventilateur.

Pour information, plusieurs optimisations différentes ont été effectuées en variant les objectifs considérés. Nous avons ainsi testé :

- un objectif de limitation de l'angle d'incidence en sortie de jeu. Cet objectif est conceptuellement proche du  $\Delta V_y$ , mais il est insensible aux effets de variation du débit puisque nous avons choisi de travailler avec une incidence amont constante
- un objectif de limitation de l'augmentation de la pression dynamique. Le critère  $\Delta P_d$  est ici aussi assez proche de  $\Delta V_y$  puisque l'écoulement est faiblement compressible et n'a presque pas de vitesse verticale en entrée et en sortie du jeu.

En pratique, les différentes combinaisons d'objectifs ont toutes abouti à des populations optimales assez similaires. On se concentrera donc sur l'optimisation des critères  $\Delta P_s$ ,  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$ .

Compte-tenu des limites observées avec les reconstructions en sortie de paramétrisation, nous avons restreint la zone balayée de l'espace paramétrique. Les intervalles de recherche pour chaque paramètre sont :

paramètre	valeur min.	valeur max.
$\alpha$	90 °	132 °
h	2 mm	4 mm
w	7 mm	9 mm
L	8 mm	10 mm
N	48	52

TAB. 5.2 – Plages de paramètres balayées par l'optimisation

L'algorithme atteint très vite un niveau de remplissage élevé du premier front. En environ quarante itérations, le front numéro 1 dans la population atteint presque 500 individus. On effectue néanmoins 100 itérations au total : la suite de la convergence permet d'affiner, encore un peu plus, le front de Pareto trouvé en finissant de remplir la population optimale et en étalant les 500 individus sur la surface optimale.

## 5.3.2 Résultats de l'optimisation

### 5.3.2.1 Front de Pareto

Le front de Pareto obtenu par cette paramétrisation est présenté sur la figure (Fig. 5.9). Nous l'avons représenté en trois dimensions et aussi en le projetant sur les trois plans bi-objectifs de notre cas.

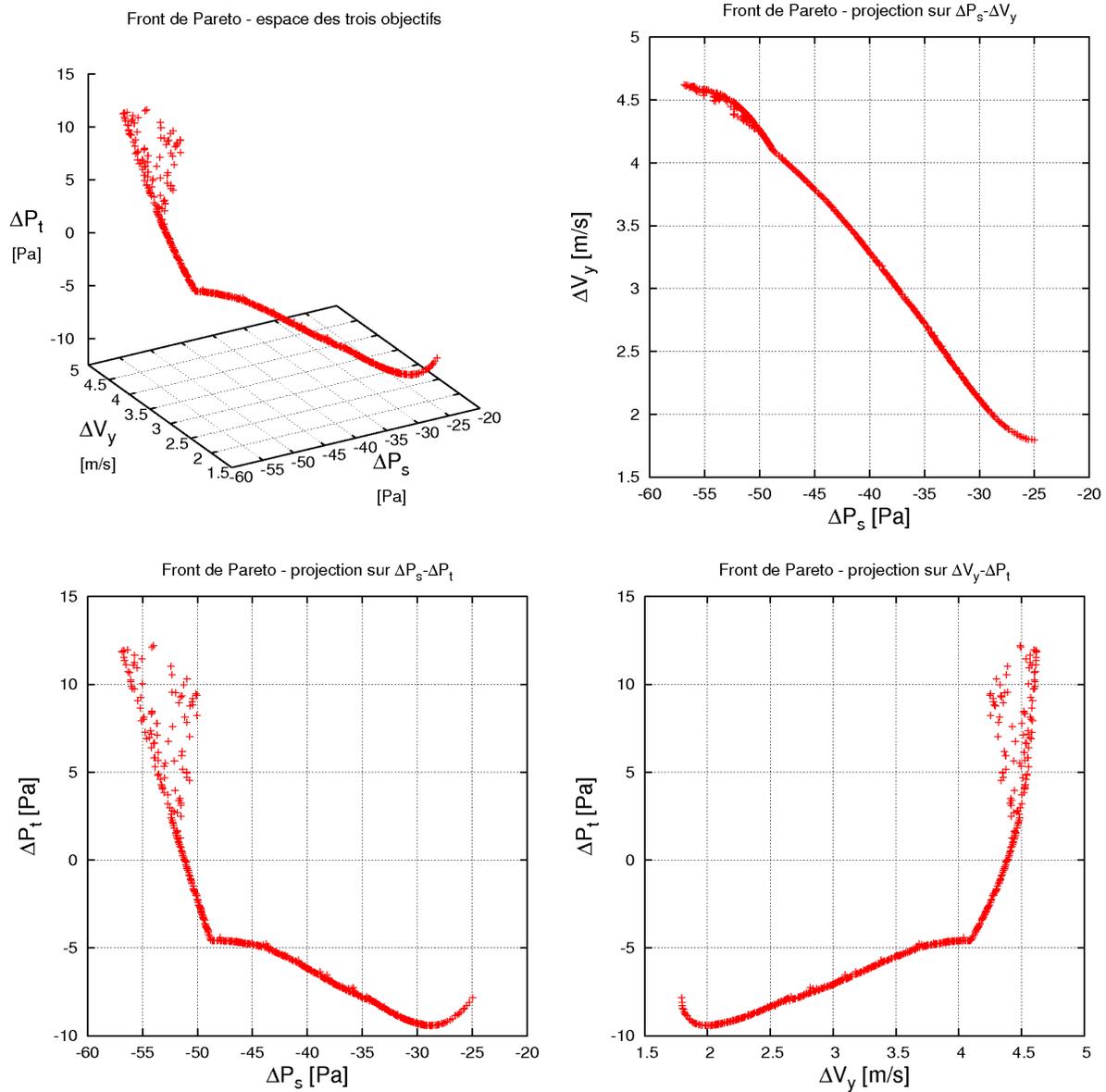


FIG. 5.9 – Front de Pareto dans l'espace objectif

Le front de Pareto trouvé est principalement organisé autour d'une courbe sur laquelle viennent se positionner nombre d'individus. Ce front reste néanmoins une surface, du fait de la dispersion de quelques points/individus. La dispersion surfacique des points est essentiellement due au critère

$\Delta P_t$  : dans le plan  $\Delta P_s, \Delta V_y$ , le front de Pareto est concentré sur une ligne.

La forme du front est assez curieuse, puisqu'il y a une rupture de pente sur la ligne principale. Dans ce type de visualisation, il n'est pas possible de déterminer les causes de ce phénomène.

### 5.3.2.2 Cartographie SOM de la population optimale

L'analyse de la population optimale est grandement facilitée par l'utilisation d'une technique SOM. On a tracé sur la figure (Fig. 5.10) les cartographies de paramètres et objectifs sur la population optimale. Les cartes sont de taille (40×40). Il y a donc plus de vecteurs prototypes que d'individus optimaux.

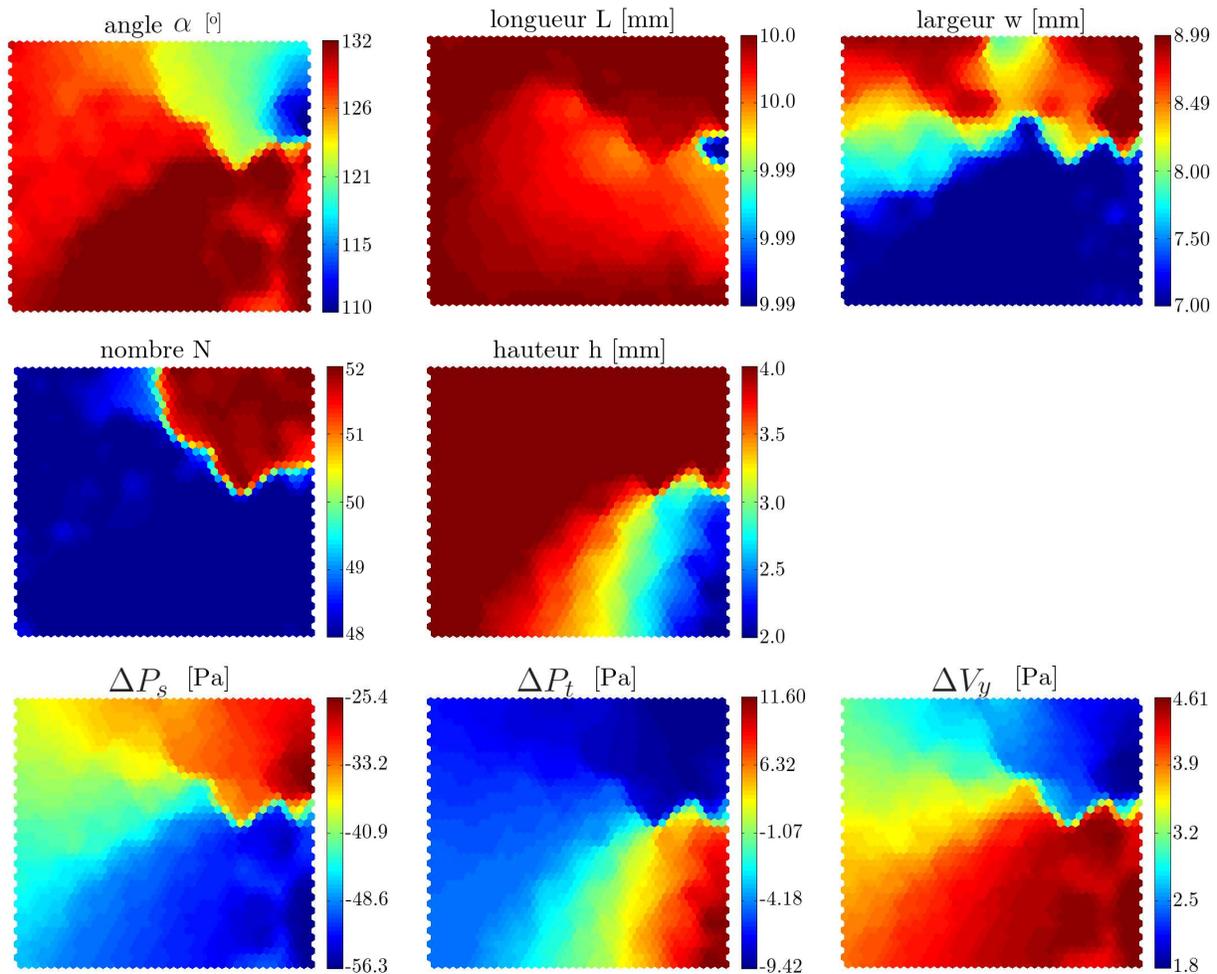


FIG. 5.10 – Cartographie SOM de la population optimale

Plusieurs points remarquables apparaissent avec ce type de visualisation :

- La plupart des cartes présentent deux zones nettement séparées. On distingue ainsi une zone haute et une zone basse. La forme et l'intensité de la frontière varient selon l'objectif ou le

paramètre considéré. Pour  $N$ , le découpage est très marqué et il sépare le coin supérieur droit du reste de la carte. Pour  $\Delta P_s$ , le découpage n'est marqué que sur la droite de la carte. La transition sur la gauche est beaucoup plus continue.

- On voit très clairement l'antagonisme entre d'une part l'objectif  $\Delta P_s$ , et d'autre part les objectifs  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$ . Les zones correspondant à un écart de pression statique intéressant sont les zones pour lesquelles les deux autres objectifs sont les plus médiocres.
- Le paramètre  $L$  est bloqué sur sa valeur maximale. La petite poche bleue découle surtout d'un problème de précision d'écriture. Toutes les configurations optimales sont donc longues de 10 mm. Ce point suggère qu'une poursuite de l'optimisation serait nécessaire. Dans cette optique, il faudrait recalculer les dérivées sur la base d'une des configurations optimales et recommencer l'optimisation. Nous avons choisi de ne pas procéder à une telle opération pour économiser du temps et passer directement à la phase de couplage du traitement de carter avec le ventilateur.
- Dans l'ensemble, l'optimisation a privilégié des rainures plus larges ou plus fines que la configuration de référence : le niveau  $w=7.8$  mm est très peu représenté sur la carte correspondante. Il en va de même pour le nombre de rainures, qui varie brutalement entre 48 et 52. Cette variation est à mettre en rapport avec le comportement du second ordre observé lors de l'exploitation du calcul paramétrique.

On repère trois points remarquables sur cette cartographie. Ces points correspondent au minimum de chacun des objectifs. Ils sont représentés sur la figure (Fig. 5.11)

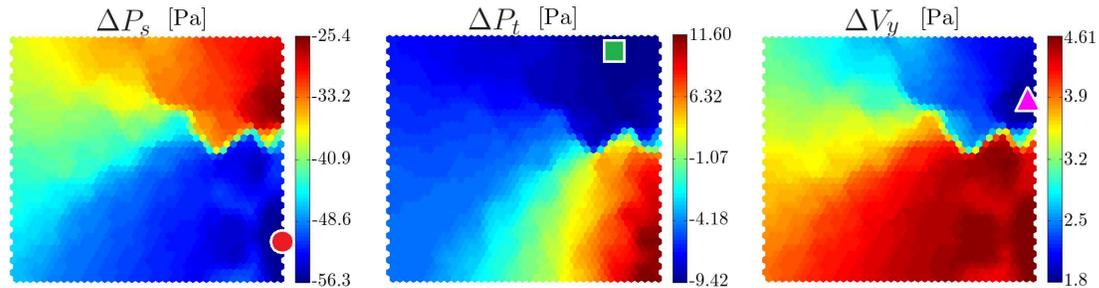


FIG. 5.11 – Position des minima de chaque objectif

Ces trois configurations sont :

Configuration	$\alpha$ [°]	$h$ [mm]	$w$ [mm]	$L$ [mm]	$N$	$\Delta P_s$ [Pa]	$\Delta P_t$ [Pa]	$\Delta V_y$ [m/s]
Min. $\Delta P_s$	131.9	2	7.0	10	48	-56.8	11.9	4.62
Min. $\Delta P_t$	117.8	4	8.9	10	52	-28.7	-9.4	1.99
Min. $\Delta V_y$	108.4	4	8.9	10	51	-24.9	-7.8	1.79
Config. Initiale	115.0	3	7.8	9	50	-31.6	1.7	2.89

TAB. 5.3 – Configurations extrêmes de l'optimisation

On voit ainsi que les optima de  $\Delta P_t$  et  $\Delta V_y$ , quoique proches, sont différents. Ils ne correspondent par exemple pas au même angle  $\alpha$ , ni au même nombre de rainures.

On a rappelé dans le tableau [5.3] la configuration initiale ayant servi au calcul des dérivées et donc à l'optimisation. Comme on peut le voir, cette configuration n'est pas Pareto-optimale.

L'optimisation et plus généralement les cartes SOM permettent de retrouver un certain nombre des tendances observées jusqu'ici pour des configurations non-optimales. Le meilleur  $\Delta P_s$  est obtenu pour des rainures fortement inclinées, fines et peu nombreuses, mais aussi peu profondes ce qui est un peu plus surprenant. Ce dernier point est à mettre sur le compte des phénomènes de couplage et d'optimum sur  $h$  vus précédemment. A l'opposé, les géométries efficaces du point de vue de la pression totale ou de la vitesse transversale sont caractérisées par des rainures larges, hautes, nombreuses et proches de  $\alpha \approx 113^\circ$ .

Il reste à expliquer la forme du front de Pareto. Pour cela, on utilisera une recombinaison du front à partir de la SOM. On applique la carte de couleur arbitraire suivante :



Cette carte a *exactement* la même topologie que les cartes précédentes. Le front de Pareto reconstitué à partir des vecteurs prototypes est coloré en utilisant cette carte de couleur.

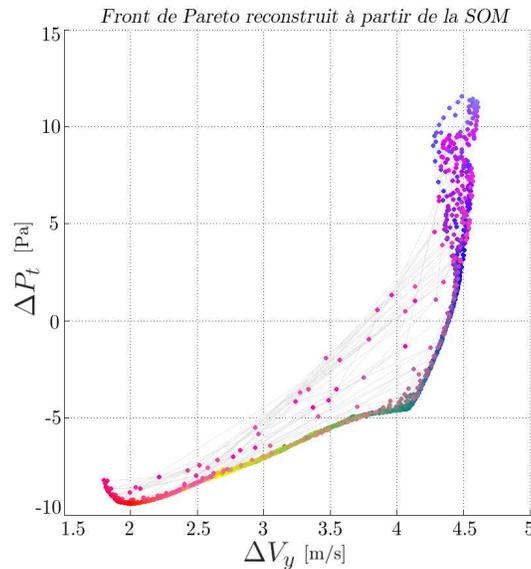


FIG. 5.12 – Front de Pareto reconstruit à partir des vecteurs prototypes de la SOM

On voit sur la figure (Fig. 5.12) que la transition sur le front correspond aux individus colorés en bleu turquoise, c'est à dire ceux en bas à gauche des cartes. Lorsqu'on observe attentivement la carte de  $\Delta P_t$ , on voit que cette zone marque une transition entre d'un côté la zone "supérieure" (au

sens large) pour laquelle cet objectif varie assez peu, et de l'autre la zone basse (le tiers inférieur droit de la carte) où  $\Delta P_t$  évolue plus vite. En parallèle, les objectifs  $\Delta P_s$  et  $\Delta V_y$  évoluent peu sur cette zone inférieure. Cette différence de variation est uniquement due au paramètre  $h$ , le seul à varier de manière conséquente sur cette zone.

### 5.3.3 Choix d'une géométrie

Cette optimisation clôt l'étude du traitement de carter avec un modèle général. La phase suivante est la mise en œuvre de ce traitement de carter sur un ventilateur. Il nous a donc fallu choisir une solution parmi les configurations optimisées afin de l'adapter à la géométrie complète. Notre choix s'est porté sur une solution proche des optima de  $\Delta P_t$  et de  $\Delta V_y$ . Il a néanmoins été nécessaire de modifier légèrement certains paramètres afin de faciliter l'intégration dans un calcul en roue complète : le nombre de rainures a ainsi été porté à 54 au lieu de 52 pour obtenir une coïncidence avec le nombre d'aubes du ventilateur (9 aubes dans notre cas), et la hauteur a été limitée à 3 mm.

Cette configuration est la suivante :

$\alpha$	112 °
$h$	3 mm
$w$	8.5 mm
$L$	10 mm
$N$	54

TAB. 5.4 – Configuration retenue pour l'intégration sur un ventilateur

La reconstruction d'une telle solution est délicate puisqu'on a vu précédemment que les dérivées par rapport au nombre de rainures  $N$  n'étaient pas suffisamment fiables pour avoir un résultat très précis au delà de  $N=52$ . La reconstruction donne toutefois :

Configuration	$\Delta P_s$ [Pa]	$\Delta P_t$ [Pa]	$\Delta V_y$ [m/s]
Config. initiale	-31.6	1.7	2.89
Config. choisie	-32.8	-2.6	2.62
gain absolu	-1.2	-4.3	0.27
gain relatif	-3.8%	-250%	-9.3%

TAB. 5.5 – Performances de la configuration retenue

## 5.4 Application du traitement de carter au ventilateur Valéo

Dans cette partie, on étudiera directement l'effet du rainurage proposé sur le ventilateur Valéo de référence présenté au chapitre 3. Rappelons que cette partie de l'étude vise à *démontrer la validité et l'efficacité du traitement de carter pour le contrôle de l'écoulement de jeu dans des conditions de fonctionnement réelles*, et non à optimiser une turbomachine particulière.

### 5.4.1 Conditions de l'étude

La géométrie de l'ensemble [ventilateur+traitement de carter] est simulée numériquement. Il a été nécessaire de refaire le maillage du ventilateur afin de garantir une bonne discrétisation spatiale

dans le jeu. On a ainsi rajouté des plans de maillage dans les directions azimutales et radiales. Le maillage final comporte environ 5 millions de points (cf. annexe G).

La simulation de l'ensemble a été réalisée en utilisant un schéma temporel de Runge-Kutta à 5 pas, couplé à un schéma spatial centré du second ordre. Le modèle de turbulence est le  $k-\omega$  de Kok, avec limiteur de turbulence.

Afin de simuler la géométrie complète, nous avons opté pour un calcul avec le rotor figé. Cela signifie concrètement que le maillage associé au rotor reste fixe dans le repère absolu. Les effets mécaniques liés à la rotation (force centrifuge, effets de Coriolis) sont pris en compte en ajoutant directement des termes sources correspondants dans les équations sur les blocs de maillage liés au rotor. A ce stade de l'étude du couplage entre le traitement de carter et le ventilateur, on supposera donc que les effets instationnaires sont négligeables.

Dans toute la suite, on ne réintroduira pas les congés au niveau des rainures. Cet effet technologique particulier ne sera pas pris en compte en raison du raffinement de maillage qu'il introduit, raffinement qui aurait été incompatible avec la possibilité de simuler "rapidement". Tous les angles au niveau des rainures seront donc vifs.

## 5.4.2 Intégration du traitement de carter - Configuration 1

### 5.4.2.1 Description

La première simulation que nous avons effectuée a porté sur le ventilateur équipé du traitement de carter choisi en fin d'optimisation (tableau [5.4]). Par la suite, nous désignerons cette configuration par configuration 1. Nous avons aussi choisi de garder la géométrie avec notamment le coude de la virole inchangé. Cela permet de quantifier l'effet du rainurage indépendamment de toute autre modification.

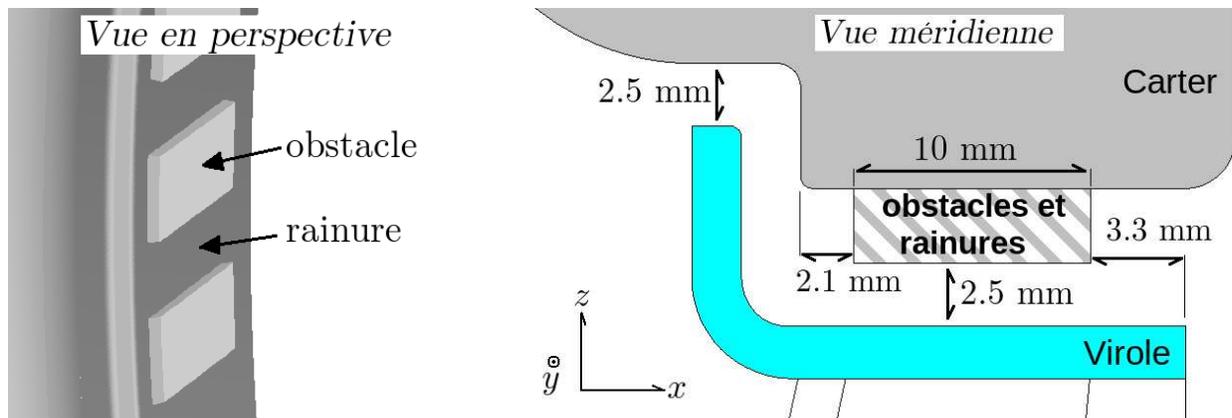


FIG. 5.13 – Application du traitement de carter issu de l'étude paramétrique

Les rainures ne faisant que 10 mm de long dans la direction axiale, elles ne s'étendent pas sur tout le carter. Nous avons choisi de les positionner arbitrairement à 3.3 mm de l'entrée du jeu, ce qui laisse un espace de 2.1 mm entre la sortie des rainures et la partie verticale du jeu.

Lors de la phase de maillage chez Valéo, le jeu entre le sommet des rainures et la virole a été fixé à 2.5 mm afin de rester cohérent par rapport à la configuration de référence Valéo. Ce jeu est un peu plus grand que le jeu utilisé lors de la modélisation des rainures (2 mm).

#### 5.4.2.2 Effets du traitement de carter - Configuration 1

Cette configuration s'avère très décevante, puisque le traitement de carter non seulement n'atteint ni son objectif de réduction du débit, ni son objectif de limitation de la giration, mais en plus il dégrade la situation.

Configuration	$\Delta P_s$ (jeu)	débit massique dans le jeu $\dot{m}_j$	$\Delta P_t$ (jeu)	$\Delta V_y$ (jeu)
Référence	-97.5 Pa	$2.58 \cdot 10^{-2}$ kg/s	-18.9 Pa	5.02 m/s
Rainures Config. 1	-75.0 Pa	$2.57 \cdot 10^{-2}$ kg/s	-15.0 Pa	7.15 m/s

TAB. 5.6 – Comparaison de la configuration 1 avec le cas de référence Valéo

Sur le tableau [5.6], on remarque que le critère  $\Delta V_y$  est nettement plus important (+42%) pour la configuration 1. On soulignera que la vitesse  $V_y$  moyenne en entrée de jeu est la même pour les deux configurations :  $V_y^{entree} = 11.7$  m/s. Le débit de jeu n'a en revanche quasiment pas varié, bien que l'écart de pression statique  $\Delta P_s$  ait été dégradé (+23%). L'objectif de pression totale est lui aussi dégradé de 20%.

On peut se demander d'où vient exactement le problème car :

- la géométrie de rainure utilisée ici semblait pertinente. Dans le cadre de la modélisation générale du rainurage, cette géométrie améliorerait sensiblement l'écoulement dans le jeu.
- on a vérifié au chapitre 3 que le passage d'une géométrie plane à une géométrie cylindrique (de rayon équivalent à celui du ventilateur Valéo) ne modifiait pas fondamentalement le fonctionnement des rainures.

La solution de ce problème vient de l'observation de l'écoulement de jeu. On a représenté sur la figure (Fig. 5.14) le champ de vitesse au niveau du jeu dans une coupe méridienne, ainsi que la carte de vitesse axiale  $U_x$ .

Comme on le voit facilement sur la figure (Fig. 5.14), la première configuration de traitement de carter est associée à un champ de vitesse plutôt défavorable. Il existe ainsi deux phénomènes qui viennent perturber le fonctionnement des rainures.

1. **Tourbillon en sortie des rainures** (marque S1). Il s'agit d'une recirculation essentiellement méridienne se développant juste en aval des rainures. On retrouve ainsi la structure observée en aval des obstacles dans la modélisation plane présentée au chapitre 3. Il y a cependant une grosse différence avec la modélisation plane : cette fois, la recirculation en aval s'étend aussi devant la sortie des rainures, comme on le constate en traçant l'iso-vitesse axiale nulle (Fig. 5.15)

La recirculation n'est plus limitée au sillage des obstacles, elle se développe aussi devant les sections de sortie des rainures. Ceci a pour conséquence de fortement limiter le débit circulant dans la rainure, puisque cette recirculation est associée à une poche de vitesse axiale faible s'étendant sur toute la hauteur des rainures, comme on peut le voir sur la figure (Fig. 5.14).

On peut s'interroger sur les causes d'un tel changement de comportement de la recirculation méridienne en aval des rainures. Il semblerait que l'accroissement de cette recirculation soit en

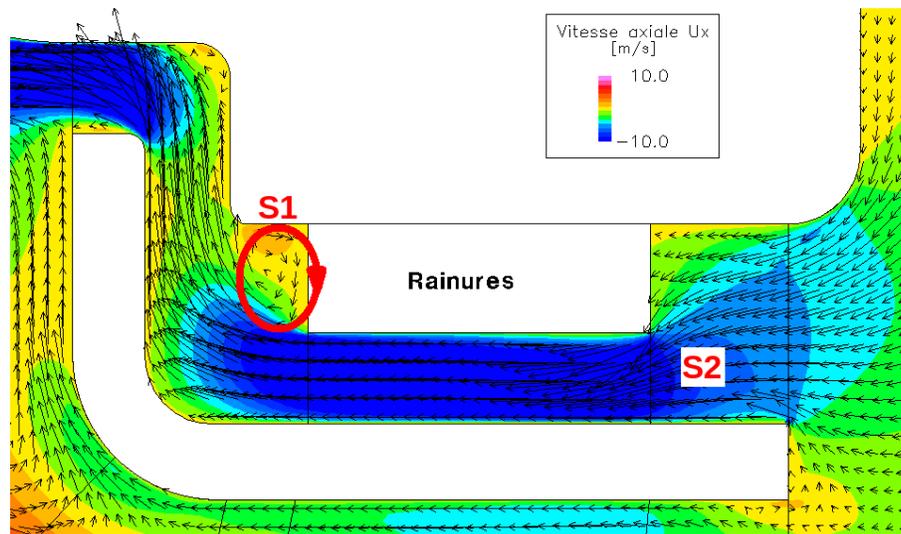


FIG. 5.14 – Champ méridien de vitesse au niveau du jeu - Configuration 1

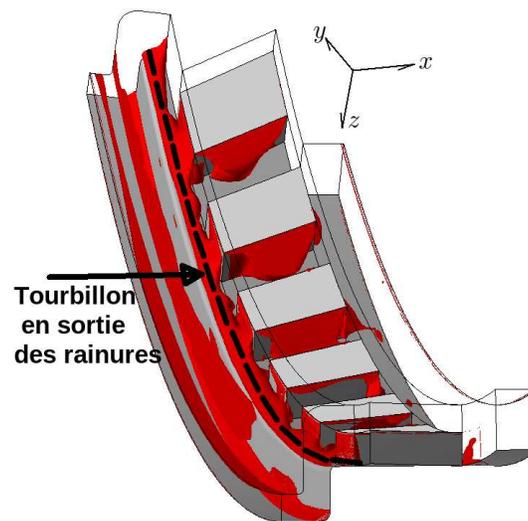


FIG. 5.15 – Iso-surface de vitesse axiale nulle dans le jeu

très grande partie due au positionnement des rainures par rapport au coude dans le jeu. Du fait du coude de la virole, une partie de la veine de jeu est verticale, longeant la lèvre radiale de la virole. Dans cette portion verticale, le fluide est animé d'un mouvement essentiellement radial et ascendant. Le fluide circulant dans le jeu connaît donc au niveau du coude une déviation assez brusque de  $90^\circ$ .

On rappelle que dans cette configuration, la sortie des rainures se trouve à environ 2.1 mm du coude que fait le carter, et donc de la partie verticale du jeu. Cet espace "vide" en aval des rainures est en fait situé à l'intérieur du coude. La recirculation méridienne classique qui s'y développait est donc amplifiée par le mouvement global de rotation dans le coude. Il s'ensuit une structure très marquée, suffisamment énergétique pour venir barrer la sortie des rainures.

2. **Contournement en entrée des rainures.** Le deuxième point remarquable est le contournement de la rainure par le fluide en entrée (point S2 sur la figure Fig. 5.14). On peut ainsi voir que la vitesse axiale est assez faible au niveau de l'entrée des rainures. Elle est en revanche beaucoup plus forte dans l'espace entre les rainures et la virole.

Ce contournement des rainures peut être relié au phénomène de blocage existant en sortie des rainures, lié à la recirculation S1. Ce n'est cependant pas le seul facteur influençant la déviation du fluide vers la virole. Comme on peut le constater sur la figure (Fig. 5.14), la majeure partie du fluide entrant dans le jeu vient du haut. Ce fluide est animé d'un mouvement radial descendant qui est provoqué par une très grosse structure tourbillonnaire se développant dans le plénum en aval du ventilateur (Fig. 5.16). Il faut noter que cette structure tourbillonnaire n'est pas propre à la configuration 1 testée. On retrouve une structure de mêmes caractéristiques dans le cas du ventilateur sans traitement de carter.

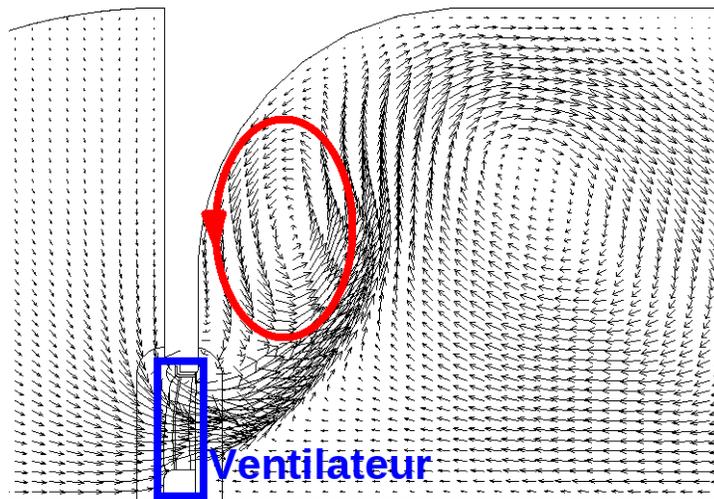


FIG. 5.16 – Recirculation dans le plénum aval

En conséquence, l'écoulement entrant dans le jeu se dirige naturellement vers la paroi de la virole. L'espace existant entre l'entrée du jeu et l'entrée des rainures (3.3 mm) permet le développement d'une zone de basse vitesse proche du carter. Cette zone vient se superposer à l'entrée des rainures et limite donc le débit circulant dans les rainures.

Au final, la combinaison des deux phénomènes présentés limite très fortement le débit circulant dans les rainures. Pour la configuration 1, la répartition de débit dans le jeu est la suivante (entrée et sortie des rainures définies de la même manière qu'en Fig. 3.33 - p. 102) :

Zone de mesure	débit massique $\dot{m}$ [kg/s]	fraction du débit de jeu total
Entrée du jeu	$2.565 \cdot 10^{-2}$	100%
Rainures - Entrée	$3.15 \cdot 10^{-3}$	12.3%
Rainures - Sortie	$6.30 \cdot 10^{-4}$	2.4%

TAB. 5.7 – Répartition de débit au niveau des rainures - Configuration 1

On rappellera qu'avec une modélisation isolée des rainures, les répartitions de débit mesurées pour ce type de configuration avoisinaient 30%, une valeur bien supérieure aux 12% et 2.4% mesurés sur la configuration 1.

De facto, la configuration 1 est grossièrement équivalente à un obstacle circonférentiel : tout se passe comme si les rainures n'existaient pas. On perd ainsi la capacité de guidage du fluide dans la direction azimutale, ce qui est critique du point de vue de l'objectif  $\Delta V_y$  de limitation de la giration.

Cette absence de guidage se couple à une dégradation nette de l'écoulement dans le coude. On a représenté sur la figure (Fig. 5.17) la carte méridienne de vitesse azimutale dans le jeu de la configuration 1 et dans le jeu de la configuration de référence (sans rainure).

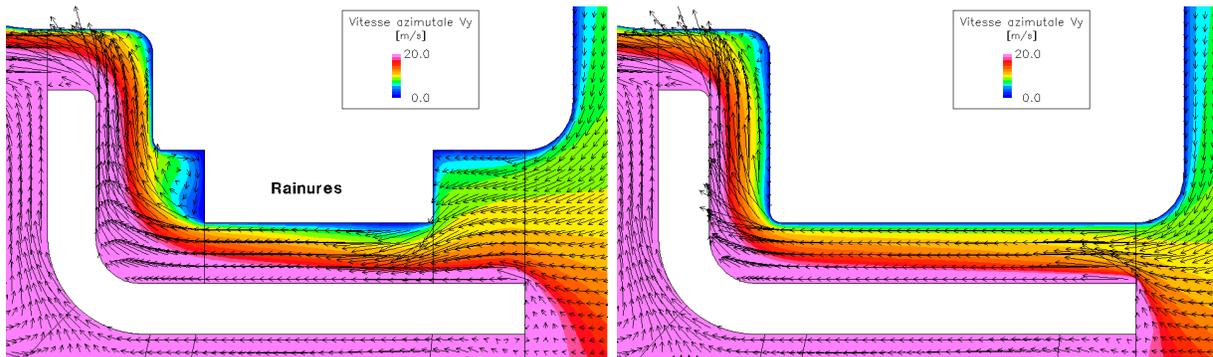


FIG. 5.17 – Vitesse azimutale  $V_y$  dans le jeu - Configuration 1 et configuration de référence

Pour la configuration 1, on voit un épaississement important de la zone de haute vitesse  $V_y$  dans le coude, caractéristique qu'on ne retrouve pas dans la configuration de référence. Cet épaississement est à relier à l'augmentation de la section du jeu immédiatement en aval des rainures. L'espace "vide" en aval des rainures permet, outre le développement de la recirculation S1, l'augmentation de la section débitante du jeu et donc la réduction de la vitesse débitante. Il en résulte une augmentation des couches limites au niveau du coude, et notamment celle sur la paroi virole. Le fluide est donc plus efficacement entraîné par la virole ; il en résulte une augmentation de la vitesse azimutale. Cette zone de haute vitesse est ensuite convectée jusqu'à la sortie du jeu. Le niveau moyen de  $V_y$  en sortie de jeu est ainsi d'environ 19.2 m/s, contre 11.7 m/s en entrée. Les profils de vitesse azimutale en sortie de jeu pour la configuration 1 et le cas de référence sont donnés en (Fig. 5.18).

Sur la figure (Fig. 5.18), la paroi de la virole se situe à  $z=162.6$  mm, la paroi carter étant à  $z=165.1$  mm.

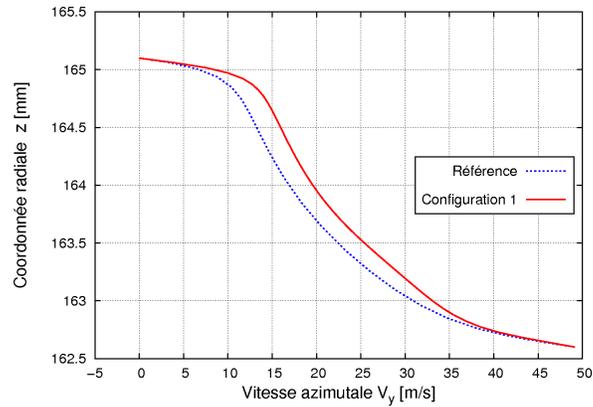


FIG. 5.18 – Profils de vitesse azimutale  $V_y$  en sortie de jeu - Configuration 1 et configuration de référence

Les performances du ventilateur avec le traitement de carter de la configuration 1 sont elles aussi très décevantes :

Configuration	Ecart de pression aval-amont	Couple	Rendement
Référence	198 Pa	0.499 N.m	0.641
Configuration 3	184 Pa	0.505 N.m	0.584
Variation	-7.1%	+1.2%	-8.9%

TAB. 5.8 – Performances du ventilateur en configuration 1

On rappelle que les performances du ventilateur sont calculées sur la base des intégrales de pression, de température et de débit réalisées sur la surface de l'aube ainsi que sur deux plans d'intégration en amont et en aval du ventilateur. Les plans amont et aval sont représentés en rouge sur la coupe méridienne (Fig. 5.19).

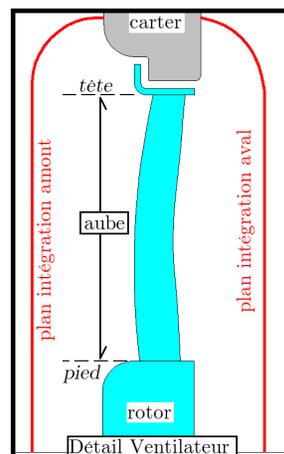


FIG. 5.19 – Position des plans d'intégration amont et aval

### 5.4.2.3 Corrections proposées

On vient de voir que le plus gros problème sur la configuration 1 venait du développement de structures en dehors des rainures, notamment la recirculation S1 en aval des rainures. Pour cette dernière, il existe en plus un effet de couplage fort avec le mouvement radial du fluide généré par le coude de la virole et du jeu.

Nous avons envisagé deux corrections possibles à ce problème :

1. L'allongement des rainures. On étend les rainures sur le maximum de longueur possible, ce qui revient de fait à supprimer les espaces "vides" en amont et en aval des rainures. Ces espaces sont longs respectivement de 3.3 et 2.1 mm. De cette manière, on peut espérer supprimer, ou en tous cas fortement limiter, le développement des structures parasites. Le prolongement des rainures vers l'entrée vise à capter le fluide dès l'entrée du jeu et ainsi éviter le contournement S2.

Pour la zone aval le prolongement ne sera en pratique que de 1.6 mm, au lieu de 2.1 mm, afin de conserver le congé sur la paroi carter. Ce congé permet par la suite de mailler beaucoup plus proprement le coude du jeu.

2. La limitation du coude du jeu. Le principal problème avec la recirculation S1 est son entraînement par le fluide s'engageant dans la partie verticale du jeu. Si on utilise un carter "plat", c'est à dire tel que le jeu ne présente plus cette portion verticale, on peut espérer limiter l'alimentation de la recirculation S1. L'alignement du carter passe en pratique par la réduction de la lèvre radiale sur la virole.

Nous avons donc testé deux configurations supplémentaires, notées 2 et 3, construites sur la base de la configuration 1 et des corrections proposées :

Configuration	Allongement des rainures	Carter "plat"
Conf. 2	oui	non
Conf. 3	oui	oui

Compte tenu des temps de calcul assez importants pour les géométries de ventilateur avec traitement de carter, nous avons choisi d'utiliser l'allongement des rainures dans les deux configurations afin de ne pas multiplier les cas. Ce choix nous permet en particulier d'espérer le meilleur fonctionnement possible du traitement de carter pour la configuration 3.

La géométrie de rainurage pour les configurations est donc :

$\alpha$	112 °
h	3 mm
w	8.5 mm
L	14.9 mm
N	54

### 5.4.3 Traitement de carter - Configuration 2

La configuration 2 du traitement de carter est beaucoup plus efficace que la précédente. Elle permet de réduire sensiblement la giration en sortie, ainsi que le débit, tout en améliorant les écarts de pression statique et totale :

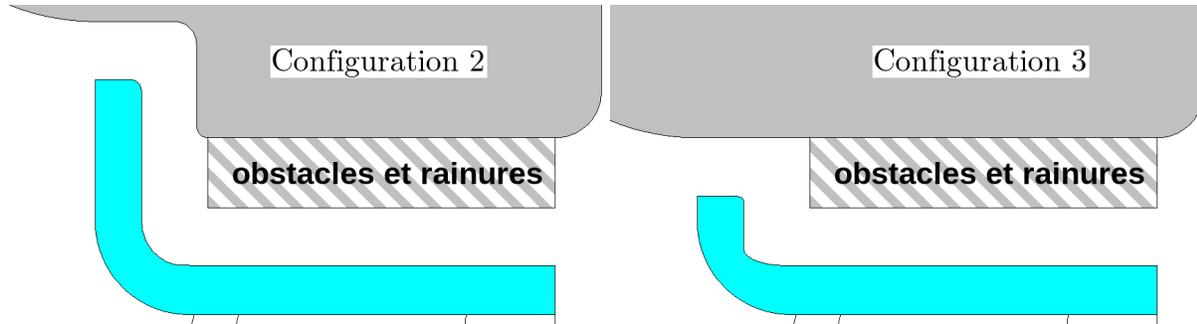


FIG. 5.20 – Configurations de rainurages proposées en correction

Configuration	$\Delta P_s$ (jeu)	débit massique dans le jeu $\dot{m}_j$	$\Delta P_t$ (jeu)	$\Delta V_y$ (jeu)
Référence	-97.5 Pa	$2.58 \cdot 10^{-2}$ kg/s	-18.9 Pa	5.02 m/s
Rainures Config. 2	-187.5 Pa	$1.42 \cdot 10^{-2}$ kg/s	-120.6 Pa	3.39 m/s
Amélioration	92%	42%	538%	32.5%

TAB. 5.9 – Comparaison de la configuration 2 avec le cas de référence Valéo

La deuxième configuration du traitement de carter permet donc d'améliorer tous les objectifs que nous nous étions fixés. Pour ce qui est de l'objectif de limitation de la giration  $\Delta V_y$ , il est intéressant de noter que la vitesse azimutale  $V_y$  en entrée de jeu augmente pour la configuration 2 :

Configuration	$\Delta V_y$ (jeu) [m/s]	$V_y$ en entrée de jeu [m/s]	$V_y$ en sortie de jeu [m/s]
Référence	5.02	11.69	16.71
Rainures Config. 2	3.39	13.6	17.05

TAB. 5.10 – Vitesses azimutales dans le jeu - Configuration 2

En conséquence, malgré la limitation de  $V_y$  beaucoup plus importante avec le rainurage, le niveau moyen de  $V_y$  en sortie de jeu pour la configuration 2 est légèrement plus élevé que dans le cas de référence. On aborde cependant ici la problématique du couplage direct avec le ventilateur, qui sera décrite en détail un peu plus loin.

#### 5.4.3.1 Ecoulement global dans le jeu

L'allongement des rainures a été bénéfique pour l'écoulement dans le jeu. On a tracé sur la figure (Fig. 5.21) le champ de vitesse axiale  $U_x$  et le champ vectoriel de vitesse dans le jeu pour la configuration 2, ainsi que le champ de vitesse azimutale absolue  $V_y$ .

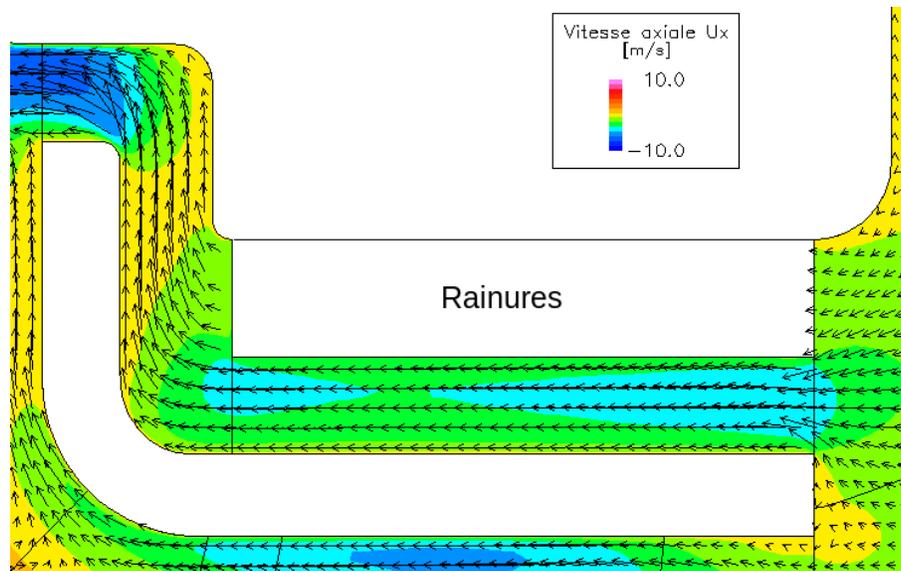


FIG. 5.21 – Champ méridien de vitesse dans le jeu - Configuration 2

Comme on peut le constater sur la figure (Fig. 5.21), le champ méridien de vitesse ne semble plus présenter les structures S1 et S2 décrites pour la configuration 1. Il n’y a en particulier pas de déficit majeur de vitesse axiale en sortie des rainures.

La répartition de débit dans le jeu est la suivante :

Zone de mesure	débit massique $\dot{m}$ [kg/s]	fraction du débit de jeu total
Entrée du jeu	$1.42 \cdot 10^{-2}$	100%
Rainures - Entrée	$5.39 \cdot 10^{-3}$	38.0%
Rainures - Sortie	$3.46 \cdot 10^{-4}$	24.4%

TAB. 5.11 – Répartition de débit au niveau des rainures - Configuration 2

Un part non négligeable du débit entre dans les rainures. En revanche, cette part tend à diminuer au niveau de la sortie des rainures, ce qui peut laisser supposer la présence d’effets de blocage dans les rainures.

La carte de  $U_x$  à mi-hauteur des rainures (Fig. 5.22) montre que la vitesse axiale varie d’une rainure à l’autre. Sur les six rainures simulées, on voit ainsi que la vitesse est nettement moins forte dans les rainures 4 et 5.

Ce phénomène de variation est à relier au mode de simulation, qui fait intervenir, rappelons-le, un rotor artificiellement fixe par rapport au carter. Dans notre configuration, le bord de fuite en tête d’aube se situe azimuthalement à peu près en entrée de la rainure 3. Le sillage qui s’en dégage vient ensuite impacter le jeu. Il est cependant très difficile d’établir une relation claire entre l’écoulement lié à l’aubage et celui dans le jeu. Les mécanismes d’alimentation du jeu sont complexes : on a vu sur la figure (Fig. 5.15) qu’il y avait des recirculations assez importantes en aval du ventilateur, recirculations qui alimentent en partie le jeu et qu’on retrouve avec cette configuration.

**Vitesse azimuthale  $V_y$**  Les rainures fonctionnent parfaitement du point de vue du guidage puisqu’on observe sur la figure (Fig. 5.23) une poche de vitesse azimuthale  $V_y$  négative à la sortie des

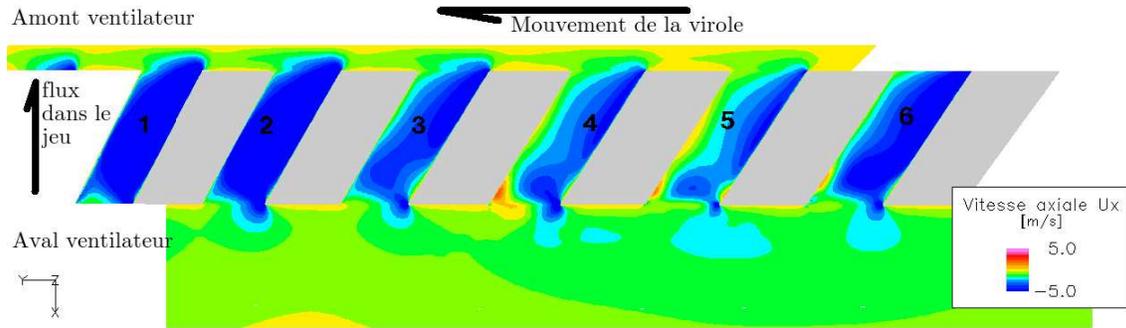


FIG. 5.22 – Champ vitesse axiale  $U_x$  à mi-hauteur de rainure - Configuration 2

rainures, contrastant nettement avec le reste de l'écoulement, animé d'une vitesse positive forte. Cette poche disparaît ensuite assez progressivement par mélange avec le reste du fluide de jeu, abaissant le niveau général de vitesse en sortie.

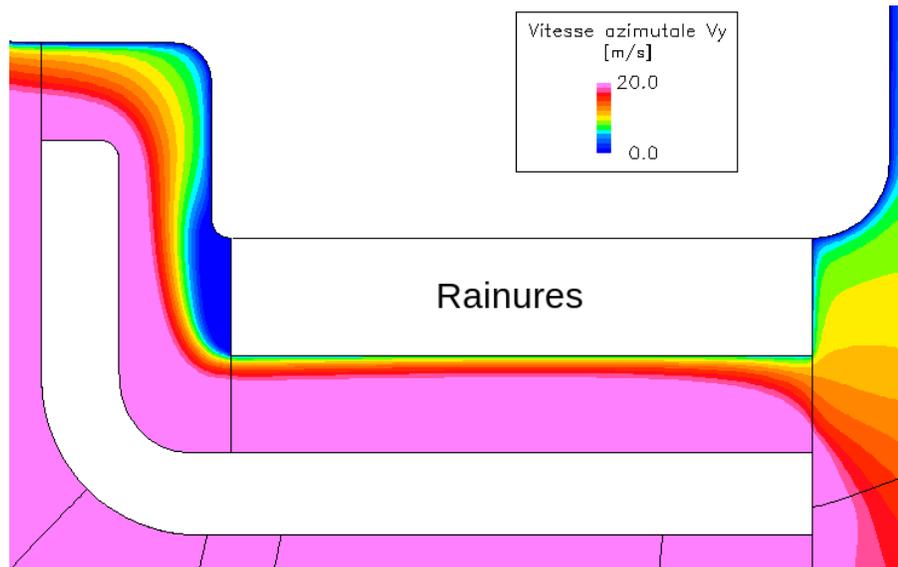


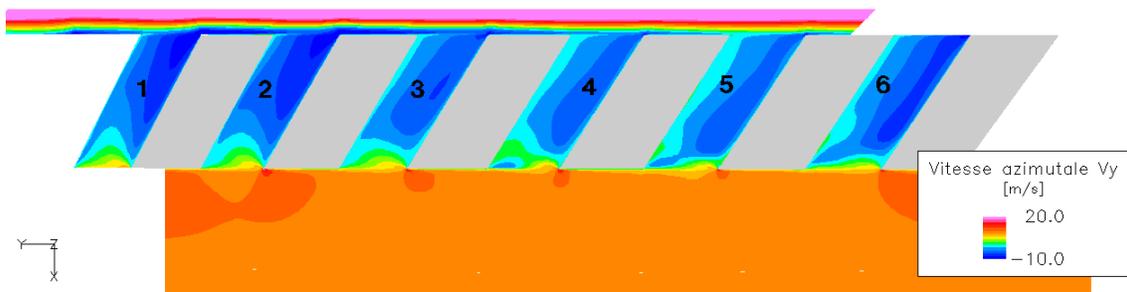
FIG. 5.23 – Champ méridien de vitesse azimutale dans le jeu - Configuration 2

La carte à mi-rainure (Fig. 5.24) permet de retrouver ce qui avait été constaté pour la vitesse axiale : les rainures 4 et 5 génèrent une vitesse azimutale inférieure aux autres rainures. Ceci est cohérent avec la faible vitesse  $U_x$  dans ces rainures, puisque, du fait de l'alignement de la vitesse avec la rainure, on a  $V_y = U_x \tan(\alpha - 90)$ .

