

# ECOLE CENTRALE DE LYON

## THESE

*Pour obtenir le grade de :*

DOCTEUR DE L'ECOLE CENTRALE DE LYON

*Discipline : Electronique, Electrotechnique et Automatique*

Par :

Léa Maurice

---

**Développement d'un modèle d'interaction d'un champ électromagnétique  
avec un défaut plan dans un matériau conducteur**

**Application à la simulation d'un procédé  
de Contrôle Non Destructif par Courants de Foucault**

---

soutenue le 19 décembre 2006 devant le jury composé de

M. Claude MARCHAND

Président et Rapporteur

M. Gérard MEUNIER

Rapporteur

M. Alain NICOLAS

Directeur de thèse

M. Dominique LESSELIER

M. Denis PREMEL

M. József PÁVÓ





**ECOLE CENTRALE DE LYON**  
DIRECTION DE LA RECHERCHE

*liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon*

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
AURIOL Philippe	professeur	CEGELY	ECL
BEROUAL Abderrahmane	professeur	CEGELY	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	CEGELY	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS/ECL
MARTELET Claude	professeur	CEGELY	ECL
NICOLAS Alain	professeur	CEGELY	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS/ECL
SIMONET Pascal	chargé de recherche	CEGELY	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	professeur	CEGELY	ECL
VOLLAIRE Christian	maître de conférences	CEGELY	ECL

**Nbre Cégely 10**

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	professeur	DER EEA	ECL

**Nbre DER EEA 2**

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

**Nbre DER STMS 2**

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ROUY MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

**Nbre ICJ 7**

DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
----------------	------------	------	-----

**Nbre ICTT 1**

CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	LEOM	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	LEOM	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	LEOM	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
JOSEPH Jacques	professeur	LEOM	ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	professeur émérite	LEOM	ECL
O'CONNOR Ian	maître de conférences	LEOM	ECL

PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	LEOM	ECL
ROBACH Yves	professeur	LEOM	ECL
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL

Nbre LEOM 16

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
-------------	------------	-------	-----

Nbre LIRIS 1

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT geneviève	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	maître de conférences	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAUT. Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

Nbre LMFA 20

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	maître de conférences	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL
SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	professeur	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	professeur	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	professeur	LTDS	ECL
VANNES André-Bernard	professeur émérite	LTDS	ECL

Nbre LTDS 24

Total HdR ECL

4

91

# Remerciements

C'est au service SYSCC du CEA Saclay, qui met en œuvre une activité de recherche scientifique de haut niveau, au service des exigences d'industriels de divers domaines à travers le monde, que j'ai effectué mon contrat de formation par la recherche.

J'ai donc directement tiré profit de ce contexte complexe et palpitant, riche en rebondissements. J'y ai trouvé ce que je ne cherchais pas, à ma plus grande satisfaction aujourd'hui. Je remercie donc Philippe Benoist, chef du service SYSCC, pour cette opportunité. J'ai également apprécié ses interventions et analyses instructives, voire déroutantes, et je lui en suis reconnaissante.

J'exprime de même toute ma gratitude à Denis Prémel. Je tiens à le remercier pour son encadrement sur ces trois années, très formateur. Sa gentillesse, parfois mise à rude épreuve au cours de cette expérience, a toujours repris le dessus. Je t'en témoigne toute ma reconnaissance. Merci également pour m'avoir guidée et prodiguée des conseils, ainsi que pour ta disponibilité.

Mes remerciements vont également à mes chefs de laboratoire successifs :

- Thierry Sollier, en temps que chef du Laboratoire de Contrôle par Méthodes Electromagnétiques au début de ma thèse, est efficacement intervenu lorsque cela fut nécessaire. J'ai apprécié le travail dans son laboratoire. Je le remercie également pour les conseils fruités de son expertise technique en CND par CF, et son aide pour la mise en place technique des validations expérimentales.

- Steve Mahaut, chef du Laboratoire de Simulation et de Modélisation à partir de janvier 2006, a su orienter la fin de ma thèse. Je tiens tout particulièrement à le remercier pour sa grande disponibilité et son aide précieuse pour la préparation de ma soutenance de thèse. De même, je remercie Pierre Calmon.

J'adresse mes vifs remerciements à Alain Nicolas, mon directeur de thèse pendant ces trois années. Je tiens également à remercier Noël Burais. Leurs interventions furent très constructives.

L'avancement de ces travaux doit beaucoup à Dominique Lesselier, directeur de recherche au CNRS. Son soutien et sa confiance renouvelées à des moments opportuns furent décisifs pour la poursuite de mes travaux. Ses interventions m'ont souvent guidée et je lui en suis très reconnaissante. Sa présence dans mon jury de thèse m'honore également.

Je remercie József Pávò, professeur à l'université de Budapest. J'ai beaucoup appris dans le cadre de notre collaboration. Je le remercie pour ses conseils, son soutien, sa disponibilité et ses encouragements, et sa présence dans le jury lors de ma soutenance de thèse.

Je tiens à remercier Grégoire Pichenot, responsable des développements en simulation de Contrôle Non Destructif par Courants de Foucault : Son encadrement et son expertise technique furent très précieuses, notamment lors de la préparation de ma soutenance de thèse, à laquelle il a également consacré beaucoup de temps.

Je remercie Marie Odile Bourdeau pour sa disponibilité et son aide logistique, Daniel Lobjois, pour ses interventions matériellement salvatrices, Eric Bordas et Jean Luc Lechien pour leur aide lors des validations expérimentales.

Merci à Claude Marchand et Gérard Meunier pour leurs rapports, et leur présence dans mon jury de thèse.

J'adresse également mes remerciements chaleureux à Michèle Bonnin-Mosbah, pour les sessions de formation professionnalisantes à l'INSTN, et les discussions que nous avons pu avoir.

Merci à l'ensemble des personnes croisées au SYSSC... et particulièrement à mes collègues thésards! Christophe, merci pour ta bienveillance et ton aide mainte fois renouvelée. Merci à Karim, Vincent, François, Nizare, Sébastien Deydier, Séverine. J'espère que nous resterons en contact!

Mes pensées vont également à ma famille, notamment à mes parents, mon frère, Julia et Pierre, Annie. Leur soutien fut primordial. Merci à Olivier, Clem, Vincent, Mathieu. Emile. Seb et Stéphane. Qu'aurait été ce travail sans vous. L'imaginer n'a pas de sens.

Merci à la LDC<sup>1</sup>.

Et merci à tous ceux que je ne peux nommer ici.

---

<sup>1</sup>tout de même!

# Résumé

Le contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault (CF) est une technique largement utilisée dans le domaine industriel. La modélisation des phénomènes en jeu apporte une aide précieuse pour la compréhension, la mise au point et l'optimisation du contrôle à effectuer. Différentes approches peuvent être mises en oeuvre pour le développement d'outils de simulation. Le modèle VIM (Volume Integral Method) est basé sur une résolution semi-analytique des équations de Maxwell et un formalisme par intégrales de volume. Il permet de simuler différentes configurations de CND par CF impliquant des défauts volumiques. Cependant, d'importants problèmes de formalisme et numériques surviennent lorsque l'on considère un défaut d'ouverture petite, et les temps de calcul deviennent très importants, voire bloquants. C'est pour cette raison que le modèle SIM a été développé. Le défaut est pris en compte au niveau du formalisme comme une source fictive de courants surfaciques, décrite par la fonction scalaire densité de dipôle. Une étude de différentes mises en oeuvre numériques a permis de sélectionner la plus performante.

Puis des validations ont été effectuées, confrontant les réponses de sonde calculées par SIM, par VIM et obtenues expérimentalement.

Le modèle SIM se révèle très rapide et bien adapté à l'obtention de cartographies 2D des réponses de sondes, avec une précision de l'ordre de 10 % par rapport aux données expérimentales. Cependant, on a constaté que les hypothèses introduites dans le formalisme SIM sont très restrictives pour certaines configurations.

Nous avons mis au point un modèle tirant profit de SIM et VIM. Les hypothèses surfaciques sont conservées pour l'évaluation de la densité de dipôle. La charge de calcul reste donc proche de celle de SIM. L'approximation est cependant complétée par l'évaluation d'un champ total qui permet une prise en compte partielle de l'ouverture du défaut. De nouvelles comparaisons entre les données obtenues par les trois modèles de simulation avec des données expérimentales ont été effectuées pour de nombreuses configurations, impliquant notamment des sondes fonctionnant en émission - réception séparées. Le nouveau modèle apporte les corrections nécessaires au modèle SIM. Les résultats de simulation deviennent tout à fait satisfaisants dans toutes les configurations de contrôle étudiées. De plus, les performances en temps de calcul sont de l'ordre de celles du modèle SIM, tout en bénéficiant d'une précision proche de celle de la méthode VIM.

Cette nouvelle méthode sera intégrée à la version 9 de CIVA.

# Abstract

The Eddy Current (EC) Non Destructive Testing (NDT) is used in various industrial fields. The modelling of the implied phenomena brings a substantial hand for the understanding, the set-up and the optimisation of the investigations to be performed. It requires the resolution of the Maxwell equations that can be achieved with semi-analytical models, based on an integral methods. The Volume Integral Method (VIM) enables to simulate various EC NDT configurations involving volumetric defects.

Nevertheless, important formalism and numerical problems appear when the considered defect has a small aperture, and computational times become very high. This is the reason why the Surface Integral Model (SIM) has been developed. The defect is taken into account as a source layer of current dipole. Based on this assumption, the existence of a scalar potential quantity can be demonstrated.

A study of different numerical implementations enables to select the most performant. Then, validations have been carried out, comparing probe responses, computed by SIM, VIM, to experimental data.

The SIM model turns out to be very fast, and well adapted to get 2-D probe responses, with good accuracy. Nevertheless, the hypotheses used in the SIM formalism appeared to be very restrictive for some configurations.

A model has been set up, that takes advantages of both VIM and SIM. The dipole density evaluation is still based on surface hypotheses, therefore the computational load is comparable to the ones of SIM. The computations are then improved by the evaluation of the total field, which enables to partially take into account the defect aperture. Another set of comparisons between data obtained by the three simulation models and experimental measurements has been carried out, for numerous configurations. Some of them namely imply probes made of two coils, separately transmitting and receiving.

The new "hybrid" model brings suitable corrections to the SIM model. The simulation results become very satisfactory for all tested NDT configurations, with an accuracy of the order of those brought by the VIM model as well as computation load and time comparable to those of the SIM.

This hybrid model will be integrated to the version 9 of CIVA.

---

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Résumé</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>8</b>
<b>I Introduction</b>	<b>13</b>
<b>1 Contexte global et positionnement du sujet d'étude</b>	<b>15</b>
I.1.1 Le Contrôle Non Destructif (CND) : un procédé qualité décisif et multi-forme . . . . .	15
I.1.2 Modélisation en CND par CF : Une aide précieuse à plusieurs niveaux . . . . .	17
I.1.3 Les défauts plans : Des défauts de fatigue apparaissant sur des structures en exploitation	17
I.1.4 Conclusion . . . . .	17
<b>2 Interactions électromagnétiques avec un défaut plan : Etat de l'art</b>	<b>19</b>
I.2.1 Premiers travaux sur la simulation d'interactions électromagnétiques par méthodes in-	
tégrales . . . . .	19
I.2.2 Formalisme par intégrales de volume . . . . .	19
I.2.3 Variations d'impédance . . . . .	20
I.2.4 Interactions électromagnétiques avec une fissure . . . . .	20
I.2.4.a Méthodes variationnelles . . . . .	20
I.2.4.b Approximation pour le régime "thin-skin" . . . . .	20
I.2.4.c Calcul de la dyade singulière dans le domaine spatial . . . . .	21
I.2.4.d Développement en fonctions propres . . . . .	21
I.2.4.e Calcul par passage dans le domaine spectral . . . . .	21
<b>II Formulation physique du problème</b>	<b>22</b>
<b>1 Description de la configuration et équations physiques de base</b>	<b>24</b>
II.1.1 Description de la configuration . . . . .	24
II.1.2 Equations de Maxwell et équations constitutives . . . . .	25
II.1.3 Diffusion du champ . . . . .	27
II.1.3.a Diffusion du champ électrique dans l'espace libre contenant une source de cou-	
rant et une inhomogénéité . . . . .	27
II.1.3.b Comportements des champs au passage des interfaces . . . . .	27
II.1.3.c Diffusion du champ électrique dans le milieu 1, contenant l'inducteur . . . . .	28
II.1.3.d Diffusion du champ électrique dans le milieu 2, contenant le défaut . . . . .	28
II.1.3.e Diffusion du champ électrique dans le milieu 3 . . . . .	29
<b>2 Résolution de l'équation de diffusion par le formalisme des dyades de Green</b>	<b>30</b>
II.2.1 Formalisme des dyades de Green : Introduction par le cas de l'espace libre . . . . .	30
II.2.1.a Expression des fonctions de Green dans un milieu non borné, homogène . . . . .	31

II.2.1.b	Singularités dans la dyade de Green . . . . .	32
II.2.2	Formalisme semi-analytique dans le cas du défaut volumique . . . . .	32
II.2.2.a	Dyades de Green dans un milieu stratifié . . . . .	32
II.2.2.b	Equation intégrale pour le cas du défaut volumique . . . . .	33
II.2.2.c	Variations du signal aux bornes de la sonde . . . . .	34
II.2.2.d	Passage au cas du défaut plan . . . . .	34
II.2.3	Approche intégrale de surface . . . . .	34
II.2.3.a	Description de la configuration envisagée, impliquant un défaut plan . . . . .	34
II.2.3.b	Hypothèses géométriques spécifiques au cas du défaut plan . . . . .	35
II.2.3.c	Hypothèse sur le courant normal . . . . .	35
II.2.3.d	Comportement de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{B}$ de part et d'autre de la fissure . . . . .	36
II.2.3.e	Existence d'un potentiel scalaire . . . . .	36
II.2.3.f	Equation intégrale pour le cas défaut plan . . . . .	37
II.2.3.g	Variations du signal aux bornes de la sonde . . . . .	37
II.2.4	Conclusion sur le formalisme utilisé . . . . .	38

### III Implantation numérique du modèle surfacique et validations 39

<b>1</b>	<b>Calcul dans le domaine spatial</b>	<b>41</b>
III.1.1	Décomposition de l'intégrale impliquée . . . . .	41
III.1.1.a	Décomposition de la dyade . . . . .	41
III.1.1.b	Résolutions numériques envisagées . . . . .	42
III.1.2	Approximation de la densité de dipôle par décomposition sur une base de fonctions de forme . . . . .	44
III.1.2.a	Description des fonctions de base : Les fonctions de forme . . . . .	44
III.1.2.b	Décomposition de l'équation intégrale avec ce choix de fonctions . . . . .	45
III.1.3	Régularisation de l'intégrale singulière . . . . .	46
III.1.3.a	Transformation de l'intégrale par développement de la dyade . . . . .	46
III.1.3.b	Utilisation des spécificités des fonctions de forme . . . . .	48
III.1.3.c	Dimension du système numérique . . . . .	52
III.1.3.d	Détermination des variations d'impédance . . . . .	55
III.1.4	Conclusion sur cette méthode . . . . .	55
III.1.4.a	Illustration : Benchmark "Team Workshop" N° 15 . . . . .	55
III.1.4.b	Avantages et inconvénients . . . . .	55
<b>2</b>	<b>Domaine spectral</b>	<b>57</b>
III.2.1	Principe de la méthode implantée . . . . .	57
III.2.1.a	Obtention d'une équation intégrale spécifique au cas plan . . . . .	57
III.2.1.b	Application de la méthode des moments et calcul dans le domaine spectral . . . . .	58
III.2.1.c	Détermination des variations d'impédance . . . . .	60
III.2.2	Deux choix de fonctions de base . . . . .	60
III.2.2.a	Discrétisation avec fonctions triangles : Approche "locale" . . . . .	61
III.2.2.b	Discrétisation avec les modes de Fourier : Approche "globale" . . . . .	62
III.2.3	Procédure d'automatisation du choix du maillage . . . . .	66
III.2.3.a	Augmentation de la précision du signal à l'augmentation du nombre de modes : Illustration . . . . .	66
III.2.3.b	Etude de méthodes de procédure automatique . . . . .	68
III.2.3.c	Evaluation de la précision de la réponse du capteur en fonction de la discrétisation utilisée . . . . .	72
III.2.3.d	Conclusion sur la procédure d'automatisation . . . . .	74
III.2.4	Conclusion sur l'approche "Décomposition par modes" . . . . .	75

<b>3</b>	<b>Validations expérimentales</b>	<b>76</b>
III.3.1	Mode absolu : Comparaison SIM, et VIM . . . . .	76
III.3.1.a	Benchmark "Team Workshop N°15" : Benchmark académique . . . . .	79
III.3.1.b	Configuration CEA . . . . .	81
III.3.1.c	Benchmark CNDE . . . . .	83
III.3.1.d	Benchmark JSAEM . . . . .	85
III.3.1.e	Conclusion sur ces premières validations . . . . .	87
III.3.2	Comportement de SIM vis à vis de VIM pour des défauts dont l'ouverture décroît . . . . .	88
III.3.2.a	Etude numérique : Benchmark CNDE à 150 kHz . . . . .	88
III.3.2.b	Etude numérique sur la configuration CEA . . . . .	88
III.3.2.c	Conclusion de cette étude . . . . .	88
III.3.3	Etude de réponses de capteur obtenues expérimentalement et comparaison à SIM . . . . .	92
III.3.3.a	Description de la configuration testée . . . . .	92
III.3.3.b	Signaux obtenus lorsque l'on considère des défauts d'ouverture de plus en plus petite . . . . .	96
III.3.4	Fonction séparée . . . . .	98
III.3.4.a	Sonde fonctionnant en TR1 . . . . .	98
III.3.4.b	Sonde fonctionnant en TR2 . . . . .	99
III.3.5	Conclusion sur ces validations . . . . .	104
<b>IV</b>	<b>Méthode hybride</b>	<b>105</b>
<b>1</b>	<b>Développement d'un formalisme hybride HybM entre VIM et SIM</b>	<b>107</b>
IV.1.1	Formalismes SIM et VIM . . . . .	107
IV.1.1.a	Méthode SIM . . . . .	107
IV.1.1.b	Méthode VIM . . . . .	108
IV.1.1.c	Comparaison des deux modèles . . . . .	108
IV.1.2	Formalisme de la nouvelle méthode . . . . .	108
IV.1.3	Aspects numériques . . . . .	109
IV.1.4	Conclusion sur le formalisme . . . . .	109
<b>2</b>	<b>Validations</b>	<b>111</b>
IV.2.1	Validations numériques sur deux configurations . . . . .	111
IV.2.1.a	Validations numériques sur la configuration CEA en fonction commune . . . . .	111
IV.2.1.b	Validations numériques sur le benchmark CNDE en fonction commune . . . . .	111
IV.2.1.c	Validations numériques pour la configuration CEA, sonde à fonctions séparées TR2 . . . . .	113
IV.2.1.d	Conclusion sur ces premières validations . . . . .	113
IV.2.2	Validations expérimentales réalisées au laboratoire avec une sonde à fonctions séparées . . . . .	115
IV.2.2.a	Description de la configuration et étude de paramètres influents . . . . .	115
IV.2.2.b	Résultats . . . . .	119
<b>V</b>	<b>Conclusion</b>	<b>123</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>128</b>
	<b>Annexes</b>	<b>130</b>
<b>A</b>	<b>Description des benchmarks étudiés</b>	<b>130</b>
V.A.1	Benchmark CEA . . . . .	130
V.A.2	Benchmark "Team Workshop N°15" . . . . .	130
V.A.3	Benchmark CNDE et sa variante à 150 kHz . . . . .	131

V.A.4	Benchmark JSAEM : Défaut 100 % . . . . .	131
<b>B</b>	<b>Résolution numérique de l'équation d'état dans le cas volumique</b>	<b>132</b>
<b>C</b>	<b>Annexe relative au calcul de la dyade dans le domaine spatial</b>	<b>135</b>
V.C.1	Fonctions de forme . . . . .	135
V.C.2	Calcul de l'intégrale impliquée dans l'approche avec calcul dans le domaine spectral (chapitre 1, partie III) . . . . .	137
V.C.2.a	Calcul de l'intégrale $I_1^i(r_c)$ par passage en polaire . . . . .	138
V.C.2.b	Calcul de l'intégrale $I_2^i(r_c)$ par calcul en partie finie . . . . .	139
<b>D</b>	<b>Relations constitutives</b>	<b>142</b>
V.D.1	Permittivité diélectrique . . . . .	142
V.D.2	Perméabilité magnétique . . . . .	142
V.D.3	Conductivité électrique . . . . .	142
V.D.4	Cas d'un milieu linéaire, isotrope, non ferromagnétique et homogène . . . . .	143
V.D.5	Permittivité et perméabilité relatives . . . . .	143
<b>E</b>	<b>Théorèmes de Green Ostrogradsky et de Stockes</b>	<b>145</b>
<b>F</b>	<b>Liste des communications et publications liées (au 30 septembre 2006)</b>	<b>146</b>

Première partie

Introduction

Le manuscrit est divisé en quatre parties.

L'objet de la partie I est de définir le contexte dans lequel s'inscrit ce travail de thèse.

- Dans le chapitre 1, on aborde d'un point de vue industriel l'apport que représente le développement d'un modèle d'interaction d'un champ électromagnétique avec un défaut plan dans un matériau conducteur. Y sont ainsi décrits le Contrôle Non Destructif (CND) et l'intérêt de sa modélisation. La notion de défauts et de défauts plans est également introduite.
- Des travaux antérieurs relatifs au sujet, qui nous ont permis d'effectuer les choix pour nos développements, sont cités dans le chapitre 2 de cette première partie.

Dans la partie II sont d'une part établies les équations de diffusion modélisant les interactions électromagnétiques. D'autre part le formalisme utilisé pour leur résolution est décrit.

La partie III présente deux choix particuliers d'implantation numérique et leur validation à travers une série d'expériences.

Les résultats obtenus nous ont conduit au développement d'une nouvelle méthode, qui fait l'objet de la partie IV. Elle comporte également les résultats d'expériences effectuées pour sa validation.

# Contexte global et positionnement du sujet d'étude

L'objet de ce chapitre est de définir le cadre dans lequel s'inscrit le travail de thèse. Tout d'abord, une description globale du Contrôle Non Destructif (CND) sera donnée, ainsi que le principe du CND par Courants de Foucault. L'activité du service dans lequel ont été réalisés ces travaux (service SYSCC) sera présentée. L'intérêt de la simulation en CND est mis en évidence dans un second paragraphe. Puis, une description des défauts plans sera effectuée.

## I.1.1 Le Contrôle Non Destructif (CND) : un procédé qualité décisif et multi-forme

"Contrôle Non destructif" est une dénomination globale pour un procédé qualité intervenant à diverses étapes de processus industriels, intéressant de multiples domaines d'applications, et utilisant une large gamme de techniques.

### Un procédé qualité à diverses étapes

**En production** Le test des produits avant leur vente au client permet de limiter les retours clients d'une part. D'autre part, si un type de défaut est détecté de manière récurrente, il peut provenir d'un dysfonctionnement dans le système de production, et l'identifier permet de remédier au problème et ainsi d'optimiser la production. Des contrôles peuvent également être effectués à l'élaboration de la matière première.

**En utilisation** Les dispositifs d'exploitation peuvent s'user en cours d'utilisation. Par exemple, des défauts de fatigue sont susceptibles de se former dans les ailes d'avion, les moteurs de voiture, les tubes de flexibles pétroliers, les tubes de générateur de vapeur dans les centrales nucléaires, les constructions relevant du génie civil. Surveiller et caractériser l'apparition de tels défauts permet d'une part de limiter les risques d'accidents et d'autre part d'optimiser les procédés de maintenance.

### Multiples domaines d'application

Les secteurs industriels pour qui les contrôles non destructifs présentent un intérêt sont nombreux. On peut citer, entre autres : l'aéronautique, l'automobile, l'industrie nucléaire, pétrolière, le génie civil, mais également l'industrie ferroviaire, la métallurgie, la fonderie et la forge, la chimie.

### Large Gamme de techniques

Une large gamme de techniques est utilisable, chacune présentant des avantages et des inconvénients. La plus répandue des techniques, la plus ancienne et la plus accessible, est l'examen visuel. Elle est bien

entendu limitée aux performances de l'œil. Ainsi des défauts de petite taille, ou des défauts enfouis, ne peuvent être détectés.

D'autres techniques ont par la suite été développées : Les ultrasons, la radiographie, le ressuage, la magnétoscopie, les courants de Foucault, la radiographie, la tomographie, les tests d'étanchéité, la thermographie active, l'émission acoustique, l'analyse vibratoire, l'holographie.

Une description de chacune de ces méthodes peut être trouvée sur le site de la "Confédération française pour les essais non-destructifs" (la COFREND : [www.cofrend.com](http://www.cofrend.com)).

## Activités du service SYSSC

Le service "SYstème de Surveillance et de Simulation pour le CND" (SYSSC) du CEA Saclay réalise des prestations et des études de contrôle par ultrasons et par courants de Foucault, en partenariat avec des industriels. Ces études s'appuient sur des outils de simulation, en constante évolution, élaborés dans le cadre de programmes de recherche en collaboration avec plusieurs partenaires industriels ou organismes de recherches. Les outils de simulation sont regroupés au sein de la plate-forme logicielle CIVa.

Le développement d'un modèle d'interaction d'un champ électromagnétique avec un défaut plan appartient donc à cet ensemble de recherches menées pour contribuer aux avancées de la modélisation. Le formalisme utilisé pour la simulation du CND par Courants de Foucault (CF), à la base de mes travaux de thèse, sera décrit en détail dans les chapitres suivants, mais auparavant, il convient d'expliquer le principe du CND par CF en lui-même, pour mettre en évidence son intérêt dans le milieu industriel.

## Contrôle par Courants de Foucault (CF)

### Principe

La technique est basée sur les interactions électromagnétiques entre une sonde à courants de Foucault et la structure à contrôler. La sonde à courants de Foucault, par exemple constituée d'une bobine (enroulement de spires) parcourue par un courant d'intensité variable dans le temps, induit un champ électromagnétique variable. Placée à proximité de la structure à contrôler, elle induit des courants qui y circulent localement. L'interaction électromagnétique dépend des paramètres constitutifs de la structure à contrôler (conductivité, perméabilité) et de la présence d'un défaut.

Des variations locales des paramètres électromagnétiques se traduisent par une variation d'impédance aux bornes de la bobine.

### Avantages du contrôle par Courants de Foucault

- Permet la détection de défauts débouchants ou faiblement enfouis (quelques millimètres) sur tout matériau conducteur.
- Ne nécessite pas l'utilisation de produit couplant. Ceci permet par conséquent une utilisation facilitée. De même, aucune nuisance n'est engendrée ni pour l'utilisateur ni pour l'environnement, contrairement par exemple au ressuage, très largement utilisé, qui est à risque pour l'opérateur et nécessite l'utilisation de produits chimiques spécifiques.
- Transportabilité : Ce type de contrôle ne nécessite pas de dispositif encombrant, et peut donc être effectué sous l'eau, par exemple, ou des endroits difficilement accessibles. De même les contrôles à très haute température (900°) sont possibles. Le contact avec la structure n'est pas requis.

### Limites du CND par CF

- Il ne s'applique qu'à des matériaux conducteurs.
- Il est peu adapté au contrôle de structures de grandes dimensions ou de forme complexe.
- L'interprétation des signaux nécessite une formation spécifique de l'opérateur.

Le CND par CF se révèle donc très intéressant pour le contrôle de générateurs de vapeurs des centrales à eau pressurisée, ou des structures tubulaires. Nous allons maintenant voir l'intérêt de la modélisation de ce type de contrôle.

## I.1.2 Modélisation en CND par CF : Une aide précieuse à plusieurs niveaux

Le CND par CF est basé sur l'interaction du champ créé par une sonde CF et la présence d'un défaut.

La sonde crée un champ primaire, fonctions de ses caractéristiques (nombre de spires, dimensions, fréquence utilisée). De même, la perturbation due au défaut dépend de ses caractéristiques et de celles de la structure. Il y a donc des choix de sondes pour lesquels les interactions avec le défaut seront optimales.

Avoir la possibilité de simuler ces interactions permet un gain de temps et de moyens : en faisant varier les différents paramètres, on peut évaluer quelle configuration permet un contrôle optimal. C'est ce que permet la simulation et en ce sens elle constitue une aide précieuse à la conception des capteurs, pour le processus de contrôle, et à l'analyse des résultats [GPDV<sup>+</sup>06].

## I.1.3 Les défauts plans : Des défauts de fatigue apparaissant sur des structures en exploitation

### Deux types de défauts à détecter

Les défauts rencontrés en inspectant les structures sont de plusieurs types. Etudions par exemple les tubes de Générateur de Vapeur (GV) des réacteurs à eau pressurisée (REP). Les dégradations les plus fréquemment rencontrées ont pour origine des processus de corrosion fissurante [BRT00]. Ce processus physico chimique produit des amas de matière qui s'accumulent sous forme de dépôts le long des tubes.

On distingue généralement deux types de corrosion externes dans les GV :

- La "Corrosion par Attaque Intergranulaire", donne plutôt des défauts volumiques.
- La "Corrosion par fissuration sous contrainte", au contraire a pour effet des fissurations non volumiques, formées de fissures longitudinales multiples et courtes. Elles sont désignées en anglais par "Stress Corrosion Crack", et notées "SCC".

La corrosion peut également être à l'origine de fissures présentes dans les assemblages de combustible [Moo05].

D'une manière général, ces fissurations peuvent se propager, devenir traversantes, elles affaiblissent alors la tenue mécanique des tubes et peuvent conduire à leur rupture. Leur détection est un enjeu majeur pour la sûreté.

### Défauts de type fissure

Ils sont caractérisés géométriquement par une dimension très petite par rapport aux deux autres. Par exemple dans le cas de fissures de corrosion sous contrainte, l'épaisseur représente entre 0.1 et 0.01 % des deux autres dimensions.

Des modèles d'interactions avec les défauts volumiques ont déjà été développés, intégrés à la plateforme logicielle CIVA pour des configurations de différents types : plaque, tube [PPS04], avec ou sans noyau de ferrite [BPP<sup>+</sup>05]). L'interaction avec les défauts plans soulève des difficultés théoriques liées aux discontinuités de la composante normale du champ électrique. Nous reviendrons sur ce point au cours des chapitres suivants.

## I.1.4 Conclusion

Le CND, bien que méconnu du grand public, consiste en la mise en œuvre de techniques pour la détection des défauts apparaissant dans des structures industrielles diverses, ce qui est un enjeu dont dépend notamment la sécurité civile.

Le CND par CF est une technique adaptée à la détection de défauts de type "fissure" qui apparaissent en utilisation sur des structures telles que les centrales nucléaires ou les ailes d'avion. La simulation de CND par CF permet d'optimiser les opérations de contrôle.

Le développement d'un outil de simulation de CND par CF dédié aux défauts plans s'inscrit donc de manière active dans la problématique de l'activité industrielle d'aujourd'hui.

Dans le chapitre suivant, nous allons revenir sur les travaux relatifs au sujet, réalisés au cours des dernières décennies, afin de situer la présente étude par rapport à l'existant.

# Interactions électromagnétiques avec un défaut plan : Etat de l'art

## I.2.1 Premiers travaux sur la simulation d'interactions électromagnétiques par méthodes intégrales

Comme décrit précédemment, le CND consiste à détecter et caractériser des défauts dans des structures. Dans le cas du CND par CF, les défauts sont physiquement pris en compte comme des inhomogénéités dans la conductivité du matériau. De plus, pour développer des modèles d'interaction électromagnétique entre une source et un défaut, le défaut est assimilé à une source secondaire fictive de courant. Puis les équations établies à partir de la théorie de Maxwell sont résolues par méthodes intégrales et formalisme des dyades de Green.

Cette démarche a en fait été développée dans les années 70 pour la géophysique [Rai74].

## I.2.2 Formalisme par intégrales de volume

Ces travaux dédiés à la géophysique ont inspiré de nombreux développements entre 1986 et 1991. L'induction électromagnétique en présence d'inhomogénéités est par exemple l'objet de [NR90].

Un formalisme par intégrales de volume, pour la modélisation d'interactions entre des courants induits et un défaut volumique dans une plaque semi-infinie est développé [Bow87], à la limite quasi-statique. Cette approximation, que nous utilisons pour nos développements, consiste à négliger les courants de déplacements. Elle est valide aux fréquences typiquement utilisées en CND, à savoir des fréquences inférieures à 10 MHz.

Ces méthodes, utilisant le formalisme par intégrales de volume et les dyades de Green, sont dites "semi-analytiques" car les équations sont résolues numériquement, mais après des transformations analytiques. Elles présentent l'avantage de ne nécessiter une discrétisation uniquement sur le domaine du défaut. L'inconvénient est que les dyades de Green ne sont connues que pour des géométries canoniques. Une méthode pour la géométrie cylindrique [SS86] avec calculs dans le domaine spectral également est développée, puis pour le cas plaque [RSS88].

Les structures à contrôler dans des configurations réelles ont parfois des épaisseurs trop petites pour pouvoir être approximées par des plaques semi - infinies, c'est pourquoi l'extension des modèles au cas plaque présente un réel intérêt. Les dyades impliquées ne sont pas les mêmes, elles comportent des termes de réflexion et de transmission supplémentaires.

Notre étude a débuté par un modèle dédié au cas de la plaque semi-infinie, puis nous avons réalisé un développement pour le cas plaque stratifié - il comporte deux interfaces au lieu d'une seule.

### I.2.3 Variations d'impédance

Enfin, au calcul de champ par méthode intégrale est rajouté celui des variations d'impédance aux bornes du capteur [BJSS91]. Il est effectué à partir du théorème de réciprocité, issu de la théorie des antennes. Le système est discrétisé par méthode des moments, avec comme choix des fonctions de base les fonctions portes, puis le système numérique est résolu par un algorithme du gradient conjugué.

### I.2.4 Interactions électromagnétiques avec une fissure

Ces développements concernent l'interaction d'un défaut volumique avec des courants induits. Néanmoins, ils ne sont pas adaptés à la prise en compte de défauts dont une des dimensions est très petite par rapport aux deux autres, c'est-à-dire les défauts de type "fissure". Les champs en présence évoluent brutalement et les discrétisations à utiliser doivent être très denses. D'importants problèmes numériques surviennent en conséquence.

De plus, comme souligné au chapitre précédent, les défauts présentant ce type de géométrie sont des défauts qui apparaissent fréquemment dans des structures en exploitation. C'est pourquoi il est nécessaire de développer une méthode dédiée à ce type de défaut.

Les interactions électromagnétiques avec une fissure longue, dans un conducteur semi-infini, sont étudiées en 1977 par Kahn, Spal et Feldman [KSF77] en adaptant la théorie de la diffraction de Sommerfeld.

La méthode volumique développée en [BJSS91] est adaptée au cas du défaut plan dans une plaque semi-infinie en 1994 [Bow94]. Les interactions du courant induit avec des défauts plans de petite ouverture sont approximées par les interactions avec une "fissure fine" idéale, d'ouverture infiniment petite et totalement imperméable au passage du courant. Un certain nombre de travaux, dont nos développements, utilisent également cette approximation.

Dans [Bow94], le défaut plan est supposé de forme rectangulaire, et orienté perpendiculairement à la surface du conducteur, même si le formalisme reste valide pour des défauts plans de forme quelconque. L'inconnue est discrétisée par des fonctions porte et le système numérique est résolu par décomposition LU.

#### I.2.4.a Méthodes variationnelles

Des méthodes variationnelles ont été développées, amenant à des modèles éléments finis [BKM<sup>+</sup>94] traitant le cas d'un défaut plan dans une plaque infinie.

Des méthodes couplant les éléments finis et les méthodes semi-analytiques ont également été développées [BPM04].

Pour nos géométries relativement simples, la méthode de collocation permet d'obtenir une solution satisfaisante pour des temps de calcul beaucoup plus intéressants [Pou88]. Il ne nous apparaît pas nécessaire de recourir aux éléments finis.

#### I.2.4.b Approximation pour le régime "thin-skin"

Pour le cas des matériaux non ferreux et les aciers, lorsque l'on travaille à relativement haute fréquence (par exemple pour une fréquence  $f$  comprise entre 500 kHz et 2 MHz), l'épaisseur de peau  $\delta = \sqrt{1/\pi f \mu \sigma}$  devient petite. Il faut alors discrétiser très finement le volume du défaut pour atteindre une bonne précision.

On désigne ce régime par "thin-skin". Bowler [BYH97] le définit comme le domaine pour lequel  $d \gg 3\delta$ , où  $d$  est la profondeur du défaut. De manière qualitative, c'est le régime pour lequel  $\delta$  devient très petit devant la profondeur et la longueur du défaut.

Des approximations peuvent être développées pour ce type de régime, comme l'a par exemple fait Auld dans les années 1980 [AJM88] : le cas des défauts plans dans des alliages en aluminium est traité.

Ces approximations permettent d'alléger le formalisme et les problèmes liés à l'augmentation de la discrétisation sont dépassés. Ces méthodes sont intéressantes et efficaces mais correspondent à une gamme de configurations de contrôle trop réduite par rapport à ce que nous souhaitons modéliser.

En 1997, un modèle basé sur la théorie des potentiels [BH98], présentée comme une alternative aux méthodes intégrales, est développé pour une fissure dans une plaque semi-infinie, valide pour les hautes

et les basses fréquences. Le cas "thin-skin" y est notamment étudié car dans le cas de cette approximation, il existe une expression analytique du champ magnétique près de la surface du conducteur. Il est alors démontré que l'inconnue du problème est solution de l'équation de Laplace 2D. Ce modèle est étendu aux matériaux magnétiques en 1998 [BH98], au cas plaque pour des matériaux non magnétiques en 2000 [YB00], et à des fissures semi-elliptiques [BH00]. Ce dernier modèle introduit des transformations conformes qui permettent de passer d'un défaut de forme rectangulaire à un défaut de forme semi-elliptique.

#### **I.2.4.c Calcul de la dyade singulière dans le domaine spatial**

P. Beltrame développe une méthode avec calcul de la dyade singulière dans le domaine spatial, pour le cas de la plaque semi-infinie. Les singularités sont régularisées en choisissant comme fonctions de base pour la méthode des moments les fonctions de forme classiquement utilisées en éléments finis [BB02]. Le cas des fissures inclinées est ensuite traité [BB04]. De plus, une grande partie des calculs est réalisée de manière analytique, ce qui peut représenter un gain en termes de volume et temps de calcul : la méthode présente des avantages indéniables. Nous l'avons donc étudiée en détail et le chapitre 1 de la partie III présente le formalisme et les résultats auxquels nous avons aboutis.

#### **I.2.4.d Développement en fonctions propres**

Le cas d'une fissure longue, dans une plaque d'épaisseur quelconque, à des fréquences arbitraires, est traité par la méthode de développement en fonctions propres [TB04]. Le modèle développé utilise des hypothèses peu réalistes, mais permet d'obtenir très rapidement un bon ordre de grandeur des variations d'impédances à obtenir.

Nous n'avons pas utilisé ces développements car nous souhaitons développer un modèle correspondant à des configurations plus réalistes.

#### **I.2.4.e Calcul par passage dans le domaine spectral**

En 1994, J. Pàvò développe également une méthode dédiée aux défauts plans dans une plaque par méthode intégrale de surface, mais les calculs sont effectués dans le domaine spectral [PM94]. La résolution numérique se fait également par méthode des moments. Les fonctions de base choisies sont des fonctions constantes par morceaux et les fonctions tests sont des fonctions de Diracs (méthode de collocation).

Puis des fonctions triangle sont choisies comme fonctions de base pour l'approximation de la fonction "densité de dipôle" inconnue, puis des modes de Fourier [PL06]. Cette dernière méthode permet de prendre en compte les conditions limites que doit respecter la densité de dipôle comme définies dans [BYH97].

Elle est particulièrement intéressante car précise et rapide : nous l'avons étudiée, elle fait l'objet du chapitre 2 de la partie III. Elle est intégrée à la plateforme de simulation CIVA.

Le contexte dans lequel s'inscrit le travail de thèse a été décrit. Nous allons maintenant présenter le formalisme utilisé pour la simulation d'interactions électromagnétiques.

## Deuxième partie

### Formulation physique du problème

Comme expliqué en I.1.1, page 16, le contrôle par courants de Foucault passe par la détermination d'une variation de f.e.m. ou d'impédance  $\Delta Z$  due à la présence d'un défaut.

Le calcul des variations d'impédance implique la connaissance d'une densité de dipôle due à la présence du défaut. Celle-ci est solution d'une équation intégrale que l'on établit en appliquant le formalisme intégral à noyau de Green aux équations de diffusion de champ électromagnétique.

Au cours de cette partie II :

- La configuration étudiée est décrite,
- Les équations de diffusion du champ seront établies à partir des Maxwell et des équations constitutives.
- Puis la résolution de ces équations par méthode semi analytique est effectuée.
- Enfin le calcul des variations d'impédance est donné pour le cas du défaut plan.

# Description de la configuration et équations physiques de base

## II.1.1 Description de la configuration

**Configuration typique de CND** La configuration typique de CND par CF, représentée en figure II.1.1, comporte une sonde et un défaut, dans une structure quelconque.

La sonde peut consister simplement en une bobine (enroulement de spires), ou peut être plus complexe, comme on le verra dans des paragraphes suivants. La bobine est parcourue par un courant alternatif sinusoïdal, et induit un champ électromagnétique  $\mathbf{B}$ . Il est modifié par la présence du milieu à contrôler. On peut donc mesurer une f.e.m  $V$  ou une impédance  $Z_0$  aux bornes de la bobine.

**Modes de fonctionnement des sondes à courant de Foucault** Les sondes à courant de Foucault peuvent être composées d'une ou plusieurs bobines, fonctionnant en mode émission, ou réception, ou émission et réception communes. La sonde la plus simple est composée d'une bobine fonctionnant en émission réception. Ce cas est appelé "fonction commune", et c'est la variation d'impédance due à la présence du défaut qui est mesurée. Pour un contrôle effectué avec plusieurs bobines, on parle d'une sonde fonctionnant en mode "émission / réception séparées", ou encore de manière plus concise d'une sonde à "fonctions séparées". Dans ce cas la quantité mesurée est une variation de f.e.m.

La géométrie de la configuration à contrôler permet de choisir le mode de fonctionnement des sondes qui lui est le plus adapté.

**Schéma de modélisation** Pour modéliser les interactions électromagnétiques, on utilise une représentation schématique de la configuration, comme représenté en II.1.2. La structure à contrôler est ramenée à une géométrie canonique. Dans notre cas, on l'assimile à une plaque d'épaisseur finie. On divise l'espace

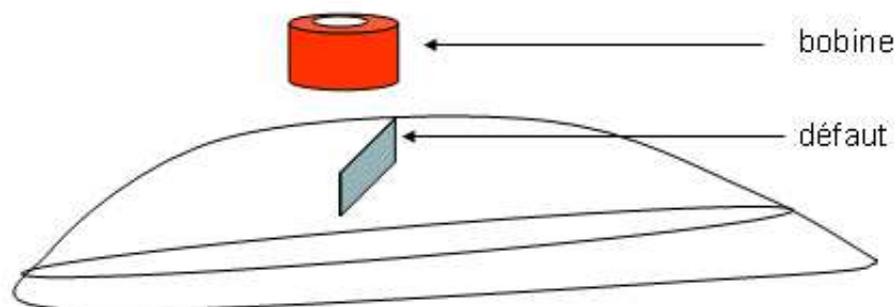


FIG. II.1.1 – Configuration typique de CND.

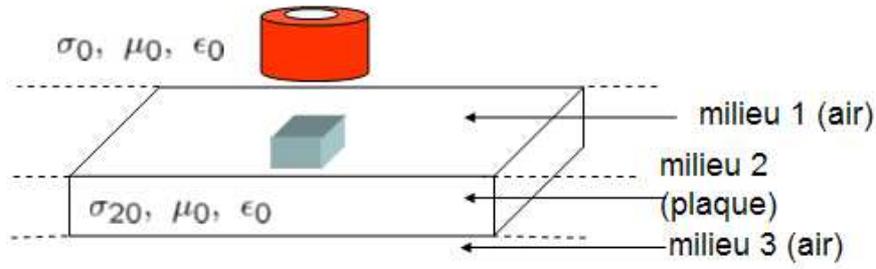


FIG. II.1.2 – Schéma représentatif de la configuration.

en trois milieux. Le milieu 1 est constitué d'air, de conductivité  $\sigma_0 = 10^{-8}S/m$ , et contient la sonde, parcourue par un courant  $\mathbf{J}_s$ . Il est délimité par le bas par l'interface avec la structure à contrôler, et s'étend à l'infini vers le haut. Le milieu 2, de conductivité  $\sigma_{20}$  est constitué de la structure à contrôler. Il comporte un défaut, volumique dans le cas général.

Le milieu 3, situé en dessous la structure, est constitué uniquement d'air également. De même, il n'a pas de limite vers le bas. On parle d'un "milieu stratifié" pour désigner cette configuration multi-couche.

L'objet de ce chapitre est donc d'étudier le comportement des champs électromagnétiques dans les milieux 1 et 2, les conditions d'interface entre les milieux devront notamment être prises en compte. Le milieu 3, constitué d'air, intervient à travers les conditions limites imposées.

Les interactions sur une configuration simple, composée de l'espace libre contenant une source et une inhomogénéité seront tout d'abord étudiées. On entend par "espace libre" un seul milieu, sans limite, c'est à dire tout l'espace. Puis les conditions limites seront données.