#### 5.4.3.2 Structures tourbillonnaires dans le jeu

On peut se demander si le champ aérodynamique possède les mêmes caractéristiques que celui obtenu avec une modélisation générale (chapitre 3). On pense notamment aux différentes structures tourbillonnaires :

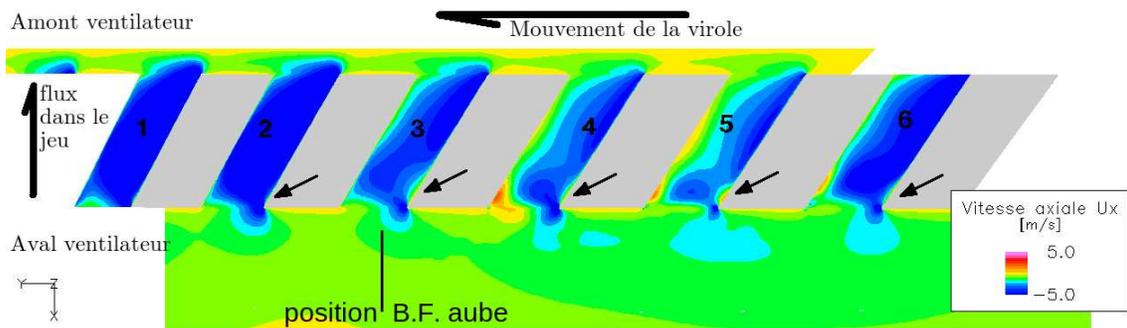
- le décollement en entrée des rainures.

FIG. 5.24 – Champ vitesse azimutale  $V_y$  à mi-rainure - Configuration 2

- le tourbillon de rainure.
- les tourbillons en aval avec une recirculation méridienne et deux décollements aux coins de l'obstacle.

L'analyse du champ de vitesse permet de constater que, parmi ces structures, certaines ont disparu et d'autres se sont renforcées.

**Décollement en entrée des rainures** En observant le champ de vitesse axiale à mi-rainure, on se rend compte que les recirculations d'entrée des rainures ont fortement diminué. On a représenté sur la figure (Fig. 5.25) le champ de vitesse axiale à mi-rainure. Les six rainures simulées sont numérotées. Puisqu'on travaille avec un rotor figé, on a représenté la position *azimutale* approximative du bord de fuite en tête d'aube afin de situer les rainures par rapport à l'aube. Le bord de fuite se situe à peu près au niveau de l'entrée de la rainure 3.

FIG. 5.25 – Champ vitesse axiale  $U_x$  à mi-rainure - Configuration 2

On voit sur la figure (Fig. 5.25) que les recirculations en entrée des rainures, marquées par des flèches sont assez petites : les poches de vitesse positive, correspondant à l'écoulement remontant vers les entrées, ne sont visibles que pour les rainures 2 à 6, et elles restent de petite dimension. La plus grosse recirculation est observée pour la rainure 3. La recirculation s'y étend sur environ 5 mm. La variation de cette recirculation est liée à la présence de l'aube et surtout de son sillage. Toutefois, il est assez difficile de décrire précisément ce qui se passe : l'analyse de l'angle d'incidence n'apporte pas de résultat cohérent.

**Tourbillon de rainure** Le tourbillon de rainure semble avoir été assez considérablement renforcé dans cette configuration. Une fois de plus, du fait du couplage avec le rotor, ce tourbillon varie d'une rainure à une autre. On peut mesurer l'hélicité moyenne sur la section de sortie de la rainure :

Rainure	Hélicité moyenne en sortie [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ]
1	51707
2	33455
3	21464
4	20421
5	18298
6	39352

On retrouve la faiblesse des mécanismes tourbillonnaires (et de l'écoulement) dans les rainures 4 et 5.

En faisant la moyenne sur les six rainures, l'hélicité moyenne en sortie des rainures est d'environ  $30750 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , alors qu'elle n'était que d'environ  $13000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  pour la modélisation générale des rainures. Cette modification de l'hélicité est essentiellement due à une augmentation de la vorticité dans la rainure (de  $1300 \text{ s}^{-1}$  pour la modélisation, à  $2700 \text{ s}^{-1}$  dans la configuration 1). Cela se traduit notamment par l'apparition de vitesses radiales ascendantes et descendantes fortes sur les côtés de la rainure (Fig. 5.26)

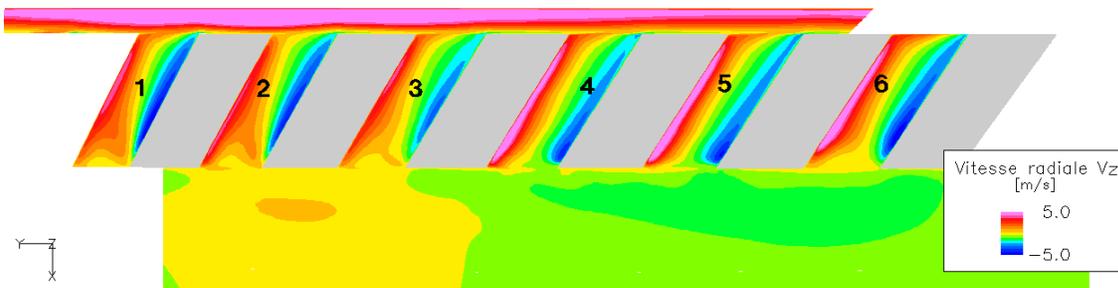


FIG. 5.26 – Champ vitesse radiale  $V_z$  à mi-rainure - Configuration 2

Ce renforcement du tourbillon de rainure est assez intéressant car il permet de générer une vitesse très négative en fond de rainure. On obtient ainsi pour la rainure 1 un pic à  $V_y = -12.1 \text{ m/s}$ , soit près de 24% de la vitesse de défilement de la paroi virole en regard de la rainure ( $48.57 \text{ m/s}$ ).

**Recirculation méridienne aval** Compte tenu des corrections apportées sur la configuration 2, la recirculation méridienne aval est maintenant très petite. On rappelle que c'est cette recirculation qui créait le plus de problèmes dans la configuration 1. Les modifications apportées dans la configuration 2 visent à réduire, voire à supprimer, cette recirculation.

Cette recirculation n'est maintenant observable qu'en aval des obstacles : elle ne s'étend plus devant la sortie des rainures. Elle est petite et peu énergétique, ce qui la rend assez difficile à détecter. On peut la voir en traçant la carte de vitesse radiale en aval d'un obstacle (Fig. 5.27). En effet la principale caractéristique de ce décollement est de générer une vitesse radiale négative.

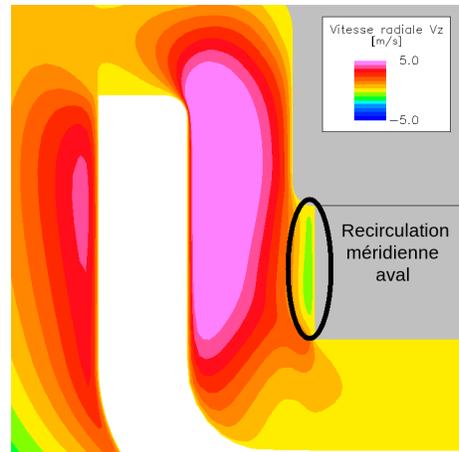


FIG. 5.27 – Champ vitesse radiale  $V_z$  en aval d'un obstacle - Configuration 2

Comme on le voit sur la figure (Fig. 5.27), la recirculation méridienne aval est écrasée contre la paroi arrière de l'obstacle. Elle semble se développer uniquement en raison du petit congé de raccordement sur la paroi carter.

**Recirculations aval aux coins** Avec un modèle général des rainures, on avait pu observer deux décollements de l'écoulement se développant dans un plan "aube à aube" au niveau des coins gauches et droits des rainures (cf. page 122). Ces deux recirculations sont maintenant très faibles, voire inexistantes.

- Recirculation à droite (**Ds**) : Elle a totalement disparu. Ce point est assez cohérent avec la très forte réduction observée pour la recirculation méridienne aval : le fluide est plaqué sur la paroi de l'obstacle, ce qui limite les possibilités de décollement.
- Recirculation à gauche (**Gs**) : Elle est assez difficile à distinguer. En pratique, la structure est très proche de ce qui a été décrit sur la figure (Fig. 3.57), c'est à dire une structure "ouverte" sur le côté droit de la rainure voisine.

On conserve cependant une caractéristique assez intéressante qui était liée à ces recirculations (celle en **Gs** principalement). Il s'agit de la présence d'une poche de vitesse négative juste en aval de l'obstacle. On peut déjà apercevoir ce phénomène sur la carte de vitesse azimutale (Fig. 5.24), reproduite plus en détail dans la figure (5.28).

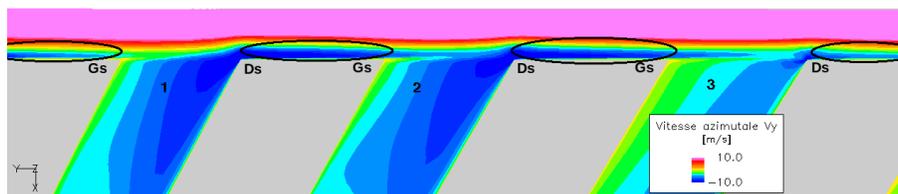


FIG. 5.28 – Poches de vitesse azimutale  $V_y < 0$  en aval des obstacles - Configuration 2

Cette poche se retrouve en aval de tous les obstacles, mais la vitesse est beaucoup plus forte en aval des obstacles séparant les rainures 6, 1, 2 et 3.

### 5.4.3.3 Effets globaux du traitement de carter n ° 2

L'analyse des performances globales du ventilateur avec la configuration de traitement de carter 2 est plus que décevante :

Configuration	Ecart de pression aval-amont	Couple	Rendement
Référence	198 Pa	0.499 N.m	0.641
Configuration 2	192 Pa	0.501 N.m	0.626
Variation	-3.1%	-0.4%	-2.3%

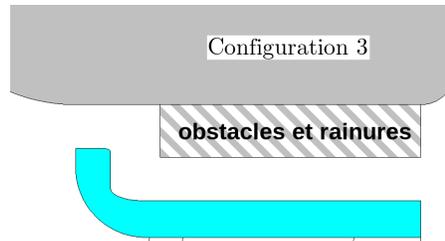
TAB. 5.12 – Performances du ventilateur en configuration 2

On peut voir que la mise en place du traitement de carter en configuration 2 se traduit par une perte sur tous les objectifs globaux du ventilateur : l'écart de pression statique est plus faible, le rendement est plus mauvais, et le couple augmente.

Ce résultat est assez surprenant dans la mesure où le nouveau traitement de carter permet une amélioration notable de l'écoulement de jeu. Nous reviendrons plus tard sur les causes de cette dégradation des performances globales, après avoir examiné la configuration 3.

### 5.4.4 Traitement de carter - Configuration 3

Dans cette configuration, les rainures sont aussi longues que pour la configuration 2, mais on a aussi privilégié un carter "plat", afin d'éviter la présence d'un coude dans le jeu.



Pour cette configuration, les caractéristiques de l'écoulement de jeu sont les suivantes :

Configuration	$\Delta P_s$ (jeu)	débit massique dans le jeu $\dot{m}_j$	$\Delta P_t$ (jeu)	$\Delta V_y$ (jeu)
Référence	-97.5 Pa	$2.58 \cdot 10^{-2}$ kg/s	-18.9 Pa	5.02 m/s
Rainures Config. 3	-208.7 Pa	$1.42 \cdot 10^{-2}$ kg/s	-183.6 Pa	1.04 m/s
Amélioration	114%	42%	871%	79.3%

TAB. 5.13 – Comparaison de la configuration 3 avec le cas de référence Valéo

Comme on peut le voir sur le tableau [5.13], la troisième configuration de traitement de carter (et de forme du carter) améliore exceptionnellement les caractéristiques de l'écoulement de jeu.

Le point le plus remarquable est l'écart de vitesse azimutale  $\Delta V_y$  qui n'est plus que de 1.04 m/s, ce qui signifie que le fluide acquiert en moyenne très peu de giration en traversant le jeu. Précisons que les niveaux de vitesse ont beaucoup varié avec l'introduction de la configuration 3. :

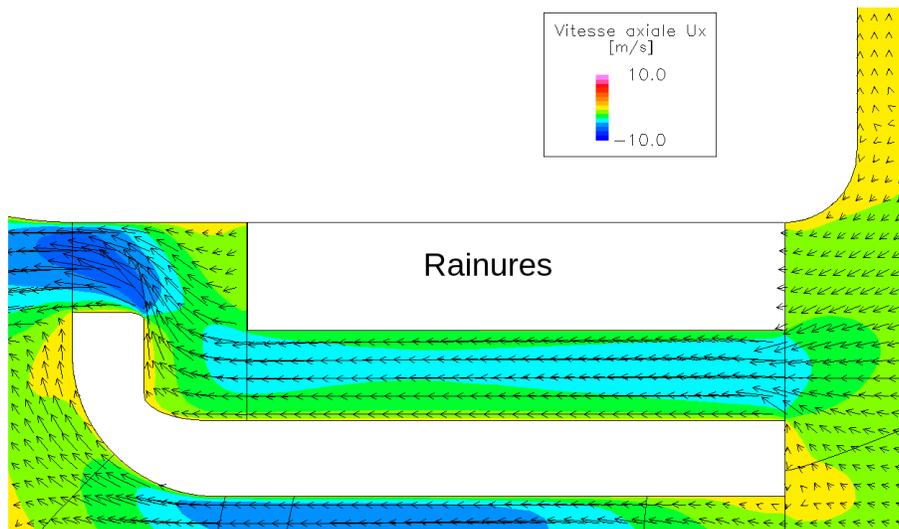
Configuration	$\Delta V_y$ (jeu) [m/s]	$V_y$ en entrée de jeu [m/s]	$V_y$ en sortie de jeu [m/s]
Référence	5.02	11.69	16.71
Rainures Config. 3	1.04	13.86	14.90

TAB. 5.14 – Vitesses azimutales dans le jeu - Configuration 3

Avec le traitement carter en configuration 3, il est possible d'avoir un écoulement en sortie du jeu qui possède une vitesse azimutale moyenne moins forte que dans le cas de référence, malgré une légère augmentation en entrée de jeu. De ce point de vue, on a une preuve majeure de **la validité de ce traitement de carter**.

#### 5.4.4.1 Structure générale de l'écoulement dans le jeu

Lorsqu'on examine le champ aérodynamique dans le jeu, on retrouve les caractéristiques attendues en sortie des rainures. Les structures gênantes S1 et S2 ne sont pas réapparues. On a donc une vitesse axiale assez importante dans les rainures (Fig. 5.29).

FIG. 5.29 – Champ vitesse axiale  $U_x$  à mi-rainure - Configuration 2

L'analyse de la répartition de débit apporte quelques informations supplémentaires. Pour la configuration 3, la répartition de débit dans le jeu est la suivante :

Zone de mesure	débit massique $\dot{m}$ [kg/s]	fraction du débit de jeu total
Entrée du jeu	$1.42 \cdot 10^{-2}$	100%
Rainures - Entrée	$3.61 \cdot 10^{-3}$	25.4%
Rainures - Sortie	$4.89 \cdot 10^{-3}$	34.5%

TAB. 5.15 – Répartition de débit au niveau des rainures - Configuration 3

A la différence de la configuration 2, la fraction de débit circulant dans les rainures de la configuration 3 est plus importante en sortie qu'en entrée des rainures. Ce point semble cohérent avec l'écoulement global dans le jeu : comme le coude dans le jeu n'existe plus, la sortie des rainures

est en vis-à-vis de la sortie du jeu. Le fluide dans les rainures poursuit donc sur une trajectoire à peu près horizontale jusqu'à la sortie du jeu, ce qui génère un blocage assez faible. A l'inverse, le fluide circulant entre les rainures et la virole/obstacle remonte au niveau du reliquat de coude sur la virole. Cette remontée s'opère suffisamment tôt pour envoyer du fluide dans les rainures.

Pour le champ de vitesse azimutale  $V_y$ , le point le plus notable est le développement d'une poche assez importante de vitesse très négative (maximum -8 m/s) en sortie des rainures (Fig. 5.30).

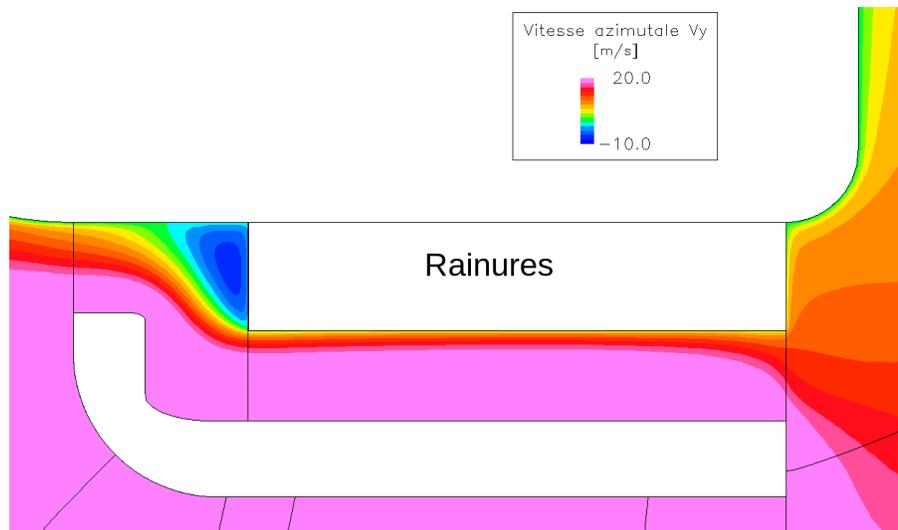


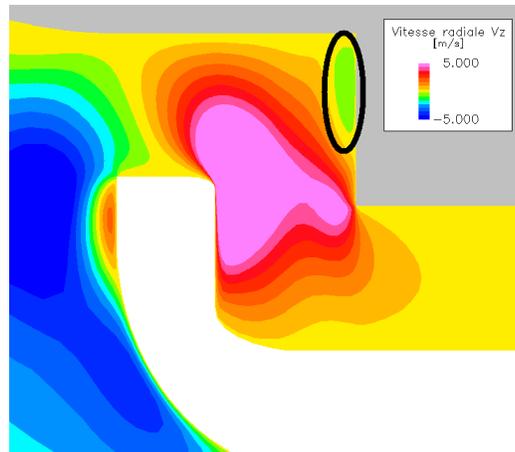
FIG. 5.30 – Champ méridien de vitesse azimutale dans le jeu - Configuration 3

Cette poche est beaucoup plus étendue axialement que dans la configuration 2, à cause de l'écoulement qui est plus axial dans ce cas.

#### 5.4.4.2 Structures tourbillonnaires dans le jeu

La suppression du coude dans le jeu n'affecte presque pas la structure tourbillonnaire au niveau des rainures. On retrouve quasiment tout ce qui a été décrit pour la configuration 2. Seules deux légères variations apparaissent.

- **Tourbillon de rainure** : Le tourbillon de rainure est un peu moins énergétique. On peut s'en rendre compte en calculant l'hélicité moyenne en sortie de rainure. L'hélicité moyenne sur les six rainures est d'environ  $18\,000\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , contre  $30\,750\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  pour la configuration 2. On remarquera que cette baisse permet de se rapprocher du niveau observé lors de la modélisation générale des rainures, c'est à dire  $13\,000\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .
- **Recirculation méridienne aval** : Cette recirculation a un peu diminué dans la configuration 3. Sa taille axiale est à peu près la même : de l'ordre de  $0.5h$  ( $h$  étant la hauteur de la rainure) dans les deux configurations. Elle est en revanche un peu plus petite radialement pour la configuration 3. Comme on peut le voir sur la figure (Fig. 5.31) montrant la carte de vitesse radiale en aval d'un obstacle, la poche de vitesse radiale descendante (vert) associée à cette recirculation ne s'étend que sur 60% de la hauteur de l'obstacle en partant du carter.

FIG. 5.31 – Champ vitesse radiale  $V_z$  en aval d'un obstacle - Configuration 3

Ce point montre que la présence d'un coude prononcé dans le jeu (i.e. configurations 1 et 2) est un facteur majeur d'entraînement de cette recirculation.

#### 5.4.4.3 Effets globaux du traitement de carter n° 3

Les performances globales du ventilateur obtenues lors du couplage avec la configuration de traitement de carter 3 sont une fois de plus décevantes :

Configuration	Ecart de pression aval-amont	Couple	Rendement
Référence	198 Pa	0.499 N.m	0.641
Configuration 3	185 Pa	0.491 N.m	0.615
Variation	-6.6%	-1.6%	-4.0%

TAB. 5.16 – Performances du ventilateur en configuration 3

Dans la mesure où le traitement de carter en configuration 3 donne le meilleur résultat possible sur l'écoulement de carter, on peut s'interroger sur les origines de cette dégradation des performances du ventilateur, dégradation que l'on retrouve aussi pour la configuration 2.

#### 5.4.5 Effets de l'amélioration de l'écoulement de jeu sur le ventilateur

Comme on vient de le montrer, l'application directe d'un traitement de carter efficace sur le ventilateur de référence Valéo n'est pas synonyme d'amélioration des performances globales de la machine. Par exemple, le rendement du ventilateur chute pour les configurations 2 et 3. La réponse à ce problème se trouve dans l'observation du champ aérodynamique au niveau de l'aube.

On a tracé sur la figure (Fig. 5.32) la carte méridienne de pression totale relative  $P_{tr}$  au niveau de l'aube pour la configuration de référence Valéo, ainsi que les configurations 2 et 3 du traitement de carter.

Le point le plus remarquable est l'agrandissement (essentiellement radial) de la zone de  $P_{tr}$  faible en tête d'aube lors de la mise en place du traitement de carter. La configuration 3 est celle qui

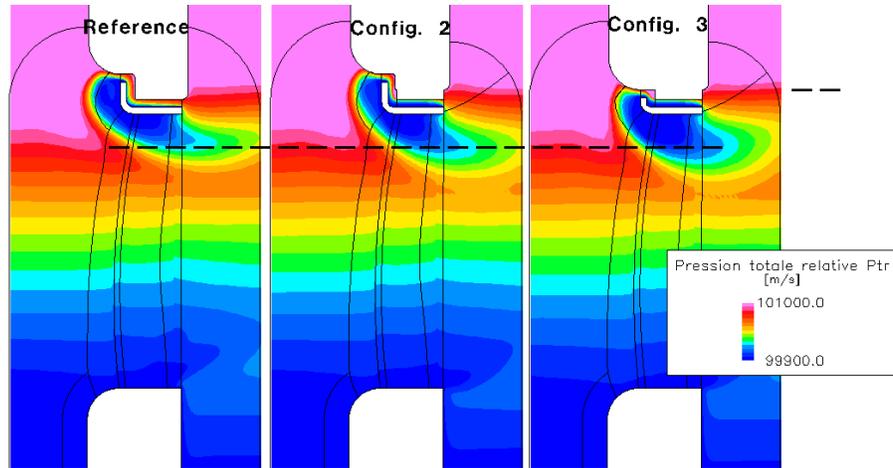


FIG. 5.32 – Champ méridien de pression totale relative  $P_{tr}$

présente la plus importante zone de basse  $P_{tr}$ . Cette poche est synonyme de pertes aérodynamiques accrues, ce qui est donc bien cohérent avec les variations de performances observées.

Cette évolution de la pression totale relative est à relier au champ de vitesse en tête d'aube. Si on trace la carte méridienne de vitesse azimutale absolue  $V_y$  (Fig. 5.33), on s'aperçoit que la zone à haute vitesse en tête d'aube s'agrandit en présence d'un traitement de carter.

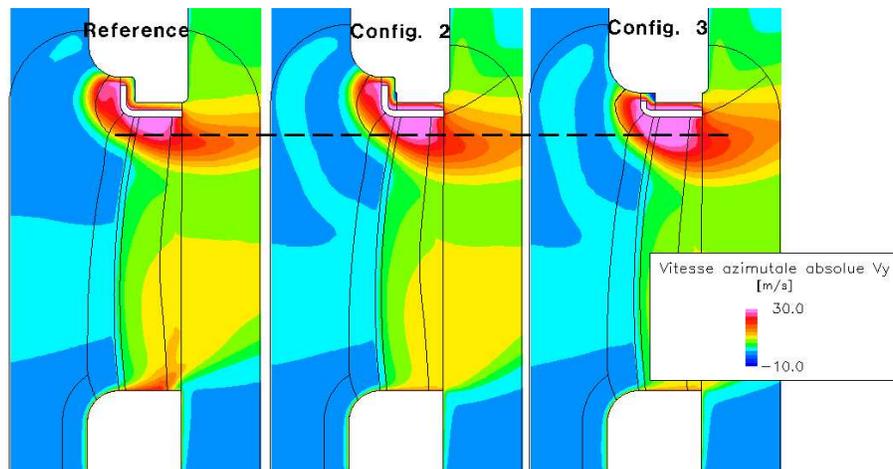


FIG. 5.33 – Champ méridien de vitesse azimutale absolue  $V_y$

Pour le reste de l'aube, l'écoulement est assez similaire dans les trois cas, exception faite du décollement en pied observé dans le cas de référence qui n'apparaît plus avec les traitements de carter.

On avait vu au chapitre 3 que le problème de vitesse en tête était lié à une désadaptation en tête d'aube et à un décollement du profil. On a tracé sur la figure (Fig. 5.34) les champs de vitesse relative, dans une coupe aube à aube à 97% de la hauteur, pour le cas de référence et les configurations 2 et 3.

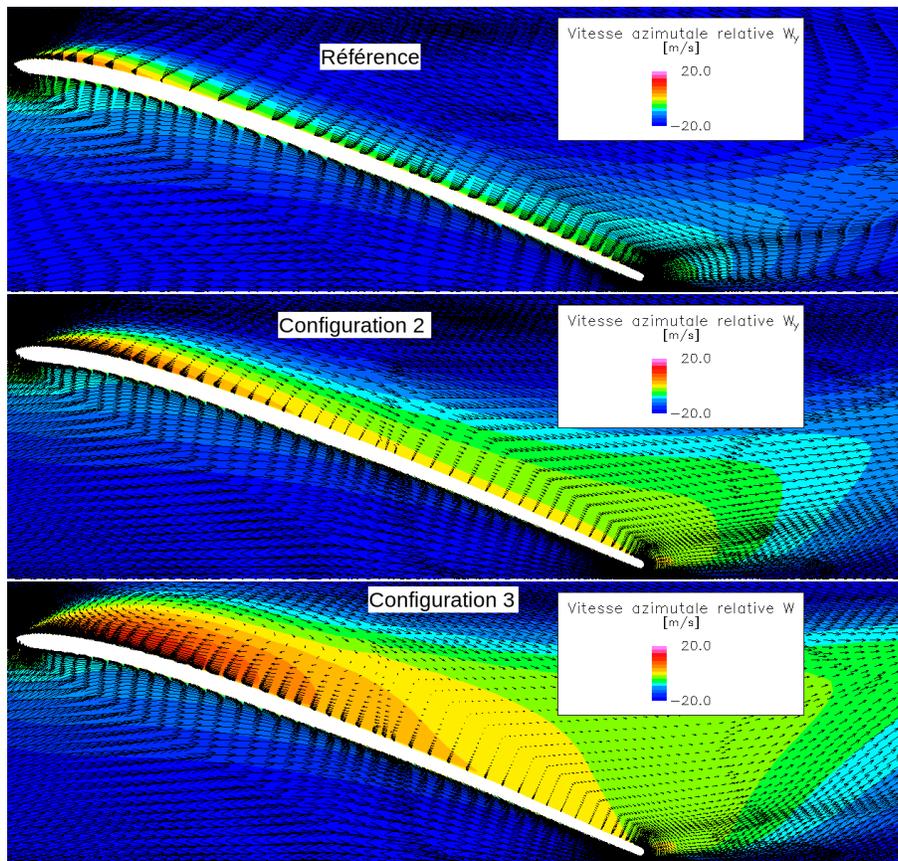


FIG. 5.34 – Champ de vitesse relative à 97% de la hauteur

On constate qu'avec le traitement de carter en configuration 3, le décollement du profil au niveau du bord d'attaque est énorme, il s'étend sur tout le profil. Pour la configuration 2, le décollement est plus modéré mais il reste plus important que pour le cas de référence. On peut donc en conclure que l'introduction du traitement de carter se traduit précisément par une désadaptation accrue de la tête d'aube, ce qui engendre au final la dégradation des performances de la machine.

En traçant sur la figure (Fig. 5.35) les profils des composantes axiales  $U_x$ , azimutales absolues  $V_y$ , azimutales relatives  $W_y$  en amont de l'aube, ainsi que le profil d'angle relatif  $\beta$  (cf. 3.2.2), on voit clairement apparaître un déficit de vitesse axiale entre 80% et 100% de la hauteur de l'aube en présence d'un traitement de carter. Le déficit de vitesse axiale est le plus important pour la configuration 3.

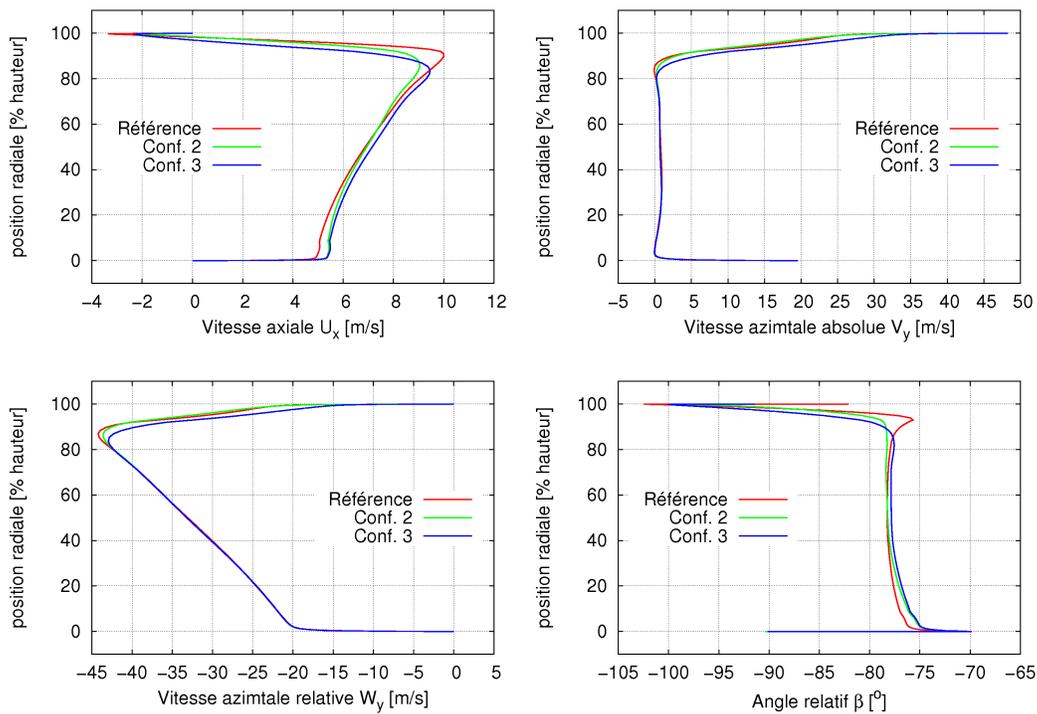


FIG. 5.35 – Profils amont des composantes  $U_x$ ,  $V_y$ ,  $W_y$  et d'angle relatif  $\beta$

De même, on note une nette augmentation de la vitesse azimutale relative  $V_y$  pour la configuration 3, ce qui se traduit par un déficit marqué de vitesse  $W_y$  dans le repère relatif. Pour la configuration 2, le niveau est sensiblement le même que le cas de référence.

Ces différentes variations se traduisent au final par une augmentation assez brutale de l'angle relatif  $\beta$  amont entre 80% et 100% de la hauteur de l'aube. Pour  $\beta$ , l'écart par rapport au cas de référence dans cette zone est d'environ  $10^\circ$  pour la configuration 3, et  $3^\circ$  pour la configuration 2.

Il est assez surprenant de constater que la vitesse axiale en tête d'aube diminue puisque le traitement de carter a permis de limiter la vitesse débitante (négative dans le repère associé au ventilateur) dans le jeu. De même, la variation de vitesse observée dans la configuration 3 va à l'encontre de ce qui a été observé dans le jeu : cette configuration possède la giration en sortie de

jeu la plus faible ( $V_y = 14.9$  m/s), et pourtant, c'est aussi celle qui a la plus forte giration en tête d'aube.

L'explication de cette énigme vient de la structure de l'écoulement au niveau de la sortie du jeu.

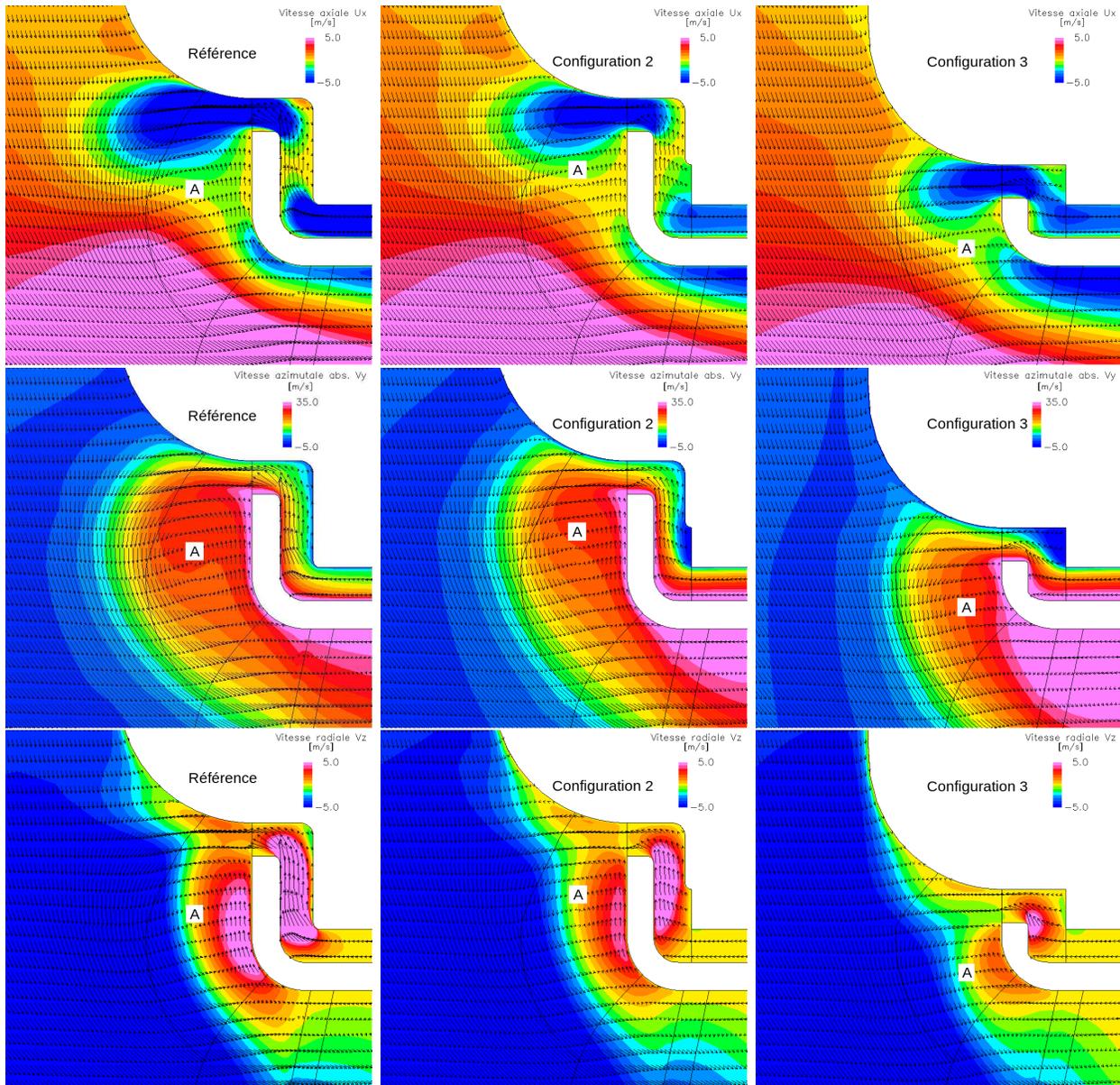


FIG. 5.36 – Composantes de vitesse axiale  $U_x$  (haut), azimuthale  $V_y$  (milieu) et radiale  $V_z$  (bas) en sortie de jeu

On a représenté sur la figure (Fig. 5.36) les composantes axiales, azimuthales absolues et radiales en sortie de jeu pour le cas de référence et les configurations 2 et 3. On superpose le champ vectoriel de vitesse afin de faciliter la visualisation des structures de l'écoulement. Les évolutions sont en général assez complexes, mais quelques remarques majeures se dégagent :

- Dans toutes les configurations, on retrouve le tourbillon A qui avait été décrit en 3.2.2. Il est

cependant très difficile à voir dans la configuration 3. La position du centre tourbillonnaire évolue peu entre le cas de référence et la configuration 2. En revanche, le centre tourbillonnaire se décale nettement vers l'aube sur la configuration 3 en raison du raccourcissement de la lèvre sur la virole.

Le tourbillon semble en outre un peu plus petit (dans la direction axiale surtout) en présence d'un traitement de carter. Ce point est à relier à l'évolution de la vitesse axiale.

- Avec la réduction du débit de jeu, le jet émergeant du jeu remonte moins vers l'amont du ventilateur. Pour les configurations 2 et 3, la poche de vitesse axiale vraiment négative reste de taille modérée, logée dans la partie courbe du carter. Dans la configuration de référence, le jet provoque une déviation vers l'amont du fluide arrivant d'en haut (en longeant le carter)
- La vitesse radiale, notamment le long de la lèvre verticale, diminue en présence des traitements de carter. Ce phénomène semble lié en première approche à la diminution de la vitesse dans le jet sortant du jeu. Plus ce jet sera énergétique, plus le tourbillon A sera fort, et donc plus la vitesse radiale montante le long de la virole sera importante.
- L'augmentation de  $V_y$  pour la configuration 3 est essentiellement liée à une modification de l'écoulement au niveau du coude. Cela semble dû au tourbillon A.

Au final, la synthèse de ces différents éléments permet de comprendre les mécanismes de dégradation de l'écoulement en tête d'aube.

1. Pour la configuration de référence, le jet sortant du jeu est suffisamment énergétique pour remonter loin dans l'écoulement amont. Il arrive en particulier à perturber sensiblement l'écoulement qui descend le long du carter, ce qui génère un tourbillon A assez intense. Ce tourbillon est assez développé dans la direction axiale, mais il génère aussi un mouvement ascendant fort du fluide au niveau du coude extérieur de la virole. Cela permet de "recoller" un peu l'écoulement incident sur la virole.
2. Pour la configuration 2, le tourbillon A est un peu moins important du fait de la diminution du débit dans le jeu. Cela se traduit, entre autre, par une petite diminution du mouvement ascendant au niveau du coude de la virole. La couche de faible vitesse débitante le long de la virole est alors un peu plus épaisse.
3. Pour la configuration 3, non seulement le tourbillon A est affaibli en raison de la diminution du débit de jeu, mais en plus il ne peut plus se développer le long de la lèvre verticale de la virole. Il déborde nettement vers le bas, et donc vers la tête d'aube, ce qui génère des perturbations accrues. On retrouve à ce niveau le rôle de la lèvre sur la virole : elle sert à écarter le plus possible la sortie du jeu de la tête d'aube, afin d'éviter justement ce genre de problème d'interaction.

Le point principal semble être la modification du tourbillon A entraînée par la réduction du débit de jeu. Ce tourbillon est lié à la fois au fluide sortant du jeu et à la forme du carter. Afin de valider cette observation, nous avons effectué une simulation en supprimant le jeu, ce qui revient en particulier à supprimer le jet sortant du jeu.

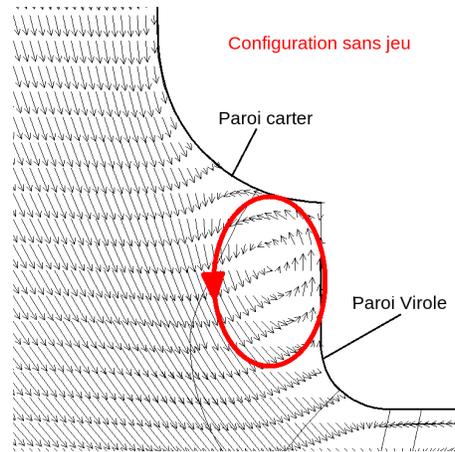


FIG. 5.37 – Champ de vitesse amont sans jeu

Comme on le voit sur la figure (Fig. 5.37), malgré la disparition du jet sortant du jeu, le tourbillon existe encore. Il correspond dans ce cas au décollement, au niveau du congé que présente la paroi carter, de l'écoulement longeant verticalement le carter. En conséquence, quelle que soit la réduction de débit opérée dans le jeu, il ne sera pas possible de supprimer ce tourbillon tant que le carter présentera ce décrochement axial.

L'analyse des performances de la configuration sans jeu montre encore une fois une dégradation par rapport au cas de référence.

Configuration	Ecart de pression aval-amont	Couple	Rendement
Référence	198 Pa	0.499 N.m	0.641
Sans jeu	190 Pa	0.521 N.m	0.605
Variation	-4.0%	+4.4%	-5.6%
Rappel Config. 2	192 Pa	0.501 N.m	0.626
Rappel Config. 3	185 Pa	0.491 N.m	0.615

TAB. 5.17 – Performances du ventilateur sans jeu

Comme on peut le voir dans le tableau [5.17], toutes les performances de la configuration sans jeu sont dégradées par rapport à celles la configuration de référence. La configuration sans jeu est même pire que les configurations 2 et 3 de traitement de carter.

On démontre ainsi que l'amélioration de l'écoulement de jeu se traduit, **sur ce ventilateur**, par une dégradation des performances globales. Le traitement de carter reste toutefois **valable** : le problème vient de la modification des conditions d'alimentation de la tête d'aube. Ce problème est au final assez logique puisque le ventilateur de référence étudié a été *optimisé* par Valéo pour des conditions amont résultant d'une perturbation du flux incident par un écoulement de jeu fort. En améliorant les caractéristiques de cet écoulement de jeu, on change les conditions en amont des aubes, et donc on s'écarte du point de dessin de la roue de référence. Il convient à ce niveau de réadapter la tête d'aube aux nouvelles conditions de fonctionnement.

### 5.4.6 Synthèse sur l'application du traitement de carter au ventilateur

Comme on vient de le voir, l'application du nouveau traitement de carter sur un ventilateur de GMV n'apporte pas l'amélioration des performances escomptée, même si l'écoulement de jeu est sensiblement amélioré. Cependant, cette dégradation des performances est *logique* compte tenu du ventilateur qui a été utilisé. Ce dernier avait été optimisé pour un écoulement incident dégradé par un écoulement de jeu fort. En améliorant l'écoulement de jeu, nous avons un peu modifié l'écoulement incident sur le ventilateur (déplacement de la recirculation parasite amont), mais de ce fait, nous nous sommes éloignés des conditions de dessin de la roue. Cette dégradation des performances n'est donc pas inquiétante. Il faudrait avant toute chose réadapter la tête d'aube aux nouvelles conditions amont.

Au final, on retiendra que nous avons **réussi à proposer un traitement de carter valide**, puisqu'il nous a permis de réduire de près de 42% le débit dans le jeu, tout en limitant la giration du fluide en sortie de jeu, ce qui était **le but de notre étude**. Il reste cependant à finaliser l'étude en prenant en compte les **couplages** entre le ventilateur et le traitement de carter. En effet, on a démontré que l'amélioration de l'écoulement de jeu modifiait sensiblement l'écoulement sur l'aube. De la même manière, la modification de l'écoulement sur l'aube se traduit par un changement des conditions d'alimentation du jeu. Les variations de l'écoulement autour de l'aube et du traitement de carter sont cependant encore assez mal connues. Elles méritent d'être analysées en détail. Cette étude des couplages sera l'occasion d'optimiser simultanément le traitement de carter et le ventilateur. Il serait aussi intéressant de modifier la forme du carter afin de limiter les phénomènes tourbillonnaires en amont de l'aube. Enfin, il est particulièrement souhaitable de valider l'étude (numérique) qui a été faite dans le cadre de cette thèse par des mesures expérimentales.

## Chapitre 6

# Conclusions et perspectives

Le but de cette étude était de proposer, d'analyser et d'optimiser un nouveau type de traitement de carter au moyen d'outils numériques, et de l'appliquer à une turbomachine basse vitesse.

Dans le chapitre 2, nous nous sommes concentrés sur le choix et le développement de méthodes numériques précises pour la simulation des écoulements. Ce point est important en raison de la précision requise pour étudier de manière fiable et détaillée le nouveau traitement de carter. Comme les simulations envisagées pour cette étude concernent des écoulements stationnaires, notre attention s'est focalisée sur la discrétisation spatiale. Nous avons retenu une technique de type "volumes finis", associée à un traitement des flux précis au second ou troisième ordre en espace.

Par ailleurs, nous avons présenté dans ce chapitre de nouveaux développements permettant de réduire l'erreur numérique dans le cas de maillages non uniformes. On a pour cela séparé le traitement de la partie convective des flux de celui associé à la partie diffusive.

Pour la partie convective :

- Pour les schémas décentrés amont, nous avons réalisé la généralisation des formules d'interpolation MUSCL du second ordre (schéma centré sur l'interface, décentré amont et schéma de Fromm) ainsi que pour le schéma partiellement décentré du troisième ordre. Les validations effectuées sur des maillages présentant des discontinuités fortes de tailles de mailles ont montré une nette amélioration de la précision avec l'emploi des formules généralisées. On a aussi constaté une certaine équivalence entre schémas du second et du troisième ordre.
- De nouveaux limiteurs, utilisés pour stabiliser les calculs avec des schémas décentrés d'ordre élevé, ont été présentés. Nous avons testé et comparé ces nouveaux limiteurs sur des maillages non uniformes pour vérifier leur comportement en présence de discontinuités de tailles de mailles. Nous avons ainsi pu établir une certaine hiérarchie entre ces nouveaux limiteurs quant à la précision spatiale de la simulation.
- Nous avons aussi travaillé sur la généralisation des schémas spatiaux centrés aux maillages non uniformes. Les interpolations du second et quatrième ordre utilisées par ces schémas pour déterminer les variables aux interfaces ont été modifiées. Les tests, effectués sur un cas de propagation d'une onde sinusoïdale de pression, montrent que la généralisation permet de limiter fortement l'erreur numérique associée à la non uniformité du maillage. On a aussi pu mettre en évidence les effets de l'ordre d'interpolation sur la précision du calcul. Pour les schémas centrés, la dissipation numérique artificielle qu'il est nécessaire de rajouter afin de

stabiliser le calcul n'a pas été directement traitée. Nous avons proposé les pistes possibles de généralisation aux maillages non uniformes ; les tests pourront faire l'objet d'une étude ultérieure.

Pour le traitement de la partie diffusive des flux, nous avons fait une présentation rapide des techniques utilisées, ainsi qu'une analyse succincte des possibilités de généralisation aux maillages non uniformes. Là aussi, la validation des pistes proposées pourra faire l'objet de travaux.

Nous avons commencé l'étude du nouveau traitement de carter dans le chapitre 3. Il a d'abord été nécessaire d'étudier précisément la structure de l'écoulement de jeu sur un ventilateur automobile afin de dégager les principales caractéristiques attendues pour le nouveau traitement de carter. Il est apparu que le rainurage devait réaliser simultanément une réduction du débit de jeu et de la giration du fluide sortant du jeu.

La géométrie du nouveau traitement de carter a ensuite été décrite et paramétrée afin de pouvoir caractériser finement son fonctionnement. Nous avons choisi un rainurage hélicoïdal du carter, destiné à limiter le plus possible le débit dans le jeu tout en guidant le fluide dans une direction opposée au mouvement azimutal général imposé par la virole. Cinq paramètres géométriques sont utilisés : l'angle, la hauteur, la largeur, la longueur et le nombre des rainures.

Afin de faciliter l'étude et la compréhension de la structure de l'écoulement et des mécanismes aérodynamiques au niveau des rainures, seul le traitement de carter est modélisé et étudié.

- Le principe même du traitement de carter est d'abord validé en comparant le champ aérodynamique qu'il génère aux cas de références que sont le jeu sans traitement de carter et le jeu avec un simple obstacle circonferentiel. On démontre à ce niveau que le rainurage permet d'effectuer un bon compromis entre la limitation du débit et la limitation de la giration du fluide dans le jeu.
- On analyse ensuite en détail la structure de l'écoulement. Cette analyse fait ressortir plusieurs structures tourbillonnaires distinctes qui interagissent plus ou moins fortement compte tenu de l'exiguïté de la géométrie :
  1. Un décollement en entrée de rainure. Ce décollement réduit la section débitante des rainures. Il est donc intéressant du point de vue de la limitation de débit.
  2. Un tourbillon dans chaque rainure. Ce tourbillon permet une survitesse azimutale négative utile pour l'objectif de limitation de la giration.
  3. Un ensemble de tourbillons en aval des rainures. Ces structures sont responsables de pertes élevées, utiles dans l'optique d'une réduction de débit. Elles induisent aussi des surdéviations locales de l'écoulement qui peuvent être bénéfiques pour la limitation de la giration.

Les différentes structures tourbillonnaires viennent donc améliorer le fonctionnement des rainures. Elles sont néanmoins toutes sensibles à certains paramètres comme l'angle de l'hélice. Ceci complique un peu l'analyse de la sensibilité du traitement de carter aux paramètres de dessin.

- On analyse quantitativement l'influence de chaque paramètre sur les trois objectifs fixés pour cette étude. Ces objectifs ont été définis comme le différentiel de pression statique entre l'amont et l'aval du jeu, le différentiel de pression totale et celui de vitesse transversale. L'étude des

paramètres montre des évolutions majoritairement monotones pour les objectifs. On note en particulier les faibles effets de la longueur, dans la plage étudiée, sur les trois objectifs.

La largeur et le nombre des rainures présentent, sur la plage étudiée, des effets assez similaires. Tout d'abord, ces deux paramètres agissent de manière opposée sur le différentiel de pression statique et sur ceux de pression totale et vitesse azimutale : l'augmentation du différentiel de pression statique se fait toujours au détriment des deux autres objectifs. Dans l'ensemble, les meilleures limitations de la giration sont obtenues pour des rainures larges ou nombreuses, alors que l'objectif de pression statique est amélioré par des rainures fines et peu nombreuses. Le comportement des trois objectifs par rapport à la hauteur des rainures n'est en revanche pas opposé. On remarque ainsi que l'augmentation de la hauteur des rainures permet simultanément d'améliorer les trois objectifs.

Le point le plus remarquable de l'étude quantitative des paramètres est sans doute le comportement des objectifs par rapport à l'angle des rainures. Le différentiel de pression statique évolue de manière monotone sur la plage étudiée, avec une amélioration pour les rainures fortement inclinées. Il est en revanche très intéressant de constater un optimum pour les différentiels de pression totale et de vitesse transversale, situé vers  $110^\circ$ .

Au final, cette étude doit porter sur l'application directe du nouveau traitement de carter à un ventilateur automobile. Nous avons donc choisi d'optimiser le rainurage avant de l'appliquer. Cependant, il n'a pas été possible de mener cette optimisation en poursuivant directement l'approche adoptée pour la première partie de l'étude. Le nombre de simulations nécessaires à l'optimisation est trop important.

Les différentes techniques afférentes à la paramétrisation, l'optimisation et le post-traitement de l'optimisation ont été étudiées au chapitre 4. Dans un premier temps, nous avons établi le cadre mathématique des optimisations multi-paramétriques et multi-objectifs. Dans ce cadre, une des notions les plus importantes est celle de la dominance au sens de Pareto, qui permet de classer des individus selon plusieurs critères considérés simultanément. Avec la notion de dominance, on peut aussi définir la notion de front de Pareto, qui permet de décrire une population d'individus optimaux.

Le panorama des différentes grandes techniques d'optimisation a ensuite mis en évidence les avantages et défauts de chacune relativement au type d'optimisation envisagé pour le traitement de carter. On a ainsi montré que les méthodes inverses et les méthodes directes n'étaient pas adaptées à l'optimisation du traitement de carter, les premières en raison des hypothèses faites sur l'écoulement (écoulement non visqueux), les secondes à cause de leur incapacité à traiter objectivement un cas multi-objectifs. Il ressort au final de l'étude que les techniques d'optimisation les plus performantes sur une optimisation multi-objectifs et multi-paramétriques sont les méthodes métaheuristiques. Parmi ces méthodes, les algorithmes génétiques sont les mieux adaptés à notre problème. Ils ont donc été retenus pour effectuer l'optimisation du traitement de carter. Les principes de fonctionnement de ces algorithmes sont décrits de manière détaillée. Cette description met en évidence une limite des algorithmes génétiques au niveau du nombre de configurations à évaluer.