## II.1.2 Equations de Maxwell et équations constitutives

**Equations de Maxwell** Nous partons des équations fondamentales de l'électromagnétisme pour obtenir la relation physique qui relie le défaut et la réponse du capteur. Les équations décrivant le phénomène physique à la base du CND par CF sont obtenues à partir des équations de Maxwell, données en tableau II.1.1.

Maxwell Gauss :

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.1.1})$$

Conservation du Flux :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{II.1.2})$$

Maxwell Faraday (phénomène d'induction) :

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{II.1.3})$$

Maxwell Ampère :

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.1.4})$$

TAB. II.1.1 – Equations de Maxwell.

On note :

- $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  : Champ électrique (intensité en  $V/m$ )
- $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  : Induction ou déplacement électrique ( $C/m^2$ )
- $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  : Champ ou excitation magnétique ( $A/m$ )
- $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  : Induction magnétique (*Tesla*)
- $\rho(\mathbf{r}, t)$  : Densité volumique de charges libres ( $C/m^3$ )
- $\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t)$  : Densité volumique de charges réelles, ou  
Courant de conduction ou courant ohmique ( $A/m^2$ )
- $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)$  : Courants sources dus à la présence d'une source émettrice (éventuellement nuls)

Ces quantités physiques évoluent au cours du temps  $t$  et de l'espace  $\mathbf{r}$ . Pour  $\mathbf{r}$  on choisira par exemple

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$$

dans le cas de coordonnées cartésiennes, avec  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ , et  $\mathbf{e}_z$  vecteurs unitaires dans les directions  $x$ ,  $y$ , et  $z$  respectivement. Les opérateurs  $\nabla$ ,  $\nabla \cdot$  et  $\nabla \times$  sont les opérateurs différentiels spaciaux respectivement gradient, divergence et rotationnel.

La quantité  $\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$  représente les courants de déplacement. Le courant électrique total  $\mathbf{J}$  est la somme des courants de conduction, des courants de déplacement, et des courants en présence.

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

**Relations constitutives du milieu** On peut établir des relations entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$ , d'une part, et  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$ , d'autre part. On les appelle relations constitutives du milieu.

Dans un milieu linéaire, isotrope, non ferromagnétique ( $\mu = \mu_0$ , la perméabilité magnétique du vide) homogène, elles s'écrivent :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{II.1.5a}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \tag{II.1.5b}$$

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{II.1.5c}$$

avec

- $\epsilon$  : Permittivité diélectrique du milieu (F/m)
- $\mu$  : Perméabilité magnétique du milieu (H/m)
- $\sigma$  : Conductivité électrique (V/m)

La loi (II.1.5c) s'énonce également comme la loi d'Ohm locale :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

où  $\mathbf{j}$  est le vecteur densité de courant.

Des commentaires et informations supplémentaires sont donnés sur ces trois quantités physiques en annexe A.

**Dépendance en temps** Les champs sont supposés sinusoïdaux. Le régime est supposé harmonique permanent. La période en temps des champs est supposée constante de pulsation  $\omega$ . La dépendance en temps des champs peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot \exp i\omega t \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \cdot \exp i\omega t \end{aligned}$$

où  $\tilde{\mathbf{E}}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}$  sont respectivement les composantes spatiales de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Dans ce qui suit on ne notera plus la dépendance en temps. La dépendance en espace ne sera pas toujours rappelée. Cette convention permet de réécrire les équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.1.6a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{II.1.6b})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.1.6c})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) + i\omega\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.1.6d})$$

### II.1.3 Diffusion du champ

Dans le cadre du phénomène d'induction, étant données les caractéristiques des constantes physiques en présence, les termes de propagation impliqués dans les équations sont négligeables devant les termes de diffusion, comme expliqué en [Bon95] page 11, c'est pour cela que nous parlons de diffusion des champs. Dans cette section vont être établies les équations de diffusion des champs vérifiées dans le cas de notre configuration d'étude. Pour ce faire, nous allons tout d'abord donner les équations de diffusions dans le cas de la configuration de l'espace libre, puis nous passerons au cas de la configuration avec les trois milieux correspondant à une configurations de CND.

#### II.1.3.a Diffusion du champ électrique dans l'espace libre contenant une source de courant et une inhomogénéité

Nous considérons la configuration de l'espace libre décrite plus haut. Il s'agit donc d'un milieu homogène au repos, linéaire, isotrope, de conductivité  $\sigma_0$ , de perméabilité  $\mu_0$ , en présence d'une source de courant  $\mathbf{J}_s(\mathbf{r})$  en régime périodique sinusoïdal de pulsation  $\omega$ .

L'équation décrivant la diffusion du champ électrique dans cette configuration va être établie à partir des équations de Maxwell et des équations constitutives.

Soient  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  les champs en présence. Alors  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  vérifie :

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.3}) + (\text{II.1.5b})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu_0[\mathbf{J}_c(\mathbf{r}) + i\omega\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{J}_s(\mathbf{r})] \quad (\text{II.1.4}) + (\text{II.1.5a})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - (\omega^2\mu\epsilon - i\omega\mu)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.5c})$$

(II.1.7)

Soit

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.8})$$

avec  $k^2 = \omega^2\mu\epsilon - i\omega\mu\sigma$ , appelé "nombre d'onde" ou également constante de propagation du milieu. De même on notera que l'on a  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , avec  $v$  vitesse de propagation, et  $\lambda$  longueur d'onde dans le milieu homogène.

Nous allons maintenant étudier une configuration de CND par CF sur une plaque. On la décompose donc en trois milieux comme représenté sur la figure II.1.2. Au passage des interfaces les champs ont des comportements décrits dans la sous section II.1.3.b, puis la diffusion du champ électrique dans chacun des milieux fait l'objet des sous sections suivantes.

#### II.1.3.b Comportements des champs au passage des interfaces

Soient deux milieux 1 et 2, et soit  $\mathbf{n}$  la normale à l'interface, orienté du milieu 1, vers le milieu 2, comme représenté sur la figure V.E.2. On applique le théorème de Green Ostrogradsky rappelé en E page 145 à la divergence de  $\mathbf{D}$  donnée dans l'équation de Maxwell Gauss (II.1.1), en considérant comme volume  $V$  le cylindre à l'interface pris à la limite, lorsque  $h \rightarrow 0$ . On en déduit :

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \rho_s \quad (\text{II.1.9})$$

De même, en utilisant les théorèmes de Green Ostrogradsky et Maxwell Ampère, on montre que :

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{II.1.10})$$

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0 \quad (\text{II.1.11})$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n} = -0 \quad (\text{II.1.12})$$

avec  $\rho_s$  la densité surfacique de charge. Ces conditions limites seront utilisées pour établir les équations intégrales qui vont être établies au chapitre suivant à partir des équations de diffusion des champs.

### II.1.3.c Diffusion du champ électrique dans le milieu 1, contenant l'inducteur

#### Equations de champ

**Le milieu 1** est composé d'air de conductivité nulle, de permittivité  $\epsilon_0$  et de perméabilité  $\mu_0$ . Le champ en présence  $\mathbf{E}_1$  tient compte de la présence d'une bobine excitatrice parcourue par un courant  $\mathbf{J}$  de pulsation  $\omega$ . L'équation de champ pour ce milieu 1 s'écrit donc :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) - k_1^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = i\omega\mu\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.13})$$

Comme la conductivité est nulle dans ce milieu, le terme correspondant aux courants de déplacement est le seul terme non nul dans le nombre d'onde qui s'écrit alors  $k_1^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0$ .

### II.1.3.d Diffusion du champ électrique dans le milieu 2, contenant le défaut

Le milieu 2 est composé d'un matériau homogène de conductivité  $\sigma_{20}$ , de permittivité  $\epsilon_0$  et de perméabilité  $\mu_0$ . Le défaut est considéré comme une inhomogénéité locale de conductivité  $\sigma_2(\mathbf{r})$ . Il ne contient pas de sources de courant.

**Champ dans le milieu 2 sans défaut, considéré comme homogène** Le champ  $\mathbf{E}_{20}$  en présence dans le milieu 2 homogène, en l'absence de source de courant et de défaut, est caractérisé par une conductivité constante  $\sigma_{20}$ , et il vérifie donc l'équation :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) - k_{20}^2 \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{II.1.14})$$

**Approximation quasi statique** Les fréquences utilisées en CND sont couramment inférieures à quelques MHz. Pour ces valeurs, les courants de déplacement sont négligeables par rapport aux courants de conduction. On a donc  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s$ , avec  $\mathbf{J}$  courant total en présence. C'est ce qu'on appelle l'"approximation quasi-statique".

Dans le cadre de cette approximation, le terme  $i\omega\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r})$  de l'équation II.1.7 correspond au courant de déplacement et donc devient négligeable. Alors  $k_{20}^2$  s'écrit :

$$k_{20}^2 = -i\omega\mu_0\sigma_{20}$$

$\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_{20}$  sont liés par les relations de comportement des champs aux interfaces entre deux milieux - elles seront définies plus loin.

**Champ dans le milieu 2 au voisinage du défaut** Le défaut est assimilé à une inhomogénéité de la conductivité dans le milieu 2. On note donc  $\sigma_2(\mathbf{r})$  la conductivité qui permet de prendre en compte la présence du défaut. Le champ  $\mathbf{E}_2$  en présence du défaut dans le milieu 2 vérifie donc :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - k_2^2(\mathbf{r})\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{II.1.15})$$

avec  $k_2^2(\mathbf{r}) = \omega^2\mu_0\epsilon_0 - i\omega\mu_0\sigma_2(\mathbf{r})$ .

Puis on combine les deux équations établies en utilisant le principe de superposition, valide pour les milieux linéaires homogènes.

**Principe de superposition** Si  $u_1$  est la solution correspondant à la force  $f_1$   
Si  $u_2$  est la solution correspondant à la force  $f_2$   
alors  $u_1 + u_2$  est la solution correspondant à la somme des forces  $f_1 + f_2$ .

Le champ de perturbation  $\mathbf{E}_p$  dû à la présence du défaut s'exprime alors :

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.16})$$

et vérifie l'équation de diffusion suivante :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) - k_{20}^2 \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = i\omega\mu \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.17})$$

avec

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = (\sigma_2(\mathbf{r}) - \sigma_{20}) \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.18})$$

la source fictive volumique de courants due au défaut, notée également  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ .

### II.1.3.e Diffusion du champ électrique dans le milieu 3

Le milieu 3 ne contient ni source de courants ni inhomogénéités. Le champ  $\mathbf{E}_3$  en présence vérifie donc l'équation :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) - k_1^2 \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{II.1.19})$$

avec  $k_1^2$  égal au nombre d'onde du milieu 1, car il s'agit du même milieu.

### Récapitulation des équations impliquées dans la configuration à trois milieux

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) - k_1^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = i\omega\mu \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.13})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) - k_{20}^2 \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = i\omega\mu \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.17})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) - k_1^2 \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{II.1.19})$$

# Résolution de l'équation de diffusion par le formalisme des dyades de Green

Les techniques de résolution de l'équation de diffusion des champs sont multiples. On peut citer :

- par éléments finis après avoir établi une formulation variationnelle,
- par méthodes spectrales (on consultera par exemple [Rha02] ),
- par méthodes semi-analytiques et utilisation du formalisme des dyades de Green.

Les méthodes semi-analytiques utilisent la connaissance de solutions analytiques pour des géométries canoniques. Conséquemment, elles présentent l'avantage d'être plus rapides que les méthodes purement numériques, type éléments finis. Dans beaucoup d'applications (autres que le CND) la restriction aux géométries canoniques est trop limitative et ces méthodes ne peuvent pas être utilisées. Pour le CND par CF, beaucoup de configurations testées peuvent être raisonnablement assimilées à des configurations de géométries canoniques. C'est pour cette raison que les méthodes semi-analytiques peuvent être employées dans le cadre de cette étude, et qu'elles ne sont pas très courantes dans d'autres domaines. En revanche, seules des géométries canoniques de configuration peuvent être étudiées.

Des expressions analytiques intégrales des champs vont être établies à partir des équations de champ obtenues au paragraphe précédent, en utilisant le formalisme des dyades de Green. Le cas de l'espace libre fera tout d'abord l'objet de notre étude, en guise d'introduction au formalisme des dyades de Green. Puis le cas de la configuration stratifiée à 3 milieux comportant un défaut volumique sera traité, et enfin les expressions seront données pour le cas impliquant un défaut surfacique.

## II.2.1 Formalisme des dyades de Green : Introduction par le cas de l'espace libre

Le formalisme des dyades de Green est valide dans un milieu où le principe de superposition s'applique, ce qui est le cas de tous les matériaux constitutifs dans les structures contrôlées par CND par CF. On souhaite résoudre l'équation II.1.8, établie page 27, vérifiée par le champ électrique, dans l'espace libre homogène, en présence d'une source de courant  $\mathbf{J}_s$ .

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.8})$$

Pour ce faire on définit un tenseur de Green  $\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  par la relation

$$\nabla \times \nabla \times \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{II.2.1})$$

Alors on peut démontrer que  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  vérifie ([Che90], pages 27, 31 ou 376) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu \int_V \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.2})$$

Comme les fonctions considérées sont des champs vectoriels, la fonction de Green est une fonction de l'espace dans l'espace, appelée "dyade", et notée  $\overline{\mathbf{G}}$ . Elle comporte neuf éléments.

$$\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{pmatrix} G^{xx} & G^{xy} & G^{xz} \\ G^{yx} & G^{yy} & G^{yz} \\ G^{zx} & G^{zy} & G^{zz} \end{pmatrix}$$

Chaque  $G^{ij}$ ,  $i, j = x, y, z$ , représente l'effet d'une source placée dans la direction  $j$  dans la direction  $i$ . De plus, la source  $\mathbf{r}$  et l'observation  $\mathbf{r}'$  sont prises dans le milieu 2, ce qui est spécifié par la notation "22".

- $\mathbf{r}$  est le point d'observation.
- $\mathbf{r}'$  est le point source de l'excitation.

Au point de vue physique,  $\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  représente l'effet d'une source élémentaire placée en  $\mathbf{r}'$  sur un point d'observation  $\mathbf{r}$ . On peut préciser qu'il s'agit d'un effet électrique créé par une source électrique en notant  $\overline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  la dyade dite "électrique - électrique". En effet, pour la résolution des équations de diffusion du champ magnétique, on doit considérer les dyades magnétiques  $\overline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  [Tai93], ou également des dyades "électrique - magnétique"  $\overline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Dans le cadre de mes travaux, seules les dyades "électrique - électrique" interviennent, par conséquent, dans tout ce qui suit, la notation  $^{ee}$  est implicite, sauf mention contraire.

### II.2.1.a Expression des fonctions de Green dans un milieu non borné, homogène

Le tenseur de Green  $\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est obtenu à partir de la fonction de Green, solution de l'équation scalaire de Helmholtz.

**Expression de la solution de l'équation scalaire de Helmholtz** L'équation d'onde scalaire, dite équation de Helmholtz, obtenue à partir des équations de diffusion, s'écrit :

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}) \quad (\text{II.2.3})$$

Elle représente la diffusion de l'onde scalaire dans un volume  $V$  en présence d'une source de courant  $s(\mathbf{r})$ . La solution de cette équation est la fonction de Green scalaire notée  $g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , qui correspond à l'équation d'onde scalaire pour une source ponctuelle placée en  $\mathbf{r}'$ .

$$(\nabla^2 + k^2)g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{II.2.4})$$

L'expression explicite de  $g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est connue et s'écrit :

$$g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{II.2.5})$$

**Expression de la dyade solution de l'équation de Helmholtz d'un champ électrique dans un milieu non borné, homogène**

$$\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[ \overline{\mathbf{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right] g_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{II.2.6})$$

Cette dyade est solution de l'équation dyadique de Helmholtz, dans un milieu non borné, homogène, contenant une source située en  $\mathbf{r}'$ .

$$\nabla \times \nabla \times \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{II.2.7})$$

démontré par exemple dans [Che90] pp. 376-377. et pp. 28 également.

### II.2.1.b Singularités dans la dyade de Green

Si le point d'observation  $\mathbf{r}$  du champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  se trouve dans le volume  $V$  contenant la source  $\mathbf{r}'$ , alors il faut considérer ce qui se passe quand  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow 0$  [Che90] pp. 378.

La singularité en  $\frac{1}{r}$  de la fonction scalaire de Green devient une singularité en  $\frac{1}{r^3}$  pour la dyade de Green. Alors l'intégrale de l'équation II.2.2 comporte des singularités dites "hyper fortes" (car en  $\frac{1}{r^3}$ , qui ne peuvent pas être régularisées simplement par changement de variables (passage en coordonnées polaires) ou schéma de quadrature de Gauss (valable pour les intégrales comportant une singularité en  $\frac{1}{r^2}$ ).

La première méthode que nous allons présenter dans la partie III utilise des schémas de régularisation spécifiques pour ces singularités. Dans la seconde méthode, les problèmes liés à la présence de ces singularités sont contournés en effectuant les calculs dans le domaine spectral.

## II.2.2 Formalisme semi-analytique dans le cas du défaut volumique

Pour obtenir les variations d'impédance dans le cas du défaut volumique dans notre configuration à trois milieux décrite en figure II.1.2 page 25, il faut évaluer la densité volumique correspondante à la source de courant fictive  $\mathbf{J}_2(\mathbf{r})$ . Pour cela il faut établir une formulation intégrale impliquant cette quantité inconnue à partir de l'équation de diffusion II.1.17 page 29 du champ de perturbation  $\mathbf{E}_p$ , rappelée ici :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) - k_{20}^2 \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = i\omega\mu \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.17})$$

avec

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.16})$$

et  $\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = (\sigma_2(\mathbf{r}) - \sigma_{20})\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ , considéré comme une source fictive de courant.

### II.2.2.a Dyades de Green dans un milieu stratifié

Pour notre configuration à 3 milieux, on va définir 6 dyades :  $\overline{\mathbf{G}}_{ji}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , pour  $i, j = 1$  à 3, qui expriment l'effet d'une source placée dans un milieu  $i$  en un point d'observation placé dans un milieu  $j$ .

**Solution des équations vectorielles de Helmholtz** Ces dyades sont solutions des équations dyadiques de Helmholtz données en II.2.7.

**Conditions limites aux interfaces** La dyade qui décrit l'effet observé dans le milieu 1 est liée à la dyade qui décrit l'effet observé dans le milieu 2, pour une source placée indifféremment dans le milieu  $i = 1$  ou  $i = 2$  par des relations d'interface obtenues directement à partir des relations d'interface des champs électriques.

On note  $S_{1,2}$  l'interface entre les milieux 1 et 2. Les conditions d'interface sont alors,  $\forall \mathbf{r} \in S_{1,2}$  :

$$\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{G}}_{1i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{G}}_{2i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{II.2.8a})$$

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{n} \times \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{1i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{n} \times \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{2i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{II.2.8b})$$

$$\underline{\epsilon}_1 \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{G}}_{1i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\epsilon}_2 \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{G}}_{2i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{II.2.8c})$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{1i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{n} \cdot \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{2i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{II.2.8d})$$

L'équation II.2.8b s'écrit, pour le cas des matériaux non magnétiques ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ) :

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{1i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{n} \times \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{2i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{II.2.8b})$$

$\underline{\epsilon}_1$  et  $\underline{\epsilon}_2$  sont des quantités complexes dans le cas d'un matériau conducteur.

L'expression de la dyade de Green pour un milieu plan stratifié est donnée en [Che90], page 411, au chapitre 7.

### Conditions limites à l'infini

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{G}}_{ji}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \forall \mathbf{r}' \in \text{Milieu 2} \quad (\text{II.2.9})$$

La dyade de Green  $\overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  qui vérifie l'équation de diffusion II.2.10, va notamment être utilisée pour l'établissement d'une équation d'inconnue  $\mathbf{J}_2(\mathbf{r})$  :

$$\nabla \times \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_{20}^2 \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{II.2.10})$$

### II.2.2.b Equation intégrale pour le cas du défaut volumique

Le formalisme dyadique de Green pour le modèle volumique donne l'équation intégrale suivante [Tai93, BJSS91, Che90] :

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = i\omega\mu \int_V \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.11})$$

En multipliant par  $\sigma_{20}$  la conductivité du milieu 2 on obtient :

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_{20}(\mathbf{r}) + k_{20}^2 f(\mathbf{r}) \int_V \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.12})$$

avec  $f(\mathbf{r}) = \frac{k_{20}^2 - k_2^2(\mathbf{r})}{k_{20}^2}$ , fonction de contraste.

L'équation (II.2.12) est une équation de Fredholm de seconde espèce : L'inconnue  $\mathbf{J}_2$  se situe à l'extérieur et sous le signe intégrale. On ne peut pas la résoudre analytiquement, il faut la résoudre numériquement, comme présenté par exemple en annexe B. La prise en compte du défaut dans cette équation est réduite à la fonction de contraste  $f(\mathbf{r})$ .

**Calcul du champ incident** Pour résoudre (II.2.12), il faut calculer  $\mathbf{J}_{20}(\mathbf{r})$ , lié au champ incident par la relation :

$$\mathbf{J}_{20}(\mathbf{r}) = \sigma_{20} \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) \quad (\text{II.2.13})$$

avec  $\sigma_{20}$  conductivité du milieu 2. En absence de source dans le milieu 2,  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r})$  vérifie :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) - k_{20}^2 \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{II.1.14})$$

Mais lorsque le milieu 1 comporte une source  $J_s$ , un champ électrique va être diffusé dans le milieu 2 et va modifier  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r})$ . L'expression de  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r})$  va être établie à partir de l'expression du champ électrique  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$  du milieu 1 et des relations de continuité à l'interface entre les deux milieux.

Le champ électrique  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$  en présence dans le milieu 1 vérifie :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) - k_1^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = i\omega\mu \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \quad (\text{II.1.13})$$

En introduisant la dyade  $\overline{\mathbf{G}}_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , on peut résoudre cette équation, et alors  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$  s'écrit :

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = i\omega\mu_1 \int_V \overline{\mathbf{G}}_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.14})$$

où  $V$  désigne le volume de la source  $\mathbf{J}_s$ . On obtient  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r})$  à partir de l'équation II.2.14. L'effet de la source  $J_s$  du milieu 1 dans le milieu 2 est décrit par les dyades des deux milieux et les conditions limites les liant. On peut alors écrire :

$$\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_2 \int_V \overline{\mathbf{G}}_{21}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.15})$$

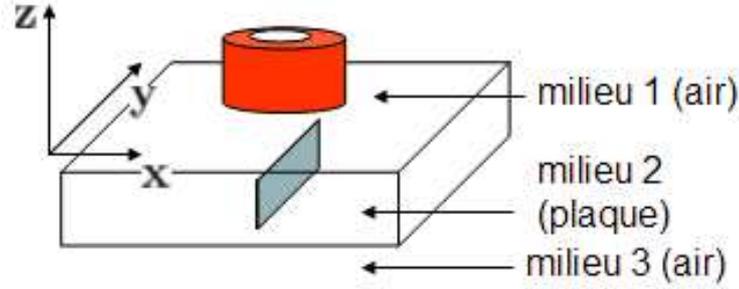


FIG. II.2.1 – Représentation du choix de l'orientation de la configuration.

### II.2.2.c Variations du signal aux bornes de la sonde

La simulation de CND par CF consiste à calculer les variations du signal dues à la présence du défaut. Dans le cas d'une sonde à fonctions communes, les variations d'impédance  $\Delta Z$  dues à la présence d'un défaut quelconque, *i.e.* volumique, sont données par [BJSS91] page 1111, en utilisant le théorème de réciprocité [AM99] :

$$I^2 \Delta Z = \sigma_0 \int_V \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

avec  $I$  intensité du courant d'injection,  $V$  le volume du défaut,  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r})$  le champ incident induit par la bobine, diffusé dans la zone saine du milieu 2.

Dans le cas d'une sonde à fonctions séparées, les variations du signal sont données par :

$$I^T \cdot I^R \Delta Z = \sigma_0 \int_V \mathbf{E}_R(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (\text{II.2.16})$$

où  $I^T$  est l'intensité du courant qui parcourt la bobine émettrice. On calcule la contribution de l'impédance comme si la bobine réceptrice était en mode émission, et alimentée par un courant  $I^R$ , qui créerait alors un champ électrique  $\mathbf{E}^R(\mathbf{r})$ .

$\Delta Z$  est calculé une fois qu'on a calculé  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r})$  ou respectivement  $\mathbf{E}_R(\mathbf{r})$ , et  $\mathbf{J}_2(\mathbf{r})$ .

### II.2.2.d Passage au cas du défaut plan

Considérons un défaut volumique parallélépipédique de longueur  $L$ , de profondeur  $d$  et d'ouverture  $w$ . Le caractère volumique du défaut vient du fait que ces trois dimensions sont du même ordre de grandeur. Considérons maintenant un défaut dont l'une de ses dimensions, par exemple l'ouverture  $w$ , devient nettement plus petite.

Alors, les variations de la composante tangentielle du champ électrique deviennent très fortes au voisinage de la fissure, et pour obtenir suffisamment de précision sur son approximation, la densité du maillage à utiliser doit être augmentée.

## II.2.3 Approche intégrale de surface

### II.2.3.a Description de la configuration envisagée, impliquant un défaut plan

On fixe la géométrie de la configuration et l'orientation du défaut plan introduit : il est orienté dans le plan normal à l'interface entre le milieu 1 et le milieu 2.

La direction de la profondeur de la plaque est orientée selon l'axe  $\mathbf{z}$  comme représenté en figures II.2.1, II.2.2 et II.2.3. Le défaut est donc contenu dans le plan  $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ , et la normale  $\mathbf{n}$  au défaut est orienté selon l'axe  $\mathbf{x}$ .

Ces choix s'appliquent à l'ensemble des développements effectués dans ce manuscrit.

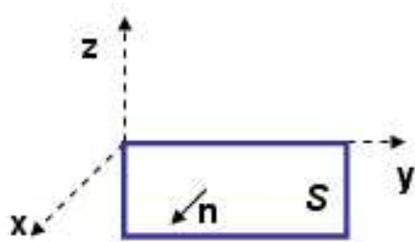


FIG. II.2.2 – Représentation du choix de l'orientation du défaut plan dans le repère  $x, y, z$ .

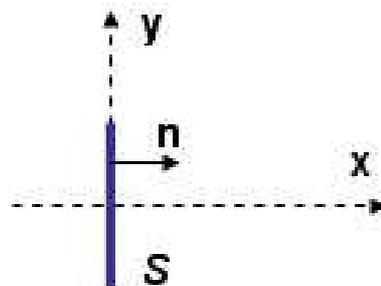


FIG. II.2.3 – Représentation du choix de l'orientation du défaut plan dans le repère  $x, y$ .

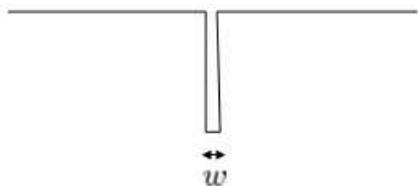


FIG. II.2.4 – Défaut plan d'ouverture  $w$ .

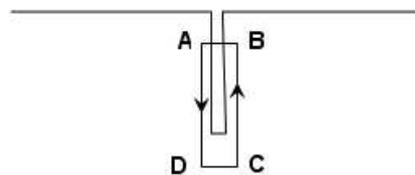


FIG. II.2.5 – Contour d'intégration entourant le défaut plan.

### II.2.3.b Hypothèses géométriques spécifiques au cas du défaut plan

Le modèle dédié au défaut plan va être développé en utilisant des hypothèses physiques pour modifier les équations impliquées. On définit une "fissure idéale" pour représenter un défaut plan [Bow94, KSF77]. Elle est définie par les caractéristiques suivantes :

- le défaut est d'ouverture  $w$  infiniment petite.
- le courant électrique ne passe pas à travers ce défaut.

*N. B. :* Cette idéalisation est valable pour les matériaux non ferro magnétiques. Pour des matériaux type aciers ferreux, il conviendrait d'utiliser d'autres hypothèses [Bow94].

Une représentation d'un défaut plan est donnée en figure II.2.4. La fissure idéale est obtenue lorsque  $w$ , l'ouverture de la fissure, tend vers 0. On appelle  $S_0$  la surface de la fissure idéale. On désignera par  $G_+$  et respectivement  $G_-$  la grandeur d'intérêt  $G$  prise de part et d'autre de la fissure. En pratique, les interactions avec un défaut plan peuvent être modélisées par les interactions avec une "fissure idéale" si  $w$  est négligeable devant la profondeur de pénétration [Bow02].

A partir de ces définitions, nous allons établir différentes hypothèses physiques. Celles - ci nous conduiront à démontrer l'existence d'un potentiel scalaire  $p$  et à le définir.

### II.2.3.c Hypothèse sur le courant normal

La surface de la fissure va porter une charge oscillante. Cependant on peut démontrer que dans l'approximation quasi-statique, la condition sur le courant normal s'exprime :

$$\mathbf{J}_n^\pm = 0 \quad (\text{II.2.17})$$

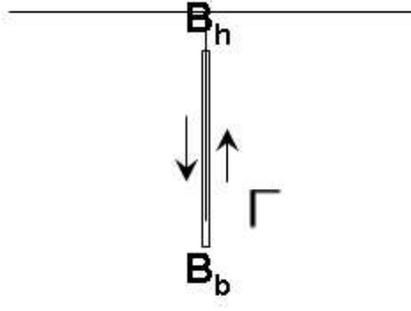


FIG. II.2.6 – Contour  $\Gamma$  entourant la fissure fine.

### II.2.3.d Comportement de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{B}$ de part et d'autre de la fissure

De même qu'effectué pour II.1.12, en appliquant le théorème de Stokes à l'équation de Maxwell Ampère sur le contour  $\Gamma$  représenté en figure II.2.6, dans l'approximation quasi-statique, on obtient II.2.18. L'équation II.2.19 est obtenue par application du théorème de Green Ostrogradsky à l'équation de conservation du flux sur le même contour d'intégration.

$$\mathbf{H}_t^+ - \mathbf{H}_t^- = \Delta \mathbf{H}_t = 0 \quad (\text{II.2.18})$$

$$\mathbf{B}_n^+ - \mathbf{B}_n^- = \Delta \mathbf{B}_n = 0 \quad (\text{II.2.19})$$

### II.2.3.e Existence d'un potentiel scalaire

Elle peut être démontrée en travaillant avec les équations différentielles des champs [Bow94] ou à partir de leurs formulations intégrales [Bow02].

**A partir des équations de champs** On considère l'équation II.2.19. Alors on peut écrire :

$$i\omega\mu\mathbf{n} \times (\Delta \mathbf{H}) = 0$$

Puis en utilisant l'équation de Maxwell Faraday :

$$\mathbf{n} \times \nabla \times (\Delta \mathbf{E}) = 0 \quad (\text{II.2.20})$$

On en déduit l'existence d'une quantité scalaire  $p$  telle que

$$(\Delta \mathbf{E})_t = \frac{1}{\sigma_0} \nabla p \quad (\text{II.2.21})$$

La constante  $\frac{1}{\sigma_0}$  a été rajoutée pour homogénéiser  $p$  à une source de courants. Elle est valable si l'intérieur du défaut est constitué d'air.

Par définition de  $(\Delta \mathbf{E})_t$ , avec le défaut orienté selon les choix effectués en II.2.3.a page 34, on écrit :

$$\nabla p = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla_t p \quad (\text{II.2.22})$$

Cela reste également vérifié à une constante près. On choisit cette constante telle que  $p$  s'élimine sur les bords de la fissure [Bow94].

La théorie électromagnétique des sources équivalentes de courants permet de définir un *vecteur* densité de dipôle  $\mathbf{p} = p \mathbf{n}$  orienté dans le sens de la normale au plan du défaut. On obtient donc la formule suivante sur le saut de la composante tangentielle du champ électrique :

$$\mathbf{E}_t^+ - \mathbf{E}_t^- = -\frac{1}{\sigma_0} \nabla_t p \quad (\text{II.2.23})$$

**Conditions limites vérifiées par la densité surfacique de dipôle** Les conditions limites à prendre en compte sur les bords de la fissure sont [Bow86, BYH97] :

$$\begin{cases} p &= 0 & \text{sur les bords enfouis} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 & \text{sur les bords débouchants} \end{cases} \quad (\text{II.2.24})$$

### II.2.3.f Equation intégrale pour le cas défaut plan

On établit l'équation d'état à utiliser dans le cas surfacique à partir de l'équation qui donne le courant dans le cas du défaut volumique :

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_{20}(\mathbf{r}) + k_{20}^2 f(\mathbf{r}) \int_V \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.12})$$

valable  $\forall \mathbf{r} \in V$ . On fait tendre le volume  $V$  vers la surface  $S$ . Cela revient à faire tendre  $\mathbf{r} \in V$  vers sa projetée sur  $S$   $\mathbf{r}_0$ . On obtient :

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \mathbf{J}_{20}(\mathbf{r}) + k_{20}^2 \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} (f(\mathbf{r})) \lim_{V \rightarrow S} \left\{ \int_V \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right\} \quad (\text{II.2.25})$$

La limite  $\lim_{V \rightarrow S} \left\{ \int_V \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right\}$  comporte en fait un double passage à la limite. D'une part, la variable  $\mathbf{r}$  va tendre vers sa projetée sur  $S$ , notée  $\mathbf{r}_0$ . D'autre part, le volume d'intégration  $V$  tend vers  $S$ , donc la variable muette  $\mathbf{r}$  va tendre elle aussi vers sa projetée sur le défaut, notée  $\mathbf{r}'_0$ . On décompose donc cette limite en deux limites et on écrit :

$$\lim_{V \rightarrow S} \left\{ \int_V \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right\} = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \int_{\lim_{V \rightarrow S}} \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.26})$$

Précision : La limite  $V \rightarrow S$  concerne cette fois ci uniquement la variable  $\mathbf{r}'$  et doit être comprise comme

$$\lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}'_0 \in S}$$

On utilise alors la relation II.2.23 et le fait que  $p$  est orienté selon la normale  $\mathbf{n}$  à la fissure. Puis, par projection sur la normale  $\mathbf{n}$  [BJSS91] :

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{J}_{20}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} + k_{20}^2 f(\mathbf{r}_0) \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \int_S \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \forall \mathbf{r}_0 \in S \quad (\text{II.2.27})$$

En injectant la condition II.2.17 sur le courant normal, on obtient :

$$\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in S} i\omega\mu_0 \int_S G_{22}^{\text{nn}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.28})$$

avec  $G_{22}^{\text{nn}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}$ .

$\mathbf{n}$  est le vecteur unité normal à la fissure. L'équation II.2.28 est une équation de Fredholm de première espèce, en effet l'inconnue  $p(\mathbf{r})$  est seulement sous le signe intégrale.  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}_0)$  est calculé par l'intégrale donnée en II.2.15, page 33.

### II.2.3.g Variations du signal aux bornes de la sonde

L'application du théorème de réciprocité dans ce cas nous donne [Bow94] :

$$I^2 \Delta Z = - \int_S \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (\text{II.2.29})$$

avec  $I$  intensité du courant d'injection de la sonde,  $\mathbf{E}_{20}$  champ incident induit par la sonde dans le milieu 2, calculée par II.2.15, page 33. Les variations d'impédance vont donc être obtenues après le calcul de ce champ incident, et après la résolution de l'équation II.2.28 pour obtenir  $p(\mathbf{r})$ . Dans le cas d'une sonde à fonctions séparées, les variations du signal sont données par [Bow94], page 8132 :

$$I^T \cdot I^R \Delta Z = - \int_S \mathbf{E}^R(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (\text{II.2.30})$$

où  $I^T$  est l'intensité du courant qui parcourt la bobine émettrice. De même que pour le cas volumique, on calcule la contribution de l'impédance comme si la bobine réceptrice était en mode émission, et alimentée par un courant  $I^R$ , qui créerait alors un champ électrique  $\mathbf{E}^R(\mathbf{r})$ . Pour déterminer les variations d'impédance ou de f.e.m., il faut tout d'abord déterminer la densité de dipole  $p(\mathbf{r})$ . Deux méthodes ont été étudiées pour résoudre l'intégrale II.2.28.

## II.2.4 Conclusion sur le formalisme utilisé

Les équations vectorielles de champ décrivant l'interaction d'un défaut quelconque - donc 3D - avec le champ électrique induit par une sonde sont obtenues à partir des équations de Maxwell. Le défaut est formellement pris en compte comme une source fictive de courant. Une expression intégrale des équations est obtenue par formalisme des dyades de Green.

L'équation d'état II.2.12

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_{20}(\mathbf{r}) + k_{20}^2 f(\mathbf{r}) \int_V \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.12})$$

que vérifie la densité volumique de courant  $\mathbf{J}_2(\mathbf{r})$  est résolue numériquement par une méthode de collocation (voir annexe B).

Cependant d'importants problèmes numériques surviennent lorsque le défaut considéré n'est plus quelconque mais possède une dimension beaucoup plus petite que les deux autres. En effet, les composantes tangentielles du champ électrique présentent alors de fortes variations dans la direction de la dimension plus petite. La discrétisation doit être plus fine, et la taille du système à inverser augmente beaucoup.

Le formalisme volumique est donc modifié et adapté au cas des défauts de petite ouverture. On introduit notamment l'approximation de l'interaction du courant induit par la sonde avec ce type de défaut par l'interaction avec un défaut idéalisé d'ouverture infiniment petite et imperméable aux courants. La fonction densité de dipôle inconnue n'est alors plus vectorielle mais scalaire. L'équation intégrale de volume

$$\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in S} i\omega\mu_0 \int_S G_{22}^{\mathbf{nn}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.28})$$

devient une équation intégrale de surface, d'où le nom du modèle "SIM". Le système numérique à inverser a une taille beaucoup plus petite. Cependant, la double projection de la dyade sur la normale à la surface du défaut  $G_{22}^{\mathbf{nn}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  possèdent des singularités très fortes, et la résolution de l'équation II.2.28 nécessite des traitements particuliers. Un certain nombre de méthodes a été développé, comme présenté dans l'introduction en I.2.4, page 20. Deux en particulier nous ont semblé très intéressantes, elles sont présentées dans la partie suivante.

Troisième partie

Implantation numérique du modèle  
surfactive et validations

Nous avons établi au chapitre précédent l'équation intégrale II.2.28 à résoudre pour obtenir la densité de dipôle  $p(\mathbf{r})$ , nécessaire au calcul des variations d'impédance.

$$\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in S} i\omega\mu_0 \int_S G_{22}^{\mathbf{nn}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \forall \mathbf{r}_0 \in S \quad (\text{II.2.28})$$

avec  $S$ , surface du défaut, et  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}_0)$  champ incident induit par la sonde diffusé dans le milieu 2. La résolution de cette équation intégrale est délicate notamment à cause de la présence de singularités hyper fortes de la dyade  $G_{22}^{\mathbf{nn}}$ .

Nous avons étudié deux approches. Basées sur la méthode des moments, et plus précisément sur la méthode de collocation, elles proposent deux calculs différents :

- La première consiste à calculer la dyade dans le domaine spatial. Ce choix conduit à considérer deux dyades : l'une correspond à la dyade de l'espace libre, l'autre tient compte de la présence d'une cible. Le calcul de la seconde dyade ne pose pas de difficultés. En revanche, le calcul de la première soulève des difficultés à cause des fortes singularités. Cette approche a été étudiée par Bowler [Bow94], et Dezhi [DSJW00]. P. Beltrame, dans le cadre de sa thèse au CEGELY, modifie cette approche en introduisant de nouvelles fonctions de base qui permettent de réduire l'ordre des singularités.
- La seconde approche consiste à dépasser les problèmes de singularités en calculant la dyade par le passage dans le domaine spectral.

L'approche de P. Beltrame va être détaillée dans le premier chapitre de cette partie. Dans un second chapitre, nous présenterons la méthode proposée par J. Pàvò. Enfin, des validations numériques et expérimentales seront présentées.

## Troisième partie - Chapitre 1

# Calcul dans le domaine spatial

### III.1.1 Décomposition de l'intégrale impliquée

La démarche utilisée dans [Bow94], [DSJW00] et [BB02] pour la résolution de l'équation II.2.28 passe par la décomposition de la dyade en une somme de dyades. Par linéarité, l'intégrale elle aussi est décomposée en une somme d'intégrales et on peut alors isoler les intégrales comportant des noyaux trop singuliers pour une intégration classique. Le calcul est réalisé après une régularisation spécifique basée sur un développement en série de Laurent.

#### III.1.1.a Décomposition de la dyade

La dyade  $\overline{\mathbf{G}}_{22}$  est décomposée sous la forme d'une dyade de l'espace libre  $(\overline{\mathbf{G}}_{22})_{el}$  et de la dyade notée  $(\overline{\mathbf{G}}_{22})_{Ref}$ , qui tient compte de la cible et de la géométrie de la pièce [Tai93, BJSS91].

$$\overline{\mathbf{G}}_{22} = (\overline{\mathbf{G}}_{22})_{el} + (\overline{\mathbf{G}}_{22})_{Ref} \quad (\text{III.1.1})$$

avec

$$(\overline{\mathbf{G}}_{22})_{el} = \left( I + \frac{\nabla\nabla}{k_2^2} \right) g_0 \quad (\text{III.1.2})$$

avec

$$g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{II.2.5})$$

comme donné en II.2.5, page 31.

Pour notre cas d'intérêt, avec la normale au défaut  $\mathbf{n}$  orientée selon l'axe  $\mathbf{n}$ , comme décrit en II.2.3.a, page II.2.3.a, seule la double projection  $G_{22}^{nn} = G_{22}^{xx}$  sur la normale intervient. Après calculs, on obtient :

$$(G_{22}^{xx})_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( \frac{1}{k_2^2} \right) \left( k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) g_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{III.1.3})$$

Le terme  $(G_{22}^{xx})_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  contient des singularités quand  $\mathbf{r}$  tend vers  $\mathbf{r}'$ . Le terme  $(G_{22}^{xx})_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  lorsque  $\mathbf{r}$  est différent de  $\mathbf{r}'$ , et le terme  $(G_{22}^{xx})_{Ref}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  peuvent s'intégrer classiquement par un schéma de quadrature numérique [Bow94].

Par linéarité de l'intégration et de la limite, la limite de l'intégrale

$$I(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in S} i\omega\mu_0 \int_S G_{22}^{xx}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

est également divisée en la somme des limites des intégrales suivante :

$$I = I_{el} + I_{Ref}$$

où  $I_{el}$  est la limite de l'intégrale impliquant la dyade de l'espace libre  $G_{el}^{nn}$ , et s'écrit

$$I_{el}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} -i\omega\mu_0 \int_S (G_{22}^{xx})_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.1.4})$$

et  $I_{\text{Ref}}$  la limite de l'intégrale impliquant la dyade  $G_{\text{Ref}}^{\text{xx}}$ . L'équation II.2.28 s'écrit alors :

$$\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = -I_{el}(\mathbf{r}_0) - I_{\text{Ref}}(\mathbf{r}_0) \quad (\text{III.1.5})$$

### III.1.1.b Résolutions numériques envisagées

**Décomposition de la fonction densité de dipôle** On décompose la surface  $S$  du défaut en  $N \times M$  cellules. Le point au centre de chaque cellule  $(n, m)$  est noté  $\mathbf{r}_c^{(n,m)}$ , ou  $\mathbf{r}_c$  quand la précision n'est pas nécessaire, comme représenté en figure III.1.1.

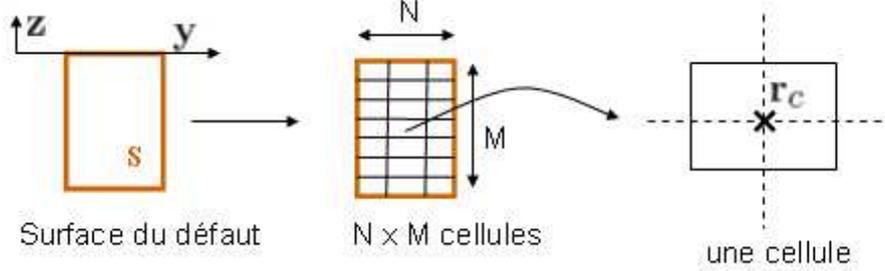


FIG. III.1.1 – Décomposition de la surface de la fissure.

Puis on suppose que  $\tilde{p}(\mathbf{r})$  qui approxime la solution  $p(\mathbf{r})$  se décompose sur un espace vectoriel de dimension finie  $N \times M$  dont les fonctions de base sont notées  $f_{n,m}(\mathbf{r})$ . On écrit donc :

$$\tilde{p}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm} f_{n,m}(\mathbf{r}) \quad (\text{III.1.6})$$

Déterminer  $\tilde{p}(\mathbf{r})$  revient à déterminer les  $N \times M$  coefficients  $(c_{nm})$   $\left. \begin{array}{l} n = 1 \text{ à } N \\ m = 1 \text{ à } M \end{array} \right\}$ .

L'équation III.1.5 est ensuite résolue par une méthode de collocation dont les fonctions de base sont les  $f_{n,m}$ . Si de plus on suppose que chaque  $f_{n,m}$  a pour support la cellule  $(n, m)$ , alors l'équation III.1.5 devient, après interversion des signes sommes et intégrales, possible car les quantités restent finies [BJSS91] :

$$\mathbf{E}_{20n}(\mathbf{r}_0) = - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in S} i\omega\mu_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm} \left( \int_{\text{cellule}(n,m)} (G_{22}^{\text{xx}})_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_{n,m}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right. \\ \left. + \int_{\text{cellule}(n,m)} (G_{22}^{\text{xx}})_{\text{Ref}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_{n,m}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right) \quad (\text{III.1.7})$$

Cette équation est projetée sur une base de Diracs, avec les points de collocation choisis au centre de chaque cellule  $\mathbf{r}_c^{(n,m)}$ . C'est à dire qu'on effectue le produit scalaire des membres de gauche et de droite de l'équation avec chaque fonction Dirac relative au point  $\mathbf{r}_c^{(n,m)}$ .