Afin de contourner ce problème inhérent aux algorithmes génétiques, une des solutions est d'utiliser une approche paramétrique. Cette approche permet de réduire considérablement le nombre de simulations directes nécessaires pour la phase d'optimisation. Elle est basée sur le calcul des dérivées du champ aérodynamique autour d'un point de référence. Les configurations sont ensuite

extrapolées à partir de ce point au moyen d'une technique de reconstruction adaptée. Dans cette partie du chapitre 4 nous avons donc :

- présenté de manière détaillée l'approche paramétrique. Le calcul des dérivées d'ordre successif fait intervenir une relation de récurrence intéressante.
- étudié la problématique de la reconstruction. On a en particulier montré que l'extrapolation des seules variables conservatives aboutissait à générer une erreur numérique sur les variables non conservatives qui sont calculées ensuite. Une correction possible à ce problème a été proposée, mais elle ne semble pas apporter d'amélioration notable dans le cas du traitement de carter. Elle n'a donc pas été retenue pour la suite de l'étude.

L'algorithme génétique choisi pour l'optimisation du traitement de carter est le NSGA-II, développé au sein du Kampur Genetic Algorithm Laboratory. Nous avons présenté cet algorithme. Il a été couplé avec le code Turb'Opty pour faciliter l'évaluation des configurations.

Enfin, le chapitre 4 se termine par la présentation d'une technique de visualisation et de post-traitement adaptée aux optimisations effectuées avec un algorithme génétique. Ce type d'optimisation se caractérise souvent par l'obtention d'un ensemble d'individus Pareto-optimaux qu'il est ensuite très difficile de représenter clairement. Cette difficulté vient du nombre d'objectifs et de paramètres à visualiser simultanément. La technique retenue, appelée Self-Organizing Map (SOM), permet de décrire graphiquement la population optimale de manière claire et structurée. Elle donne aussi accès à des informations supplémentaires, telles que la robustesse d'une configuration.

Le chapitre 5 a été dédié à l'optimisation du traitement de carter et à son application sur un ventilateur automobile. Nous avons dans un premier temps comparé les variations des objectifs, relativement aux paramètres issus de l'approche directe (code Turb'Flow), aux variations obtenues avec la paramétrisation Turb'Opty. Cette comparaison met en évidence, dans l'ensemble, un bon accord entre les deux techniques, ce qui valide donc le résultat de la paramétrisation.

Le traitement de carter a été optimisé en utilisant l'algorithme NSGA-II et le résultat de la paramétrisation Turb'Opty. Cette optimisation nous a permis de choisir une configuration optimale, proche de l'optimum sur l'écart de pression totale. En parallèle, nous avons analysé la population optimale avec les SOM. Cela a permis de vérifier, entre autre, l'antagonisme fort entre l'objectif de pression statique et ceux de pression totale et de giration.

La géométrie optimisée du traitement de carter a ensuite été appliquée au ventilateur automobile qui avait été étudié au chapitre 3. Nous avons ainsi montré que cette configuration particulière du rainurage n'était pas satisfaisante du point de vue du contrôle de l'écoulement de jeu. On assiste ainsi à une augmentation de la giration par rapport à la configuration de référence, sans diminution du débit. En raison de la présence dans le jeu de nouvelles structures tourbillonnaires défavorables, l'écoulement ne circule pas dans les rainures. Celles-ci ne remplissent pas donc leur rôle. Nous avons montré que les nouveaux tourbillons néfastes résultent d'un mauvais positionnement et d'une trop faible longueur des rainures.

Afin de corriger ce défaut, nous avons testé deux nouvelles configurations de rainurage.

- un traitement de carter sur lequel on a allongé les rainures. L'allongement permet de supprimer les tourbillons gênants. Il s'avère que dans ce cas on réduit très nettement le débit dans le jeu (-42%), tout en améliorant la limitation de giration (-32.5%).

- une configuration avec des rainures longues et un carter modifié de manière à limiter le coude du jeu et améliorer encore l'alimentation des rainures. Cette configuration est la meilleure, tant du point de vue de la réduction de débit (-42%) que de la limitation de la giration (-79%).

Les performances globales du ventilateur en présence de ces deux configurations de traitement de carter ne sont pas améliorées, bien au contraire. Nous avons démontré que ce phénomène provenait de la désadaptation de la tête d'aube. Cette désadaptation est liée à la modification de l'écoulement de jeu. Sur le ventilateur de référence étudié, l'aube avait été optimisée pour tenir compte d'un écoulement de jeu fort et animé d'une grande giration, ce qui n'est plus le cas avec le traitement de carter. L'étude paramétrique du couple [aubes - traitement de carter] reste à entreprendre. Il est assez logique que la modification de l'écoulement de jeu par le rainurage se traduise par une modification de l'écoulement sur les aubes, et vice versa. Afin de finaliser l'étude complète du traitement de carter, il est donc nécessaire de prendre en compte les couplages entre le ventilateur et le rainurage.

Au terme de cette étude, on a donc démontré de manière claire que le traitement de carter proposé est pertinent du point de vue du contrôle de l'écoulement de jeu. Il permet une amélioration sensible de l'écoulement de jeu en réduisant le débit et en limitant la giration du fluide.

Dans la suite de l'étude, il pourrait être très intéressant de réadapter, dans un premier temps, l'aube aux nouvelles conditions de fonctionnement générées par la mise en place du traitement de carter (et donc par l'amélioration de l'écoulement de jeu). Dans un second temps, il conviendrait *d'optimiser simultanément* le ventilateur et le traitement de carter afin de finaliser l'étude du traitement de carter. Nous n'avons pas eu l'occasion d'étudier en détail les couplages existant entre le traitement de carter et le ventilateur. Nous avons montré que la modification de l'écoulement de jeu engendre celle de l'écoulement sur l'aube, et vice versa. Cette optimisation simultanée de l'aube et du traitement de carter nécessitera donc au préalable *l'analyse précise de ces couplages* au moyen d'une approche paramétrique.

Pour la poursuite de l'étude, il est important de procéder à la *vérification expérimentale* du fonctionnement du traitement de carter, notamment lors du couplage avec un ventilateur automobile. Cette vérification expérimentale pourra être effectuée après avoir optimisé le ventilateur et le traitement de carter. Cela permettrait en particulier de vérifier les mécanismes de couplage entre le rainurage et le ventilateur du point de vue des interactions instationnaires.



# Annexe A

## Modélisation de l'écoulement

### A.1 Equations de Navier-Stokes

Le mouvement d'un fluide compressible visqueux est régi par les équations de Navier-Stokes. Elles traduisent les grands principes physiques de mécanique et de thermodynamique, à savoir la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale.

On définit en premier lieu l'espace et le temps par quatre variables, notées  $x_1, x_2, x_3$  et  $t$ , représentant respectivement les trois coordonnées cartésiennes spatiales et la date. On associe aux coordonnées spatiales la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  qui est invariable en temps et en espace.

Afin de décrire le champ aérodynamique, on définit aussi les *variables conservatives* qui sont la masse volumique  $\rho$ , la quantité de mouvement  $\rho\vec{V}$  et l'énergie totale  $\rho E$ . On notera par suite  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  les composantes de la vitesse.

Dans le cadre d'une description eulérienne, les équations de Navier-Stokes s'écrivent sous forme différentielle comme suit :

**Conservation de la masse :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\rho \vec{V}] = 0 \quad (\text{A.1})$$

**Conservation de la quantité de mouvement :**

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p \vec{I} - \vec{\tau}_l] = \vec{0} \quad (\text{A.2})$$

$\otimes$  est le produit tensoriel.

**Conservation de l'énergie :**

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho E + p)\vec{V} + \vec{\Phi} - \vec{\tau}_l \cdot \vec{V}] = 0 \quad (\text{A.3})$$

- $p$  est la pression statique. Pour un gaz parfait, on a de plus l'équation d'état bien connue :

$$p = \rho r T \quad (\text{A.4})$$

où  $r$  est la constante spécifique des gaz parfaits, et  $T$  la température statique. Par ailleurs, on peut définir l'énergie interne  $e$  du fluide parfait au moyen de la température statique :

$$e = \left( E - \frac{1}{2}V^2 \right) = C_v T \quad (\text{A.5})$$

avec  $C_v$  la capacité thermique volumique spécifique du fluide. On note par ailleurs  $C_p$  la capacité thermique massique spécifique du fluide. En remarquant que  $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$  et  $r = C_p - C_v$ , on peut alors écrire :

$$p = (\gamma - 1) \left[ \rho E - \frac{1}{2}\rho V^2 \right] \quad (\text{A.6})$$

- $\tau$  est le tenseur des contraintes visqueuses. Pour un fluide visqueux Newtonien isotrope, il s'écrit :

$$\vec{\tau}_l = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \vec{I} + \mu \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^T \right) \quad (\text{A.7})$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé. Selon l'hypothèse de Stokes :

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (\text{A.8})$$

Par ailleurs,  $\mu$ , aussi connu sous le nom de viscosité dynamique du fluide, dépend formellement de la température statique. La relation la plus classique est la loi de Sutherland :

$$\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{ref} + S}{T + S} \quad (\text{A.9})$$

Les constantes de référence sont pour l'air  $S = 110K$ ,  $T_{ref} = 293K$ ,  $\mu_{ref} = 1.81 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^{-1}$ . La viscosité dynamique est néanmoins souvent considérée constante. Seuls les cas présentant des gradients thermiques importants, du fait d'une paroi chauffante (ou refroidie) ou bien de compressions importantes (onde de choc ...) requièrent le traitement d'une viscosité variable. On appliquera donc en particulier cette loi pour les cas supersoniques.

- $\vec{\Phi}$  est le flux de chaleur, exprimé usuellement en fonction de la température statique  $T$  et de la conductibilité thermique  $\kappa$  du fluide via la loi de Fourier :

$$\vec{\Phi} = -\kappa \vec{\nabla} T \quad (\text{A.10})$$

Une ré-écriture classique de ce terme est obtenue en introduisant le nombre de Prandtl  $P_r = \frac{\mu C_p}{\kappa}$ . En utilisant la relation (A.5), l'équation (A.3) devient alors :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ (\rho E + p) \rho \vec{V} + \frac{\mu \gamma}{P_r} \vec{\nabla} e - \vec{\tau}_l \cdot \vec{V} \right] = \vec{0} \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Equations moyennées

### A.2.1 Equations pour les variables conservatives

Les équations précédentes sont valables pour la description d'un écoulement avec une précision suffisante. En pratique, le caractère turbulent de l'écoulement est responsable d'un comportement fluctuant, en temps et en espace, des variables. La turbulence introduit en particulier un caractère

chaotique. En conséquence, les différentes structures présentes au sein de l'écoulement sont très dispersées, tant du point de vue de l'échelle spatiale que temporelle. On distingue généralement les structures macroscopiques, ayant un comportement globalement déterministe, des structures microscopiques qui sont du domaine des fluctuations turbulentes.

Afin de capter toutes les structures possibles par un calcul numérique, il est nécessaire d'avoir des maillages extrêmement raffinés, la taille de maille minimale étant inférieure à l'échelle de Kolmogorov.

L'approche, connue sous le nom de DNS (Direct Numerical Simulation) n'est aujourd'hui possible que sur des écoulements simples en raison des besoins gigantesques en terme de mémoire et puissance de calcul associés à ce type de résolution.

La deuxième approche est la simulation des grandes échelles (Large Eddy Simulation). Les grandes structures tourbillonnaires sont calculées directement, les petites structures étant modélisées analytiquement. Cette méthode est de plus en plus couramment employée mais demande toutefois encore des ressources informatiques importantes qui limitent un peu l'utilisation.

La dernière méthode est la modélisation complète des structures turbulentes. Cela implique la décomposition du champ aérodynamique en une composante moyenne et une composante fluctuante. Pour une grandeur  $A$ , on définit ainsi

$$A(\vec{x}, t) = \bar{A}(\vec{x}, t) + A'(\vec{x}, t) \quad (\text{A.12})$$

avec la valeur moyenne  $\bar{A}$  définie au sens de Reynolds :

$$\bar{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A(\vec{x}, t + \theta) d\theta \quad (\text{A.13})$$

où  $\tau$  est une échelle de temps caractéristique des fluctuations turbulentes. Pour un écoulement compressible, il est possible de modifier légèrement cette définition en introduisant la moyenne de Favre qui fait intervenir la moyenne de masse volumique au sens de Reynolds.

On note dans ce cas :

$$A(\vec{x}, t) = \tilde{A}(\vec{x}, t) + A''(\vec{x}, t) \quad (\text{A.14})$$

$$\tilde{A}(\vec{x}, t) = \frac{\overline{\rho A}(\vec{x}, t)}{\overline{\rho}(\vec{x}, t)} \quad (\text{A.15})$$

Une fois la décomposition définie pour chaque variable conservative, on introduit les termes moyens et fluctuants dans les équations de Navier-Stokes et les lois supplémentaires (A.1)-(A.11), lesquelles sont ensuite à leur tour moyennées au sens de Reynolds en remarquant que l'opérateur de moyenne commute avec les opérateurs différentiels. La méthode présentée tire son nom de cette approche : Reynolds Average Navier-Stokes (RANS).

**Conservation de la masse :**

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\bar{\rho} \vec{V}] = 0 \quad (\text{A.16})$$

**Conservation de la quantité de mouvement :**

$$\frac{\partial \bar{\rho} \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\bar{\rho} \vec{V} \otimes \vec{V} + \bar{p} \vec{I} - \{\overline{\vec{\tau}_l} - \overline{\rho \vec{V}'' \otimes \vec{V}''}\}] = \vec{0} \quad (\text{A.17})$$

**Conservation de l'énergie :**

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \vec{V} - \left\{ \frac{\bar{\gamma} \bar{\mu}}{P_r} \vec{\nabla} \tilde{e} + \frac{\vec{\tau}_l}{P_r} \cdot \vec{V} - \overline{(\rho E + p) \vec{V}''} \right\} \right] = 0 \quad (\text{A.18})$$

De plus, on a les relations suivantes :

$$\bar{p} = (\bar{\gamma} - 1) \left[ \bar{\rho} \tilde{E} - \frac{1}{2} \left( \bar{\rho} \vec{V}^2 + \bar{\rho} \widetilde{V''^2} \right) \right] \quad (\text{A.19})$$

$$\vec{\tau}_l = \bar{\lambda} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \vec{I} + \bar{\mu} \left( \widetilde{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}} + \widetilde{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^T} \right) \quad (\text{A.20})$$

Ces équations sont déterminées en supposant que  $\mu$  et par extension  $\lambda$  sont proportionnels à la masse volumique et à la viscosité cinématique  $\nu$ , cette dernière étant supposée non fluctuante. On a ainsi :

$$\bar{\mu} = \overline{\rho \nu} = \bar{\rho} \nu$$

Par ailleurs, on suppose aussi que les coefficients  $\gamma$ ,  $C_p$ ,  $C_v$  et  $P_r$  sont aussi non fluctuants, leur moyenne au sens de Reynolds étant donc la valeur classique.

On introduit à ce niveau l'énergie cinétique turbulente  $\rho k$  :

$$\rho k = \frac{1}{2} \rho \vec{V}''^2 \quad (\text{A.21})$$

L'utilisation de l'énergie cinétique turbulente permet de simplifier l'écriture de la loi d'état (A.19) :

$$\bar{p} = (\bar{\gamma} - 1) \left[ \bar{\rho} \tilde{E} - \frac{1}{2} \left( \bar{\rho} \vec{V}^2 + \bar{\rho} \tilde{k} \right) \right] \quad (\text{A.22})$$

La température statique est calculée à partir de l'expression de l'énergie totale moyenne :

$$\tilde{E} = C_v \tilde{T} + \frac{1}{2} \vec{V}^2 + \tilde{k} \quad (\text{A.23})$$

On remarque que contrairement à la définition thermodynamique classique, les pressions et températures statiques moyennes font intervenir l'énergie cinétique turbulente.

Le deuxième terme critique est le tenseur  $-\rho \vec{V}'' \otimes \vec{V}''$ , aussi appelé tenseur de Reynolds  $\vec{\tau}_t$ . Il peut être déterminé par l'hypothèse de Boussinesq [11] qui stipule que  $\vec{\tau}_t$  est linéairement relié au tenseur moyen des contraintes  $\vec{\tau}_l$  :

$$\vec{\tau}_t = \lambda_t \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \vec{I} + \mu_t \left( \widetilde{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}} + \widetilde{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^T} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} \tilde{k} \vec{I} \quad (\text{A.24})$$

Le dernier terme de l'équation est utilisé pour garantir que la trace du tenseur de Reynolds est proportionnelle à l'énergie cinétique turbulente. En outre, les coefficients  $\lambda_t$  et  $\mu_t$  sont supposés vérifier l'hypothèse de Stokes :

$$3\lambda_t + 2\mu_t = 0$$

Cette relation suppose en particulier [13] que l'on néglige tout effet de mémoire au niveau de la turbulence. Cette approximation est très critiquable, notamment dans des zones de décollement de

l'écoulement, mais elle est souvent utilisée en raison de sa très grande simplicité. Dans la suite de l'étude, c'est cette hypothèse que l'on fera.

Le troisième terme à traiter est le terme non-linéaire  $\overline{(\rho E + p)\vec{V}''}$  apparaissant dans l'équation de l'énergie (A.18). Il est écrit comme suit pour chaque direction :

$$\overline{(\rho E + p)u_i''} = \overline{(\rho H)u_i''} = \bar{\rho}\gamma C_v \overline{T u_i''} + \rho \overline{\sum_{j=1}^3 \tilde{u}_j u_j'' u_i''} + \frac{\rho}{2} \overline{\sum_{j=1}^3 u_j'' u_j'' u_i''} \quad (\text{A.25})$$

ce qui donne après distribution des moyennes :

$$\overline{(\rho E + p)u_i''} = \bar{\rho}\gamma C_v \widetilde{T u_i''} + \rho \overline{\sum_{j=1}^3 \tilde{u}_j u_j'' u_i''} = \bar{\rho}\gamma C_v \widetilde{T u_i''} + \sum_{j=1}^3 \overline{\rho u_j'' u_i'' \tilde{u}_j} + \overline{\rho k u_i''} \quad (\text{A.26})$$

La reformulation a néanmoins fait apparaître un terme de corrélation entre vitesse et température. Celui-ci est classiquement exprimé en fonction du gradient moyen de température pondéré par un nombre de Prandtl turbulent :

$$\widetilde{\rho T u_i''} = -\frac{\mu_t}{P_{rt}} \widetilde{\nabla T} \quad (\text{A.27})$$

De la même manière, le terme de corrélation triple  $\overline{\rho k u_i''}$  est généralement exprimé :

$$\overline{\rho k u_i''} = -\frac{\mu_t}{\sigma_k} \widetilde{\nabla k} \quad (\text{A.28})$$

où  $\sigma_k$  est une constante du modèle choisi.

Le dernier terme problématique est le travail  $\overline{\vec{\tau}_l \cdot \vec{V}''}$ . Son développement fait apparaître un terme de corrélation  $\overline{\vec{\tau}_l \cdot \vec{V}''}$  qui traduit le travail des forces visqueuses moyennes généré par le déplacement dû aux fluctuations de vitesse. Cette dissipation étant très faible, le terme est négligé dans un modèle de turbulence au premier ordre.

Un autre terme sensible est  $\overline{\vec{\tau}_l'' \cdot \vec{V}}$  ; il peut être modélisé par  $\bar{\mu} \vec{\nabla} \tilde{k}$ . Au final, on obtient donc :

$$\overline{\vec{\tau}_l \cdot \vec{V}} = \overline{\vec{\tau}_l} \vec{V} + \bar{\mu} \vec{\nabla} \tilde{k} \quad (\text{A.29})$$

En pratique, on additionne le tenseur de Reynolds  $\overline{\vec{\tau}_t}$  et le tenseur des contraintes visqueuses  $\overline{\vec{\tau}_l}$  pour ne former qu'un seul tenseur, noté  $\overline{\vec{\tau}_{l+t}}$

En prenant en compte toutes les simplifications possibles qui viennent d'être présentées, les équations de Navier-Stokes moyennées pour un écoulement turbulent s'écrivent :

**Equations RANS :**

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\bar{\rho} \vec{A}] = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\bar{\rho} \vec{V} \otimes \vec{V} + \bar{p} \vec{I} - \overline{\vec{\tau}_{l+t}}] = \vec{0} \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \vec{V} - \left\{ \gamma \left( \frac{\bar{\mu}}{P_r} + \frac{\mu_t}{P_{rt}} \right) \vec{\nabla} \tilde{e} + \overline{\vec{\tau}_{l+t}} \cdot \vec{V} - \left( \bar{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \widetilde{\nabla k} \right\} \right] = 0 \quad (\text{A.32})$$

## A.2.2 Modélisation de la turbulence

Il existe de très nombreuses modélisations possibles au sein de la littérature ([195, 171] parmi beaucoup d'autres références possibles). La complexité du modèle est entre autre traduite par le nombre d'équations mises en jeu. De manière classique, l'une des variables traitée par ces modèles est l'énergie cinétique turbulente  $k$  : Dans le cas où au moins une autre équation existe, le choix de la nouvelle variable turbulente est plus libre. Dans le cas des modèles à deux équations, noté généralement  $k - \Phi$ ,  $\Phi$  étant la deuxième variable, les plus courants à l'heure actuelle sont les modèles  $k - \epsilon$ ,  $k - \omega$  et  $k - l$ .

Le modèle de turbulence qui a été retenu dans cette étude est le modèle  $k - \omega$  de Kok [107]. La grandeur  $\Phi = -\omega$  est la dissipation spécifique. On a alors :

$$\mu_t = \frac{\bar{\rho} \tilde{k}}{\tilde{\omega}} \quad (\text{A.33})$$

Ce modèle est réputé meilleur que le  $k - \omega$  standard de Wilcox [195], au sens où il est moins dépendant des valeurs de  $\omega$  dans l'écoulement hors couches-limites.

Pour ce modèle, les équations de transport des variables turbulentes sont les suivantes :

### Equation de transport sur $k$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{k}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ \bar{\rho} \tilde{k} \vec{V} - \left( \bar{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} \tilde{k} \right] = \overline{\vec{\tau}_t} \div \vec{\nabla} \vec{V} - C_k \bar{\rho} \tilde{\omega} \tilde{k} \quad (\text{A.34})$$

où  $C_k=0.09$  et  $\sigma_k = \frac{3}{2}$ . La notation  $\div$  est utilisée pour le produit tensoriel mixte. Pour deux tenseurs d'ordre 2, ce produit vaut  $\vec{a} \div \vec{b} = a_{ij} b_{ij}$ .

Dans cette équation, on fait apparaître trois termes jouant différemment sur l'énergie  $k$  :

- Production d'énergie cinétique turbulente  $P_k$  :

$$P_k = \overline{\vec{\tau}_t} \div \vec{\nabla} \vec{V}$$

- Dissipation de l'énergie cinétique turbulente  $D_k$  :

$$D_k = C_k \bar{\rho} \tilde{\omega} \tilde{k}$$

- Diffusion de l'énergie cinétique turbulente :

$$\left( \bar{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} \tilde{k}$$

Il est possible de modifier légèrement cette équation pour éviter les phénomènes de surproduction de  $k$ . Ces phénomènes arrivent en particulier quand  $\omega$  tend vers 0, et que  $\mu_t$  reste fini. Le terme de production peut devenir très grand pour des petites perturbations du tenseur de contraintes. La solution proposée par Menter [130] est de limiter la production d'énergie en remplaçant le terme  $P_k$  dans (A.34) par le terme  $\hat{P}_k$  :

$$\hat{P}_k = \min(P_k, 20.D_k) \quad (\text{A.35})$$

**Equation de transport sur  $\omega$**

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ \bar{\rho} \tilde{\omega} \vec{V} - \left( \bar{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \vec{\nabla} \tilde{\omega} \right] = C_{\omega_1} \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{k}} \left( \overline{\frac{\tau}{t}} \div \vec{\nabla} \vec{V} \right) - C_{\omega_2} \bar{\rho} \tilde{\omega}^2 - C_d \quad (\text{A.36})$$

où :

$$C_d = \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{\tilde{\omega}} \max \left( \vec{\nabla} \tilde{k} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\omega}, 0 \right)$$

et :

$$\begin{aligned} \sigma_\omega &= 2.0 \\ \sigma_d &= 0.5 \\ C_{\omega_1} &= \frac{C_{\omega_2} - \frac{K^2 \sqrt{C_k}}{\sigma_\omega}}{C_k} \approx \frac{5}{9} \\ C_{\omega_2} &= \frac{3}{40} \\ K &= 0.41 \text{ Constante de Von Karman} \end{aligned}$$

Le terme  $C_d$  est introduit dans le modèle  $k - \omega$  pour limiter la dépendance par rapport aux valeurs de  $\omega$  hors couches limites. Ce terme vient d'une analogie avec les modèles  $k - \epsilon$  [130, 107].

### A.3 Equations adimensionnées

Afin de garantir un traitement numérique précis, il est nécessaire de ramener les variables des équations RANS (A.30-A.32 et A.34-A.36) à un ordre de grandeur assez proche de 1. On définit pour cela cinq échelles de référence :

- $L_0$  : longueur de référence
- $\rho_0$  : masse volumique de référence
- $V_0$  : vitesse de référence
- $r_0$  : constant des gaz parfait de référence
- $\mu_0$  : viscosité dynamique de référence

On peut ainsi définir l'adimensionnement suivant :

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{t}{\frac{L_0}{V_0}} & x_i^* &= \frac{\tilde{x}_i}{L_0} & \rho^* &= \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} & u_i^* &= \frac{\tilde{u}_i}{V_0} \\ E^* &= \frac{\tilde{E}}{V_0^2} & e^* &= \frac{\tilde{e}}{V_0^2} & p^* &= \frac{\bar{p}}{\rho_0 V_0^2} & T^* &= \frac{\tilde{T}}{V_0^2} \\ \mu^* &= \frac{\bar{\mu}}{\mu_0} & k^* &= \frac{\tilde{k}}{V_0^2} & \omega^* &= \frac{\tilde{\omega}}{\frac{V_0^3}{L_0}} & \tau^* &= \frac{\overline{\frac{\tau}{t}}}{\frac{\mu_0 V_0}{L_0}} \end{aligned}$$

On définit par ailleurs le nombre sans dimension de référence suivant :

$$Re = \frac{\rho_0 L_0 V_0}{\mu_0}$$

On abandonne l'astérisque pour plus de facilité d'écriture. Les équation RANS qui servent à la simulation numérique d'un écoulement turbulent compressible s'écrivent donc en fonctions des grandeurs adimensionnées :

**Conservation de la masse :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\rho \vec{V}] = 0 \quad (\text{A.37})$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p \vec{I} - \frac{1}{Re} \vec{\tau}_{l+t} \right] = \vec{0} \quad (\text{A.38})$$

Conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ (\rho E + p) \vec{V} - \frac{1}{Re} \left\{ \gamma \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \vec{\nabla} e + \vec{\tau}_{l+t} \cdot \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \right\} \right] = 0 \quad (\text{A.39})$$

De plus, on a les relations suivantes :

$$p = (\gamma - 1) \left[ \rho E - \frac{1}{2} (\rho \vec{V}^2 + \rho k) \right] \quad (\text{A.40})$$

$$\vec{\tau}_{l+t} = (\lambda + \lambda_t) \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \vec{I} + (\mu + \mu_t) (\vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^T) - \frac{2}{3} Re \rho k \vec{I} \quad (\text{A.41})$$

Equation de transport sur  $k$

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho k \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \right] = S_k \quad (\text{A.42})$$

Equation de transport sur  $\omega$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho \omega \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \vec{\nabla} \omega \right] = S_\omega \quad (\text{A.43})$$

avec :

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{Re} P_k - C_k \rho \omega k \\ S_\omega &= C_{\omega_1} \frac{\omega}{k} \frac{1}{Re} P_k - C_{\omega_2} \rho \omega^2 - \frac{L_0^2}{\rho_0 \vec{V}_0^2} C_d \\ C_d &= \frac{1}{2} \frac{\rho}{\omega} (\vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} \omega, 0) \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

et

$\begin{aligned} P_k &= \vec{\tau}_t \cdot \vec{\nabla} \vec{V} \\ \sigma_k &= \frac{3}{2} \\ C_k &= 0.09 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sigma_\omega &= 2.0 \\ C_{\omega_1} &= \frac{C_{\omega_2} \frac{K^2 \sqrt{C_k}}{\sigma_\omega}}{C_k} \approx \frac{5}{9} \\ C_{\omega_2} &= \frac{3}{40} \end{aligned}$	(A.45)
--	---	--------

## Annexe B

# Méthodes Numériques pour la Simulation - Annexe

### B.1 Discrétisation temporelle

On détaillera dans cette section les techniques possibles de discrétisations spatiales employées au cours de notre étude. On rappelle qu'au chapitre 2, seuls la discrétisation spatiale a été détaillée.

La première remarque qui peut être faite en considérant l'expression générale des équations de Navier-Stokes en volumes finis (2.35) est que cette dernière prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{g}\mathbf{q}) \Big|_{\xi^1, \xi^2, \xi^3} = -\mathbf{R}|_{\xi^1, \xi^2, \xi^3, t} \quad (\text{B.1})$$

$\mathbf{R}$  étant appelé *résidu* de l'équation temporelle, défini par :

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \left[ \mathbf{F}^i(\xi^i + \frac{1}{2}) - \mathbf{F}^i(\xi^i - \frac{1}{2}) \right] - \sqrt{g}\mathbf{S}|_{\xi^1, \xi^2, \xi^3} \quad (\text{B.2})$$

L'intégration de l'équation (B.1) permet de déterminer la solution  $\mathbf{q}^{n+1}$ , en se basant sur une ou plusieurs solutions connues  $n, n-1, \dots$ . Plusieurs méthodes de calcul sont alors possibles :

- Approche implicite : à l'instant  $n+1$ , la solution en chaque point du maillage dépend du champ dans le reste du maillage, exprimé (au moins) au même instant  $n+1$ . On crée ainsi pour chaque instant une dépendance spatiale qui stabilise le calcul et autorise des pas de temps très importants. En contrepartie, le champ ne peut être résolu qu'au travers d'un système linéaire de très grande dimension, ce qui nécessite souvent des tailles de mémoire très importantes et limite de fait l'application de la technique aux cas simples du point de vue du maillage.
- Approche explicite : on fait l'hypothèse que le champ, en un point, à l'instant  $n+1$  ne dépend que des solutions antérieures, ce qui a pour effet de simplifier fortement la technique de résolution. En contrepartie, cette technique n'est pas toujours stable ce qui limite les pas de temps acceptables et peut donc impliquer de faire beaucoup d'itérations avant d'arriver à un régime stable.

Dans la suite, on se restreindra aux techniques explicites qui sont les seules à même de traiter efficacement des cas spatialement bien résolus.

### B.1.1 Schéma d'Euler explicite

Ce schéma est donné à titre d'exemple car il permet d'introduire un certain nombre de caractéristiques des schémas temporels explicites. Il n'est aujourd'hui pas très utilisé car souffrant de certaines faiblesses. Il s'agit simplement d'un développement en série de Taylor construit à partir de la formule (B.1).

$$\Delta(\sqrt{g}\mathbf{q})^n = -\mathbf{R}^n \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \quad (\text{B.3})$$

Le schéma est précis à l'ordre 1 en temps. Il ne requiert que la donnée de l'état  $n$  pour calculer l'état  $n + 1$ . Sa stabilité peut être exprimée sous la forme d'une condition classique de CFL (Courant, Friedrichs, Levy) [4] en tout point du maillage :

$$CFL = (U + c) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (\text{B.4})$$

où  $U$  est une échelle de vitesse caractéristique de l'écoulement local,  $c$  est la vitesse du son et  $\Delta x$  est une échelle de longueur (généralement, la taille de maille) caractéristique du maillage local. Cette relation permet de limiter le pas de temps  $\Delta t$  possible. Classiquement, le CFL peut être vu comme le rapport entre :

- $U + c$  qui représente le maximum de la vitesse physique de l'information. A ce titre, la valeur  $U + c$  est souvent remplacée par le rayon spectral de la jacobienne des flux, puisque la plus grande valeur propre de cette matrice correspond à la plus grande vitesse possible de propagation de l'information au point de calcul.
- $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  qui représente la vitesse de propagation de l'information sur le maillage.

Si le CFL est inférieur à 1, cela signifie que l'information physique se propage moins vite que l'information numérique, ce qui se traduit de manière encore plus triviale par le fait que le champ en un point n'influencera au bout d'un pas de temps que les voisins directs. A l'inverse, si le CFL est supérieur à 1, l'information physique va "sauter" des nœuds ce qui génère bien évidemment des erreurs.

Le réglage du pas de temps peut être assez délicat. Dans le cas d'un maillage avec un fort coefficient d'aspect  $r$  (rapport de la plus grande dimension de la cellule sur la plus petite ; pour une maille rectangulaire, il s'agit du rapport longueur sur largeur), il existe plusieurs échelles  $\Delta x$  possibles selon la direction considérée, et probablement plusieurs échelles de vitesse. Ce cas est notamment observable dans le maillage d'une couche limite : ce maillage présente une grande densité de points dans la direction normale à la paroi, et en raison du caractère diffusif de l'écoulement dans cette direction, la vitesse caractéristique normale est très faible.

En conséquence il est pertinent de déterminer le pas de temps à partir des informations disponibles pour les trois directions. On peut ainsi poser [4, 171] :

$$\Delta t = \min_{i=1,2,3} \Delta t_i \quad (\text{B.5})$$

où  $\Delta t_i$  est le pas de temps associé à la direction  $\xi^i$ . On peut en particulier écrire  $\Delta t_i = \frac{CFL \|\vec{a}_i\|}{V_i + c}$  où  $\vec{a}_i$  et  $V_i$  sont respectivement le vecteur covariant associé à  $\xi^i$  et la vitesse covariante dans cette direction.

Le schéma d'Euler reste néanmoins limité par sa précision temporelle restreinte et par sa lenteur induite par la condition (B.4). Pour ce qui est de la précision, la solution serait d'étendre la série de Taylor qui sert de base au schéma, mais le problème est alors de déterminer les dérivées temporelles de  $\mathbf{q}^n$  d'ordre élevé.

### B.1.2 Schéma de Runge-Kutta

La solution la plus courante pour obtenir une bonne résolution temporelle consiste à utiliser un schéma de Runge-Kutta. Dans cette technique, l'état à l'instant  $n + 1$  est évalué à partir de  $\mathbf{q}^n$  en faisant intervenir plusieurs sous-instants entre ces deux dates. Ce schéma est dérivé de celui de Jameson [90, 86]. On introduit de plus une décomposition du résidu basée sur la constatation suivante : il est possible de réduire la charge algorithmique en évitant de réévaluer les flux visqueux et la dissipation à chaque sous-pas. De plus, les phénomènes convectifs et visqueux n'ont fondamentalement pas le même effet sur la stabilité du système ; la dissipation numérique qui tend à stabiliser le schéma est considérée comme un terme visqueux [90]. C'est pourquoi on génère une formulation dite *hybride* basée sur la décomposition du résidu en une partie convective et une partie diffusive :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^c + \mathbf{R}^v$$

Le schéma construit sur cette décomposition est appelé schéma de Runge-Kutta *hybride*. On définit  $p$  sous-pas par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0^{n+1} &= \mathbf{q}^n \\ &\vdots \\ \mathbf{q}_k^{n+1} &= \mathbf{q}^n - \alpha_k \frac{\Delta t}{\sqrt{g}} (\mathbf{R}_{k-1}^c + \mathbf{R}_{k-1}^v) \\ &\vdots \\ \mathbf{q}_p^{n+1} &= \mathbf{q}^{n+1} \end{aligned} \tag{B.6}$$

Les coefficients  $\alpha_k$  sont imposés et dépendent généralement du nombre de sous-pas choisi. Les  $\mathbf{R}_k^c$  sont les résidus intermédiaires de la partie convective, définis simplement comme :

$$\mathbf{R}_k^c = \mathbf{R}^c(\mathbf{q}_k^{n+1})$$

En revanche, les  $\mathbf{R}_k^v$  sont caractérisés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0^v &= \mathbf{R}^v(\mathbf{q}^n) \\ &\vdots \\ \mathbf{R}_k^v &= \beta_k \mathbf{R}^v(\mathbf{q}_k^{n+1}) + (1 - \beta_k) \mathbf{R}_{k-1}^v \end{aligned}$$

Les coefficients  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont optimisés pour accélérer la convergence des écoulements stationnaires. Les valeurs optimales pour un schéma à cinq sous-pas sont données dans la table [B.1] [9].

$\alpha_1 = \frac{1}{4}$	$\beta_1 = 1$
$\alpha_2 = \frac{1}{6}$	$\beta_2 = 0$
$\alpha_3 = \frac{3}{8}$	$\beta_3 = 0.56$
$\alpha_4 = \frac{1}{2}$	$\beta_4 = 0$
$\alpha_5 = 1$	$\beta_5 = 0.44$

TAB. B.1 – Coefficients optimaux pour les schémas de Runge-Kutta standard et hybrides à cinq pas

Les différents sous-pas peuvent être interprétés comme une série de prédictions et corrections effectuées avec un schéma d'Euler explicite. La formulation de Runge-Kutta est donc  $p$  fois plus

coûteuse que l'algorithme précédent, mais ce défaut est compensé par un plus fort critère CFL : pour un schéma à cinq pas appliqué à des relations linéaires, la limite de CFL vaut 4.

Néanmoins, cette définition n'est pas totalement satisfaisante dans la mesure où elle introduit au niveau des sous-pas un déphasage entre les évolutions "convectives" et "diffusives" qui n'est pas souhaitable dans le cas d'un calcul instationnaire et qui peut de plus nécessiter un traitement algorithmique particulier pour décomposer le résidu. Le choix qui a été fait pour l'implémentation du code Turb'Flow est de négliger la décomposition, ce qui revient à prendre  $\beta_k = 1, \forall k$ . On obtient de cette manière :

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_0^{n+1} &= \mathbf{q}^n \\
\mathbf{q}_1^{n+1} &= \mathbf{q}^n - \alpha_1 \frac{\Delta t}{\sqrt{g}} \mathbf{R}_0 \\
&\vdots \\
\mathbf{q}_k^{n+1} &= \mathbf{q}^n - \alpha_k \frac{\Delta t}{\sqrt{g}} \mathbf{R}_{k-1} \\
&\vdots \\
\mathbf{q}_p^{n+1} &= \mathbf{q}^n - \alpha_p \frac{\Delta t}{\sqrt{g}} \mathbf{R}_{p-1} \\
\mathbf{q}^{n+1} &= \mathbf{q}_p^{n+1}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

On peut montrer avec cette formulation [9] que  $\alpha_p = 1$  ; pour obtenir un schéma précis au second ordre, il faut de plus que  $\alpha_{p-1} = \frac{1}{2}$ . Ces deux contraintes sont bien vérifiées par les coefficients optimaux donnés en [B.1]. L'approche est en outre bien adaptée pour des schémas spatiaux décentrés amont. L'expérience montre en pratique que les schémas à trois et cinq sous-pas sont très stables, dépassant largement ce que permet un schéma d'Euler explicite.

Il convient de faire une dernière remarque concernant le cas des maillages déformables. Lorsque le maillage est déformable, le jacobien  $\sqrt{g}$  dépend lui aussi du temps. En conséquence, il faut modifier les équations (B.7) avec la formule de récurrence suivante [171] :

$$\sqrt{g}(t + \alpha_k \Delta t) \mathbf{q}_k^{n+1} = \sqrt{g}(t) \mathbf{q}^n - \alpha_k \Delta t \mathbf{R}_{k-1} \tag{B.8}$$

### B.1.3 Détermination du pas de temps $\Delta t$

Il existe deux manières principales de régler le pas de temps utilisé pour l'intégration temporelle :

1. Soit on impose directement la valeur de  $\Delta t$ , en supposant que cette valeur soit compatible avec la stabilité du schéma temporel.
2. Soit on laisse  $\Delta t$  s'adapter automatiquement à l'écoulement en imposant une condition de type CFL.

On ne s'étendra évidemment pas sur la première méthode, laquelle ne présente pas d'intérêt majeur, et on se concentrera plutôt sur la seconde. Comme cela a été introduit avec la relation (B.4), il est possible (et même nécessaire pour des schémas explicites) de lier le pas de temps aux caractéristiques de l'écoulement et du maillage. Pour l'équation linéaire de convection, on définit le pas de temps :

$$\Delta t = (CFL) \frac{\Delta x}{|\Lambda_c|} \tag{B.9}$$

où  $|\Lambda_c|$  est la vitesse de convection, ce qui peut aussi se percevoir comme la valeur propre de la matrice jacobienne du flux convectif. Le nombre de Courant Friedrichs Levy noté (*CFL*) dépend

pour sa part de la discrétisation spatiale et temporelle choisie. On peut généraliser cette relation aux équations d'Euler puis de Navier-Stokes pour des maillages structurés. Blazek [9] propose ainsi les formulations suivantes :

- Pour les équations d'Euler :

$$\Delta t = (CFL) \frac{\sqrt{g}}{(\Lambda_c^1 + \Lambda_c^2 + \Lambda_c^3)} \quad (\text{B.10})$$

où les  $\Lambda_c^i$  sont les rayons spectraux des matrices jacobienne des flux convectifs  $\mathbf{F}^i$  associés aux directions  $\xi^i$ .

- Pour les équations de Navier-Stokes :

$$\Delta t = (CFL) \frac{\sqrt{g}}{(\Lambda_c^1 + \Lambda_c^2 + \Lambda_c^3) + C(\Lambda_v^1 + \Lambda_v^2 + \Lambda_v^3)} \quad (\text{B.11})$$

où les  $\Lambda_v^i$  sont les rayons spectraux des matrices jacobienne des flux diffusifs  $\mathbf{F}^i$  associées aux directions  $\xi^i$  et  $C$  est une constante,  $C = 4$  habituellement.

Un autre point intéressant associé à la détermination de  $\Delta t$  par une contrainte de type CFL est la possibilité de fixer un pas de temps différent en tout point du maillage. Les relations (B.10) et (B.11) montrent clairement que le pas de temps dépend de caractéristiques locales, à savoir le volume de la cellule et les vitesses de convection/diffusion. En conséquence, on peut attendre à une même date une variation de  $\Delta t$  d'une maille à une autre. De la même manière pour un champ instationnaire, le  $\Delta t$  en un point donné évoluera au cours des itérations.

L'intérêt de fixer un pas de temps local est simple à comprendre. Supposons que le pas de temps soit le même pour tout le domaine, ce domaine comportant à la fois des zones à faible vitesse avec des gradients importants et un maillage dense, et aussi des zones beaucoup plus régulières comme par exemple un plénum. On peut souhaiter, dans les dernières zones, évacuer rapidement des ondes parasites en augmentant le pas de temps, ce qui ne porte pas préjudice à la stabilité du schéma dans ces zones. Simultanément, on cherche aussi à limiter les possibles instabilités dans les zones critiques, ce qui est revient à diminuer le pas de temps. Les deux actions étant contradictoires, on se situe face à un dilemme.

Ce problème est naturellement levé avec l'adoption d'un pas de temps local. Cela permet d'accélérer la convergence d'un calcul stationnaire. En contrepartie, cette méthode n'a pas de sens pour un calcul instationnaire puisque à chaque itération temporelle, la date "vécue" par les points de maillage n'est pas uniforme dans l'espace. On parlera classiquement de pas de temps local ou global, les deux définitions pouvant en revanche être variables au cours des itérations.

Pour le pas de temps local, il peut être nécessaire d'effectuer un lissage spatial afin d'éviter de trop fortes disparités et ainsi stabiliser le calcul. On spécifie donc un coefficient de lissage  $c_{lt}$  tel que le rapport entre les pas de temps calculés en deux points voisins n'excède pas  $1 + c_{lt}$ . Le traitement algorithmique réalisé dans le code Turb'Flow revient à déterminer le plus petit pas de temps possible sur toute la grille de calcul et à lisser le reste des  $\Delta t(i, j, k)$  en fonction de cette référence, ce qui limite de facto la vitesse de convergence pour l'ensemble du domaine.

### B.1.4 Lissage du résidu

Une fois le pas de temps connu et l'intégration terminée, on peut déterminer pour un calcul stationnaire le résidu de l'évolution temporelle classique (B.1) en tout point :

$$\Delta \mathbf{q}(i, j, k) = \mathbf{q}^{n+1}(i, j, k) - \mathbf{q}^n(i, j, k)$$

Ce résidu correspond en fait à la correction appliquée au point (i,j,k) pour passer à la date suivante.

Cependant, les schémas temporels explicites sont connus pour leur faible vitesse de convergence liée à leur faible stabilité. Pour pouvoir augmenter le pas de temps possible, il faut stabiliser le schéma ce qui peut être fait en modifiant le résidu  $\Delta \mathbf{q}$ .

On introduit un lissage spatial de ce dernier qui peut prendre deux formes : un lissage explicite et un autre implicite.

#### B.1.4.1 Lissage explicite du pas de temps

Le lissage explicite est conçu de manière à filtrer les pics locaux de corrections entre deux dates. A l'instant  $n$  la correction en un point est d'abord "moyennée" par la valeur du résidu des voisins immédiats :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q}(i, j, k)^* &= \left(1 - \frac{\beta_{exp}}{12}\right) \Delta \mathbf{q}(i, j, k) \\ &+ \frac{\beta_{exp}}{6 \times 24} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}(i+1, j, k) & +\Delta \mathbf{q}(i-1, j, k) & + \\ \Delta \mathbf{q}(i, j+1, k) & +\Delta \mathbf{q}(i, j-1, k) & + \\ \Delta \mathbf{q}(i, j, k+1) & +\Delta \mathbf{q}(i, j, k-1) & + \\ \Delta \mathbf{q}(i+1, j+1, k) & +\Delta \mathbf{q}(i-1, j-1, k) & + \\ \Delta \mathbf{q}(i+1, j, k+1) & +\Delta \mathbf{q}(i-1, j, k-1) & + \\ \Delta \mathbf{q}(i, j+1, k+1) & +\Delta \mathbf{q}(i, j-1, k-1) & + \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

puis par celle des voisins d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q}(i, j, k)^{LE} &= \left(1 - \frac{\beta_{exp}}{12}\right) \Delta \mathbf{q}(i, j, k)^* \\ &+ \frac{\beta_{exp}}{6 \times 36} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}(i+2, j, k) & +\Delta \mathbf{q}(i-2, j, k) & + \\ \Delta \mathbf{q}(i, j+2, k) & +\Delta \mathbf{q}(i, j-2, k) & + \\ \Delta \mathbf{q}(i, j, k+2) & +\Delta \mathbf{q}(i, j, k-2) & + \\ \Delta \mathbf{q}(i+2, j+2, k) & +\Delta \mathbf{q}(i-2, j-2, k) & + \\ \Delta \mathbf{q}(i+2, j, k+2) & +\Delta \mathbf{q}(i-2, j, k-2) & + \\ \Delta \mathbf{q}(i, j+2, k+2) & +\Delta \mathbf{q}(i, j-2, k-2) & + \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$0 \leq \beta_{exp} \leq 1$  est le pourcentage de lissage explicite. Les valeurs classiques de ce paramètre numérique sont comprises entre 0.05 et 0.5. La correction lissée  $\Delta \mathbf{q}(i, j, k)^{LE}$  est celle qui sera utilisée dans le calcul.

Ce processus n'est pas indépendant de l'ordre de parcours des nœuds. La même technique de balayage des nœuds dans le sens croissant puis décroissant a été adoptée pour les trois directions indicielles.

### B.1.4.2 Lissage implicite du pas de temps

Le lissage implicite utilisé dans le code Turb'Flow est construit à partir des formulations de Lerat [114] et Liamis [115]. La technique consiste à pondérer la correction par les corrections des nœuds voisins :

$$\left[ \vec{I} + \beta_{imp}^* \cdot \vec{\partial p} \right] \cdot \Delta \mathbf{q}_{imp} = \Delta \mathbf{q}_{exp} \quad (\text{B.14})$$

où :

- $\beta_{imp}^*$  est le coefficient de lissage implicite.
- $\vec{\partial p}$  est un opérateur.
- $\Delta \mathbf{q}_{exp}$  est la correction issue de la phase de lissage explicite.
- $\Delta \mathbf{q}_{imp}$  est la correction de la phase de lissage implicite.

Dans le cas tridimensionnel, le lissage implicite de Lerat couplé avec une méthode ADI (Alternate Direction Implit) s'écrit :

$$\left[ \Delta \mathbf{q}^* + \beta_{imp}^* \sigma_i^2 \delta_i \left\{ (\Lambda^i)^2 \delta_i (\Delta \mathbf{q}^*) \right\} \right] = \Delta \mathbf{q}_{exp} \quad (\text{B.15})$$

$$\left[ \Delta \mathbf{q}^{**} + \beta_{imp}^* \sigma_j^2 \delta_j \left\{ (\Lambda^j)^2 \delta_j (\Delta \mathbf{q}^{**}) \right\} \right] = \Delta \mathbf{q}^* \quad (\text{B.16})$$

$$\left[ \Delta \mathbf{q}_{imp} + \beta_{imp}^* \sigma_k^2 \delta_k \left\{ (\Lambda^k)^2 \delta_k (\Delta \mathbf{q}_{imp}) \right\} \right] = \Delta \mathbf{q}^{**} \quad (\text{B.17})$$

où :

- $\sigma_i^2 = \frac{\Delta t}{\Delta \xi^i}$  est l'inverse de la vitesse de propagation de l'information numérique dans la direction  $i$ .
- $\Lambda_i = |V^i| + c \|\vec{a}_i\|$  est le rayon spectral de la matrice jacobienne  $\frac{\partial \mathbf{F}_c^i}{\partial \mathbf{q}}$ .
- $\delta_i$  est un opérateur spatial centré dans la direction  $i$ .
- $\beta_{imp}^* = -\frac{\beta_{imp}}{2^p - 1}$  est le coefficient de pondération implicite,  $p$  étant le nombre de sous-pas du schéma de Runge-Kutta, et  $\beta_{imp}$  étant le coefficient de lissage implicite imposé par l'utilisateur.

Smati [171] rapporte que l'approche est inconditionnellement stable pour des valeurs de  $\beta_{imp}$  supérieures à 1.

La résolution du système précédent est effectuée avec un algorithme de Thomas, ce qui permet d'avoir une charge informatique assez faible tant du point de vue du processeur que de l'utilisation de la mémoire. De plus, le processus ADI est effectué en changeant la direction initiale à chaque fois pour ne pas introduire de biais. Le lissage implicite est effectué à chaque sous-pas du schéma de Runge-Kutta.

## B.2 Discrétisation spatiale des flux turbulents

Le code PROUST, devenu par la suite Turb'Flow, a été développé avec une modélisation de la turbulence qui n'a cessé de se raffiner au cours du temps. Les premières implémentations ne faisaient intervenir qu'un modèle de longueur de mélange pour déterminer les termes turbulents apparaissant dans les équations gérant les variables conservatives  $(\rho, \rho \vec{V}, \rho E)$ .

L'apparition des modèles de turbulence plus sophistiqués, notamment ceux à deux équations, a modifié le contexte. En effet, les équations [(2.5),(2.11),(2.17)] et [(2.23),(2.29)] sont couplées,

le couplage entre les variables conservatives classiques et les variables turbulentes est matérialisé par la pression statique  $p$  et le tenseur de Reynolds  $\overrightarrow{\tau}_t$ , lesquels font intervenir l'énergie cinétique turbulente  $k$ .

L'introduction des variables turbulentes implique théoriquement de reconstruire les formulations utilisées pour le calcul des flux, toutes les variables traitées devant l'être de la même manière. Cependant, il est possible de nuancer cette notion de couplage en remarquant qu'il sera prépondérant uniquement dans les zones où la production d'énergie cinétique turbulente et les effets purement convectifs, liés au caractère "parfait" de l'écoulement, seront simultanément importants, ce qui est antinomique. On fait alors l'hypothèse que la résolution d'un système découplé, au sens où variables turbulentes et conservatives sont traitées de manière différente, n'aura que peu de conséquences sur les résultats [171].

En pratique, cette hypothèse revient à considérer les variables turbulentes comme des scalaires passifs du point de vue de la convection. Elle est cependant assez critiquable pour une simulation instationnaire, puisque la turbulence affecte les valeurs propres du système convectif.