La résolution de l'équation III.1.5 revient donc à résoudre l'équation matricielle suivante :

$$[\mathbf{E}] = [\overline{\mathbf{G}}] [\mathbf{c}] \quad (\text{III.1.8})$$

où  $[\mathbf{c}]$  désigne le vecteur colonne concaténant les coefficients  $c_{nm}$ .

**Fonctions portes utilisées comme fonctions de base** Bowler [Bow94] et Dezhi [DSJW00] choisissent comme fonctions de base les fonctions portes sur chaque cellule, ce qui revient à approximer  $p(\mathbf{r})$  par une fonction constante sur chaque cellule. En figure III.1.2 est représentée la fonction porte, valant 1 sur la cellule numéro (3) d'un segment divisé en 5 cellules, et 0 sur les autres cellules.

Les termes à évaluer pour former la matrice  $[\overline{\mathbf{G}}]$  correspondant à la dyade deviennent donc :

$$\int_{\text{cellule}(n,m)} (G_{22}^{\text{xx}})_{el}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.1.9})$$

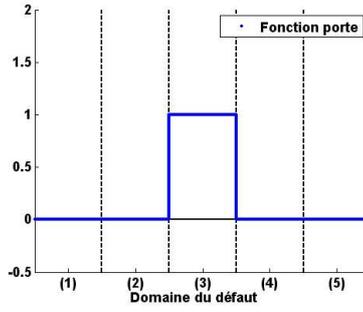


FIG. III.1.2 – Représentation d’une fonction porte.

et

$$\int_{\text{cellule}(n,m)} (G_{22}^{\text{xx}})_{\text{Ref}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.1.10})$$

pour  $\mathbf{r}_0$  parcourant tous les points de collocation  $\mathbf{r}_c$ .

Le passage à la limite ne pose pas de problème, et l’évaluation de tous ces termes sauf les singuliers est effectuée via une quadrature numérique. Les termes singuliers sont présents dans l’intégrale III.1.9 lorsque  $\mathbf{r}_0$  est dans la cellule  $(n, m)$ , que l’on note  $I_{00}$  :

$$I_{00} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \int_{\text{cellule}(n,m)} \left( k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) g_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS \quad (\text{III.1.11})$$

Bowler [BJSS91] propose pour le calcul de  $I_{00}$  une décomposition de l’intégrande en série de puissances.  $g_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  est décomposé en une série de puissances de  $ikR$ , ainsi  $I_{00}$  peut s’écrire en série de puissances de  $ika$ , avec  $a$  qui désigne la longueur de chaque cellule de discrétisation supposée carrée. Une précision tout à fait satisfaisante est obtenue avec 6 termes :

$$I_{00} \approx \frac{\delta}{\pi a} \sum_{\nu=0}^5 c_\nu (ika)^\nu \quad (\text{III.1.12})$$

Dezhi [DSJW00] calcule  $I_{00}$  par un changement de variables en coordonnées polaires.

**Autres fonctions de base utilisées** L’approche développée par P. Beltrame en 2002 [BB02] diffère des approches précédentes par le choix des fonctions de base. Elles sont décrites dans le paragraphe suivant ainsi que la méthode de régularisation des intégrales singulières.

## III.1.2 Approximation de la densité de dipôle par décomposition sur une base de fonctions de forme

La résolution de II.2.28 se fait toujours par méthode de collocation avec les points de collocation choisis au centre  $\mathbf{r}_c$  de chaque cellule. Mais les fonctions de base choisies pour l'approximation de la densité de dipôle sont cette fois ci des "fonctions de forme".

Cela implique que les intégrales III.1.9 et III.1.10 ne se réduisent plus à l'intégration des noyaux de Green sur chaque cellule.

Dans cette section, nous allons tout d'abord décrire les fonctions de base. Puis nous étudierons la décomposition de l'intégrale avec ces fonctions. Enfin les éléments singuliers seront traités séparément.

### III.1.2.a Description des fonctions de base : Les fonctions de forme

La surface de la fissure est encore décomposée en  $N \times M$  cellules, de dimension  $2lry \times 2lrz$ , que nous noterons cette fois ci  $N_e = N \times M$  pour éviter de manipuler des triples sommes. La surface de chaque cellule est désignée par  $(e)$ , et on définit 9 points sur chaque cellule, 9 "noeuds", notés  $\mathbf{r}_{s(i)}$ ,  $\forall i | i = 1 \text{ à } 9$  : 8 sur les bords, 1 au centre, comme représenté en figure III.1.3.

Chaque cellule munie de ces 9 noeuds s'appelle un "élément quadratique complet" [Bon95].

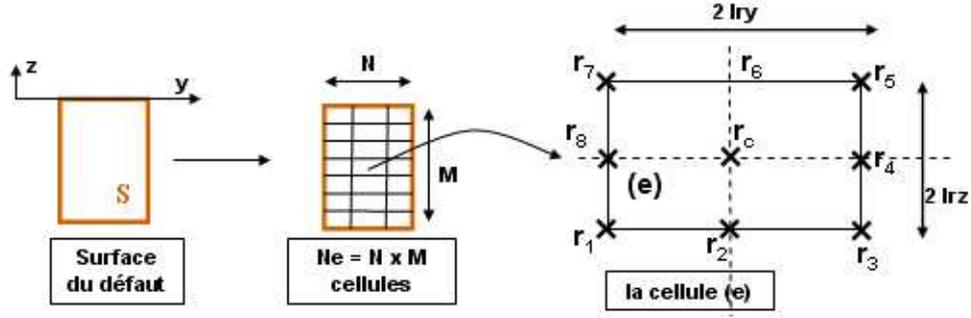


FIG. III.1.3 – Surface du défaut découpée en  $N_e$  cellules

Sur chacun de ces éléments, la densité de dipôle  $p(\mathbf{r}_s)$ , avec  $\mathbf{r}_s$  variable surfacique telle que  $\mathbf{r}_s = (y, z)$ , est approximée par une combinaison linéaire des 9 polynômes de Lagrange associés à cet élément quadratique complet, à savoir les polynômes 2D de Lagrange de degré 2 (de degré 2 relativement à chaque direction) [Bon95], [Pou88] page 331. On les note  $N_i$ , avec  $i = 1 \text{ à } 9$ . Chacun des polynômes est défini de manière à s'annuler sur 8 des 9 points de la cellule, ils vérifient donc

$$N_i(\mathbf{r}_{s(j)}) = \delta_{ij} \quad (\text{III.1.13})$$

Ces fonctions sont en fait obtenues par produit tensoriel des 3 polynômes de Lagrange 1D de degré 2, défini par rapport à 3 points d'un élément de référence 1D. En figure III.1.4 sont représentées les 3 fonctions de forme 1D, ayant comme support l'élément numéro (3) d'un domaine segment divisé en 5 éléments, pour exemple. En annexe se trouve pour mémoire l'expression de chacune de ces fonctions. Figurent aussi le dessin d'une cellule de référence avec les points numérotés dans l'ordre considéré ainsi que les coordonnées locales de ces points sur la cellule.

En pratique, les fonctions  $N_{i|i=1 \text{ à } 9}$  relatives à la cellule numéro  $e$ , dont le point milieu est noté

$$\mathbf{r}_c^{(e)} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \quad (\text{III.1.14})$$

avec  $e = 1 \text{ à } N_e$ , sont notées  $N_i^{(e)}$ . Elles sont surdéfinies à l'espace à trois dimensions et ont pour support

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \in [y_c^{(e)} - lry, y_c^{(e)} + lry] \\ z \in [z_c^{(e)} - lrz, z_c^{(e)} + lrz] \end{pmatrix} \quad (\text{III.1.15})$$

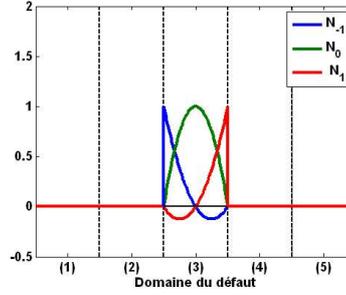


FIG. III.1.4 – Fonctions de base pour l'élément numéro 3.

Le coefficient associé à la fonction de base  $N_i^{(e)}$  est noté  $c_i^{(e)}$ . La décomposition de la densité de dipôle sur cet ensemble de fonctions de base s'écrit donc :

$$\tilde{p}(\mathbf{r}_s) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^9 c_i^{(e)} N_i^{(e)}(\mathbf{r}_s) \quad (\text{III.1.16})$$

### III.1.2.b Décomposition de l'équation intégrale avec ce choix de fonctions

L'équation III.1.7 s'écrit alors :

$$\mathbf{E}_{20n}(\mathbf{r}_0) = -i\omega\mu_0 \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in S} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^9 c_i^{(e)} \left( \int_{(e)} (G_{22}^{\mathbf{xx}})_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N_i^{(e)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_{(e)} (G_{22}^{\mathbf{xx}})_{\text{Ref}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N_i^{(e)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right) \quad (\text{III.1.7})$$

Les sommes et la limite peuvent s'invertir, et on est donc amené à considérer les deux limites d'intégrales suivantes notées respectivement  $L_{el}$  et  $L_{\text{Ref}}$  :

$$L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in (e)} \int_{(e)} (G_{22}^{\mathbf{xx}})_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N_i^{(e)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.1.17})$$

$$L_{\text{Ref}}^{(e),i}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in (e)} \int_{(e)} (G_{22}^{\mathbf{xx}})_{\text{Ref}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N_i^{(e)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.1.18})$$

Ces intégrales doivent être évaluées en  $\mathbf{r}_0$  pris en chacun des  $N \times M$  points de collocation  $\mathbf{r}_c$ . Le calcul peut être effectué par un schéma d'intégration classique, Simpson adaptatif [Qua01] par exemple, sauf quand le point de collocation  $\mathbf{r}_c$  est contenu dans la cellule  $(e)$  choisie. Pour ce cas, une méthode de régularisation spécifique doit être utilisée. C'est ce qui est présenté dans les sections suivantes.

### III.1.3 Régularisation de l'intégrale singulière

L'objet de cette section est de proposer une méthode pour calculer la limite de l'intégrale

$$L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in (e)} \int_{(e)} (G_{22}^{\mathbf{xx}})_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N_i^{(e)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.1.17})$$

pour  $(e) = 1$  à  $N_e$ ,  $i = 1$  à  $9$ , pour  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_e^c$ , c'est à dire le point milieu de la cellule  $e$ . Cette intégrale va tout d'abord être transformée en développant analytiquement la dyade  $(G_{22}^{\mathbf{xx}})_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , puis en utilisant les spécificités des fonctions de forme.

#### III.1.3.a Transformation de l'intégrale par développement de la dyade

Nous avons établi page 41 que la dyade  $(G_{22}^{\mathbf{xx}})_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  vérifie :

$$\overline{(G_{22}^{\mathbf{xx}})}_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( \frac{1}{k^2} \right) \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) g_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{III.1.2})$$

avec

$$g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{II.2.5})$$

La dyade  $\overline{(G_{22}^{\mathbf{xx}})}_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  n'est donc fonction que de la distance  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  que l'on désignera à présent par  $R$ . On va utiliser l'égalité  $k = \frac{j+1}{\delta}$ , avec  $\delta$  qui désigne l'épaisseur de peau. De même on établit  $j.k = \frac{j-1}{\delta}$  et  $k^2 = \frac{2j}{\delta^2}$ .

Toutes les quantités d'espace sont maintenant normalisées par rapport à l'épaisseur de peau  $\delta$ . Notre variable  $R$  normalisée est donc telle que :

$$R = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}{\delta} \quad (\text{III.1.19})$$

**Calcul de  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} g_0(R)$**

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g_0(R) = g_0(R) \left[ \frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2}(-1 - k^2 x^2) + \frac{1}{R^3}(-3jk^2 x^2) + \frac{1}{R^4}3x^2 \right]$$

**Nouvelle formulation** On a donc à la limite lorsque  $x$  tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_0(R) \right] = \left[ \frac{jk}{R} - \frac{1}{R^2} \right] g_0(R)$$

Comme  $g_0(R)$  est un terme en  $\frac{1}{R}$ , le terme  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_0(R) \right]$  comporte une singularité en  $\frac{1}{R^3}$ .

L'équation (III.1.17) va donc s'écrire

$$L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \int_{(e)} \left( 2j + \frac{j+1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) g_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N_i^{(e)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.1.20})$$

Pour  $\mathbf{r}_0$  choisit en chaque point de collocation  $\mathbf{r}_e^{(e)}$ . Cette intégrale ne peut être intégrée classiquement car le troisième terme, en  $\frac{1}{R^3}$ , est hypersingulier. On la sépare donc en deux intégrales pour isoler l'hypersingularité :

$$I_1^{(e),i}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \int_{(e)} \left( 2j + \frac{j+1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) N_i^{(e)}(\mathbf{r}') g_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (\text{III.1.21})$$

$$I_2^{(e),i}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \int_{(e)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} N_i^{(e)}(\mathbf{r}') g_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (\text{III.1.22})$$

La première limite d'intégrale,  $I_1^{(e),i}$ , est calculée par un passage en coordonnées polaires, ce qui permet une réduction de l'ordre des singularités. La seconde limite,  $I_2^{(e),i}$ , est calculée par un calcul en partie finie qui comporte un développement de Taylor de  $\exp(jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N_i^{(e)}(\mathbf{r})$ . Le détail des calculs est présenté en

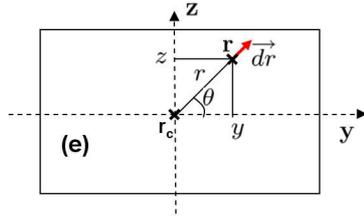


FIG. III.1.5 – Passage en coordonnées polaires.

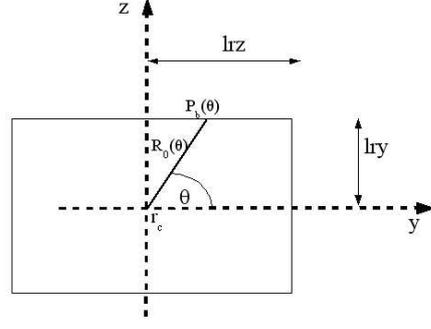


FIG. III.1.6 – Illustration pour la quantité  $R_0(\theta)$ .

annexe.

Les variables décrivant la surface ne sont plus  $(y, z)$  mais  $(\theta, r)$ , tels que

$$\begin{cases} 0 < \theta = \arctan\left(\frac{z-z'}{y-y'}\right) + \pi \cdot u_0(-(y-y')) \cdot \text{signe}(z-z') < 2\pi \\ 0 < r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} < R_0(\theta) \end{cases} \quad (\text{III.1.23})$$

comme représenté en figure V.C.3, avec  $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' = x_c \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  et  $R_0(\theta)$  correspondant à la distance du centre

de la cellule au point  $P_b(\theta)$  du bord de la cellule, avec  $\theta$  l'angle tel que  $\theta = (\vec{y}, \overline{\mathbf{r}_c \mathbf{P}_b})$  comme représenté en figure III.1.6. Les fonctions  $N_i^{(e)}$  des variables  $(y, z)$  deviennent donc des fonctions de  $(r, \theta)$ . On peut donc montrer (voir en annexe) :

$$\begin{aligned} L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_c^{(e)}) &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \left( \left[ -2jr - (j+1) + \frac{1}{r} \right] \cdot g_0(r) N_i^{(e)}(r, \theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left( \exp(jkr) \cdot N_i^{(e)}(r, \theta) \right)_{|(0,0)}}{r^2} - \frac{\vec{\nabla} \left( \exp(jkr) N_i^{(e)}(r, \theta) \right)_{|(0,0)} \cdot r \vec{dr}}{r^2} \right) dr d\theta \\ &\quad + 4 \cdot \left( \frac{\sin \theta}{lry} + \frac{\cos \theta}{lrz} \right) N_i^{(e)}(0, 0) \end{aligned} \quad (\text{III.1.24})$$

On remarque que  $N_i^{(e)}(0, 0) = \begin{cases} 0, \forall i = 1 \text{ à } 8 \\ 1, \text{ pour } i = 9 \end{cases}$  Ce dernier terme ne restera donc que pour  $i = 9$ .

On simplifie l'expression en notant de plus que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\exp jkr) &= \frac{\partial}{\partial x}(\exp jk \sqrt{((x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2)}) \\ &= \frac{1}{r}(x-x_c) \end{aligned} \quad (\text{III.1.25})$$

et en évaluant les termes à prendre en  $r = 0$  :

$$\begin{aligned} L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_c^{(e)}) &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \left( \left[ -2jr - (j+1) + \frac{1}{r} \right] \cdot g_0(r) N_i^{(e)}(r, \theta) - \frac{1}{r^2} N_i^{(e)}(0, 0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \vec{\nabla} \left( N_i^{(e)}(r, \theta) \right)_{|(0,0)} \cdot \vec{dr} \right) dr d\theta + 4 \cdot \left( \frac{\sin \theta}{lry} + \frac{\cos \theta}{lrz} \right) N_i^{(e)}(0, 0) \end{aligned}$$

On note

$$\text{int}_i^e(r, \theta) = \left[ -2jr - (j+1) + \frac{1}{r} \right] \cdot g_0(r) N_i^{(e)}(r, \theta) - \frac{1}{r^2} N_i^{(e)}(0, 0) - \frac{1}{r} \vec{\nabla} \left( N_i^{(e)}(r, \theta) \right)_{|(0,0)} \cdot \vec{dr}$$

de sorte que

$$L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_c^{(e)}) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} int_i^e(r, \theta) dr d\theta + 4 \cdot \left( \frac{\sin \theta}{lry} + \frac{\cos \theta}{lrz} \right) N_i^{(e)}(0, 0) \quad (\text{III.1.26})$$

De même on introduit  $gsr1$  tel que :

$$gsr1(r) = \left[ -2jr - (j+1) + \frac{1}{r} \right] \cdot g_0(r)$$

$$int_i^e(r, \theta) = gsr1(r) N_i^{(e)}(r, \theta) - \frac{1}{r^2} N_i^{(e)}(0, 0) - \frac{1}{r} \vec{\nabla} \left( N_i^{(e)}(r, \theta) \right) \Big|_{(0,0)} \cdot \vec{dr}$$

### III.1.3.b Utilisation des spécificités des fonctions de forme

L'évaluation de des termes III.1.26 nécessite :

- L'évaluation des  $N_i^{(e)}$  et de leur gradient au centre de la cellule.
- L'intégration de  $int_i^e(r, \theta)$ , sur tout le domaine de la cellule  $e$ .

Dans un premier temps, les valeurs des fonctions et de leur gradient au centre de la cellule seront données, puis nous verrons comment réduire les domaines d'intégration notamment grâce aux propriétés d'invariance des fonctions. On peut regrouper certaines des 9 fonctions de forme relativement à leurs symétries au sein de la cellule. On distingue 4 groupes :

1. Le premier groupe est formé des fonctions  $N_2$  et  $N_6$ . En effet, ces deux fonctions sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses  $y$ .
2. Le second groupe est formé des fonctions  $N_4$  et  $N_8$ . En effet, ces deux fonctions sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées  $z$ .
3. Le troisième groupe est formé des fonctions  $N_1$ ,  $N_3$ ,  $N_5$ , et  $N_7$ . Ces fonctions ont les mêmes valeurs par rotation de  $\frac{\pi}{2}$ .
4. Le dernier groupe ne comporte que la fonction  $N_9$ . C'est la seule fonction à être au centre de la cellule.

### Evaluation des fonctions et des gradients au centre de la cellule

$$N_i^{(e)}(0, 0) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = 9 \\ 0 & \text{pour } i = 1 \text{ à } 8 \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \left( N_i^{(e)}(r, \theta) \right) \Big|_{(0,0)} = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{2lrz} & \text{pour } i = 2, 6 \\ \frac{\cos \theta}{2lrz} & \text{pour } i = 4, 8 \\ 0 & \text{pour } i = 1, 3, 5, 7 \\ 0 & \text{pour } i = 9 \end{cases}$$

### Réduction des domaines d'intégrations

Les propriétés de symétries des fonctions sur chaque cellule vont être mises à profit pour réduire le domaine d'intégration de  $\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} int_i^e(r, \theta) dr d\theta$ . Dans ce qui suit on ne précise plus la référence à la cellule ( $e$ ) pour la quantité  $int_i^e(r, \theta)$ , qui est donc notée  $int_i(r, \theta)$ .

On appelle  $\alpha$  l'angle défini par  $\tan \alpha = \frac{lrz}{lry}$ , comme représenté en figure III.1.7. Cet angle délimite 2 zones de  $\theta$  pour lesquelles le calcul de  $R_0(\theta)$  diffère :

$$\forall \theta \in [\alpha, \pi - \alpha] \cup [\pi + \alpha, 2\pi - \alpha], \text{ à } 2k\pi \text{ près} \quad R_0(\theta) = \frac{lrz}{\sin \theta}$$

$$\forall \theta \in [-\alpha, \alpha] \cup [\pi - \alpha, \pi + \alpha], \text{ à } 2k\pi \text{ près} \quad R_0(\theta) = \frac{lry}{\cos \theta}$$

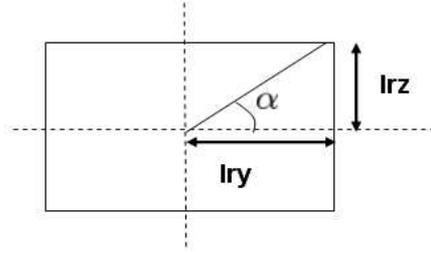


FIG. III.1.7 – Illustration de la définition de  $\alpha$ .

**Simplification du domaine d'intégration pour  $N_2$  et  $N_6$**  L'influence de ces deux fonctions est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées à  $y$  constant. Donc le domaine d'intégration est réduit à :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} int_i(r, \theta) dr d\theta = 2 \left( \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} int_i(r, \theta) dr d\theta + \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} int_i(r, \theta) dr d\theta + \int_{\theta=\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} int_i(r, \theta) dr d\theta \right)$$

Voir la figure (III.1.8) sur lequel est représenté le domaine d'intégration considéré.

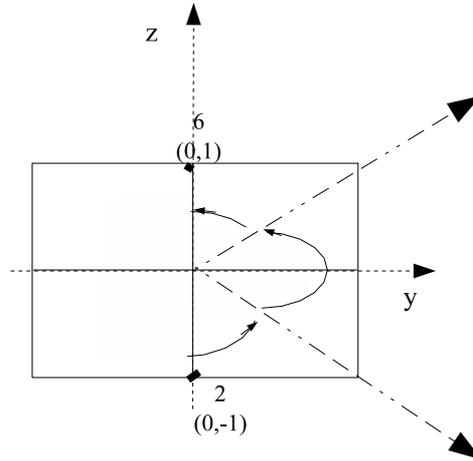


FIG. III.1.8 – Simplification du domaine d'intégration pour les fonctions de base des points 2 et 6

**Simplification du domaine d'intégration pour  $N_4$  et  $N_8$**  Le cas est identique au précédent à une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  près. C'est à dire que l'influence de ces deux fonctions est symétrique par rapport à l'axe des abscisses à  $z$  constant. Donc le domaine d'intégration est réduit à :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} int_i(r) dr d\theta = 2 \left( \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} int_i(r, \theta) dr d\theta + \int_{\theta=\alpha}^{\pi-\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} int_i(r, \theta) dr d\theta + \int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} int_i(r, \theta) dr d\theta \right)$$

**Simplification du domaine d'intégration pour  $N_1, N_3, N_5$  et  $N_7$**  Voir la figure (III.1.9).

Aucune simplification n'est possible, car l'influence de chaque fonction est différente sur chaque quart de

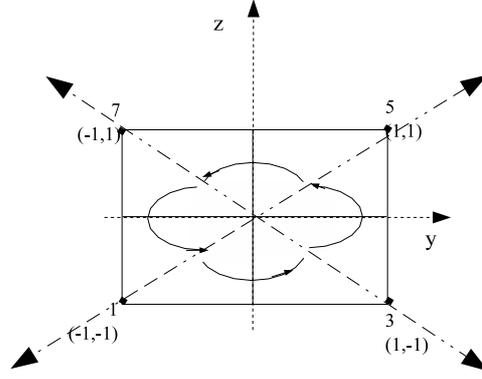


FIG. III.1.9 – Simplification du domaine d'intégration pour  $N_1, N_3, N_5$  et  $N_7$

rectangle.

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta = \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta + \int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi-\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta +$$

$$\int_{\theta=\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta + \int_{\theta=2\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta$$

**Simplification du domaine d'intégration pour  $N_9$**  Comme  $N_9$  est définie par le point 9 qui est au centre de la cellule, son incidence est identique sur chaque quart de la cellule. Au lieu de réaliser une intégration sur toute la cellule, on va donc faire l'intégration sur un quart de cellule et multiplier par 4 après.

On a donc :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_9(r) dr d\theta = 4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_9(r) dr d\theta$$

### Synthèse des calculs à effectuer pour le calcul de l'intégrale singulière

Pour le calcul de la limite de l'intégrale suivante :

$$L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_c^{(e)}) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in (e)} \int_{(e)} (G_{22}^{xx})_{el}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N_i^{(e)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.1.17})$$

en chaque point de collocation  $\mathbf{r}_c^{(e)}$ ,

pour  $i = 2$  et  $6$  :

$$L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_c^{(e)}) = 2 \left( \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta + \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta \right. \\ \left. + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta \right)$$

pour  $i = 4$  et  $8$  :

$$L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_c^{(e)}) = 2 \left( \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta + \int_{\theta=\alpha}^{\pi-\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta \right. \\ \left. + \int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta \right)$$

pour  $i = 1, 3, 5,$  et  $7$  :

$$L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_c^{(e)}) = \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta + \int_{\theta=\alpha}^{\pi-\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta \\ + \int_{\theta=\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta + \int_{\theta=2\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_i(r, \theta) dr d\theta$$

pour  $i = 9$  :

$$L_{el}^{(e),9}(\mathbf{r}_c^{(e)}) = 4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \text{int}_9(r) dr d\theta + 4 \cdot \left( \frac{\sin \theta}{lry} + \frac{\cos \theta}{lrz} \right) N_i^{(e)}(0, 0)$$

avec comme termes  $int_i^e$  :

$$\begin{aligned}
 \text{pour } i = 2 \text{ et } 6 & \quad int_i^e(r, \theta) = gsr1(r).N_i(r, \theta) - \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{lrz} \cdot \frac{1}{r} \\
 \text{pour } i = 4 \text{ et } 8 & \quad int_i^e(r, \theta) = gsr1(r).N_i(r, \theta) - \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{lry} \cdot \frac{1}{r} \\
 \text{pour } i = 1, 3, 5, \text{ et } 7 & \quad int_i^e(r, \theta) = gsr1(r).N_i(r, \theta) \\
 \text{pour } i = 9 & \quad int_9^e(r, \theta) = gsr1(r).N_9(r, \theta) - \frac{1}{r^2}
 \end{aligned}$$

et  $gsr1(r)$  est donné par (III.1.3.a) :

$$gsr1(r) = \left[ -2jr - (j + 1) + \frac{1}{r} \right] \cdot g_0(r)$$

avec

$$g_0(r) = \frac{\exp(jkr)}{4\pi r}$$

### III.1.3.c Dimension du système numérique

La sous section précédente développait les techniques utilisées pour le calcul de l'intégrale singulière relatif à la cellule  $(n, m)$  lorsque le point de collocation se trouve dans cette cellule.

Revenons l'ensemble de la méthode, et évaluons la dimension du système numérique après discrétisation des équations intégrales par méthode de collocation, avec comme choix de fonctions de base les fonctions de forme quadratiques décrites précédemment.

#### Nombre d'inconnues à déterminer

La discrétisation consiste à décomposer la densité de dipôle inconnue sur un ensemble de  $N_y \times N_z$  cellules. La restriction de la densité de dipôle sur chaque cellule est approchée par une combinaison linéaire de 9 fonctions de base.

On aurait donc 9 ( $N_y \times N_z$ ) inconnues, mais comme il existe des relations supplémentaires entre certains coefficients, ce nombre va être réduit.

**La continuité** de la densité de dipôle sur le bord des cellules réduit le nombre d'inconnues. Considérons par exemple deux cellules  $(e)$  et  $(e + 1)$  adjacentes dans la direction  $\mathbf{y}$ , comme représenté sur la figure III.1.10. Alors on établit que le coefficient  $c_5^e$  relatif à la fonction de base  $N_5^e$  définie par rapport au point

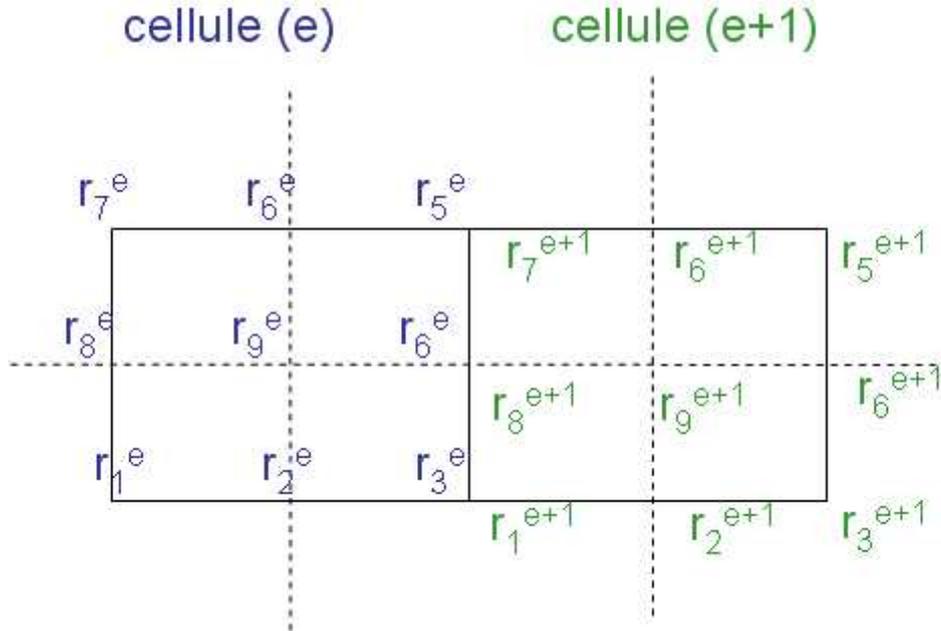


FIG. III.1.10 – Deux cellules adjacentes en  $\mathbf{y}$ .

$\mathbf{r}_5^e$ , est égal au coefficient  $c_7^{e+1}$  relatif à la fonction de base  $N_7^{e+1}$  définie par rapport au point  $\mathbf{r}_7^{e+1}$ . De même,

$$\begin{aligned} c_4^e &= c_8^{e+1} \\ c_5^e &= c_7^{e+1} \end{aligned}$$

et trois égalités du même type existent entre deux cellules adjacentes dans la direction  $\mathbf{z}$ .

**La condition limite II.2.24 page 37 sur les bords enfouis** fixe également les valeurs des coefficients relatifs aux fonctions de forme définies sur les bords de la surface du défaut.

$$p = 0 \quad \text{sur les bords enfouis} \quad (\text{II.2.24})$$

Donc, pour la première cellule, notée  $(1, 1)$  sur la figure III.1.11, pour le cas d'une fissure enfouie, on tient compte de la condition limite II.2.24 et on a 4 coefficients à déterminer. Puis pour la cellule  $(2, 1)$ , adjacente

à (2, 1) en  $\mathbf{y}$ , on en a encore 4, comme représenté en figure III.1.12, en tenant compte de la continuité sur les bords de la cellule et les conditions limites sur les bords enfouis. Ainsi de suite jusqu'à la dernière cellule, où on n'a plus que 2 inconnues à cause de la condition limite sur le bord enfoui, comme sur la figure III.1.13.

On a donc  $4 \times (N_y - 1) + 2$  inconnues pour chacune des  $(N_z - 1)$  lignes de cellules. Pour la dernière ligne, comme représenté en figure III.1.14, on n'a plus que  $2 \times (N_y - 1) + 1$  inconnues à cause des conditions limites sur les bords enfouis.

Pour le cas d'une fissure débouchante, la condition limite à prendre pour le bord débouchant n'est plus  $p = 0$  mais  $\frac{\partial}{\partial z} p = 0$ . On a donc une ligne d'inconnues supplémentaires, soient  $2(N_y - 1)$ , comme représenté sur la figure III.1.15.

On a donc

- $(2 N_y - 1) \times 2 N_z$  coefficients inconnus pour une fissure débouchante.,
- $(2 N_y - 1) \times (2 N_z - 1)$  pour une fissure enfouie (figure III.1.14).

Le nombre d'inconnues à déterminer est donc de l'ordre de  $O(4 N_y N_z)$ .

### Nombre de points de collocation à utiliser

On choisit  $N_e = N_y \cdot N_z$  points de collocation au centre de chacune des  $N_e$  cellules, cela nous donne  $N_e$  équations de collocation. On ajoute à celles ci des équations issues de la condition de dérivabilité de la densité de dipôle. Par exemple, la dérivée en  $\mathbf{y}$  de la densité de dipôle au point  $\mathbf{r}_5^e$  est égale à la dérivée en  $\mathbf{y}$  au point  $\mathbf{r}_7^{e+1}$  (ce qui désigne en fait le même point).

On en déduit

$$c_7^e - 4c_6^e + 3c_5^e = -3c_7^{e+1} + 4c_6^{e+1} - c_5^{e+1}$$

On a donc une relation de ce type à chacun des points interface entre deux cellules adjacentes en  $\mathbf{y}$ . On a donc  $(N_y - 1) \times (2N_z - 1)$  équations de dérivabilité en  $\mathbf{y}$  pour une fissure enfouie, et  $(N_y - 1) \times (2N_z)$  pour un défaut débouchant.

$(N_z - 1) \times (2N_y - 1)$  équations du même type découlent de la dérivabilité de la densité de dipôle en  $\mathbf{z}$  pour un défaut enfoui, et  $(N_z - 1) \times (2N_y - 1)$  pour un défaut débouchant.

De plus, pour un défaut débouchant,  $(2N_y - 1)$  équations sont déduites de la conditions de Neumann  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$  sur les bords débouchants.

Soit un nombre total de :

- $4N_e - 3(N_y + N_z) + 2$  équations de dérivabilité pour une fissure enfouie,
- et  $4N_e - 3N_z$  dans le cas d'une fissure débouchante.

### Dimension du système numérique à inverser

La matrice à inverser qui donne les coefficients de décomposition de  $p(\mathbf{r})$  est donc de taille

$$\{[2N_y - 1] \times 2N_z\} \times \{(5N_y - 3) \times N_z\}$$

dans le cas d'une fissure débouchante, et

$$\{[2N_y - 1] \times [2N_z - 1]\} \times \{(5N_y N_z - 3(N_y + N_z)) + 2\}$$

pour une fissure enfouie.

La sous matrice formée des  $N_e$  premières lignes et toutes les colonnes du système est pleine, car elle représente la partie du système obtenue par méthode de collocation. La seconde sous-matrice, formée des  $(5N_y - 3) \times N_z$  lignes obtenues par les équations de continuité, peut elle-même être divisée en sous matrices présentant des structures de matrices triangulaires par bande, comme observé en éléments finis [Pou88] page 337 par exemple.

La densité de dipôle est donc déterminée par  $(2 N_y - 1) \times 2 N_z$  coefficients pour une fissure débouchante, et  $(2 N_y - 1) \times (2 N_z - 1)$  pour une fissure enfouie. Le nombre d'inconnues est donc de l'ordre de  $4N_y \times N_z$ .

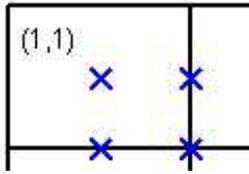


FIG. III.1.11 – 4 inconnues à déterminer pour la cellule (1, 1).

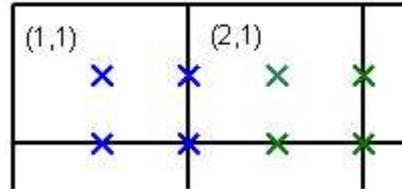


FIG. III.1.12 – ... et par conséquent 4 inconnues à déterminer pour la cellule (2, 1).

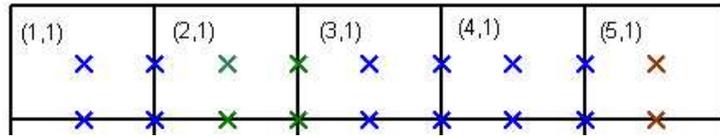


FIG. III.1.13 – Pour la dernière cellule dans la direction  $y$  : 2 inconnues seulement.

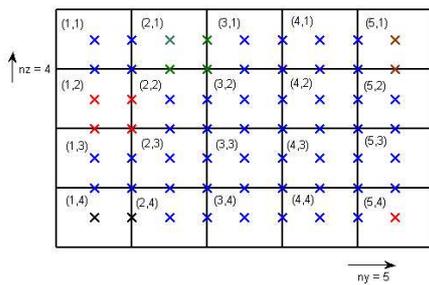


FIG. III.1.14 – Nombre d'inconnues identiques sauf pour les cellules du bord inférieur du défaut (cas du défaut enfoui).

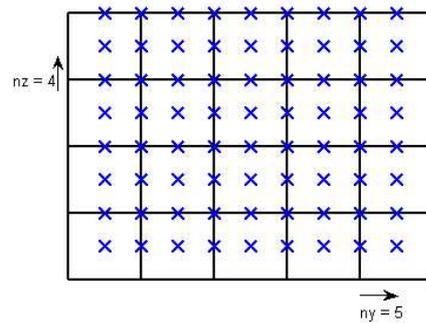


FIG. III.1.15 – Nombre d'inconnues à déterminer pour une fissure débouchante.

### III.1.3.d Détermination des variations d'impédance

Lorsque la bobine est située à une position  $k$ , la variation d'impédance correspondante est donnée par :

$$\Delta Z^k = -\frac{1}{I^2} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^9 c_i^{(e),k} \int_S (\mathbf{E}_{20}(y, z) \cdot \mathbf{n})^k f_y^n(y) f_z^m(z) dydz \quad (\text{III.1.27})$$

Pour déterminer la réponse d'un capteur se déplaçant en  $K$  points, on a donc besoin de  $(2 N_y - 1) \times (2 N_z \times K)$ , (respectivement  $(2 N_y - 1) \times (2 N_z - 1) \times K$ ) coefficients pour le cas d'un défaut débouchant (respectivement enfoui).

## III.1.4 Conclusion sur cette méthode

### III.1.4.a Illustration : Benchmark "Team Workshop" N° 15

Nous allons illustrer cette méthode par les résultats numériques obtenus sur le benchmark "Team Workshop" N° 15 [Bur87]. Les caractéristiques de ce benchmark sont données dans la table III.3.1. Sur les figures III.1.16 et III.1.17 se trouvent les parties réelles et imaginaires du signal obtenu, pour un déplacement du capteur le long de l'axe  $\mathbf{y}$ , c'est à dire le long de l'axe de la fissure. La densité de dipôle  $p$  à l'intérieur du défaut, reconstruite avec les fonctions de forme, est représentée sur la figure III.1.18.

### III.1.4.b Avantages et inconvénients

**Avantage lié à la décomposition de la dyade** effectuée en III.1.1, page 41, rappelée ici :

$$\overline{\mathbf{G}}_{22} = (\overline{\mathbf{G}}_{22})_{el} + (\overline{\mathbf{G}}_{22})_{Ref} \quad (\text{III.1.1})$$

Ce choix de méthode permet une simplification du formalisme par un isolement de la singularité et son traitement de manière analytique. Le temps de construction des matrices en est donc réduit.

**Concernant le choix des fonctions de forme par opposition aux fonctions portes** L'avantage principal est de pouvoir s'adapter aisément aux défauts de géométrie plus complexe. On obtient également une meilleure approximation de la densité de dipôle sur chaque élément. En effet, l'approximation par des fonctions porte revient à une approximation par des polynômes de degré 0, alors que dans ce cas nous avons des polynômes de degré 2. Enfin, les conditions limites sur la densité de dipôle sont prises en compte.

**Inconvénients** En contrepartie, dans l'approximation par des fonctions porte, à chaque cellule correspondait un coefficient, associé à une fonction de base. Dans cette méthode, à chaque cellule correspond 9 coefficients et 9 fonctions de formes, et on a vu que le nombre d'inconnues est en  $O(4N_y \times N_z)$ . La méthode des moments requiert l'inversion d'une matrice pleine, mais généralement de taille réduite. Ici, à cause de ce choix de fonctions de base, la matrice est de taille relativement élevée :  $(4N_y \times N_z) \times (5N_y \times N_z)$  et la sous matrice formée des  $N_y \times N_z$  premières lignes est pleine, ce qui représente un coût important à l'inversion.

De plus, le temps nécessaire pour évaluer les termes de  $(\overline{\mathbf{G}}_{22})_{Ref}$  reste élevé.

Benchmark "Team Workshop N°15"			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	900 Hz	Conductivité :	30.6 MS/m
Rayon interne :	6.15 mm	Epaisseur :	12.22 mm
Rayon externe :	12.4 mm	Défaut	
Hauteur :	6.15 mm	Longueur :	12.6 mm
Entrefer :	0.88 mm	Profondeur :	5 mm
Nombre de spires :	3790	Epaisseur :	0.28 mm
Rapport profondeur/longueur : 40%			
Rapport ouverture / longueur : 2%			
Epaisseur de peau $\delta$ : 3 mm			

TAB. III.1.1 – Description de la configuration "Team Workshop N°15".

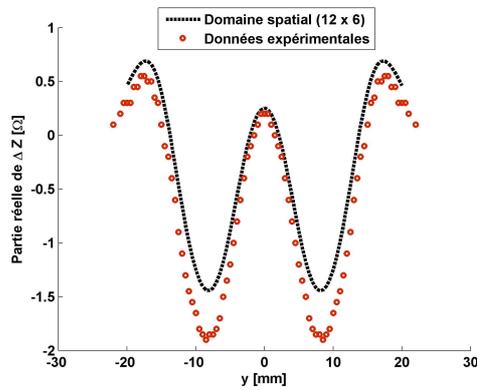


FIG. III.1.16 – Partie réelle du signal obtenu avec la méthode "Domaine spatial" sur le benchmark "Team Workshop N°15".

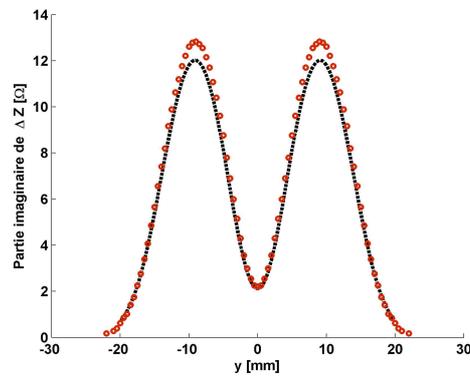


FIG. III.1.17 – Partie imaginaire du signal obtenu avec la méthode "Domaine spatial" sur le benchmark "Team Workshop N°15".

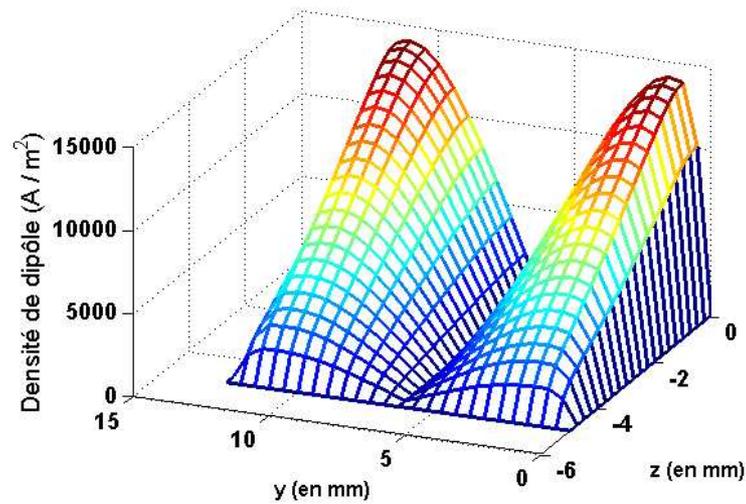


FIG. III.1.18 – Dessin de la densité de dipôle reconstruite par fonctions de forme.

## Troisième partie - Chapitre 2

# Domaine spectral

Ce second chapitre propose un autre formalisme pour modéliser les interactions d'un champ électromagnétique avec un défaut plan constitué d'air (de conductivité  $\sigma(\mathbf{r}) = 0$ ). Il est basé sur une méthode de collocation également, mais dans ce cas, une partie des calculs est effectuée dans le domaine spectral. Cela permet un traitement analytique des singularités.

Ce chapitre est composé de trois parties. La méthode de collocation et le passage dans le domaine spectral font l'objet de la première partie. Deux choix différents de fonctions de base sont présentés dans la seconde partie. Enfin, une étude d'une procédure d'automatisation du choix du maillage est faite, tirant profit de la rapidité de ce modèle.

### III.2.1 Principe de la méthode implantée

La méthode est développée à partir de l'équation donnant la densité volumique de dipôle  $\mathbf{J}_2(\mathbf{r})$  :

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) + i\omega\mu_0 \int_V \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.2.1})$$

Cette équation intégrale va être transformée en introduisant des objets mathématiques spécifiques à la notion idéale de "fissure fine", définie par :

- Une ouverture infiniment petite.
- Aucun courant ne circule au travers.

Une équation intégrale dont l'inconnue est la densité surfacique de dipôle  $p(\mathbf{r})$  va être obtenue. Puis elle sera résolue numériquement par une méthode des moments, plus précisément la méthode de collocation, dans laquelle une partie des calculs est effectuée dans le domaine spectral.

Dans une première partie, l'équation intégrale d'inconnue  $p(\mathbf{r})$  va être obtenue après introduction d'éléments mathématiques spécifiques au cas plan. Puis le calcul dans le domaine spectral après décomposition de la densité de dipôle sur les fonctions de base sera présenté. Enfin, le produit scalaire avec une base de fonctions de Diracs amènera au système numérique à résoudre.

#### III.2.1.a Obtention d'une équation intégrale spécifique au cas plan

L'équation donnant la densité volumique de dipôle  $\mathbf{J}_2(\mathbf{r})$  est donnée par :

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) + i\omega\mu_0 \int_V \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.2.2})$$

On introduit

$$\overline{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{k_{20}^2} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \overline{\mathbf{I}} \quad (\text{III.2.3})$$

avec  $k_{20}^2 = -i\omega\mu_0\sigma_{20}$ . Alors l'équation III.2.2 s'écrit

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) + i\omega\mu_0 \int_V \overline{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \frac{1}{\sigma_{20}} \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) \quad (\text{III.2.4})$$

Comme  $\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = -\sigma_{20}\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ , on obtient :

$$\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) + i\omega\mu_0 \int_V \overline{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 0 \quad (\text{III.2.5})$$

On définit une relation entre la densité volumique de dipôle et la densité surfacique de dipôle :

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) \delta_S(\mathbf{r}) \mathbf{n} \quad (\text{III.2.6})$$

avec  $\mathbf{n}$  normale à la surface  $S$  du défaut.

$\delta_S(\mathbf{r})$  est l'objet défini par :

$$\delta_S(\mathbf{r}) = \int_S \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.2.7})$$

qui vaut donc 1  $\forall \mathbf{r} \in S$ . En effet lorsque l'ouverture du défaut diminue, la composante normale de la densité de dipôle devient prépondérante.  $p(\mathbf{r})$  a une amplitude d'autant plus forte que les deux dimensions autres que l'ouverture restent grandes alors que l'ouverture diminue.

Alors on écrit :

$$\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) + i\omega\mu_0 \int_V \overline{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') p(\mathbf{r}') \left( \int_S \delta(\mathbf{r}' - \tau) d\tau \right) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{r}' = 0 \quad (\text{III.2.8})$$

L'objet  $(\int_S \delta(\mathbf{r}' - \tau) d\tau)$  vaut 0  $\forall \mathbf{r}' \notin S$ , par conséquent

$$\int_V \overline{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') p(\mathbf{r}') \left( \int_S \delta(\mathbf{r}' - \tau) d\tau \right) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{r}'$$

vaut 0  $\forall \mathbf{r}' \notin S$ , ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) + i\omega\mu \int_S \overline{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') p(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} d\mathbf{r}' = 0 \quad (\text{III.2.9})$$

En projetant à nouveau sur la normale  $\mathbf{n}$  on obtient :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) + i\omega\mu \int_S \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 0 \quad (\text{III.2.10})$$

On pose

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}$$

Comme le défaut est choisi dans le plan  $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ , la normale à la surface du défaut est orientée selon  $\mathbf{x}$ , et on note :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) = E_{20}^x = -i\omega\mu \int_S g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.2.11})$$

ce qu'on peut encore écrire [PM94] :

$$E_{20}^x(x, y, z) + i\omega\mu_0 \int_S g(x, y, z | x', y', z') p(y, z) dy' dz' = 0 \quad (\text{III.2.12})$$

### III.2.1.b Application de la méthode des moments et calcul dans le domaine spectral

L'équation III.2.11 va être résolue par méthode des moments. On choisit de décomposer la densité de dipôle  $p(y, z)$  sur des fonctions de base notées  $(f_y^n(y))_{n=1}^N$  et  $(f_z^m(z))_{m=1}^M$  respectivement dans la direction  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ , séparables en  $y$  et  $z$ . Alors on approxime  $p(y, z)$  par sa projection  $\tilde{p}(y, z)$  sur l'ensemble de fonctions de base 2-dimensionnelles  $(f_y^n(y), f_z^m(z))_{n=1, m=1}^{n=N, m=M}$  ce qui s'écrit :

$$\tilde{p}(y, z) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm} f_y^n(y) f_z^m(z) \quad (\text{III.2.13})$$

L'équation à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
E_{20}^x(x, y, z) &= -j\omega\mu_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm} \int_S g(x, y, z|x', y', z') f_y^n(y') f_z^m(z') dy' dz' \\
&= -j\omega\mu_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm} \left( \int_S G^{xx}(x, y, z|x', y', z') f_y^n(y') f_z^m(z') dy' dz' \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{j\omega\mu_0\sigma_0} \delta(x, x') f_y^n(y) f_z^m(z) \right)
\end{aligned} \tag{III.2.14}$$

**Définition des transformées de Fourier** Soit  $H(\alpha, \beta) = TF_{x,y}\{h(x, y)\}(\alpha, \beta)$  la transformée de Fourier en  $(x, y)$  de la fonction  $h(x, y)$ , c'est une fonction des variables  $(\alpha, \beta)$  définie par :

$$H(\alpha, \beta) = TF_{x,y}\{h(x, y)\}(\alpha, \beta) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp(j\alpha x) \exp(j\beta y) dx dy \tag{III.2.15}$$

De même on définit la transformée de Fourier inverse :

$$h(x, y) = TF_{\alpha,\beta}^{-1}\{H(\alpha, \beta)\}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} \int_{\beta=-\infty}^{\infty} H(\alpha, \beta) \exp(-j\alpha x) \exp(-j\beta y) d\alpha d\beta \tag{III.2.16}$$

En utilisant la méthode décrite dans [P92], on peut définir  $W(\alpha, \beta, z, z')$  telle que :

$$TF_{x,y} \left\{ \int_y g(x, y, z|x', y', z') f_y^n(y') dy' \right\}(\alpha, \beta) = TF_y \{f_y^n(y)\}(\beta) W(\alpha, \beta, z, z') \tag{III.2.17}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
E_{20}^x(x, y, z) &= -j\omega\mu_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm} TF_{\alpha,\beta}^{-1} \left\{ TF_{x,y} \left\{ \left( \int_S G^{xx}(x, y, z|x', y', z') f_y^n(y') f_z^m(z') dy' dz' \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{j\omega\mu_0\sigma_0} \delta(x, x') f_y^n(y) f_z^m(z) \right) \right\} \right\} \\
&= -j\omega\mu_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm} TF_{\alpha,\beta}^{-1} \left\{ TF_y \{f_y^n(y)\} \left\{ \int_z W(\alpha, \beta, z, z') \cdot f_z^m(z') dz' \right\} - \left( \frac{1}{j\omega\mu_0\sigma_0} f_z^n(z) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{III.2.18}$$

Les inconnues du problème deviennent les  $c_{nm}$ , que l'on va déterminer numériquement en inversant le système matriciel obtenu après projection de cette équation sur des fonctions tests.

**Projection sur fonctions tests** Les fonctions tests utilisées sont des fonctions de Diracs, définies aux points de collocation  $\mathbf{r}_{k,l}^c = \begin{pmatrix} y_k \\ z_l \end{pmatrix}$ . Nous choisissons autant que de points de collocation que de fonctions de bases, soient  $N \times M$ .

Le produit scalaire de l'équation et de chaque fonction de Dirac s'écrit :

soit

$$\begin{aligned}
E_{20}^x(x, y_k, z_l) &= -j\omega\mu_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm} \\
&\left\langle T_{\alpha,\beta}^{-1} \left\{ T_y(f_y^n(y)) \cdot \left( \int_z W(\alpha, \beta, z, z') \cdot f_z^m(z') dz' \right) - \left( \frac{1}{j\omega\mu_0\sigma_0} f_z^n(z) \right) \right\}, \delta(y - y_k) \cdot \delta(z - z_l) \right\rangle \\
&\forall k = 1 \text{ à } N, \text{ et } \forall l = 1 \text{ à } M
\end{aligned}$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle, si l'on choisit un nombre de points de collocation égal au nombre de fonctions de base choisi :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_x(x=0, y_1, z_1) \\ E_x(x=0, y_1, z_2) \\ \vdots \\ E_x(x=0, y_N, z_M) \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_{1\ 1} \\ c_{1\ 2} \\ \vdots \\ c_{N\ M} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \tag{III.2.19}$$

Le système  $\bar{\mathbf{S}}$  s'écrit :

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \langle syst(f_y^1, f_z^1), \delta(y_1) \cdot \delta(z_1) \rangle & \langle syst(f_y^1, f_z^2), \delta(y_1) \cdot \delta(z_1) \rangle & \dots & \langle syst(f_y^N, f_z^M), \delta(y_1) \cdot \delta(z_1) \rangle \\ \langle syst(f_y^1, f_z^1), \delta(y_1) \cdot \delta(z_2) \rangle & \dots & \dots & \langle syst(f_y^N, f_z^M), \delta(y_1) \cdot \delta(z_2) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle syst(f_y^1, f_z^1), \delta(y_N) \cdot \delta(z_M) \rangle & \dots & \dots & \langle syst(f_y^N, f_z^M), \delta(y_N) \cdot \delta(z_M) \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.20})$$

Avec :

$$syst(f_y^n, f_z^m) = -T_{\alpha, \beta}^{-1} \left\{ T_y(f_y^n(y)) \cdot \left\{ \left( \int_z W(\alpha, \beta, z, z') \cdot f_z^m(z') dz' \right) - \left( \frac{1}{j\omega\mu_0\sigma_0} f_z^m(z) \right) \right\} \right\} \quad (\text{III.2.21})$$

Alors résoudre , et déterminer  $p(y, z)$ , c'est déterminer les  $N \times M$   $c_{n,m}$ , solutions de l'équation matricielle III.2.22 :

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{III.2.22})$$

Le système  $\bar{\mathbf{S}}$  à inverser est carré et de dimension  $(N \times M) \times (N \times M)$ .

### III.2.1.c Détermination des variations d'impédance

La réponse du capteur  $\Delta Z^k$  lorsque le capteur est à la position numéro  $k$  est donnée par :

$$\Delta Z^k = -\frac{1}{I^2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm}^k \int_S (\mathbf{E}_{20}(y, z) \cdot \mathbf{n})^k f_y^n(y) f_z^m(z) dy dz \quad (\text{III.2.23})$$

Pour déterminer la réponse d'un capteur se déplaçant en  $K$  points, on a donc besoin de  $N \times M \times K$  coefficients.

**Conclusion de cette première partie** La résolution numérique de l'équation intégrale d'inconnue  $p(\mathbf{r})$  a été présentée, pour des fonctions de base  $f_y^n$  et  $f_z^m$  quelconques. Dans la partie suivante vont être présentées deux approches qui se distinguent par les fonctions de bases choisies : les fonctions triangulaires puis les modes trigonométriques. La position des points de collocation sera précisée.

## III.2.2 Deux choix de fonctions de base

Nous allons présenter deux choix de fonctions de base. La longueur et la profondeur sont respectivement notées  $b$  et  $a$  (concernent respectivement les directions  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{y}$ ) (figure III.2.1). On considère de plus l'enfouissement du défaut noté  $t$ , on note  $e$  l'épaisseur de la plaque.

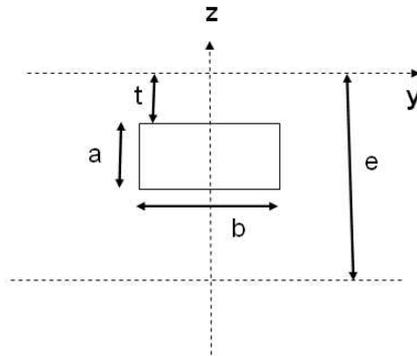


FIG. III.2.1 – Dimensions du défaut

### III.2.2.a Discrétisation avec fonctions triangles : Approche "locale"

Les fonctions triangles sont des fonctions 1D définies sur deux intervalles. On divise donc la surface en  $(N-1) \times (M-1)$  cellules rectangulaires de taille identique dont les sommets sont les points  $\mathbf{r}_{k,l} = \begin{pmatrix} y_k \\ z_l \end{pmatrix}$  avec les coordonnées  $k, l$  données par :

$$\begin{aligned} y_k &= -\frac{b}{2} + (k-1)\Delta y, & k &= 1, 2, \dots, N \\ z_l &= -t - (l-1)\Delta z, & l &= 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

On définit les dimensions en  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  des cellules :

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{b}{N-1} \\ \Delta z &= \frac{a}{M-1} \end{aligned}$$

L'expression des fonctions triangle est :

$$\begin{aligned} f_y^n(y) &= \begin{cases} 1 - \left| \frac{y_n - y}{\Delta y} \right| & \text{si } y \in [y_{n-1}, y_{n+1}] \quad \forall n = 1 \text{ à } N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_z^m(z) &= \begin{cases} 1 - \left| \frac{z_m - z}{\Delta z} \right| & \text{si } z \in [z_{m-1}, z_{m+1}] \quad \forall m = 2 \text{ à } M-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Une représentation d'une fonction triangle 1D est donnée en III.2.2. On appelle ce choix de fonctions

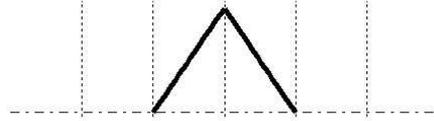


FIG. III.2.2 – Fonction triangle

de base la décomposition "locale", car le support de chaque fonction correspond à une cellule et non à l'ensemble du domaine de la fissure. Ces fonctions forment une base de B-splines d'ordre 2, c'est à dire de degré 1, à condition de rajouter les deux B-splines définies sur les bords du domaine. Elles diffèrent du triangle représenté en III.2.2 et sont représentées en figure III.2.3. Ces fonctions sont déterminées lorsque l'on applique la définition des B-splines d'ordre 2 [dB01]. Leur expression est (dans la direction  $\mathbf{z}$  avec  $z \in [-e, 0]$ ) :

$$\begin{aligned} f_z^1(z) &= \begin{cases} 1 - \left| \frac{z-t}{\Delta z} \right| & \text{si } z \in [z_1, -t] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_z^M(z) &= \begin{cases} 1 - \left| \frac{z-t}{\Delta z} \right| & \text{si } z \in [-t-a, z_M] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

En figure III.2.4 est représentée une telle base. La base est dite "complète" dans la direction  $\mathbf{z}$ . Dans la direction  $\mathbf{y}$ , par contre, une base incomplète constitue une décomposition de précision suffisante même s'il ne s'agit pas d'une base au sens rigoureux du terme. L'avantage d'utiliser une base incomplète réside dans la grande rapidité de son implantation et cette approximation s'avère souvent nettement suffisante.

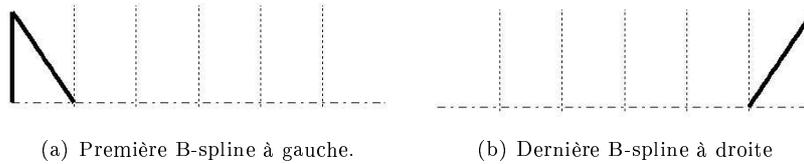


FIG. III.2.3 – B-splines de bord.

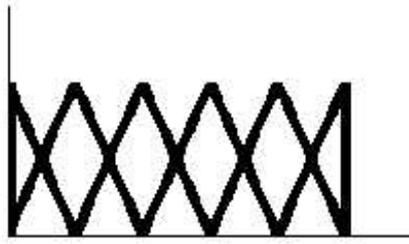


FIG. III.2.4 – Base complète de B-splines d'ordre 2.

**Points de collocation choisis** Pour la discrétisation en triangles, on choisit  $N$  points de collocations dans la direction  $\mathbf{y}$ , et  $M$  points de collocation dans la direction  $\mathbf{z}$ , situés aux sommets des cellules. L'expression de leurs coordonnées est donc :

$$\begin{aligned} y_n &= -\frac{b}{2} + (n-1)\Delta y, & n &= 1, 2, \dots, N \\ z_m &= -t - (m-1)\Delta z, & m &= 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

**Conclusion sur cette approche** Très classique et d'implantation numérique relativement simple, son principal inconvénient est que le nombre de fonctions à utiliser doit être élevé pour obtenir une précision satisfaisante. En effet, les variations de la densité de dipôle sont importantes sur les bords du défaut et plus douces au centre du domaine, par conséquent une discrétisation uniforme (cellules de taille identique) n'est pas très adaptée. De plus, cette approche ne permet pas de prendre en compte les conditions limites à vérifier par la densité de dipôle.

### III.2.2.b Discrétisation avec les modes de Fourier : Approche "globale"

Cette approche consiste à approximer la densité de dipôle par des séries trigonométriques :

$$p(y, z) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^M c_{nm} f_n^y(y) f_m^z(z)$$

Avec  $f_n^y(y)$  et  $f_m^z(z)$  modes de Fourier définis sur l'ensemble du défaut (d'où le nom "approche globale").

Cette approche utilise la forme des solutions des équations de diffusion [Euv87], chapitre 2 (page 63), [Ame77] chapitre 2 (page 58), appliquée au cas non évolutif (équation de Laplace), ou [Euv87] chapitre IV (voir page 284). Elle consiste à considérer la densité de dipôle, "via l'intégrale de Fourier, comme une superposition de composantes de type  $\exp(i\alpha y)$ ,  $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$ , ou encore de type  $\sin(\alpha x)$  et  $\cos(\alpha x)$ ."

Ce choix de fonctions présente de plus l'avantage d'être adapté aux variations non uniformes de la densité de dipôle. L'expression des fonctions de base va être établie, puis les points de collocation choisis seront précisés.

#### Prise en compte des conditions limites

Les conditions limites sur les bords du domaine sont :

$$\begin{cases} p &= 0 & \text{sur les bords enfouis} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 & \text{sur les bords débouchants} \end{cases} \quad (\text{II.2.24})$$

Le défaut rectangulaire est défini par 4 bords. Deux sont alignés dans la direction  $\mathbf{z}$ , en  $y = -b/2$  et en  $y = b/2$ , et deux dans la direction  $\mathbf{y}$ , en  $z = 0$  et  $z = -t - a$ .

**Bords alignés dans la direction  $\mathbf{z}$**  Ces deux bords sont toujours enfouis, donc la densité de dipôle vérifie toujours  $p(-b/2, z) = p(b/2, z) = 0 \forall z \in [-e, 0]$ . Les fonctions  $f_n^y(y)$  ont donc des demi-périodes de longueur  $b$ , donc

$$d_n^y = \frac{n\pi}{b}$$

Donc on a

$$f_n^y(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cdot \sin\left(\frac{n}{b}\pi\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \quad \text{pour } y \in \left[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right]$$

**Bords dans la direction y** Chacun des deux bords orientés selon l'axe  $\mathbf{y}$ , en  $z = 0$  et  $z = -t - a$  peut être débouchant ou enfoui. On peut donc considérer quatre types de défauts comme suit :

- Pour  $t = 0$  et  $a \neq e$ , le défaut est "débouchant face interne", c'est à dire que son bord débouchant est près du capteur. Ce type de défaut a trois bords enfouis, et un débouchant.
- Pour  $t = e - a$ , le défaut est "débouchant face externe". De même, ce type de défaut a trois bords enfouis et un débouchant.
- Pour  $0 < t < e - a$ , le défaut est enfoui. Ce type de défaut a quatre bords enfouis.
- Pour  $t = 0$  et  $a = e$ , le défaut est traversant, il représente 100% de la profondeur de la plaque, et comporte deux bords enfouis et deux bords débouchants.

Cela implique que l'expression des fonctions de base doit donc être différente pour chaque type de fonctions de base. En prenant en compte les conditions limites II.2.24 de la densité de dipole, on obtient les formulations suivantes :

Type de défaut	Expression	Valeurs prises par $z$
interne	$f_z^m(z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \cos\left(\frac{2m-1}{2a}\pi z\right)$	$z = -a \rightarrow 0$
externe	$f_z^m(z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \cos\left(\frac{2m-1}{2a}\pi(z+d)\right)$	$z = (-a-t) \rightarrow -t$ avec $d = a+t$
enfoui	$f_z^m(z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin\left(\frac{m}{a}\pi(z+t)\right)$	$z = -a-t \rightarrow -t$
100%	$f_z^m(z) = \sqrt{\frac{2}{d}} \cdot \cos\left(\frac{m-1}{d}\pi z\right)$	$z = -d \rightarrow 0$ avec $d = a+t$

On peut démontrer l'orthonormalité des modes [Euv87] :

$$\begin{aligned} \langle f_y^{n_1}, f_y^{n_2} \rangle & \left| \begin{array}{l} = 0 \quad \forall n_1, n_2 \text{ tels que } n_1 \neq n_2 \\ = 1 \text{ pour } n_1 = n_2 \end{array} \right. & \text{pour } n_1, n_2 = 1 \text{ à } N \\ \langle f_z^{m_1}, f_z^{m_2} \rangle & \left| \begin{array}{l} = 0 \quad \forall m_1, m_2 \text{ tels que } m_1 \neq m_2 \\ = 1 \text{ pour } m_1 = m_2 \end{array} \right. & \text{pour } m_1, m_2 = 1 \text{ à } M \end{aligned}$$

**Défauts non rectangulaires** La prise en compte des conditions limites est aisée pour des défauts rectangulaires. Considerer un défaut d'une autre forme nécessite d'utiliser des méthodes de transformation conforme des fonctions de base [BH00, Bon95].

### Points de collocation choisis

Pour la discrétisation en modes, on choisit  $N_\delta$  points de collocations dans la direction  $\mathbf{y}$ , et  $M_\delta$  points de collocation dans la direction  $\mathbf{z}$ , définis comme suit :

$$\left. \begin{aligned} y_n &= -\frac{b}{2} + \frac{\Delta y}{2} + (n-1)\Delta y, & n &= 1, 2, \dots, N_\delta, & \text{avec } \Delta y &= \frac{b}{N_\delta} \\ z_m &= -t - \frac{\Delta z}{2} - (m-1)\Delta z, & m &= 1, 2, \dots, M_\delta, & \text{avec } \Delta z &= \frac{a}{M_\delta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.2.24})$$

Dans la méthode on choisit  $N = N_\delta$  et  $M = M_\delta$ .

### Conclusion sur cette approche

Nous désignerons par "SIM" pour "Surface Integral Method", la méthode ainsi définie avec les modes de Fourier comme fonctions de base.

**Avantage du choix des modes de Fourier comme fonctions de base** La figure III.2.5 représente la densité de dipole reconstruite avec l'approximation globale les conditions limites sont strictement prises en compte. De plus, cette figure permet de voir les fortes variations de la densité de dipôle sur les bords du défaut, et son évolution plutôt douce au centre. Les modes de Fourier sont très adaptés pour prendre en compte de ces deux phénomènes.

La figure III.2.6 représente trois modes de Fourier 1D représentés pour  $n = 2$ ,  $n = 5$ , et  $n = 7$ . On voit que le mode correspondant à  $n = 7$  a une pente assez importante, qui permet donc de rendre compte de fortes variations. Par contre, le mode correspondant à  $n = 3$  peut rendre compte d'évolution plus douce. Le nombre de modes n'a donc pas besoin d'être très élevé pour représenter correctement la densité de dipôle.

Par conséquent, le nombre d'inconnues est très réduit et la méthode est très rapide.

La section III.2.3 suivante présente une étude qui tire profit de la rapidité de ce modèle pour déterminer de manière automatique le nombre de modes à choisir pour obtenir un résultat précis.

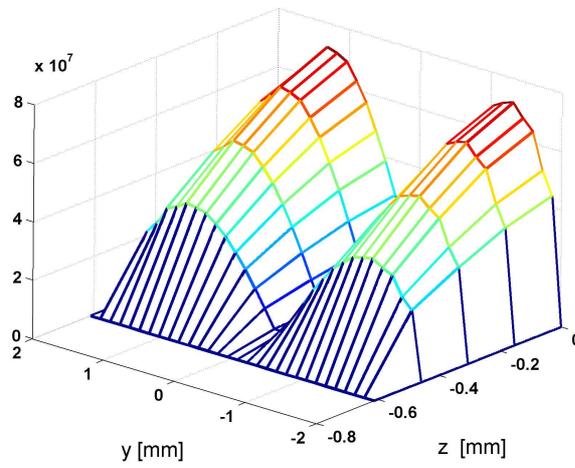


FIG. III.2.5 – Densité de dipôle reconstruite avec l'approximation "globale" [ $A/m^2$ ].

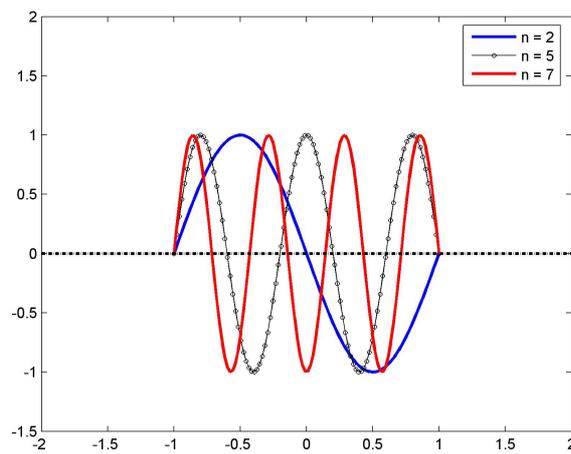


FIG. III.2.6 – Représentation de 3 modes.

### III.2.3 Procédure d'automatisation du choix du maillage

La qualité de la résolution numérique de l'intégrale donnant la densité de dipôle dépend du raffinement de la discrétisation choisie. La méthode "SIM approche globale" est rapide et il est facile d'augmenter le nombre de modes pour tester la convergence de la discrétisation. Il est donc envisageable de créer un outil automatique de détermination de la discrétisation qui donne un résultat fiable en un temps raisonnable.

L'objet de cette section est de présenter le travail réalisé.

Une illustration de l'augmentation de la précision du signal à l'augmentation du nombre de modes sera tout d'abord donnée, afin de se faire une première idée du phénomène. Puis les différents choix possibles pour les composantes nécessaires à la mise au point d'une procédure automatique de choix de la discrétisation seront présentés, et la procédure telle que je l'ai mise au point va être décrite.

Une méthode d'évaluation de l'erreur commise lorsque l'on choisit une discrétisation petite a été mise au point, et publiée [PMPL07]. Elle fait l'objet de la dernière sous section (III.2.3.c).

#### III.2.3.a Augmentation de la précision du signal à l'augmentation du nombre de modes : Illustration

Nous débutons notre étude par illustrer l'effet de l'augmentation du nombre de modes sur la réponse du capteur calculée.

Au CEA / SYSCC ont été obtenues des mesures expérimentales sur une plaque en Inconel 600, dont les caractéristiques sont données dans le tableau III.2.1. Les résultats de simulation utilisant cette configuration sont utilisés pour cette illustration.

<i>Configuration CEA</i>			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	500 kHz	Conductivité :	1.02 MS/m
Rayon interne :	1.0 mm	Epaisseur :	1.55 mm
Rayon externe :	1.624 mm	Défaut	
Hauteur :	2 mm	Longueur :	4.0 mm
Entrefer :	0.302 mm	Hauteur :	0.61 mm
Nombre de spires :	328	Epaisseur :	0.11 mm
Rapport profondeur/longueur : 15.25%			
Rapport ouverture / longueur : 5.75%			
Epaisseur de peau $\delta$ : 0.7 mm			

TAB. III.2.1 – Description de la configuration testée au CEA.

La méthode SIM assimile une entaille réelle à un défaut d'ouverture infiniment petite. Ce défaut est placé dans le plan  $x = 0$ , comme représenté sur la figure III.2.7. Ainsi, la densité de dipôle est une fonction des variables  $(y, z)$ , on l'approxime donc en choisissant un nombre de modes dans chacune de ces 2 directions.

Pour cet exemple, les positions du capteur pour lesquelles on calcule sa réponse sont alignées dans la direction perpendiculaire à la longueur du défaut, sur la ligne d'ordonnée  $y = 0$ , comme représenté sur la figure III.2.7.

Un premier résultat est obtenu, avec un nombre de modes  $(n_y \times n_z) = (5 \times 5)$ .

**Augmentation du nombre de modes dans la direction y** Le nombre de modes est doublé : On utilise maintenant le couple de nombre de modes  $(n_y \times n_z) = (10 \times 5)$ , soit 50 modes. La figure III.2.8 représente les valeurs absolues de la réponse du capteur simulée pour ces deux discrétisations.

La forme paraît identique, mais la différence sur les valeurs absolues des maximums des signaux s'élève à 16%, comme reporté dans le tableau III.2.3. La différence sur la phase s'élève à 1.3 degrés.

**Augmentation du nombre de modes dans la direction z** La même étude est menée dans cette direction **z**. Les valeurs absolues des réponses du capteur simulées pour les deux discrétisations  $(n_y \times n_z) = (5 \times 5)$  et  $(n_y \times n_z) = (10 \times 5)$  sont comparées sur la figure III.2.9.

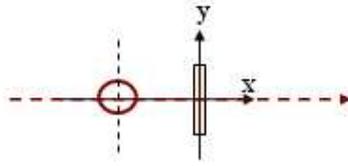


FIG. III.2.7 – Déplacement du capteur au milieu de la longueur du défaut, sur la ligne d'abscisse  $x = 0$ .

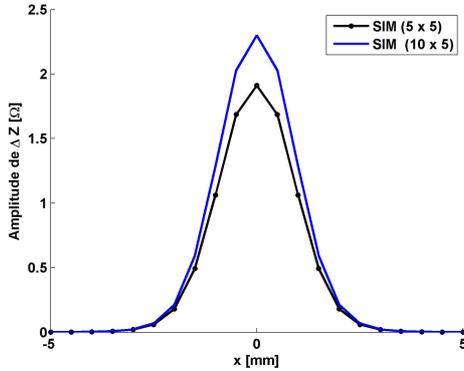


FIG. III.2.8 – Valeurs absolues des signaux SIM pour une augmentation du nombre de modes en  $y$ .

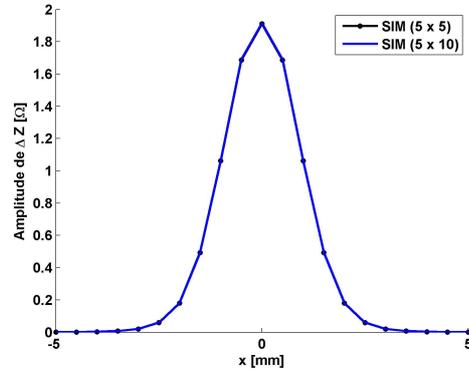


FIG. III.2.9 – Valeurs absolues des signaux SIM pour une augmentation du nombre de modes en  $z$ .

Les deux maximums de ces valeurs absolues sont données dans le tableau III.2.2, et la différence entre eux deux est inférieure à 1%. La différence sur la phase correspondante est inférieure à 0.2 degrés.

**Conclusion : Continuer à augmenter le nombre de modes dans la direction  $y$**  Cette première étude met en évidence que l'effet à l'augmentation de la discrétisation par un nombre de modes identiques ne donne pas le même effet dans chaque direction. Il faut donc continuer à augmenter dans la direction  $y$ , cela aura plus d'incidence sur le signal qu'une augmentation dans la direction  $z$ .

La figure III.2.10 représente les amplitudes des réponses aux bornes du capteur pour les discrétisations  $(n_y \times n_z) = (5 \times 5), (10 \times 5), (20 \times 5)$ , et  $(30 \times 5)$ . Les valeurs absolues des amplitudes et les phases correspondantes sont reportées dans le tableau III.2.3. La différence entre les signaux obtenus avec les discrétisations  $(n_y \times n_z) = (20 \times 5)$  et  $(n_y \times n_z) = (30 \times 5)$  n'est pas importante.

**Utilisation d'un très grand nombre de modes** Comparons maintenant à des signaux obtenus pour des discrétisations encore plus grandes, par exemple  $(n_y \times n_z) = (50 \times 50)$  et  $(80 \times 40)$ . Les signaux présentent très peu de différences avec ceux obtenus pour les discrétisations  $(n_y \times n_z) = (20 \times 5)$  et  $(n_y \times n_z) = (30 \times 5)$ , et ne sont donc pas représentés ici. Les amplitudes des maximums des signaux et les phases correspondantes sont données dans le tableau III.2.3.

En considérant ces indicateurs, on s'aperçoit que le signal obtenu avec la discrétisation  $(n_y \times n_z) = (30 \times 5)$  est proche de ceux obtenus pour les discrétisations  $(n_y \times n_z) = (50 \times 50)$  et  $(n_y \times n_z) = (80 \times 40)$ .

Discrétisation	5 x 5	5 x 10
Amplitude du maximum [Ω]	1.91	1.916
Phase correspondante [en degrés]	117.9	118
Pourcentage d'écart entre deux résultats successifs [%]		< 1%

TAB. III.2.2 – Eléments quantitatifs pour la comparaison des réponses aux bornes du capteur simulées par SIM pour une augmentation du nombre de modes en  $z$ .

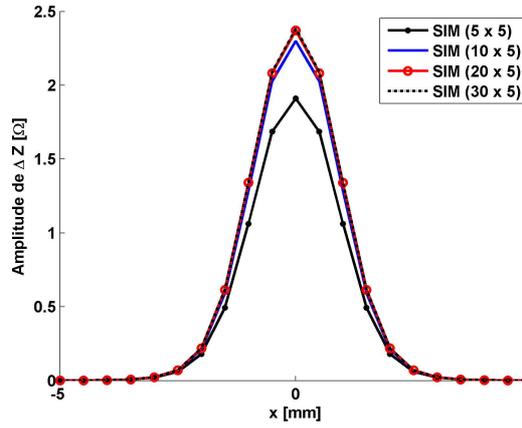


FIG. III.2.10 – Amplitude des signaux pour différentes valeurs de discrétisation

Discrétisation	5 x 5	10 x 5	20 x 5	30 x 5	50 x 50	80 x 40
Nombre total de modes	25	50	100	150	2500	3200
Amplitude du maximum [ $\Omega$ ]	1.91	2.3	2.37	2.38	2.39	2.38
Phase correspondante [en degrés]	117.9	119.25	119.45	119.30	119.4	121.8
Pourcentage d'écart entre deux maximum d'amplitude successifs [%]		16.94	2.99	0.52	0.41	0.5

TAB. III.2.3 – Éléments quantitatifs pour la comparaison des réponses aux bornes du capteur simulées par SIM pour différentes discrétisations.

L'amplitude du maximum du signal est un peu plus élevée pour (50 x 50) que pour (80 x 40), ce qui est surprenant dans le sens où d'après les premiers tests il semblait plus important de discrétiser finement en  $y$  qu'en  $z$ . Mais l'écart est très petit et non significatif. Par contre, il y a un écart de phase : pour (80 x 40) modes : 121.8 degrés au lieu de 119.4 degrés pour (50 x 50) modes.

En fait, si l'on regarde l'évolution de la phase lorsque le nombre de modes augmente, dans le tableau III.2.3, on conclut que ce n'est pas une fonction monotone du nombre de modes. Il n'est donc pas aisé d'utiliser l'évolution de la phase comme un élément donnant de l'information sur l'augmentation de la précision à l'augmentation du nombre de modes.

**Conclusion** Après le choix d'un couple de nombres de modes initiaux, nous avons comparé les réponses du capteur obtenues en augmentant le nombre de modes dans chaque direction. Il est apparu qu'une des deux directions était plus sensible à cette augmentation, et nous avons continué à augmenter le nombre de modes dans cette direction. À partir d'un certain nombre de modes, la forme des signaux et les indicateurs quantitatifs que nous avons choisis n'indiquaient plus d'évolution des signaux. Une dernière comparaison avec des signaux obtenus pour un nombre de modes très élevés a été effectuée, afin de s'assurer qu'on ne se situait pas dans une stabilité locale.

Nous avons également mis en avant l'évolution non monotone de la phase. Ceci constitue donc un contre exemple à l'utilisation de la phase comme indicateur de l'évolution.

Le but est donc d'établir une procédure réalisant automatiquement ce travail.

### III.2.3.b Étude de méthodes de procédure automatique

Une discrétisation suffisante est utilisée quand son augmentation ne produit pas un changement significatif sur la réponse simulée du capteur.

Les discrétisations, pour ce chapitre, ne sont plus notées  $(n_y, n_z)$  mais  $(N, M)$ , dans le but de réduire les quantités en exposant et en indice.

Prenons deux choix de discrétisation  $(n_y \times n_z) = (N_1 \times M_1)$ , et  $(N_2, M_2)$  tel que  $N_1 < N_2$  et  $M_1 = M_2$  par exemple. Le même raisonnement serait valable avec  $N_1 = N_2$  et  $M_1 < M_2$ , pour une augmentation

dans la direction  $\mathbf{z}$ .

Nous choisissons en effet d'étudier l'effet de l'augmentation du nombre de modes dans une seule direction, pour savoir s'il faut continuer à augmenter dans cette direction ou non.

Désignons par

$$\mathbf{S}_1 = (S_1(N_1, M_1)^k)_{k=1}^K$$

et

$$\mathbf{S}_2 = (S_2(N_2, M_2)^k)_{k=1}^K$$

les réponses de la sonde simulées avec les choix de modes  $(N_1 \times M_1)$ , et  $(N_2 \times M_2)$ , aux  $K$  points de déplacement de la sonde. Si  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  sont suffisamment proches, cela signifie que la discrétisation  $N_1$  dans la direction  $y$  était suffisante.

On peut donc distinguer trois éléments à définir pour établir une procédure de discrétisation :

- Choisir un critère de comparaison  $\mathcal{C}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$  entre les signaux  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$ .
- Se fixer une tolérance **tol** telle que si le critère  $\mathcal{C}$  est inférieure à **tol**, on décide qu'une précision suffisante est atteinte.
- Choisir une méthode d'incrémentation  $\mathcal{M}$  pour passer de la discrétisation  $(N_1 \times M_1)$  à une autre  $(N_2 \times M_2)$ , telle que  $(N_2 \times M_2) = \mathcal{M}(N_1 \times M_1)$ .

On peut représenter la procédure par un graphique, par exemple celui donné sur la figure III.2.11.

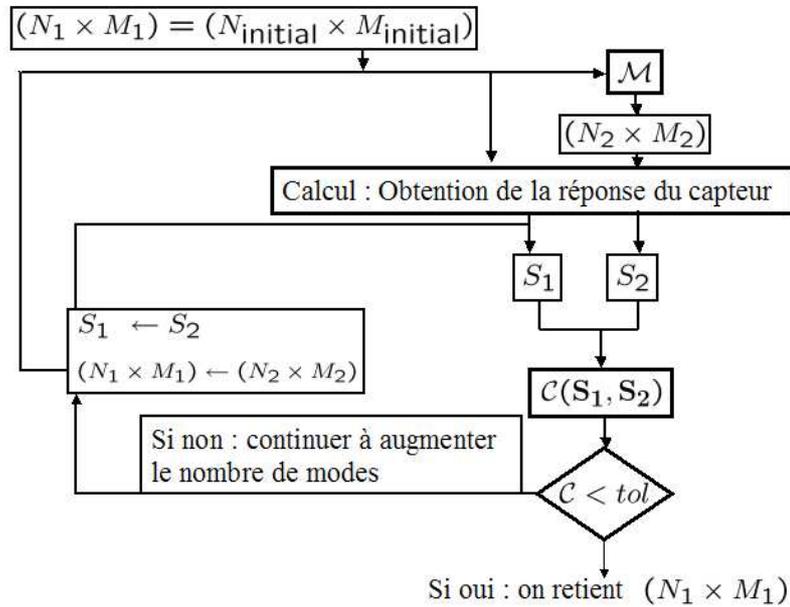


FIG. III.2.11 – Schéma de la procédure de maillage automatique.

### Choix d'un critère de comparaison

Etant donnée la nature complexe de la réponse du capteur en déplacement, le critère de comparaison va être défini par le choix :

1. de la / des composantes de la réponse du capteur à comparer,
2. de la distance entre ces composantes.

**Choix des composantes à comparer** On peut choisir de comparer les amplitudes de la réponse du capteur, ou de comparer les parties réelles et imaginaires. On peut également envisager de comparer non pas la réponse elle-même, mais des éléments intermédiaires de calcul, par exemple, des fonctions des coefficients  $c_{nm}$ . Ceci permet un gain de temps, puisque les calculs ne sont pas effectués en entier, et également un gain en précision.

Il s'agit dans tous les cas d'une fonction du maillage  $(N, M)$  choisi, que l'on note  $f(N, M)$ . Cette fonction peut être scalaire, par exemple si l'on choisit l'amplitude, c'est à dire le module du signal en chacun de  $K$  points du scan :

$$\mathbf{f}(N, M) = (\mathbf{f}(N, M))_{k=1}^K = \left( \sqrt{(S(N, M)^k \cdot S(N, M)^{k*})} \right)_{k=1}^K = (\|S(N, M)^k\|)_{k=1}^K$$

où  $S(N, M)^{k*}$  désigne la quantité conjuguée de  $S(N, M)^k$ , la valeur du signal obtenu avec la discrétisation  $(N, M)$  au  $k$  ème point du scan, et  $\|S(N, M)^k\|$  le module du signal au  $k$  ème point du scan.

Mais pour que le critère soit plus représentatif de la nature complexe du signal,  $\mathbf{f}(N, M)$  peut également être vectoriel, ce qui est le cas si l'on choisit de comparer conjointement les parties imaginaires et les parties réelles :

$$\mathbf{f}(N, M) = (\mathbf{f}(N, M))_{k=1}^K = \left( \begin{array}{c} \Re \{S(N, M)^k\} \\ \Im \{S(N, M)^k\} \end{array} \right)_{k=1}^K$$

où  $\Re \{S(N, M)^k\}$  et  $\Im \{S(N, M)^k\}$  désignent successivement les parties réelle et imaginaire de la réponse du capteur à la position  $k$ .

**Choix d'une distance** Une fois choisis les éléments sur lesquels porte la comparaison, il reste le choix de la distance  $\mathcal{C}(\mathbf{f}(N_1, M_1), \mathbf{f}(N_2, M_2))$  entre les éléments à comparer relatifs aux choix de modes  $(N_1 \times M_1)$  et  $(N_2 \times M_2)$ . On peut la définir au sens de la norme 1, et son expression est, par exemple lorsque l'on choisit de comparer les amplitudes des signaux :

$$\mathcal{C}(\mathbf{f}(N_1, M_1), \mathbf{f}(N_2, M_2)) = \sum_{k=1}^K | \|S_1(N_1, M_1)^k\| - \|S_2(N_2, M_2)^k\| |$$

avec  $|x|$  qui désigne la valeur absolue de la quantité  $x$ .

De manière générale, la distance au sens de la norme 1 entre deux réponses de capteurs lorsque l'on choisit de comparer la composante définie par la fonction  $\mathbf{f}(N, M)$  du signal s'écrit :

$$\mathcal{C}(\mathbf{f}(N_1, M_1), \mathbf{f}(N_2, M_2)) = \sum_{k=1}^K | \| \mathbf{f}(N_1, M_1)^k \| - \| \mathbf{f}(N_2, M_2)^k \| |$$

au sens de la norme 2, donné ici pour l'exemple de la comparaison de l'amplitude des signaux :

$$\mathcal{C}(f(N_1, M_1), f(N_2, M_2)) = \left( \sum_{k=1}^K (\|S_1(N_1, M_1)^k\| - \|S_2(N_2, M_2)^k\|)^2 \right)^{1/2}$$

au sens de la norme infinie :

$$\mathcal{C}(f(N_1, M_1), f(N_2, M_2)) = \max_{k=1, \dots, K} \|S_1(N_1, M_1)^k - S_2(N_2, M_2)^k\|$$

Nous venons de définir des distances en absolu, mais elles peuvent également être définies relativement à une des deux valeurs, comme nous l'avons fait dans l'exemple précédent, pour pouvoir les utiliser en terme de pourcentage. Le pourcentage d'écart entre les maxima des valeurs absolues des réponses des capteurs correspond en effet à la valeur relative de la distance au sens de la norme infinie :

$$\mathcal{C}(f(N_1, M_1), f(N_2, M_2)) = \max_{k=1, \dots, K} \frac{|S_1(N_1, M_1)^k - S_2(N_2, M_2)^k|}{|S_2(N_2, M_2)^k|}$$

La norme infinie ne prend en compte qu'un seul point du scan. Par conséquent, la différence sur la forme des signaux, notamment, n'est pas prise en compte, les distances au sens de la norme 1 et 2 sont plus adaptées pour ce critère.

La distance choisie pour la procédure de maillage automatique est la norme 2, car elle permet de prendre en compte la réponse du capteur en toutes les positions du capteur.

## Choix d'une méthode d'incrémentation et d'une tolérance

Le choix de la méthode d'incrémentation est important, car, si l'incrémentation ne permet d'augmenter le nombre de modes assez rapidement, plus de calculs que nécessaires sont effectués. Par contre, si le nombre de modes augmente trop rapidement, on peut dépasser un nombre de modes qui donnerait la réponse du capteur avec une précision suffisante.

Le choix de la tolérance doit être adapté à la méthode d'incrémentation.

Dans l'exemple traité dans la première partie, nous avons vu qu'une différence de 5 modes pouvait provoquer une différence de 17% sur les amplitudes de maxima des réponses des capteurs, dans une direction, et une différence de moins de 1% dans l'autre direction. Il semble intéressant de commencer par cette incrémentation.

Par la suite, il est apparu que la procédure gagnait en efficacité si l'augmentation était plus rapide. Un procédé arithmético géométrique a donc été sélectionné. Il donne le nouveau nombre de modes  $N_2$  en fonction de l'ancien  $N_1$ , suivant la loi :

$$N_2 = a_y N_1 + b_y \quad (\text{III.2.25})$$

où  $a_y$  et  $b_y$  sont respectivement les paramètres géométriques et arithmétiques relatifs à la direction  $\mathbf{y}$  de la loi d'incrémentation.