Les variables turbulentes seront traitées de la même manière que les variables conservatives pour ce qui est de la discrétisation temporelle. En revanche, on applique un calcul différent pour l'évaluation des flux convectifs et visqueux.

### B.2.1 Flux convectif

Il existe trois possibilités principales pour traiter le flux convectif turbulent.

- **Schéma décentré** : Les variables turbulentes étant considérées comme des scalaires passifs du point de vue de la convection, les flux convectifs associés s'expriment simplement en fonction du flux de masse  $F_{c\rho}^i$  à l'interface. On notera canoniquement  $Y$  les variables turbulentes.

$$F_{cY}^i(\xi^i - \frac{1}{2}) = F_{c\rho}^i(\xi^i - \frac{1}{2})Y|_{\xi^i - \frac{1}{2}}^{L/R} \quad (\text{B.18})$$

Le choix de l'état gauche ou droit de  $Y$  est effectué en se basant sur le signe du flux convectif de masse. On obtient ainsi :

$$F_{cY}^i(\xi^i - \frac{1}{2}) = F_{c\rho}^i(\xi^i - \frac{1}{2}) \begin{cases} \frac{\rho Y|_{\xi^i - \frac{1}{2}}^L}{\rho_{\xi^i - \frac{1}{2}}^L} & \text{si } F_{c\rho}^i(\xi^i - \frac{1}{2}) \geq 0 \\ \frac{\rho Y|_{\xi^i - \frac{1}{2}}^R}{\rho_{\xi^i - \frac{1}{2}}^R} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Le schéma MUSCL utilisé pour interpoler  $\rho Y$  au niveau de l'interface est souvent du premier ordre. Cela permet de traiter de manière assez robuste et sans limiteur les zones avec des fortes variations de pente, comme par exemple au niveau des couches limites. Il est bien entendu possible de traiter les termes turbulents avec un ordre plus élevé, l'interpolation étant alors effectuée de préférence avec le même décentrement que les variables conservatives. Toutefois, nous n'avons pas obtenu de gain significatif sur les cas traités par cette étude avec une méthode d'ordre élevé. Nous avons donc choisi de garder un traitement au premier ordre des termes turbulents.

- **Schéma centré** : La deuxième approche est évidemment une approche centrée. On applique ici la même méthode que celle qui a été présentée pour les variables conservatives. On obtient

donc :

$$F_{cY}^i(\xi^i - \frac{1}{2}) = F_c^i(\rho Y_{\xi^i - \frac{1}{2}}) + F_d^i(\rho Y_{\xi^i - \frac{1}{2}}) \quad (\text{B.20})$$

où  $\rho Y_{\xi^i - \frac{1}{2}}$  est l'état de  $\rho Y$  à l'interface, évalué par un schéma centré au moins d'ordre deux,

$$F_c^i(Y_{\xi^i - \frac{1}{2}}) = V^i|_{\xi^i - \frac{1}{2}} \rho Y_{\xi^i - \frac{1}{2}} \quad (\text{B.21})$$

et  $F_d^i(\rho Y_{\xi^i - \frac{1}{2}})$  est un terme de dissipation artificielle calculé de la même manière que pour les variables conservatives.

- **Schéma centré + décentrement sur les variables turbulentes** : Il peut parfois être souhaitable d'introduire un décentrement pour le traitement des variables turbulentes tout en gardant un schéma centré pour les variables conservatives. Ceci est notamment le cas pour introduire une dissipation plus forte au niveau des grandeurs turbulentes. Dans ces conditions, le flux convectif est évalué au moyen de la formule (B.19), le flux de masse à l'interface étant pour sa part déterminé par le schéma centré.

### B.2.2 Flux Diffusif

Les flux diffusifs pour les variables conservatives étant déterminés au moyen d'un schéma centré, il est logique d'employer le même schéma pour les variables turbulentes. On obtient donc :

$$\mathbf{F}_v^i(\xi^i - \frac{1}{2}) = \sqrt{g} \left( \begin{array}{c} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \vec{\nabla} k \\ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \vec{\nabla} \omega \end{array} \right) \cdot \vec{a}^i \quad (\text{B.22})$$

où :

$$\vec{\nabla} Y \Big|_{\xi^i - \frac{1}{2}} = \vec{a}^i \Big|_{\xi^i - \frac{1}{2}} [Y_{\xi^i} - Y_{\xi^i - 1}] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \vec{a}^j \Big|_{\xi^i - \frac{1}{2}} \frac{Y_{\xi^j} - Y_{\xi^j - 1}}{2} \quad (\text{B.23})$$

Pour finir, il reste à traiter les termes sources  $S_k$  et  $S_\omega$ . Ils font apparaître la production d'énergie cinétique turbulente  $P_k = \vec{\tau}_t \div \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ .

Ces sources sont volumiques et sont donc traitées de manière centrée sur la cellule. Il est alors nécessaire d'évaluer le gradient et la divergence du vecteur vitesse. Pour cela, on utilisera la relation suivante [13] :

$$\vec{\nabla} u_l \Big|_{\xi^1, \xi^2, \xi^3} = \sum_{j=1}^3 \vec{a}^j \Big|_{\xi^1, \xi^2, \xi^3} \frac{u_l(\xi^j + 1) - u_l(\xi^j - 1)}{2} \quad (\text{B.24})$$

Le gradient de la vitesse est généré par les  $(\vec{\nabla} u_l)_{l=1,2,3}$  écrits en ligne, et la divergence équivaut à la trace du tenseur gradient.

## B.3 Traitement des conditions aux limites

Tous les résultats théoriques précédents ont été obtenus en supposant que l'on se trouvait assez loin des frontières du domaine de calcul pour ne pas avoir de problème de discrétisation spatiale. Lorsqu'on se rapproche de ces frontières, il devient nécessaire d'effectuer un traitement spécial pour prendre en compte les conditions aux limites qui y sont imposées. On distingue usuellement deux problèmes dans le traitement des frontières :

1. L'absence de nœuds en dehors du domaine de calcul
2. Les conditions aérodynamiques imposées pour pouvoir déterminer une solution unique.

### B.3.1 Extension du domaine de calcul

Le traitement des nœuds au cœur du domaine de calcul est simple puisqu'on dispose normalement d'un nombre suffisant de voisins pour pouvoir utiliser une molécule de calcul donnée. En revanche, lorsqu'on arrive à la frontière, il est évident qu'il manque des nœuds pour pouvoir utiliser la même molécule de calcul.

Le remède le plus simple est de modifier cette molécule dans les zones de frontières, notamment en réduisant son étendue ou en la décentrant vers l'intérieur du domaine. Cependant, cela revient aussi à appliquer un traitement numérique différent qui sera préjudiciable en terme d'erreur numérique. Une diminution de l'ordre spatial, comme un décentrement total, sont tous les deux responsables d'une erreur forte. De plus, l'incohérence avec le schéma utilisé à l'intérieur du domaine peut amener à générer un parasitage du point de vue temporel pour un calcul instationnaire, se traduisant en particulier par un déphasage entre les points de maillage.

En conséquence, on fait souvent le choix de garder la même discrétisation spatiale qu'à l'intérieur du domaine de calcul, ce qui implique d'étendre artificiellement ce dernier. On construit donc des **plans supplémentaires** de telle sorte que l'on puisse appliquer sans aucune distinction le même schéma. Le nombre de plans supplémentaires est relié à la molécule de calcul utilisée. Celle-ci est illustrée pour différentes configurations sur la figure (Fig. B.1).

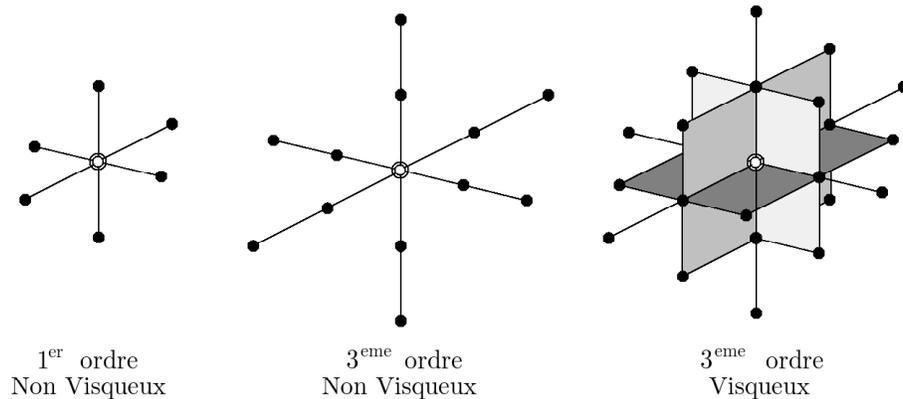


FIG. B.1 – Molécules de calcul pour le premier et troisième ordre non visqueux et troisième ordre visqueux

Pour un schéma spatial non visqueux du premier ordre, seuls les voisins directs sont nécessaires. On peut alors se contenter de créer un seul plan supplémentaire à chaque frontière. A l'opposé, pour un schéma d'ordre supérieur, il faut disposer de deux nœuds voisins dans chaque direction. Pour un calcul visqueux, on a en outre besoin des points croisés du type  $(\xi^i + 1, \xi^j + 1, \xi^k)$ . Cela conduit donc à définir deux plans supplémentaires pour chaque frontière plus une arête supplémentaire, utilisée uniquement par les calculs visqueux. La géométrie correspondante est représentée sur la figure (Fig. B.2).

La position des plans supplémentaires par rapport au domaine est déterminée en fonction du type de condition appliquée sur la frontière traitée. Par exemple, pour un contact direct entre deux

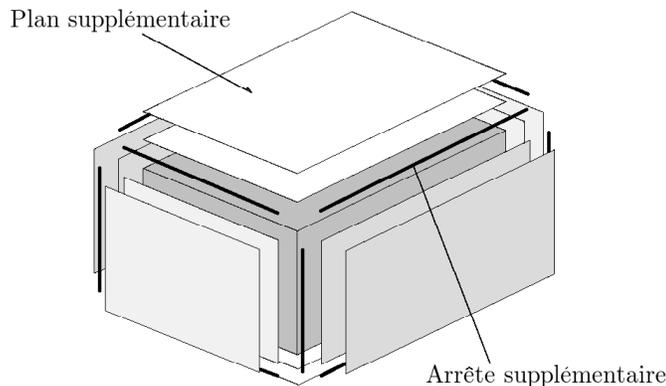


FIG. B.2 – Plans et arêtes supplémentaires

blocs de maillage, les deux plans supplémentaires au niveau du contact pour un des blocs seront directement copiés à partir de l'autre bloc. Pour une condition de périodicité, on applique en plus une rotation ou une translation aux plans à copier afin de positionner leur image au niveau de l'interface considérée. À l'inverse, pour des conditions telles que la symétrie ou l'adhérence, ces plans sont extrapolés à partir du maillage à l'intérieur du domaine.

De la même manière, le champ aérodynamique sur ces plans est déterminé à la fois à partir du champ à l'intérieur du domaine et surtout en fonction des conditions imposées.

Si le traitement des nœuds au niveau des frontières est fortement simplifié avec une telle approche, la taille du maillage augmente en contrepartie ce qui implique une augmentation des ressources nécessaires au calcul.

**Cas des interpolateurs généralisés** On peut se demander à ce niveau comment traiter les nouveaux interpolateurs géométriques. En effet, à ordre constant, ceux-ci demandent un point supplémentaire dans chaque direction afin de définir les tailles de maille.

On rappelle que pour l'interpolateur corrigé MUSCL du troisième ordre, on a par exemple :

$$\bar{q}_{i-1/2,3^{eme\ ordre}}^L = \bar{q}_{i-1} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \partial_x q_{i-1} - \frac{\Delta x_i \Delta x_{i-1}}{2(\Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} (\partial_x q_{i-1} - \partial_x q_{i-2}) \quad (\text{B.25})$$

où

$$\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$$

De la même manière, l'interpolation d'ordre quatre utilisée par le schéma centré fait elle aussi appel à des points extérieurs. Toutes les molécules de calcul utilisées actuellement ne dépassent néanmoins pas deux voisins dans chaque direction.

Pour traiter la frontière  $\xi^i = 1 - \frac{1}{2}$ , il est donc nécessaire de connaître les points  $\xi^i = 0$ ,  $\xi^i = -1$ , de même que la position des interfaces  $0 - \frac{1}{2}$  et  $-1 - \frac{1}{2}$ . Cette dernière interface n'existe cependant pas lorsqu'on utilise deux plans supplémentaires (le maillage s'arrête à  $\xi^i = -1$ ). On doit donc extrapoler d'une manière ou d'une autre la taille de la cellule  $\Delta x_{-1}$ .

Pour trouver une technique valable, plusieurs essais ont été effectués :

- Copie de la largeur précédente :  $\Delta x_{-1} = \Delta x_0$

- Copie "symétrique" :  $\Delta x_{-1} = \Delta x_1$

Aucune différence significative n'est apparue entre les deux approches. Dans le futur, on se contentera donc de recopier simplement la valeur précédente.

### B.3.2 Conditions géométriques de frontière

Pour ces conditions, on n'impose pas de valeur précise pour le champ, mais plutôt une condition géométrique particulière. Ce type de conditions aux limites ne requiert que le champ à l'intérieur des domaines et la position  $\vec{r}^{int}$  des nœuds intérieurs. Il existe deux conditions géométriques principales :

1. **Plan de symétrie.** La frontière est considérée comme un plan de symétrie pour l'écoulement, ce qui implique en particulier que l'écoulement est, à convergence, parallèle à cette paroi. Les plans supplémentaires et le champ afférent sont simplement déterminés par symétrie des nœuds internes.

On obtient en particulier :

$$\begin{aligned} \text{Position : } \vec{r}^{sup.}(i, j, k) &= \vec{r}^{int}(i, j, k) - 2(\vec{r}^{int}(i, j, k) \cdot \vec{n})\vec{n} \\ \text{Champ : } \mathbf{q}^{sup.} &= \mathbf{q}^{int} \end{aligned}$$

où  $\vec{r}^{sup.}$  est la position des nœuds supplémentaires et  $\vec{n}$  le vecteur normal à la frontière orienté vers l'extérieur. Cette condition n'est donc applicable qu'à des frontières planes.

2. **Contact inter-domaine.** Comme on l'a esquissé précédemment, le maillage et le champ aérodynamique sont directement copiés à partir des domaines en contact. On notera  $I$  le domaine pour lequel on calcule les plans supplémentaires, et  $II$  le domaine en contact de l'autre coté de l'interface.

On utilise les formulations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Position : } \begin{cases} \vec{r}_I^{sup.} = T_r(\vec{r}_{II}^{int}) \\ \vec{r}_{II}^{sup.} = T_r^{-1}(\vec{r}_I^{int}) \end{cases} \\ \text{Champ : } \begin{cases} \mathbf{q}_I^{sup.} = T_q(\mathbf{q}_{II}^{int}) \\ \mathbf{q}_{II}^{sup.} = T_q^{-1}(\mathbf{q}_I^{int}) \end{cases} \end{aligned}$$

où  $T_r$  et  $T_q$  sont des transformations géométriques associées aux contacts, appliquées respectivement au maillage et au champ.

- Pour un contact direct  $T_r = T_q = \vec{I}$ .
- Pour un contact périodique en translation (période  $t$ ),  $T_r = translation(t)$  et  $T_q = \vec{I}$
- Pour un contact périodique en angle (période  $\theta$ ),  $T_r = T_q = rotation(\theta)$

La dernière possibilité est un contact instationnaire tournant (contact entre des blocs rotor et stator par exemple), les plans supplémentaires ne varient pas, seul le champ est interpolé au moyen de transformées de Fourier.

### B.3.3 Conditions aux limites physiques

A chaque condition aérodynamique imposée sur une frontière, on fait correspondre une contrainte externe lors de la résolution du système d'équation différentielle RANS. La technique adoptée dans

le code Turb'Flow est l'utilisation des relations de compatibilité [4]. Cela fait en particulier appel aux propriétés hyperboliques de la partie convective du système d'équations.

On réécrit celui-ci sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g} \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{F}_c^i}{\partial \xi^i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{\partial \mathbf{F}_c^j}{\partial \xi^j} + S = 0 \quad (\text{B.26})$$

où  $S$  est un terme source qui regroupe tous les termes non convectifs des équations, et  $\xi^i$  est la direction indicielle qui n'est pas tangente à la frontière. Les flux convectifs exprimés dans la somme sont définis le long de directions tangentes à la frontière. Ils seront traités de la même manière que les points internes du domaine.

On projette ces équations sur la surface caractéristique associée à  $\xi^i$  en les multipliant par les vecteurs propres gauches  $L^i$  de la matrice jacobienne  $K^i$  associée au flux  $\mathbf{F}_c^i$ . On obtient :

$$L^i \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g} \mathbf{q} + L^i \frac{\partial \mathbf{F}_c^i}{\partial \xi^i} + L^i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{\partial \mathbf{F}_c^j}{\partial \xi^j} + S \right) = 0 \quad (\text{B.27})$$

où

$$K^i = \left[ \frac{\partial F_{ca}^i}{\partial \sqrt{g} \mathbf{q}} \right]_{a=1, \dots, 5} \quad (\text{B.28})$$

On peut alors reformuler (B.27) :

$$L^i \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g} \mathbf{q} + L^i K^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{g} \mathbf{q} + L^i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{\partial \mathbf{F}_c^j}{\partial \xi^j} + S \right) = 0 \quad (\text{B.29})$$

ce qui donne, en posant  $\mathbf{w}^i = L^i \mathbf{q}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g} \mathbf{w}^i + \Lambda^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{g} \mathbf{w}^i + L^i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{\partial \mathbf{F}_c^j}{\partial \xi^j} + S \right) = 0 \quad (\text{B.30})$$

où  $\Lambda^i$  est la matrice diagonale regroupant les valeurs propres  $\lambda^i$  de  $K^i$  :  $\Lambda^i L^i = L^i K^i$ .

Le système (B.30) décrit le transport des variables caractéristiques  $\mathbf{w}^i$  dans la direction  $\xi^i$  à la vitesse  $\lambda^i$ . Les valeurs propres de la matrice jacobienne  $K^i$  peuvent donc être interprétées comme les vitesses de propagation des ondes se déplaçant normalement à la surface caractéristique. De plus, si  $\lambda$  est positif, l'onde sort du domaine, et il n'y a pas besoin de modifier l'équation correspondante. Si  $\lambda \leq 0$ , l'onde est rentrante et on doit alors inclure de nouvelles informations apportées par l'onde.

Le traitement temporel est effectué de la même manière que pour le reste du domaine. Le traitement de l'information externe peut être fait en imposant à tout instant la variation temporelle  $B^*(t)$  d'une grandeur physique  $B(\mathbf{q})$  :

$$B^*(t) = B(\mathbf{q}) \quad (\text{B.31})$$

En intégrant (B.31), on trouve :

$$B^{(n+1)} - B^{*(n+1)} = \left\{ B^{(n)} + \left[ \frac{\partial B}{\partial \sqrt{g\mathbf{q}}} \right]^{(n)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g\mathbf{q}} \right]^{(n)} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t) \right\} - B^{*(n)} \quad (\text{B.32})$$

et donc, avec (B.31) :

$$\left[ \frac{\partial B}{\partial \sqrt{g\mathbf{q}}} \right] \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g\mathbf{q}} = -\frac{1}{\Delta t} [B(\mathbf{q}^{(n)}) - B^*(t^{n+1})] \quad (\text{B.33})$$

En combinant les équations (B.30) et (B.33) qui sont similaires dans la forme, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g\mathbf{q}} + [P^{1i}]^{-1} \left( [P^{2i}] \left\{ \sum_{j=1}^3 \left[ \mathbf{F}_c^j(\xi^j + \frac{1}{2}) - \mathbf{F}_c^j(\xi^j - \frac{1}{2}) \right] + S \right\} - [P^{3i}] \right) = \vec{0} \quad (\text{B.34})$$

où :

$$[P^{1i}] = \begin{bmatrix} L_{\lambda^i > 0}^i \\ \frac{\partial B}{\partial \sqrt{g\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \quad [P^{2i}] = \begin{bmatrix} L_{\lambda^i > 0}^i \\ 0 \end{bmatrix} \quad [P^{3i}] = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{B(\mathbf{q}) - B^*(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} \quad (\text{B.35})$$

Il existe un certain nombre de conditions aux limites physiques applicables dans le code Turb'Flow.

1. **Frontière libre.** Il s'agit de la condition d'entrée/sortie standard. On distingue plusieurs cas de figure possibles selon que l'écoulement est supersonique ou non.

- Sortie supersonique : L'information ne peut pas dans ce cas se propager vers l'amont. Toutes les variables sont imposées au niveau du plan d'entrée. Aucun traitement n'est donc requis à ce niveau.
- Sortie subsonique : Il n'existe qu'une seule valeur propre négative. L'équation correspondante est remplacée par l'expression de la pression statique afin d'imposer celle-ci sur le plan de sortie.

$$B(\mathbf{q}) = P_s = (\gamma - 1) \left[ \rho E - \frac{1}{2} \rho V^2 \right] \quad \text{et} \quad \frac{\partial B}{\partial \sqrt{g\mathbf{q}}} = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} V^2 \\ -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.36})$$

- Entrée subsonique : Il existe quatre valeurs propres négatives. Il est donc nécessaire d'imposer quatre grandeurs sur le plan amont. On retient généralement le quadruplé  $(\rho, u_1, u_2, u_3)$  ou encore le quadruplé  $(P_t, T_t, v_1, v_2)$  où  $v_1$  et  $v_2$  sont des informations sur le vecteur vitesse, comme par exemple les angles.

Pour  $P_t$ , on obtient :

$$\frac{\partial P_t}{\partial \sqrt{g g_k}} = \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left( 1 + \frac{\rho E}{P_s} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \left( 1 + \frac{\rho E}{P_s} \right) \frac{\partial p}{\partial \sqrt{g g_k}} + \frac{\delta_{k5}}{\sqrt{g}} \right] \quad (\text{B.37})$$

Pour  $T_t$ , on obtient :

$$\frac{\partial T_t}{\partial \sqrt{g}g_k} = \frac{1}{\gamma C_v \rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \sqrt{g}g_k} \frac{1}{\sqrt{g}} \left( -\frac{1}{\rho} [p + \rho E] \delta_{k1} - \delta_{k5} \right) \right] \quad (\text{B.38})$$

- Entrée supersonique : Toutes les valeurs propres sont négatives. Par conséquent, on rajoute aux quatre conditions précédentes la condition de pression (B.36)
2. **Paroi glissante adiabatique.** Avec cette condition, on impose que le vecteur vitesse reste tangent à la surface et que le flux de chaleur, soit encore le gradient de  $T_s$ , reste nul. Le cas est assez spécial dans la mesure où trois valeurs propres sont nulles, une seule étant négative. On ne peut alors imposer qu'une condition. C'est la vitesse qui est choisie. L'adiabaticité est indirectement assurée par le fait qu'il n'existe pas de transfert de chaleur dans un fluide parfait.

$$B(\mathbf{q}) = B^*(t) = V^i = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V^i}{\partial \sqrt{g}\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{g}\rho} \begin{pmatrix} -(V^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial t}) \\ \frac{\partial \xi^i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi^i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi^i}{\partial x_3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.39})$$

3. **Paroi adhérente adiabatique.** Toutes les composantes de vitesse sont annulées, de même que le flux de chaleur.
4. **Frontière non-réflexive.** Il s'agit d'une condition un peu spéciale, utilisée essentiellement pour évacuer des ondes parasites générées à l'intérieur du domaine. Toute onde associée à une valeur propre négative est transformée en une onde stationnaire en annulant sa vitesse. Cette condition n'est pas équivalente à une frontière libre, car dans ce dernier cas, il existe toujours une réflexion partielle des ondes venant de l'intérieur du domaine, générant un retour d'information vers le domaine.

En terme formel, la méthode est similaire à toutes les autres. On prend simplement ici  $B = 0$  et  $\frac{\partial B}{\partial \sqrt{g}\mathbf{q}} = 0$ . En conséquence, les matrices  $[P^{1i}]$  et  $[P^{2i}]$  sont construites uniquement avec les vecteurs gauches  $L^i$  associés aux valeurs propres positives, le vecteur  $[P^{3i}]$  est nul.

Cette condition aux limites permet d'éliminer assez rapidement les ondes numériques apparaissant en cours de convergence et aussi d'éviter d'avoir des ondes rentrantes si la condition aérodynamique est mal connue à la frontière. Elle est donc particulièrement utile pour un calcul instationnaire. En contrepartie, l'inconvénient d'une telle condition est qu'on ne peut imposer de grandeur au niveau de la frontière traitée.

5. **Frontière perméable.** La dernière condition couramment employée est la frontière poreuse qui permet de limiter les réflexions d'ondes tout en autorisant une contrainte sur une grandeur. Cette condition est développée comme une combinaison linéaire du code de frontière libre et

de la frontière non réfléchive. On introduit une perméabilité  $\chi$  telle que :

$$\begin{aligned}
 [P^{1i}] &= (1 - \chi) \begin{bmatrix} L_{\lambda^i > 0}^i \\ \frac{\partial B}{\partial \sqrt{g_{\mathbf{q}}}} \end{bmatrix} + \chi(L^i) \\
 [P^{2i}] &= (1 - \chi) \begin{bmatrix} L_{\lambda^i > 0}^i \\ 0 \end{bmatrix} + \chi(L^i) \\
 [P^{3i}] &= (1 - \chi) \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{B(\mathbf{q}) - B^*(t)}{\Delta t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La perméabilité doit être choisie pour obtenir le meilleur compromis possible entre une condition physique et une non-réflexion. Bron [13] rapporte que la valeur  $\chi = 50\%$  est en pratique suffisante pour réduire considérablement les ondes réfléchies.

# Annexe C

## Concepts généraux d'optimisation

### C.1 Généralisation de la dominance

#### C.1.1 Dominance généralisée

La notion de dominance de Pareto, forte ou faible, est de loin la plus pratique à utiliser pour une optimisation. La dominance faible présente l'inconvénient de ne pas favoriser l'optimisation simultanée de tous les critères et peut à ce titre se révéler assez limitante en cours d'optimisation.

Il existe toutefois une définition plus générale de la notion de dominance basée sur l'utilisation de cônes [199]. On définit ainsi une dominance relativement à un cône  $D$ . On rappelle la définition mathématique la plus générale d'un cône :

**Définition C.1 :** [CÔNE]

*Soit  $D$  un ensemble.  $D$  est un cône si*

$$\forall \mathbf{x} \in D, \forall \lambda \geq 0, \lambda \mathbf{x} \in D$$

On définit alors la dominance relativement à un cône  $D$  de  $E_{obj}$  par :

**Définition C.2 :** [DOMINANCE DE CÔNE]

*$\mathbf{x}$  domine  $\mathbf{y}$  au sens du cône  $D$  si et seulement si*

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} \in D - 0$$

L'analogie la plus parlante est peut-être celle de la zone d'influence d'un point sur un écoulement, déterminée par la méthode des caractéristiques. Cette zone se réduit à un cône en aval pour un nombre de Mach supersonique. Le point non dominé étant à l'extrémité du cône. Cette définition est bien entendu tributaire de la définition du cône  $D$  de référence. Cette notion de dominance n'est cependant pas très employée. Elle est souvent restreinte aux méthodes dans lesquelles les préférences de l'utilisateur sont prises en compte dès le départ.

Il existe aussi d'autres concepts d'équilibres mathématiques, basés notamment sur la théorie des jeux. Les deux cas suivants sont donnés pour assurer une certaine exhaustivité à la présentation, dans la mesure où ils n'ont fait l'objet que de très peu d'exemples d'emploi dans la littérature consacrée à l'optimisation.

### C.1.2 Equilibre de Nash

Cette théorie, proposée par Nash [144], fait intervenir la notion d'équilibre entre  $I$  joueurs cherchant tous à optimiser leur gain, tout en tenant compte du comportement des autres joueurs. La notion de joueur découle naturellement du cadre de la théorie des jeux et sera donc conservée par la suite. En termes informels, le problème peut être posé comme suit : chaque joueur cherche à optimiser un critère qui lui est propre (son gain) en choisissant une certaine stratégie, les autres critères étant imposés par les autres joueurs. Quand tous les joueurs ne peuvent plus optimiser leurs objectifs, l'état d'équilibre est atteint. Historiquement, les variables utilisées par cette approche sont des stratégies, mais on peut sans trop de difficultés traduire ces ensembles de stratégies en ensembles d'individus paramétrés.

On commencera par présenter formellement cet équilibre dans le cas où il n'existe que  $I=2$  joueurs. Soit le problème :

$$\text{minimiser } f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad i = 1, 2 \quad (\text{C.1})$$

où  $\mathbf{x}$  (respectivement  $\mathbf{y}$ ) est un élément de l'espace  $E_x$  (resp.  $E_y$ ). On suppose par ailleurs que la minimisation de  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) est effectuée par le joueur correspondant en n'optimisant que les individus de l'espace  $E_x$  (resp.  $E_y$ ).

#### Définition C.3 : [EQUILIBRE DE NASH]

Le couple  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$  (ou "profil de stratégies") est dit à l'équilibre au sens de Nash si et seulement si :

$$\begin{aligned} f_1(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) &= \min_{\mathbf{y} \in E_y} f_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \\ f_2(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) &= \min_{\mathbf{x} \in E_x} f_2(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

Les individus  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$  à l'équilibre au sens de Nash ne sont pas Pareto-optimaux dans un cadre général. L'existence d'un équilibre de Nash peut être facilement démontrée selon [66], mais la détermination de ces équilibres est en revanche beaucoup plus complexe, notamment dans le cas où les critères ne sont pas dérivables. L'une des méthodes les plus efficaces est le couplage de cette approche avec un algorithme évolutionnaire. Cette démarche est schématisée dans la figure (Fig. C.1).

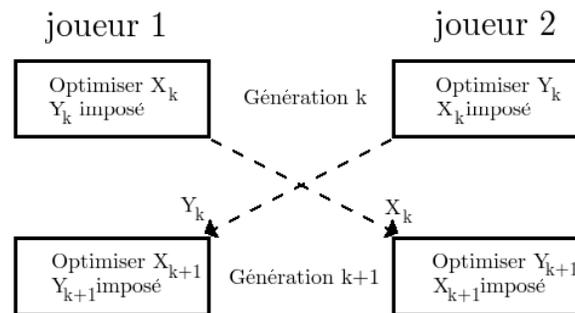


FIG. C.1 – Processus de convergence vers un équilibre de Nash

La notion d'équilibre de Nash fait donc intervenir une séparation entre les différents paramètres en correspondance avec les fonctions critères utilisées. Dans le cas le plus simple à traiter il existe

autant de paramètres que de fonctions critères (i.e.  $P = I$ ), Ainsi chaque joueur a en charge un paramètre à optimiser par rapport à un critère. On remarquera que cette théorie n'est applicable que dans le cas où  $I \leq P$ , dans le cas contraire plusieurs joueurs doivent optimiser simultanément le même paramètre par rapport à des objectifs différents.

Dans les cas licites, la répartition des paramètres entre joueurs se fait de manière arbitraire et peut amener à un biais sur le résultat de l'optimisation. Par exemple, dans le cas où  $I = P = 2$ , une optimisation où le joueur 1 traite  $\mathbf{x}$  et  $f_1$  ne donnera pas la même solution qu'une optimisation où ce même joueur traite  $\mathbf{x}$  et  $f_2$ . Le découpage doit être fait de la manière la plus cohérente possible en fonction de la définition et de la sensibilité de chaque critère aux paramètres, ce dernier point étant a priori, rappelons-le, inconnu dans un cadre général. De ce fait, cette approche reste d'usage très limité dans le domaine de l'optimisation multi-critères sur des cas pratiques. Pour plus de détails sur l'application de ces méthodes, on se reportera à [66] et [65].

### C.1.3 Equilibre de Stackelberg

Dans le cadre général de la théorie des jeux, une autre théorie d'équilibre a été définie par [190] et reprise par [124]. Dénommée *équilibre de Stackelberg*, cette approche hiérarchique fait intervenir une structure asymétrique en introduisant une relation de prééminence entre les différents joueurs. Par exemple, dans un cas à  $I=2$  joueurs, on définit un "leader" et un "suiveur". Le problème est identique à celui défini en C.1. En particulier, on établit ici aussi un partage des fonctions objectifs et des paramètres entre les joueurs. Par convention, le joueur 1 est considéré comme leader, travaillant sur  $f_1$  et  $\mathbf{x}$ .

#### Définition C.4 : [EQUILIBRE DE STACKELBERG]

Le couple  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  est dit à l'équilibre au sens de Stackelberg si et seulement si :

$$f_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{x} \in E_x} f_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}^*(\mathbf{x}))$$

où  $\bar{\mathbf{y}}^*(\mathbf{x})$  est le résultat de l'optimisation :

$$f_2(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}^*) = \min_{\mathbf{y} \in E_y} f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x} \text{ imposé par le leader}$$

Cette définition fait clairement ressortir la subordination du paramètre  $\mathbf{y}$  à  $\mathbf{x}$ . En particulier, on comprend aisément que, si l'ordre des paramètres ou des fonctions objectifs est inversé, la solution à l'équilibre sera modifiée. Cette approche est de fait très rarement employée.

## C.2 Techniques pour l'optimisation mono-objectif

Comme cela a été montré précédemment, le cas le plus général de l'optimisation est un cas multi-objectifs avec des critères conflictuels. Néanmoins, cette configuration ne permet en général que d'obtenir un ensemble de solutions qui sont toutes optimales au sens de Pareto, et ce en raison de l'existence même de plusieurs critères. Pour des raisons pratiques de choix ou d'utilisation de méthodes, il peut parfois être utile de ne considérer qu'un seul critère afin de ramener cette population Pareto-optimale à un seul individu (ou au moins un nombre très limité), ce qui est réalisable en restreignant le nombre de critères considérés à un. On dispose alors d'un problème d'optimisation mono-objectif, ce qui constitue un cas particulier des optimisations. C'est de loin l'un des cas les plus intuitifs et facilement compréhensibles parmi les différents problèmes d'optimisation. Il permet en outre de montrer plusieurs techniques de réduction de la dimensionnalité avec leurs avantages et inconvénients.

$$(P_{mono}) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{tel que} \quad g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, J \\ \quad \quad \quad h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{avec} \quad x_p^L < x_p < x_p^R \quad p = 1, \dots, P \end{array} \right. \quad (C.2)$$

On ne s'attardera pas sur les solutions de ce genre de problème, qui revient simplement à trouver les extrema d'une fonction mathématique, mais on soulignera toutefois la possibilité de trouver plusieurs solutions optimales, comme c'est par exemple le cas pour  $f(x) = x^4 - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . De la même manière, on écartera le problème des optima locaux en remarquant que ces solutions particulières ne sont Pareto-optimales que sur des sous-ensembles de l'espace paramétrique réalisable. Comme cela a été montré dans la section 4.2.2, un problème multi-objectifs peut naturellement dégénérer vers un problème mono-objectif si l'ensemble des critères considérés ne présente pas de variations contradictoires. On peut presque parler dans cette situation de problème mal posé dans la mesure où la donnée d'une seule fonction critère aurait suffi.

Le cas le plus intéressant se présente lorsqu'il est nécessaire, en raison de l'utilisation de certaines méthodes d'optimisation (traitées plus tard), de réduire artificiellement le nombre de critères d'un problème réellement multi-objectifs. Cette démarche a fait l'objet des nombreux développements qui suivent.

### C.2.1 Fonction objectif agrégée

L'idée la plus simple dans un tel cas de figure est de créer une nouvelle fonction objectif par combinaison linéaire des fonctions initiales. On définit ainsi

$$f_{\text{agrégée}}(\mathbf{x}) = \sum_i \omega_i f_i(\mathbf{x})$$

Les coefficients de pondérations  $\omega_i$  sont fixés par l'utilisateur de manière arbitraire. Cette pratique présente cependant plusieurs inconvénients majeurs.

Le premier point sur lequel ces méthodes achoppent vient de leur construction même : on considère dans une même relation des fonctions objectifs qui peuvent être d'ordres de grandeur très différents. Afin de construire une fonction agrégée pertinente, il est donc nécessaire de normaliser ces fonctions au travers de la pondération. Cependant, il est rare de connaître dès le début d'une optimisation les plages sur lesquelles varieront les critères, ce qui rend la normalisation a priori très difficile pour l'utilisateur.

La deuxième limite à l'utilisation de cette méthode est liée au caractère arbitraire de la pondération choisie. En effet, on comprend facilement qu'une modification de la pondération amène la modification de la solution optimale trouvée pour un même problème initial. On montre en particulier [28] que, pour un problème P tel que défini en (4.1), la pondération doit vérifier :

$$\forall i, \omega_i > 0 \quad (C.3)$$

afin de garantir que la solution soit Pareto-optimale. Cette contrainte supplémentaire détermine la position de la (des) solution(s) optimale(s) dans l'espace objectif. La solution étant par essence

Pareto-optimale, elle se situe quelque part sur le front de Pareto. La localisation précise est donnée par le contact entre ce front et une surface tangente déterminée par la pondération. Par exemple, dans un cas initialement bi-objectifs, on peut écrire

$$f_2(x_{optimal}) = -\frac{\omega_1}{\omega_2}f_1(x_{optimal}) + \frac{1}{\omega_2}f_{pond}(x_{optimal}) \quad (C.4)$$

Comme on cherche à minimiser  $f_{pond}$ , on voit que la recherche d'un individu optimal revient à déplacer dans le plan  $(f_1, f_2)$  une droite de pente  $-\frac{\omega_1}{\omega_2}$  dont l'ordonnée à l'origine vaut  $f_{pond}$ . Comme  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont tous deux positifs, cela revient donc à décaler la droite vers les faibles valeurs de  $f_1$ . La limite basse, c'est à dire la valeur optimale, est atteinte quand cette droite est tangente à la frontière de l'ensemble réalisable en un nombre fini de points. On note au passage que la solution trouvée par cette méthode est une solution Pareto-optimale dans la mesure où cet élément de frontière est le front de Pareto. Ce résultat est illustré sur la figure (Fig. C.2).

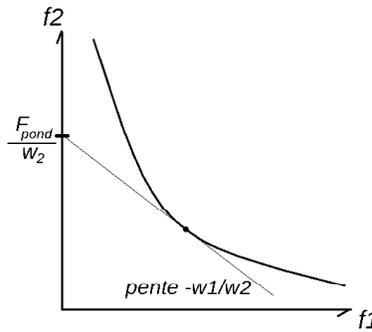


FIG. C.2 – Localisation de la solution - Fonction objectif pondérée

De cette manière, la principale remarque que l'on puisse faire est qu'il faut mener un grand nombre d'optimisations en changeant à chaque fois la pondération afin d'espérer décrire de manière fidèle le front de Pareto en faisant "rouler" la tangente sur la frontière. Dans un effort pour corriger ce défaut, [70] propose d'utiliser la pondération comme paramètre dans une approche de type génétique afin de trouver les meilleurs couples (pondération + individus) possibles. Cette approche n'a néanmoins pas connu de développements importants par la suite.

Le troisième point sensible est l'impossibilité de reconstruire des fronts ayant des parties concaves. En effet, la relation (C.4) n'a vraiment de sens que lorsque la surface définie par la pondération a atteint une position de tangence avec l'ensemble des solutions réalisables  $E_{obj}$ . Dans le cas contraire, i.e. si la surface intersecte cet ensemble, des points intérieurs au domaine, non optimaux par définition, et des points sur le front de Pareto sont représentés par une même valeur  $f_{agrégée}$  qui n'a donc pas de signification quant à l'optimalité. On ne pourra donc utiliser cette approche géométrique que dans le cas particulier de la tangence. Dans ces conditions, il faut exclure toute zone de concavité dans la mesure où la courbure de la frontière implique alors que la tangente soit intérieure au domaine.

La figure (Fig. C.3) illustre ce phénomène dans un cas bidimensionnel  $I=2$ . La détermination d'une solution de la zone concave du front de Pareto comprise entre les points A et B est impossible, puisque toute tangente en un point situé entre ces deux repères intersectera l'ensemble  $E_{obj}$ . Ces méthodes ne sont en particulier pas adaptées à des fronts de Pareto discontinus comme ceux illustrés

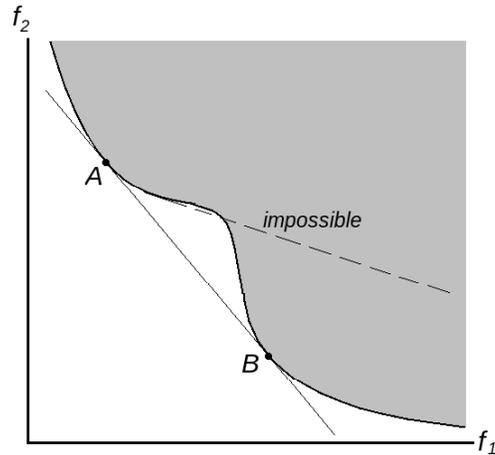


FIG. C.3 – Reconstruction d'une zone concave - Fonction Objectif Pondérée

en figure (Fig. 4.3). Or il est en général impossible de prédire à l'avance la forme du front dans un cas pratique.

Enfin, ces méthodes sont aussi limitées aux cas où la dimension de l'espace objectif initial est faible, la donnée d'une pondération pouvant se révéler très fastidieuse pour des espaces de grandes dimensions.

Cette approche, simple et intuitive, doit par conséquent être restreinte dans la mesure du possible à des cas d'optimisation assez réguliers pour lesquels la convexité de l'ensemble des solutions possibles dans l'espace objectif est à assurer. Il est en outre souhaitable de disposer dès le départ d'une bonne notion des plages de variation des objectifs.

### C.2.2 Méthode par contrainte $\varepsilon$

Pour éviter les nombreuses limitations induites par l'agrégation des fonctions objectifs, Haimès et al. [69] proposent une autre technique basée sur la transformation de critères en contraintes. Dans cette approche, le problème devient :

$$(P_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{ll} \text{minimiser} & f_c(\mathbf{x}) \\ \text{tel que} & f_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, I \quad i \neq c \\ & g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, J \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{avec} & x_p^L < x_p < x_p^R \quad p = 1, \dots, P \end{array} \right.$$

Les contraintes  $\varepsilon$  sont bien évidemment imposées par l'utilisateur. Cela revient à partitionner la zone de recherche dans l'espace des objectifs. On montre ici aussi ([28, 132]) que, lorsqu'elle existe, la solution d'un tel problème est Pareto-optimale quel que soit le vecteur  $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$  utilisé. La figure (Fig. C.4) illustre le résultat obtenu par cette méthode pour plusieurs valeurs de  $\varepsilon_1$ ,  $f_2$  étant gardée comme seul objectif.

Cette méthode ne pose pas de problème particulier, même en cas de concavité de l'ensemble des configurations dans l'espace des objectifs, ce qui constitue une avancée notable par rapport aux fonctions agrégées. Cette approche permet même de capturer des fronts de Pareto discontinus. On

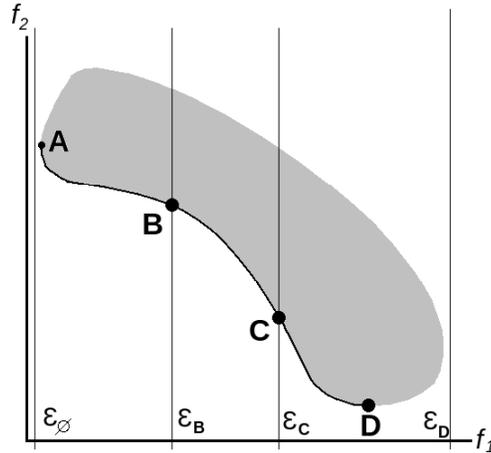


FIG. C.4 – Détermination des optima - Méthode par contrainte

voit sur la figure (Fig. C.4) que pour certains optima particuliers, ceux marquant une limite à droite du front (ici le point D), il existe une infinité de valeurs de  $\varepsilon$  pour lesquelles ils seront solutions de l'optimisation :  $\forall \varepsilon \geq f_1(x_D)$ . A l'inverse, pour les optima marquant la limite à gauche du front (point A), il n'existe qu'une seule valeur de  $\varepsilon$  permettant de les capturer. Ce problème est dû à l'asymétrie introduite par la relation de supériorité liée aux nouvelles contraintes. Une alternative efficace pour le contourner est de faire à la fois des optimisations en ne gardant que  $f_1$  comme objectif, et d'autres en ne gardant que  $f_2$ .

Cependant, cette méthode nécessite aussi un grand nombre d'optimisations en faisant varier le vecteur  $\varepsilon$  afin de pouvoir capturer plus ou moins fidèlement le front de Pareto. S'il n'existe pas de problème de normalisation comme dans la méthode par agrégation, il convient néanmoins de connaître plus ou moins grossièrement les plages de variations des objectifs afin de fournir des contraintes pertinentes ; un  $\varepsilon$  trop grand donnera toujours la même solution ce qui ne présente pas vraiment d'intérêt. En outre, cette approche ne garantit pas l'existence d'une solution, notamment pour des valeurs trop petites de contraintes.

Enfin, comme la méthode précédente, cette approche n'est efficacement applicable qu'aux cas avec une faible dimension dans l'espace objectif, afin de limiter la phase de saisie du vecteur contrainte par l'utilisateur.

### C.2.3 Méthode des distances pondérées

Il s'agit d'une méthode un peu particulière dans la mesure où elle fait intervenir la distance entre les individus évalués et un individu de référence spécifié par l'utilisateur. On considère ainsi le problème :

$$(P_{distpond}) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \quad (\sum_{i=1}^I \omega_i (f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}_{\text{ref}}))^e)^{1/e} \\ \text{tel que} \quad g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, J \\ \quad \quad h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{avec} \quad x_p^L < x_p < x_p^R \quad p = 1, \dots, P \end{array} \right.$$

avec les  $\omega_i$  et  $e$  des constantes imposées par l'utilisateur.

Afin d'obtenir une solution optimale, il est nécessaire de prendre un point de référence  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  en dehors de la zone réalisable, le cas contraire se soldant par la découverte de l'individu de référence, non Pareto-optimal par essence.

**Remarque** Il existe une version un peu plus spécifique de cette approche, connue sous le nom de *critère global* qui peut être formulée comme suit :

$$(PCG) \left\{ \begin{array}{ll} \text{minimiser} & (\sum_{i=1}^I |f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}_{\text{ref}})|^e)^{1/e} \\ \text{tel que} & g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, J \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{avec} & x_p^L < x_p < x_p^R \quad p = 1, \dots, P \end{array} \right.$$

Dans ce cas, les seules valeurs critiques fournies par l'utilisateur sont l'individu de référence et l'exposant  $e$ . Pour  $e = 2$ , il s'agit ni plus ni moins d'un problème de minimisation de distance euclidienne dans l'espace des objectifs. Dans le cas  $e = +\infty$ , le problème se réduit à :

$$\text{minimiser } \max_i |f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}_{\text{ref}})|$$

La formulation la plus classiquement utilisée dans la littérature pour l'approche en distances pondérées fait intervenir la solution idéale, soit encore l'individu réalisant pour chaque objectif le meilleur niveau relevé au sein de la population Pareto-optimale. De facto, cette dernière définition ne peut s'appliquer qu'à un post-traitement de la population Pareto-optimale, interdisant ainsi une utilisation en cours de convergence.

En outre, une fois de plus la présence d'une pondération arbitrairement fixée et le choix de l'individu de référence sont la source de possibles biais. Ces méthodes sont cependant réputées capables de capter (dans des conditions adéquates de choix des paramètres) n'importe quel front de Pareto [12].

On peut en dernier lieu remarquer que la méthode de fonction agrégée n'est qu'un cas très particulier de ces méthodes (sous certaines conditions), à savoir le cas où  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  est choisi de manière à ce que toutes les fonctions objectifs associées soient nulles (l'existence d'un tel point n'est absolument pas garantie avec les hypothèses utilisées : elle suppose en particulier que les  $f_i$  puissent effectivement être nulles en un certain nombre de points) et l'exposant  $e = 1$ .

## C.2.4 Conclusion sur les techniques mono-objectif

Les méthodes présentées ici donnent un aperçu des grandes approches utilisées pour réduire les dimensions de l'espace objectif et/ou réduire le nombre de solutions obtenues en fin d'optimisation. Il existe cependant d'autres méthodes (cf. [12, 28]), qui découlent en partie des précédentes, mais aucune de ces méthodes n'est pleinement satisfaisante dans la mesure où toutes introduisent des biais, plus ou moins importants, dans l'optimisation et peuvent limiter la détection des optima à certaines parties du front de Pareto. Il convient donc d'éviter, autant que possible, d'utiliser de telles méthodes, pour garder le caractère général de l'optimisation. Les problèmes de choix peuvent être traités de manière séparée au moyen de techniques de visualisation et de post-traitement adaptées.

# Annexe D

## Méthodes d'optimisation directes

### D.1 Méthodes de descente usuelles

On présentera ici deux des méthodes directes les plus classiques aujourd'hui. Ce panorama n'est cependant pas exhaustifs. Il existe de nombreuses autres techniques dans la littérature [1].

#### D.1.1 Méthode de la plus forte pente (steepest-descent)

Il s'agit de la méthode la plus simple. La direction de descente est déterminée de façon à maximiser le gain sur la fonction objectif. Au voisinage d'un point  $\mathbf{x}$ , on peut écrire le développement en série de Fourier suivant :

$$f(\mathbf{x} + \vec{\delta}) = f + \Delta f \approx f(\mathbf{x}) + \vec{\nabla} f \cdot \vec{\delta} + O(\|\vec{\delta}\|^2)$$

Lorsque  $\|\vec{\delta}\|$  tend vers 0, on a alors

$$\Delta f \approx \vec{\nabla} f \cdot \vec{\delta}$$

En conséquence, pour un pas de taille  $\|\vec{\delta}\|$  donné, la descente sera maximale lorsque

$$\vec{\delta} = -\lambda \vec{\nabla} f$$

où  $\lambda$  est un réel positif.

La méthode de la plus forte pente se base sur une direction de recherche colinéaire au gradient de la fonction objectif, mais de sens opposé. Dans sa version la plus générale, l'algorithme de recherche en plus forte pente peut s'écrire sous la forme itérative suivante, où l'indice  $k$  désigne le numéro de l'itération :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda \vec{\nabla} f \Big|_{\mathbf{x}_k}$$

Il reste alors une constante  $\lambda$  à spécifier. Plusieurs points de vue existent dans la littérature. Selon [91, 185],  $\lambda$  peut être imposé par l'utilisateur comme une constante. Cette valeur doit néanmoins être réglée afin d'assurer (1) une convergence (2) en des temps raisonnables. A titre d'exemple, si  $\lambda$  est trop petit, la progression se fera avec de petits pas, ce qui demandera donc un grand nombre d'itérations et donc d'évaluations. A l'opposé, si  $\lambda$  est choisi trop grand, on peut parcourir très rapidement l'espace paramétrique avec le risque de sauter un optimum dans le cas d'un problème multimodal, comme schématisé sur la figure suivante (cas I=P=1).

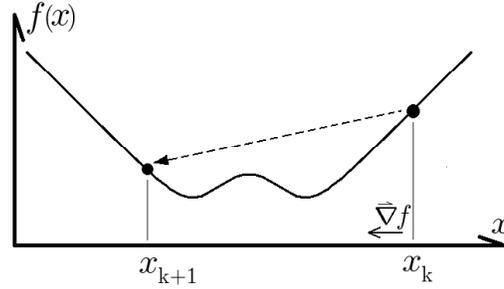


FIG. D.1 – Effet d'une descente trop forte - méthode de la plus forte pente

En conséquence, il peut être nécessaire de faire des essais préalables et potentiellement coûteux en temps.

A l'inverse, [1] préconise de traiter  $\lambda$  via un sous problème d'optimisation au sein d'une approche itérative :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda_k \vec{\nabla} f \Big|_{\mathbf{x}_k} \text{ avec } \lambda_k \text{ qui minimise } f(\mathbf{x}_k - \lambda_k \vec{\nabla} f \Big|_{\mathbf{x}_k})$$

En pratique, la recherche du  $\lambda_k$  optimum à chaque itération peut se faire avec une approche en lignes : le sous-problème précédent revient en effet à trouver la valeur de  $\lambda_k$  telle que le point  $\mathbf{x}_k - \lambda_k \vec{\nabla} f \Big|_{\mathbf{x}_k}$  soit à la tangence entre une iso-surface de  $f$  et la droite de direction  $\vec{\nabla} f \Big|_{\mathbf{x}_k}$  passant par  $\mathbf{x}_k$ . En utilisant cette méthode, on peut démontrer que la trajectoire de recherche dans l'espace paramétrique est un ensemble de segments orthogonaux. Cette méthode est plus pratique du point de vue de l'utilisateur puisqu'elle ne demande pas de réglage. En revanche, la résolution du sous-problème visant à trouver  $\lambda_k$  peut s'avérer coûteuse en temps.