De même, dans la direction  $\mathbf{z}$ , on peut définir :

$$M_2 = a_z M_1 + b_z \quad (\text{III.2.26})$$

Les paramètres  $a_y, b_y, a_z$  et  $b_z$ , et les tolérances  $tol_y$  et  $tol_z$  relatives à chaque direction, sont modifiables par l'utilisateur, et mises par défaut à :

$$\begin{aligned} a_y &= 1, & b_y &= 5 \\ a_z &= 1, & b_z &= 4 \\ tol_y &= 0.03, & tol_z &= 0.02 \end{aligned}$$

## Choix d'un couple de nombres de modes initiaux

Au cours de l'utilisation de cette procédure, il est apparu que le couple de nombre de modes finaux  $(N_f, M_f)$  retenu dépendait, en plus des facteurs d'incrémentations, du couple de nombres de modes initiaux.

Une solution efficace pour parer à ces stabilités locales est d'effectuer des comparaisons avec un résultat obtenu pour un couple de nombres de modes  $(N_{\text{grand}}, M_{\text{grand}})$  bien plus élevé. On peut mettre en doute dans ce cas l'intérêt d'augmenter progressivement les nombres de modes, si, quelquesoit le résultat, on effectue un calcul plus long avec un couple de nombre de modes élevés.

En fait, il s'agit d'effectuer une comparaison réduite : On repère une (ou plusieurs) positions de capteur  $k$  pour lesquelles la réponse du capteur correspondante porte beaucoup d'informations. Par exemple, on peut sélectionner la position pour laquelle l'amplitude du signal est maximale. Ensuite, les calculs sont effectués uniquement pour obtenir la réponse du capteur  $S_{\text{grand}}^k = S(N_{\text{grand}}, M_{\text{grand}})^k$  à ces positions.

Comme le temps de calcul est lié au nombre de positions du capteur, on réduit ainsi le temps mis en œuvre. Si la différence entre  $S_{\text{grand}}^k$  et  $S(N_f, M_f)^k$ , évaluée au sens du critère  $\mathcal{C}$ , est inférieure à la tolérance

$$\mathbf{tol} = \begin{pmatrix} tol_y \\ tol_z \end{pmatrix}$$

alors la discrétisation  $(N_f, M_f)$  donne un résultat satisfaisant, et peut être utilisée pour évaluer la réponse du capteur en un nombre élevé de positions.

Si la différence est trop importante, il faut changer les paramètres et reprendre la procédure.

## Récapitulatif des paramètres choisis pour la mise au point de la procédure

- Composante de la réponse du signal que l'on compare : L'utilisateur peut décider de comparer conjointement les parties réelles et imaginaires de la réponse du capteur, ou son amplitude.
- Distance choisie : Distance relative au sens de la norme 2.
- Méthode d'incrémentation : Arithmético-géométrique.
- Tolérances : peuvent être fixées par l'utilisateur.
- Comparaison à une réponse du capteur pour un couple de modes élevés.

**Conclusion sur la méthode mise au point** Elle ne constitue pas un outil fiable. Trouver le / les bons critères n'est pas aisé. Néanmoins, une telle procédure est intéressante : elle permet d'effectuer automatiquement un travail qui doit être effectué lorsque l'on cherche à déterminer la discrétisation adéquate. Mais elle n'est pas suffisante.

Au regard des conclusions apportées par l'utilisation de cette procédure, une méthode d'évaluation de l'erreur réalisée lors du calcul de la réponse du capteur avec un choix d'un couple de nombre de modes  $(N, M)$  par rapport à un couple  $(N_{\text{grand}}, M_{\text{grand}})$ , a été mise au point.

### III.2.3.c Evaluation de la précision de la réponse du capteur en fonction de la discrétisation utilisée

Dans la méthode SIM, le nombre d'inconnues est lié au nombre de positions du capteur. Il est donc plus intéressant de mener l'étude pour déterminer la discrétisation qui conduit à une précision suffisante de la réponse du capteur avec un nombre réduit de positions, et d'utiliser cette discrétisation pour calculer la réponse du signal sur un nombre de positions plus étendu.

Dans cette optique, une méthode d'évaluation de la précision de la réponse du capteur a été développée et publié [PMPL07]. Pour cette méthode, on suppose que la réponse  $S_{\text{ref}} = \Delta Z_{\text{ref}}$  du capteur obtenue pour une discrétisation élevée  $(N_{\text{grand}}, M_{\text{grand}})$  constitue une réponse de référence fiable. Le but est de déterminer un choix de modes tel que la distance de la réponse du capteur ainsi obtenue, à la réponse de référence  $\Delta Z_{\text{ref}}$  soit en dessous d'une tolérance choisie.

Deux critères de comparaison vont être définis, pour caractériser cette distance. Dans le but de déterminer dans quelle direction la discrétisation doit être augmentée, deux "indicateurs de sensibilité", un relatif à chaque direction, vont également être définis.

Ces quantités utilisent la valeur des signaux à  $K$  positions de scan. Pour que l'étude soit rentable en terme de temps de calcul, il faut que ce nombre de positions soit assez réduit.

#### Deux quantités de mesure d'erreur

Le signal aux bornes du capteur lorsqu'il est à la même position est donné par :

$$S(N, M)^k = \Delta Z(N, M)^k = -\frac{1}{I^2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm}^k \int_S (\mathbf{E}_{20}(y, z) \cdot \mathbf{n})^k f_y^n(y) f_z^m(z) dy dz \quad (\text{III.2.27})$$

La première quantité utilisée pour apprécier la différence entre la réponse du capteur  $\Delta Z(N, M)$  et la réponse du capteur  $\Delta Z_{\text{ref}}$  calculée avec la discrétisation de référence est appelée "scan error", erreur de déplacement, notée  $D_{\text{scan}}$ . C'est une distance relative au sens de la norme 1. Elle correspond à la valeur moyenne de la différence des réponses du capteur pour un déplacement du capteur sur un nombre  $K$  réduit de points. En pratique, on choisira des points pour lesquels la réponse du capteur a une valeur bien différente de 0, pour ne pas moyenner avec des valeurs nulles.

$$D_{\text{scan}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left| \frac{\Delta Z^k - \Delta Z_{\text{ref}}^k}{\Delta Z_{\text{ref}}^k} \right| \quad (\text{III.2.28})$$

avec  $\Delta Z_{\text{ref}}^k$  la réponse du capteur à la  $k$  ème position du capteur calculée avec la discrétisation de référence. On introduit une seconde quantité de mesure d'erreur qui correspond au maximum de la valeur absolue de l'erreur :

$$D_{\text{max}} = \left| \frac{\Delta Z^{k_0} - \Delta Z_{\text{ref}}^{k_0}}{\Delta Z_{\text{ref}}^{k_0}} \right| \quad (\text{III.2.29})$$

où  $k_0$  est la position du capteur pour laquelle la valeur absolue de la réponse du capteur, calculée avec la discrétisation de référence, est maximum. Il s'agit de la distance relative au sens de la norme infinie.

Une tolérance pour chacune de ces deux quantités est ensuite fixée. Si chacune des quantités est inférieures à la tolérance qui lui correspond, on conclura que la discrétisation  $(N, M)$  fournit une approximation de la solution de précision satisfaisante.

En revanche, si l'une de ces quantités est supérieure à la tolérance qui lui correspond, il faut raffiner la discrétisation. Les deux indicateurs suivants permettent de décider quelle direction nécessite une augmentation du nombre de modes.

## Deux indicateurs de sensibilité directionnelle

On désire quantifier l'apport des  $N_s$  (respectivement  $M_s$ ) derniers modes sur le signal : si leur contribution est significative, alors il faut continuer à augmenter le nombre de modes  $N$  (respectivement  $M$ ) dans la direction  $\mathbf{y}$ .

On définit  $N_s$  et  $M_s$  par  $N_s = \text{round}(\alpha N)$  et  $M_s = \text{round}(\alpha M)$ , avec  $\text{round}(\cdot)$  la fonction qui renvoie l'entier le plus proche. Le nombre de modes dont on étudie la contribution est ainsi proportionnel dans les deux directions.

L'indicateur de sensibilité  $\delta Z_y$  dans la direction  $\mathbf{y}$  s'exprime :

$$\delta Z_y = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\frac{1}{N_s} \sum_{n=N-N_s+1}^N \sum_{m=1}^M \Delta Z_{nm}^k}{\Delta Z^k(N, M)} \quad (\text{III.2.30})$$

et permet de mesurer l'effet des  $N_s$  derniers modes, de  $n = N - N_s + 1$  à  $n = N$ . On définit de même un indicateur de sensibilité dans la direction  $\mathbf{z}$  :

$$\delta Z_z = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\frac{1}{M_s} \sum_{n=1}^N \sum_{m=M-M_s+1}^M \Delta Z_{nm}^k}{\Delta Z^k(N, M)} \quad (\text{III.2.31})$$

## Exemples numériques

Dans l'article sont données les valeurs numérique de ces quatre indicateurs pour trois configurations, dont celle utilisée dans cette section pour l'exemple illustratif. Nous reportons en tableau III.2.4 les valeurs numériques calculées pour ce benchmark pour illustrer nos propos.

N	M	$D_{\text{scan}}$ [%]	$D_{\text{max}}$ [%]	$\delta Z_y$ [%]	$\delta Z_z$ [%]
		Mesurent l'écart avec la référence		Sensibilité directionnelle	
50	15	- (Référence)		0.008	0.011
10	5	0.757	0.952	0.282	0.167
10	7	1.272	0.330	0.281	0.067
20	5	0.432	0.753	0.073	0.168
30	5	0.654	0.475	0.035	0.169

TAB. III.2.4 – Indicateurs numériques pour le cas du benchmark CEA

La discrétisation de référence utilisée est  $(n_y \times n_z) = (50 \times 15)$ . On étudie ensuite la "distance" entre la réponse du capteur calculée avec cette discrétisation (par SIM) et les réponses du capteur calculées (par SIM) avec des discrétisations  $(N, M)$  telles que  $N = 10, 20$ , ou  $30$  et  $N = 7, 6$ , ou  $7$ . La discrétisation que nous avons retenue lors de notre étude précédente était de  $(N, M) = (30, 5)$ . La "distance" est évaluée au moyen de  $D_{\text{scan}}$  et  $D_{\text{max}}$ .

La distance est trop élevée si un des deux pourcentages est supérieur à la tolérance que l'on se fixe. Dans ce cas, il faut choisir la direction dans laquelle on discrétise plus finement en regardant les indicateurs de sensibilité directionnelle.

Prenons l'exemple de la discrétisation  $(10 \times 5)$ . Nous savons que cette discrétisation n'est pas suffisante, car dès lors que l'on prend  $(15 \times 5)$ , l'amplitude du maximum augmente de 16%. Pourtant,  $D_{\text{scan}}$  et  $D_{\text{max}}$  ne s'élèvent respectivement qu'à 0.757 et 0.952. Les tolérances doivent donc être très faibles. Les indicateurs de sensibilité directionnelles s'élèvent à 0.282 % et 0.167 % pour les directions  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  respectivement. Cela indique qu'il faut discrétiser dans la direction  $\mathbf{y}$ , comme remarqué dans l'étude précédente.

En augmentant la discrétisation dans chacune des deux directions, l'effet de l'augmentation du nombre de modes dans la direction  $\mathbf{y}$  provoque une diminution nette de  $\delta Z_y$ .

En considérant les pourcentages du tableau III.2.4, on remarque qu'ils sont jusqu'à 10 fois plus petits que les pourcentages d'écart entre les amplitude des maximums des réponses considérés dans la partie précédente.

Les indicateurs de sensibilité directionnels sont en fait rapportés au nombre de modes concernés. Par exemple, dans le cas de la discrétisation  $(10 \times 5)$ ,  $N_s = \alpha N = 2$ . Donc avoir un  $\delta Z_y$  égal à 0.282 % signifie

que la contribution des modes numéro 9 et 10 sur l'impédance totale s'élève à 0.282 % pour chacun de ces deux modes. En effet, dans ce cas

$$\delta Z_y = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\frac{1}{2} \sum_{n=9}^{10} \sum_{m=1}^5 \Delta Z_{nm}^k}{\Delta Z^k(10, 5)} \quad (\text{III.2.32})$$

**Conclusion sur cet exemple** Deux distances ont été définies pour mesurer l'écart entre le signaux. Elles décroissent toutes deux lorsque l'on augmente le nombre de modes en  $y$  : pour les discrétisations  $(n_y \times n_z) = (10 \times 5)$ ,  $(n_y \times n_z) = (20 \times 5)$  et  $(n_y \times n_z) = (30 \times 5)$ . Cependant, si on les considère pour les discrétisations  $(n_y \times n_z) = (10 \times 5)$ ,  $(n_y \times n_z) = (10 \times 7)$ , c'est à dire une faible augmentation pour le nombre de modes dans la direction  $z$ , la distance  $D_{\text{scan}}$  augmente. Elle ne peut donc être utilisée telle quelle dans le cadre d'une procédure automatique.

Cette procédure permet une caractérisation intéressante de l'erreur commise

### III.2.3.d Conclusion sur la procédure d'automatisation

En mettant à profit la rapidité du modèle SIM, nous avons mis au point une procédure permettant de déterminer automatiquement la discrétisation à utiliser pour avoir une approximation numérique satisfaisante de la solution.

L'utilisation de cette procédure a mis en évidence qu'il convient de comparer la réponse du capteur ainsi obtenue à une réponse de capteur obtenue avec un nombre très élevé de modes.

Nous avons ensuite défini une méthode d'estimation de l'erreur commise lorsque l'on choisit une discrétisation grossière, dans le but de l'utiliser pour calculer la réponse d'une sonde se déplaçant en un grand nombre de points sur un plan. De plus, la procédure indique dans quelle direction elle doit être augmentée. La mesure de l'écart entre les signaux s'effectue grâce à deux distances spécifiquement définies.

Après tests de ces deux méthodes, nous devons cependant conclure qu'elles ne peuvent pas être utilisées indépendamment de l'expertise humaine de manière totalement automatique. En effet, la définition d'une mesure de distance fiable entre les signaux n'est pas aisée, et les choix que nous avons effectués ne sont pas concluants.

### III.2.4 Conclusion sur l'approche "Décomposition par modes"

Un formalisme, basé sur une méthode de collocation, avec calcul de la dyade dans le domaine spectral, a été mis au point pour modéliser les interactions d'un champ électromagnétique avec un défaut plan, dans une plaque de dimension finie.

Le choix des modes de Fourier pour l'approximation de la densité surfacique de dipôle permet d'une part de prendre en compte les conditions qu'elle doit vérifier sur les bords du défaut. D'autre part, ces fonctions permettent d'approximer correctement avec un nombre réduit de modes la densité de dipôle et ses variations rapides sur les bords du défaut.

Nous avons de plus mis au point une procédure de détermination du choix du maillage.

La méthode SIM présente beaucoup d'avantages. Pour sa validation, nous allons dans le chapitre suivant, chapitre 3, comparer les résultats qu'elle fournit à des résultats expérimentaux et issus d'une autre méthode de modélisation.

## Troisième partie - Chapitre 3

# Validations expérimentales

Le chapitre précédent présente le formalisme et la mise en œuvre numérique des courants induits avec un défaut plan.

L'objet de ce chapitre est de valider ce modèle, en comparant les signaux qu'il fournit, avec des données expérimentales et des signaux donnés par une autre méthode de modélisation, telle que le VIM, qui a déjà prouvé son efficacité dans de nombreuses configurations.

Ce chapitre est divisé en quatre sections.

Dans la première, les résultats numériques obtenus avec SIM et VIM seront comparés entre eux et tous deux confrontés à des données expérimentales, sur des configurations de benchmarks académiques simulant des contrôles pour une sonde fonctionnant en émission et réception communes (sonde à fonctions communes ou "mode absolu").

En considérant les résultats de cette première étude, des tests complémentaires sont menés dans les sections III.3.2.a et III.3.3. Enfin, dans la quatrième partie, on étudiera les signaux obtenus numériquement pour une sonde composée de deux bobines fonctionnant en émission réception (fonction séparée).

### III.3.1 Mode absolu : Comparaison SIM, et VIM

Nous allons considérer quatre configurations de contrôle différentes. Les caractéristiques numériques des méthodes de simulation SIM et VIM vont tout d'abord être rappelées afin d'explicitier la manière dont les études sont menées pour chaque configuration.

#### Caractéristiques numériques des deux modèles

- SIM modélise les interactions des courants induits avec des entailles qui ont une certaine épaisseur en les idéalisant par des défauts plans d'épaisseur infiniment petite. On choisit d'orienter le défaut plan dans le plan  $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  à l'abscisse  $x = 0$ , de telle manière que sa longueur soit dans la direction  $\mathbf{y}$ , sa profondeur dans la direction  $\mathbf{z}$ , et son épaisseur dans la direction  $\mathbf{x}$ , comme représenté sur la figure III.3.1.
- Les variations de la composante normale du courant au voisinage d'un défaut d'ouverture faible nécessitent un maillage fin pour le modèle VIM. Par conséquent, les dimensions du système à résoudre pour ce modèle deviennent rapidement telles que le problème doit être résolu par une méthode itérative pour obtenir une précision suffisante. Cela implique une forte augmentation du temps de calcul, qui croît d'une part avec le nombre de positions du capteur, et d'autre part, d'une manière plus prononcée encore lorsque le déplacement est 2-dimensionnel.

C'est pour cette raison que le modèle SIM est utilisé pour obtenir une première cartographie de la réponse du capteur, et non pas VIM, car à précision égale le volume de calcul serait bien trop important.

#### Les études sont menées comme décrit pour chaque configuration.

- Tout d'abord, les paramètres de la configuration sont précisés.

- Ensuite, une étude préliminaire des résultats de simulation est effectuée, avec un maillage grossier, pour visualiser l’allure du signal mesuré aux bornes du capteur quand il se déplace dans le plan  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  au dessus du défaut, comme représenté sur les figures III.3.1 et III.3.2.
- On extrait ensuite un scan unidimensionnel (le long de la fissure ou normalement à elle) d’intérêt.

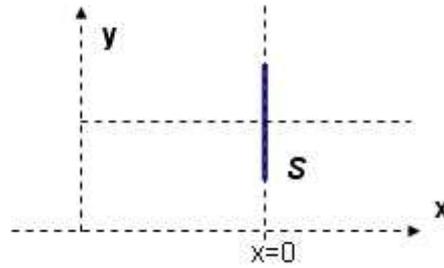


FIG. III.3.1 – Défaut dans le plan  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  utilisé pour les cartographies

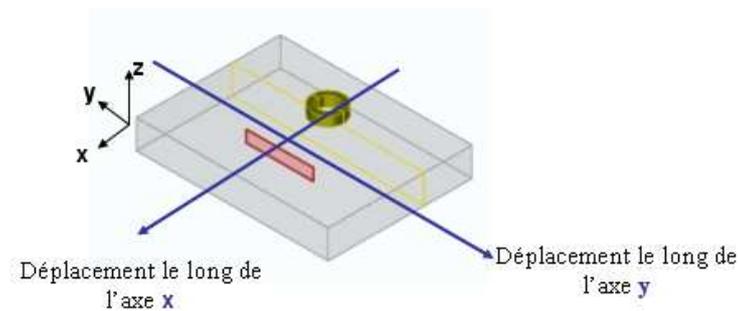


FIG. III.3.2 – Configuration avec une bobine et un défaut, choix d’un déplacement en ligne ou en colonne

- Sur le scan unidimensionnel sélectionné, on effectue de nombreuses expériences de simulation pour plusieurs maillages, de manière à obtenir une valeur maximale de l’amplitude de la réponse du capteur CF qui tend vers une valeur limite, comme expliqué dans le chapitre précédent. Cette étude ne figure pas, seules sont mentionnées les discrétisations retenues. Le terme de discrétisation est utilisé pour désigner soit le nombre de cellules utilisées dans le cas du modèle VIM, soit le nombre de modes dans le cas du modèle SIM.
- Enfin, les parties réelles et imaginaires des réponses des capteurs calculées avec SIM et VIM sont comparées sur une même figure, avec les données expérimentales lorsque l’on en dispose. Un tableau contenant des indicateurs quantitatifs sur les signaux obtenus est également donné : les amplitudes des valeurs maxima des réponses des capteurs  $\|S_{max}^{SIM}\|$  et  $\|S_{max}^{VIM}\|$  y sont reportées, ainsi que les phases correspondantes.

Le pourcentage d’écart entre les valeurs maximum des amplitudes

$$\frac{\|S_{max}^{SIM} - S_{max}^{VIM}\|}{\|S_{max}^{VIM}\|} \cdot 100$$

est également donnée, ainsi que les pourcentages d’écart avec la valeur maximale du signal expérimental. Ce pourcentage est un indicateur de distance entre les signaux. Il ne rend pas compte d’une éventuelle différence de forme des signaux. Dans le cadre de notre étude, c’est surtout la différence sur les maxima qui nous intéresse car elle est déjà significative et donne des informations intéressantes sur le comportement des modèles.

- Les temps de calculs effectifs pour chaque méthode sont donnés. Ils correspondent aux temps écoulés lors de calcul sur un PC standard : Pentium R, 3.20 GHz, RAM : 512 Mo.

Le but de cette étude est d’évaluer les performances du modèle SIM sur différentes configurations. C’est pourquoi, à travers les études de convergence, on cherche à obtenir le maximum de précision

avec chacun des modèles. La conséquence de cette démarche est que les amplitudes des maximums des réponses des capteurs obtenus avec VIM et SIM n'ont pas les mêmes valeurs. Les temps de calcul ne sont pas donnés dans le but de faire une étude sur la rapidité des modèles, mais comme une observation donnant des caractéristiques supplémentaires sur les deux méthodes.

### III.3.1.a Benchmark "Team Workshop N°15" : Benchmark académique

Les premières validations que nous allons donner concernent un benchmark académique étudié dans le cadre du "Team Workshop" [Bur87]. Ce benchmark a déjà été utilisé précédemment pour valider le modèle SIM développé par P. Beltrame à l'ECL. Les paramètres de simulation sont rappelés en tableau III.3.1.

L'avantage de ce benchmark est qu'il fournit des signaux d'amplitude importante, dû aux grandes dimensions du défaut et de la bobine. Le défaut est une entaille longue par rapport aux défauts rencontrés dans la plupart des applications industrielles. Son ouverture est de 0.28 mm, le rapport ouverture sur longueur est de 2%, alors que le rapport profondeur sur longueur est de 40%. L'ouverture est donc très petite par rapport aux deux autres dimensions, ce qui est une configuration favorable pour la validation du modèle SIM.

Le défaut est inclus dans une plaque en aluminium, d'épaisseur telle que cette configuration de contrôle revient à considérer un milieu conducteur semi-infini.

**La cartographie** du module du signal de la réponse du capteur obtenue avec SIMest donnée sur la figure III.3.3, pour un choix de discrétisation de  $(n_y \times n_z) = (15 \times 5)$ . Le scan unidimensionnel retenu correspond au déplacement de la bobine le long de l'axe d'abscisse  $x = 0$ . C'est le scan qui permet d'obtenir des informations sur la longueur du défaut.

**Commentaires** Au cours des tests numériques, l'amplitude du signal calculée par le modèle SIM a convergé assez vite vers une valeur limite avec un nombre total de modes égal à 75, soient  $(n_y \times n_z) = (15 \times 5)$ .

Pour atteindre la même convergence de l'amplitude de la valeur maximale du capteur calculée avec VIM, on doit utiliser 5000 cellules de discrétisation  $(n_x \times n_y \times n_z) = (20 \times 25 \times 10)$  cellules de discrétisation.

Les figures III.3.5 et III.3.6 représentent les parties réelles et imaginaires des signaux. Les éléments quantitatifs de comparaison sont reportés dans le tableau III.3.2. Malgré l'écart important sur la partie réelle, on note que la différence sur les valeurs absolues des maxima ne s'élève qu'à 1.6%.

Benchmark "Team Workshop N°15"			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	900 Hz	Conductivité :	30.6 MS/m
Rayon interne :	6.15 mm	Epaisseur :	12.22 mm
Rayon externe :	12.4 mm	Défaut	
Hauteur :	6.15 mm	Longueur :	12.6 mm
Entrefer :	0.88 mm	Profondeur :	5 mm
Nombre de spires :	3790	Epaisseur :	0.28 mm
Rapport profondeur/longueur : 40%			
Rapport ouverture / longueur : 2%			
Epaisseur de peau $\delta$ : 3 mm			

TAB. III.3.1 – Description de la configuration "Team Workshop N°15".

Méthode utilisée	VIM	SIM	Valeurs expérimentales
Discrétisation	(20 x 25 x 10)	(15 x 5)	
Amplitude du maximum [ $\Omega$ ]	$A_v = 12.23$	$A_s = 12.03$	$A_{exp} = 12.97$
Phase correspondante [en degrés]	117.9	118	98.2
Temps de calcul	40 minutes	< 2 minutes	
Pourcentage d'écart avec $A_{exp}$	1.6%	7.6%	
Pourcentage d'écart entre $A_v$ et $A_s$		6%	

TAB. III.3.2 – Eléments quantitatifs de comparaison des réponses aux bornes du capteur.

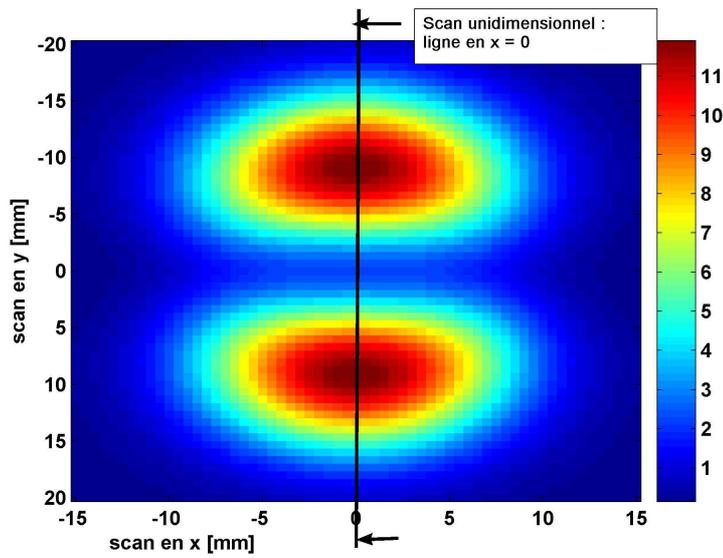


FIG. III.3.3 – Cartographie de l'amplitude de la réponse du capteur pour la configuration "Team Workshop N°15" calculée avec le modèle SIM (en  $\Omega$ ).

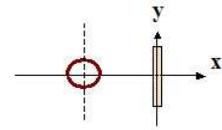


FIG. III.3.4 – Capteur et défaut dans le plan de la cartographie.

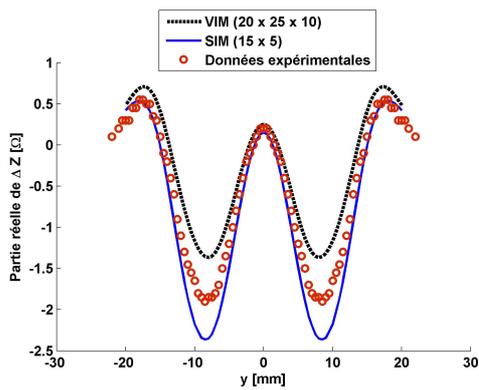


FIG. III.3.5 – Parties réelles des signaux SIM, VIM et expérimentaux sur le benchmark "Team Workshop N°15".

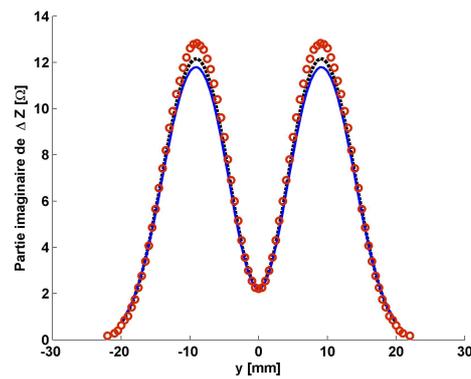


FIG. III.3.6 – Parties imaginaires des signaux SIM, VIM et expérimentaux sur le benchmark "Team Workshop N°15".

### III.3.1.b Configuration CEA

Nous nous intéressons maintenant à la configuration décrite dans le tableau III.3.3 et déjà étudiée au chapitre précédent. Elle comporte un défaut débouchant à la surface d'une plaque en inconel 600 de faible épaisseur. La simulation de la configuration de contrôle doit tenir compte de l'épaisseur finie de la plaque.

Ce type de configuration est plus fréquemment rencontré lors de contrôles effectifs. L'épaisseur de la plaque et sa composition en inconel correspondent par exemple aux caractéristiques d'un tube de générateur de vapeur.

Les résultats expérimentaux présentés ont été obtenus au CEA / SYSCC.

**Cartographie obtenue avec SIM** La cartographie de l'amplitude de la réponse du signal simulée avec le modèle SIM est représentée sur la figure III.3.7, pour un choix de 75 modes répartis en  $(n_y \times n_z) = (15 \times 5)$ .

Temps de calcul nécessaire : inférieur à 4 minutes.

Nombre de points de scan utilisés : 1200.

Le calcul d'une telle cartographie nécessiterait 25 minutes de temps de calcul avec le modèle VIM, pour un choix de discrétisation de 375 cellules réparties en  $(n_x \times n_y \times n_z) = (5 \times 15 \times 5)$  pour une première approximation.

On extrait une variation selon une ligne transverse au défaut, orientée selon l'axe  $\mathbf{x}$ , au centre de la longueur du défaut en  $y = 0$ .

**Commentaires** Sur les figures III.3.9 et III.3.10 sont représentées les parties réelles et imaginaires des signaux simulés et les signaux expérimentaux. Dans le tableau III.3.4 sont donnés des éléments quantitatifs pour l'appréciation de la comparaison des résultats. La forme des signaux coïncide bien, le modèle VIM fournit des résultats plus proches de l'expérience que SIM, mais il est moins rapide.

<i>Configuration CEA</i>			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	500 kHz	Conductivité :	1.02 MS/m
Rayon interne :	1.0 mm	Épaisseur :	1.55 mm
Rayon externe :	1.624 mm	Défaut	
Hauteur :	2 mm	Longueur :	4.0 mm
Entrefer :	0.302 mm	Profondeur :	0.61 mm
Nombre de spires :	328	Épaisseur :	0.11 mm
Rapport profondeur/longueur : 15.25%			
Rapport ouverture / longueur : 5.75%			
Épaisseur de peau $\delta$ : 0.7 mm			

TAB. III.3.3 – Description de la configuration CEA.

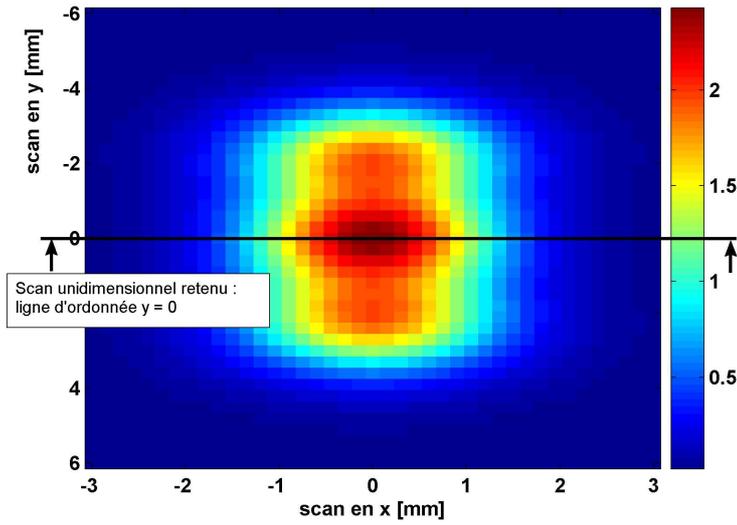


FIG. III.3.7 – Cartographie de l'amplitude de la réponse du capteur calculée avec SIM sur la configuration CEA.

FIG. III.3.8 – Capteur et défaut dans le plan de la cartographie.

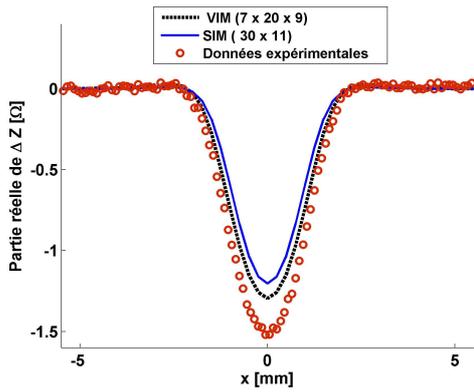


FIG. III.3.9 – Parties réelles des signaux SIM, VIM et expérimentaux sur la configuration CEA.

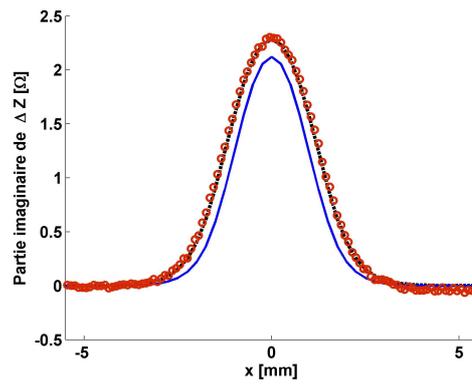


FIG. III.3.10 – Parties imaginaires des signaux SIM, VIM et expérimentaux.

Méthode utilisée	VIM	SIM	Valeurs expérimentales
Discretisation	(7 x 20 x 9)	(30 x 11)	
Nombre total	1260	330	
Amplitude du maximum [Ω]	$A_v = 2.65$	$A_s = 2.440$	$A_{exp} = 2.760$
Phase correspondante [en degrés]	119.56	119.58	123.4
Temps de calcul	<7 minutes	< 4 minutes	
Pourcentage d'écart avec $A_{exp}$	5.15%	11.61%	
Pourcentage d'écart entre $A_v$ et $A_s$		7.3%	

TAB. III.3.4 – Éléments quantitatifs de comparaison des réponses aux bornes du capteur pour la configuration CEA.

### III.3.1.c Benchmark CNDE

Nous nous intéressons maintenant à un troisième benchmark, dont les caractéristiques sont données dans le tableau III.3.5. Ce benchmark a fait l'objet d'études menées au CNDE, Iowa State University, en 1997. Il s'agit encore d'un benchmark représentant une configuration réaliste de contrôle. La différence par rapport avec le b11 réside dans le fait que les deux rapports "profondeur / longueur" et "ouverture/longueur" sont du même ordre de grandeur, alors que précédemment ils différaient d'un facteur 3.

**Cartographie obtenue avec SIM** En figure III.3.11 est donnée la cartographie de l'amplitude de la réponse du cateur calculée avec le modèle SIM sur ce benchmark, pour un nombre total de modes de 600 modes répartis en  $(n_y \times n_z) = (40 \times 15)$ .

**Résultats** Sur les figures III.3.13 et III.3.14 sont représentées les parties réelles et imaginaires des signaux obtenus avec les deux modèles et des données expérimentales. Dans le tableau III.3.6 sont donnés des éléments quantitatifs pour l'appréciation de la comparaison des résultats.

On peut conclure que les signaux coïncident par leur forme, mais que la différence d'amplitude est relativement élevée : la différence sur les maximums d'amplitude s'élève à 0.53% entre VIMet les données expérimentales, alors qu'elle s'élève à 39% pour SIM.

Les résultats obtenus pour ce benchmark ne sont pas favorables à la validation du modèle SIM. Pourtant, l'ouverture du défaut considéré (0.27 mm) est du même ordre de grandeur que celle du défaut considéré pour le benchmark 1, pour lequel les résultats donnés par SIM étaient proches de ceux donnés par VIM et des résultats expérimentaux. Mais par contre, les rapports profondeur / longueur et ouverture / longueur sont dans ce benchmark ont des valeurs assez semblables alors qu'ils ont des valeurs largement différentes dans le cas du banchmark 1.

On peut conclure que les hypothèses sur lesquelles s'appuie le modèle SIM ne sont pas respectées : Jozsef Pávó, dans [PL06], précise que pour ce type de configuration, les résultats issus du modèle sont moins bons. Cela peut s'expliquer comme suit : le modèle surfacique suppose qu'une seule des dimensions de la fissure est négligeable par rapport aux deux autres. Cette configuration comporte des défauts dont deux dimensions sont plus petites que la troisième : on s'éloigne donc du modèle surfacique en temps que tel.

<i>Benchmark CNDE</i>			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	300 kHz	Conductivité :	0.8 MS/m
Rayon interne :	0.6 mm	Epaisseur :	1.265 mm
Rayon externe :	1.6 mm	Défaut	
Hauteur :	0.8 mm	Longueur :	5.435 mm
Entrefer :	0.458 mm	Profondeur :	0.46 mm
Nombre de spires :	140	Epaisseur :	0.27 mm
Rapport profondeur/longueur : 8.5%			
Rapport ouverture / longueur : 5%			
Epaisseur de peau $\delta$ : 1 mm			

TAB. III.3.5 – Description de la configuration CNDE.

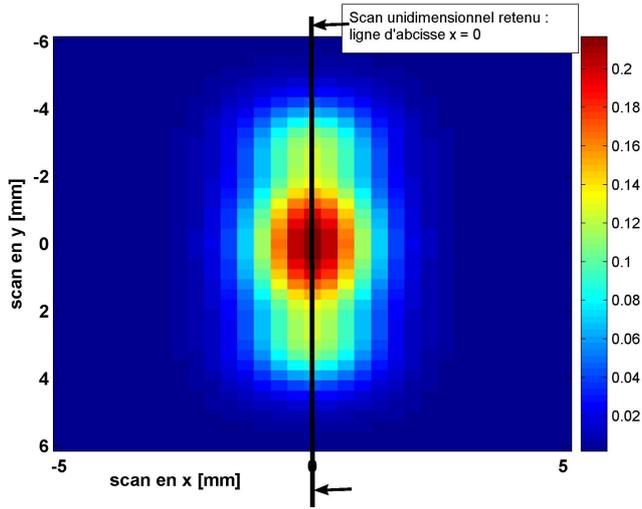


FIG. III.3.11 – Cartographie de l'amplitude de la réponse du capteur pour la configuration benchmark CNDE calculée avec le modèle SIM (en  $\Omega$ ).

FIG. III.3.12 – Capteur et défaut dans le plan de la cartographie.

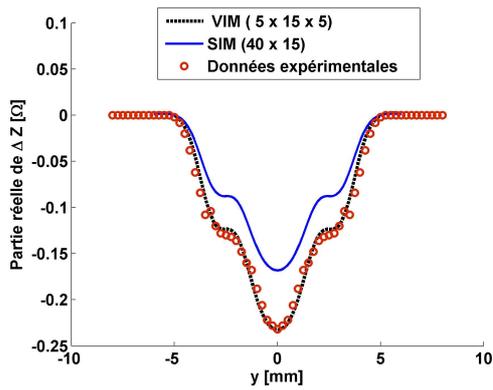


FIG. III.3.13 – Parties réelles des signaux SIM, VIM et expérimentaux sur le benchmark CNDE.

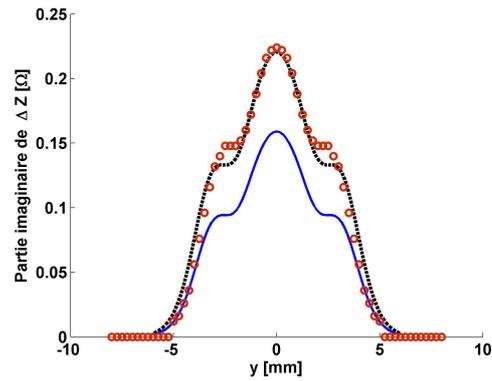


FIG. III.3.14 – Parties réelles des signaux SIM, VIM et expérimentaux sur le benchmark CNDE.

Méthode utilisée	VIM	SIM	Valeurs expérimentales
Discretisation	(5 x 15 x 5)	(40 x 15)	
Amplitude du maximum [ $\Omega$ ]	$A_v = 0.321$	$A_s = 0.232$	$A_{exp} = 0.322$
Phase correspondante [en degrés]	136.54	136.62	136.01
Temps de calcul	<8 minutes	<6 minutes	
Pourcentage d'écart avec $A_{exp}$	0.53%	39.3%	
Pourcentage d'écart entre $A_v$ et $A_s$		27.4%	

TAB. III.3.6 – Éléments quantitatifs de comparaison des réponses aux bornes du capteur pour la configuration CNDE.

### III.3.1.d Benchmark JSAEM

Ce quatrième benchmark a été l'objet d'études menées par la Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics (JSAEM) [TUM97]. Il comporte un défaut 100 %. Ses caractéristiques sont reportées dans la table III.3.7.

**Cartographie obtenue avec SIM** Le nombre de modes utilisé est  $(n_y \times n_z) = (12 \times 8)$ , soit un nombre total de 96 modes.

Cette cartographie de l'amplitude de la réponse du capteur, représentée en figure III.3.15, a été obtenue avec 1581 positions du capteur et le temps de calcul mis en oeuvre est inférieur à 2 minutes.

**Comparaison des résultats** On choisit donc d'analyser le signal extrait de l'axe d'abscisse 0. Il correspond à un déplacement du capteur le long du défaut. Les figures III.3.17, III.3.18, et III.3.19 représentent respectivement les amplitudes, les parties réelles et imaginaires des signaux obtenus par SIM et VIM.

Le tableau III.3.8 contient des éléments quantitatifs de comparaison entre les signaux.

**Commentaires sur les résultats** Les discrétisations utilisées sont moins élevées que pour b11 et b9. Ceci s'explique par la plus grande épaisseur de peau.

Le pourcentage d'écart entre les maxima des valeurs absolues des réponses simulées du capteur reste raisonnable (3.39%). Mais on note des différences importantes au niveau des formes des signaux. Le modèle SIM donne des valeurs supérieures à celle données par VIM, et plus proches des données expérimentales, contrairement aux trois benchmarks précédents. Ceci est dû aux difficultés de modélisation des défauts 100% : Cette configuration de contrôle présente des difficultés pour le modèle VIM car elle nécessite un maillage beaucoup plus dense dans l'épaisseur de la plaque.

Benchmark JSAEM			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	150 kHz	Conductivité :	1 MS/m
Rayon interne :	0.6 mm	Epaisseur :	1.25 mm
Rayon externe :	1.6 mm	Défaut	
Hauteur :	0.8 mm	Longueur :	10 mm
Entrefer :	0.5 mm	Profondeur :	1.25 mm
Nombre de spires :	140	Epaisseur :	0.21 mm
Rapport profondeur/longueur : 12.5%			
Rapport ouverture / longueur : 2%			
Epaisseur de peau $\delta$ : 1.3 mm			

TAB. III.3.7 – Description de la configuration benchmark JSAEM.

Méthode utilisée	VIM	SIM	Valeurs expérimentales
Discrétisation	(11 x 25 x 5)	(15 x 15)	
Amplitude du maximum [ $\Omega$ ]	$A_v = 0.57$	$A_s = 0.59$	$A_{exp} = 0.64$
Phase correspondante [en degrés]	133.51	136.86	135.8
Temps de calcul	< 8 minutes	< 4 minutes	
Pourcentage d'écart avec $A_{exp}$	13.48%	9.75%	
Pourcentage d'écart entre $A_v$ et $A_s$	3.39%		

TAB. III.3.8 – Éléments quantitatifs de comparaison des réponses aux bornes du capteur pour la configuration benchmark JSAEM.

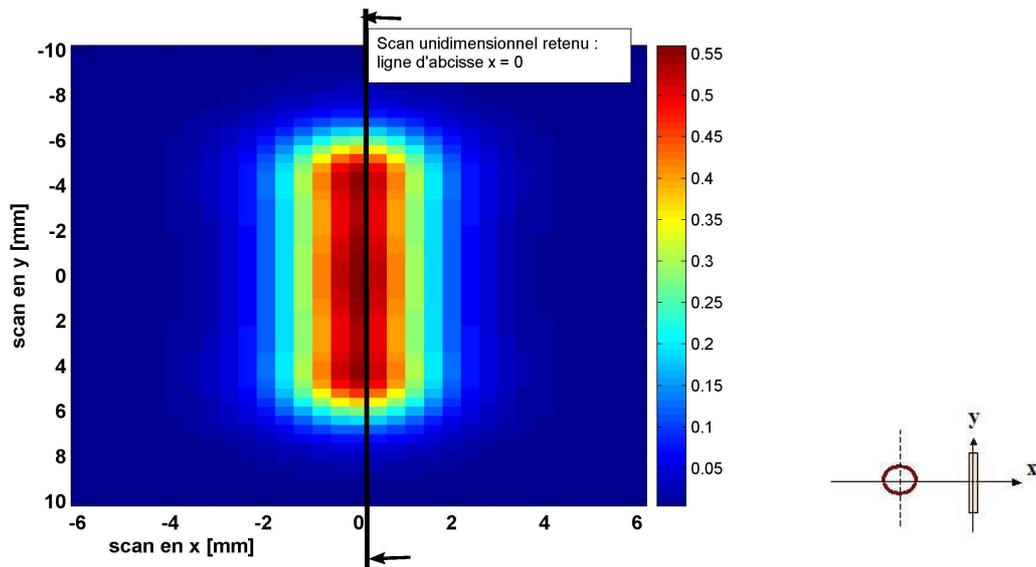


FIG. III.3.15 – Cartographie de l'amplitude calculée par SIM.

FIG. III.3.16 – Capteur et défaut dans le plan de la cartographie.

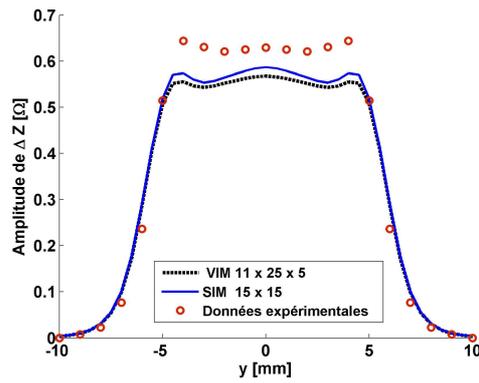


FIG. III.3.17 – Amplitude des signaux obtenus pour le benchmark JSAEM.

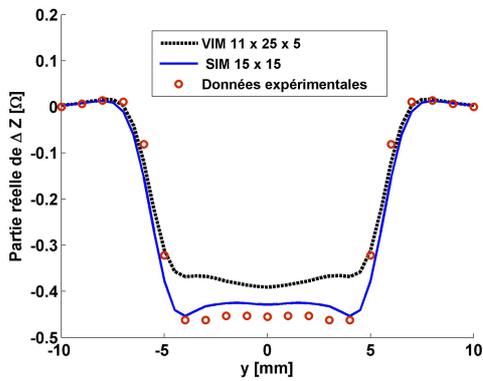


FIG. III.3.18 – Parties réelles des signaux obtenus pour le benchmark JSAEM.

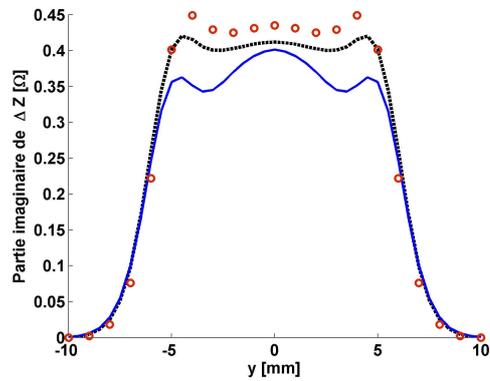


FIG. III.3.19 – Parties imaginaires des signaux obtenus pour le benchmark JSAEM.

### III.3.1.e Conclusion sur ces premières validations

**Comparaison des amplitudes des maximas des réponses** Sur les 4 benchmarks testés, le modèle SIM donne des résultats assez proches de ceux donnés par VIM et des données expérimentales. Pour les benchmarks "Team Workshop N°15" et CEA, la différence sur les maximums d'amplitude est respectivement de 7.6% et 11.61% avec les données expérimentales, pour des ouvertures de défaut de 0.28 mm et 0.11 mm respectivement.

Elle s'élève à 39% pour le benchmark CNDE, ce qui illustre que les résultats obtenus avec SIM sont moins bons lorsque l'on s'éloigne des hypothèses de travail du modèle SIM.

**Au sujet des temps de calcul,** il convient de noter que les expériences de validation ont été choisies de manière à ce que la méthode VIM puisse fournir des résultats satisfaisants avec un nombre de cellules pas trop élevé, pour que la comparaison soit efficace. Dans ce cas, les temps de calcul entre les deux méthodes SIM et VIM sont du même ordre de grandeur.

En revanche, le modèle VIM nécessite une forte augmentation du nombre de cellules lorsque la longueur du défaut augmente ou lorsque l'épaisseur du défaut décroît. Dans de telles situations de contrôle, comparables à la configuration "Team Workshop N°15", le modèle SIM présente un temps de calcul nettement plus avantageux.

De plus, les déplacements de capteurs pour lesquels on a comparé les réponses des modèles étaient 1 - dimensionnels. Ainsi, le nombre de positions était réduit, de l'ordre de 40 ou 60.

En revanche, pour obtenir une cartographie 2D de la réponse du capteur, il faut considérer un nombre de déplacements unidimensionnels plus important.

Or, pour atteindre une précision suffisante avec la méthode VIM, il faut recourir à une méthode itérative, très coûteuse en temps, notamment quand deux positions consécutives de capteur sont éloignées, ce qui est le cas lorsque l'on passe d'un déplacement de capteur unidimensionnel à un autre (en d'autres termes lorsque le capteur revient en début de ligne).

**En conclusion,** le modèle SIM permet d'obtenir les réponses d'un capteur en déplacement dans un plan au-dessus du défaut avec une précision à 15% près par rapport aux données expérimentales, sur une large gamme de configurations, pour un temps de mise en œuvre très intéressant.

D'un point de vue utilisateur, il faut maintenant s'interroger sur le raccordement possible entre les deux modèles, afin d'orienter le choix du modèles selon les caractéristiques du défaut à modéliser.

Nous avons cherché à faire une étude complémentaire pour étudier le comportement du modèle VIM lorsque l'épaisseur du défaut diminue. La section suivante propose de comparer la réponse du capteur calculée avec le modèle SIM à celle provenant du modèle VIM lorsque l'épaisseur tend vers 0.

### III.3.2 Comportement de SIM vis à vis de VIM pour des défauts dont l'ouverture décroît

Dans cette section, nous allons étudier la valeur de l'écart entre les réponses d'un capteur calculées par la méthode VIM sur des défauts d'ouverture de plus en plus petite, et celles calculées avec SIM (qui suppose une ouverture infiniment petite). Cette étude numérique n'est pas aisée a priori, car pour obtenir un résultat satisfaisant avec VIM sur des défauts d'ouverture réduite, il faut discrétiser finement dans l'ouverture pour obtenir une approximation satisfaisante des importantes variations de la densité volumique des courants fictifs. Les données seront également comparées à des valeurs expérimentales.

#### III.3.2.a Etude numérique : Benchmark CNDE à 150 kHz

La première étude numérique s'appuie sur une configuration également étudiée au "Center for Nondestructive Evaluation" (CNDE) de Iowa State University. Les caractéristiques sont identiques à celles de la configuration "CNDE" présentée précédemment, ou en annexe A, à l'exception du choix de la fréquence qui n'est plus de 300 kHz mais de 150 kHz. Ce changement de fréquence permet d'atteindre plus facilement la convergence de la réponse du capteur en fonction de la discrétisation. Les paramètres de simulation correspondant à ce benchmark sont décrits dans le tableau III.3.9.

Pour mener notre étude, nous allons considérer différentes ouvertures reportées dans le tableau III.3.10.

La figure III.3.20 représente les courbes de l'amplitude des réponses du capteur CF calculées par VIM pour ces ouvertures. La courbe de l'amplitude de la réponse calculée par SIM figure aussi, ainsi que la courbe des données expérimentales. Les valeurs de l'amplitude du maximum des réponses sont données dans le tableau III.3.11. On y trouvera également les phases correspondantes.

La figure III.3.21 est une représentation graphique des valeurs contenues dans ce tableau.

**Discrétisations utilisées** Pour les calculs VIM, les discrétisations utilisées sont  $(n_x \times n_y \times n_z) = (5 \times 25 \times 5)$ . C'est la discrétisation nécessaire à l'obtention d'une précision suffisante pour la configuration qui comporte un défaut d'ouverture 0.09 mm, qui est la configuration la plus difficile à simuler avec le modèle VIM. Cette discrétisation a été conservée pour les autres ouvertures.

Pour le calcul avec le modèle SIM, la discrétisation utilisée est  $(n_y \times n_z) = (30 \times 5)$ .

**Conclusion sur cette première étude** La décroissance de l'ouverture du défaut a une action sur l'amplitude du signal, mais la phase varie peu. L'amplitude du maximum du signal calculé par VIM pour une ouverture de 0.27 mm est très proche de la valeur expérimentale.

#### III.3.2.b Etude numérique sur la configuration CEA

On mène la même étude sur la configuration CEA précédemment étudiée et dont les paramètres de configuration sont récapitulés dans le tableau III.3.12. Les ouvertures considérées pour les simulations avec VIM sont données dans le tableau III.3.13.

Le tableau III.3.14 contient les amplitudes des maxima des réponses du capteur pour les configurations simulées avec VIM correspondants aux différentes ouvertures de défauts, de la réponse du capteur calculée avec SIM, et de la valeur expérimentale. Les phases correspondantes sont également données.

La figure III.3.22 est une représentation graphique de ces amplitudes.

#### III.3.2.c Conclusion de cette étude

Les comparaisons des réponses du capteur calculées par VIM et SIM au cours de cette étude nous permettent de mettre en évidence que :

- Les amplitudes de maxima des signaux donnés par SIM s'inscrivent dans la tendance définie par les amplitudes des maxima des signaux obtenus avec VIM sur ces configurations qui ne diffèrent que par l'ouverture du défaut.

Benchmark CNDE à 150 kHz			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	150 kHz	Conductivité :	0.8 MS/m
Rayon interne :	0.6 mm	Epaisseur :	1.265 mm
Rayon externe :	1.6 mm	Défaut	
Hauteur :	0.8 mm	Longueur :	5.435 mm
Entrefer :	0.458 mm	Profondeur :	0.46 mm
Nombre de spires :	140	Epaisseur :	0.27 mm
Rapport profondeur/longueur : 8.5%			
Rapport ouverture / longueur : 5%			
Epaisseur de peau $\delta$ : 1.5 mm			

TAB. III.3.9 – Description de la configuration du Benchmark CNDE à 150 kHz.

0.27	0.25	0.21	0.17	0.11	0.09
------	------	------	------	------	------

TAB. III.3.10 – Ouvertures considérées pour le benchmark CNDE à 150 kHz [mm].

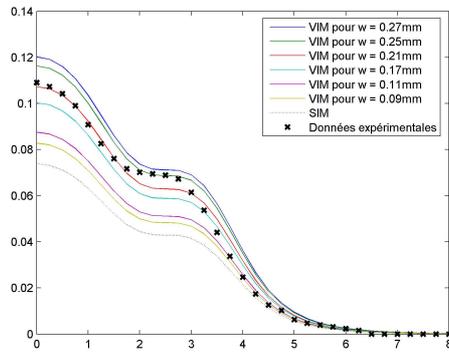


FIG. III.3.20 – Courbes des amplitudes des réponses de la sonde mesurées pour le CNDE à 150 kHz.

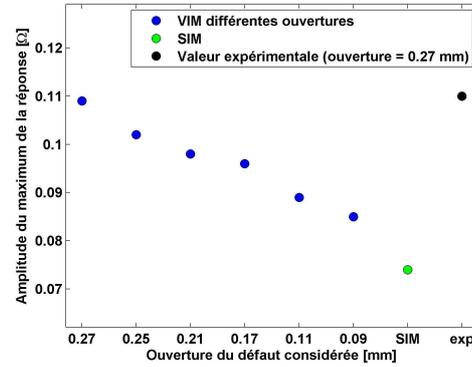


FIG. III.3.21 – Maxima d'amplitude.

Méthode d'obtention des données	VIM						SIM	Expé- rience
Discrétisation utilisée	$(n_x \times n_y \times n_z) = (5 \times 25 \times 5)$						$(n_y \times n_z) = (30 \times 5)$	
Ouverture considérée [mm]	0.27	0.25	0.21	0.17	0.11	0.09	Infiniment petite	0.27
Amplitude du maximum de la réponse du capteur [Ω]	0.109	0.102	0.098	0.096	0.089	0.085	0.074	0.11
Phase correspondante [°]	150.62	150.54	150.55	150.23	149.86	149.75	150.21	149.04

TAB. III.3.11 – Valeurs des maxima d'amplitude et phases correspondantes pour le benchmark CNDE à 150 kHz.

Configuration CEA			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	500 kHz	Conductivité :	1.02 MS/m
Rayon interne :	1.0 mm	Epaisseur :	1.55 mm
Rayon externe :	1.624 mm	Défaut	
Hauteur :	2 mm	Longueur :	4.0 mm
Entrefer :	0.302 mm	Profondeur :	0.61 mm
Nombre de spires :	328	Epaisseur :	0.11 mm
Rapport profondeur/longueur : 15.25%			
Rapport ouverture / longueur : 5.75%			
Epaisseur de peau $\delta$ : 0.7 mm			

TAB. III.3.12 – Description de la configuration CEA.

0.3	0.26	0.22	0.18	0.15	0.11
-----	------	------	------	------	------

TAB. III.3.13 – Ouvertures considérées pour la configuration CEA [mm].

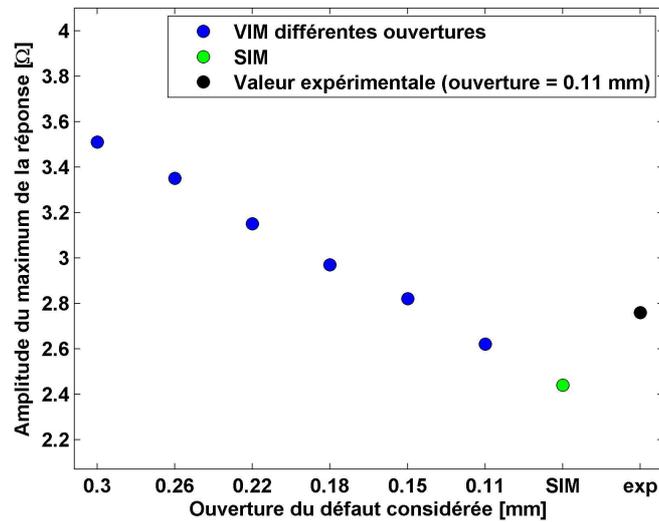


FIG. III.3.22 – Maxima d'amplitude pour la configuration CEA.

Méthode d'obtention des données	VIM						SIM	Expérience
Discretisation utilisée	$5 \times 20 \times 9$			$7 \times 20 \times 9$			$30 \times 11$	
Ouverture considérée [mm]	0.3	0.26	0.22	0.18	0.15	0.11	Infiniment petite	0.11
Amplitude du maximum de la réponse du capteur [Ω]	3.51	3.35	3.15	2.97	2.82	2.62	2.44	2.76
Phase correspondante [°]	122	121.7	121	120.5	120	119.56	119.58	123.41

TAB. III.3.14 – Valeurs des maxima d'amplitude et phases correspondantes.

- Nous retrouvons illustré ici, comme au chapitre précédent, le fait que les valeurs expérimentales ne coïncident pas avec la valeur SIM. Cela s'explique par le fait que le modèle SIM suppose une ouverture infiniment petite, ce qui n'est pas le cas sur une entaille électro-érodée.

Pour compléter cette étude numérique, on a réalisé un dispositif expérimental permettant d'étudier l'influence de l'épaisseur du défaut sur la valeur de l'amplitude du maximum du signal.

### III.3.3 Etude de réponses de capteur obtenues expérimentalement et comparaison à SIM

Le modèle SIM permet de modéliser l'interaction d'un champ électromagnétique avec un défaut d'ouverture supposée infiniment petite. Or un tel défaut n'est pas réalisable en pratique, par exemple on ne peut en obtenir par électro-érosion. Il est donc difficile de valider ce modèle par des données expérimentales.

On réalise un dispositif expérimental spécifique qui consiste à rapprocher les deux faces de deux blocs conducteurs indépendants. L'insertion d'une ou plusieurs feuilles de kapton permet de faire varier l'épaisseur de ce défaut.

Ainsi, on va mener la même étude que celle réalisée dans la section précédente, mais en considérant les données expérimentales obtenues avec ce dispositif.

Cette section est divisée en deux parties : Dans la première partie, le dispositif va être décrit. Des remarques sur les manipulations seront faites et les paramètres utilisés pour la simulation seront précisés. Dans une seconde partie, nous validerons numériquement les hypothèses faites sur les paramètres, et enfin les signaux seront comparés.

#### III.3.3.a Description de la configuration testée

##### Description de la plaque

La maquette est réalisée à partir d'un bloc en inox 316L homogène (taux de ferrite inférieur à 0,2%). Deux blocs bord à bord sont rapprochés à la manière d'un étai. Leur mise en contact est effectuée à l'aide d'un ressort qui permet de régler l'effort de pression entre les deux faces. Une ou plusieurs feuilles de matériau isolant (du kapton) peuvent être placées entre les deux faces. En fonction de leur épaisseur, le défaut considéré a une ouverture que l'on note  $w$ . Nous avons choisi de réaliser des mesures pour les ouvertures contenues dans le tableau III.3.15. Les autres dimensions du défaut sont reportées dans le

0.48	0.3	0.2	0.125	0.1	0.075	0.025
------	-----	-----	-------	-----	-------	-------

TAB. III.3.15 – Ouvertures considérées [mm].

tableau III.3.16. Le bloc comporte également une entaille de référence, dont les dimensions sont données dans le tableau III.3.17. Un schéma de principe est représenté en figure III.3.23 et une photo est disponible en III.3.24.

Specimen	
Conductivité :	1.02 MS/m
Epaisseur :	24 mm
Defaut	
Longueur :	100 mm
Profondeur :	24 mm
Epaisseur :	$w$

TAB. III.3.16 – Dimensions des défauts obtenus en introduisant les feuilles de Kapton.

Defaut de référence	
Longueur :	30 mm
Profondeur :	5 mm
Epaisseur :	0.22 mm

TAB. III.3.17 – Dimensions de l'entaille de référence.

On simule la configuration de contrôle correspondant à ce dispositif expérimental en considérant un défaut de longueur finie  $L$  et de profondeur égale à l'épaisseur du bloc. La longueur  $L$  dépend en fait de la zone d'influence du capteur.

Une étude préliminaire est nécessaire pour définir cette zone d'influence et des paramètres de simulation très influents tels que l'entrefer (le lift-off).

Les deux sections suivantes concernent l'estimation du lift off et de la zone d'influence.

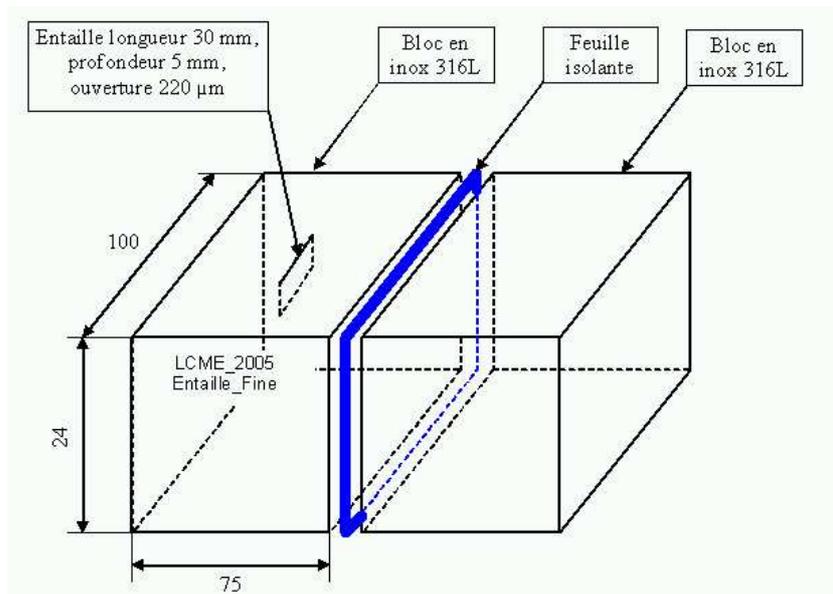


FIG. III.3.23 – Schéma de principe du bloc étudié.



FIG. III.3.24 – Photographie du bloc étudié.

## Capteur

Les caractéristiques du capteur utilisé sont données dans le tableau III.3.18.

Rayon interne :	1.0 mm
Rayon externe :	1.6243 mm
Hauteur :	2 mm
Entrefer :	0.302 mm
Nombre de spires :	328

TAB. III.3.18 – Caractéristiques du capteur.

On effectue une étude de la réponse en fréquence du capteur pour déterminer un domaine de fonctionnement. On observe un phénomène de résonance à une fréquence  $f_r = 3.250$  MHz. Pour travailler bien en dessous de la fréquence de résonance  $f_r$ , on limite la fréquence maximum de travail à 100 kHz (2 décades en dessous de  $f_r$ .)

Par ailleurs on mesure une résistance en continu :  $R_0 = 4.4 \Omega$ .

### Détermination de la valeur d'entrefer à utiliser en simulation

Pour des raisons mécaniques, la valeur de l'entrefer ne peut pas être connue avec suffisamment de précision. On propose de l'estimer *a posteriori* par optimisation à partir de mesures expérimentales de la variation d'impédance mesurée lorsque le capteur se trouve dans une zone saine.

L'amplitude de la valeur mesurée de l'impédance sur la plaque dans la zone sans défaut est de  $Z_{mes} = 114.5 \Omega$ , mais elle tient compte de la résistance en continu  $R_0$ .

Les valeurs d'impédance obtenues par CIVA doivent donc être comparées à  $\tilde{Z}_{mes} = Z_{mes} - R_0 = 114.5 - 4.4 = 110.1 \Omega$ .

La valeur de l'entrefer, obtenue après une optimisation au sens des moindres carrés, qui donne une impédance correspondant à  $\tilde{Z}_{mes}$  est de 0.302 mm.

### Zone d'influence du capteur

Les défauts ont des longueurs et profondeurs grandes par rapport aux dimensions du capteur. Dans le but de réduire la taille du défaut à modéliser, nous évaluons une zone d'influence du capteur. Nous allons donc étudier l'amplitude des courants induits par le capteur placé au dessus de la plaque sur une zone homogène sans défaut à 100 kHz. Une cartographie de l'amplitude du champ incident calculée est représentée sur la figure III.3.25. L'abscisse, notée  $r$ , représente la longueur selon l'axe  $\mathbf{y}$ . L'ordonnée, notée  $z$ , représente la profondeur selon l'axe  $\mathbf{z}$ . Pour  $z = 0$ , on se situe à l'interface air/ matériau. D'après cette représentation, on voit que l'amplitude du champ incident  $\mathbf{E}_{20}(r, z)$  décroît vite en fonction de  $r$  et de  $z$ .

On définit une zone d'influence du capteur comme une zone d'intérêt pour laquelle l'amplitude du champ est supérieure à un seuil. Le seuil est fixé à 1% de la valeur maximum du champ.

Pour ce critère, on trouve une zone de longueur  $l_n = 9.6$  mm et une profondeur  $p_n = -4.5$  mm. L'interaction de ce champ avec un défaut de dimensions supérieures à  $l_n$  et  $p_n$  sera négligée.

**Dimensions à considérer pour la simulation des défauts d'ouverture variable** On considère par la suite qu'un défaut de dimension supérieure à une longueur de 20 mm et de profondeur 5 mm est représenté par un défaut de longueur de  $l = 20$  mm et de profondeur  $p = 5$  mm. Son ouverture variable est notée  $w$ .

**Dimensions à considérer pour la simulation du défaut de référence** De même, pour la simulation des interactions avec l'entaille de référence qui fait 30 mm de long, on limite la longueur du défaut à 20 mm, puisqu'on travaille sur la demi entaille grâce aux propriétés de symétries des courants induits par le capteur.

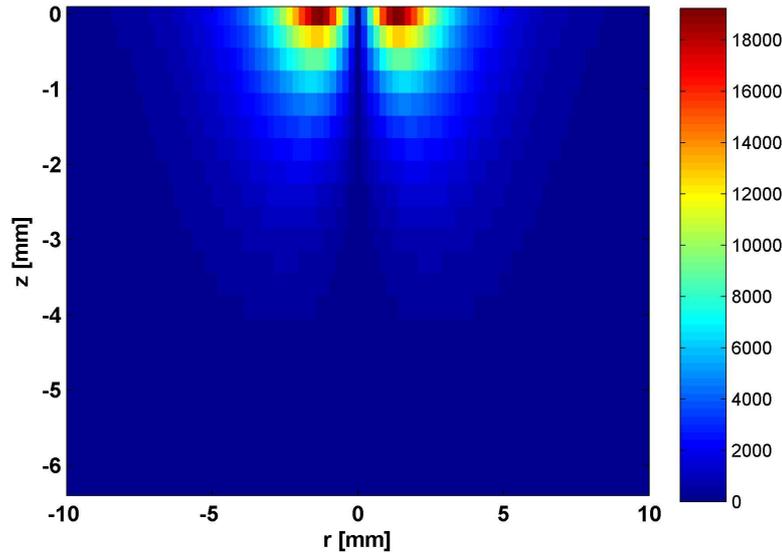


FIG. III.3.25 – Cartographie de l'amplitude de la densité de courant du champ incident en l'absence de défaut dans la plaque d'inconel 600.

**Avantages liés à cette démarche** Comme le champ incident en dehors de la zone d'influence définie devient négligeable, l'interaction entre le champ incident et les zones de défaut situées au-delà de  $l$  et  $p$  est également très réduite. Il est donc inutile de chercher à approximer la densité de dipôle dans cette zone.

Il vaut mieux discrétiser finement sur la zone où l'interaction avec le champ incident est importante. En réduisant les dimensions de nos défauts pour les simulations, on réduit le nombre d'inconnues et la précision est augmentée.

#### Illustration de l'étude de la zone d'influence du capteur

Les résultats obtenus par simulation par SIMavec le maillage  $(n_y \times n_z) = (60 \times 15)$  pour l'entaille de référence vont être donnés, et comparés aux données expérimentales.

La figure III.3.26 représente l'amplitude des signaux obtenus par SIMpour une longueur de 30, 20 et 15 mm. Leurs maxima et les phases correspondantes sont donnés dans le tableau III.3.19.

Méthode utilisée	SIM			Valeur expérimentale
Discrétisation	(60 x 15)	(60 x 15)	( 60 x 15)	
Longueur considérée [mm]	30	20	15	30
Amplitude du maximum [ $\Omega$ ]	1.66	1.74	1.72	1.86
Phase correspondante [en degrés]	126.28	126.37	129.3	130.92

TAB. III.3.19 – Eléments quantitatifs pour la comparaison des signaux obtenus par SIMpour l'entaille de référence en fonction de la longueur considérée.

Ces résultats illustrent le paragraphe précédent : à maillage égal, la valeur maximale de l'amplitude du signal obtenu par SIMest plus de celle des résultats expérimentaux pour une longueur de défaut de 20 mm que pour une longueur de 30 mm.

On peut même préciser que l'amplitude du signal maximale est atteinte pour une longueur de 20 mm. En effet, si l'on choisit une longueur inférieure, le défaut a un volume plus réduit. Son interaction avec le champ incident est donc plus faible, comme illustré avec le résultat obtenu pour une longueur de 15 mm.

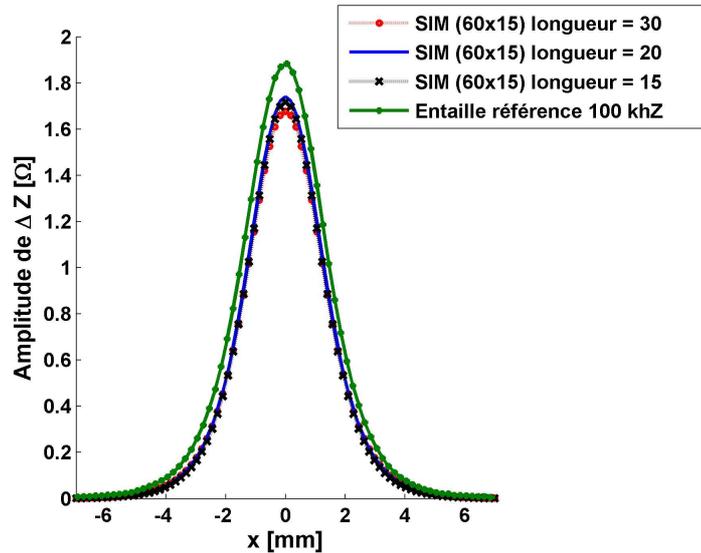


FIG. III.3.26 – Amplitude des signaux pour l’entaille de référence.

### III.3.3.b Signaux obtenus lorsque l’on considère des défauts d’ouverture de plus en plus petite

Nous allons maintenant utiliser ce dispositif pour comparer :

- Les signaux mesurés expérimentalement pour les ouvertures précisées dans le tableau III.3.20.
- Les signaux obtenus pour les mêmes ouvertures par modèle VIM.
- Les signaux obtenus par SIM.

0.48	0.3	0.2	0.125	0.1	0.075	0.025
------	-----	-----	-------	-----	-------	-------

TAB. III.3.20 – Ouvertures considérées (en mm)

En figure III.3.27 sont représentées les valeurs maximales des amplitudes calculées par le modèle VIM pour ces ouvertures, comparées aux valeurs expérimentales. La valeur de SIM est également donnée.

La même figure est réalisée pour la comparaison des phases.

En tableau III.3.21, sont reportées les valeurs quantitatives représentées. Les sept premières colonnes donnent les valeurs obtenues successivement par la méthode VIM ou par l’expérience, pour un défaut d’ouverture précisée dans la seconde ligne. La dernière colonne contient les données SIM.

Les maillages utilisés pour VIM sont  $(n_x \times n_y \times n_z) = (13 \times 45 \times 16)$ , soient 9360 cellules, sauf pour la dernière ouverture de 0.025 mm. Cette dernière configuration est difficile à simuler pour VIM : elle comporte un défaut long et de très petite ouverture. Le résultat est présenté pour une discrétisation de  $(n_x \times n_y \times n_z) = (4 \times 50 \times 16)$  soient 3200 cellules. Le maillage SIM utilisé est  $(n_y \times n_z) = (60 \times 20)$ , soient 1200 modes.

Le résultat calculé avec SIM apparaît comme une valeur limite lorsque l’épaisseur du défaut diminue. L’observation des valeurs expérimentales montre qu’il faudrait tenir compte de l’épaisseur. Il serait donc intéressant d’étudier la possibilité de prendre en compte dans le modèle l’épaisseur du défaut réel.

Avant de passer à cette étude, nous allons présenter un dernier exemple de résultats obtenus avec le modèle SIM. Les résultats présentés pour l’instant ne concernent que des sondes composées d’une bobine unique fonctionnant en émission et réception communes. Le paragraphe suivant présente un autre exemple de validation, pour un type de configuration de contrôle faisant intervenir deux bobines distinctes : la sonde fonctionne en mode émission / réception séparées.

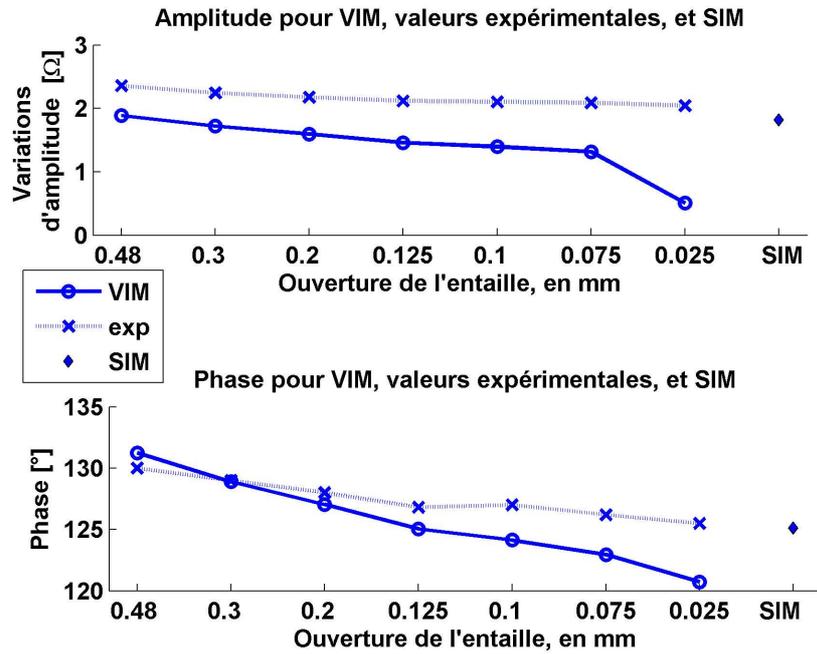


FIG. III.3.27 – Résultats VIM / exp / SIM sur plaque.

Méthode utilisée	VIM ou exp							SIM
Ouverture [mm]	0.48	0.3	0.2	0.125	0.1	0.075	0.025	
Discrétisation	(13 x 60 x 15)						(4x50x15)	(60 x 20)
Amplitude du maximum - VIM [ $\Omega$ ]	1.89	1.72	1.59	1.46	1.40	1.32	0.51	
Amplitude du maximum - exp [ $\Omega$ ]	2.36	2.25	2.18	2.12	2.10	2.09	2.05	
Amplitude du maximum - SIM [ $\Omega$ ]								1.82
Phase correspondante - VIM [ $^{\circ}$ ]	131.24	128.69	127.03	125.04	124.13	122.96	120.73	
Phase correspondante - exp [ $^{\circ}$ ]	130.0	129.0	128.0	126.60	127.00	126.2	125.5	
Phase correspondante - SIM [ $^{\circ}$ ]								125.14

TAB. III.3.21 – Eléments quantitatifs pour la comparaison des signaux obtenus pour des entailles d'ouverture différentes.

### III.3.4 Fonction séparée

Les validations présentées précédemment concernaient l'interaction d'une sonde composée d'une seule bobine, fonctionnant en émission et réception communes, se déplaçant dans le plan  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , avec un défaut plan. Cette configuration est représentée en figure III.3.28. Cependant un certain nombre de contrôles effectifs sont réalisés en mode émission-réception séparées. Il convient donc de s'assurer des résultats obtenus avec SIM pour ces configurations.

Nous allons donc considérer une sonde formée de deux bobines, l'une, parcourue par un courant d'intensité de 1 ampère, fonctionnant en émission, et l'autre en réception. En anglais ce type de sonde est désigné par "Transmitting / Receiving Probe", c'est pour cette raison que nous utiliserons la notation "TR" pour le désigner.

L'axe passant par le centre des deux bobines peut avoir plusieurs orientations par rapport à la direction de la longueur du défaut, qui est comme précédemment celle de l'axe  $\mathbf{y}$ . On va considérer deux orientations : dans la première, que nous appellerons "TR1", représentée en III.3.29, l'axe est parallèle à la longueur du défaut. Dans la seconde, désignée par "TR2", représentée en III.3.30, l'axe est normal à la longueur du défaut.

La sonde ainsi formée se déplace dans le plan  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Nous travaillons une fois de plus sur la configuration du benchmark CEA, comportant un défaut de 0.11 mm d'ouverture, 4.0 mm de long, 0.61 de profond. Les deux bobines utilisées sont identiques, ont un rayon interne de 1 mm, un rayon externe de 1.6243 mm, une hauteur de 2 mm, un entrefer de 0.302 mm et 328 spires. Elles sont séparées d'une distance de  $d = 4$  mm. Le signal mesuré n'est plus la variation d'impédance, mais la force électromotrice, notée f.e.m., dont l'unité est le Volt.

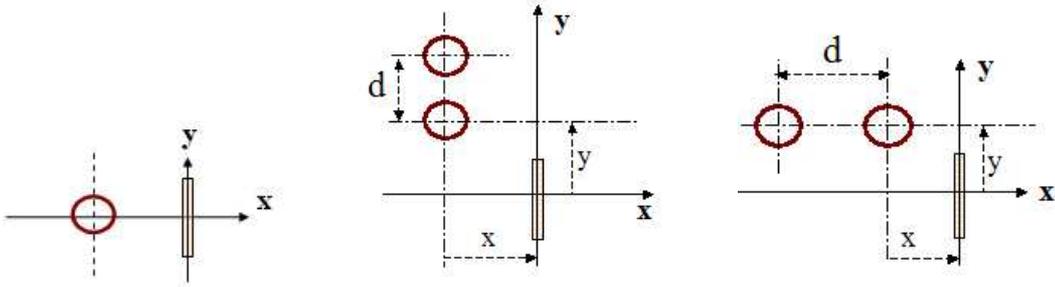


FIG. III.3.28 – Configuration de fonction commune.

FIG. III.3.29 – Configuration TR1. Axe de la sonde parallèle à la longueur du défaut.

FIG. III.3.30 – Configuration TR2. Axe de la sonde normal à la longueur du défaut.

Les réponses de la sonde fonctionnant en TR1, puis TR2, calculées par SIM et VIM, vont être comparées qualitativement.

Notons que nous ne disposons pas de données expérimentales pour ce cas. Nous effectuons seulement un test du comportement de SIM avec un autre type de fonctionnement de sonde, par ailleurs peu présenté dans la littérature.

#### III.3.4.a Sonde fonctionnant en TR1

**Cartographie obtenue par SIM** La cartographie de l'amplitude de la f.e.m. obtenue avec le modèle SIM pour une discrétisation de  $(n_y \times n_z) = (30 \times 11)$ , est représentée sur la figure III.3.31. La position de la sonde est repérée dans le plan  $(\mathbf{x}\mathbf{0}\mathbf{y})$  par rapport à la position du centre du capteur émetteur, comme représenté sur les figures III.3.29 et III.3.30.

Il convient tout d'abord de noter deux symétries du signal : la symétrie par rapport à l'axe  $x = 0$ , et la symétrie par rapport à l'axe  $y = 2$ , correspondant au passage du point situé au milieu du segment délimité par le centre des sondes en  $y = 0$ . Bien qu'une seule des deux bobines soit parcourue par un courant, on a un effet de réciprocité introduit dans le formalisme par le théorème de réciprocité.

Etudions ensuite la position des maxima : le signal atteint son maximum d'amplitude lorsque la première bobine est au-dessus du point  $(0 ; 2)$ , c'est à dire comme pour la symétrie lorsque le milieu du segment délimité par le centre des sondes passe en  $y = 0$ . Cette configuration est représentée en figure III.3.33. On constate également la présence de deux maxima locaux, qui n'apparaissent pas en fonction commune. Ils correspondent à la configuration représentée en figure III.3.34 et sa symétrique par rapport à l'axe  $\mathbf{x}$ , c'est à dire lorsque une seule des deux bobines passe au-dessus d'une extrémité du défaut.

**Comparaison sur des déplacements unidimensionnels de sonde** Comparons ces résultats à ceux obtenus par VIM pour deux déplacements unidimensionnels de sonde.

Dans un premier temps nous allons considérer le déplacement de la sonde dans la direction de l'axe  $\mathbf{x}$ , pour la première bobine située à une ordonnée  $y = 2.1$ . En effet, dans cette position, le centre de la sonde est à l'ordonnée  $y = 0$ , le milieu du défaut. L'extraction du signal correspondant à ce déplacement est représentée sur la figure III.3.35. Les amplitudes des signaux calculés par SIM et VIM sont représentées sur la figure III.3.36.

Le second déplacement de sonde considéré correspond à la colonne d'abscisse  $x = 0$ , comme représenté sur la figure III.3.37. Les amplitudes de la tension obtenue par les deux modèles sont représentées sur la figure III.3.38.

Les deux signaux ont qualitativement des évolutions d'amplitude similaires. Les phases sont également proches. Comparons à présent les résultats obtenus lorsque la sonde se déplace en orientation TR2.

### III.3.4.b Sonde fonctionnant en TR2

La cartographie de l'amplitude du signal obtenu avec SIM en la sonde fonctionnant en orientation TR2 pour une discrétisation de  $(n_y \times n_z) = (30 \times 11)$  est représentée sur la figure III.3.39.

Il est intéressant de souligner que le maximum d'amplitude dans cette configuration est de l'ordre de 10 fois plus faible que dans la configuration précédente. C'est pour cette raison que cette configuration est moins utilisée en pratique pour des contrôles effectifs.

Comme en TR1, un maximum global et deux maximum locaux sont atteints pour des positions de sondes correspondants respectivement aux configurations représentées en figure III.3.41, III.3.42 et sa symétrique par rapport à l'axe  $\mathbf{x}$ .

**Comparaison sur un déplacement unidimensionnel de sonde** Considérons les réponses de la sonde lorsqu'elle se déplace sur une ligne d'ordonnée  $y = 0$ , comme représenté en III.3.44.

L'amplitude et la courbe de lissajous des réponses calculées avec les modèles SIM et VIM sont représentées respectivement sur les figures III.3.45 et III.3.46.

On remarque une grande différence sur la forme des signaux obtenus avec VIM et SIM. En effet, le signal donné par VIM présente deux maxima, d'égales intensités, situés pour des positions du centre du premier capteur en  $x = 0.7$  et  $x = 2.85$ , c'est à dire correspondant au passage de la première puis de la seconde bobine au - dessus du défaut. Ce signal rend donc bien compte de l'effet de chaque capteur.

Comme nous l'avons vu précédemment, SIM ne prend en compte que les courants de perturbation projetés sur l'axe  $\mathbf{x}$ . Les contributions des composantes tangentielles sont négligées.

**Conclusion sur les validations avec une sonde à fonctions séparées** Nous venons donc de mettre en évidence qu'il existe une configuration pour laquelle le modèle SIM actuel présente des carences.

Cartographie de l'amplitude de la tension (en Volts) obtenue avec SIM 30 x 11

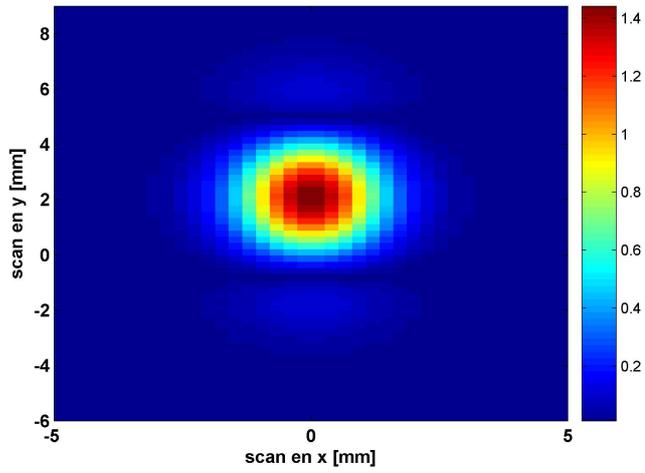


FIG. III.3.31 – Cartographie de l'amplitude de la f.e.m. pour la sonde fonctionnant en configuration TR1.

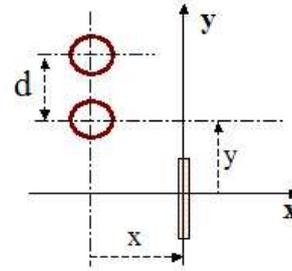


FIG. III.3.32 – Configuration TR1. Axe de la sonde parallèle à la longueur du défaut.

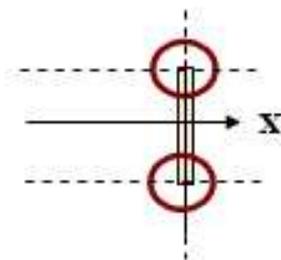


FIG. III.3.33 – Position de la sonde fonctionnant en TR1 pour laquelle on obtient le maximum d'amplitude.

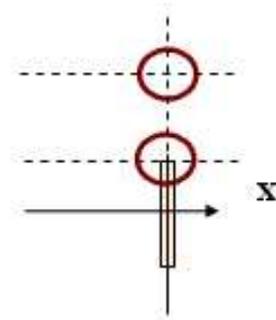


FIG. III.3.34 – Position de la sonde fonctionnant en TR1 aux deux maxima locaux.

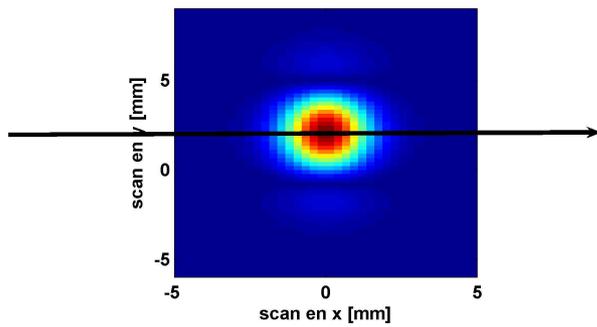


FIG. III.3.35 – Extraction du signal correspondant au déplacement du centre de la sonde sur la ligne  $y = 0$ .

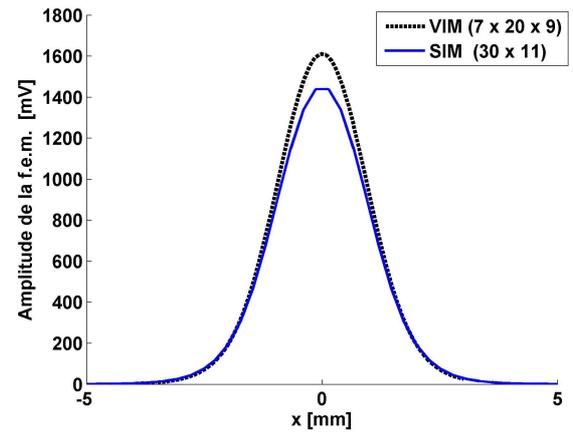


FIG. III.3.36 – Amplitude des réponses de la sonde fonctionnant en TR1, se déplaçant sur la ligne  $y = 0$ , calculées avec VIM et SIM.

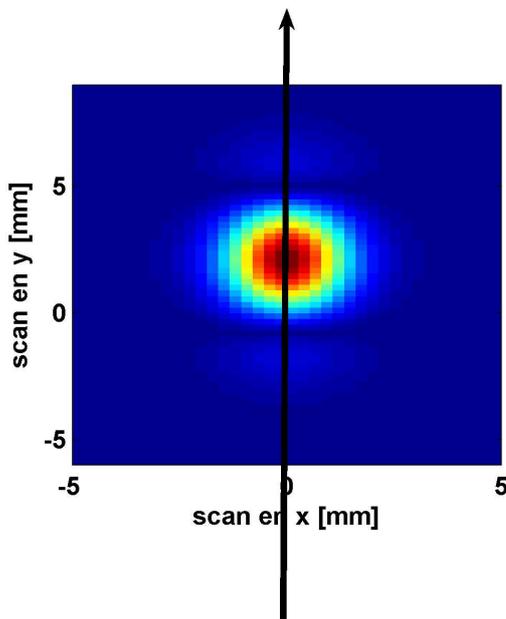


FIG. III.3.37 – Extraction du signal correspondant au déplacement du centre de la sonde sur la colonne  $x = 0$ .