La recherche par lignes peut être évitée si on dispose de la matrice Hessienne  $H$  de  $f$  (matrice formée par les dérivées secondes de  $f$ ). On peut alors écrire que :

$$f(\mathbf{x}_k - \lambda_k \vec{\nabla} f) \approx f(\mathbf{x}_k) - (\lambda_k \vec{\nabla} f^T) \cdot \vec{\nabla} f + \frac{1}{2} \lambda_k^2 \vec{\nabla} f^T H_k \vec{\nabla} f \quad (\text{D.1})$$

soit encore, en dérivant par rapport à  $\lambda_k$  :

$$\frac{df(\mathbf{x}_k - \lambda_k \vec{\nabla} f)}{\lambda_k} \approx -\vec{\nabla} f^T \cdot \vec{\nabla} f + \lambda_k \vec{\nabla} f^T H_k \vec{\nabla} f$$

Comme on cherche à minimiser  $f(\mathbf{x}_k - \lambda_k \vec{\nabla} f)$  par rapport à  $\lambda_k$ , l'égalité précédente vaut donc 0 et on peut alors écrire :

$$\lambda_k = \frac{\vec{\nabla} f^T \cdot \vec{\nabla} f}{\vec{\nabla} f^T H_k \vec{\nabla} f}$$

Le problème s'est reporté sur la détermination de la matrice Hessienne qui n'est pas forcément évidente. [1] propose une solution qui évite le calcul de cette matrice. On prend  $\bar{\lambda}$  comme une estimation de  $\lambda_k$ , pour laquelle on évalue  $\bar{f} = f(\mathbf{x}_k - \bar{\lambda} \vec{\nabla} f)$ . En remplaçant  $f(\mathbf{x}_k - \lambda_k \vec{\nabla} f)$  par  $\bar{f}$  dans la relation (D.1), on peut ainsi trouver une approximation du terme  $\vec{\nabla} f^T H_k \vec{\nabla} f$ . La principale limite pratique est que l'approximation nécessite l'évaluation de l'objectif en un autre point, ce qui, pour des problèmes en mécanique des fluides, peut s'avérer particulièrement long.

Il existe aussi des approches "mixtes" qui utilisent un  $\lambda$  imposé par l'utilisateur mais augmenté d'une relaxation variable introduite via une redéfinition du gradient. Ces méthodes ne conviennent cependant qu'à certains problèmes d'optimisation assez spécifiques (principalement une recherche de trajectoire) et ne seront donc pas développées ici. On se référera à [91] pour plus de détails.

### D.1.2 Méthode de Newton

La méthode précédente se basait sur un développement de la fonction objectif en série de Taylor limité à l'ordre 1, justifiant par la même le nom de méthode du premier ordre. La méthode de Newton, qui se classe parmi les méthodes du second ordre, fait intervenir aussi les dérivées secondes du critère. On écrit donc le développement en série de Taylor suivant :

$$f(\mathbf{x} + \vec{\delta}) \approx f(\mathbf{x}) + \sum_{p=1}^P \frac{\partial f}{\partial x_p} \delta_p + \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} \delta_p \delta_q \quad (\text{D.2})$$

On suppose alors que  $\vec{\delta}$  minimise  $f(\mathbf{x} + \vec{\delta})$ . En conséquence, l'expression précédente dérivée par rapport à  $\vec{\delta}$  est nulle. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \forall k \in [1, \dots, P], \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \delta_k} \right|_{\mathbf{x} + \vec{\delta}} &\approx \sum_{p=1}^P \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial \delta_p}{\partial \delta_k} + \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^P \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} \left( \frac{\partial \delta_p}{\partial \delta_k} \delta_q + \frac{\partial \delta_q}{\partial \delta_k} \delta_p \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{p=1}^P \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k} \delta_p \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

L'équation (D.3) peut aussi s'écrire sous forme matricielle comme :

$$\vec{\delta} = -H^{-1} \vec{\nabla} f \quad (\text{D.4})$$

où  $H$  est la matrice Hessienne de  $f$  évaluée en  $\mathbf{x}$ . Cette matrice est définie par :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_P \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_P^2} \end{bmatrix}$$

Cette méthode tire son nom de l'approche proposée par Newton pour la recherche des racines d'une fonction  $F$ . Elle équivaut en effet à déterminer les points en lesquels le gradient s'annule. Canoniquement, l'approche itérative proposée par Newton se définit par :

$$x_{it+1} = x_{it} - F(x_{it})/F'(x_{it})$$

Dans un cas monodimensionnel ( $P=1$ ),  $x_{it+1}$  est déterminée comme l'intersection de la tangente à la courbe  $F(x)$  en  $x_{it}$  avec l'axe des abscisses. En particulier, dans le cas où  $F$  est linéaire,  $x_{it+1}$  correspond bien à la racine de la fonction. En conséquence, pour les problèmes d'optimisation mono-paramétrique, l'utilisation de la méthode de Newton permet de trouver l'optimum d'une fonction objectif quadratique en une seule itération. On notera de plus que les relations (D.2) et (D.3) sont

exactes dans ce cas précis. Plus généralement, ces approches ont la propriété de trouver l'optimum d'une fonction quadratique en  $P$  pas, ce qui les rend particulièrement attractives.

La plus grosse difficulté émergeant à ce niveau est la détermination de la matrice  $H$ . On supposera d'abord que  $f$  est une fonction continue et deux fois dérivable. Dans nombre de cas, cette matrice peut être très difficile d'accès. Il existe un grand nombre de techniques basées sur une approximation de  $H$ . On parle alors de méthodes **quasi-Newton**. En premier lieu,  $H$  peut être singulière. Il faut alors user de techniques particulières afin de disposer d'une matrice approchée  $H^*$  qui soit définie positive. Une alternative proposée par [1] consiste à remplacer  $H$ , lorsqu'elle est singulière, par la matrice identité  $I_P$ . On obtient ainsi une dégénérescence de la méthode vers celle de la plus forte pente, insensible à ce genre de problème.

Un autre problème découle des dimensions de cette matrice ( $P \times P$ ) qui peut être un handicap sérieux, notamment lors des cas fortement multi-paramétriques. L'évaluation et l'inversion de  $H$  deviennent alors les phases limitantes en terme de vitesse de calcul et de puissance informatique requise.

## D.2 Gestion des contraintes

Nous allons maintenant détailler la manière de prendre en compte les contraintes du problème d'optimisation avec une méthode directe. On notera d'abord que la procédure déterministe permet un traitement fin des contraintes, puisqu'il est toujours possible de calculer une direction et une amplitude de changement qui soient cohérentes avec les différentes contraintes du problème, de sorte que le résultat de ce changement vérifie ces contraintes. Il résulte de cette approche très mathématique du problème un certain nombre de techniques utilisées pour "bien poser" le cas d'optimisation. Une fois la reformulation effectuée, le problème contraint est ensuite traité par une technique adaptée.

### D.2.1 Classification des contraintes et des problèmes

Dans le problème général mono-objectif (C.2), il existe deux types de contraintes possibles, écrites respectivement comme des égalités ( $h_k$ ) et des inégalités ( $g_j$ ). Quelles que soient les "vraies" contraintes  $\gamma_j(\mathbf{x}) \geq b_j$  et  $\theta_k(\mathbf{x}) = c_k$  du problème, il est toujours possible de les reformuler sous forme canonique  $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$  et  $h_k(\mathbf{x}) = 0$ .

Si le traitement d'une égalité ne pose pas de difficulté particulière, les inégalités doivent être considérées plus prudemment. Pour une solution  $\mathbf{x}$  quelconque, on distinguera ainsi les deux cas suivants [1] :

- La contrainte est "active", c'est à dire que  $g_j(\mathbf{x}) = 0$ . Dans ce cas, le pas de la méthode de descente devra directement prendre en compte cette contrainte.
- La contrainte est "inactive",  $g_j(\mathbf{x}) > 0$ . La contrainte n'influe pas directement sur le pas de descente puisqu'il est toujours possible de trouver un  $\delta$  tel que  $g_j(\mathbf{x} + \delta) > 0$ . On peut en revanche vérifier a posteriori que la modification n'induit pas une violation de la contrainte, auquel cas il faut alors modifier légèrement la descente.

On classera aussi les problèmes en fonction de leur complexité. En effet, selon que la fonction objectif et les contraintes sont de plus ou moins haut degré, on utilisera des techniques différentes. On

parle ainsi de *programmation linéaire* (linear programming) quand toutes les fonctions traitées sont des expressions linéaires des paramètres. De même, on parlera de *programmation quadratique* pour des fonctions quadratiques. La programmation linéaire a fait l'objet de développements spécifiques. La méthode du simplexe de Dantzig [24] est connue pour donner de très bons résultats dans ce cas. Pour les configurations quadratiques, ou des cas qui peuvent être approchés par une modélisation quadratique, les algorithmes du type "sequential quadratic programming" (SQP) [1] sont aussi couramment utilisés.

## D.2.2 Reformulation des contraintes

On traitera ici des différentes techniques permettant de bien poser le problème d'optimisation sous contraintes. Dans un premier temps, on s'appliquera au traitement des inégalités. Ces dernières créent une difficulté de traitement évidente en raison de la dualité de comportement selon leur niveau d'activité. Pour unifier leur traitement, la solution la plus courante consiste à les transformer en contraintes égalitaires. On utilise pour ce faire des variables annexes ("slack variables")  $\mathbf{y}$  :

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{x}) \geq 0 &\Leftrightarrow g_j(\mathbf{x}) - (y_j)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \hat{g}_j(\mathbf{x}, y_j) = 0 \end{aligned}$$

De cette manière, toutes les inégalités peuvent être remplacées et le problème (C.2) peut alors s'écrire :

$$(P_{mono-2}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{minimiser} & f(\hat{\mathbf{x}}) = f(x_1, \dots, x_P) \\ \text{tel que} & \hat{g}_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0, \quad j = 1, \dots, J \\ & h_k(\hat{\mathbf{x}}) = 0, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{avec} & x_p^L < x_p < x_p^R \quad p = 1, \dots, P \\ & \hat{\mathbf{x}} = [x_1, \dots, x_P, y_1, \dots, y_J]^T \end{array} \right. \quad (D.5)$$

Il reste encore à modifier les contraintes portant directement sur la définition des paramètres. Ce sont des contraintes correspondant à un intervalle ou à une demi-droite. Dans le premier cas, la solution consiste à remplacer le paramètre  $x_p$  concerné par une fonction analytique  $\chi_p$  d'une variable  $e_p$  quelconque. Par exemple, on a :

$$x_p^L < x_p < x_p^R \Leftrightarrow x_p = x_p^L + 0.5(x_p^R - x_p^L) [1 + \tanh(e_p)], \quad e_p \in \mathbb{R}$$

La fonction  $\tanh$  est bien adaptée mais n'est pas exclusive. Des fonctions de type  $\text{atan}$  et plus généralement toute fonction variant continûment à valeur dans un espace borné sera acceptable. Pour une contrainte de type demi-droite, la modification est encore plus simple. On a par exemple :

$$x_p^L < x_p \Leftrightarrow x_p = e^{(e_p)} + x_p^L$$

Au final, le problème mono-objectif reformulé peut s'écrire :

$$(P_{mono-3}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{minimiser} & f(\check{\mathbf{x}}) = f(x_1, \dots, x_P) \\ \text{tel que} & \hat{g}_j(\check{\mathbf{x}}) = 0, \quad j = 1, \dots, J \\ & h_k(\check{\mathbf{x}}) = 0, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{avec} & \check{\mathbf{x}} = [e_1, \dots, e_P, y_1, \dots, y_J]^T \\ & x_p = \chi_p(e_p), \quad p = 1, \dots, P \end{array} \right. \quad (D.6)$$

Ainsi posé, le problème ne comporte plus une seule inégalité. Dans la suite, pour simplifier la notation les  $\hat{g}_j$  ne seront plus distinguées des  $h_k$ . Le problème peut alors être représenté symboliquement sous forme de système matriciel.

$$(P_{mono-3}) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \quad F.\check{\mathbf{x}} \\ \text{tel que} \quad H.\check{\mathbf{x}} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{D.7})$$

Une fois le problème des inégalités évacué, on peut chercher à simplifier l'optimisation, le cas limite étant bien entendu une optimisation sans contrainte. La seule méthode utilisée est l'élimination des paramètres au travers des différentes relations de contrainte.

Si par exemple on a :

$$h_k(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_3 = 0$$

on peut éliminer de l'optimisation le paramètre  $x_3$  en imposant que  $x_3 = -2x_1$ , la contrainte étant alors naturellement assurée. Si les contraintes sont toutes linéaires et si  $H$  est non singulière, il est possible de supprimer complètement les contraintes du problème. Néanmoins dans le cas général, cette reformulation doit se faire au cas par cas, elle peut même être impossible.

### D.2.3 Multiplicateurs de Lagrange

Dans le cas où des contraintes subsisteraient, la méthode la plus classique pour mener l'optimisation reste l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. Cela revient à écrire le problème d'optimisation sous la forme :

$$\text{minimiser } f_{Lagrange}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_K \lambda_k h_k(\mathbf{x}) \quad (\text{D.8})$$

On peut s'assurer de l'équivalence avec (D.7) en remarquant que pour la population faisable, on a bien  $h_k(\mathbf{x}) = 0$ , donc le minimum de la fonction objectif sera bien trouvé. On recherche alors l'optimum parmi les solutions de l'équation dérivée :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{(\mathbf{x}, \lambda)} f_{Lagrange}(\mathbf{x}, \lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = -\sum_K \lambda_k \vec{\nabla}_{\mathbf{x}} h_k(\mathbf{x}) \\ \vec{\nabla}_{\lambda} f_{Lagrange} = \{0\} + \left\{ \begin{array}{l} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_K(\mathbf{x}) \end{array} \right\} = \vec{0} \end{array} \right. & \quad (\text{D.9}) \end{aligned}$$

On retrouve ici aussi que l'optimum, s'il existe, vérifiera les contraintes imposées. L'intérêt des multiplicateurs de Lagrange est la simplification extrême du problème. Si on considère l'optimisation au travers du *lagrangien*  $f_{Lagrange}$ , le problème devient alors non-contraint et on peut donc appliquer sans restriction les techniques de recherches précédentes. L'optimum contraint  $\mathbf{x}^*$  est alors associé à un optimum non contraint  $[\mathbf{x}^*, \lambda^*]$ .

Il y a deux manières d'obtenir un point critique pour le lagrangien.

- Soit  $\vec{\nabla} f$  et tous les  $\vec{\nabla} h_k$  sont linéairement indépendants, ce qui implique que les  $\lambda_k$  sont tous nuls et donc  $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ .

- Soit il existe au moins un  $h_\kappa$  tel que le gradient de  $f$  et de  $h_\kappa$  sont colinéaires. Dans ce cas, un point critique (et donc un optimum) sera caractérisé par la tangence entre une iso-surface de  $f$  et l'hypersurface normale à la combinaison linéaire des  $\vec{\nabla}h_\kappa$ . Cette deuxième version est la plus souvent utilisée dans la littérature pour illustrer les multiplicateurs de Lagrange.

Le vecteur nul  $\vec{\nabla}f = \vec{0}$  étant "colinéaire" à tout autre vecteur, le deuxième cas peut faire office de représentation générale.

## D.2.4 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Les multiplicateurs de Lagrange permettent de définir un certain nombre de conditions nécessaires à l'existence d'un optimum. La version la plus générale, applicable aux optimisations présentant des inégalités est connue sous le nom de conditions de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT).

### Définition D.1 : [KARUSH-KUHN-TUCKER]

Soit un problème d'optimisation défini comme (C.2). Si  $\mathbf{x}^*$  est un optimum de ce problème, on a :

$$h_k(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall k \in [1, \dots, K]$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) \geq 0 \quad \forall j \in [1, \dots, J]$$

il existe des  $\lambda_k$ ,  $k \in [1, \dots, K]$  et  $\mu_j$ ,  $j \in [1, \dots, J]$  tel que

$$\vec{\nabla}f(\mathbf{x}^*) = - \sum_K \lambda_k \vec{\nabla}h_k(\mathbf{x}^*) - \sum_J \mu_j \vec{\nabla}g_j(\mathbf{x}^*)$$

avec :

$$\lambda_k h_k(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall k \in [1, \dots, K]$$

$$\mu_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall j \in [1, \dots, J]$$

et

$$\mu_j \geq 0 \quad \forall j \in [1, \dots, J]$$

Les dernières conditions permettent de traiter de manière identique les contraintes actives et inactives. Cependant rappelons, une fois encore, que ces conditions sont nécessaires mais pas suffisantes pour obtenir un optimum. L'utilisation de ces conditions n'est pas restreinte aux seules méthodes directes puisqu'il existe des applications sur des méthodes d'ordre 0, les conditions KKT étant utilisées à ce moment là pour vérifier a posteriori que les individus trouvés soient bien optimaux.

## D.3 Calcul des gradients

Comme illustré précédemment, les méthodes directes s'appuient toutes sur (au moins) le gradient de la fonction objectif. Cependant, il est rare de disposer de l'expression analytique de cette dernière et le gradient doit donc être calculé numériquement au cours de la convergence. A l'heure actuelle, on peut utiliser plusieurs techniques pour effectuer ce calcul.

### D.3.1 Evaluation par différences finies

Comme pour la résolution des équations du mouvement d'un fluide, il s'agit de l'une des approches les plus naturelles du calcul de gradient. On retrouve donc la formule usuelle :

$$\frac{\partial f}{\partial x_p} \approx \frac{f(\mathbf{x} + \vec{\delta}_p) - f(\mathbf{x})}{\|\vec{\delta}_p\|}$$

où  $\vec{\delta}_p = [0, \dots, 0, \delta_p, 0, \dots, 0]$  est une perturbation élémentaire portant uniquement sur le  $p^{\text{i-ème}}$  paramètre. Le principal inconvénient de cette formulation est le besoin de disposer de  $P+1$  évaluations afin de calculer le gradient. Dans un problème standard de mécanique des fluides, le temps de calcul nécessaire pour effectuer chaque évaluation est généralement long, de quelques heures à quelques jours, rendant de fait cette approche inenvisageable pour des cas comportant beaucoup de paramètres.

Dans la plupart des optimisations, il existe au moins un critère défini au moyen d'une intégrale spatiale. A titre d'exemple, on peut évoquer un rendement, un coefficient de traînée ou de portance, etc. La dérivation de ce critère est alors assez délicate et peut être effectuée de deux manières.

### D.3.2 Calcul du gradient par état adjoint

Le calcul du gradient par adjoint tire son origine de la théorie du contrôle de systèmes régis par des équations différentielles. Il s'agit d'une approche assez mathématique permettant de calculer le gradient d'une fonction définie sur un tel système avec un coût informatique marginal comparativement à l'évaluation de ce même gradient en différences finies. Historiquement, cette méthode a été introduite par Jameson [85] puis développée principalement par son équipe [154, 185, 91, 88].

On suppose en premier lieu que la fonction objectif dépend du vecteur des variables aérodynamiques  $\mathbf{q}$  en tout point de l'espace et du vecteur paramètre  $\mathbf{x}$ .

$$f = f(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \quad (\text{D.10})$$

En particulier, si  $\mathbf{x}$  correspond à une paramétrisation géométrique et que  $f$  est une intégrale volumique ou surfacique,  $f$  peut dépendre directement de  $\mathbf{x}$ . En conséquence, toute variation de  $\mathbf{x}$  et  $q$  implique une variation de  $f$  avec :

$$\delta f = \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} \quad (\text{D.11})$$

Or,  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{x}$  sont implicitement liés par les équations de Navier-Stokes. En conséquence, afin de pouvoir calculer le gradient de  $f$  relativement aux paramètres sans évaluer la variation du champ aérodynamique pour chaque composante de  $\mathbf{x}$ , il est nécessaire d'éliminer le terme  $\delta q$  de la relation précédente. Le terme  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$  est quant à lui beaucoup plus simple à obtenir car il découle directement de la définition analytique de la fonction  $f$ .

Pour un champ aérodynamique supposé stationnaire, les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 0 \quad (\text{D.12})$$

où  $\mathbf{F}$  est le résidu de l'équation, c'est à dire la somme des flux convectifs et diffusifs. On peut alors déterminer  $\delta q$  à partir de la version dérivée de l'équation précédente :

$$\delta \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} = 0 \quad (\text{D.13})$$

On introduit alors un multiplicateur de Lagrange  $\psi$

$$\delta f = \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} - \psi^T \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} \right) \quad (\text{D.14})$$

On remarquera à ce niveau que  $\psi$  peut véritablement être qualifié de multiplicateur de Lagrange puisque l'équation précédente (D.14) n'est ni plus ni moins que la version dérivée d'un problème d'optimisation sous contrainte (ce pour quoi les multiplicateurs de Lagrange sont conçus) : on cherche à minimiser la fonction  $f$  avec pour contrainte  $\mathbf{F}(q, \mathbf{x}) = 0$ , ce qui se traduit mathématiquement par la minimisation de la fonction

$$J = f(\mathbf{q}, \mathbf{x}) - \psi \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x})$$

avec ici  $\delta f = \delta J$

La relation (D.14) peut se reformuler un peu différemment pour faire apparaître des termes intéressants :

$$\delta f = \left( \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} - \psi^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} \right) + \left( \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} - \psi^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} \right) \quad (\text{D.15})$$

La relation (D.15) est valide quel que soit  $\psi$ . En particulier, si on prend  $\psi$  comme la solution de l'équation adjointe :

$$\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial q} \psi = \frac{\partial f}{\partial q} \quad (\text{D.16})$$

l'équation (D.14) devient :

$$\begin{aligned} \delta f &= \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} - \psi^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} \\ &= G^T \cdot \delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Le gradient  $G$  de la fonction objectif  $f$  par rapport aux paramètres apparaît ainsi naturellement. De cette manière, le calcul du gradient ne demande qu'un seul calcul long, celui de l'état adjoint  $\psi$ . Pourquoi parle-t-on ici d'état adjoint ? Du point de vue mathématique, le gradient de  $f$  relativement à  $\mathbf{x}$  peut s'écrire généralement, selon l'excellent article de Giles et Pierce [59] :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx_p} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dx_p} + \frac{\partial f}{\partial x_p} \\ &= (g^T, u) + \frac{\partial f}{\partial x_p} \\ \text{avec } \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dx_p} &= -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_p} \text{ qu'on notera } A.u = b \end{aligned}$$

Le problème est que le produit  $(g^T, u)$  a besoin d'être évalué pour chaque  $x_p, b$  et donc  $u$  variant à chaque fois et nécessitant la résolution du système linéaire. En utilisant la définition *adjointe* de ce produit avec l'opérateur  $A$ , on obtient :

$$(g^T, u) = (\psi^T, b) = (\psi^T, Au)$$

où on définit  $\psi$  comme la solution de  $A^T \cdot \psi = g$ .

Dans cette dernière relation, aucun des termes intervenant dans le système linéaire ne dépend de  $x_p$ . Le système n'a besoin d'être résolu qu'une seule fois, seul le produit  $(v^T, b)$  devant être recalculé, au prix d'un effort algorithmique très inférieur (il ne s'agit que d'un produit de matrice, infiniment moins coûteux qu'une inversion matricielle). En général, le calcul de  $\psi$  demande à peu près autant de temps que le calcul du champ aérodynamique, mais il peut être raccourci en utilisant des techniques mathématiques adaptées à la résolution de systèmes linéaires de grandes dimensions.

Le problème ainsi posé n'écarte cependant pas toutes les difficultés. La complexité de l'évaluation du gradient de  $f$  s'est reportée sur la détermination de l'état adjoint  $\psi$ . Ce dernier nécessite en particulier des solveurs spéciaux, dits solveurs adjoints, pour être calculé. Il existe deux manières différentes de calculer l'état adjoint en raison de la discrétisation imposée par le traitement numérique.

### D.3.2.1 Adjoint discret

Comme on l'a esquissé auparavant, la fonction objectif  $f$  peut résulter d'un calcul d'intégrales sur le champ aérodynamique. Cependant, si on se base uniquement sur un champ aérodynamique déjà discrétisé, ces intégrales doivent elles aussi être discrétisées. On a alors de manière générique une écriture linéarisée de la fonction objectif

$$f_{discret} = \frac{1}{V_\Omega} \sum_{\Omega} f_o(\mathbf{q}, \mathbf{x})$$

où  $\Omega$  est un ensemble fini de points et  $f_o$  les mesures locales conduisant par sommation à la valeur de l'objectif global. On notera ici que les  $f_o$  tiennent naturellement compte de la géométrie, ne serait-ce que pour des raisons d'homogénéité. Du fait de la linéarité de la relation précédente, on peut alors transposer directement les relations (D.11) à (D.17) à ce cas en remplaçant les variables et les différents opérateurs par leurs versions discrétisées sur un maillage.

La construction et l'utilisation d'un calcul par adjoint discret sont des plus simples en CFD, dans la mesure où on dispose déjà naturellement d'un maillage sur lequel est calculé un champ aérodynamique. On dispose ainsi naturellement de codes numériques implémentant les équations de Navier-Stokes. Dans ce contexte, obtenir les matrices et vecteurs  $A$  et  $g$  peut se faire très simplement en utilisant un dérivateur automatique appliqué au code de calcul classique [55]. On dispose ainsi facilement du solveur adapté à son cas.

On fera ici une comparaison rapide entre les méthodes de calcul du gradient par adjoint discret et le code paramétrique Turb'Opty. Dans les deux cas, on dispose d'une méthode permettant de calculer un état dérivé du champ aérodynamique de référence. On remarque en premier lieu que tous les deux font intervenir l'expression dérivée des équations de Navier-Stokes stationnaires et

discrétisées, via les équations (4.4) et (D.13) identiques. De la même manière, le calcul de l'état adjoint et de la dérivée du champ par rapport aux paramètres sont relativement semblables. Ils ne diffèrent que par le second membre de l'équation.

Dans le tableau suivant, on donne les systèmes linéaires résolus pour les deux méthodes, où  $X$  est l'inconnue.

Paramétrisation Turb'Opty	Etat Adjoint
$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \cdot X = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$	$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \cdot X = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$

TAB. D.1 – Comparaison des systèmes résolus : Paramétrisation directe vs. Adjoint discret

On voit que pour Turb'opty, on a  $X_{Tbo} = \frac{dq}{dx} = \mathbf{q}^{(1)}$  et pour l'adjoint,  $X_{Adj} = \frac{df}{dx} = \psi$ . On retrouve ici le fait que la méthode adjointe est construite pour éliminer la dépendance de  $f$  par rapport aux variations de  $q$  induites par les paramètres. Une méthode adjointe discrète n'est au final qu'un cas particulier de la paramétrisation directe. En effet, il est naturellement possible d'exprimer  $f$  comme une fonction analytique des variables conservatives. On peut alors différencier cette fonction pour exprimer la dérivée de  $f$  en fonction des variations des variables aérodynamiques. Ceci peut en particulier être fait en utilisant un dérivateur automatique. Pour reconstruire  $X_{Adj}$ , on calcule alors le produit matriciel :

$$X_{Adj} = \frac{df}{dx} = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right) \cdot \left( \frac{d\mathbf{q}}{dx} \right)$$

A l'inverse, une méthode par adjoint peut aussi se concevoir comme une paramétrisation, à condition que la fonction objectif traitée soit définie comme une variable conservative. Il est alors nécessaire de répéter le calcul en modifiant à chaque fois  $f$  pour traiter une autre variable aérodynamique.

Dans les deux méthodes, on comprend facilement que c'est la résolution du système linéaire donné dans le tableau (D.1) qui va être le point crucial. Sur ce point les méthodes diffèrent donc assez peu en terme d'efficacité, la matrice à inverser étant la même.

### D.3.2.2 Adjoint continu

Dans ce cas de figure, on choisit de ne pas discrétiser immédiatement les différentes variables rencontrées. On remplace ici les produits matriciels par des produits scalaires définis au moyen d'intégrales [58]. La fonction objectif est définie comme une intégrale surfacique ou volumique de quantités aérodynamiques. Pour cette raison, le terme  $(g^T, u)$  intervenant dans le calcul de  $f$  est en particulier défini comme une intégrale, ce qui implique que les opérateurs adjoints impliqués dans les équations (D.11) à (D.16) sont eux aussi définis analytiquement via des intégrales. On trouvera un exemple de construction d'un opérateur adjoint dans [59]. Les conditions aux limites sont elles aussi calculées pour l'état adjoint. Une fois les différents termes déterminés analytiquement, le problème est alors discrétisé pour être résolu numériquement et ainsi trouver la valeur du gradient de  $f$ .

Bien que les adjoints continus soient très majoritairement appliqués à des problèmes d'optimisation géométrique en turbomachines, il est possible de traiter des cas où les conditions d'entrée et de sortie du fluide sont paramétrées [58, 162].

Le calcul du gradient par adjoint continu génère un problème majeur. La détermination des différents opérateurs intervenant dans les équations n'est pas facilement généralisable. Elle dépend en particulier de la modélisation de l'écoulement choisie (Euler ou Navier-Stokes) et de la définition des fonctions objectifs. En conséquence, chaque modification du problème demandera la réécriture des équations et donc la réécriture complète de l'algorithme de calcul de l'état adjoint. Cette dernière modification est particulièrement gênante car elle doit être faite manuellement et demande souvent beaucoup de temps humain, avec un risque non négligeable d'introduire des erreurs en programmant. En comparaison, le solveur adjoint discret peut être facilement régénéré en utilisant un dérivateur automatique, ce qui est rapide et limite considérablement le risque d'erreur.

Malgré ce défaut, les adjoints continus sont utilisés dans de nombreux cas. Pour Nadarajah et Jameson [142], la méthode continue est légèrement plus efficace et précise que la méthode discrète.

Un des avantages de la méthode par adjoint, quelle que soit l'implémentation choisie, est que le calcul de l'état adjoint n'a pas besoin d'être effectué très précisément, au moins pour les premières itérations de l'optimisation, car l'erreur résultante sur le gradient de  $f$  peut être négligée. De cette manière, on peut réduire artificiellement le temps de la convergence entre chaque itération.

## Annexe E

# Opérateurs des algorithmes génétiques

### E.1 Processus de sélection

Avant toute génération de nouveaux individus, il est obligatoire de choisir les futurs parents. Comme cela se fait dans la nature, on passe alors par une phase de sélection basée sur l'adaptation des individus, les meilleurs sont retenus. On distingue cependant différentes grandes techniques de sélection.

#### E.1.1 Tournoi à $n$ individus

La sélection se fait au travers de la compétition entre  $n$  individus,  $n$  étant spécifié par l'utilisateur. Cette opération s'effectue en deux phases successives :

- Une présélection aléatoire de  $n$  individus
- Le classement des individus présélectionnés selon leur adaptation. Seul(s) le(s) meilleur(s) est(sont) ensuite retenu(s).

On répète la procédure de tournoi autant de fois que nécessaire afin de créer le groupe reproducteur. Il faut noter que, selon cette définition, le groupe reproducteur peut contenir plusieurs fois le même individu. A ce titre, la taille du groupe présélectionné pour le tournoi est déterminante dans le fonctionnement de l'algorithme génétique. Une sélection trop grande peut en particulier conduire à une convergence prématurée de l'optimisation. Supposons que l'on dispose de  $N$  individus au total dans la population ; plusieurs tournois effectués sur  $n \approx N$  individus vont conduire à sélectionner trop fréquemment l'individu dominant le reste de la population, car il existe alors une probabilité non négligeable de présélectionner ce dernier à chaque fois, appauvrissant ainsi la diversité du groupe reproducteur et donc les possibilités d'évolution. En pratique, les tournois sont pour la plupart des algorithmes effectués entre deux individus. On perd ainsi un peu de sélectivité quant à l'optimalité des individus sélectionnés, au profit d'une plus grande capacité d'exploration de l'espace paramétrique.

#### E.1.2 Roulette

Il s'agit d'un autre concept de sélection introduit par Goldberg [62]. Le principe est proche de celui du jeu du même nom, à savoir la sélection d'un individu par tirage aléatoire sur une roue *Roulette Wheel Selection*. Cependant, on introduit dans ce processus un niveau d'information

supplémentaire correspondant au degré d'adaptation de chaque individu. En effet, la sélection est réalisée de manière à privilégier les meilleurs individus au sein de la population en leur affectant une probabilité de tirage supérieur. Cette méthode de sélection est représentative de la classe des sélections *proportionnelles*. Dans son implémentation la plus simple, la méthode de la roulette se base sur une probabilité de sélection d'un individu proportionnelle à son adaptation. Soit  $p_k$  la probabilité de sélection du  $k^{\text{i-ème}}$  individu de la population. Cette probabilité est définie par :

$$p_k = \frac{F_k}{F_{moyen}}$$

où  $F_k$  est la valeur mesurant l'adaptation de l'individu, et  $F_{moyen}$  est une représentation de la valeur moyenne de l'adaptation de l'ensemble de la population.

$$F_{moyen} = \sum_{n=1}^N F_n$$

Avec cette définition, on trouve en particulier que la probabilité de sélection cumulée totale est :

$$p_{totale} = \sum_{k=1}^N p_k = 1$$

En pratique, une telle définition équivaut à effectuer le tirage aléatoire sur une population dans laquelle existent non seulement les individus de base, mais aussi des copies de ces derniers, le nombre de copies étant proportionnel à l'adaptation de chaque individu. De cette manière, plus l'individu est adapté, plus il est représenté dans l'ensemble de tirage et donc plus il a de chance d'être sélectionné.

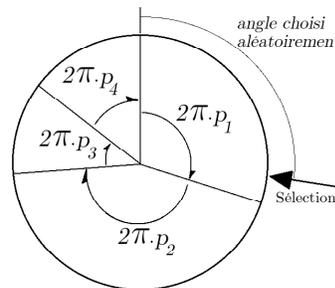


FIG. E.1 – Sélection par roulette classique

Cette approche a néanmoins deux défauts principaux. Tout d'abord, en présence d'individus qui dominent très fortement le reste de la population, la sélection conduit à un tirage trop fréquent de ces individus, induisant une convergence prématurée de l'algorithme génétique. De plus, elle est réputée être "bruitée" au sens où il existe une large variance entre les différentes réalisations d'un même tirage. La première correction apportée sur ce point consiste à modifier la population utilisée pour le tirage par roulette en introduisant une approche plus déterministe [28]. On parle de *Stochastic Remainder Roulette Wheel Selection* (SRWS). On commence par multiplier la probabilité  $p_k$  par la taille de la population traitée  $N$ . On assigne ensuite à chaque individu autant de copies

que la partie entière de  $p_k \cdot N$ . De cette manière on aboutit à une population de tirage de taille :

$$\sum_{k=1}^N E(p_k \cdot N) \leq N$$

Il se peut que la population de tirage soit plus petite que la population à traiter. On la complète alors en effectuant un tirage RWS classique en se basant sur des probabilités de sélection  $p'_k$  égales aux parties décimales des  $p_k \cdot N$ . Une fois la population de tirage complétée, on effectue alors le tirage de manière classique.

Il existe une troisième variante de tirage par roulette, appelée *Stochastic Universal Sampling* (SUS) et introduite par Baker [6]. Elle propose de pallier l'inefficacité de la phase de tirage et de contourner les biais présentés précédemment. En effet, pour des populations reproductrices de grande taille, il est nécessaire de multiplier les tirages, ce qui peut poser un problème d'efficacité algorithmique. En se basant sur une population de tirage identique à celle de la RWS, on choisit aléatoirement un angle  $r$  compris entre 0 et 1, puis on sélectionne *simultanément* les individus correspondant aux positions angulaires  $2\pi r$ ,  $2\pi(r + 1/M)$ ,  $2\pi(r + 2/M)$ , ...,  $2\pi(r + (M - 1)/M)$ , où  $M \leq N$  est la taille de la population reproductrice.

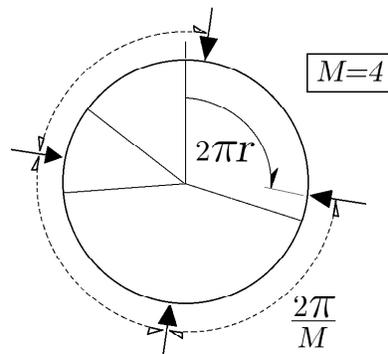


FIG. E.2 – Stochastic Universal Sampling

Du fait du caractère simultané de la sélection, on laisse ainsi une chance supplémentaire aux individus peu adaptés d'être sélectionnés. On limite ainsi un peu le biais introduit avec la présence de "super-individus" dans la population à traiter. Ce biais reste cependant présent, comme dans toutes les sélections proportionnelles, et peut demander un traitement spécifique pour être éliminé. La solution la plus utilisée est de ne pas travailler sur la valeur d'une fonction d'adaptation, mais plutôt sur un numéro de rang issu d'un classement de la population en fronts. C'est l'un des principaux désavantages des méthodes de sélection proportionnelle par rapport aux tournois.

## E.2 Opérateurs génétiques - codage binaire

Les techniques présentées jusqu'à présent ne sont pas spécifiques d'un traitement "génétique" de l'information. Il s'agit simplement de sélectionner un certain nombre d'individus dans le but de leur faire subir des transformations. La puissance et l'originalité des algorithmes génétiques reposent sur les opérations que l'on va décrire.

Il s'agit de créer de nouveaux individus en imitant les mécanismes évolutifs qui prévalent dans le monde biologique au niveau de la reproduction. On utilise ainsi des échanges de matériel "génétique" et des mutations de ce dernier pour aboutir à des individus nouveaux, si possible différents de la génération précédente. On portera dans la suite une attention particulière à la manière dont les individus sont décrits, cette description ayant un rôle majeur sur les choix et l'utilisation des opérateurs.

Dans cette section, on se concentrera sur un codage binaire des caractéristiques de chaque individu. On rappelle à ce niveau que chaque individu est défini de manière générale par un certain nombre de paramètres, chaque paramètre étant un "gène" (et la valeur de ce paramètre un "allèle"), les gènes étant regroupés dans un ou plusieurs chromosomes. L'approche binaire représente les différents gènes avec un codage binaire sur  $b$  bits. Historiquement, c'est l'une des plus anciennes approches en algorithmique génétique, motivée par sa forte ressemblance avec le domaine biologique où chaque gène est constitué d'une série de bases.

Dans ces conditions, le codage est restreint à des paramètres à valeurs entières, mais il est possible d'étendre cette méthodologie à des paramètres réels. Le paramètre est alors représenté par une chaîne binaire  $s$  à valeur entière dont on déduit la valeur réelle du paramètre via la formule suivante :

$$x = x_{min} + \frac{x_{max} - x_{min}}{2^b - 1} \cdot val(s)$$

où  $x_{min}$  et  $x_{max}$  sont les valeurs extrêmes de la plage de paramètre envisagée, et  $val(s)$  est la valeur entière codée par la chaîne binaire  $s$ .

Le principal défaut de cette correction est lié au fait que l'espace de recherche des paramètres reste **discret**, ce qui limite donc la portée de l'optimisation. Cette discrétisation peut être raffinée en augmentant le nombre de bits de codage.

Une fois les différents gènes codés, les chaînes binaires associées sont concaténées pour former le chromosome

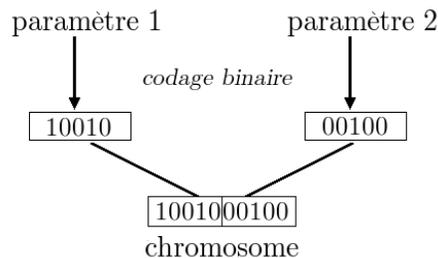


FIG. E.3 – Représentation d'un individu - codage binaire

Il est à noter qu'il existe aujourd'hui des méthodes plus directes et élégantes pour traiter le cas de paramètres à valeurs réelles, elles seront décrites dans la suite. Cependant, les algorithmes basés sur un codage binaire ne sont pas à rejeter, dans la mesure où ils restent parfaitement adaptés à des problèmes utilisant un espace de recherche discret, en particulier ceux qui font intervenir comme paramètre une variable booléenne.

### E.2.1 Opérateur de croisement

Une fois les individus de la population correctement représentés et sélectionnés pour la reproduction, on applique alors l'opérateur de croisement ("crossover") pour échanger le matériel génétique

de deux individus parents et ainsi aboutir à deux enfants supposés différents. Cette recombinaison d'informations est essentielle pour garantir l'exploration de la plage paramétrique et la progression vers des solutions encore meilleures. On espère en particulier que la recombinaison du matériel génétique des deux parents permettra de créer des enfants possédant les qualités des deux parents. Sans cette phase, l'algorithme génétique risque de stagner autour des mêmes individus. Il existe de nombreuses versions de crossover pour le codage binaire (on en trouvera quelques exemples dans [173]), mais toutes reviennent à échanger des morceaux de chaînes binaires entre deux individus. Le croisement est appliqué entre deux individus avec une probabilité  $p_c$ . En l'absence d'autres opérateurs, si  $p_c = 1$ , toutes les opérations de reproduction seront sujettes à croisement. À l'inverse, si  $p_c = 0$ , tous les enfants seront obtenus par simple copie des parents. La mise en place d'une probabilité de croisement se justifie par l'intérêt existant à transmettre directement quelques individus d'une génération à une autre afin de préserver, quoi qu'il advienne, certaines caractéristiques.

L'opérateur de croisement le plus simple est un croisement à un site. On appelle site une position dans un chromosome de part et d'autre de laquelle des traitements différents peuvent être appliqués. On définit donc un site de coupure de manière aléatoire mais identique sur les deux chromosomes à croiser. On procède ensuite à l'échange des deux sous-chaînes ainsi définies selon une probabilité  $p_c$ . La figure (Fig. E.4) illustre un croisement de ce type.

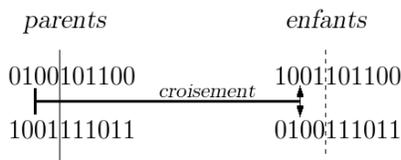


FIG. E.4 – Opérateur de croisement à un site

La probabilité de croisement  $p_c$  joue un rôle majeur dans l'évolution de la population. Une probabilité  $p_c = 1$  implique que toutes les sous-chaînes seront échangées, ce qui ne présente aucun intérêt puisque les enfants seront identiques aux parents. De la même manière, une probabilité nulle revient à n'effectuer aucun croisement. En général, les différentes études de la littérature semblent s'accorder sur la valeur médiane  $p_c = 0.5$ .

Le nombre et la position des sites constituent d'autres paramètres numériques importants. On soulignera dès à présent que la position du site de coupure du chromosome peut être aléatoire [28] et ne respecte donc pas forcément l'intégrité des gènes ; l'échange de chaînes binaires, représentant un ou plusieurs gènes dans leur intégralité, n'est alors qu'un cas particulier de ce type de croisement. De cette manière on peut créer une certaine diversité par la reproduction, puisqu'il existe des paramètres pour lesquels les enfants ont une valeur différente de celles des parents. Néanmoins, une coupure choisie aléatoirement permet de conserver dans une certaine mesure les caractéristiques importantes en terme de valeur des paramètres. Ceci est plus facilement illustré par un exemple.

Supposons que l'on dispose d'un problème mono-objectif mono-paramètre ( $I=P=1$ ), pour lequel l'objectif est  $f(x) = |x^2 - 81|$ . La solution est trivialement  $x = 9$ , ce qui se traduit en binaire par la chaîne  $\{1001\}$ . Supposons qu'on dispose maintenant d'une population de taille  $N = 2$  avec les individus suivants :  $x = 8 = \{1000\}$  et  $x = 3 = \{0011\}$ . Où que soit le site de coupure, on est assuré qu'il existera au moins un enfant ayant un génome du type  $\{1***\}$ , donc par essence assez proche de la valeur optimale.

On retrouve ce mécanisme quels que soient les nombres de gènes et de coupures pratiquées. Cette propriété vient de l'organisation du codage en bits de poids croissant ; en préservant certains bits, ou ensembles de bits, on est assuré de rester au voisinage d'une certaine valeur de paramètre. Cette notion de conservation des chaînes binaires a été introduite en premier par Holland [76] sous le nom de "schemata" puis reprise et développée par Goldberg [61] sous le nom de "hyperplanes" ou "building blocks". Il existe des démonstrations mathématiques [28] prouvant que de courtes chaînes caractéristiques et au-dessus de la moyenne en terme d'adaptation sont favorisées par les mécanismes de sélection et de croisement précédemment décrits, et représentent donc au grès des générations de plus en plus d'individus au sein de la population.

Pour ce qui est du nombre de sites, il n'existe pas de consensus général sur la valeur à retenir, cette dernière étant liée de manière implicite au nombre de paramètres et à la longueur de codage envisagée. On relèvera toutefois des cas particuliers comme l'opérateur de croisement *uniforme*, avec lequel chaque bit fait l'objet d'un croisement (avec une probabilité  $p_{c2}$ ). Il est intéressant de noter cependant que plus le nombre de sites est élevé, moins il y a de conservation des chaînes binaires et donc potentiellement transmission de valeurs précises de paramètres. On retrouve ici la notion de conservation de "schemata" introduite peu avant.

Quel que soit le réglage choisi, cet opérateur garantit que la moyenne de la population reste constante. En effet, on a la relation suivante :

$$\frac{x_p^{parent-I} + x_p^{parent-II}}{2} = \frac{x_p^{enfant-I} + x_p^{enfant-II}}{2} \quad (E.1)$$

Cette relation est facilement démontrée en remarquant que chaque paramètre  $x_p$  peut être exprimé comme :

$$x_p = \sum_{k=1}^b 2^{k-1} \cdot \delta_k$$

où  $\delta_k$  est la valeur du  $k^i$ -ème bit dans la chaîne binaire représentant  $x_p$ . En conséquence, la permutation de tout ou partie des chaînes binaires n'a aucune incidence sur la moyenne de chaque paramètre ; la somme *totale*

$$\left( \sum_{k=1}^b 2^{k-1} \delta_k \right)_{individu I} + \left( \sum_{k=1}^b 2^{k-1} \delta_k \right)_{individu II} = \sum_{k=1}^b 2^{k-1} (\delta_k^I + \delta_k^{II})$$

est inchangée.

Cette propriété de conservation de la moyenne est très importante car elle garantit que le croisement ne change pas fondamentalement la topologie de la population reproductrice pour créer les nouveaux individus et n'introduit pas de direction de recherche parasite. La nouvelle population hérite ainsi du barycentre des individus sélectionnés à la génération précédente. Avec cet opérateur, la progression de ce barycentre vers le front de Pareto est donc soumise à deux mécanismes complémentaires :

- la phase de sélection permet à chaque génération de déterminer un nouveau barycentre qui ne tient compte que des "meilleurs" individus au sein de la population.
- la phase de croisement génère des individus dominant idéalement toute la génération précédente, qui vont enrichir la population et être à leur tour sélectionnés.

### E.2.2 Opérateur de mutation

Le parcours de l'espace paramétrique est en partie assuré par la phase de reproduction via l'utilisation d'un opérateur de croisement. Cependant, ce dernier tend à générer des enfants avec des valeurs de paramètres proches ou égales à celles des parents, restreignant ainsi l'exploration de l'espace de conception. Il est souhaitable de ne pas se limiter à cette approche, afin d'éviter les travers induits par une recherche "de proche en proche". Pour cela, on introduit un nouvel opérateur, dit opérateur de *mutation*, qui permet de générer des individus en dehors de zones déjà bien peuplées (zones traitées par croisement). Une fois encore, cet opérateur est directement inspiré des mécanismes biologiques. Comme pour l'opérateur de croisement, l'application d'une mutation est régie par la probabilité  $p_m$ .

Le traitement d'une mutation est très simple pour un codage binaire : on choisit aléatoirement un bit de la chaîne binaire d'un individu et on l'inverse, passant de 0 à 1 et vice versa. Il est aussi possible de modifier très légèrement cette première définition en introduisant une probabilité de mutation de bit à bit  $p_{m2}$ , généralement égale à 0.1. Avec cette deuxième définition, la mutation n'est plus restreinte à un seul bit, mais il est aussi possible de n'avoir aucun changement.

### E.2.3 Limites du codage binaire

Comme on l'a vu au-dessus, les différents opérateurs binaires portent sur des *représentations* des différents paramètres sous forme d'une chaîne de 0 et de 1. En particulier, les opérations pratiquées ne tiennent pas compte directement de la signification de cette chaîne, le cas le plus explicite étant celui de la mutation qui modifie un ou plusieurs bits pris au hasard. Les conséquences de ces changements, mineurs dans une représentation binaire, peuvent être majeures pour la vraie valeur des paramètres. Par exemple, passer de la chaîne "01000" à la chaîne "11000" fait varier le paramètre correspondant de 8 à 24. Tous les algorithmes basés sur un codage binaire seront par nature assez sensibles et facilement bruités, ce qui peut constituer un frein sérieux à la convergence.

La principale alternative à ce problème est l'utilisation d'un code Gray au lieu du code binaire afin de réduire la distance de Hamming entre deux individus. Ce dernier est construit de manière à ne modifier qu'un seul bit pour le codage de deux entiers successifs.

Code Binaire	Code Gray	Entier
000	000	0
001	001	1
010	011	2
011	010	3
100	110	4
101	111	5

TAB. E.1 – Codage Binaire et Gray

La deuxième problématique associée à un codage, binaire ou Gray, vient de la nature discrète de ce type de représentation. En effet, le codage s'adapte très bien à des paramètres à valeur entière. On a vu qu'il est malgré tout possible de traiter des cas à paramètres réels, moyennant la définition de plages de variation. Cependant, l'espace de recherche reste fondamentalement discret et on ne peut en particulier pas effectuer une optimisation avec une précision arbitraire sur les paramètres. Le seul moyen d'augmenter la précision est d'allonger les chaînes binaires, ce qui ne va pas sans

poser de problèmes en terme d'utilisation de ressources informatiques, et ne résout de toute façon pas le problème de discrétisation.

Enfin, ce type d'approche est limité du point de vue efficacité algorithmique par la nécessité de coder et décoder les valeurs des paramètres pour chaque individu à chaque génération. Pour des populations de grandes tailles, cette approche peut vite s'avérer rédhitoire en terme de temps utilisateur requis.

### E.3 Opérateurs génétiques - codage réel

Le codage binaire a été l'un des premiers développements réalisés pour les algorithmes génétiques et demeure à ce titre l'un des plus connus aujourd'hui. Néanmoins, en raison de ses limitations intrinsèques, notamment le problème du traitement d'un espace paramétrique continu et réel, il est vite apparu nécessaire de mettre en place des opérateurs qui puissent s'affranchir du codage pour travailler directement sur la valeur des paramètres. Ces nouveaux algorithmes prennent aujourd'hui de plus en plus d'importance, tant pour leur facilité d'emploi que pour la grande variété d'opérateurs disponibles et éprouvés.

On retrouve donc deux catégories principales : les opérateurs chargés du croisement et de la recombinaison d'informations entre parents, et ceux induisant une mutation. De manière générale, on retiendra que, au sein d'un algorithme génétique, les mécanismes d'application des opérateurs de croisement et de mutation en codage réel restent globalement les mêmes que ceux définis pour les opérateurs en codage binaire. L'utilisateur règle généralement la fréquence d'application de ces transformations au moyen de deux probabilités  $p_c$  et  $p_m$ .

#### E.3.1 Opérateur de croisement

Il existe dans la littérature une multitude de formulations différentes pour les opérateurs de croisement applicables à des paramètres réels. Dans un souci de clarté, on restreindra la présentation aux cas les plus représentatifs et efficaces. Le choix de l'opérateur devra ensuite être fait simultanément avec celui de la méthode de sélection afin de réaliser la meilleure balance possible entre amélioration de la population et exploration de l'espace paramétrique.

Le premier opérateur auquel on puisse penser est directement dérivé de celui à  $n$  sites établi en codage binaire. Le problème de la localisation des sites de coupure est ici fortement simplifié, dans la mesure où la séparation intervient forcément entre deux paramètres (la découpe aléatoire d'une chaîne n'a plus de sens). En conséquence, ce premier opérateur assure que chaque enfant hérite chaque paramètre de l'un ou l'autre des parents. Il s'agit là de la traduction la plus fidèle du mécanisme biologique de transmission des gènes lors de la reproduction. Graphiquement, parents et enfants sont aux sommets d'un hypercube, comme illustré sur la figure (Fig. E.5).

Cet opérateur de croisement ne permet cependant pas d'explorer le voisinage immédiat des paramètres fournis par les parents, au contraire des opérateurs en codage binaire présenté précédemment. Dans le cas (limite) d'un problème mono-paramétrique, cet opérateur est totalement inutile puisqu'il n'effectue qu'une simple permutation.

**Blend Crossover** Pour corriger cette limitation, des formulations plus élaborées ont été proposées. La première d'entre elle, dénommée "Blend Crossover" (BLX- $\alpha$ ), a été introduite par Goldberg

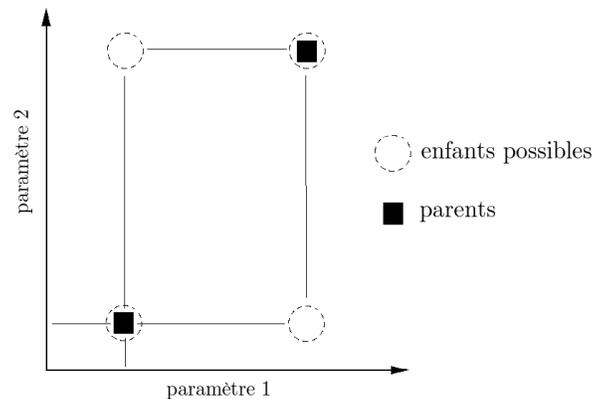


FIG. E.5 – Croisement Simple

[63]. Pour chaque paramètre  $x_p$ , le principe est de choisir au hasard une valeur dans la plage :

$$[x_p^I - \alpha(x_p^{II} - x_p^I), x_p^{II} + \alpha(x_p^{II} - x_p^I)]$$

où  $x_p^I$  et  $x_p^{II}$  sont les valeurs du paramètre considéré pour les deux parents,  $\alpha$  étant une constante numérique imposée par l'utilisateur.

De cette manière, on élargit le domaine accessible par les enfants générés par ce croisement ; on favorise ainsi une exploration locale autour des valeurs parentales. De plus, cet opérateur tient compte de la dispersion des parents puisque la plage autorisée est directement proportionnelle à l'écart entre les géniteurs. On montre en particulier [14] que

$$x_p^{I,e} - x_p^I = \gamma_p(-x_p^I + x_p^{II}) \quad (\text{E.2})$$

$$x_p^{II,e} - x_p^{II} = \gamma_p(x_p^I - x_p^{II}) \quad (\text{E.3})$$

où

$$\gamma_p = (1 + 2\alpha)u_p - \alpha$$

$$u_p : \text{nombre aléatoire} \in [0, 1]$$

$$x_p^{Y,e} : \text{valeur du paramètre pour l'enfant } Y$$

Les deux enfants sont liés par l'utilisation du même  $\gamma_p$ . Cette contrainte a été introduite par Eshelman et Schaffer [47] pour respecter la notion de "interval schemata". Cette notion traduit, en particulier pour les opérateurs à codage réel, la conservation de la moyenne par le croisement. On trouve en effet à partir des deux équations précédentes que  $x_p^{I,e} + x_p^{II,e} = x_p^I + x_p^{II}$ .

Comme l'illustrent les relations (E.2) et (E.3), la distance des paramètres enfants par rapport à ceux des parents est proportionnelle à l'écart entre ces derniers. On est donc en mesure d'attendre que pour une population reproductrice très dispersée, la population d'enfants le sera aussi. A l'inverse, pour une population reproductrice très resserrée, les enfants seront créés au voisinage immédiat de leurs parents. On dispose ainsi d'un outil qui permet d'explorer la plage paramétrique et de conserver une certaine diversité, mais aussi d'assurer une recherche localisée à partir d'une population elle-même très concentrée.

Pour  $\alpha = 0$ , cet opérateur se réduit à un choix dans la plage délimitée par les deux parents. En règle générale, le choix  $\alpha = 0.5$  est rapporté comme étant celui conduisant à la plus grande efficacité possible dans l'optimisation. L'exploration autour des parents est suffisante pour trouver rapidement de meilleurs individus, sans toutefois être source d'un bruit trop important.

**Simulated Binary Crossover** Le BLX- $\alpha$  présente l'inconvénient de conduire à des solutions parfois très différentes des parents, notamment dans le cas où ceux-ci sont dispersés, ce qui peut poser problème en terme d'amélioration au fil des générations. La méthode ne permet pas de contrôler plus finement la position des enfants au sein de la plage paramétrique à cause de l'utilisation d'une distribution de probabilité uniforme pour choisir ces derniers. Deb et Agrawal [29] ont imaginé un nouvel opérateur permettant de répondre à cette lacune. Le "Simulated Binary Crossover" (SBX) permet en outre de reproduire plus fidèlement les mécanismes observés avec les opérateurs de croisement en codage binaire. Il vise en effet à transmettre aux enfants les principales caractéristiques de la génération précédente et la variété existant entre les parents tout en limitant les explorations trop lointaines.

La principale caractéristique de cet opérateur est de mettre en place une distribution de probabilité non-uniforme pour le choix des enfants. Cet opérateur se définit comme suit. Pour chaque paramètre  $x_p$

1. Choisir un nombre aléatoire  $u_p$  entre 0 et 1
2. Calcul d'un coefficient  $\beta_p$  tel que l'intégrale de 0 à  $\beta_p$  d'une distribution de probabilité  $P$  soit égale à  $u_p$

$$\int_0^{\beta_p} P(s) ds = u_p \quad (\text{E.4})$$

avec  $P$  définie par

$$P(s) = \begin{cases} 0.5(\eta_c + 1)s^{\eta_c} & \text{si } s \leq 1 \\ 0.5(\eta_c + 1)\frac{1}{s^{\eta_c+2}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

et  $\eta_c$  un paramètre numérique que l'on prendra constant dans un premier temps. De cette manière, avec (E.4) et (E.5) on obtient :

$$\beta_p = \begin{cases} (2u_p)^{\frac{1}{\eta_c+1}} & \text{si } u_p \leq 0.5 \\ \left(\frac{1}{2(1-u_p)}\right)^{\frac{1}{\eta_c+1}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

3. Calcul des deux enfants via les deux versions (- et +) de la formule :

$$x_p^{I/II,e} = 0.5 [(x_p^I + x_p^{II}) \mp \beta_p |x_p^{II} - x_p^I|] \quad (\text{E.7})$$

La distribution  $P(s)$  est conçue de manière à imiter le plus possible les caractéristiques du croisement binaire en un point. Avec la relation (E.7), on vérifie en particulier que  $\beta_p$  satisfait la relation :

$$\beta_p = \left| \frac{(x_p^{II,e} + x_p^{I,e})}{(x_p^{II} + x_p^I)} \right| \quad (\text{E.8})$$

$\beta_p$  correspond donc au facteur d'expansion (ou de contraction) de la diversité résultant de l'application de l'opérateur de croisement.

- Si  $\beta_p < 1$ , le croisement sera dit contractant : les enfants sont encadrés par les parents.
- Si  $\beta_p = 1$ , le croisement sera dit stationnaire : enfants et parents sont identiques.
- Si  $\beta_p > 1$ , le croisement sera dit étalant : les enfants encadrent les parents.

Le paramètre numérique  $\eta_c$  contrôle pour sa part la variation autorisée autour des valeurs de paramètres fournies par les parents. La figure suivante (Fig. E.6) montre la fonction  $P$  ainsi que la densité de probabilité de création des enfants pour plusieurs valeurs de  $\eta_c$

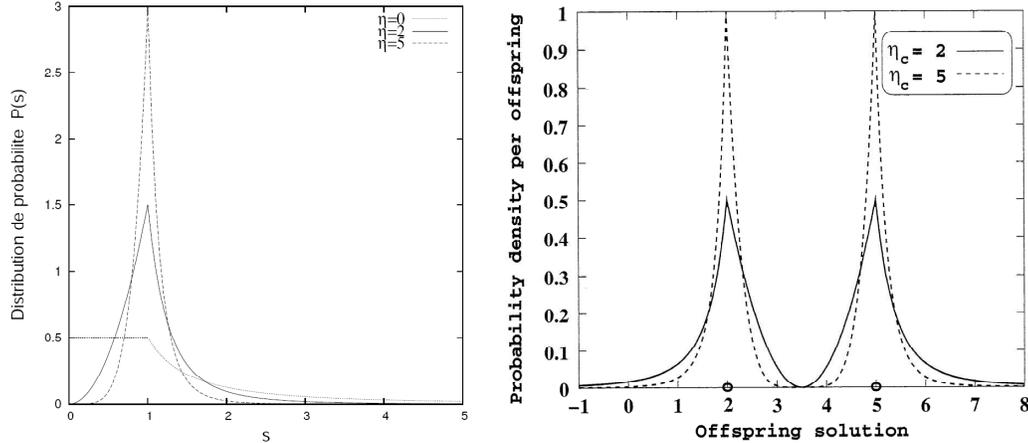


FIG. E.6 – Distribution de probabilité  $P$  & Probabilité de création des enfants (Deb,2001)

On voit que sur cette figure plus  $\eta_c$  est élevé, plus les enfants auront statistiquement des valeurs de paramètres proches de celles de leurs parents (ici 2 et 5). À l'inverse, un  $\eta_c$  faible autorise une exploration assez large autour des parents.

Une caractéristique intéressante de cet opérateur vient de la définition de  $\beta_p$  comme rapport d'expansion. Pour un  $\eta_p$  et un  $u_p$  fixés,  $\beta_p$  sera constant. En conséquence, plus les parents seront distants, plus l'espace de recherche sera large et inversement. Ceci est illustré dans la figure (Fig. E.7) qui montre la densité de probabilité de création des enfants pour deux distances entre les parents.

À l'évidence, l'opérateur renforce l'exploration au sein des populations déjà disparates, alors qu'il se concentre plutôt sur les caractéristiques parentales pour des populations denses. Cette propriété peut être intéressante en cours de convergence : au début de l'optimisation, on dispose généralement d'une population assez disparate, et on attend de l'algorithme qu'il explore assez efficacement l'espace. À l'inverse, en fin de convergence, la population s'est normalement concentrée vers le front de Pareto, et on attend alors de l'algorithme qu'il effectue des "petits pas" pour se rapprocher encore plus du front. À ce moment précis, une variation brutale des paramètres n'est pas souhaitable, il convient de rester autour des valeurs héritées des parents.

Par construction, cet opérateur conserve la moyenne pour chaque paramètre. À partir de la relation (E.7), on montre facilement que

$$x_p^{I,e} + x_p^{II,e} = x_p^I + x_p^{II}$$

Comme on peut l'imaginer, le paramètre numérique  $\eta_c$  est assez sensible à régler, car il peut induire une exploration trop forte qui va limiter la convergence ou, à l'inverse, limiter l'exploration

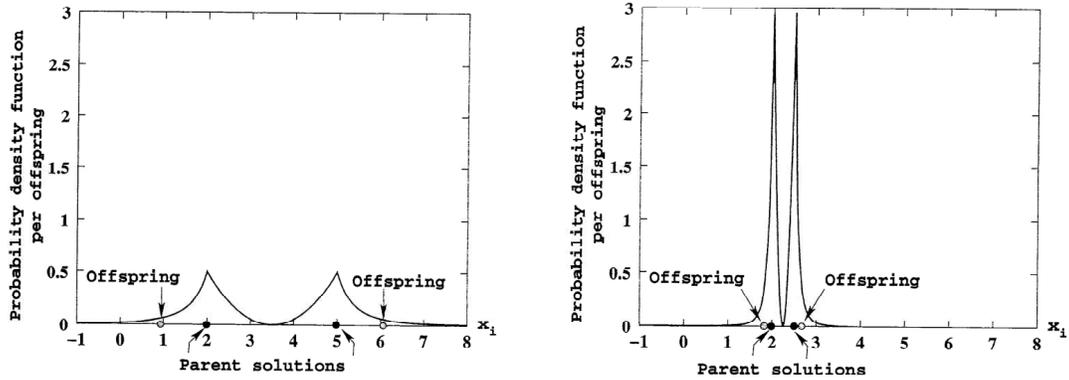


FIG. E.7 – Distribution de probabilité de création des enfants pour deux écartements entre les parents (Deb,2001)

et risquer là aussi de perturber la convergence. Il n'existe pas dans la littérature de règle bien définie, dans la mesure où le choix de  $\eta_c$  dépend plus ou moins implicitement des autres opérateurs (sélection et mutation) utilisés. Néanmoins, Deb et al. [34] ont récemment proposé une variante de l'opérateur dans laquelle  $\eta_c$  évolue en cours de convergence pour renforcer ou non l'exploration, selon le gain ou la perte d'adaptation des enfants relativement à leurs parents. Dans l'ensemble, cette méthode semble donner une meilleure convergence que la méthode standard.

On pourra noter que dans la définition donnée du SBX, il n'est à aucun moment fait mention des possibles bornes pour chaque paramètre. L'opérateur peut donc générer naturellement des valeurs de paramètres qui soient inadmissibles. L'opérateur a donc fait l'objet d'un développement ultérieur par ses créateurs [30] pour traiter spécifiquement le problème. En pratique, on calcule  $\beta_p$  avec la formule suivante :

$$\beta_p = \begin{cases} (u_p \alpha)^{\frac{1}{\eta_c+1}} & \text{si } u_p \leq \frac{1}{\alpha} \\ \left(\frac{1}{2-u_p \alpha}\right)^{\frac{1}{\eta_c+1}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

avec

$$\alpha = 2 - \kappa^{(\eta_c+1)}$$

$$\kappa = 1 + 2 \min \left( \frac{x_p^I - x_p^L}{x_p^{II} - x_p^I}, \frac{x_p^R - x_p^{II}}{x_p^{II} - x_p^I} \right)$$

Par exemple, si  $x_p^I = x_p^L$  ou  $x_p^{II} = x_p^R$ , il vient  $\beta_p = (u_p)^{\frac{1}{\eta_c+1}} < 1$  : on est assuré que le croisement est contractant et donc que les enfants resteront dans la plage autorisée.

La littérature fournit un grand nombre de variantes du SBX. Dans leur très grande majorité, elles se distinguent essentiellement par une définition de la densité de probabilité  $P$  différente. On retiendra celle de Raghuvanshi et al. [150] qui propose une loi lognormale. La possibilité d'un croisement fortement contractant est réduite, au profit de croisement étalant. Les auteurs de la méthode rapportent qu'elle est légèrement plus efficace que le SBX sur quelques cas tests analytiques.

**Autres opérateurs** Il existe de nombreux autres opérateurs de croisement possibles, cependant certains se distinguent par une structure plus originale notamment en utilisant plus de deux parents. L'intérêt d'une telle opération est, selon A. Eiben [43], un gain en performance au fur et à mesure que le nombre de parents augmente. Parmi les méthodes multi-parentales, on citera en exemple celle de Tsutsui et al. [181], baptisée "Simplex".

On commence par sélectionner  $m$  parents, où  $m$  est compris entre 2 et  $P + 1$ . De cette manière, pour chaque paramètre on définit un simplexe, i.e. un triangle, un tétraèdre, etc. On définit ensuite le centre de gravité  $G$  de ce simplexe. Le simplexe est ensuite étendu par homothétie de rapport  $\epsilon \geq 1$  en prenant  $G$  comme centre. Finalement, on détermine aléatoirement  $m$  enfants dans le simplexe final.

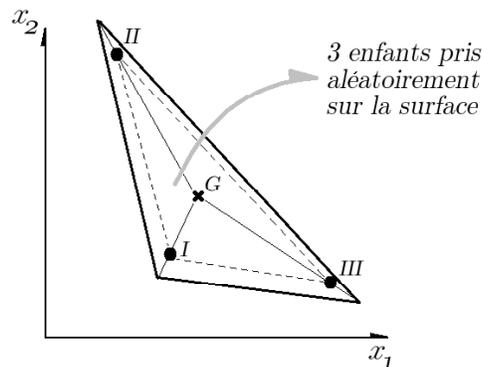


FIG. E.8 – Méthode du Simplexe

La figure (Fig. E.8) illustre cette méthode dans le cas où  $P = 2$  et  $m = 3$ . Le problème de toutes les méthodes multi-parentales est qu'elles nécessitent la donnée du nombre  $m$  qui doit être au préalable réglé pour améliorer significativement la convergence. De plus, pour la méthode du simplexe, il est aussi nécessaire de donner le paramètre  $\epsilon$  qui règle les capacités exploratoires de l'opérateur.

On remarquera aussi que la méthode du simplexe ne conserve pas la moyenne pour chaque paramètre, car les enfants sont sélectionnés au hasard dans le volume (ou la surface) défini. Il peut donc sporadiquement introduire un biais dans la recherche.

En pratique, les méthodes multi-parentales sont aujourd'hui peu utilisées en comparaison des opérateurs à deux parents : elles sont encore trop limitées.

### E.3.2 Opérateur de mutation

Afin de garantir que l'algorithme génétique ne se laissera pas piéger dans certaines zones de l'espace paramétrique, on définit pour le codage réel des opérateurs de mutation. Comme pour le codage binaire, il s'agit d'appliquer une transformation permettant de faire un grand déplacement selon une direction aléatoire.

La solution la plus simple est de définir au hasard un paramètre en se basant sur les bornes existantes  $x_p^L$  et  $x_p^R$ . On a ainsi

$$x_p^{mutation} = x_p^L + u_p(x_p^R - x_p^L)$$

avec  $u_p$  un nombre aléatoire pris entre 0 et 1.

Cependant, l'emploi d'une telle formule peut se révéler problématique dans le cas où au moins une borne n'est pas définie. L'alternative consiste à effectuer une perturbation d'amplitude semi-aléatoire à partir d'un individu :

$$x_p^{mutation} = x_p^{initial} + (u_p - 0.5) * \Delta_p \quad (\text{E.10})$$

avec  $\Delta_p$  une amplitude de perturbation maximum définie par l'utilisateur. En contrepartie de sa simplicité, cet opérateur peut être difficile à régler quand on travaille sur un espace paramétrique borné : le réglage de  $\Delta_p$  doit alors s'adapter pour éviter de franchir les limites admissibles. Cette deuxième formulation présente l'avantage d'introduire la notion de distance par rapport à l'individu avant la mutation. En établissant une analogie avec la mutation standard du codage binaire, certains auteurs ont utilisé une distribution non uniforme de probabilité pour la détermination de  $u_p$  dans la formule (E.10). En effet, le code binaire impose que la mutation d'un individu crée une nouvelle entité dans un voisinage proche ou au contraire dans un voisinage éloigné. Pour s'en convaincre, examinons l'exemple suivant : le paramètre de référence est codé par la chaîne  $\{010110\} = 22$ . En ne changeant qu'un seul bit de cette chaîne, il est possible d'obtenir les individus suivants :

$$\begin{aligned} \{010111\} &= 23 \\ \{010100\} &= 20 \\ \{010010\} &= 18 \\ \{011110\} &= 30 \\ \{000110\} &= 6 \\ \{110110\} &= 54 \end{aligned}$$

On constate que 3 des 6 possibilités sont à moins de 4 unités (18% d'écart maximum) de l'individu de référence, et 4 des 6 possibilités sont à moins de 8 unités (36% d'écart maximum). Seuls deux individus sont notablement éloignés ; ils correspondent aux deux individus pour lesquels les bits de poids dominant ont muté (5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> bits). On comprend intuitivement ainsi que la probabilité de création d'individus par mutation est une fonction non-linéaire, avec un maximum centré autour de l'individu de référence.

La première formulation remarquable, faisant intervenir une distribution de probabilité non-linéaire pour une mutation en codage réel, est la mutation normalement distribuée ("normally distributed mutation").

Elle est définie par la formule suivante :

$$x_p^{mutation} = x_p^{initial} + N(0, \sigma_p) \quad (\text{E.11})$$

où  $N(0, \sigma_p)$  est une valeur tirée aléatoirement de la Gaussienne centrée sur 0 et d'écart type  $\sigma_p$ . L'écart type pour chaque paramètre est fourni par l'utilisateur. Cet opérateur est couramment employé pour les algorithmes de type stratégies évolutionnaires.

La deuxième formulation remarquable est celle proposée par Deb et Goyal [33]. La formulation, connue sous le nom de *mutation polynomiale*, fait intervenir une loi de probabilité polynomiale  $P_{mp}$  déterminant l'amplitude de la mutation à partir d'un nombre aléatoire  $u_p$ . Cet opérateur est très similaire dans son mode de fonctionnement au SBX.

$$P_{mp}(s) = 0.5(\eta_m + 1)(1 - |s|)^{\eta_m} \quad (\text{E.12})$$

La probabilité  $P$  est définie sur l'intervalle  $[-1,1]$ ,  $\eta_m$  étant un paramètre de réglage. De la même manière que pour le SBX, on calcule un terme  $\delta_p$  tel que  $\int_{-1}^{\delta_i} P_{mp}(s)ds = u_p$ . Ce terme est donné par les relations suivantes :

$$\delta_p = \begin{cases} (2u_p)^{\frac{1}{\eta_m+1}} - 1 & \text{si } u_p \leq 0.5 \\ 1 - [2(1 - u_p)]^{\frac{1}{\eta_m+1}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.13})$$

A partir de ces valeurs, on détermine la valeur du paramètre muté avec la formule :

$$x_p^{mutation} = x_p^{initial} + \delta_p(x_p^R - x_p^L) \quad (\text{E.14})$$

Comme le montre la figure suivante (Fig. E.9), plus le facteur  $\eta_m$  est élevé, plus il est probable d'obtenir une mutation de faible amplitude.

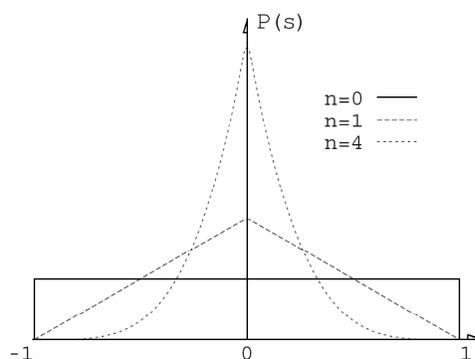


FIG. E.9 – Probabilité de mutation

Cet opérateur a fait l'objet d'un développement supplémentaire [30] afin de prendre en compte la présence de bornes pour chaque paramètre. Cela passe par une modification de l'expression de  $\delta_p$ .

$$\delta_p = \begin{cases} [2u_p + (1 - 2u_p)(1 - \gamma)^{\eta_m+1}]^{\frac{1}{\eta_m+1}} - 1 & \text{si } u_p \leq 0.5 \\ 1 - [2(1 - u_p) + 2(u_p - 0.5)(1 - \gamma)^{\eta_m+1}]^{\frac{1}{\eta_m+1}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.15})$$

avec

$$\gamma = \min[(x_p^{initial} - x_p^L)/(x_p^R - x_p^L), (x_p^R - x_p^{initial})/(x_p^R - x_p^L)]$$

## E.4 Elitisme

Beaucoup d'algorithmes génétiques sont construits en incluant une stratégie élitiste. En effet, la seule utilisation d'opérateurs fortement stochastiques (tous les opérateurs présentés qui induisent un changement des caractéristiques d'un individu utilisent un nombre aléatoire) ne garantit absolument pas que la population puisse s'améliorer de génération en génération. Par malchance, une génération peut ainsi voir tous les individus régresser par rapport à la population précédente. Afin de préserver un certain nombre de bonnes caractéristiques et ainsi favoriser une convergence monotone de l'algorithme, on introduit des mécanismes élitistes qui vont copier directement quelques bons individus d'une génération à une autre.

L'implémentation la plus simple de l'élitisme consiste à utiliser un opérateur copiant directement les  $\epsilon\%$  meilleurs individus de la génération précédente dans la nouvelle, les  $(100-\epsilon)\%$  autres étant créés avec les opérateurs génétiques précédemment étudiés. Bien évidemment, le choix du paramètre  $\epsilon$  est très influent sur les capacités de convergence de l'algorithme. Un  $\epsilon$  trop fort revient à copier trop d'individus d'une génération à une autre, limitant ainsi les capacités d'exploration de l'algorithme, au risque de générer une convergence prématurée. A l'inverse, un  $\epsilon$  trop faible revient à ne pas pratiquer d'élitisme. Il n'existe apparemment pas de consensus général sur la valeur de  $\epsilon$ , celui-ci étant fortement lié au cas traité. En conséquence, l'utilisation de cet opérateur nécessite de passer par une phase de réglage qui s'avère peu pratique.

Il existe une deuxième approche de l'élitisme qui ne repose plus sur un opérateur arbitrairement réglé, mais plutôt sur un traitement particulier de la population au passage d'une génération. En effet, l'élitisme consiste simplement à supprimer les enfants qui sont moins bien adaptés que les parents, les parents étant les individus les mieux adaptés de la génération précédente.

La généralisation de l'élitisme consiste donc à effectuer normalement les phases de reproduction et de mutation afin de générer les enfants, puis de comparer ces derniers aux parents. Se posent alors trois cas de figure :

- Les enfants sont meilleurs que les parents : ils sont gardés dans la nouvelle génération au détriment des parents.
- Les parents sont meilleurs que leurs enfants : ils survivent dans la nouvelle génération au détriment des enfants.
- Parents et enfants sont équivalents : on privilégie alors généralement les enfants, ou on fait appel à des critères supplémentaires pour les départager.

En pratique, il existe deux niveaux pour effectuer cette sélection. L'approche la plus intuitive revient à comparer les  $x$  enfants et  $y$  parents correspondant à *un appel* de l'opérateur de croisement (et de mutation immédiatement après sur les enfants). Par exemple, pour l'opérateur SBX, on compare les deux parents avec leurs deux enfants, et on en tire finalement deux individus qui seront placés dans la population finale. C'est une approche simple et directe qui pratique un élitisme "local" au sens où il ne tient compte que de quelques individus ayant des relations de parenté directe.

Le deuxième niveau classique consiste à générer les  $N$  enfants et à les comparer avec l'intégralité des  $N$  individus de la génération précédente. On ne garde au final dans la nouvelle génération que les  $N$  meilleurs individus parmi les  $2N$  considérés. Cette méthode pratique un élitisme plus "global" au sens où elle fait intervenir tous les individus. En particulier, on est vraiment assuré de garder les meilleurs individus de la population précédente -à condition qu'ils soient éligibles- même si ces derniers n'ont (malheureusement) pas été sélectionnés pour se reproduire ; dans la version locale, seuls les individus sélectionnés pour la reproduction ont une chance de survivre au changement de génération. A ce titre, cette deuxième version est la plus employée dans les algorithmes modernes.

## E.5 Pareto-efficacité

Une autre méthode potentiellement accélératrice existe. Il s'agit de la Pareto-efficacité introduite par Di Piero et al. [38] dans un algorithme similaire au NSGA-II de Deb. On définit cette notion au sein de la population Pareto-optimale  $P_{pareto}$  comme :

**Définition E.1 :** [PARETO-EFFICACITÉ D'ORDRE  $k$ ]

Soit un individu  $\mathbf{x} \in P_{pareto}$ . Cet individu est dit Pareto-efficace d'ordre  $k$  si quel que soit le sous-espace de dimension  $k$  de l'espace des objectifs  $E_{obj}$ , il est non dominé dans ce sous-espace.

En termes plus concrets, la Pareto-efficacité traduit le degré de "non dominance" des individus Pareto-équivalents : plus les individus seront dominés par le reste des optima sur un grand nombre d'objectifs, moins ils seront efficaces. La Pareto-efficacité d'ordre  $I$  est trivialement équivalente à la Pareto-optimalité classique, ce qui permet donc d'affirmer que l'efficacité constitue une généralisation du concept de Pareto-dominance. L'efficacité d'ordre 1 n'est pas définie, le niveau minimum étant 2. Elle n'est donc définie que pour  $I \geq 3$ .

Le tableau [E.2] donne un exemple pour quatre objectifs . Les niveaux d'efficacité sont partiellement contraints : pour au moins  $I = 4$  ou  $I = 5$  la présence d'un seul individu efficace d'ordre 2 implique nécessairement que les autres individus sont au mieux efficaces d'ordre 4.

Individu $i$	$f_1(\mathbf{x}_i)$	$f_2(\mathbf{x}_i)$	$f_3(\mathbf{x}_i)$	$f_4(\mathbf{x}_i)$	Pareto-efficacité
I	5	1	1	2	2
II	6	6	6	0	4
III	0	2	3	4	4

TAB. E.2 – Exemple de Pareto-efficacité

L'algorithme POGA (Pareto Ordering Genetic Algorithm) donné dans [38] fait intervenir la Pareto-efficacité lors des phases de sélection, mais uniquement pour les individus du front dominant. En supprimant, ou au moins en écartant, les individus optimaux mais fortement dominés, on se concentre sur les "meilleurs parmi les meilleurs" et on peut ainsi espérer accélérer le processus de convergence. Les individus peu efficaces peuvent être perçus comme un bruit au sens de la convergence puisqu'ils n'introduisent qu'une amélioration assez faible. De ce point de vue, l'efficacité reprend les mêmes principes généraux que l'élitisme mais les deux approches restent cependant fondamentalement différentes.

La technique est apparue assez récemment et, selon ses inventeurs, semble prometteuse pour les cas avec beaucoup d'objectifs. Cependant, elle peut introduire un biais non négligeable dans l'optimisation. Imaginons qu'il existe un individu optimum qui soit dominé sur tous les critères sauf un noté  $f_k$ , celui-ci étant en revanche largement meilleur que pour les autres individus optimaux. On peut dans l'absolu souhaiter garder cet individu, car il offre une tendance intéressante tant du point de vue de l'optimisation que de l'analyse de la physique sous-jacente (cela peut être le signe d'une discontinuité forte dans l'objectif, ouvrant peut-être sur une zone encore meilleure de l'espace paramétrique). Or en utilisant le concept de Pareto-efficacité, cet individu sera probablement négligé car il sera moins bien classé que les individus optimaux efficaces mais "moyens" au sens de la fonction objectif  $f_k$ . En supposant qu'il n'existe pas d'individu très efficace (ordre 2 ou voisin), la méthode tendra à privilégier les individus "moyens" dans l'espace objectif.

Cette technique n'est vraiment pertinente que pour des cas présentant beaucoup ( $\gg 5$ ) de critères. Dans le cas contraire, les algorithmes classiques construits sur la Pareto-optimalité sont à peu près équivalents en terme de principe et donc de convergence. Compte tenu de toutes les limites évoquées, on laissera de côté cette technique.

## E.6 Préservation de la diversité

Comme on vient de l'introduire avec l'élitisme, il est parfois nécessaire de faire des choix entre les individus puisqu'on travaille avec des populations de tailles constantes. Le premier critère est bien évidemment l'adaptation de chaque individu. Cependant, on ne peut exclure que deux individus mis en concurrence soient équivalents du point de vue de ce critère, notamment dans le cas où les individus sont rangés par fronts, donc par groupes similaires. Il convient alors de définir des critères supplémentaires pour les départager. On évitera d'ores et déjà d'utiliser le numéro de la génération, pour choisir par exemple les individus les plus récents, puisque le même problème peut se poser.

Pour faciliter la convergence et l'exploration opérées par l'algorithme, on a introduit un ensemble d'opérateurs visant à assurer une certaine diversité des individus. On cherche en effet une population optimale décrivant le mieux possible le front de Pareto, c'est à dire une population :

- qui soit sur le front de Pareto (c'est une évidence) et non pas sur un optimum local.
- qui soit suffisamment dispersée pour qu'une grande région du front soit peuplée d'individus.

Ainsi, plus la population sera variée, plus il sera facile d'obtenir ces deux conditions. La diversité est une notion essentielle surtout pour les problèmes d'optimisation multimodaux.

On a déjà vu que la diversité était en grande partie assurée pas la mutation, néanmoins utilisée avec beaucoup de parcimonie afin de ne pas perturber la convergence, et dans une moindre mesure par le croisement. La variance de la population est en revanche réduite par la sélection pré-reproductrice.

L'idée de critère supplémentaire la plus naturelle dans ce contexte est donc celle d'une mesure de la diversité.

### E.6.1 Approche de niche - Sharing

Le concept qui inspire cette première approche est assez simple : si un individu du front de Pareto a beaucoup de voisins proches, il existe quelque part sur le front un autre individu ayant peu de voisins. On distingue ainsi des "niches" dans la population, certaines étant densément peuplées, d'autres pas. Il faut donc privilégier les secondes pour espérer avoir une meilleure description du front. En pratique, cela passe par une dégradation de la fitness des individus dans les zones densément peuplées. Le "sharing" est une version de niche introduite par Goldberg et Richardson [64] pour traiter ce problème. Les auteurs commencent par définir une adaptation partagée ("shared fitness") comme étant le rapport entre la *fitness*  $f_i$  d'un individu au nombre de voisins ("nich count")  $m_i$  présents dans la niche de cet individu. Ils avancent qu'à l'équilibre, les niches sont caractérisées par :

$$\frac{f_i}{m_i} = \frac{f_j}{m_j}, \forall i, j \quad (\text{E.16})$$

On définit le nombre  $m_i$  comme :

$$m_i = \sum_{j=1}^N Sh(d(i, j)) \quad (\text{E.17})$$

où

$$Sh(d(i, j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } d(i, j) > \sigma_s \\ 1 - \left(\frac{d(i, j)}{\sigma_s}\right)^\alpha & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.18})$$

$d(i, j)$  étant la distance euclidienne entre les individus  $i$  et  $j$ , calculée dans l'espace paramétrique, et  $\sigma_s$  un rayon de niche de référence, imposé par l'utilisateur, de même que l'exposant  $\alpha$ . Ce dernier n'a semble-t-il pas beaucoup d'effet [27] et il est dans la plupart des applications pratiques pris égal à 1. De cette définition on déduit que pour une "fitness" identique, l'algorithme assigne une "shared fitness" plus faible aux individus présents dans les niches très peuplées.

Cette définition ne doit pas se substituer au partage selon l'adaptation, mais seulement intervenir en complément. En effet, avec la relation (E.16), on comprend que deux fronts successifs tendraient, par cette seule sélection, à disposer d'un nombre différent d'individus. En particulier, le front de Pareto qui peut être considéré comme la niche d'adaptation  $f_{pareto} = 1$  se verrait dépeuplé au profit des autres fronts de rangs  $f_j$  supérieurs. De ce fait, le sharing n'a vraiment de sens que dans la comparaison d'individus d'égale adaptation.

La valeur de  $\sigma_s$  est critique et constitue à ce titre une limitation pour l'emploi de cette méthode. La définition de la taille des niches revient implicitement à définir un nombre de niches et donc de zones optimales possibles. Si le front de Pareto est discontinu, et si on dispose a priori du nombre de sous-ensembles, le réglage est facile. A l'inverse, dans le cas général il faudrait idéalement disposer du rayon moyen d'attraction des optima, mais cette valeur n'est pas connue à l'avance, sauf dans les cas tests. Deb et Goldberg [32] proposent une définition correspondant à  $q$  niches équiréparties dans l'espace paramétrique :

$$\sigma_s = \frac{0.5 \sqrt{\sum_{p=1}^P (x_p^R - x_p^L)^2}}{\sqrt[q]{q}} \quad (\text{E.19})$$

Une autre définition est donnée par Horn et Nafpliotis [79] pour tenir compte de la représentation finale du front de Pareto. Ils cherchent à répartir le plus possible les individus sur la surface du front de Pareto. Pour ce, ils définissent :

$$(\sigma_s)^{P-1} = \frac{S_{pareto}}{N} \quad (\text{E.20})$$

$S_{pareto}$  étant une mesure de la surface du front de Pareto dans l'espace paramétrique. Cette deuxième méthode présente néanmoins l'énorme inconvénient de demander des informations sur le front de Pareto qui est généralement inconnu. Suivant le même type de démarche, Fonseca et Fleming [51] proposent une troisième règle pour un calcul de  $\sigma$  à chaque génération. Il n'existe apparemment pas de comparaison fiable des différentes méthodes.

## E.6.2 Crowding Distance

La deuxième "mesure" de la diversité a été introduite par DeJong [35] sous le nom de *crowding distance*. La différence la plus remarquable par rapport au sharing réside dans le fait que cette mesure est définie dans l'espace des objectifs. On définit ainsi une distance  $d_{crowding}$  d'un individu  $k$  comme :

$$d_{crowding}(k) = \sum_{i=1}^I (f_i^{(k-Sup)} - f_i^{(k-Inf)}) \quad (\text{E.21})$$

où  $f_i^{(k-Sup)}$  et  $f_i^{(k-Inf)}$  sont les valeurs des objectifs pour les plus proches voisins *encadrant* l'individu  $k$  dans l'espace objectif, pour chaque direction.

Graphiquement (et algorithmiquement), cela revient à déterminer quels sont les deux plus proches voisins de part et d'autre de l'individu considéré dans l'espace objectif et à additionner les dimensions des hypercubes définis par ces voisins. Le cas bi-objectifs est illustré sur la figure suivante (Fig. E.10).

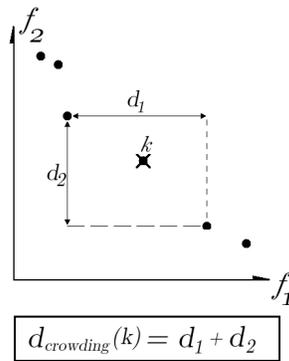


FIG. E.10 – Crowding distance

On remarquera à ce niveau que pour  $I \geq 3$ , il n'y a aucune obligation que les individus voisins et encadrants soient les mêmes dans chaque direction. Le cas général est illustré sur la figure suivante (Fig. E.11) pour  $I = 3$ . Les individus  $k$ ,  $I$ ,  $II$  et  $III$  sont tous équivalents au sens de Pareto.

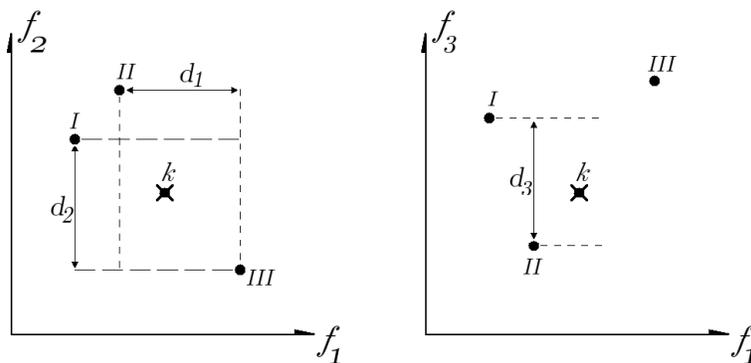


FIG. E.11 – Crowding distance - cas général

Au final, la "crowding distance" représente une mesure de la densité locale de la population sur le front de Pareto, une petite distance correspondant à une grande densité. A ce titre, le traitement par cette méthode d'une optimisation vise surtout à obtenir rapidement une bonne discrétisation du front de Pareto, la plus équirépartie possible. Elle est employée comme un critère supplémentaire pour effectuer un tri et une sélection parmi les individus équivalents en terme d'adaptation.

Fondamentalement, elle privilégie la diversité dans l'espace objectif, mais on peut logiquement espérer que cela se traduise aussi par une diversité dans l'espace paramétrique : à condition que le problème étudié ait une certaine robustesse (i.e. une sensibilité réduite des objectifs relativement aux paramètres), la diversité dans l'espace objectif implique plus facilement la diversité dans l'espace paramétrique que la relation inverse (deux configurations paramétriques nettement différentes peuvent conduire au même résultat car les objectifs peuvent être des fonctions surjectives).

Son principal avantage par rapport à une approche de type "sharing" est qu'elle ne nécessite aucun réglage par l'utilisateur. On notera que par sa définition, cette méthode est implicitement liée au traitement d'individus appartenant à *un même front au sens de Pareto*. L'appliquer à des individus appartenant à plusieurs fronts introduit une erreur de mesure qui tient compte de la

distance entre fronts, ce qui n'est évidemment pas un critère très pertinent dans un processus itératif d'optimisation, notamment en fin d'optimisation quand les fronts sont assez resserrés.

Pour les individus de bord, qui n'ont par définition pas de voisins les encadrant, on attribue une distance arbitraire, généralement prise à  $+\infty$ .

### E.6.3 Limites d'utilisation de ces méthodes

Ces deux méthodes de préservation de la diversité souffrent d'un défaut majeur. En effet, elles font intervenir, simultanément et sans distinction, tous les paramètres ou tous les objectifs. Or, selon le problème considéré, il peut exister des écarts considérables entre ces derniers, amenant un problème d'homogénéité en terme d'ordre de grandeur. Une fois de plus, il est nécessaire d'adimensionner les grandeurs traitées pour éliminer ce problème. Pour la "crowding distance", la solution proposée par [31] est d'adimensionner chaque fonction objectif par la valeur maximum rencontrée sur le front traité. Pour le "sharing", le problème est un peu plus complexe à résoudre dans la mesure où on ne connaît pas forcément de valeurs limites des paramètres. On peut néanmoins utiliser une valeur moyenne de chaque paramètre.

## E.7 Traitement des contraintes

La gestion des contraintes par les algorithmes génétiques n'a pas encore été abordée. Or cet aspect peut être assez problématique avec les algorithmes génétiques (et plus généralement avec les méthodes évolutionnaires) dans la mesure où ces derniers ne sont pas limités dans leur recherche. Comme on l'a vu précédemment, quelques essais ont été faits au niveau des opérateurs pour éviter de générer une solution qui soit en dehors de la plage paramétrique autorisée, mais il n'existe en revanche aucune méthode pour prendre en compte les contraintes de type inégalités/égalités définies par les relations  $g_j$  et  $h_k$  dans le problème général (4.1). Il est donc nécessaire de modifier ou d'ajouter des étapes dans le traitement algorithmique pour traiter le problème.

On parlera alors d'individus *faisables* ou *infaisables* (ou bien *irréalistes*) selon qu'ils satisfont ou non à toutes les contraintes imposées. Pour les individus infaisables, on désignera par violations de contraintes les écarts observés par rapport au critère. Quel que soit le type de contrainte considéré, c'est à dire égalité ou inégalité, la violation de la contrainte  $\Gamma$  peut s'écrire selon les conventions données en (4.1) :

$$\text{violation}_{\Gamma}(\mathbf{x}) = |\Gamma(\mathbf{x})|$$

Insistons sur le fait que pour les inégalités, on a  $\Gamma(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$  si et seulement si  $g(\mathbf{x}) < 0$ , soit une violation effective, sinon  $\Gamma(\mathbf{x}) = 0$ . On peut considérer que les inégalités constituent des contraintes "faibles", au contraire des égalités. On remarquera que toute égalité peut se traiter exactement via deux inégalités ou bien de manière approchée via une seule inégalité.

La première possibilité de traitement des contraintes par un algorithme génétique est fort simple : elle consiste à rejeter toute solution infaisable. Cette sélection est faite principalement au niveau de la phase de reproduction [22]. En pratique, si un enfant est jugé infaisable, il est éliminé au profit d'un de ses parents. Cette approche pose néanmoins une difficulté majeure : dans un problème pour lequel il existe beaucoup de contraintes, trouver un individu qui les satisfasse toutes peut être ardu et avec une telle approche, la population risque de ne jamais évoluer. Il est donc nécessaire d'utiliser une approche plus flexible pour traiter efficacement une grande variété de problèmes.

La deuxième voie envisageable est une réécriture du problème. En effet, pour les contraintes définies analytiquement par une relation d'égalité, on peut éliminer certains paramètres : supposons que la  $k^{\text{i-ème}}$  contrainte soit définie par :

$$h_k(\mathbf{x}) = 3x_1 + x_2^2 - x_3x_1 = 0$$

De manière évidente, en imposant que  $x_2 = \sqrt{x_3x_1 - 3x_1}$ , on est assuré que  $\mathbf{x}$  vérifiera cette contrainte. Pour  $k$  contraintes exprimées, on peut éliminer de l'espace de recherche  $k$  paramètres. Pour chaque individu non faisable, une fois que les  $k$  valeurs correctes ont été déterminées, il existe deux possibilités de traitement :

- Soit l'individu est réparé directement, c'est-à-dire que les paramètres défectueux sont remplacés. On parle alors de réparation "lamarckienne". Les individus corrigés sont alors remis dans la population
- Soit il ne subit pas de modification de son génome. En revanche, les valeurs corrigées sont utilisées pour le calcul des différents objectifs et critères [123]. L'approche, qualifiée de "baldwinienne" établit une analogie biologique avec les gènes récessifs : la mauvaise valeur du paramètre est considérée comme récessive. Localisée dans les chromosomes de l'individu, elle est dominée par la bonne valeur, codée dans un chromosome virtuel (il n'est physiquement pas écrit) et elle ne s'exprime donc pas. En revanche, ce paramètre peut être modifié par les différents mécanismes évolutifs et peut (on l'espère) conduire à une valeur admissible.

Selon [28], l'approche lamarckienne est moins efficace que son homologue, malgré sa simplicité d'implémentation.

Quel que soit le mode de réparation choisi, cette technique présente cependant deux inconvénients majeurs. En premier lieu, elle est incapable de traiter des contraintes exprimées sous forme d'inégalités. De fait, le champ d'application est plutôt réduit car ce type de contrainte est le plus répandu.

En deuxième lieu, l'élimination de paramètres peut aussi être difficile. En effet, dans l'exemple donné précédemment, on suppose que  $x_2$  est positif, ce qui n'est pas forcément le cas. Du point de vue mathématique, on se limitera donc aux paramètres exprimables sans équivoque en fonction des autres. D'autre part, il est nécessaire de faire des choix si jamais plusieurs paramètres sont éligibles.

En conséquence, ce type de technique ne peut être appliqué qu'au cas par cas, avec un soin particulier apporté à la reformulation qui demandera un travail de la part de l'utilisateur.

La troisième approche, et sûrement la plus populaire, est l'utilisation d'une pénalité liée à la violation de contrainte. En principe, cela revient à pénaliser un individu qui ne respecterait pas les contraintes, cet individu étant ensuite moins facilement sélectionné et donc potentiellement éliminé de la population. La méthode est à ce titre généralement appliquée avant les phases de sélection.

Cette technique est dérivée de l'agrégation de fonctions objectifs. Comme généralement il n'existe pas de relation hiérarchique ni de similitude évidente entre contraintes et objectifs, il est nécessaire de condenser toutes les violations dans un seul scalaire. On définit ainsi la pénalisation des différents objectifs :

$$f_i^{\text{pénalité}}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) - r_i \sum_j |g(\mathbf{x})| \quad (\text{E.22})$$

Le vecteur de pondération  $r = (r_i)$  est spécifié par l'utilisateur. Il sert à assurer une cohérence en ordre de grandeur entre les objectifs et les violations. On remarquera la similitude de l'équation (E.22) avec une approche de type Lagrangienne pour un problème contraint. Ici, le terme de

contrainte présent dans le Lagrangien est remplacé par le terme de violation des contraintes, le multiplicateur de Lagrange variable étant remplacé par la constante  $r$ . Sous cette forme, on supposera en outre que les termes de violation  $g_j$  sont adimensionnés pour ne pas introduire de disparité parmi les contraintes.

Le réglage de  $r$  est critique, et ce à deux niveaux.

- Au premier niveau, si on choisit  $r$  tel que  $|r|$  est faible, la pénalité sera globalement faible au risque de négliger les contraintes. A l'opposé, un  $r$  trop fort va sur-pénaliser les solutions infaisables et on risque de retrouver les problèmes inhérents à la première approche.
- Au second niveau, la donnée de chaque  $r_i$  est elle aussi problématique. La disparité entre ces coefficients va générer une différence de traitement pour les objectifs, le risque étant d'en privilégier certains. Le front de Pareto obtenu à convergence se basant sur les  $f_i^{\text{pénalité}}$ , on comprend que de cette manière il est possible d'introduire un biais réduisant ou déformant le "vrai" front de Pareto.

Le paramètre  $r$  doit donc être réglé finement en fonction du problème traité, ce qui nécessite un certain nombre de tests préparatoires. Dans ces conditions, la méthode perd un peu d'intérêt.

Certains auteurs [78, 131] ont proposé des variations sur cette technique pour inclure un réglage dynamique de  $r$ , faisant écho au cas où un des objectifs changerait notablement. Dans l'ensemble, les méthodes dynamiques restent peu appliquées dans la plupart des études.

La dernière grande classe de traitement des contraintes cherche à éviter les défauts précédents. Pour cela, il est nécessaire de découpler violation des contraintes et objectifs. En faisant cela, on rend l'utilisation du vecteur  $r$  inutile, et il est même possible de se passer de l'agrégation des violations. Concrètement, il suffit de remplacer les opérateurs de sélection classique par des versions plus évoluées prenant en compte la satisfaction des contraintes. Schématiquement, on peut résumer les différents opérateurs proposés dans la littérature par les règles suivantes. Pour comparer deux individus :

1. Si les deux entités sont faisables, on fait un appel à un critère classique, généralement le rang de Pareto.
2. Si l'un des deux individus est infaisable il est rejeté.
3. Si les deux sont infaisables, on fait appel à une comparaison sur la violation de contraintes.

Les différences qui apparaissent ensuite entre les méthodes de ce type résident essentiellement dans la définition précise des critères de choix pour les cas 1 et 3. La méthode de Jiménez et al. [93] fait par exemple intervenir des ensembles annexes de solutions faisables (cas 1) ou infaisables (cas 3) pour comparer avec les deux individus sélectionnés pour le tournoi. Si ces derniers s'avèrent équivalents au regard de cette comparaison, on utilise alors un critère supplémentaire comme les mesures de sharing pour faire le choix final.

Le tournoi de Ray et al. [152] fait quant à lui intervenir un triple classement de tous les individus : un classement de Pareto sur les objectifs, un classement de Pareto sur les violations de contraintes (les individus faisables étant de rang 1), et enfin un classement de Pareto sur les objectifs et les violations simultanément. Dans cette dernière approche, il n'est même pas nécessaire d'adimensionner les violations pour effectuer les classements. On trouvera un aperçu assez complet des différentes méthodes dans l'ouvrage de Deb [28].

La force de cette dernière classe de traitement réside dans sa généralité. Elle ne nécessite en effet pas de réglage particulier de la part de l'utilisateur et peut donc être appliquée sans trop d'efforts à nombre de problèmes.

## E.8 Algorithmes distribués, hiérarchiques et multi-niveaux

Il est connu que le plus gros frein à l'utilisation des algorithmes génétiques en ingénierie est leur consommation importante de ressources. En effet, les algorithmes génétiques travaillent en général sur des populations de l'ordre de quelques centaines d'individus. Chacune des solutions doit faire l'objet d'une évaluation pour que le processus puisse continuer. Or, dans certains domaines et plus particulièrement en mécanique des fluides, le calcul de la solution est très coûteux en temps et en ressource informatique. Il n'est pas rare d'avoir des calculs longs de plusieurs jours pour obtenir un champ aérodynamique raisonnablement convergé. Multiplié par le nombre d'individus et de générations, le problème devient vite insurmontable.

La première technique utilisable est *l'approche distribuée* [99]. Elle est calquée sur le développement du calcul scientifique parallèle. En pratique, on ne considère plus une seule grosse population, mais un ensemble de sous-populations reliées entre elles par un graphe à définir. Chaque sous-population est soumise à évolution pendant un certain laps de temps, généralement appelé *époque*. A la fin de chaque époque, les sous-populations échangent des informations avec leurs voisines, en transmettant par exemple les meilleurs individus trouvés. L'avantage de la méthode est qu'elle utilise des populations plus petites, et elle semble demander moins d'évaluation qu'un algorithme génétique classique pour converger [187]. Un autre point intéressant émergeant de cette méthode est la possibilité d'employer différents algorithmes génétiques pour traiter les sous-populations : en réglant spécifiquement chacun relativement à la population traitée, on peut ainsi optimiser la convergence.

Afin de gagner en efficacité, Sefrioui et Périaux [165, 66] ont imaginé de construire des algorithmes avec une *structure hiérarchisée*. Le cœur de leur méthode est d'utiliser plusieurs niveaux d'approximation pour l'évaluation des individus. Ici aussi, on considère plusieurs sous-populations évoluant indépendamment pendant des périodes puis subissant des phases d'échanges. Ces sous-populations sont maintenant classées par niveaux selon un arbre binaire. En bas de l'arbre, on utilise des solveurs très approximatifs pour évaluer les individus. Au fur et à mesure qu'on monte dans l'arbre, les solveurs sont affinés, le dernier niveau ayant idéalement le solveur le plus précis pour procéder à une optimisation fine. Dans le cadre du calcul numérique, on peut parfaitement utiliser plusieurs niveaux de raffinement de maillage pour créer plusieurs niveaux d'évaluation.

La figure suivante (Fig. E.12) montre un algorithme à trois niveaux pour lequel on a choisi de garder des sous-populations de tailles égales.

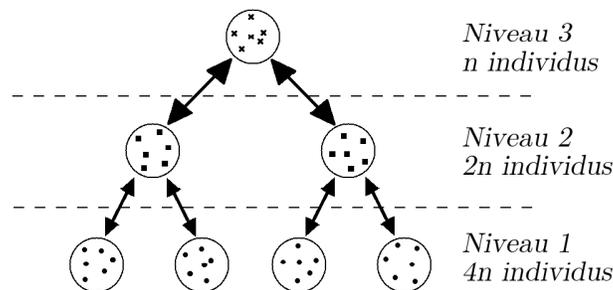


FIG. E.12 – Algorithme à structure hiérarchique

Pendant les phases d'échanges, les meilleurs individus sont copiés vers les niveaux supérieurs où

ils sont alors réévalués pour avoir une meilleure estimation de leur adaptation. Les pires individus sont aussi transmis vers les niveaux inférieurs.