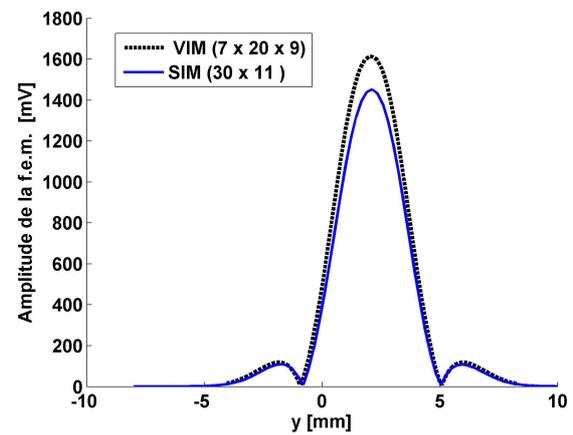


FIG. III.3.38 – Amplitude des réponses de la sonde fonctionnant en TR1, se déplaçant sur la colonne  $x = 0$ , calculées avec VIM et SIM.

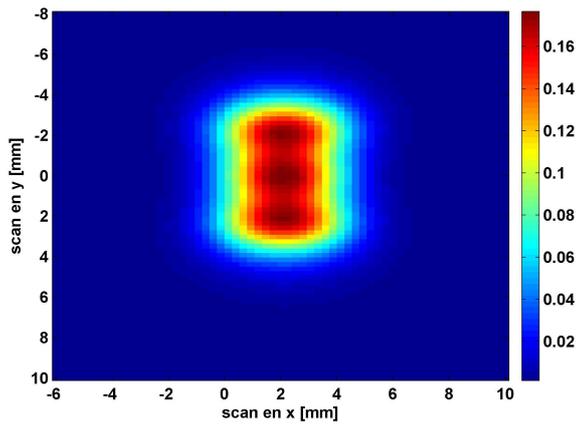


FIG. III.3.39 – Cartographie de l’amplitude (en Volts) du signal aux bornes de la sonde en TR2 calculé par SIM.

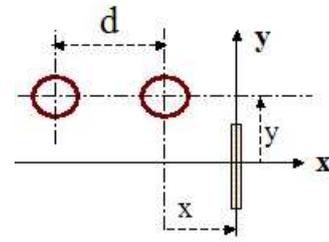


FIG. III.3.40 – Configuration TR2. Axe de la sonde normal à la longueur du défaut.

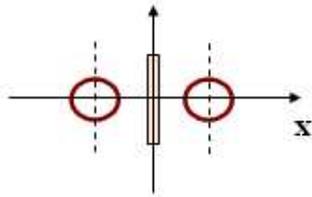


FIG. III.3.41 – Position de la sonde fonctionnant en TR2 correspondant au maximum d’amplitude du signal.

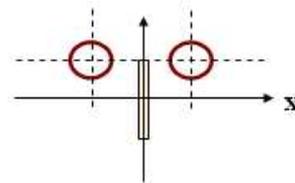


FIG. III.3.42 – Position de la sonde fonctionnant en TR2 correspondant à un des deux maxima locaux.

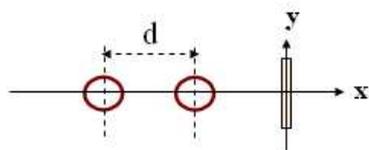


FIG. III.3.43 – Configuration TR2. Axe de la sonde normal à la longueur du défaut.

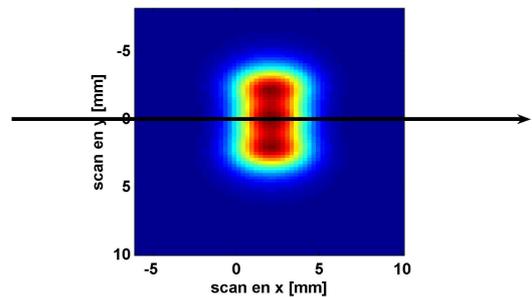


FIG. III.3.44 – Extraction du signal correspondant au déplacement du centre du capteur sur la colonne  $x = 0$ .

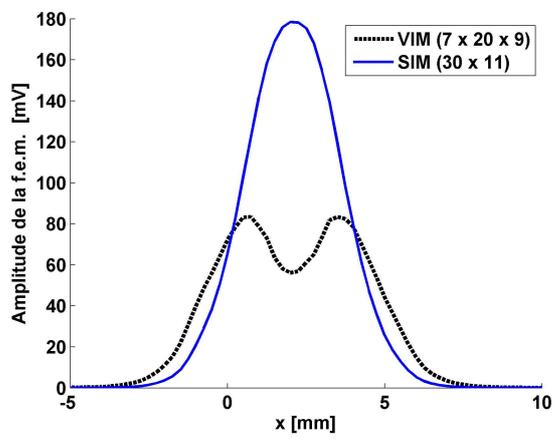


FIG. III.3.45 – Amplitude des réponses de la sonde fonctionnant en TR2 sur la configuration CEA, calculées avec VIMet SIM.

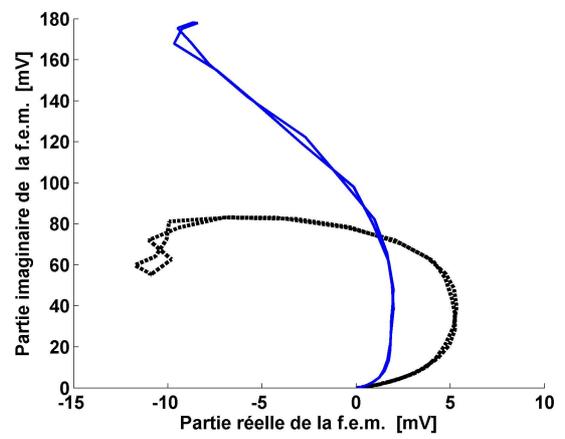


FIG. III.3.46 – Courbes de Lissajous des mêmes réponses.

### III.3.5 Conclusion sur ces validations

Nous avons testé le modèle SIM comparativement au modèle VIM et à des données expérimentales, sur un ensemble de configurations différentes. Les comparaisons effectuées sur benchmarks académiques en fonction commune ont mis en évidence que le modèle SIM donne des résultats légèrement inférieurs à ceux calculés par VIM et les données expérimentales. L'écart reste acceptable ( $< 12\%$ ) sur la plupart des configurations. SIM se révèle adapté pour fournir rapidement des cartographies donnant l'allure des signaux pour des temps de calcul assez réduits.

Il convient toutefois de garder à l'esprit que les défauts créés artificiellement, par exemple par EDM ("Electro Discharge Machining") ont un volume. Or SIM est développé en considérant un défaut d'ouverture infiniment petite. Donc les réponses du capteur calculées par SIM sous estimeront les réponses effectivement mesurées en présence de tels défauts. Cependant, les défauts plans que l'on souhaite détecter dans des structures ont une ouverture très réduite. L'hypothèse d'une ouverture infiniment petite est alors plus proche de la réalité, et cela nous laisse à penser que les réponses données par SIM sont dans ce cas proches des valeurs réelles.

Valider pertinence ce modèle n'est donc pas aisé et suppose de disposer de signaux mesurés en présence de tels défauts, qui ne peuvent exister réellement. On peut observer l'évolution des signaux obtenus par VIM et expérimentalement, lorsque l'on considère successivement des défauts dont l'ouverture est de plus en plus petite. Après avoir mené ces deux études, on peut conclure que les signaux calculés par SIM s'inscrivent dans la continuité de ces signaux.

Enfin, l'étude des réponses de sondes fonctionnant en émission - réception séparées a mis en évidence une différence de forme importante entre VIM et SIM pour une orientation de sonde. Le modèle VIM ne fait aucune hypothèse simplificatrice et a été validé sur une large gamme de configurations.

La différence constatée dans cette configuration et la sous estimation des résultats calculés par SIM en fonction commune proviennent vraisemblablement des hypothèses introduites pour développer SIM.

Un travail complémentaire, présenté dans la prochaine partie, a été mené pour corriger cet écart. L'influence de l'épaisseur a notamment été partiellement introduite, tout en gardant une charge de calcul plus réduite que la méthode VIM.

Quatrième partie

Méthode hybride

Le modèle VIM décrit dans la partie II permet de calculer la réponse d'une sonde en présence d'un défaut volumique. D'importants problèmes de formalisme et numériques surviennent lorsque l'on considère un défaut d'ouverture petite, et les temps de calcul deviennent très importants. C'est pour cette raison que nous avons développé le modèle SIM, décrit dans la partie III.

Puis des validations ont été effectuées, présentées au chapitre 3 de la partie III, confrontant les réponses de sonde calculées par SIM, par VIM et obtenues expérimentalement.

Ces validations nous ont permis de mettre en évidence que les hypothèses introduites dans le formalisme SIM sont trop restrictives. Nous avons mis au point un modèle tirant profit de SIM et VIM : moins restrictif que SIM, il est tout de même spécifique au défaut plan et permet d'éviter les problèmes numériques rencontrés avec VIM pour cette géométrie de défaut.

Nous allons tout d'abord rappeler quelques aspects des précédents formalismes. Puis les équations impliquées dans le modèle hybride seront énoncées. Enfin, dans une troisième partie, nous présenterons une série de validations expérimentales.

## Quatrième partie - Chapitre 1

# Développement d'un formalisme hybride HybM entre VIM et SIM

Dans ce premier chapitre va être décrit le nouveau formalisme développé. Les points clefs des méthodes SIM et VIM sont tout d'abord rappelés.

### IV.1.1 Formalismes SIM et VIM

#### IV.1.1.a Méthode SIM

Pour modéliser les interactions d'un champ électromagnétique avec un défaut de petite ouverture, la méthode SIM a été développée. Ces interactions sont approximées par les interactions avec un défaut plan idéal, caractérisé par :

- Une ouverture infiniment petite.
- Il ne permet à aucun courant de passer au travers.

On suppose de plus, pour le développement de la méthode SIM, que le défaut est constitué d'air, ainsi sa conductivité est  $\sigma(\mathbf{r}) = 0$ .

La prise en compte de ces hypothèses permet d'établir l'existence d'une densité surfacique de dipôle  $p(\mathbf{r})$  définie par :

$$\mathbf{E}_t^+(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_t^-(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\sigma_0} \nabla_t p(\mathbf{r}) \quad (\text{IV.1.1})$$

où  $\mathbf{E}_t^+(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{E}_t^-(\mathbf{r})$  sont les composantes tangentielles du champ électrique en présence  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  définie chacune sur un côté du défaut.  $\sigma_0$  est la conductivité de la plaque.

Cette densité surfacique de dipôle est solution de l'équation intégrale :

$$\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in S} i\omega\mu_0 \int_S G_{22}^{\mathbf{nn}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{IV.1.2})$$

$S$  désigne la surface du défaut.  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}_0)$  est le champ incident induit par la bobine émettrice, dans le milieu 2, qui est la plaque à contrôler, et  $G_{22}^{\mathbf{nn}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}$ , avec  $\mathbf{n}$  le vecteur unité normal à la surface du défaut  $S$ .

**Variations du signal aux bornes de la sonde** L'application du théorème de réciprocité dans ce cas nous donne [Bow94] :

$$I^2 \Delta Z = - \int_S \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (\text{III.2.23})$$

avec  $I$  intensité du courant d'injection de la sonde.

Pour obtenir ces variations d'impédance, il faut donc tout d'abord obtenir la densité de dipôle  $p(\mathbf{r})$  par résolution de l'équation IV.1.4 et calculer le champ  $\mathbf{E}_{20}$ .

### IV.1.1.b Méthode VIM

VIM est un modèle non spécifique aux défauts plans : il permet de calculer la réponse de la sonde dans le cas général des défauts 3D, caractérisés par une conductivité locale  $\sigma(\mathbf{r})$ . La présence du défaut est décrite par une densité volumique de courants  $\mathbf{J}_2$  donnée par :

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = (\sigma(\mathbf{r}) - \sigma_0)\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (\text{IV.1.3})$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$  est solution de l'équation d'état suivante, avec  $V$  le volume du défaut :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) + i\omega\mu_0 \int_V \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{IV.1.4})$$

**Variations du signal aux bornes de la sonde** Dans le cas d'une sonde à fonction commune, les variations d'impédance  $\Delta Z$  sont données par [BJSS91] page 1111, obtenue en utilisant le théorème de réciprocité [AM99] :

$$I^2 \Delta Z = \sigma_0 \int_V \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

avec  $I$  intensité du courant d'injection,  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r})$  le champ incident induit par la sonde, propagé dans le milieu 2.  $\Delta Z$  est donc calculé une fois qu'on a calculé  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r})$ , et  $\mathbf{J}_2(\mathbf{r})$ , solution de l'équation.

### IV.1.1.c Comparaison des deux modèles

Les validations menées au chapitre 3 de la partie III ont mis en évidence que :

- Les réponses du capteur calculées par la méthode SIM sous estiment toujours les réponses calculées avec VIM et les données expérimentales. Ceci est dû au fait que SIM calcule la réponse de la sonde en présence du défaut plan idéal d'ouverture infiniment petite. Or les défauts utilisés pour les validations ont été obtenus par électro-érosion par exemple, ils ont donc toujours un certain volume.
- Il existe des orientations de sonde, fonctionnant en émission - réception séparée, pour lesquelles la réponse de la sonde a une forme très différente de celle calculée par VIM et contraire à l'intuition physique. La double projection de la dyade, ainsi que la prise en compte de la composante normale uniquement du champ primaire dans le calcul de l'impédance, semblent être des simplifications très restrictives.

Cependant, la méthode VIM présente une charge de calcul trop élevée pour des configurations impliquant un défaut de petite ouverture. L'enjeu est donc de mettre au point une méthode plus précise que SIM, mais dont la charge de calcul est inférieure à celle de VIM.

## IV.1.2 Formalisme de la nouvelle méthode

Nous proposons une méthode permettant de ré-introduire le volume effectif du défaut et prenant en compte les autres composantes du champ primaire pour le calcul de la réponse de la sonde.

Soit un défaut de volume  $V$ , d'ouverture  $w$  petite, de conductivité nulle.  $S$  est la surface correspondant au plan formé par les deux dimensions du volume autre que l'ouverture, comme représenté en figure IV.1.1. C'est la surface de la fissure idéale d'ouverture infiniment petite, obtenue à partir du défaut pour  $w \rightarrow 0$ .

On approche dans un premier temps l'effet de la présence du défaut de la même manière que dans le formalisme SIM : par une source fictive secondaire de courant de dipôle, décrite par la densité surfacique de densité de dipole  $p(\mathbf{r})$ , solution de l'équation IV.1.4 :

$$\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in S} i\omega\mu_0 \int_S G_{22}^{nn}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{IV.1.4})$$

Puis cette approximation est complétée en évaluant le champ électrique total  $\mathbf{E}^T(\mathbf{r})$  dans le milieu 2, dû à l'interaction entre le champ primaire  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r})$  et le défaut par [Bow94] :

$$\mathbf{E}^T(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) + i\omega\mu_0 \int_S \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_s) \cdot \mathbf{n} p(\mathbf{r}'_s) d\mathbf{r}'_s \quad (\text{IV.1.5})$$

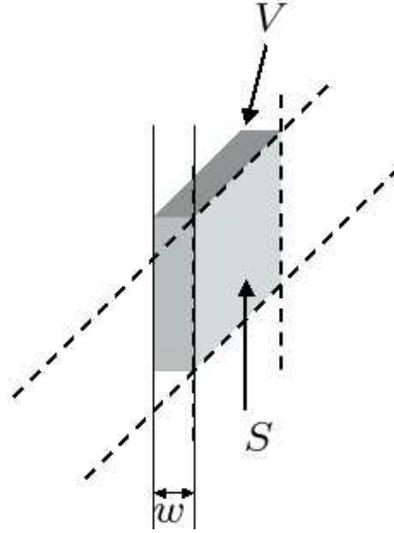


FIG. IV.1.1 – Défaut de petite ouverture  $w$ .

$\mathbf{r}_s = (y, z)$  est la variable surfacique définie sur la surface  $S$ , et  $p(\mathbf{r}_s)$  est la densité surfacique de dipôle. Cette équation est très proche de l'équation d'état IV.1.4 du cas volumique. La différence majeure réside dans le fait que l'évaluation de  $\mathbf{E}^T(\mathbf{r})$  dans ce cas ne nécessite pas d'inversion numérique.

Le défaut de volume  $V$  est alors décrit par une densité volumique fictive de courants  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  donnée par :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\sigma_0 \cdot \mathbf{E}^T(\mathbf{r}) \quad (\text{IV.1.6})$$

avec  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Alors la réponse de la sonde est donnée par :

$$I^T \cdot I^R \Delta Z = \sigma_0 \int_V \mathbf{E}^R(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^T(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \quad (\text{IV.1.7})$$

Dans le cas d'une sonde fonctionnant en mode absolu,  $I^T = I^R$ , et  $\mathbf{E}^R(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r})$ , et en remplaçant on retrouve les variations d'impédance.

### IV.1.3 Aspects numériques

Les calculs sont donc effectués dans l'ordre suivant :

1. On calcule le champ incident 3-dimensionnel créé par le capteur :

$$\begin{pmatrix} E_{20x} \\ E_{20y} \\ E_{20z} \end{pmatrix}$$

2. On résout IV.1.4 pour obtenir la densité surfacique de dipôle  $p(\mathbf{r}_s)$ . On utilise un nombre de modes  $N_y^{SIM}$  et  $N_z^{SIM}$ , et autant de points de collocation.
3. Ensuite, les dyades  $G_{xx}$ ,  $G_{yx}$  et  $G_{zx}$  sont calculées par le code VIM. Le nombre de fonctions de base utilisé est de  $N_x^{VIM}$ ,  $N_y^{VIM}$  et  $N_z^{VIM}$ . En pratique  $N_y^{VIM} = N_y^{SIM}$  et  $N_z^{VIM} = N_z^{SIM}$ . On peut également envisager d'utiliser des paramètres de discrétisation différents.
4. Puis le champ électrique  $\mathbf{E}^T$  est calculé en utilisant IV.1.5.
5. Enfin, la réponse du capteur est calculée à partir IV.1.7 en utilisant  $\mathbf{E}^T$ .

### IV.1.4 Conclusion sur le formalisme

La méthode développée ici, que nous désignerons par HybM, permet de prendre en compte le volume du défaut  $V$ , et les composantes tangentielles du champ primaire  $\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r})$ . Les réponses de capteur calculées par ce modèle devraient être plus précises que celles calculées avec SIM.

Ensuite, le seul système numérique à inverser est celui qui permet d'obtenir la densité surfacique de dipôle  $p(\mathbf{r}_s)$ . Il est donc de dimension plus petite que celui à inverser pour le modèle volumique, donc les temps de calcul liés à une inversion numérique sont plus petits que pour VIM. De plus, l'utilisation des modes de Fourier comme fonctions de base implique un nombre de modes à utiliser petit.

Enfin, il convient de souligner que l'équation d'état et l'équation d'évaluation de  $\mathbf{E}^T(\mathbf{r})$  n'impliquent respectivement qu'une seule ( $G_{xx}$ ) et 3 (dont  $G_{xx}$ ) des 9 composantes de la dyade  $\overline{\mathbf{G}}$ , soient au total 3 des 9 composantes. La charge et les temps de calculs associés à l'évaluation des termes de la dyade vont donc être plus réduits que pour la méthode VIM, pour laquelle les 9 termes sont nécessaires.

Ceci nous laisse à penser que cette méthode HybM sera en principe plus rapide que VIM, et plus précise que SIM. Le chapitre suivant présente une série de validations qui ont pour but de tester cette méthode.

## Quatrième partie - Chapitre 2

# Validations

Ce chapitre propose une série de validations de la méthode hybride notée "HybM".

Dans un premier temps, nous reprenons deux benchmarks académiques qui ont déjà fait l'objet de validations au chapitre de validations du modèle SIM : deux configurations avec une bobine en fonction commune, puis la configuration avec une sonde à fonctions séparées étudiée au chapitre précédent. Enfin des résultats d'une expérience menée au laboratoire, obtenus avec une sonde fonctionnant en émission et réception séparées, seront confrontés aux données issues des trois modèles VIM, SIM et HybM.

### IV.2.1 Validations numériques sur deux configurations

Nous reprenons deux configurations déjà étudiées pour la validation de la méthode SIM, en III.3.4, page 98, et nous rajoutons les réponses de la sonde calculées par la méthode hybride.

#### IV.2.1.a Validations numériques sur la configuration CEA en fonction commune

Les caractéristiques de cette configuration ne sont pas rappelées ici mais disponibles par exemple dans le tableau III.3.3, page 81 ou en annexe A.

Sur les figures IV.2.1 et IV.2.2 sont représentées les parties réelles et imaginaires des signaux obtenus avec les trois modèles, et figurent également les valeurs expérimentales.

Dans le tableau IV.2.1 sont donnés des éléments quantitatifs pour l'appréciation de la comparaison des résultats. La forme des signaux coïncide bien, l'amplitude du maximum de la réponse du capteur calculée par HybM est plus proche des données expérimentales et de VIM que celle calculée par SIM.

#### IV.2.1.b Validations numériques sur le benchmark CNDE en fonction commune

Les caractéristiques de ce benchmark ne sont pas rappelées ici mais disponibles par exemple dans le tableau III.3.5, page 83 ou en annexe.

Sur les figures IV.2.3 et IV.2.3 sont représentées les parties réelles et imaginaires des signaux obtenus avec les trois modèles, et figurent également les valeurs expérimentales obtenues au CNDE.

Dans le tableau IV.2.2 sont donnés des éléments quantitatifs pour l'appréciation de la comparaison des résultats. La forme des signaux coïncide bien, l'amplitude du maximum de la réponse du capteur calculée par HybM est plus proche des données expérimentales et de VIM que SIM.

Les temps de calcul ne sont pas reportés ici. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, cette configuration est défavorable à SIM. La comparaison a ici pour but de déterminer si les caractéristiques de HybM permettent de corriger SIM sur cette configuration. D'après les figures on peut conclure que HybM est donne des signaux plus proches de VIM que ne le sont ceux calculés par SIM.

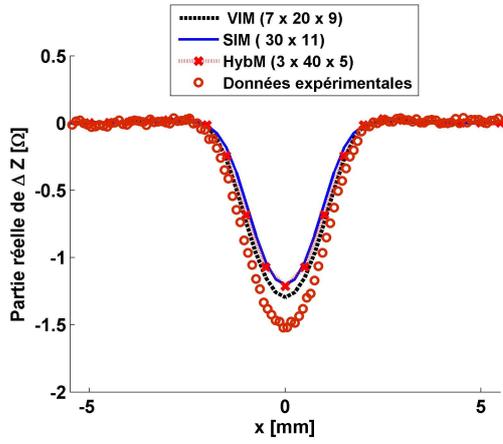


FIG. IV.2.1 – Parties réelles des signaux VIM, SIM, HybM et expérimentaux pour la configuration CEA.

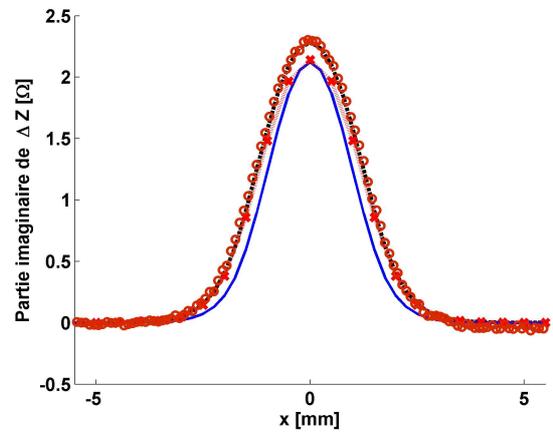


FIG. IV.2.2 – Parties imaginaires des signaux VIM, SIM, HybM et expérimentaux pour la configuration CEA.

Méthode utilisée	VIM	SIM	HybM	Valeurs expérimentales
Discrétisation	(7 x 20 x 9)	(30 x 11)	(3 x 40 x 5)	
Nombre total	1260	330	600	
Amplitude du maximum [Ω]	$A_v = 2.625$	$A_s = 2.440$	$A_{HybM} = 2.461$	$A_{exp} = 2.760$
Phase correspondante [en degrés]	119.56	119.58	119.54	123.4
Temps de calcul	<7 minutes	< 4 minutes	< 6 minutes	
Pourcentage d'écart avec $A_{exp}$	5.15%	11.61%	10.82%	
Pourcentage d'écart avec $A_v$		7.3%	6.23%	

TAB. IV.2.1 – Eléments quantitatifs de comparaison des réponses aux bornes du capteur pour la configuration CEA.

### IV.2.1.c Validations numériques pour la configuration CEA, sonde à fonctions séparées TR2

Les amplitudes des réponses des sondes calculées par VIM, SIM, et HybM lorsque la sonde se déplace normalement au capteur sur la ligne  $y = 0$ , comme représenté en figure IV.2.5, sont représentées en figure IV.2.6.

### IV.2.1.d Conclusion sur ces premières validations

Pour les configurations avec une sonde fonctionnant en mode émission / réception commune, la méthode HybM apporte plus de précision que la méthode SIM. De plus, pour le cas de la sonde fonctionnant en émission et réception séparées, orientée en TR2, la forme et l'amplitude de la réponse calculée par HybM sont en accord avec celles obtenues par VIM. La méthode semble très intéressante. Pour compléter ces validations, une expérience a été menée au laboratoire. Les résultats obtenus par le calcul seront comparés aux mesures expérimentales effectuées.

**Au sujet des temps de calcul** Ces validations ont été menées pour tester l'intérêt de la méthode HybM d'un point de vue qualitatif, avant d'adapter et d'optimiser le code. Par conséquent, les résultats présentés sont obtenus après un calcul des 9 composantes de la dyade  $\overline{\mathbf{G}}_{\text{VIM}}$ , alors que seulement 3 sont utilisées pour la suite des calculs. Puis cette dyade est inversée, alors que la dyade inverse n'intervient pas dans HybM. De plus, la méthode SIM est effectuée entièrement, alors que seule la densité de dipôle surfacique  $p(\mathbf{r})$  est nécessaire.

Sur le premier exemple, on note tout de même que le temps de calcul avec HybM est inférieur à celui de VIM.  $\overline{\mathbf{G}}_{\text{VIM}}$ , mais ce la s'explique uniquement par le fait que la discrétisation utilisée est plus petite.

Les adaptations et optimisations du code permettront de gagner significativement en temps de calcul.

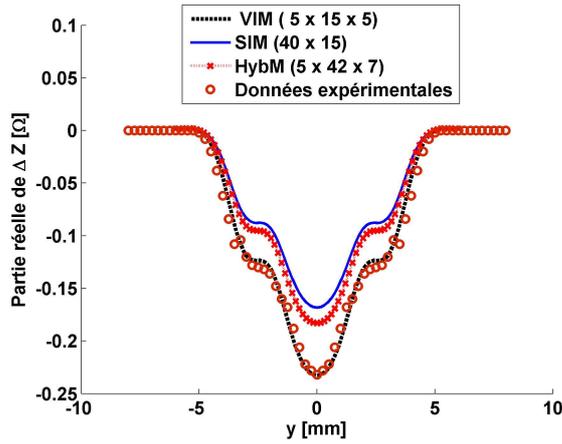


FIG. IV.2.3 – Parties réelles des signaux VIM, SIM, HybM et expérimentaux pour la configuration Benchmark CNDE.

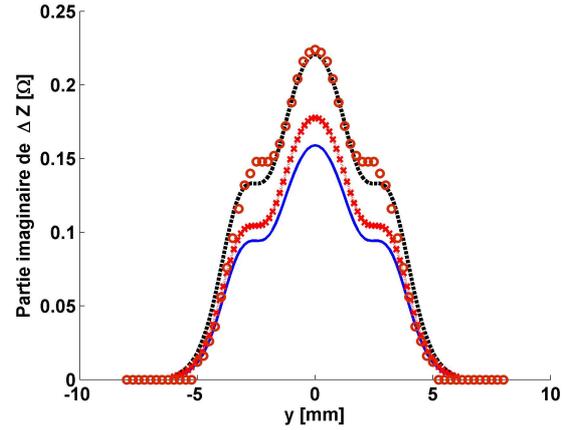


FIG. IV.2.4 – Parties imaginaires des signaux VIM, SIM, HybM et expérimentaux pour la configuration Benchmark CNDE.

Méthode utilisée	VIM	SIM	HybM	Valeurs expérimentales
Discretisation	(5 x 15 x 5)	(40 x 15)	(5 x 42 x 7)	
Nombre total	375	600	1470	
Amplitude du maximum [Ω]	$A_v = 0.321$	$A_s = 0.232$	$A_{HybM} = 0.255$	$A_{exp} = 0.32$
Phase correspondante [en degrés]	136.54	136.62	135.85	136.01
Pourcentage d'écart avec $A_{exp}$	0.53%	39.3%	25.75%	
Pourcentage d'écart avec $A_v$		27.4%	20.5%	

TAB. IV.2.2 – Eléments quantitatifs de comparaison des réponses aux bornes du capteur pour la configuration Benchmark CNDE.

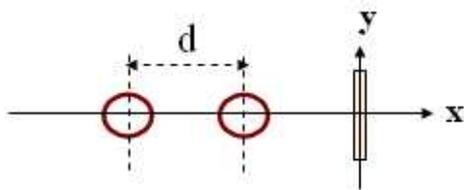


FIG. IV.2.5 – Sonde en configuration TR2.

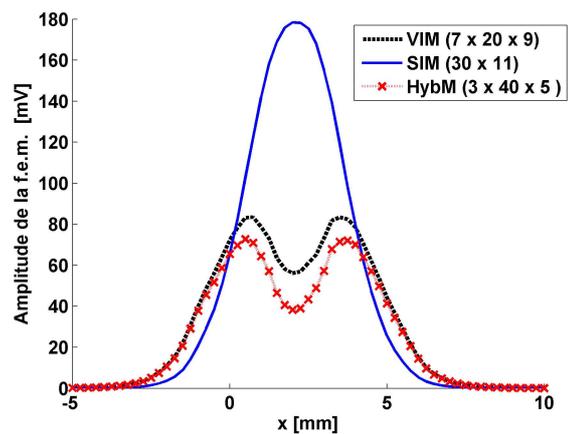


FIG. IV.2.6 – Amplitude des réponses de la sonde fonctionnant en TR2, pour la configuration CEA.

## IV.2.2 Validations expérimentales réalisées au laboratoire avec une sonde à fonctions séparées

Nous présentons ici des résultats de mesures effectuées avec une sonde composée de deux capteurs, fonctionnant en émission et réception séparées, dans les deux orientations TR1 et TR2 déjà envisagées, représentées sur les figures IV.2.7 et IV.2.8.

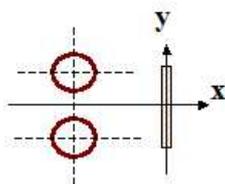


FIG. IV.2.7 – Configuration TR1. Axe de la sonde parallèle à la longueur du défaut.

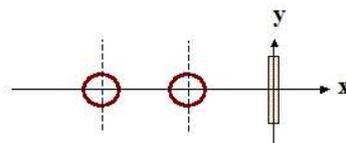


FIG. IV.2.8 – Configuration TR2. Axe de la sonde normal à la longueur du défaut.

### IV.2.2.a Description de la configuration et étude de paramètres influents

On utilise une plaque disponible au CEA. Elle a une épaisseur de 1.55 mm et est constituée d'Inconel 600. Elle contient 4 défauts, F10, F9, F8, et F7, qui diffèrent par :

- Leurs profondeurs. F10 est le plus profond (100 % de la plaque) et F7 le moins profond (40 % de la plaque).
- Leur orientation : La longueur du second (F9) et du quatrième (F7) défaut est orientée perpendiculairement à celle du premier (F10) et du troisième (F8) défaut. Ainsi, quand la sonde passe en orientation TR1 au - dessus des défauts F10 et F8, elle passe en orientation TR2 au dessus des défauts F9 et F7.

Un schéma synoptique de la plaque et des capteurs est donné en figure IV.2.9. Ses paramètres et ceux des défauts sont donnés en Table IV.2.3.

Les paramètres de la sonde sont donnés dans la table IV.2.4.

L'injecteur utilisé est un FG 120 Yokogawa. L'appareil de mesure en réception est un SR 844 RF Stanford Research, ("détection synchrone"). On utilise l'appareil détection synchrone avec une constante de temps de 3ms, 24 dB de gain, et 1 ou 3 mV de sensibilité.

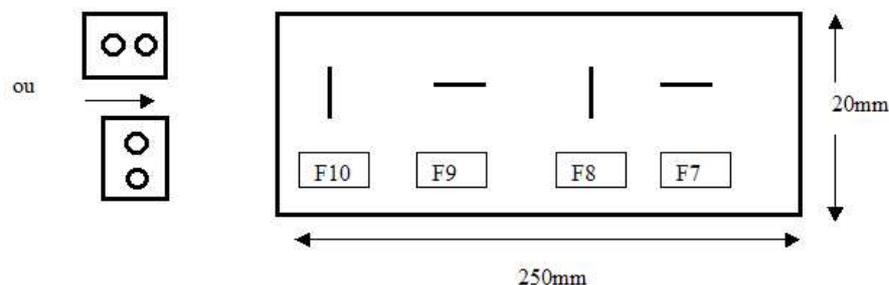


FIG. IV.2.9 – Schéma de la plaque vue de dessus et de la sonde dans les deux orientations étudiées pour validation méthode hybride.

Avant de proposer une comparaison des données expérimentales avec les réponses de la sonde calculées par les modèles SIM et VIM, nous allons étudier plus en détail notre dispositif expérimental. La zone d'influence du champ incident induit par la bobine émettrice sera précisée, et nous donnerons des remarques sur les précautions prises pour les relevés expérimentaux. Enfin nous préciserons les valeurs de normalisation utilisées.



FIG. IV.2.10 – Photographie du capteur TTA SF 10678.

<i>Plaque pour validations méthode hybride</i>			
Plaque			
Matériau	Inconel 600		
Conductivité	1.02 MS/m		
Epaisseur	1.55 mm		
Défauts			
Nom [mm]	Longueur [mm]	Profondeur (% Plaque)	Ouverture [mm]
F6	7	0.31 (20%)	0.1
F7	7	0.62 (40%)	0.1
F8	7	0.93 (60%)	0.1
F9	7	1.24 (80%)	0.1
F10	7	1.55 (100%)	0.1

TAB. IV.2.3 – Paramètres descriptifs de la plaque.

<i>Caractéristiques de chaque capteur</i>	
Rayon interne	1.15 mm
Rayon externe	1.39 mm
Nombre de spires	90
Hauteur	1.2 mm
Entrefer	0.1 mm
<i>Sonde formée</i>	
Distance entre les capteurs	6 mm
Fréquence	1 MHz
Epaisseur de peau dans la plaque	0.5 mm

TAB. IV.2.4 – Descriptif de la sonde.

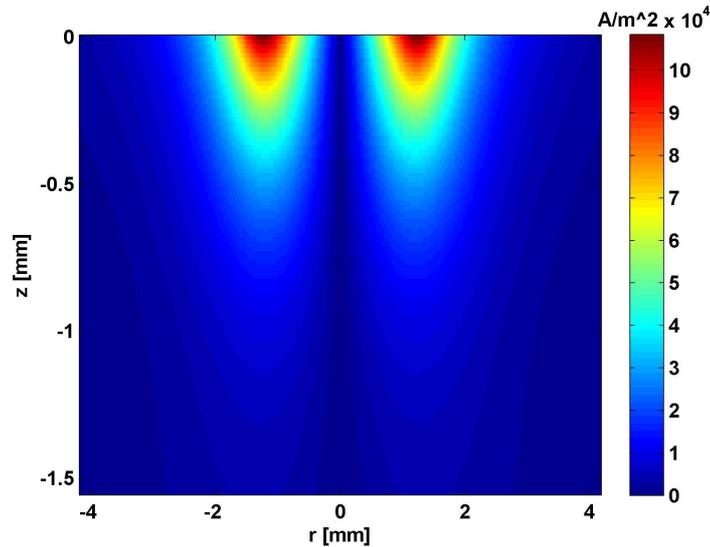


FIG. IV.2.11 – Densité de courant créée par la sonde TTA 10678 dans la plaque en absence de défaut

### Zone d'influence du champ incident

La bobine émettrice est parcourue par un courant de fréquence 1 MHz et d'intensité 1.5 mA. La densité de courant du courant qu'elle induit, dans la plaque en absence de défaut est représenté sur la figure IV.2.11. L'impédance dans la plaque est de  $Z = 107.664$  Ohms et la phase est de 85.409 degrés (partie réelle : = 8.6171 Ohms, partie imaginaire = 107.3186 Ohms).

La densité de courant  $J$  a une valeur maximale de  $1.09 \cdot 10^5 A/m^2$ . A l'autre extrémité de la plaque, c'est à dire à une profondeur de 1.55 mm, sa valeur est de  $3.71 \cdot 10^3$ , c'est à dire elle est réduite à 3% de cette valeur maximale. Le champ incident a encore un effet non négligeable. Donc il va y avoir une interaction entre le champ et les défauts quelque soit leur profondeur.

### Remarques sur les conditions opératoires

- Les signaux obtenus avec un capteur en configuration TR2 ont une amplitude 10 fois plus faible que ceux obtenus avec un capteur en configuration TR1. Nous avons utilisé différentes sensibilités de l'appareil de mesure, ce qui permet de jouer sur la valeur de l'amplification du signal mesuré tout en évitant des phénomènes de saturation.
- Le générateur fonctionne à tension constante. Pour alimenter le capteur CF à courant constant, on insère dans le circuit une résistance série de  $2k\Omega$ . Le courant d'injection dans le capteur est donc supposé constant et son intensité vaut 1,5 mA.

### Choix des valeurs de normalisation

Le défaut F9 est pris comme référence : tous les signaux simulés par chacune des trois méthodes et le signal expérimental sont normalisés à 1 Volt d'amplitude, 0 degrés de phase. Les coefficients de normalisation sont ensuite conservés pour calibrer tous les autres signaux correspondant à d'autres configurations de contrôle.

On trouvera en figure IV.2.12 et IV.2.13 les parties réelles et imaginaires de la réponse normalisée de la sonde en orientation TR1 pour le défaut F9.

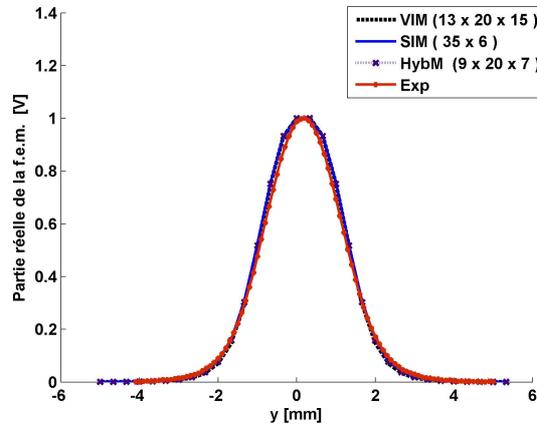


FIG. IV.2.12 – Partie réelle des signaux, défaut F9 à 1Mhz, orientation TR1.

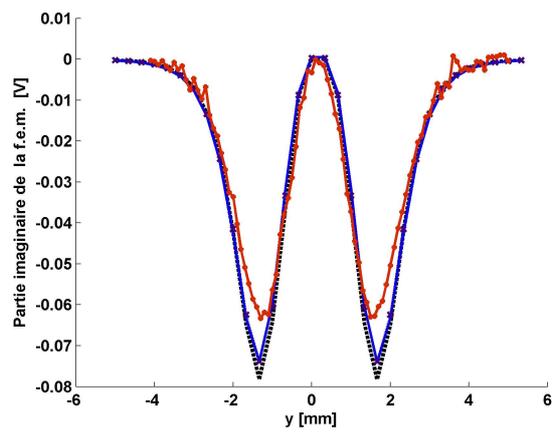


FIG. IV.2.13 – Partie imaginaire des signaux, défaut F9 à 1Mhz, orientation TR1.

### IV.2.2.b Résultats

Les réponses de la sonde obtenues pour les défauts F9 et F8 pour la sonde en orientation TR2 sont calibrés par rapport à la configuration de référence.

Les courbes des parties réelles et imaginaires sont données pour chaque configuration : sur les figures IV.2.14 et IV.2.15 pour le défaut F9, et sur les figures IV.2.16 et IV.2.17 pour le défaut F8.

On trouvera respectivement en tableaux IV.2.5 et IV.2.6 des indicateurs quantitatifs sur ces résultats.

Les temps de calcul ne sont pas indiqués. En effet le code de la méthode HybM n'a pas été optimisé et les temps de calcul observés ici ne permettent pas d'avoir une indication sur les temps que l'on observera réellement après optimisation.

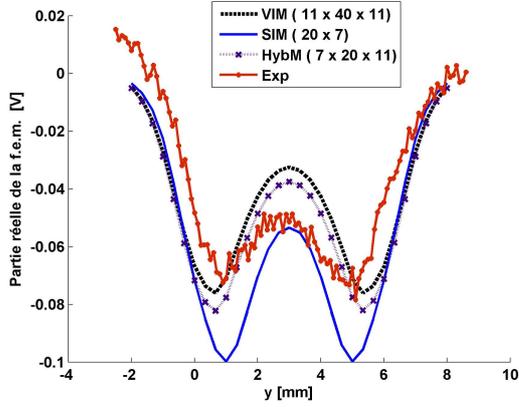


FIG. IV.2.14 – Partie réelle des signaux, défaut F9 à 1Mhz, orientation TR2.

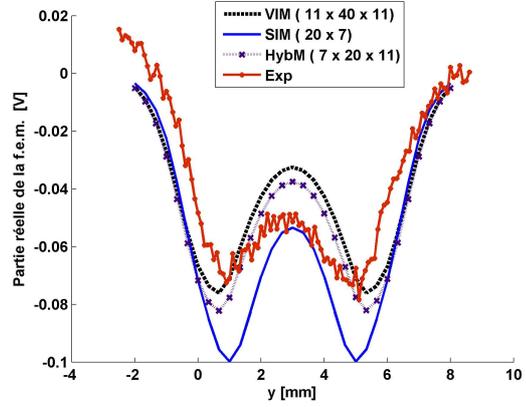


FIG. IV.2.15 – Partie imaginaire des signaux, défaut F9 à 1Mhz, orientation TR2.

Méthode utilisée	VIM	SIM	HybM	Valeurs expérimentales
Discrétisation	(11 x 40 x 11)	(20 x 7)	(7 x 20 x 11)	
Nombre total	4840	140	1540	
Amplitude du maximum [ $\Omega$ ]	$A_v = 0.077$	$A_s = 0.102$	$A_{HybM} = 0.083$	$A_{exp} = 0.080$
Phase correspondante [en degrés]	168.07	168.8	172.6	166.9
Pourcentage d'écart avec $A_{exp}$	3.3%	26.6%	3.1%	

TAB. IV.2.5 – Éléments quantitatifs de comparaison des réponses aux bornes du capteur pour la configuration F9, TR2.

**Commentaires sur les résultats** Ce type d'orientation est très défavorable lors d'un contrôle : le signal est de faible amplitude et très bruité. Il est préférable dans ce cas de changer l'orientation de la sonde. Mais pour nos validations, il permet de s'assurer que la méthode apporte bien les contributions qui faisaient défaut à SIM.

Au vue de ces résultats, il apparaît clairement que la méthode hybride corrige l'écart que l'on observe entre les signaux obtenus par la méthode SIM et les signaux expérimentaux pour la sonde orientée en TR2.

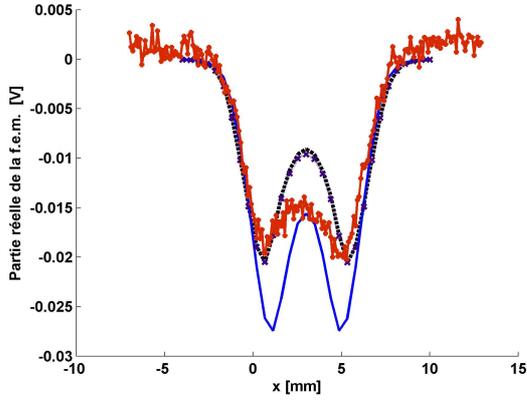


FIG. IV.2.16 – Partie réelle des signaux, défaut F8 à 1Mhz, orientation TR2.

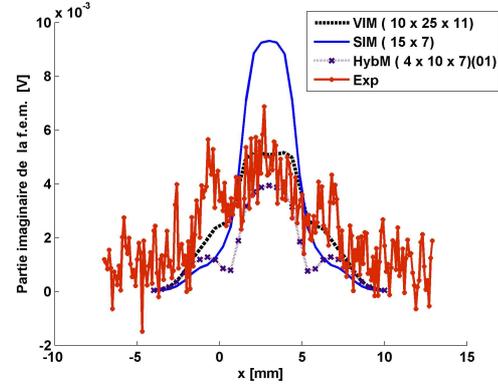


FIG. IV.2.17 – Partie imaginaire des signaux, défaut F8 à 1Mhz, orientation TR2.

Méthode utilisée	VIM	SIM	HybM	Valeurs expérimentales
Discrétisation	(10 x 25 x 11)	(15 x 7)	(4 x 10 x 7)	
Nombre total	2750	105	280	
Amplitude du maximum [ $\Omega$ ]	$A_v = 0.0207$	$A_s = 0.0278$	$A_{HybM} = 0.0206$	$A_{exp} = 0.0204$
Phase correspondante [en degrés]	172.69	171.20	177.87	172.06
Pourcentage d'écart avec $A_{exp}$	1.74%	36.30%	0.92%	

TAB. IV.2.6 – Eléments quantitatifs de comparaison des réponses aux bornes du capteur pour la configuration F8, TR2.