De cette manière, on effectue en bas de l'arbre une exploration de l'espace : la population des niveaux inférieurs est beaucoup plus importante, donc plus à même de recouvrir l'intégralité de la surface. Pour autant, grâce aux solveurs approchés, cette exploration n'est pas très coûteuse. De cette exploration, on ne retient que les zones semblant optimales, lesquelles sont transmises aux niveaux supérieurs. Ces zones, qui représentent un nombre plus restreint d'individus, sont alors évaluées et optimisées plus finement. Dans le niveau final, seuls les individus sur le front de Pareto sont traités et optimisés très finement, ce qui demande un effort de calcul global assez faible en raison de la faible taille de la population. C'est bien évidemment la population de ce dernier niveau qui constitue le résultat de l'optimisation.

Les auteurs ont en outre proposé une petite modification de leur méthode. Ils reprennent l'idée d'algorithmes distincts apparue dans les méthodes distribuées. De cette façon, on peut alors renforcer le caractère exploratoire des niveaux inférieurs, en introduisant une probabilité de mutation forte par exemple, et privilégier uniquement l'optimisation dans les étages supérieurs. De manière générale, on remarquera que cette approche hiérarchique est conceptuellement proche de la technique multigrille en calcul classique.

Les algorithmes hiérarchiques font partie d'une classe plus générale, celle des algorithmes *multi-niveaux* [57, 97]. Les algorithmes multi-niveaux se partagent selon trois "modes" principaux :

- évaluation : les algorithmes hiérarchiques tels que présenté précédemment
- méthode de recherche : les algorithmes hybrides
- paramétrisation : les algorithmes à paramétrisation multiple

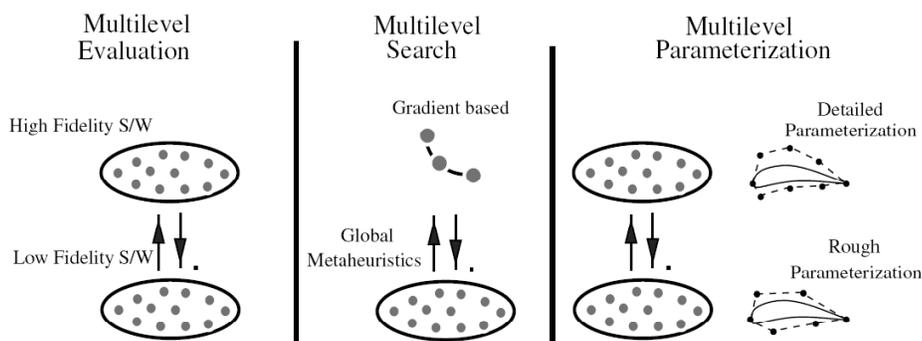


FIG. E.13 – Algorithmes Multi-niveaux (Reproduit de Kampolis,2008)

Dans les deux derniers modes, on soulignera qu'il est possible de garder une notion de hiérarchie. Les algorithmes hybrides font intervenir à la fois une optimisation de type génétique et une approche directe. L'approche directe assure la convergence rapide de quelques individus vers un optimum, les mécanismes génétiques permettant de ne pas rester piégé par les optima locaux.

Dans l'approche à paramétrisation multiple, on choisit de supprimer certains paramètres en fonction du niveau. Ceci est surtout valable quand le problème présente beaucoup de paramètres. En conséquence, certains niveaux ne traitent que quelques variables, d'autres traitent tous les paramètres. Les premiers niveaux génèrent donc des optima sur des problèmes restreints, lesquels

sont ensuite repris sur des problèmes de plus en plus complets pour aboutir à la solution du vrai problème. Cette technique est généralement appliquée au problème d'optimisation de forme.

## E.9 Evaluation des individus

Dans les parties précédentes, on a toujours supposé qu'il était possible d'obtenir *simplement* une évaluation des individus considérés afin de poursuivre l'optimisation. On se restreindra ici volontairement aux cas impliquant une simulation numérique pour effectuer l'évaluation, mais on pourrait généraliser sans erreur la problématique aux cas expérimentaux. Cette hypothèse est valable tant que le problème traité est simple, tant du point de vue de la physique que de la précision requise.

Cependant, en mécanique des fluides, et plus généralement dans les domaines faisant appel à la résolution d'équations non linéaires pour la simulation des phénomènes physiques, le terme simple n'est pas de mise. La résolution des équations de Navier-Stokes se fait itérativement, avec un temps de convergence plus ou moins long selon la complexité de l'écoulement considéré. De plus, les exigences actuelles sur la fidélité de la modélisation impliquent l'utilisation de maillages de plus en plus fins et donc lourds, ce qui ralentit encore plus la simulation. Pour une simulation RANS sur une géométrie "industrielle" (aube de compresseur ou turbine, vanne, injecteur, etc...), il n'est aujourd'hui pas rare de devoir attendre plusieurs jours avant d'atteindre un niveau de convergence autorisant une exploitation fiable, ce qui représente un coût non négligeable.

Selon la méthode d'optimisation utilisée, on peut ou non se permettre d'envisager une simulation directe. Par exemple, pour une méthode directe efficace, *et en supposant que la configuration initiale ne soit pas trop éloignée d'un optimum*, l'optimisation se fera idéalement en quelques pas. Si la configuration ne nécessite que quelques heures de simulation, la technique reste réaliste. A l'inverse, s'il est nécessaire de faire beaucoup d'itérations, la simulation directe de chaque individu devient vite utopique.

Bien que méthodes directes et évolutionnaires soient toutes soumises à ce problème, les dernières y sont les plus sensibles. On se rappellera que les méthodes métaheuristiques en général, et les algorithmes génétiques en particulier, font appel à des populations de plus ou moins grandes tailles. Des groupes de plusieurs centaines d'individus ne sont pas exceptionnels et sont de plus recommandés pour garantir la convergence de l'optimisation vers le front de Pareto. A chaque itération, on peut donc créer plusieurs centaines de nouveaux individus, et il est souvent (toujours) nécessaire de traiter un grand nombre de générations. Pour une seule optimisation, un algorithme génétique performant traitera plusieurs milliers d'individus avant d'aboutir à la population optimale. Pour cette raison, il est aujourd'hui bien connu que les algorithmes génétiques sont inexploitablement en mécanique des fluides s'ils n'ont pas fait l'objet d'une modification sur la phase d'évaluation.

Il n'y a pas beaucoup de solutions au problème posé par la phase d'évaluation. Soit on accepte de simplifier le problème en adoptant par exemple une modélisation plus simple (Euler au lieu de Navier-Stokes, maillage beaucoup plus grossier, ...) ce qui n'est souvent pas possible, soit on utilise une méthode approchée pour évaluer les individus. C'est cette deuxième voie que l'on présente maintenant.

### E.9.1 Approche paramétrique

Dans cette technique d'évaluation, on déterminera les caractéristiques des individus au moyen d'un modèle donnant les variations de chaque objectif autour d'un point de référence. Il s'agit de la

mise en œuvre et de l'exploitation du résultat de la paramétrisation tel qu'il peut être obtenu avec un solveur comme Turb'Opty. Il s'agit fondamentalement d'une *extrapolation* puisque toutes les données nécessaires à la reconstruction sont déterminées en un point, ce point étant le seul faisant l'objet d'une évaluation précise directe. On ne reviendra pas sur les différentes techniques de reconstruction présentées auparavant, chacune présentant des avantages certains selon le comportement des objectifs à reconstruire.

En émettant l'hypothèse que la physique simulée ait un comportement polynomial d'ordre faible, cette technique permet de reconstruire avec une série de Taylor une approximation de chaque objectif. Si on suppose par exemple que tous les objectifs ont un comportement quadratique relativement aux paramètres, il est possible d'obtenir une reconstruction exacte de ces critères via une série de Taylor à l'ordre 2. Dans le cas général, l'erreur sera d'autant plus grande que l'individu testé sera éloigné du point de référence.

Comparativement aux interpolations présentées ensuite, l'avantage de l'extrapolation est bien évidemment de ne nécessiter qu'un seul point de référence, avec plus ou moins de dérivées. La question de l'échantillonnage nécessaire à l'interpolation ne se pose pas ici, ce qui réduit de fait l'intervention humaine et les biais qu'elle peut engendrer dans la reconstruction. La seule limitation est alors le nombre d'informations disponibles au point de référence ou plus prosaïquement le nombre de dérivées, lequel détermine la précision de la reconstruction en tout point de l'espace paramétrique.

## E.9.2 Modélisation interpolatrice de la population

Dans cette deuxième classe générale, l'évaluation des individus se fait sur la base d'un modèle sur plusieurs individus. En effet, on supposera qu'on dispose au départ d'un ensemble d'individus de référence (aussi appelés échantillons) pour lesquels les différents objectifs sont connus de manière précise. On construit ensuite une modélisation analytique de la population à partir de cet ensemble. Cette classe est désignée génériquement dans la littérature par le terme *métamodèle*.

Les métamodèles relèvent tous d'une interpolation, plus ou moins complexe et précise : puisqu'on ne connaît que la valeur des objectifs pour chaque individu, une modélisation *pertinente* ne pourra être mathématiquement déterminée qu'avec une fonction imitant quelques individus de référence.

La problématique de la construction de l'échantillonnage initial ne sera pas abordée en détail ici. On supposera dans le cas général que l'échantillonnage est aléatoire, mais il est parfois obligatoire d'imposer des contraintes de répartition afin de garantir une bonne approximation.

### E.9.2.1 Surface de réponse

Le modèle interpolatoire le plus simple et le plus courant est bien évidemment la surface de réponse [141, 170]. De manière classique, on reproduit les fonctions objectifs  $f$  par des polynômes  $\tilde{f}(\mathbf{x})$ . Si on choisit une reconstruction cubique, on a ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{SR}(\mathbf{x}) = & a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Px_P \\ & + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1P}x_1x_P \\ & + \dots + a_{PP}x_P^2 \\ & + a_{111}x_1^3 + a_{112}x_1^2x_2 + \dots + a_{PPP}x_P^3 \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

Les coefficients  $a_i$ ,  $a_{ij}$  et  $a_{ijk}$  étant déterminés par rapport à une population de référence pour laquelle on dispose déjà d'évaluations. Le calcul des coefficients est généralement effectué par une régression aux moindres carrés, c'est à dire en minimisant  $\left\| \tilde{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right\|_2$ .

L'utilisation d'une surface de réponse soulève plusieurs problèmes. Tout d'abord, il est nécessaire du point de vue mathématique de disposer au moins d'autant d'échantillons de référence que de coefficients afin d'éviter une indétermination. Cette contrainte est très vite limitante puisque pour  $P$  paramètres, une modélisation linéaire utilise par exemple  $P + 1$  coefficients, une approche quadratique  $1 + 2P + (P - 1)!$ . Quand  $P$  augmente, on doit ainsi fournir très vite un grand nombre d'échantillons : la seule construction de la population de référence demande alors un nombre non négligeable de calculs par solveur classique et on perd ainsi l'intérêt de l'utilisation d'un métamodèle.

Le deuxième inconvénient de cette méthode est qu'elle implique une hypothèse sur la complexité de la vraie physique. Il est évident qu'une surface de réponse linéaire appliquée à une fonction globalement quadratique va générer une erreur d'évaluation conséquente, l'erreur s'amplifiant encore si la fonction est cubique. Or, ces deux comportements sont assez représentatifs de ce qu'on peut observer en mécanique des fluides (avec bien évidemment des comportements d'ordre encore plus élevé). Cette remarque, couplée à l'observation précédente relative au nombre d'échantillons nécessaires, montre clairement que cette technique n'est pas adaptée à un cas d'optimisation en mécanique des fluides : le cas d'optimisation général étant fortement multi-paramétrique avec une physique non linéaire, on doit soit privilégier la facilité de mise en œuvre au détriment de la précision, soit la réciproque.

En revanche, les surfaces de réponse présentent un gros avantage lors de l'utilisation de méthodes directes. De par leur construction analytique, il est possible d'obtenir facilement des informations telles que le gradient en tout point en dérivant directement l'expression. De cette manière, on obtient les dérivées successives *du modèle* sans l'erreur de troncature introduite, par exemple, par une différence finie.

### E.9.2.2 Kriging

La deuxième classe de métamodèle couramment utilisée est celle du *Kriging* (Krige,[109]). A l'origine utilisée en géologie pour prédire les concentrations de minerai à partir de prélèvements ponctuels, la méthode a été étendue aux problèmes d'interpolation généraux et elle est aujourd'hui très répandue en optimisation [110, 187, 56].

La technique du kriging est fondamentalement assez proche d'une surface de réponse mais se distingue par deux points essentiels :

- En premier lieu, les échantillons de référence sont reconstruits de manière exacte.
- La méthode fournit aussi une évaluation de l'incertitude de reconstruction en chaque point.

La technique du kriging vise à approcher chaque objectif selon la formule suivante :

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_j a_j g_j(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x}) \quad (\text{E.24})$$

L'approximation est ainsi décomposée en deux parties distinctes.

La première partie est une régression linéaire composée de  $j$  fonctions,  $j$  étant arbitrairement fixé. La somme peut être remplacée sans erreur par un polynôme de degré arbitraire. Cette partie est utilisée pour capter les grandes tendances de la population modélisée. A ce titre, on peut utiliser une approche de type surface de réponse pour déterminer les fonctions. Toutefois, [126] et [170] rapportent que la fonction constante  $g = 1$  est quasiment toujours utilisée. Dans ce dernier cas, dit *kriging ordinaire*, on ne retient alors que la valeur moyenne de l'objectif traité.

La deuxième partie de la décomposition est un modèle de processus aléatoire Gaussien à moyenne nulle. Ce "bruit" est utilisé de manière à ce que, pour chaque échantillon de référence, on ait

$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ . La covariance de  $h$  est supposée être de forme gaussienne [170]. La construction du modèle qui s'en suit est assez complexe, tant du point de vue mathématique qu'algorithmique et ne sera pas détaillée ici. On se référera aux différents articles cités pour des exemples de construction. On précisera seulement que  $\tilde{f}$  est conçue pour être le meilleur estimateur linéaire, non biaisé de  $f$ . Ceci implique notamment les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \exists w_j \text{ tels que } \tilde{f}(\mathbf{x}) &= \sum_j w_j f(\mathbf{x}_j) \\ \text{il n'existe pas de biais en moyenne : } &E(\tilde{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})) = 0 \\ \text{le meilleur estimateur vérifiant } &E[(\tilde{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}))^2] = 0 \end{aligned}$$

Une des caractéristiques intéressantes du kriging est qu'elle fournit à l'utilisateur une estimation de l'incertitude pour chaque individu traité. Cette dernière est de la forme [56]  $\sigma(1 - c^T(\mathbf{x})C^{-1}c(\mathbf{x}))$ , où les  $c$  et  $C$  sont respectivement le vecteur d'auto-corrélation de la population de référence et la matrice de corrélation de cette même population. Pour les individus de référence, cette incertitude est bien évidemment nulle. On peut alors tracer la courbe interpolée et l'enveloppe correspondant à l'incertitude comme sur la figure (Fig. E.14).

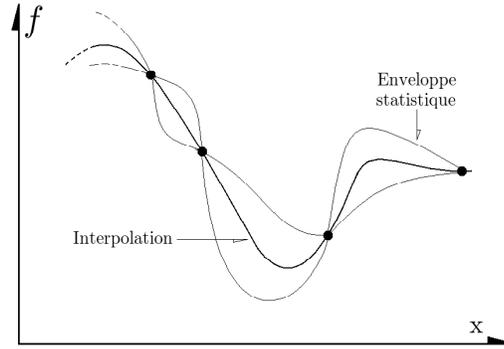


FIG. E.14 – Reconstruction par Kriging

Le fait de disposer de cette incertitude permet, au sein d'une approche mixte faisant intervenir à la fois des solveurs standard et un métamodèle, d'établir si le nouvel individu doit faire l'objet d'une évaluation précise. Si un individu prometteur est par exemple trouvé au maximum d'incertitude, il est pertinent de vérifier que le résultat prédit est fiable. De manière plus générale, le kriging peut servir pour redéfinir l'objectif en posant la fonction de *mérite* [179] :

$$m(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{x}) - \rho p(\mathbf{x}) \quad (\text{E.25})$$

où  $p$  est l'incertitude et  $\rho$  un coefficient. En optimisant le mérite, on sélectionne alors les individus présentant une faible approximation de l'objectif ou une très grande incertitude. On se base alors sur l'idée (optimiste) que les individus incertains seront généralement meilleurs que la prédiction qui en est faite. On peut ainsi retrouver des zones optimales qui auraient été perdues par la simple interpolation. Ce cas est illustré sur la figure (Fig. E.15) où la fonction exacte est représentée en trait plein, l'approximation et l'enveloppe étant en pointillés. L'optimum local A est bien décrit par les deux fonctions, mais du fait d'un manque de points, la zone B n'est pas optimum du point de vue de l'approximation. Si on considère en revanche le mérite, et donc l'enveloppe d'incertitude, on peut retrouver un optimum en B, même si ce dernier reste alors local, contrairement à la réalité.

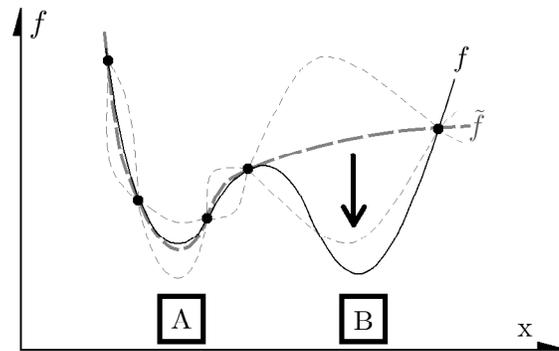


FIG. E.15 – Détection d'un optimum par une approche au mérite

L'optimisation par le mérite n'est totalement pertinente que si elle entraîne de temps à autre l'évaluation précise de quelques individus pour recalibrer l'interpolation. Dans le cas contraire, on restera indéfiniment soumis à l'incertitude et il peut apparaître de faux optima uniquement générés par l'utilisation optimiste de l'incertitude.

Outre les limites inhérentes à une technique d'interpolation, la plus grosse difficulté limitant l'emploi du kriging reste la détermination de la fonction d'interpolation. Le calcul des différents coefficients peut s'avérer extrêmement coûteux en temps pour chaque objectif, d'autant plus que le nombre de paramètres est élevé. Cette technique est donc généralement utilisée pour des optimisations simples.

### E.9.2.3 Réseaux de neurones artificiels

Les réseaux de neurones les plus classiques (parfois appelés "multilayer perceptrons") sont une classe d'interpolateurs construits initialement pour imiter le fonctionnement du cerveau, notamment pour des applications telles que l'analyse d'image ou de son. Comme leur nom le suggère, ils sont en grande partie calqués sur la structure du cerveau. L'unité de base des réseaux est donc le neurone. Les neurones sont organisés en couches successives. Dans un réseau à propagation descendante (les plus courants), chaque neurone reçoit des informations des neurones de la couche précédente, ces informations étant additionnées en un signal unique. Selon une loi définie, le neurone va ensuite propager ou non une version modifiée de ce signal.

On distingue principalement trois niveaux dans la structure :

1. la couche d'entrée sur laquelle sont spécifiées les  $P$  valeurs des paramètres d'un individu
2. une ou plusieurs couches "cachées"
3. la couche de sortie délivrant les approximations des  $I$  objectifs.

La première couche cachée reçoit directement les paramètres, la dernière émettant des signaux qui en se combinant donne les valeurs des objectifs. La structure classique d'un réseau de neurones est représentée sur la figure suivante (Fig. E.16) pour deux niveaux cachés.

Le premier point important pour le fonctionnement du réseau de neurones est l'agrégation des signaux. Le signal reçu par chaque neurone est en fait une somme *pondérée* de tous les signaux issus de la couche précédente. La justification de la pondération est évidente si on considère qu'un objectif est par exemple  $f_i(\mathbf{x}) = x_1$ . Pour obtenir le traitement le plus simple possible, il doit exister

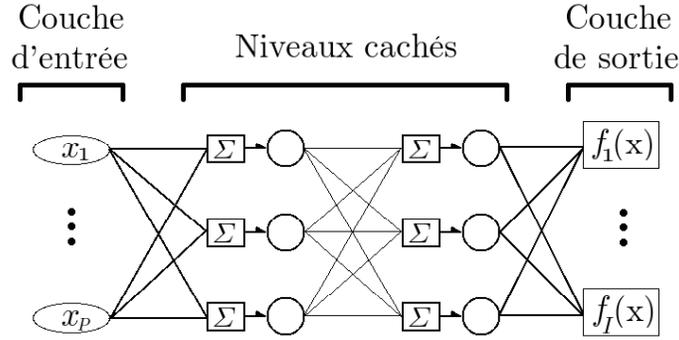


FIG. E.16 – Structure d'un réseau de neurones

une chaîne de neurones qui ne prenne en compte que le seul signal  $x_1$ . De manière plus générale, la pondération  $w_{ij}$  permet de caractériser la plus ou moins grande dépendance de chaque objectif relativement à chaque paramètre. Il est aussi possible d'inclure un biais  $b_i$  sur chaque neurone afin d'introduire des variables de réglages supplémentaires. Dans le cas le plus général, chaque neurone  $j$  recevra donc le signal :

$$s_j = \sum_{k \in \text{couche amont}} w_{jk} S_k + b_j \quad (\text{E.26})$$

où  $S_k$  est le signal émis par le neurone  $k$ .

Il existe d'autres formules de connexions, notamment le sigma-pi de Feldman et Ballard [49] où les signaux entrants se multiplient entre eux, mais cette règle ne donne pas toujours de bons résultats dans le cas général.

Le deuxième point important est la fonction de transfert des neurones qui permet la modification  $S_j = H(s_j)$ . Il existe une multitude de fonctions de transfert possibles [111, 8] comme un échelon, une fonction linéaire ou la fonction sigmoïde :

$$H_{\text{sigmoïde}}(s) = \frac{1}{1 + e^{-s \cdot C}}$$

$C$  étant une constante réglable par l'utilisateur (Fig. E.17). Le consensus général semble s'être établi autour de cette dernière fonction car elle permet de générer un traitement assez voisin de l'échelon tout en assurant une variation continue.

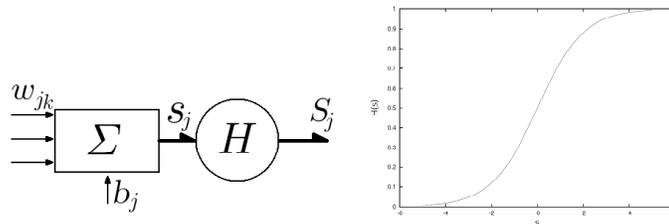


FIG. E.17 – Structure d'un neurone et fonction de transfert sigmoïde

Il est possible de montrer que les réseaux de neurones sont en théorie capables de reproduire n'importe quelle fonction continue de  $\mathbb{R}^P$  dans  $\mathbb{R}^I$  grâce au théorème de superposition de Kolmogorov [113]. Selon ce théorème [187, 73], toute fonction continue peut être représentée de manière

exacte par un réseau de neurones à trois niveaux cachés, chaque niveau comprenant  $2p + 1$  neurones avec des fonctions de transfert non-linéaires. L'utilisation d'une fonction sigmoïde est ici conseillée puisqu'elle introduit un comportement en puissance symbolisé par la composition des exponentielles des niveaux successifs.

Une fois les dimensions du réseau définies par l'utilisateur et par le problème étudié, il reste à fixer les poids  $w_{jk}$  et, le cas échéant, les  $b_j$ . Cette étape est souvent effectuée itérativement par un processus d'apprentissage supervisé qui voit la comparaison entre la prédiction du réseau et la vraie valeur pour l'ensemble des échantillons de référence. Bien évidemment, la taille de la population de référence doit être en adéquation avec le nombre d'inconnues du problème pour éviter toute indétermination. La technique de propagation inverse est la plus utilisée : schématiquement, chaque individu est soumis au modèle, l'information se propageant de l'entrée vers la sortie pour générer les valeurs des objectifs. L'erreur d'estimation est ensuite propagée en sens inverse, entraînant au passage la modification des coefficients. Il existe néanmoins un grand nombre d'algorithmes possibles pour effectuer la phase d'apprentissage, avec un traitement plus ou moins progressif de la mise à jour des poids [57, 56]. L'apprentissage est souvent effectué préalablement à l'optimisation, mais il est aussi possible d'y procéder en cours de convergence. On utilise alors plusieurs populations de référence, certaines ne servant que pour le test du réseau et non pas pour l'apprentissage.

Les réseaux de neurones sont bien adaptés à la modélisation de fonctions continues. On remarque en outre qu'ils sont capables de fournir simultanément tous les objectifs, à la différence d'une surface de réponse. Il est aussi possible d'extraire les valeurs des dérivées de chaque objectif approché pour des réseaux avec peu de niveaux, la tâche devenant cependant très fastidieuse au fur et à mesure que le réseau grossit. Ces interpolateurs se prêtent de plus assez bien à une construction "en ligne", c'est-à-dire à un apprentissage en parallèle du processus d'optimisation. En contrepartie, ils peuvent parfois être délicats à régler, demandant une certaine qualité de la population d'échantillons. Un autre défaut possible vient de la multiplicité des sorties : il n'existe pas de moyen simple de corriger spécifiquement une seule sortie. Si une des approximations est par exemple notablement erronée (les autres étant correctes), compte tenu de la structure en couches successives avec une interdépendance forte des neurones entre chaque niveau, la correction de l'erreur risque de dégrader les autres sorties. Pour remédier à ce dernier problème on utilise plusieurs réseaux de neurones, chacun ne traitant qu'un objectif, mais cela va à l'encontre de la simplicité et de l'efficacité algorithmique.

#### E.9.2.4 Radial Basis Function

Il existe une autre catégorie d'interpolateurs reprenant les principes généraux des réseaux de neurones baptisés *Radial Basis Function* [72, 187, 56]. Ils se distinguent des précédents par une gestion différente des transferts d'informations entre niveaux, basée sur une notion de distance à un point de référence.

Pour commencer, les RBF adoptent une structure à plusieurs niveaux dans laquelle on retrouve un niveau d'entrée et un niveau de sortie. En revanche, il n'existe plus qu'un seul niveau caché de neurones. A chacun de ces neurones est associé un individu de référence  $\mathbf{c}_j$ , lequel est ensuite comparé avec l'individu à évaluer. La fonction de transfert de chaque neurone s'écrit alors :

$$H_j(\mathbf{x}) = g_j(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\|) \quad (\text{E.27})$$

où  $g_j$  est une fonction de  $\mathbb{R}$ , couramment décrite dans la littérature comme la gaussienne  $e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{c}_j)^2}{\sigma_j^2}}$ . Dans ce cas, on fait intervenir un rayon  $\sigma_j$  pour déterminer la zone d'influence. Plus  $\sigma_j$  sera grand,

moins le neurone sera sélectif quant aux individus traités. La sortie de l'interpolateur est alors obtenue en effectuant une combinaison linéaire des signaux émis par les neurones :

$$\tilde{f}_i(\mathbf{x}) = b_i + \sum_j w_{ij} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{c}_j)^2}{\sigma_j^2}} \quad (\text{E.28})$$

les  $b_i$  étant des coefficients de réglage. Au final, le calage de l'interpolateur s'effectue au moyen des  $w_{ij}$ ,  $b_i$  et  $\mathbf{c}_j$ . La structure globale est illustrée sur la figure (Fig. E.18).

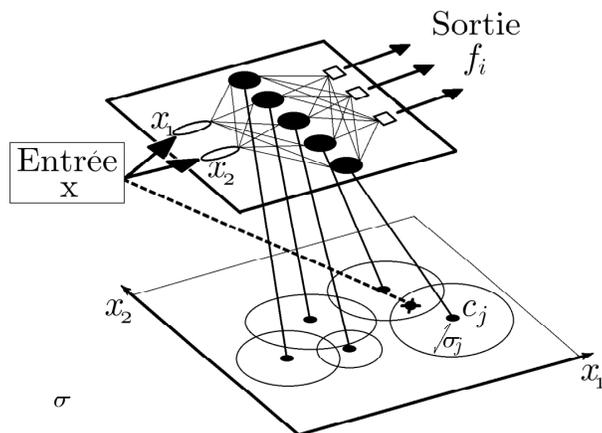


FIG. E.18 – Structure d'un réseau RBF

Hormis le nombre de neurones qui doit être spécifié à l'avance, le réglage de l'interpolateur s'effectue globalement comme un réseau de neurones standard [98]. On retrouve particulièrement la notion de propagation inverse de l'erreur pour corriger les différents coefficients.

En comparant cette approche avec le réseau de neurones classique, on perçoit le caractère plus localisé du traitement effectué par chaque neurone. Si un individu est trop éloigné de l'individu de référence, il sera ignoré par le neurone correspondant. On voit aussi que les RBF effectuent un partitionnement naturel de la population. Le nombre de neurones étant fixé, l'apprentissage du RBF revient :

1. à grouper les individus similaires du point de vue des paramètres. Le réglage porte alors sur le positionnement des  $\mathbf{c}_j$  et des rayons  $\sigma_i$ .
2. à définir le mieux possible la valeur des objectifs associés à chaque groupe via les  $w_{ij}$ . Il y a là un effet de moyenne lié au partitionnement.

La phase d'apprentissage des RBF est critique, notamment dans la définition de la population de référence. Imaginons que l'interpolation ne porte que sur un seul objectif, et que la population de référence  $\mathbf{x}_r$  soit très dispersée dans l'espace paramétrique. Si de plus il y a autant d'individus que de neurones, il existe une solution triviale et exacte pour le réglage :  $\mathbf{c}_j = \mathbf{x}_r$  et  $\sigma_j$  quelconque. Dans cette configuration, un nouvel individu qui tomberait entre deux individus de référence pourrait alors être ignoré purement et simplement par tous les neurones, aboutissant ainsi à une valeur nulle pour l'objectif.

Ce dernier exemple montre que les RBF doivent être éduqués dans la mesure du possible sur des populations nettement plus importantes que le niveau caché. En outre, il conviendra de s'assurer

que les volumes définis par les sphères de centre  $\mathbf{c}_j$  et de rayon  $\sigma_j$  se recoupent et recouvrent par la même la plus grande partie de l'espace paramétrique : dans l'exemple illustré en figure (Fig. E.18), une grande partie de l'espace de dessin n'est pas décrite par les zones d'activation.

L'intérêt des RBF est d'établir un traitement similaire pour deux individus similaires, ce qui peut limiter les erreurs dans le cas d'un phénomène physique variant peu. En revanche, si le phénomène est extrêmement sensible à l'un des paramètres, une petite variation de ce dernier induira un gros écart dans l'objectif réel, mais pas dans son approximation. Cette caractéristique de lissage devra être considérée soigneusement selon l'algorithme d'optimisation souhaité : on peut supprimer le bruit, ce qui est bénéfique pour les méthodes déterministes, mais on perd alors en précision.

### E.9.3 Lien avec les techniques d'accélération distribuées et multi-niveaux

Nous avons déjà présenté un certain nombre de techniques d'accélération utilisées par les algorithmes génétiques. Ces techniques sont globalement construites sur une décomposition en niveaux successifs de l'algorithme, que se soit au niveau des paramètres traités, de la méthode de convergence ou de l'évaluation. On peut légitimement s'interroger sur le couplage existant entre ces techniques et les métamodèles présentés.

Pour ce qui est d'une approche simplement distribuée, c'est-à-dire dans laquelle on crée artificiellement un certain nombre de sous-groupes qui évoluent indépendamment pendant quelques périodes, la finalité est de réduire le nombre d'individus nécessaires à la convergence globale de l'algorithme. Il n'existe pas à proprement parler de lien évident avec les interpolateurs, si ce n'est que les deux contribuent à réduire le temps de calculs, le premier en diminuant le nombre d'évaluations, et les seconds en simplifiant l'évaluation. L'utilisation simultanée de la distribution et des métamodèles peut logiquement apporter un gain de temps par rapport aux deux techniques prises séparément.

De la même manière, les approches hybrides ou avec plusieurs niveaux de paramétrisation ne sont pas directement liées aux métamodèles. Cependant, pour les approches hybrides, il peut être intéressant d'utiliser plusieurs niveaux d'évaluation. En général, les méthodes directes ne sont appliquées qu'aux meilleurs individus, peu nombreux, et peuvent donc être couplées avec des évaluations précises. L'exploration large de l'espace, assurée par la partie génétique de l'algorithme peut, quant à elle, être couplée avec un métamodèle puisqu'il n'est pas nécessaire dans ce cas d'être précis. Pour les paramétrisations à plusieurs niveaux, le couplage avec les métamodèles intervient plutôt dans les méthodes accessibles. On a vu par exemple que le kriging n'était pas bien adapté aux optimisations avec beaucoup de paramètres. Dans cette optique, le kriging pourrait être restreint aux paramétrisations grossières, les niveaux supérieurs étant par exemple traités avec un réseau de neurones standard.

Pour une approche hiérarchique, le lien est en revanche évident. Comme les différents niveaux se distinguent par leur modèle d'évaluation, on comprend ici très bien qu'ils puissent faire appel à des métamodèles ou à une approche extrapolée. Cette dernière approche se prête particulièrement bien à l'implémentation des réseaux de neurones (classique et RBF) et du kriging. Pour les premiers, on a vu qu'il était possible de poursuivre la phase d'apprentissage en cours de convergence. Pour faire cela, on utilise une approche à deux niveaux : le niveau inférieur est occupé par le réseau de neurones, et le niveau supérieur par un évaluateur "précis" (un solveur Euler ou Navier-Stokes par exemple). Les meilleurs individus trouvés par le réseau sont transmis au-dessus, et peuvent par

retour servir à mieux éduquer le réseau. Gonzalez et al. [67] montrent que l'apprentissage dynamique permet une amélioration notable de l'optimisation. Le couplage du kriging et d'un solveur s'effectue de la même manière, mais il est spécialement important si on utilise une optimisation au mérite sur la base du métamodèle. On a vu que le mérite favorisait les individus avec un bon objectif ou une grosse incertitude, équivalente à un éloignement des points de référence. Dans ce deuxième cas de figure, il est intéressant de vérifier si l'individu présente effectivement un bon objectif et de modifier le kriging en conséquence, ce qui permettra in fine de mieux interpoler cet objectif et, en éliminant l'incertitude, de concentrer la notion de mérite sur la recherche des bons objectifs uniquement.

La reconstruction des individus par extrapolation ne présente pas les mêmes spécificités. Elle peut être employée sans distinction dans tous les cas, l'évaluation initiale des champs dérivés n'étant pas soumise à un quelconque changement au fur et à mesure de l'optimisation. Le seul couplage envisageable repose sur une réévaluation ponctuelle des dérivées, notamment quand la zone de recherche effective se décale vers les limites de la zone initialement envisagée. On obtient alors une nouvelle référence permettant de limiter les erreurs de reconstruction dans son voisinage. Cette mise à jour s'apparente à l'apprentissage progressif des réseaux de neurones.



## Annexe F

# Méthodes pour la résolution de systèmes linéaires creux

On considère ici les techniques de résolution de systèmes linéaires qui sont très utiles pour la paramétrisation. En effet, le calcul des dérivées par Turb'Opty fait intervenir un système linéaire de grande dimension, souvent très creux. Dans cette partie, on abordera plus spécifiquement les méthodes employées pour résoudre ce type de systèmes.

Dans la suite, on considérera le système linéaire générique suivant :

$$\begin{aligned} A.X &= B \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{F.1}$$

où l'inconnue est  $X$ .

On supposera dans un premier temps que la matrice  $A$  est inversible. On a choisi ici de restreindre la présentation aux systèmes réels, mais il est important de noter que les méthodes de Krylov peuvent aussi être construites dans le cas où  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $B, X \in \mathbb{C}^n$ , les résultats qui vont maintenant être présentés étant alors facilement transposables au cas complexe.

On remarquera qu'il existe deux approches conceptuellement différentes pour résoudre un tel système linéaire :

- L'approche directe : on calcule  $A^{-1}$  l'inverse de la matrice, et on effectue ensuite le produit  $A^{-1}.B$ . C'est l'approche la plus naturelle, mais elle demande un effort numérique considérable, notamment pour déterminer l'inverse. En pratique, pour des systèmes linéaires de très grande taille, le coût informatique est tout simplement rédhibitoire et la méthode ne peut donc être appliquée. En outre, cette approche peut nécessiter de disposer physiquement de la matrice  $A$  (à opposer à un programme calculant le produit  $A.X$  et ne nécessitant donc pas la construction explicite de  $A$ ) ce qui peut là aussi poser des problèmes au niveau de la taille mémoire requise pour le stockage de la matrice.
- L'approche indirecte : il suffit de noter que le problème (F.1) peut aussi s'écrire sous la forme  $A.X - B = 0$ . Il s'agit typiquement d'un problème d'optimisation portant sur un "paramètre"  $X$  et un objectif à minimiser défini par la "fonction"  $f(X) = A.X - B$ . Pour résoudre ce problème, on peut alors utiliser des méthodes de descente : on passe alors par une série de corrections/évaluations de  $X$  pour aboutir à l'optimum qui est ici la solution du système

linéaire. De cette manière, il n'est besoin ni de calculer l'inverse de la matrice, ni de disposer de cette matrice dans son intégralité. On se contente d'effectuer des produits matrices-vecteurs qui sont moins coûteux informatiquement.

La deuxième approche est celle sur laquelle se fondent les méthodes de Krylov. Pour illustrer les principaux mécanismes entrant dans les méthodes de Krylov et introduire la notion d'espace de Krylov, on considérera l'exemple de la méthode du gradient conjugué.

## F.1 Méthode du gradient conjugué - espace de Krylov

La méthode du gradient conjugué est une méthode bien connue en optimisation et qui s'applique aux systèmes linéaires avec des matrices définies positives et symétriques. On commencera par définir la notion de vecteurs conjugués (par rapport à une matrice) [1].

**Définition F.1 :** [ENSEMBLE DE VECTEURS CONJUGUÉS]

Soit un ensemble fini de  $k \leq n$  vecteurs distincts  $v_m$ . L'ensemble est dit conjugué par rapport à une matrice  $A$  réelle symétrique si :

$$v_i^T A v_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad (\text{F.2})$$

On montre en outre que des vecteurs conjugués sont linéairement indépendants, i.e.  $\sum_i \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$ . Ils forment donc une base d'un sous-espace  $\text{span}_k(v_i)$  (en gardant à l'esprit que  $k \leq n$ ) de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que l'on cherche la solution  $\bar{X} \in \text{span}_k(v_i)$  du problème (F.1). Si on dispose effectivement d'un ensemble  $\{v_i\}_{i=0, \dots, k-1}$  de vecteurs conjugués relativement à  $A$ , puisque ces derniers forment une base, on peut alors écrire que :

$$\bar{X} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i v_i \quad (\text{F.3})$$

soit encore avec (F.2) et (F.1), pour tout  $j \leq k-1$  :

$$v_j^T \cdot A \cdot \bar{X} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i v_j^T A v_i = \alpha_j v_j^T A v_j = v_j^T \cdot (-B) \quad (\text{F.4})$$

On trouve ainsi que les  $\alpha_i$  s'expriment comme :

$$\alpha_i = -\frac{v_i^T B}{v_i^T A v_i} = -\frac{B^T v_i}{v_i^T A v_i} \quad (\text{F.5})$$

Pour pouvoir aboutir à la solution du système linéaire, il suffit donc de construire un vecteur  $\bar{X}$  selon les formules précédentes. La formule (F.3) pouvant notamment s'écrire sous forme d'une relation récursive :

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_1 &= X_0 + \alpha_0 v_0 \\ &\dots \\ \bar{X} = X_k &= X_{k-1} + \alpha_{k-1} v_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i v_i + X_0 \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

où les  $\alpha_i$  sont définis par (F.5). Il est possible de reformuler les  $\alpha_i$  pour mettre en valeur le résidu de l'équation (F.1) noté  $r_i = A.X_i - B$ .

A partir de (F.6), on peut ainsi écrire que :

$$\begin{aligned} (\bar{X} - X_0) &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i v_i \Leftrightarrow v_j^T A(\bar{X} - X_0) = \alpha_j v_j^T . A . v_j \quad \forall j \leq k \\ (X_j - X_0) &= \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i v_i \Leftrightarrow v_j^T A(X_j - X_0) = 0 \quad \Leftrightarrow v_j^T A X_j = v_j^T A X_0 \end{aligned}$$

En conséquence, puisque  $A\bar{X} = B = -r_j + AX_j$ , on peut donc affirmer :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{v_j^T A(\bar{X} - X_0)}{v_j^T A v_j} = \frac{v_j^T [(-r_j + AX_j) - AX_j]}{v_j^T . A . v_j} \\ \alpha_j &= -\frac{v_j^T r_j}{v_j^T . A . v_j} \end{aligned} \tag{F.7}$$

Cette approche peut s'interpréter comme une optimisation itérative en  $k$  pas, chaque pas étant pris selon la direction  $v_i$ , la taille du pas étant proportionnelle à l'erreur résiduelle pour (F.1). A ce niveau, le problème semble presque résolu. Il ne "reste plus qu'à" trouver l'ensemble  $\{v_i\}_{i=0, \dots, k-1}$ .

Ce problème est résolu en appliquant la méthode du gradient conjugué [74, 1, 36] définie comme suit.

Pour tout  $X_0$ ,

$$\forall i = 0, \dots, k-2 \quad \begin{cases} v_0 = -r_0 \\ \alpha_i = \frac{v_i^T . r_i}{v_i^T A v_i} \\ X_{i+1} = X_i + \alpha_i v_i \\ \beta_i = \frac{r_{i+1}^T A v_i}{v_i^T A v_i} \\ v_{i+1} = -r_{i+1} + \beta_i v_i \end{cases} \tag{F.8}$$

Il est possible de montrer que les  $v_i$  ainsi définis sont bien conjugués. On trouve en outre que les  $r_i$  sont orthogonaux. Ceci permet de simplifier les expressions de  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{r_i^T . r_i}{v_i^T A v_i} \\ \beta_i &= \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i} \end{aligned} \tag{F.9}$$

On peut justifier l'emploi du terme gradient en remarquant que l'équation (F.1) n'est que la forme dérivée par rapport à  $X$  de l'expression  $C - X^T . B + \frac{1}{2} X^T . A . X$  où  $C$  est une constante. Dans ces conditions, le résidu  $r_i$  de l'équation correspond donc à la valeur du gradient de la fonction calculé en  $X_i$ .

Il est très intéressant de constater qu'avec cette méthode, toutes les directions  $v_i$  utilisées dé-

pendent des précédentes. En écrivant les premières itérations, on trouve :

$$\left[ \begin{array}{l} v_0 = -r_0 \\ \Rightarrow X_1 = X_0 - \alpha_0 r_0 \\ \\ \Rightarrow r_1 = A(X_0 - \alpha_0 r_0) - B \\ \quad = r_0 - \alpha_0 A.r_0 \\ \Rightarrow v_1 = -r_1 + \beta_0 v_0 \\ \quad = -(1 + \beta_0)r_0 + \alpha_0 A r_0 \\ \Rightarrow X_2 = X_1 + \alpha_1 v_1 \\ \quad = X_0 - [\alpha_0 + \alpha_1(1 + \beta_0)] r_0 + \alpha_1 \alpha_0 A r_0 \\ \Rightarrow r_2 = r_0 - [\alpha_0 + \alpha_1(1 + \beta_0)] A r_0 + \alpha_1 \alpha_0 A^2 r_0 \\ \Rightarrow \dots \end{array} \right.$$

En pratique, on peut donc générer tous les vecteurs de descente  $v_i$  ainsi que la solution à partir de  $\{r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0\}$ . On introduit ainsi  $K_k(r_0, A)$  l'espace de Krylov généré par  $r_0$  et  $A$ . On soulignera qu'il existe des espaces de Krylov pour  $A$  quelconque.

## F.2 Méthodes de Krylov générales

De manière plus générale, on qualifiera de méthode de Krylov tout algorithme s'appuyant sur un espace de Krylov pour converger par approximations successives vers la solution du système linéaire (F.1) à partir d'une estimation initiale  $X_0$  quelconque. Les méthodes de Krylov peuvent aussi être envisagées en terme de méthodes basées sur un ensemble "d'espaces de correction" successifs et croissants  $C_k \subset C_{k+1}$  [44], la  $k$ -ième approximation de la solution du système linéaire étant définie par :

$$X_k = X_0 + c_k, \quad c_k \in C_k$$

La construction des espaces de correction successifs comme des espaces de Krylov permet une bonne efficacité des méthodes. En effet, on peut montrer à partir du polynôme minimal [83] que pour toute matrice  $A$  non singulière, il est possible d'écrire :

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i A^i$$

où  $m$  est le degré du polynôme minimal et les  $\alpha_i$  sont des coefficients découlant de ce dernier. En particulier, si on écrit que la solution du système est  $X = A^{-1}.B$ , on voit sans peine que  $X$  appartient à l'espace de Krylov  $K_m(B, A)$ . Le choix le plus courant est donc de générer ces espaces à partir du second membre  $B$ . Si de plus  $m$  est faible, ce qui équivaut à une matrice ayant peu de valeurs propres distinctes, on comprend que la méthode est assurée de converger en peu d'itérations.

Il existe deux grandes catégories de méthodes basées sur des espaces de correction et par extension de méthodes de Krylov :

- les méthodes à résidu minimum : Cette catégorie repose sur une décroissance de la norme du résidu du problème linéaire au cours des itérations. On cherche ainsi une correction  $c_k$  telle que  $\|r_k\| = \|A(X_0 + c_k) - B\| = \|r_0 + A c_k\| = \min_{c \in C_k} \|r_0 + A c\|$ . A la limite, on trouve

un résidu nul et donc la solution du problème. C'est à cette catégorie qu'appartiennent les algorithmes de type GMRES décrits dans la suite. On peut montrer en particulier que la phase de minimisation vise à construire un  $r_k$  qui est le "reste" de  $r_0$  en dehors de l'espace  $W_k = A(C_k)$ . Quand  $k$  atteint la taille  $n$  du système linéaire  $A(C_n) = \mathbb{R}^n$ , ce qui implique que  $r_0 \in C_n$ , et donc que la solution exacte est alors trouvée.

- les méthodes à résidu orthogonal : Cette deuxième classe est celle à laquelle appartient le gradient conjugué. Comme leur nom le suggère, ces méthodes progressent vers la solution du système linéaire en orthogonalisant le résidu de la  $k$ -ième itération par rapport à tous les précédents. On peut s'assurer de la convergence de la méthode en remarquant que pour un problème de dimension  $n$ , donc défini dans  $\mathbb{R}^n$ , les  $n$  premiers résidus ainsi construits forment une base orthogonale de l'espace. En conséquence, il n'existe qu'un seul résidu  $r_{n+1}$  qui soit orthogonal à tous les autres : le résidu nul.

En résumé, on peut facilement montrer dans les deux cas que si  $r_0 \in A(C_k)$ , alors la solution exacte est atteinte puisqu'on peut alors trouver une correction  $c \in C_k$  telle que  $Ac + r_0 = 0$ .

Jusqu'à présent, on a toujours supposé que la matrice  $A$  était non singulière. Cette hypothèse est en pratique très souvent valable puisque les matrices traitées sont la plupart du temps calculées de manière numérique ce qui, en raison des erreurs d'arrondi, limite le risque d'une valeur propre réellement nulle. En contrepartie, ces matrices peuvent être extrêmement mal conditionnées et présenter de nombreuses valeurs propres, certaines étant très faibles. Dans le cas où  $A$  serait mathématiquement singulière, [83] propose une méthode basée sur l'inverse de Drazin (définition plus générale et tolérante de l'inverse) pour arriver tout de même à une solution.

### F.2.1 Algorithme GMRES

L'algorithme du gradient conjugué n'est applicable qu'à des systèmes linéaires pour lesquels  $A$  est symétrique définie positive. Ce n'est clairement pas le cas le plus général. On préférera l'algorithme GMRES ("Generalized Minimal Residual") [161] qui n'est pas soumis à de telles restrictions. L'algorithme est le suivant :

---

#### Algorithme 1 GMRES

---

- 1: Initialiser  $X_0 = 0$ ,  $\beta = \|B\|$ , et  $v_1 = \frac{B}{\beta}$
  - 2: **Pour tout**  $k \geq 1$  **faire**
  - 3:     **Pour tout**  $i \leq k$  **faire**
  - 4:          $h_{ik} = v_i^T A v_k$
  - 5:     **Fin pour**
  - 6:      $\tilde{v}_{k+1} = A v_k - (h_{1k} v_1 + \dots + h_{kk} v_k)$
  - 7:     Normaliser  $v_{k+1} = \frac{\tilde{v}_{k+1}}{\|\tilde{v}_{k+1}\|}$
  - 8:     Trouver  $X_k \in K_k(B, A) = \text{span}(v_1, \dots, v_{k+1})$  tel que :  
 $\|r_k\| = \|A X_k - B\| = \min_{X \in K_k} \|A X - B\|$
  - 9:      $k = k + 1$
  - 10: **Fin pour**
-

Les premières étapes (2 à 7) correspondent à la génération d'une base orthonormale pour l'espace de Krylov  $K_k$  en utilisant le *processus d'Arnoldi*. On montre en effet récursivement que pour tout  $i < k + 1$  :

$$\begin{aligned} v_i^T \cdot \tilde{v}_{k+1} &= v_i^T Av_k - (h_{1k}v_i^T v_1 + \dots + h_{kk}v_i^T v_k) \\ &= h_{ik} - \sum h_{jk}\delta_{ij} \\ &= h_{ik} - h_{ik} \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'intérêt de la construction d'une telle base est que le problème de minimisation de la norme du résidu se simplifie dans cette base. En effet, en posant  $V_k$  la matrice dont les colonnes sont les  $v_k$ , la relation suivante apparaît :

$$AV_k = V_{k+1}H_k \quad (\text{F.10})$$

où  $H_k$  est une matrice supérieure de Hessenberg (matrice triangulaire supérieure avec une ligne diagonale non nulle sous la diagonale) constituée par les coefficients  $h_{ij}$ . Cette matrice a  $k + 1$  lignes et  $k$  colonnes.

Si on considère maintenant le problème de minimisation dans  $K_k(B, A)$ , par définition de  $V_k$  on trouve que la solution s'écrit  $X_k = V_k \cdot y$ , donc

$$AX_k = AV_k y = V_{k+1}H_k y \text{ avec } B = \beta v_0 = \beta(V_{k+1} \cdot e_1)$$

d'où

$$AX_k - B = V_{k+1}(H_k y - \beta e_1)$$

En conséquence, le problème de minimisation se réduit à :

$$\min_{X \in K_k(B, A)} \|AX - B\| = \min_y \|H_k y - \beta e_1\|$$

Le problème traité porte ainsi sur des matrices de dimensions beaucoup plus restreintes : on travaille sur un système de taille  $k + 1 \times k$  au lieu de  $n \times n$ , avec  $k \ll n$ . De plus, cela n'exige pas la donnée explicite de  $A$ , ces deux points garantissant au final une plus grande vitesse de résolution pour un coût mémoire moindre.

En toute rigueur, la convergence est obligatoirement atteinte quand l'algorithme a effectué  $n$  itérations,  $n$  étant la taille de la matrice  $A$ . Pour des systèmes de grandes dimensions avec beaucoup de valeurs propres, cet objectif est hors de portée. Cependant, la méthode génère par essence une décroissance monotone du résidu. On se contentera donc d'attendre que le résidu diminue suffisamment pour obtenir une bonne approximation de la solution. On remarquera qu'il n'est en particulier pas nécessaire de calculer la solution et le résidu pour chaque itération, le processus d'Arnoldi se poursuivant sans information extérieure.

## F.2.2 Restarted GMRES

Le principal inconvénient du GMRES est qu'il nécessite le stockage des  $k$  vecteurs orthonormaux de la base définissant l'espace de Krylov utilisé pour la résolution. Une fois de plus, on retrouve une limite physique au calcul, puisque dans le cas de systèmes de grandes dimensions et mal conditionnés,

le nombre de vecteurs à stocker pour obtenir une solution acceptable dépasse de loin les capacités des machines les plus modernes. Il est donc impératif de modifier la structure du GMRES pour limiter cette consommation de ressources informatique. L'idée la plus simple est de construire un GMRES récursif ("restarted GMRES" usuellement noté GMRES(m)), basé sur deux boucles imbriquées. Il se décrit comme suit [44, 17] :

---

**Algorithme 2** GMRES(m)
 

---

```

1: Initialiser  $X_{init} = 0$ ,  $\beta = \|B\|$ , et  $v_{init} = \frac{B}{\beta}$ 
2: Pour tout  $i \geq 1$  faire
3:      $v_1 = v_{init}$ 
4:     Pour  $k = 1$  à  $m$  faire
5:         Effectuer une itération avec l'algorithme GMRES standard (Alg. 1)
           On obtient en particulier  $X_k$ 
6:     Fin pour
7:      $X_{init} = X_m$ 
8:      $\beta = \|AX_{init} - B\|$ 
9:      $v_{init} = \frac{AX_{init} - B}{\beta}$ 
10: Fin pour

```

---

Un des facteurs principaux de réglage est la dimension  $m$  de chaque restart. Il n'existe pas de règle explicite, mais en général, plus  $m$  sera petit et plus la convergence sera difficile. Cette démarche naïve donne de bons résultats pour des systèmes "faciles", avec des matrices  $A$  suffisamment bien construites pour pouvoir être inversées facilement, mais dans le cas général, la convergence stagne assez rapidement. Le problème vient en grande partie des petites valeurs propres de la matrice  $A$ . On montre pour cet algorithme [17] que le résidu  $r_m$  est borné par le résidu initial et une valeur dépendant des plus petites valeurs propres de la matrice  $A$ .

### F.2.3 Deflated GMRES

Comme on vient de le voir, le problème de convergence du GMRES(m) est lié aux petites valeurs propres de  $A$ . Les informations concernant ces valeurs sont perdues en partie ou en totalité lors du redémarrage du GMRES standard. La solution qui a donc été adoptée pour contrer cette défaillance est de transmettre ces valeurs propres au restart suivant. On parlera en général de "Deflated GMRES" pour les méthodes faisant appel à la préservation de ces valeurs. De manière concrète, on préférera souvent l'utilisation de la méthode de Rayleigh-Ritz pour déterminer des approximations des valeurs propres de  $A$  afin de gagner en rapidité [139].

Il existe deux techniques majeures pour tenir compte des petites valeurs propres :

1. l'augmentation de l'espace de correction en introduisant directement les vecteurs propres.
2. la prise en compte des valeurs propres critiques au travers d'un préconditionneur.

Dans la première catégorie, on peut ranger les algorithmes "GMRES-E" [136, 17] et "GMRES-DR" [137]. Dans le premier par exemple, on construit la solution à partir de l'espace obtenu en combinant l'espace de Krylov  $K_k(v_{init}, A)$  avec l'espace généré par  $l$  vecteurs propres  $C_k = K_k(v_{init}, A) + \{z_1, \dots, z_l\}$ . Les vecteurs propres  $z_i$  utilisés sont régulièrement mis à jour en utilisant

la matrice  $H_k$ . La formulation du calcul des nouveaux vecteurs propres (ou de leur approximation) est assez complexe et on se référera aux articles introduisant les méthodes pour plus de précision.

Dans la deuxième catégorie, on travaille non plus sur  $A$  mais sur  $A.M^{-1}$  (ou  $M.A$ ) pour générer l'espace de Krylov, le préconditionneur  $M$  faisant l'objet de nombreuses implémentations possibles selon le traitement des valeurs propres [45, 17, 5].

### F.3 Autres méthodes

On se souviendra que la séparation entre les méthodes de type GMRES est souvent beaucoup plus floue, l'emploi d'un préconditionneur étant bien évidemment courant dans le traitement de problèmes mal conditionnés. Parmi les différentes méthodes à résidu minimum, on retiendra en particulier le FGMRES de Saad [158, 159] qui s'appuie sur un préconditionnement à droite variable. Le préconditionnement peut être fait de multiples façons, plus ou moins précisément avec, par exemple, une technique ILU(t) [160] afin d'assurer un compromis entre vitesse de calcul et convergence.

On n'oubliera pas non plus les techniques basées sur une orthogonalisation du résidu. La plus connue d'entre toutes est le BiCGStab (Bi Conjugate Gradient Stabilized) ([160] par exemple) qui propose une extension de la méthode du gradient conjugué à un système linéaire quelconque dans lequel  $A$  n'est en particulier pas symétrique. Ici aussi, il existe de nombreuses versions disponibles dans la littérature. On peut citer en exemple les versions proposées par Morgan et Wilcox [138] qui introduisent déflation et restart.

## Annexe G

# Maillages utilisés

### G.1 Maillage des rainures

Dans le cadre de la modélisation des rainures, le maillage comporte 553 000 points répartis en 18 domaines (Fig. G.1). Les contacts entre domaines sont coïncidents. Sur le maillage fin et au voisinage des rainures, le rapport de taille entre mailles voisines est limité à 1.4 au maximum pour éviter d'induire trop d'erreur numérique. L'utilisation des schémas spatiaux généralisés permet de s'affranchir de cette contrainte et notamment de calculer sur une grille déraffinée où les rapport de taille peuvent atteindre 2.

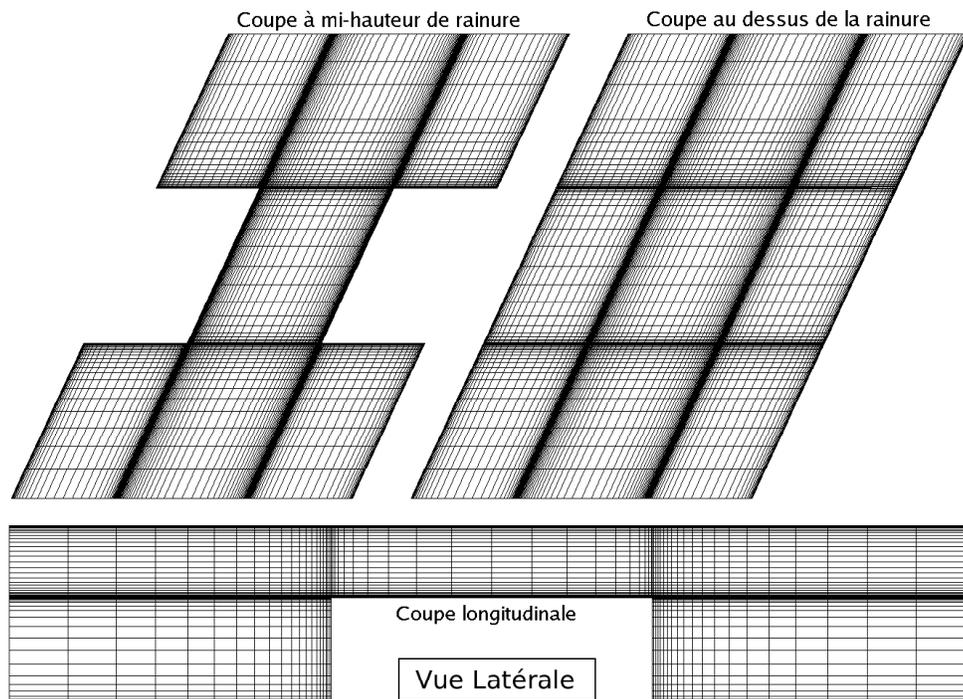


FIG. G.1 – Maillage fin au niveau de la rainure - modélisation de la rainure

Compte-tenu de la présence de parois adhérentes dans les trois directions de l'espace, on re-

trouve partout des distributions de points de type "couche limite". Par simplicité de maillage, ces distributions reste valables dans le fluide loin des parois, ce qui permet de limiter les distorsions de maillage. Ces distributions ne sont modifiées qu'au niveau des plénums afin de disposer de distributions uniformes sur les plans d'entrée et de sortie de la veine (Fig. G.2).

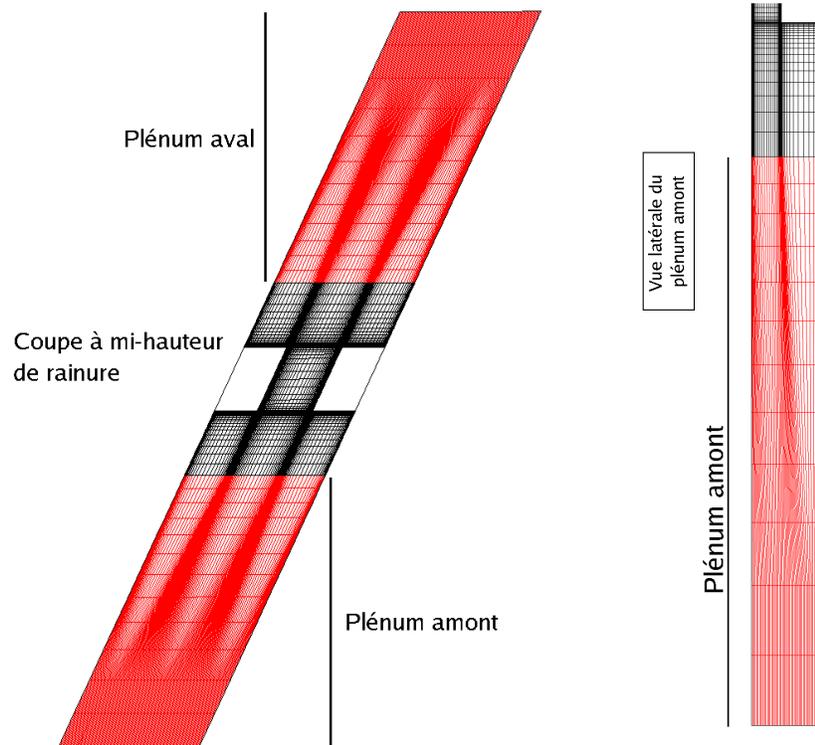


FIG. G.2 – Maillage fin au niveau des plénums - modélisation de la rainure

## G.2 Maillage du ventilateur et du jeu/rainures

Le maillage du ventilateur et du traitement de carter appliqué est découpé en 23 domaines, dont 14 pour la veine, le rotor et les plénums d'entrée et de sortie. Le maillage comporte environ 5 millions de points. Sur ce maillage, le rapport de taille maximum est de 2 (Fig. G.3 et G.4).

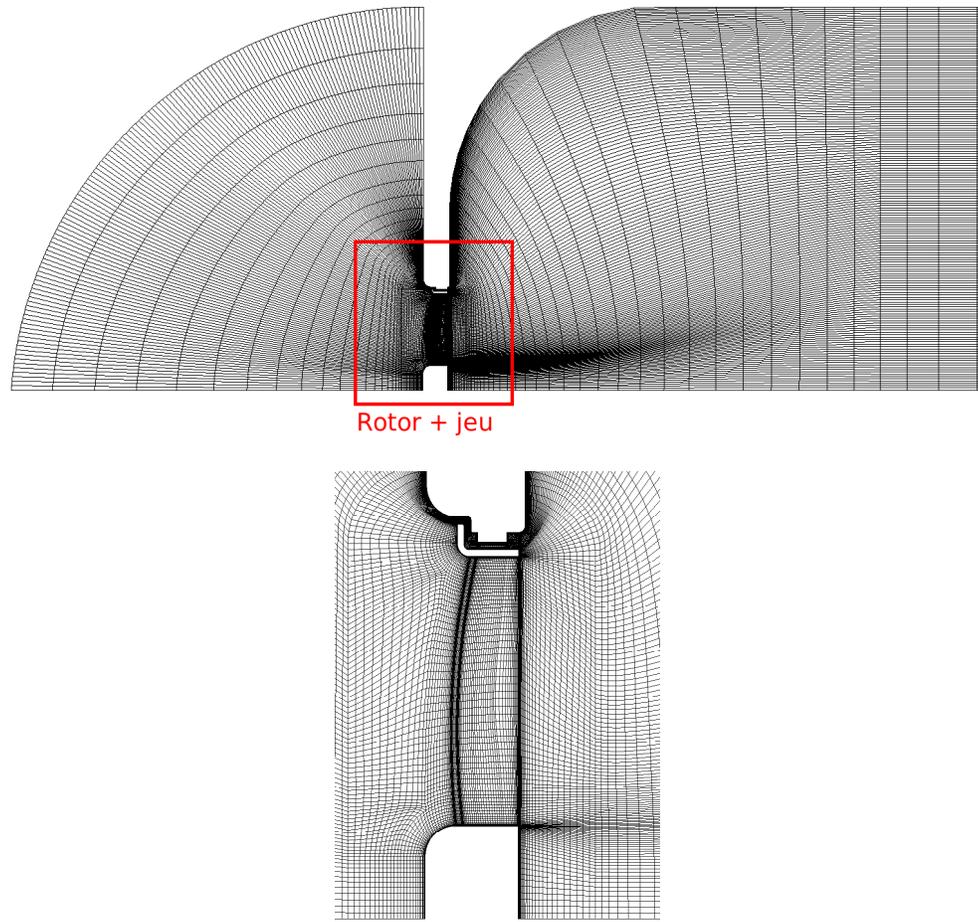


FIG. G.3 – Maillage méridien du ventilateur - vue globale

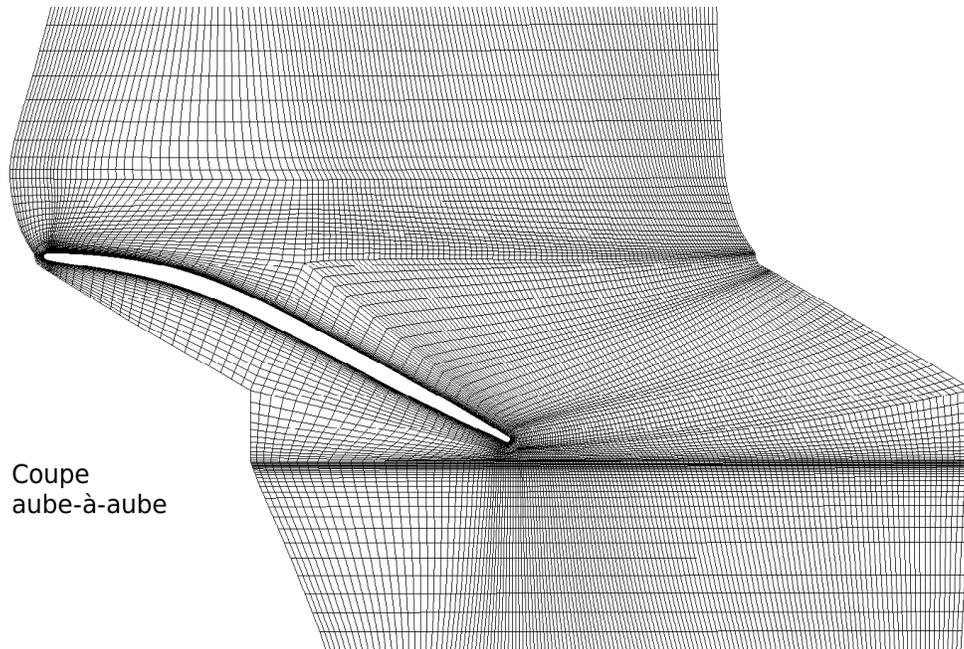


FIG. G.4 – Maillage du ventilateur - coupe aube à aube

En ce qui concerne plus spécifiquement le maillage du jeu et des rainures, les dimensions caractéristiques (taille de première maille, rapports de taille...) du maillage utilisé pour la modélisation précédente ont été à peu près reprises (Fig. G.5 et G.6). Cela implique en particulier de raffiner fortement le maillage dans la direction azimutale. Afin de ne pas alourdir le maillage globale, seuls les blocs de jeu ont été raffiné dans cette direction. Ceci induit donc des contacts non-coïncidents entre les blocs de jeu et les autres blocs de la veine (Fig. G.7).

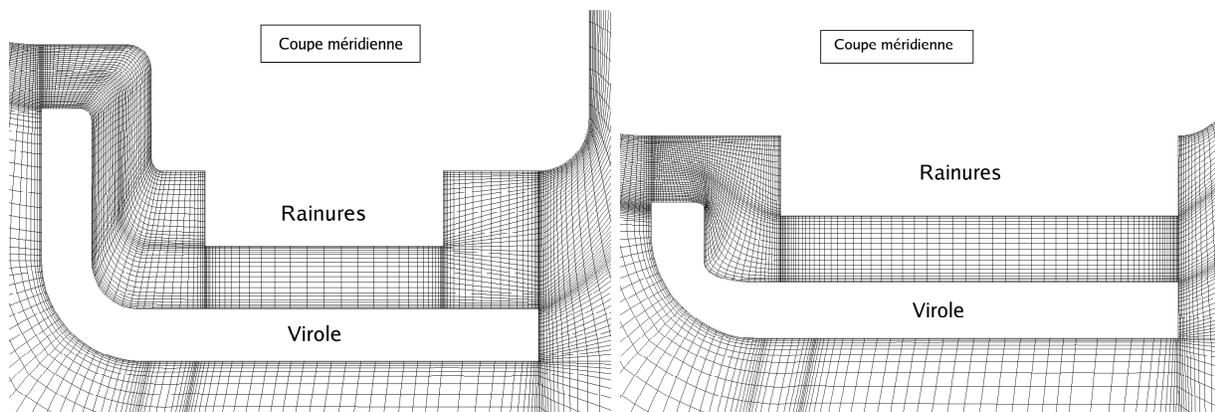


FIG. G.5 – Maillage méridien au niveau du jeu - configurations 1 et 3

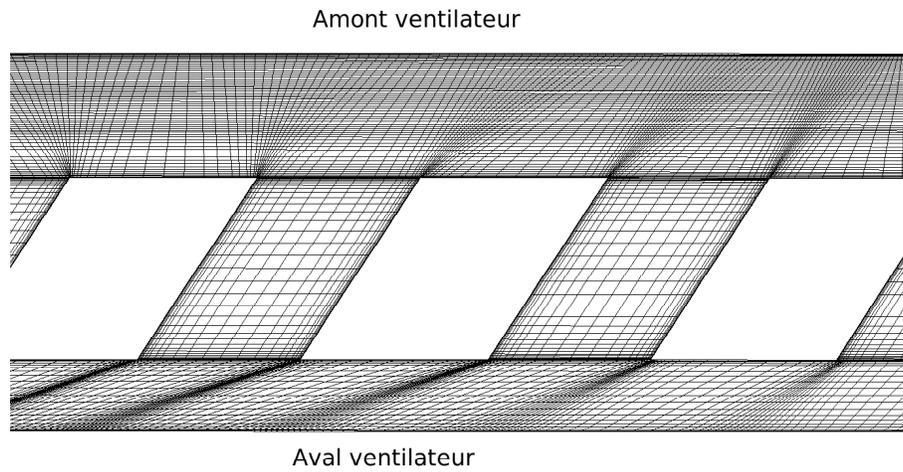


FIG. G.6 – Maillage du jeu dans le plan aube à aube - configuration 3

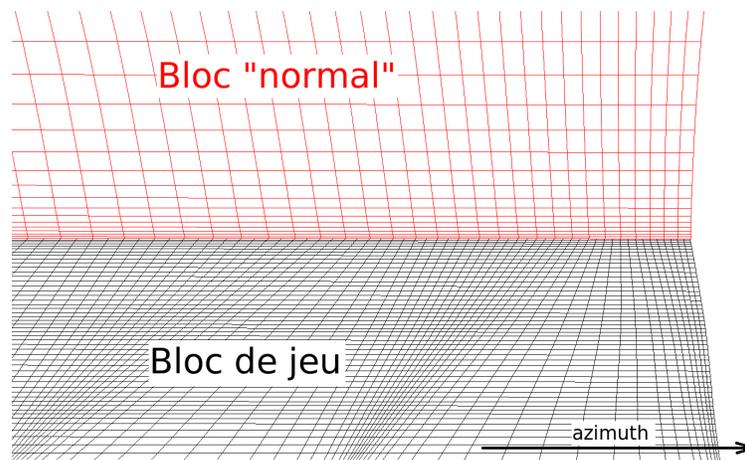


FIG. G.7 – Exemple de maillage non-coïncident en azimuth



# Bibliographie

- [1] A. Antoniou and W.S. Lu. *Practical Optimization : Algorithms and Engineering Applications*. Springer, 2007.
- [2] B.F. Armaly, F. Durst, J.C.F. Pereira, and B. Schönung. Experimental and theoretical investigation of backward facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, 127 :473–496, 1983.
- [3] P. Arminjon and A. Dervieux. Construction of tvd-like artificial viscosities on two-dimensionnal arbitrary fem grid. *Journal of Computational Physics*, 106 :176–198, 1993.
- [4] S. Aubert. Etude de schémas à haute précision pour la simulation d’écoulements transsoniques instationnaires ou visqueux. application aux turbomachines. Mémoire de Thèse, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, 1993.
- [5] J. Baglami, D. Calvetti, G. Golub, and L. Reichel. Adaptatively preconditionned gmres algorithms. Technical Report, Kent State University, 1996.
- [6] J.E. Baker. Reducing bias and inefficiency in the selection algorithm. In *Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms and their Applications*, pages 14–21. Laurence Erlbaum Associates, 1987.
- [7] T.J. Barth and D.C. Jespersen. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. In *AIAA Paper 89-0366*, 1989.
- [8] L. Berke and P. Hajela. Applications of artificial neural nets in structural mechanics. NASA Technical Memorandum 102420, 1990.
- [9] J. Blazek. *Computational Fluid Dynamics : Principles and Applications*. Elsevier, 2001.
- [10] O. Boulon and R. Mathes. Flow modelling of a holweck pump stage in the viscous regime. *Vacuum*, 60 :73–83, 2001.
- [11] J. Boussinesq. *Théorie de l’écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grandes sections, Volume I*. Gauthier-Villars, Paris, 1897.
- [12] J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, and R. Slowinski. *Multiobjective Optimization : Interactive and Evolutionary Approaches*. Springer, Berlin, 2008.
- [13] O. Bron. Etude expérimentale et numérique de l’interaction onde de choc-couche limite en écoulement transsonique instationnaire. Mémoire de Thèse, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique, Ecole Centrale de Lyon - Ecole Polytechnique Royale de Suède, 2004.
- [14] M. Buisson. Couplage d’algorithmes génétiques avec le logiciel de paramétrisation cfd turb’opty. Rapport de stage de fin d’études - Fluorem SAS, ISTIL-UCBL, 2008.
- [15] M. Buisson. Self organizing maps - visualisation 2d des zones optimales. Rapport interne, LMFA, 2008.

- 
- [16] M. Buisson. Vers de nouvelles techniques et méthodes de reconstruction turb'opty-turb'post. Rapport interne, LMFA, 2009.
- [17] K. Burrage and J. Erhel. On the performance of various adaptative preconditionned gmres strategies. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 5 :101–121, 1998.
- [18] V. Cerny. Thermodynamical approach to the travelling salesman problem : An efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 45(1) :41–51, 1985.
- [19] H.-P. Cheng, C.-J. Chen, and P.-W. Cheng. Computational fluid dynamics performance estimation of turbo booster pump. *Journal of Fluid Engineering*, 125 :586–589, 2003.
- [20] H.-P. Cheng, R.-Y. Jou, F.-Z. Chen, Y.-W. Chang, M. Iwane, and T. Hanaoka. Three-dimensional flow analysis of spiral grooved turbo booster pump in slip and continuous flow. *Journal of Vacuum Science and Technology, A*, 18(2) :543–551, 2000.
- [21] G. Chiocchia. Exacts solutions to transonic and supersonic flows. Test cases for inviscid flowfield methods, AGARD Advisory Report AR-211, Working Group 07, 1985.
- [22] C.A. Coello Coello and A.D. Christiansen. Moses : A multiobjective optimization tool for engineering design. *Engineering Optimization*, 31(3) :275–308, 2000.
- [23] W.J. Coirier and K.G. Powell. An accuracy assessment of cartesian-mesh approaches for the euler equations. *Journal of Computational Physics*, 117 :121–131, 1995.
- [24] G.B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1963.
- [25] C.R. Darwin. *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*. John Murray, London, 1859.
- [26] D. De Zeew and K.G. Powell. An adaptively refined cartesian mesh solver for the euler equations. *Journal of Computational Physics*, 104 :56–68, 1993.
- [27] K. Deb. Genetic algorithms in multimodal function optimization. Thesis Master - University of Alabama, 1989.
- [28] K. Deb. *Multi-Objective Optimization using Evolutionnary Algorithms*. Wiley and sons, 2001.
- [29] K. Deb and S. Agrawal. Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex Systems*, 9(2) :115–148, 1995.
- [30] K. Deb and S. Agrawal. A niched-penalty approach for constraint handling in genetic algorithms. In *Proceedings of the International Conference on Artificial Neural Networks and Genetic Algorithms (ICANNGA-99)*. Springer, New York, 1999.
- [31] K. Deb, S. Agrawal, A. Pratap, and T. Meyarivan. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization : Nsga-ii. KanGAL report No. 200001, 2000.
- [32] K. Deb and D.E. Goldberg. An investigation of niche and species formation in genetic function optimization. In *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*, pages 42–50. Morgan Kaufmann Inc, 1989.
- [33] K. Deb and M. Goyal. A combined genetic adaptative search (geneas) for engineering design. *Computer Science and Informatics*, 26(4) :30–45, 1996.
- [34] K. Deb, S. Karthik, and T. Okabe. Self-adaptative simualted binary crossover for real-parameter optimization. In *GECCO 2007 : Proceedings of the 9th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. ACM Press, 2007.

- [35] K.A. DeJong. An analysis of the behavior of a class of genetic adaptative systems. PhD Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, MI, 1975.
- [36] M. Delanaye. Polynomial reconstruction finite volume schemes for the compressible euler and navier-stokes equations on unstructured adaptative grids. Mémoire de Thèse - Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, 1996.
- [37] J. Denecke, V. Schramm, S. Kim, and S. Witting. Influence of rub-grooves on labyrinth seal leakage. *Journal of Turbomachinery*, 125 :387–393, 2004.
- [38] S.-T. Di Pierro, F. adn Khu, S. Djordjevic, and D.A. Savic. A new genetic algorithm to solve effectively highly multi-objective problems : Poga. Report Number 2004/02, School of Engineering, Computer Science and Mathematics, Exeter, 2004.
- [39] M. Dorigo and L.M. Gambardella. Ant colony system - a cooperative learning approach to the traveling salesman problem. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(1) :53–66, 1997.
- [40] J. Dréo, A. Pétrowski, P. Siarry, and E. Taillard. *Métaheuristiques pour l'Optimisation Difficile*. Eyrolles, 2003.
- [41] P. Duval, A. Raynaud, and C. Saulgeot. The molecular drag pump : Principle, characteristics and applications. *Journal of Vacuum Science and Technology, A*, 6(3) :1187–1191, 1988.
- [42] J.R. Edwards and M.S. Liou. Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speed. *AIAA Journal*, 36(9) :1610–1617, 1998.
- [43] A.E. Eiben and T. Back. Empirical investigation of multiparent recombination operators in evolution strategies. *Evolutionary Computation*, 5(3) :347–365, 1997.
- [44] M. Eiermann, O.G. Ernst, and Schneider O. Analysis of acceleration strategies of restarted minimal residual methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 123 :261–292, 2000.
- [45] J. Erhel, K. Burrage, and B. Pohl. Restarted gmres preconditionned by deflation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 69 :303–318, 1996.
- [46] E. Erwin, K. Obermayer, and K. Schulten. Convergence properties of self-organizing maps. *Artificial Neural Networks*, 67 :409–414, 1991.
- [47] L. Eshelman and Schaffer J. Real coded algorithms and interval schemata. In *Foundations of Genetic Algorithms 2*, pages 187–202. Morgan Kaufmann Inc., 1993.
- [48] S. Favuzza, G. Graditi, and E. Riva Sanseverino. Adaptative and dynamic ant colony search algorithm for optimal distribution systems reinforcement strategy. *Applied Intelligence*, 24 :31–42, 2006.
- [49] J.A. Feldman and D.H Ballard. Connectionist models and their properties. *Cognitive Science*, 6 :205–254, 1982.
- [50] D.B. Fogel. An evolutionnary approach to the travelling salesman problem. *Biological Cybernetics*, 60(2) :139–144, 1988.
- [51] C.M Fonseca and P.J. Fleming. Genetic algorithms for multiobjective optimization : Formulation, discussion and generalization. In *Genetic Algorithms : Proceedings of the Fifth International Conference*. Morgan Kaufmann Inc., 1993.
- [52] N.T. Frink. Recent progress towards a three-dimensional unstructured navier-stokes flow solver. In *AIAA Paper 94-0061*, 1994.

- [53] J.E. Fromm. A method for reducing dispersion in convective difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 3 :176–189, 1968.
- [54] T. Galliat, W. Huisinga, and P. Deuffhard. Self-organizing maps combined with eigenmode analysis for automated cluster identification. In *Proceedings of the 2nd International ICSC Symposium on Neural Computation*. ICS Academic Press, 2000.
- [55] N.R. Gauger. Adjoint approaches in aerodynamic shape optimization and mdo context. In *Introduction to Optimization Methods and Tools for Multidisciplinary Design in Aeronautics and Turbomachinery*, VKI Lecture Series. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2008.
- [56] K.C. Giannakoglou, D.I. Papadimitriou, and C.A. Georgopoulou. Metamodel-assisted evolutionary algorithms (maeas). In *Introduction to Optimization Methods and Tools for Multidisciplinary Design in Aeronautics and Turbomachinery*, VKI Lecture Series. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2008.
- [57] K.C. Giannakoglou, D.I. Papadimitriou, and I.C. Karpolis. Hybridized adjoint methods - evolutionnary algorithms and applications to turbomachinery. In *Introduction to Optimization Methods and Tools for Multidisciplinary Design in Aeronautics and Turbomachinery*, VKI Lecture Series. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2008.
- [58] M.B. Giles and N.A. Pierce. Adjoint equations in cfd : Duality, boundary conditions and solution behaviour. AIAA paper 97-1850, 1997.
- [59] M.B. Giles and N.A. Pierce. An introduction to the adjoint approach to design. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65 :393–415, 2000.
- [60] S.K. Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik*, 47(3) :271–306, 1959. traduit du russe au Cornell Aeronautical Laboratory.
- [61] D. E. Goldberg. Simple genetic algorithms and the minimal deceptive problem. In *Genetic Algorithms and Simulated Annealing*. L. Davis, 1987.
- [62] D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms for Search, Optimization and Machine Learning*. Adisson-Wesley, 1989.
- [63] D. E. Goldberg. Real-coded genetic algorithms, virtual alphabets, and blocking. *Complex Systems*, 5(2), 1991.
- [64] D. E. Goldberg and J. Richardson. Genetic algorithms with sharing for myltimodal function optimization. In *Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms and their Applications*, pages 41–49, 1987.
- [65] L.F. Gonzalez, J. Périaux, and D.S. Lee. Moo methods for multidisciplinary desing using parallel evolutionnary algorithms, games theory and hierachical topology : Numerical aspects and implementation of model test cases. In *Introduction to Optimization Methods and Tools for Multidisciplinary Design in Aeronautics and Turbomachinery*, VKI Lecture Series. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2008.
- [66] L.F. Gonzalez, J. Périaux, and D.S. Lee. Moo methods for multidisciplinary desing using parallel evolutionnary algorithms, games theory and hierachical topology : Theoretical aspect. In *Introduction to Optimization Methods and Tools for Multidisciplinary Design in Aeronautics and Turbomachinery*, VKI Lecture Series. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2008.
- [67] L.F. Gonzalez, R. Walker, K. Srinivas, and J. Périaux. Multidisciplinary design optimisation of unmanned aerial systems (uas) using meta model assisted evolutionary algorithms. In *Proceedings of the 16th Australasian Fluid Mechanics Conference*, pages 471–474, 2007.

- [68] G. Grondin, V. Kelner, P. Ferrand, and S. Moreau. Robust design and parametric performance study of an automotive fan blade by coupling multi-objective genetic optimization and flow parameterization. In *SIA Articles techniques R-2005-03-31*, 2005.
- [69] Y. Y. Haimes. On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1(3) :296–297, 1971.
- [70] P. Hajela and C.-Y. Lin. Genetic search strategies in multicriterion optimal design. *Structural Optimisation*, 4(2) :99–107, 1992.
- [71] A. Haselbacher and J. Blazek. Accurate and efficient discretization of navier-stokes equations on mixed grids. *AIAA Journal*, 38(11) :2094–2102, 2000.
- [72] S. Haykin. *Neural Networks : A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [73] R. Hecht-Nielsen. Kolmogorov’s mapping neural network existence theorem. In *IEEE International Conference on Neural Networks, San Diego*, pages 11–14, 1987.
- [74] M.R. Hestenes and E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of The National Bureau of Standards*, 49(6) :409–436, 1952.
- [75] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 2*. Wiley and sons, 1988.
- [76] J. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, 1975.
- [77] F. Holweck. Pompe moléculaire hélicoïdale. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 117 :43, 1923.
- [78] A. Homaifar, S.H. Lai, and C.X. Qi. Constrained optimization via genetic algorithms. *Simulation*, 62(4) :242–253, 1994.
- [79] J. Horn and N. Nafpliotis. Multiobjective optimization using the niched pareto algorithm. IlliGAL Report no 93005, 1993.
- [80] D. Hänel, R. Schwane, and G. Seider. On the accuracy of upwind schemes for the solution of navier-stokes equations. In *AIAA Paper 87-1105*, 1987.
- [81] F. Ilinca, D. Pelletier, and J. Borggaard. A continuous second-order sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 55(6) :565–587, 2007.
- [82] F. Ilinca, D. Pelletier, and A. Hay. First- and second-order sensitivity equation methods for value and shape parameters. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57(9) :1349–1370, 2008.
- [83] I.C.F Ipsen and C.D. Meyer. The idea behind krylov methods. *American Mathematical Monthly*, 105(10) :889–899, 1998.
- [84] A. Jameson. Transonic airfoil calculations using the euler equations. In *Proceedings of IMA Conference on Numerical Methods in Aeronautical Fluid Dynamics*, 1981.
- [85] A. Jameson. Aerodynamic design via control theory. *Journal of Scientific Computing*, 3(3) :233–260, 1988.
- [86] A. Jameson. Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flow. In *AIAA 11th Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, FL - AIAA Paper 93-3359*, 1993.

- [87] A. Jameson, T.J. Baker, and N.P. Weatherill. Calculation of inviscid transonic flow over a complete aircraft. In *AIAA 24th Aerospace Science Meeting, AIAA-86-0103*, 1986.
- [88] A. Jameson and S. Kim. Reduction of the adjoint gradient formula in the continuous limit. 41st AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit - AIAA paper 2003-0040, 2003.
- [89] A. Jameson, N.A. Pierce, and L. Martinelli. Optimum aerodynamic desing using the navier-stokes equations. 35th AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit - AIAA paper 97-0101, 1997.
- [90] A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel. Numerical solutions of the euler equations by finite volume methods using runge-kutta time-stepping schemes. In *AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamic Conference, Palo Alto, CA - AIAA Paper 81-1259*, 1981.
- [91] A. Jameson and J.C. Vassberg. Studies of alternative numerical optimization methods applied to the brachistochrone problem. *Journal of Computational Fluid Dynamics*, 9(3), 2000.
- [92] M. Jebalia. Optimisation par stratégies d'évolution : Convergence et vitesses de convergence pour des fonctions bruitées - résolution d'un problème d'identification. Mémoire de Thèse - Ecole polytechnique de Tunisie - Université Pierre et Marie Curie, 2008.
- [93] J.L. Jiménez, F. Verdegay and A.F. Gomez-Skarmeta. Evolutionary techniques for constrained multiobjective optimization problems. In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-99)*, pages 115–116, 1999.
- [94] K.D. Jones and K.B. Center. Waverider design methods for non-conical shock geometries. 3rd AIAA Theoretical Fluid Mechanics Meeting - AIAA paper 2002-3204, 2002.
- [95] K.D. Jones, F.C. Dougherty, A.R. Seebass, and Sobieczky H. Waverider design for generalized shock geometries. 31th AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit - AIAA paper 93-0774, 1993.
- [96] R.-Y. Jou, H.-P. Cheng, Y.-W. Chang, F.-Z. Chen, and M. Iwane. Designs, analyses, and tests of a spiral-grooved turbobooster pump. *Journal of Vacuum Science and Technology, A*, 18(3) :1016–1024, 2000.
- [97] I.C. Karpolis and K.C. Giannakoglou. A multilevel approach to single and multiobjective aerodynamic optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(33-40) :2963–2975, 2008.
- [98] I.C. Karpolis and G.W. Mi. Growing radial basis neural networks : Merging supervised and unsupervised learning with network growth techniques. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 8(6) :1492–1506, 1997.
- [99] M.K. Karakasis, K.C Giannakoglou, and D.G. Koubogiannis. Aerodynamic design of compressor airfoils using hierarchical, distributed, metamodel-assisted evolutionary algorithms. In *7th European Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics, Athens*, 2007.
- [100] J.J. Keller. Inverse euler equations. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 49 :363–383, 1998.
- [101] V. Kelner, F. Capitanescu, O. Léonard, and L. Wehenkel. An hybrid optimization technique coupling evolutionnary and local search algorithms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 215(2) :448–456, 2006.

- 
- [102] V. Kelner, G. Grondin, O. Léonard, and P. Ferrand. Multi-objective optimization of a fan blade cascade by coupling a genetic algorithm and a parametric flow solver. In *6th International Conference on Evolutionary Computing for Industrial Applications (EUROGEN'2005), Munich, Germany*, 2005.
- [103] V. Kelner, G. Grondin, O. Léonard, and P. Ferrand. Robust design of a fan blade by coupling multi-objective genetic optimization and flow parameterization. In *International Congress of Fluid Dynamics Applications in Ground Transportation, Lyon, France*, 2005.
- [104] A. Keskin, M. Swoboda, P.M. Flassig, A.K. Dutta, and D. Bestle. New optimization strategy for rapid industrial blade design. In *Proceedings of the 8th European Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics, Graz*, pages 925–935, 2009.
- [105] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, and M.P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 4598, 1983.
- [106] T. Kohonen. Self organized formation of topologically correct feature maps. *Biological Cybernetics*, 43 :59–69, 1982.
- [107] J.C. Kok. Resolving the dependence on free-stream values for the k-w turbulence model. *AIAA Journal*, 38(7) :1292–1295, 2000.
- [108] B. Koren. Upwind discretization of the steady navier-stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 11 :99–117, 1990.
- [109] D.G. Krige. A statistical approach to some mine valuation and allied problems at the witwatersrand. PhD Thesis, University of Witwatersrand, 1951.
- [110] I. Kroo. Emerging methods for multidisciplinary design of complex systems. In *Introduction to Optimization Methods and Tools for Multidisciplinary Design in Aeronautics and Turbomachinery*, VKI Lecture Series. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2008.
- [111] B. Kröse and P. Van Der Smagt. An introduction to neural networks. University of Amsterdam, 1996.
- [112] M. Laumanns, G. Rudolph, and H.-P. Schwefel. A spatial predator-prey approach to multi-objective optimization : A preliminary study. In *Parallel Problem Solving From Nature - PPSN V*, pages 241–249. Springer, Berlin, 1998.
- [113] P.-E. Leni, Fougerolle Y.D., and Truchetet F. Kolmogorov superposition theorem and its application to multivariate function decompositions and image representation. In *Conference on Signal-Image Technology and Internet-Based Systems (SITIS'2008)*, 2008.
- [114] A. Lerat. Implicit methods of second order accuracy for the euler equations. *AIAA Journal*, 23(1) :33–40, 1985.
- [115] N. Liamis. Méthodes implicites de résolution des équations d'euler pour des écoulements tridimensionnels instationnaires dans les turbomachines. Mémoire de Thèse, Université Paris 6, 1993.
- [116] A.T. Liou, M.S. Hsu. A time accurate finite volume high resolution scheme for three dimensional navier-stokes equations. AIAA 89-1994, 1989.
- [117] M.S. Liou. A generalized procedure for constructing an upwind-based tvd scheme. NASA Technical Memorandum TM-88926, also AIAA 87-0355, 1988.
- [118] M.S. Liou. A new flux splitting scheme. *Journal of Computational Physics*, 107 :23–39, 1993.

- [119] M.S. Liou. A continuing search for near-perfect numerical flux scheme. part i : Ausm+. NASA Technical Memorandum TM-106524, 1994.
- [120] M.S. Liou. A sequel to ausm : Ausm+. *Journal of Computational Physics*, 129 :364–382, 1996.
- [121] M.S. Liou. A sequel to ausm, part ii : Ausm+-up for all speed. *Journal of Computational Physics*, 214 :137–170, 2006.
- [122] M.S. Liou and J.R. Edwards. Numerical speed of sound and its application to schemes for all speed. NASA Technical Memorandum TM-1999-209286, also AIAA-99-3268, 1999.
- [123] B. Liu, R.T. Haftka, M.A. Akgün, and A. Todoroki. Permutation genetic algorithm for stacking sequence design of composite laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 186(2–4) :357–372, 2000.
- [124] P. Loridan and J. Morgan. A theoretical approximation scheme for stackelberg problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 61(1) :95–110, 1989.
- [125] J.-N. Mahieu, S. Etienne, D. Pelletier, and J. Borggaard. A second-order sensitivity equation method for laminar flow. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 19(2) :143–157, 2005.
- [126] J.D. Martin and T.W. Simpson. Use of kriging models to approximate deterministic computer models. *AIAA Journal*, 43(4) :853–863, 2005.
- [127] M.Y. Matjinouche. Méthode inverse pour la conception aérodynamique d’éléments de turbomachines. Mémoire de Thèse, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, 1994.
- [128] M.A. Matos and P. Melo. Multiobjective reconfiguration for loss reduction and service restoration using simulated annealing. In *Proceedings of IEEE Power Tech 1999 Conference, Budapest, Hungary - Paper BTP99-360-23*, 1999.
- [129] D.J. Mavriplis. Upwind discretization of the steady navier-stokes equations. *AIAA Journal*, 26(7) :824–831, 1988.
- [130] F.R. Menter. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows. AIAA 93-2906, 1993.
- [131] Z. Michalewicz, D. Dasgupta, R.G. Le Riche, and M. Schoenauer. Evolutionary algorithms for constrained engineering problems. *Evolutionary Computation*, 4 :1–32, 1996.
- [132] K. Miettinen. *Non-linear Multiobjective Optimization*. Kluwer, Boston, 1999.
- [133] J. Montgomery, M. Randall, and T. Hendtlass. Solution bias in ant colony optimization : Lessons for selecting pheromone models. *Computer and Operation Research*, 35 :2728–2749, 2008.
- [134] S. Moreau, S. Aubert, M. N’Diaye, and P. Ferrand. Parametric study of a fan blade cascade using a new parametric flow solver turb’opty. 4th ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, Honolulu, Hawaiï - FEDSM2003-45116, 2003.
- [135] S. Moreau, S. Aubert, M. N’Diaye, P. Ferrand, J. Tournier, and M. Rochette. Parametric study of a turbine blade cascade using a new parametric flow solver turb’opty. ASME 2002 Fluids Engineering Division Summer Meeting, Montreal, Quebec, Canada - FEDSM2002-31306, 2002.

- 
- [136] R.B. Morgan. A restarted gmres method augmented with eigenvectors. *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, 16 :1154–1171, 1995.
- [137] R.B. Morgan. Gmres with deflated restarting. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 24 :20–37, 2002.
- [138] R.B. Morgan and W. Wilcox. Deflated iterative methods for linear equations with multiple right-hand sides. Technical Report, BU-HEPP-04-01, Baylor University, 2004.
- [139] R.B. Morgan and M. Zeng. Harmonic projection methods for large non-symmetric eigenvalue problems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 5 :33–55, 1998.
- [140] W.A. Mulder and B. Van Leer. Implicit upwind methods for the euler equations. In *AIAA Paper 83-1930*, 1983.
- [141] R.H. Myers and D.C. Montgomery. *Response Surface Methodology : Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. Wiley and sons, 1995.
- [142] S.K. Nadarajah and A. Jameson. A comparison of the continuous and discrete adjoint approach to automatic aerodynamic optimization. 38th AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit - AIAA paper 2000-0667, 2000.
- [143] S. Nadeau. Integral tip seal in a fan-shroud structure. Siemens VDO Automotive Inc. - United States Patent number 6874990, 2005.
- [144] J.F. Jr Nash. Equilibrium points in n-person games. In *Proceedings of The National Academy*, volume 36, pages 48–49, 1950.
- [145] V.Y. Nezym. Development of new casing treatment configuration. *JSME International Journal, Series B*, 47(4) :804–812, 2004.
- [146] G.L. Oliveira. Analyse numérique de l’effet du défilement des sillages liés aux interactions rotor-stator en turbomachine. Mémoire de Thèse, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, 1999.
- [147] A. Pfau. Loss mechanism in labyrinth seal of shrouded axial turbines, 2003.
- [148] R. Poli, W.B. Langdon, and N.F. McPhee. A field guide to genetic programming, 2008.
- [149] K. Price and R. Storn. Differential evolution. *Dr Dobb’s Journal*, pages 18–24, 1997.
- [150] M.M. Raguwanshni, P.M Singru, U. Kale, and O.G. Kakde. Simulated binary crossover with lognormal distribution. *Complexity International*, 12, 2005.
- [151] M.M. Rai. Single and multiple-objective optimization with differential evolution and neural network. In *Introduction to Optimization Methods and Tools for Multidisciplinary Design in Aeronautics and Turbomachinery*, VKI Lecture Series. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2008.
- [152] T. Ray, K. Tai, and K.C. Seow. An evolutionary algorithm for constrained optimization. In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO’2000)*, pages 771–777. Morgan Kaufmann Inc., 2001.
- [153] I. Rechenberg. *Evolutionsstrategie*. Friedrich Frommann Verlag, 1973.
- [154] J. Reuther, A. Jameson, J. Farmer, L. Martinelli, and D. Saunders. Aerodynamic shape optimization of complex aircraft configuration via an adjoint formulation. 34st AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit - AIAA paper 96-0094, 1996.

- [155] D.L Rhode and B.F. Allen. Measurement and visualization of leakage effects on rounded teeth tips and rub-grooves on stepped labyrinths. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbine and Power*, 123 :604–611, 2001.
- [156] P.L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43 :357–372, 1981.
- [157] P.L. Roe. Characteristic-based schemes for the euler equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 18 :337–365, 1986.
- [158] Y. Saad. A flexible inner-outer preconditioned gmres algorithm. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 14 :461–469, 1993.
- [159] Y. Saad. Preconditioned krylov subspace methods for cfd applications. In *Proceedings of the International Workshop on Solution Techniques for Large-Scale CFD Problems*, 1994.
- [160] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems (2nd edition)*. SIAM, 2000.
- [161] Y. Saad and M.H. Schultz. Gmres : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 7 :856–869, 1988.
- [162] B.F. Sanders and N.D. Katopodes. Adjoint sensitivity analysis for shallow-water wave control. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(9) :909–919, 2000.
- [163] T. Sawada and W. Sugiyama. Pumping mechanism of helical grooved molecular drag pumps. *Journal of Vacuum Science and Technology, A*, 17(4) :2069–2074, 1999.
- [164] H.-P. Schwefel. *Numerical Optimization of Computer Models*. Wiley and sons, 1981.
- [165] M. Sefrioui and J. Périaux. A hierarchical genetic algorithm using multiple models for optimization. In *Parallel Problem Solving From Nature - PPSN VI*, pages 879–888. Springer, Berlin, 2000.
- [166] A. Shabbir and J.J. Adamczyk. Flow mechanism for stall margin improvement due to circumferential casing grooves on axial compressors. *Journal of Turbomachinery*, 127 :708–717, 2005.
- [167] F. Shapirov, P. Fahrenbach, and A. Zipp. Numerical modeling of the holweck pump. *Journal of Vacuum Science and Technology, A*, 23(5) :1331–1339, 2005.
- [168] E. Shima and K. Kitamura. On new simple low-dissipation scheme of ausm-family for all speeds. In *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition - AIAA 2009-136*, 2009.
- [169] E.N. Sickafus, R.B. Nelson, and R.A. Lowry. The holweck type molecular pump, 1961.
- [170] T.W. Simpson, J.D. Peplinski, P.N Koch, and J.K Allen. Metamodels for computer-based engineering design : Survey and recommendations. *Engineering with Computers*, 17 :129–150, 2001.
- [171] L. Smati. Contribution au développement d’une méthode numérique d’analyse des écoulements instationnaires. application aux turbomachines. Mémoire de Thèse, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, 1997.
- [172] L. Soulat, P. Ferrand, S. Aubert, and S. Moreau. Design and numerical optimization of a new casing treatment for cooling fans. Proceedings of 8th European Conference on Turbomachinery (ETC8), Graz, Austria, 2009.

- [173] W.M. Spears. *The Role of Mutation and Recombination in Evolutionary Algorithms*. ph.D., George Mason University, Fairfax, 1998.
- [174] N. Srinivas and K. Deb. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary Computation*, 2(3) :221–248, 1994.
- [175] R.W. Stairs and D.S. Greeley. High efficiency inflow-adapted axial-flow fan. Robert Bosch Corporation - United States Patent number 6579063, 2003.
- [176] J.L Steger and R.F. Warming. Flux vector splitting scheme of the inviscid gas dynamic equations with application to finite difference methods. *Journal of Computational Physics*, 40(2) :263–293, 1981.
- [177] R. Storn and K. Price. Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11 :341–359, 1997.
- [178] W.T. Tiow, K.F.C. Tiu, and M. Zangeneh. Application of simulated annealing to inverse design of transonic turbomachinery cascades. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part A : Journal of Power and Energy*, 216 :59–73, 2002.
- [179] V. Torczon and M.W. Trosset. Using approximation to accelerate engineering design optimization. ICASE Report No 98-33, 1998.
- [180] Y.-Y. Tsui, Y.-S. Su, and H.-P. Cheng. Flow characteristics of the molecular pump of holweck type in the slip regime. *Journal of Fluid Engineering*, 124 :287–290, 2002.
- [181] S. Tsutsui, M. Yakamura, and T. Higuchi. Multi-parent recombination with simplex crossover in real coded genetic algorithms. In *GECCO 1999 : Proceedings of the Conference on Genetic and evolutionary computation*, pages 657–664, 1999.
- [182] A. Ultsch and H.P. Siemon. Kohonen’s self organizing feature maps for exploratory data analysis. In *Proceedings of ICNN90 International Neural Networks Conference*, pages 305–308. Kluwer Academic Press, 1990.
- [183] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme - part iv : A new approach to numerical diffusion. *Journal of Computational Physics*, 23 :276–299, 1977.
- [184] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme - part v : A second-order sequel to godunov’s method. *Journal of Computational Physics*, 32 :101–136, 1979.
- [185] J.C. Vassberg and A. Jameson. Theoretical background for aerodynamic shape optimization. In *Introduction to Optimization Methods and Tools for Multidisciplinary Design in Aeronautics and Turbomachinery*, VKI Lecture Series. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2008.
- [186] G. Vermes. A fluid mechanics approach to the labyrinth seal leakage problem. *ASME Journal of Engineering for Power*, 83 :161–169, 1961.
- [187] T. Verstraete and R.A. Van Den Braembussche. Multidisciplinary optimization of turbomachinery components including heat transfer and stress prediction. In *Introduction to Optimization Methods and Tools for Multidisciplinary Design in Aeronautics and Turbomachinery*, VKI Lecture Series. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2008.
- [188] J. Vesanto and E. Alhomieni. Clustering of the self-organizing map. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11(3) :586–600, 2000.
- [189] J. Vesanto, J. Himberg, E. Alhomieni, and J. Parhankangas. Som toolbox for matlab5. Report A57, Helsinki University of Technology, 2000.
- [190] H. Von Stackelberg. *The Theory of the Market Economy*. Oxford University Press, 1950.

- 
- [191] A.M. Wallis, J.D. Denton, and A.A.J. Demargne. The control of shroud leakage flow to reduce aerodynamic losses in a low aspect ratio, shrouded axial flow turbine. *Journal of Turbomachinery*, 123 :334–341, 2001.
- [192] N.P. Waterson and H. Deconinck. Design principles for bounded higher-order convection schemes - a unified approach. *Journal of Computational Physics*, 224 :182–207, 2007.
- [193] J.M. Weiss and W.A. Smith. Preconditionning applied to variable and constant density flow. *AIAA Journal*, 33(11) :2050–2057, 1979.
- [194] S.R. Wellborn, I. Tolchinsky, and T.H. Okiishi. Modeling shrouded stator cavity flows in axial-flow compressors. *Journal of Turbomachinery*, 122 :55–61, 2000.
- [195] D.C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Canada, CA., 1993.
- [196] I. Wilke and H.-P. Kau. A numerical investigation of the flow mechanism in a high pressure compressor front stage with axial slots. *Journal of Turbomachinery*, 126 :339–349, 2004.
- [197] S. Wittig, L. Dörr, and S. Kim. Scaling effects on leakage losses in labyrinth seals. *ASME Journal of Engineering for Power*, 105 :305–309, 1983.
- [198] M. Yapp, R.V. Van Houten, and Hickey R.I. Housing with recirculation control for banded axial-flow fans. Airflow Research and Manufacturing Corporation - United States Patent number 5489186, 1996.
- [199] P. Yu. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decisions problems with multiple objectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 14(3) :319–377, 1974.
- [200] H. Zimmermann and K.H. Wolff. Air system correlation, part 1 : Labyrinth seals. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 1998, Stockholm, 98-GT-206*, 1998.