Cinquième partie

Conclusion

**L'industrie et le génie civil** utilisent des structures conçues pour avoir une longue durée de vie. Cependant elles peuvent s'altérer localement : des défauts peuvent apparaître, par exemple sous l'effet de températures ou de pression extrêmes, ou en présence d'agents chimiques corrosifs.

De petite taille au début, ils peuvent se propager et leur évolution peut être nuisible à la structure. Les détecter le plus tôt possible permet de limiter au maximum les dommages qu'ils peuvent causer.

Le CND par CF est bien adapté à la détection de défauts de petites tailles dans des matériaux conducteurs, par exemple il est fréquemment utilisé pour le contrôle des tubes de générateurs de vapeurs.

**Une activité du service SYSCC** est le développement de modèles de simulation de CND par CF. Des modules de calcul des réponses de sondes de différents types (à fonctions communes ou séparées, avec ou sans noyau de ferrite) au-dessus de configurations de géométries diverses (planes, cylindriques) comportant des défauts volumiques, ont été implantés sur la plateforme de simulation CIVA.

Ils effectuent la résolution numérique des équations intégrales de champ obtenues par formalisme par intégrale de volume et dyades de Green, d'où leur dénomination "VIM". Le défaut y est pris en compte formellement comme une source fictive secondaire de courant, décrite par une densité volumique de courant.

**Cependant**, si l'on souhaite calculer la réponse de la sonde en présence d'un défaut d'ouverture petite, des problèmes numériques apparaissent et les temps de calcul deviennent importants. En effet, la composante tangentielle du champ primaire varie très brutalement autour du défaut. La résolution numérique des équations nécessite notamment une discrétisation fine dans la direction de l'ouverture du défaut.

C'est pourquoi on a développé un modèle spécifique pour lequel le défaut de petite ouverture est représenté par un défaut idéal, caractérisé par une ouverture infiniment petite et totalement imperméable aux courants. L'interaction des courants induits d'excitation avec ce défaut idéal est approchée par l'interaction des courants avec une source secondaire fictive dipôle de courant, décrite par une fonction scalaire du plan : la densité surfacique de courant. Les équations intégrales de volume deviennent des équations intégrales de surface, d'où le nom du modèle "SIM". Le système numérique à inverser résultant de la discrétisation a une taille beaucoup plus petite que dans le cas de VIM. Cependant, des précautions doivent être prises pour traiter le problème des singularités présentes dans le noyau de l'intégrale. Après avoir étudié différentes mises en oeuvre numériques, nous avons retenu l'approche développée par J. Pàvò, caractérisée par le calcul de l'intégrale de l'équation d'état par passage dans le domaine spectral et la décomposition de la densité de dipôle sur une base de modes de Fourier. La configuration de contrôle envisagée comporte une plaque, décrite formellement comme un milieu stratifié à trois interfaces.

**Des validations** ont été menées avec une sonde constituée d'une bobine et fonctionnant en mode émission - réception commune dans un premier temps. Les réponses de la sonde calculées par SIM ont été comparées à celles calculées par VIM et obtenues expérimentalement sur des benchmarks académiques. Puis une étude sur un dispositif réel a été menée. On constate que les amplitudes des réponses calculées par le modèle SIM sont légèrement inférieures à celles calculées par VIM et obtenues expérimentalement.

Dans un second temps, une sonde composée de deux bobines fonctionnant en mode émission - réception séparées a été envisagée, pour deux orientations de la sonde par rapport au défaut. Pour une de ces orientations, on a constaté une différence de forme très importante entre les réponses calculées par SIM et VIM.

Ces deux types de problème proviennent des hypothèses simplificatrices introduites pour développer le modèle SIM.

**Un formalisme hybride** (noté HybM) qui combine les modèles VIM et SIM, a été développé, pour ré-introduire partiellement l'effet de l'ouverture du défaut. La densité de dipôle à déterminer reste surfacique, assimilant le défaut à une source fictive secondaire de courants surfaciques. Mais le calcul de l'impédance s'effectue sur le volume du défaut. De plus, il prend en compte toutes les composantes du champ incident primaire, et non plus seulement la composante normale à la surface du défaut.

**Des validations** de ce nouveau modèle ont été effectuées. Les réponses calculées par HybM ont été

comparées aux réponses calculées par SIM et VIM sur des benchmarks académiques, pour des sondes fonctionnant en mode émission - réception communes et séparées. Une expérience avec une sonde fonctionnant en mode émission - réception séparées a été spécifiquement menée. Le modèle HybM apporte les corrections nécessaires au modèle SIM. Les résultats de simulation deviennent tout à fait satisfaisants dans toutes les configurations de contrôle étudiées. De plus, les performances en temps de calcul sont de l'ordre de celles du modèle SIM, tout en bénéficiant d'une précision proche de celle de la méthode VIM.

La méthode HybM sera intégrée à la version 9 de CIVA.

# Bibliographie

- [AJM88] B.A. Auld, S.R. Jefferies, and J.C. Moulder. Eddy-current signal analysis and inversion for semielliptical surface cracks. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 7(1/2) :79–94, 1988.
- [AM99] B.A. Auld and J.C. Moulder. Review of advances in quantitative eddy current nondestructive evaluation. *Journal of Non-Destructive Evaluation*, 18(1) :3–36, 1999.
- [Ame77] W.F. Ames. *Numerical methods for partial differential equations*. Academic Press, New York, 1977.
- [BB02] P. Beltrame and N. Burais. Computing methods of hypersingular integral applied to eddy-current testing. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2) :1269–1272, 2002.
- [BB04] P. Beltrame and N. Burais. Generalization of the ideal crack model in eddy-current testing. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(2) :1366–1369, 2004.
- [Bel02] P. Beltrame. *Modélisation de la perturbation électromagnétique au voisinage d'une fissure mince dans un matériau conducteur : Application au Contrôle Non Destructif par courants de Foucault*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, Décembre 2002.
- [BH98] J.R. Bowler and N. Harfield. Evaluation of probe impedance due to thin-skin eddy-current interaction with surface cracks. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(2) :515–523, March 1998.
- [BH00] J.R. Bowler and N. Harfield. Thin-skin eddy-current interaction with semi-elliptical and epi-cyclic cracks. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(1) :281–291, 2000.
- [BJSS91] J.R. Bowler, S.A. Jenkins, L.D. Sabbagh, and H.A. Sabbagh. Eddy current probe impedance due to a volumetric flaw. *Journal Applied Physics*, 70(3) :1107–1114, August 1991.
- [BKM<sup>+</sup>94] Z. Badics, H. Komatsu, Y. Matsumoto, K. Aoki, F. Nakayasu, and K. Miya. A thin sheet finite element crack model in eddy current nde. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5) :3080–3083, September 1994.
- [Bon95] Marc Bonnet. *Equations intégrales et éléments de frontière, Applications en mécanique des solides et des fluides*. Sciences et techniques de l'ingénieur. CNRS Editions, Eyrolles, 1995.
- [Bow86] J.R. Bowler. Eddy current field theory for a flawed conducting half-space. *Review of Progress in Quantitative NDE*, 5A :149–155, 1986.
- [Bow87] J.R. Bowler. Eddy current calculations using half-space Green's functions. *Journal of Applied Physics*, 61(3) :833–839, 1987.
- [Bow94] J.R. Bowler. Eddy-current interaction with an ideal crack. part I : The forward problem. *Journal of Applied Physics*, 75(12) :8128–8137, June 1994.
- [Bow02] J.R. Bowler. *Theory of eddy current crack response*. Center for Nondestructive Evaluation, Iowa State University, Ames, IA USA, December 2002.
- [BPM04] Y. Le Bihan, J. Pàvò, and C. Marchand. Calculation of the ect signal of a minute crack by a fem-bim hybrid method. *European Physical Journal - Applied Physics*, 28(3) :355–360, 2004.
- [BPP<sup>+</sup>05] F. Buvat, G. Pichenot, D. Prémel, D. Lesselier, M. Lambert, H. Voillaume, and J.P. Choffy. Eddy-current modelling of ferrite-cored probes. In D.O. Thompson and D.E. Chimenti, editors, *Review of Progress in Quantitative Non-destructive Evaluation (QNDE)*, volume 24, pages 463–470. AIP, July 2005.

- [BRT00] D. Boulanger, J. Reuchet, and G. Turluer. Corrosion secondaire des tubes de générateurs de vapeur. enjeux et besoin de R & D. *IRSN*, 2000.
- [Bur87] S.K. Burke. Eddy current induction by a coil near a conducting edge in 2d. In D.O. Thompson and D.E. Chimenti, editors, *Review of Progress in Quantitative Non-destructive Evaluation (QNDE)*, volume 6A, pages 169–175. Plenum Press, July 1987.
- [BYH97] J.R. Bowler, Y. Yoshida, and N. Harfield. Vector potential boundary integral formulation for the evaluation of eddy current interaction with a crack. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(5) :4287–4294, 1997.
- [Che90] W.C. Chew. *Waves and fields in inhomogeneous media*. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, ISBN 0-442-23816-9, New York, 1990.
- [dB01] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, 2001.
- [DL88] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*. Masson, 1988.
- [DSJW00] C. Dezhi, K.R. Shao, S. Jianni, and Y. Weili. Eddy current interaction with a thin-opening crack in a plate conductor. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4) :1745–1749, July 2000.
- [Euv87] D. Euvrard. *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1987.
- [GKRR92] M. Guiggiani, G. Krishnasamy, T.J. Rudolphi, and F.J. Rizzo. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 59 :604–614, 1992.
- [GPDV<sup>+</sup>06] C. Gilles-Pascaud, J.M. Decitre, F. Vacher, C. Fermon, M. Pannetier, and G. Cattiaux. Eddy current flexible probes for complex geometries. *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation Volume 25, AIP Conference Proceedings*, 820 :399–406, 2006.
- [Har87] R.F. Harrington. The method of moments in electromagnetics. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 1(3) :181–200, 1987.
- [Jed01] F. Jędrzejewski. *Introduction aux méthodes numériques*. Springer, 2001.
- [KSF77] A.H. Kahn, R. Spal, and A. Feldman. Eddy current losses due to a surface crack in conducting material. *Journal of Applied Physics*, 48(11) :4454–4459, November 1977.
- [Moo05] T. Moore. The challenge of nuclear fuel reliability. *EPRI Journal*, Fall 2005.
- [Mus72] N.I. Muskhelishvili. *Singular integral equations*. Wolters-Noordhoff, Holland, 1972.
- [NR90] S.M. Nair and J.H. Rose. Electromagnetic induction (eddy currents) in a conducting half-space in the absence and presence of inhomogeneities : A new formalism. *Journal of Applied Physics*, 68(12) :5995–6009, 1990.
- [P92] J. Pàvò. *Reconstruction of crack shape in a conducting plate using eddy current measurements*. PhD thesis, University of Tokyo, 1992.
- [PL06] J. Pàvò and D. Lesselier. Calculation of eddy current testing probe signal with global approximation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4) :1419–1422, April 2006.
- [PM94] J. Pàvò and K. Miya. Reconstruction of crack shape by optimization using eddy current field measurement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5) :3407–3410, September 1994.
- [PMPL07] J. Pàvò, L. Maurice, D. Prémel, and D. Lesselier. Error estimation of calculated ECT signal due to thin crack in a plate using a global approximation of the dipole density. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 2007. Accepted for publication.
- [Pou88] A. Le Pourhiet. *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Une première approche*. Cepadues Edition, 1988.
- [PPS04] D. Prémel, G. Pichenot, and T. Sollier. Development of a 3D electromagnetic model for eddy current tubing inspection : application to the simulation of probe eccentricity. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 19(1-4) :521– 525, 2004.
- [Qua01] Alfio Quarteroni. *Méthodes numériques pour le calcul scientifique, programmes en Matlab*. Springer, 2001.

- [Rai74] A. P. Raiche. An integral equation approach to 3D modeling. *Geophysics, Journal of the Royal Astronomy Society*, 36 :363–, 1974.
- [Rha02] M. El Rhabi. *Analyse numérique et résolution par éléments spectraux avec joints des équations tridimensionnelles des équations de l'électromagnétisme*. Thèse de doctorat, Université de Pierre et Marie Curie, 2002.
- [RSS88] T.M. Roberts, H.A. Sabbagh, and L.D. Sabbagh. Electromagnetic interaction with an anisotropic slab. *IEEE Transactions on Magnetism*, 24(6) :3193–3200, 1988.
- [SS86] H.A. Sabbagh and L.D. Sabbagh. An eddy current model for three-dimensional inversion. *IEEE Transactions on Magnetism*, Mag-22(4) :282–291, 1986.
- [Tai93] C.T. Tai. *Dyadic Green functions in electromagnetic theory*. IEEE Press Series on Electromagnetic Waves, Second Edition, ISBN 0-7803-0449-7, IEEE Order Number : PC0348-3, 1993.
- [TB04] T. Theodoulidis and J.R. Bowler. Field and impedance analysis for a long crack in a conductive slab excited by a uniform field at arbitrary frequency. In L. Udpa and N. Bowler, editors, *Electromagnetic Non Destructive Evaluation*, volume 9, pages 7–14. IOS Press, 2004.
- [TUM97] T. Takagi, M. Uesaka, and K. Miya. Electromagnetic NDE research activities in JSAEM. In T. Takagi and *al.*, editors, *Electromagnetic Nondestructive Evaluation*, pages 9–16. IOS Press, Amsterdam, 1997.
- [YB00] Y. Yoshida and J.R. Bowler. A vector potential integral formulation for eddy-current probe response to cracks. *IEEE Transactions on Magnetism*, 36(2) :461–469, March 2000.

# Annexes

## Cinquième partie - Annexe A

# Description des benchmarks étudiés

Cette annexe regroupe les descriptions des benchmarks utilisés pour les validations.

### V.A.1 Benchmark CEA

<i>Benchmark CEA</i>			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	500 kHz	Conductivité :	1.02 MS/m
Rayon interne :	1.0 mm	Epaisseur :	1.55 mm
Rayon externe :	1.624 mm	Défaut	
Hauteur :	2 mm	Longueur :	4.0 mm
Entrefer :	0.302 mm	Profondeur :	0.61 mm
Nombre de spires :	328	Epaisseur :	0.11 mm
Rapport profondeur/longueur : 15.25%			
Rapport ouverture / longueur : 5.75%			
Epaisseur de peau $\delta$ : 0.7 mm			

### V.A.2 Benchmark "Team Workshop N°15"

<i>Benchmark "Team Workshop N°15"</i>			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	900 Hz	Conductivité :	30.6 MS/m
Rayon interne :	6.15 mm	Epaisseur :	12.22 mm
Rayon externe :	12.4 mm	Défaut	
Hauteur :	6.15 mm	Longueur :	12.6 mm
Entrefer :	0.88 mm	Profondeur :	5 mm
Nombre de spires :	3790	Epaisseur :	0.28 mm
Rapport profondeur/longueur : 40%			
Rapport ouverture / longueur : 2%			
Epaisseur de peau $\delta$ : 3 mm			

### V.A.3 Benchmark CNDE et sa variante à 150 kHz

<i>Benchmark CNDE</i>			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	300 kHz	Conductivité :	0.8 MS/m
Rayon interne :	0.6 mm	Epaisseur :	1.265 mm
Rayon externe :	1.6 mm	Défaut	
Hauteur :	0.8 mm	Longueur :	5.435 mm
Entrefer :	0.458 mm	Profondeur :	0.46 mm
Nombre de spires :	140	Epaisseur :	0.27 mm
Rapport profondeur/longueur : 8.5%			
Rapport ouverture / longueur : 5%			
Epaisseur de peau $\delta$ : 1 mm			

<i>Benchmark CNDE à 150 kHz</i>			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	150 kHz	Conductivité :	0.8 MS/m
Rayon interne :	0.6 mm	Epaisseur :	1.265 mm
Rayon externe :	1.6 mm	Défaut	
Hauteur :	0.8 mm	Longueur :	5.435 mm
Entrefer :	0.458 mm	Profondeur :	0.46 mm
Nombre de spires :	140	Epaisseur :	0.27 mm
Rapport profondeur/longueur : 8.5%			
Rapport ouverture / longueur : 5%			
Epaisseur de peau $\delta$ : 1.5 mm			

### V.A.4 Benchmark JSAEM : Défaut 100 %

<i>Benchmark 16</i>			
Excitation		Specimen	
Fréquence :	150 kHz	Conductivité :	1 MS/m
Rayon interne :	0.6 mm	Epaisseur :	1.25 mm
Rayon externe :	1.6 mm	Défaut	
Hauteur :	0.8 mm	Longueur :	10 mm
Entrefer :	0.5 mm	Profondeur :	1.25 mm
Nombre de spires :	140	Epaisseur :	0.21 mm
Rapport profondeur/longueur : 12.5%			
Rapport ouverture / longueur : 2%			
Epaisseur de peau $\delta$ : 1.3 mm			

## Cinquième partie - Annexe B

# Résolution numérique de l'équation d'état dans le cas volumique

Cette annexe présente la résolution numérique de l'équation II.2.12, page 33, pour obtenir la densité volumique de dipôle dans le cadre de la "Volumic Integral Method" (VIM).

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_{20}(\mathbf{r}) + k_{20}^2 f(\mathbf{r}) \int_V \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.12})$$

## Discrétisation des équations intégrales par méthode de collocation

La méthode de collocation est un cas particulier de la méthode des moments [Har87, Jed01, Pou88, Ame77]. Ici on choisit un nombre de fonctions de base égal au nombre de fonctions tests.

On définit  $N$  points de collocation  $(\mathbf{r}_i)_{i=1}^N$  répartis uniformément sur le domaine du défaut.

Soit  $\Delta\mathbf{r}$  l'écart entre deux points de collocation successifs.

Les fonctions de base choisies sont par exemple des fonctions triangle définies par :

$$\varphi_i(\mathbf{r}) = 1 - \left| \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{\Delta\mathbf{r}} \right| \text{ si } \mathbf{r} \in [\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_{i+1}]$$

Les fonctions tests choisies sont les fonctions de Diracs définies au point de collocation :

$$\omega_i(\mathbf{r}) = \delta_i(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

On décompose  $\mathbf{J}_2(\mathbf{r})$  sur la base de  $N$  fonctions  $\varphi_i(\mathbf{r})$  choisies :

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_{2i} \varphi_i(\mathbf{r})$$

En remplaçant  $\mathbf{J}_2(\mathbf{r})$  par sa décomposition dans l'équation II.2.12, donnée page 33, cela nous donne :

$$\mathbf{J}_{20}(\mathbf{r}) = - \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_{2i} \varphi_i(\mathbf{r}) + k_{20}^2 f(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_{2i} \int \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

Puis on procède au produit scalaire sur la base de fonctions tests choisies égales aux fonctions de Dirac. On obtient

$$\mathbf{J}_{20}(\mathbf{r}_j) = \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_{2i} \left[ \varphi_i(\mathbf{r}_j) - k_{20}^2 \int_D \langle \overline{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}), \delta_j(\mathbf{r}) \rangle \varphi_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right] \quad (\text{V.B.1})$$

On utilise les notations matricielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J}_2 = [\mathbf{J}_{2i}]_{i=1}^N \\ \mathbf{J}_{20} = [\mathbf{J}_{20i}]_{i=1}^N \\ \bar{\mathbf{I}} = [\Psi_i(\mathbf{r}_j)]_{i,j=1}^N \\ \bar{\mathbf{G}} = \left[ k_{20}^2 \int_D \langle \bar{\mathbf{G}}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}), \delta_j(\mathbf{r}) \rangle \varphi_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right]_{i,j=1} \end{array} \right.$$

(V.B.1) devient :

$$\mathbf{J}_2 = [\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{G}}]^{-1} \mathbf{J}_{20}$$

On utilise la méthode de Galerkin, avec comme choix de fonctions de base et fonctions tests, des fonctions "porte"  $\pi$ , aussi appelées fonctions pulse, décrites dans [BJSS91].

## Décomposition de la fonction densité volumique de dipôle

La densité volumique de dipôle  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  est décomposée sur une base de fonctions porte :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} p_{ijk} \pi_{\mathbf{x}}^i \left( \frac{(x - x_i)}{dx} \right) \pi_{\mathbf{y}}^j \left( \frac{(y - y_j)}{dy} \right) \pi_{\mathbf{z}}^k \left( \frac{(z - z_k)}{dz} \right) \quad (\text{V.B.2})$$

$\pi_{\mathbf{x}}^i$  est la fonction pulse dans la direction  $\mathbf{x}$ , définie par rapport au point  $x_i$ . Nous avons de même pour les directions  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ .

## Explicitation de la discrétisation volumique

Soit une plaque infinie d'épaisseur  $e$ . Les axes  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  sont choisis de sorte que la plaque est infinie dans les directions  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , et que l'axe  $\mathbf{z}$  est l'axe de l'épaisseur de la plaque, comme représenté sur la figure V.B.1. Considérons un défaut volumique parallélépipédique. Ses dimensions sont appelées ainsi :

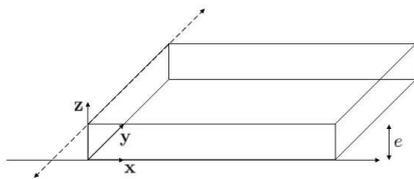


FIG. V.B.1 – Exemple de plaque infinie.

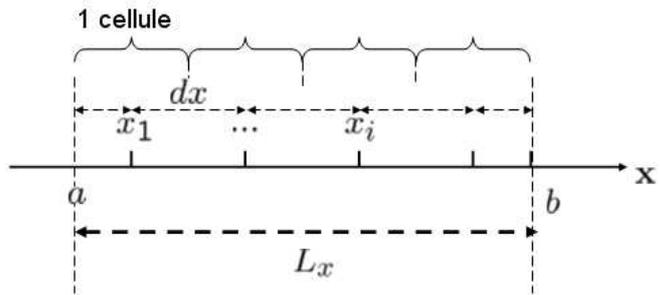


FIG. V.B.2 – Discrétisation de l'axe  $x$ .

$L_x$  : "épaisseur" : dimension de la plaque orientée selon l'axe  $\mathbf{x}$

$L_y$  : "longueur" : dimension de la plaque orientée selon l'axe  $\mathbf{y}$

$L_z$  : "profondeur" : dimension de la plaque orientée selon l'axe  $\mathbf{z}$

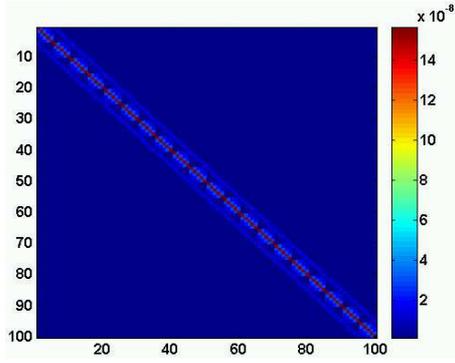


FIG. V.B.3 – Représentation de la structure d’une matrice VIM obtenue par méthode de collocation.

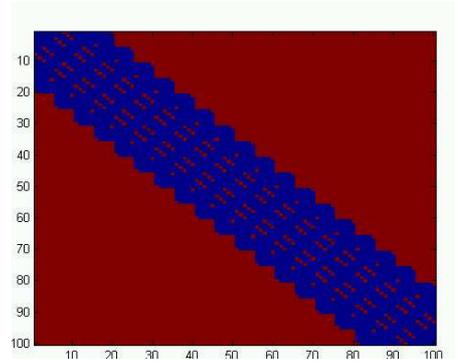


FIG. V.B.4 – Matrice G22 seuillée à  $1.7 \cdot 10^{-10}$ .

Le volume du défaut est discrétisé en  $n_x \times n_y \times n_z$  cellules, avec

$n_x$  : nombre de cellules de discrétisation dans la direction  $x$

$n_y$  : nombre de cellules de discrétisation dans la direction  $y$

$n_z$  : nombre de cellules de discrétisation dans la direction  $z$

Définissons les fonctions porte sur l’axe  $\mathbf{x}$ .

Soient  $a$  et  $b$  les abscisses telles que  $[a, b] = L_x$ , comme représenté sur la figure V.B.2.

Soit  $dx = \frac{L_x}{n_x}$ .

Soient  $n_x$  points  $(x_i)_{i=1}^{n_x}$  situés chacun au centre de chaque cellule,

$$x_i = a + \frac{dx}{2} + (i - 1) \cdot dx$$

Alors

$$\pi_{\mathbf{x}}^i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [x_i - \frac{dx}{2}, x_i + \frac{dx}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{V.B.3})$$

et de même dans les directions  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ .

## Illustration de la structure de la matrice G22 ainsi obtenue

La figure V.B.3 représente la structure de la matrice G22 obtenue par méthode de collocation. On remarque qu’elle est diagonale par bande comme prévu. L’amplitude maximale obtenue est de  $1.5803 \cdot 10^{-7}$  pour tous les éléments diagonaux, et la valeur minimale  $1.6963 \cdot 10^{-12}$ .

Sur la figure V.B.4 sont représentés d’une couleur les éléments de la matrice dont l’amplitude est inférieure à  $1.7e - 10$ . Les éléments dont l’amplitude est supérieure à cette valeur forment bien une matrice diagonale par bande.

## Cinquième partie - Annexe C

# Annexe relative au calcul de la dyade dans le domaine spatial

Cette annexe a pour objet d'apporter un complément à la description de la résolution de l'équation II.2.28

$$\mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in S} i\omega\mu_0 \int_S G_{22}^{\text{nn}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \forall \mathbf{r}_0 \in S \quad (\text{II.2.28})$$

dans le domaine spatial, par décomposition de la dyade et méthode de collocation avec comme choix de fonctions de base les fonctions de forme, présentée au chapitre 1 de la partie III.

L'objet de la section V.C.1 est d'apporter un complément d'informations sur les fonctions de forme.

Dans la section V.C.2, les calculs nécessaires pour passer l'intégrale dans sa forme III.1.20 page 46 :

$$L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_c) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_c} \int_{(e)} \left( 2j + \frac{j+1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \right) g_0(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) N_i^{(e)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.1.20})$$

à sa forme III.1.24 page 47 :

$$\begin{aligned} L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_c^{(e)}) = & \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \left( \left[ -2jr - (j+1) + \frac{1}{r} \right] \cdot g_0(r) N_i^{(e)}(r, \theta) \right. \\ & \left. - \frac{\left( \exp(jkr) \cdot N_i^{(e)}(r, \theta) \right)_{|(0,0)}}{r^2} - \frac{\vec{\nabla} \left( \exp(jkr) N_i^{(e)}(r, \theta) \right)_{|(0,0)} \cdot \vec{r} dr}{r^2} \right) dr d\theta \\ & + 4 \left( \frac{\sin \theta}{lry} + \frac{\cos \theta}{lrz} \right) N_i^{(e)}(0, 0) \end{aligned} \quad (\text{III.1.24})$$

sont présentés.

### V.C.1 Fonctions de forme

Les "fonctions de forme"  $N_i$  sont des fonctions de base utilisées en éléments finis [DL88] vol. 6, [Pou88] page 331, ou pour la description d'approximation de surfaces [Bon95].

Ce sont en fait des fonctions d'interpolation lagrangiennes, c'est à dire définies sur un élément de référence ( $\epsilon_{\text{REF}}$ ) comportant  $N$  noeuds de coordonnées  $\mathbf{r}_j$ ,  $\forall j = 1$  à  $N$ . Elles vérifient :

$$N_i(\mathbf{r}_j) = \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \forall (i, j) = 1 \text{ à } N. \quad (\text{V.C.1})$$

Elles sont couramment polynomiales, comme c'est le cas ici. Par exemple, en 1D, l'élément de référence est un segment, décrit par des coordonnées locales  $r$ ,  $r \in [-1, 1]$ . Dans le cas d'une interpolation linéaire, on définit 2 noeuds sur l'élément de référence :

$$r_1 \text{ de coordonnée } -1 \quad (\text{V.C.2})$$

$$r_2 \text{ de coordonnée } 1$$

et les polynômes correspondants sont :

$$\begin{aligned} N_1(r) &= \frac{1}{2}(1-r) \\ N_2(r) &= \frac{1}{2}(r+1) \end{aligned} \tag{V.C.3}$$

Dans le cas d'une approximation quadratique, on définit 3 noeuds sur l'élément de référence :

$$\begin{aligned} r_1 &\text{ de coordonnée } -1 \\ r_2 &\text{ de coordonnée } 0 \\ r_3 &\text{ de coordonnée } 1 \end{aligned} \tag{V.C.4}$$

et les polynômes correspondants sont :

$$\begin{aligned} N_1(r) &= \frac{1}{2}(1-r).r \\ N_2(r) &= (1-r)^2 \\ N_3(r) &= \frac{1}{2}(r+1).r \end{aligned} \tag{V.C.5}$$

En dimension 2, les éléments de référence peuvent être des triangles ou des quadrangles. Dans notre cas, on utilise les quadrangles, et on définit 9 noeuds. Cet élément est appelé "complet", par opposition à l'élément quadrangulaire à 8 noeuds, dit "incomplet". Le quadrangle est par exemple décrit par les 2 coordonnées  $(y, z) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Les 9 noeuds  $\mathbf{r}_j$ ,  $\forall j = 1$  à 9 sont placés comme représenté en figure V.C.1, l'ordre de la numérotation étant arbitraire.

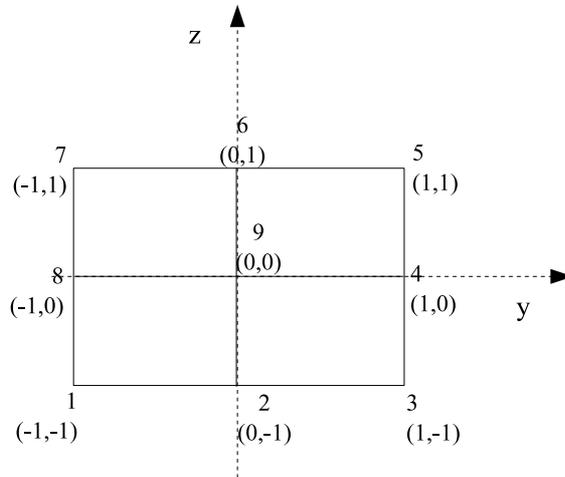


FIG. V.C.1 – Numérotation et coordonnées des points de la cellule.

Les fonctions de base sont obtenues par produit tensoriel des fonctions de base 1D. Dans le cas de l'approximation quadratique par morceaux, elles s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
N_1(y, z) &= \frac{1}{4}y \cdot (y - 1) \cdot z \cdot (z - 1) \\
N_2(y, z) &= \frac{1}{2}(1 - y^2) \cdot z \cdot (z - 1) \\
N_3(y, z) &= \frac{1}{4}y \cdot (y + 1) \cdot z \cdot (z - 1) \\
N_4(y, z) &= \frac{1}{2}y \cdot (y + 1) \cdot (1 - z^2) \\
N_5(y, z) &= \frac{1}{4}y \cdot (y + 1) \cdot z \cdot (z + 1) \\
N_6(y, z) &= \frac{1}{2}(1 - y^2) \cdot z \cdot (z + 1) \\
N_7(y, z) &= \frac{1}{4}y \cdot (y - 1) \cdot z \cdot (z + 1) \\
N_8(y, z) &= \frac{1}{2}y \cdot (y - 1) \cdot (1 - z^2) \\
N_9(y, z) &= (1 - y^2)(1 - z^2)
\end{aligned}$$

Lorsque l'on souhaite approximer une fonction définie sur une surface  $S$  : La surface est découpée en  $N_e$  éléments, et on établit un changement de variables pour transformer sur chaque cellule les variables  $Y$  et  $Z$  définies sur  $S$  en variables locales décrivant l'élément de référence  $y$  et  $z$  telles que  $(y, z) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{Y - Y_9}{lry} \\ z &= \frac{Z - Z_9}{lrz} \end{aligned} \right\} \text{avec } Y_9 \text{ et } Z_9 \text{ coordonnées globales du point 9 de coordonnées } (0, 0).$$

On doit par conséquent tenir compte du facteur de dilatation lors de dérivations.

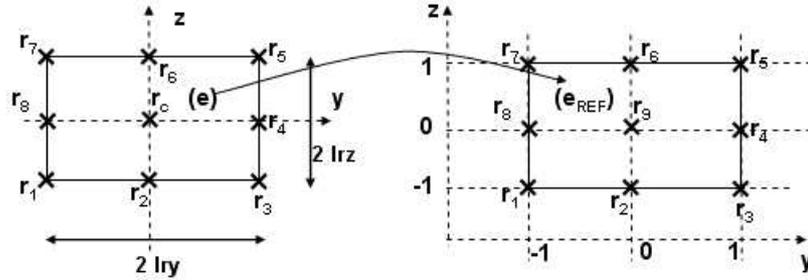


FIG. V.C.2 – Passage d'une cellule  $(e)$  de la surface  $S$  à la cellule de référence  $(e_{REF})$

## V.C.2 Calcul de l'intégrale impliquée dans l'approche avec calcul dans le domaine spectral (chapitre 1, partie III)

Les calculs nécessaires pour passer de l'intégrale dans sa forme III.1.20 page 46 à sa forme III.1.24 page 47 sont présentés. L'intégrale III.1.20

$$L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_c) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_c} \int_{(e)} \left( 2j + \frac{j+1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) g_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N_i^{(e)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{III.1.20})$$

est une somme de termes dont certains sont singuliers, et d'autres hyper singuliers. Ces derniers nécessitent un traitement spécifique. On sépare donc l'intégrale pour isoler les termes hyper singuliers :

$$I_1^{(e),i}(\mathbf{r}_c) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_c} \int_{(e)} \left( 2j + \frac{j+1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot N_i^{(e)}(\mathbf{r}') \cdot g_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (\text{V.C.6})$$

$$I_2^{(e),i}(\mathbf{r}_c) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_c} \int_{(e)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \cdot N_i^{(e)}(\mathbf{r}') \cdot g_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (\text{V.C.7})$$

La référence à l'élément considéré ( $e$ ) ne sera plus rappelée à partir de maintenant, afin d'alléger les notations.

### V.C.2.a Calcul de l'intégrale $I_1^i(r_c)$ par passage en polaire

On définit  $r, \theta$  par

$$\begin{cases} 0 < \theta = \arctan \frac{(z-z')}{(y-y')} + \pi \cdot u_0(-(y-y')) \cdot \text{signe}((z-z')) < 2\pi \\ 0 < r = ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{1/2} < R_0(\theta) \end{cases} \quad (\text{V.C.8})$$

avec  $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' = x_c \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  et  $R_0(\theta)$  correspondant à la distance du centre de la cellule au point  $P_b(\theta)$  du bord

de la cellule, avec  $\theta$  l'angle tel que  $\theta = (\vec{y}, \vec{r}_c P_b)$  comme représenté en figure V.C.4.

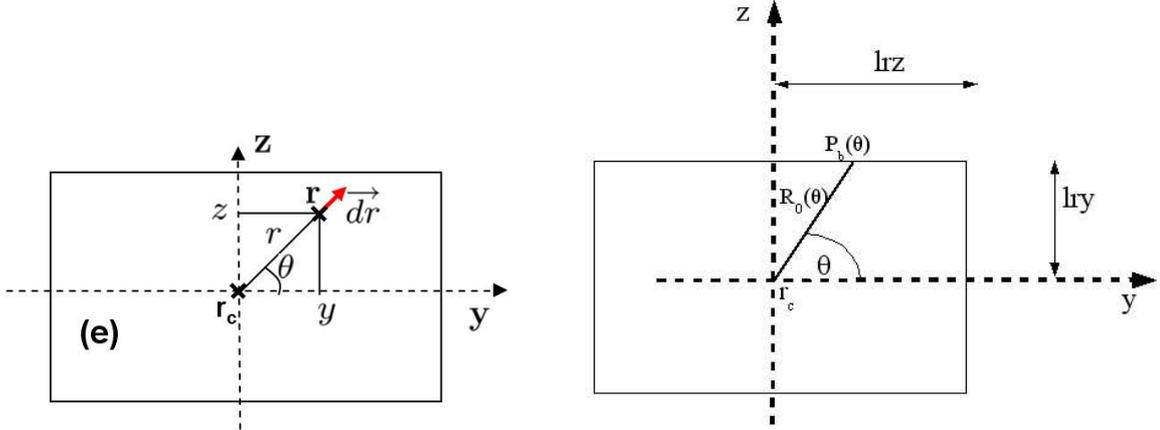


FIG. V.C.3 – Passage en coordonnées polaires.

FIG. V.C.4 – Illustration pour la quantité  $R_0(\theta)$ .

$u_0$  est la fonction de Heaviside définie telle que :

$$\begin{aligned} u_0(y) &= 0 & \text{si } y \leq 0 \\ &= 1 & \text{si } y > 0 \end{aligned}$$

Le passage en coordonnées polaires permet de réduire l'ordre de la singularité, et on obtient :

$$I_{1i}(\mathbf{r}_c) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \left[ 2jr + (j+1) \right] \cdot N_i(r, \theta) \cdot g_0(r) dr d\theta$$

## V.C.2.b Calcul de l'intégrale $I_2^i(\mathbf{r}_c)$ par calcul en partie finie

### Intégrales singulières

Le calcul des intégrales impropres peut s'effectuer de trois manières [Bel02] :

**L'intégrale de Riemann** sur  $[a, x]$  permet de calculer une intégrale impropre en  $b$ , pour  $b \in [a, x]$  par les procédés habituels, puis on recherche la limite éventuelle quand  $x$  tend vers  $b$ .

**Calcul en valeur principale de Cauchy** La valeur principale de Cauchy est introduite pour le calcul de l'intégrale de Cauchy. On trouve de nombreuses références à cette définition de l'intégrale. Elle fait par exemple l'objet de [Mus72]. Quand l'intégrale n'existe pas au sens ordinaire (sens de Riemann), alors il faut la prendre au sens de Cauchy, et ce que l'on peut préciser en utilisant la notation "VP" (même dans les ouvrages anglo-saxons, si l'on se réfère à [Mus72]).

L'intégrale au sens de Cauchy peut par exemple être définie ainsi :

Soit  $[a, b]$  un segment réel.

Soit  $c$  un point du segment  $[a, b]$ .

Soit  $f$  une fonction définie sur le segment  $[a, b]$ , à l'exception du point  $c$ .

On dira que l'intégrale impropre  $I = \int_{[a, b]} f(x) dx$  est convergente si et seulement si les deux intégrales impropres  $\int_{[a, c]} f(x) dx$  et  $\int_{[c, b]} f(x) dx$  sont convergentes (indépendamment l'une de l'autre). On appellera valeur principale de l'intégrale la limite, si elle existe,

$$VP \left\{ \int_{[a, b]} f(x) dx \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{[a, c-\epsilon]} f(x) dx + \int_{[c+\epsilon, b]} f(x) dx \right)$$

*Remarque* : La valeur principale peut exister sans que l'intégrale converge.

*Théorème* : La valeur d'une intégrale impropre convergente est égale à sa valeur principale.

La notion de valeur principale est également définie au sens des distributions par exemple dans [DL88], Vol. 6 page 998, dans le cadre du calcul des intégrales singulières par transformation de Hilbert et par application du théorème de Calderon-Zygmund.

Le calcul en valeur principale permet d'obtenir un résultat pour des intégrales comportant des singularités fortes en  $\frac{1}{r^2}$  [Bel02].

**Le calcul en partie finie.** C'est un outil introduit par Hadamard pour les besoins des équations aux dérivées partielles hyperboliques. Dautray et Lions en donnent une définition au sens des distributions ([DL88], Vol. 4 page 1322) : C'est un moyen pour associer une distribution à une fonction non localement intégrable. Le principe est d'évaluer la partie divergente d'une intégrale de type

$$I = \int_D \frac{f(x')}{(x' - x_0)^n} dx' \quad (\text{V.C.9})$$

avec  $x_0 \in D$ , grâce au développement de Taylor de  $f$  en  $x_0$  à l'ordre  $n - 1$ . L'intégrale  $I$  n'existe pas au sens classique (sens de Riemann), elle doit être comprise au sens de Hadamard.

Dautray et Lions donnent la formule pour une singularité en 0 :

$$\text{Pf} \left\{ \int_0^\infty x^\lambda f(x) dx \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \left( \int_\epsilon^\infty x^\lambda f(x) dx \right) + \sum_{n=0}^{-\lambda-2} f^{(n)} \frac{\epsilon^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1} + f^{(-\lambda-1)} \log \epsilon \right\} \quad (\text{V.C.10})$$

pour  $\lambda = -l$ ,  $l \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . Pour  $\lambda = -1$ , la formule reste valable si la somme sur les  $n$  est omise. En fait, la formule est établie d'une manière générale pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

La notation  $\phi^{(n)}$  désigne la dérivée  $n$ -ième de  $\phi$ .

### Application à $I_2^i(\mathbf{r}_c)$

$$I_2^i(\mathbf{r}_c) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_c} \int_{(e)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \cdot N_i^{(e)}(\mathbf{r}') \cdot g_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (\text{V.C.7})$$

On pose

$$f_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \exp(jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \cdot N_i^{(e)}(\mathbf{r}') \quad (\text{V.C.11})$$

En remplaçant dans V.C.7, on obtient :

$$I_2^i(\mathbf{r}_c) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_c} \int_{(e)} \frac{f_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^3} d\mathbf{r}' \quad (\text{V.C.12})$$

Le passage à la limite va être transformé par un passage à la limite d'un voisinage d'exclusion autour de la singularité. C'est ce qu'on appelle la représentation intérieure. On obtient [GKRR92, Bel02] :

$$I_2^i(\mathbf{r}_c) = \lim_{d \rightarrow 0} \left( \int_{(e)-D} \frac{f_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_c|)^3} d\mathbf{r}' - \frac{2\pi}{d} \cdot f_i(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0) \right)$$

avec  $D$  est la surface du disque d'exclusion de rayon  $d$  qui entoure la singularité.

Introduisons maintenant le développement de Taylor de  $f_i$  en  $\mathbf{r}_0$  par rapport à sa seconde variable :

$$f_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx f_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \nabla f_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0} \cdot \overline{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)} + (|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|)^2 \cdot \tilde{f}_i(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \quad (\text{V.C.13})$$

où  $\tilde{f}_i(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0)$  est la fonction définie par l'équation (V.C.14) :

$$\tilde{f}_i(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|)^2} \cdot \{f_i(\mathbf{r}') - f_i(\mathbf{r}_0) - \nabla f_i(\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \cdot \overline{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}\} \quad (\text{V.C.14})$$

On obtient donc :

$$I_2(\mathbf{r}_0) = \frac{2\pi}{d} \cdot f_i(\mathbf{r}_0) + f_i(\mathbf{r}_0) \cdot c_0 + \nabla f_i(\mathbf{r}_0) \cdot \vec{c}_1 + \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \tilde{f}_i(r, \theta) dr d\theta - \frac{2\pi}{d} \cdot f_i(\mathbf{r}_0)$$

$\tilde{f}_i(r, \theta)$  désigne la fonction correspondant à  $\tilde{f}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  pour des variables polaires définies comme précédemment. avec

$$\begin{aligned} c_0 &= - \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{R_0(\theta)} d\theta \\ \mathbf{c}_1(\mathbf{r}) &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \ln(R_0(\theta)) \cdot \mathbf{u}_r(\theta) d\theta \\ \mathbf{u}_r(\theta) &= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad \text{vecteur unitaire radial} \\ R_0(\theta) &= \frac{lry}{\cos \theta} \quad \text{si } 0 < \theta < \alpha \\ R_0(\theta) &= \frac{lrz}{\sin \theta} \quad \text{si } \alpha < \theta < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Le coefficient vectoriel  $\mathbf{c}_1(\mathbf{r})$  car  $\mathbf{r}_0$  est au centre de symétrie de la cellule. Le terme en  $c_0$  s'ajoute après l'intégration uniquement pour  $i = 9$  par définition des fonctions  $N_i$  choisies par la suite.

$$f_9(\mathbf{r}_0) = \exp(0) = 1$$

$$f_i(\mathbf{r}_0) = 0 \quad \forall i \neq 9$$

$$c_0 = 4 \cdot \left( \int_{\theta=0}^{\alpha} \frac{\cos \theta}{lry} d\theta + \int_{\theta=\alpha}^{\pi} \frac{\sin \theta}{lrz} d\theta \right) = 4 \cdot \left( \frac{\sin \theta}{lry} + \frac{\cos \theta}{lrz} \right)$$

Traisons maintenant le troisième terme de l'intégrale  $I_2^i$ , noté  $I_2^i \rfloor_3(\mathbf{r}_0)$  :

$$\begin{aligned} I_2^i \rfloor_3(\mathbf{r}_0) &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \tilde{f}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dr d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \left[ f_i(\mathbf{r}) - f_i(\mathbf{r}_0) - \nabla f_i(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \right] dr d\theta \end{aligned}$$

En regroupant les termes  $I_1^{(e),i}(\mathbf{r}_c)$  et  $I_1^{(e),i}(\mathbf{r}_c)$  ainsi calculés, on obtient la formulation suivante pour l'intégrale  $L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_c^{(e)})$ , utilisée pour la suite du développement du formalisme du chapitre 1, partie III :

$$\begin{aligned}
L_{el}^{(e),i}(\mathbf{r}_c^{(e)}) = & \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0(\theta)} \left( \left[ -2jr - (j+1) + \frac{1}{r} \right] \cdot g_0(r) N_i^{(e)}(r, \theta) \right. \\
& \left. - \frac{\left( \exp(jkr) \cdot N_i^{(e)}(r, \theta) \right)_{|(0,0)}}{r^2} - \frac{\vec{\nabla} \left( \exp(jkr) N_i^{(e)}(r, \theta) \right)_{|(0,0)} \cdot r \vec{dr}}{r^2} \right) dr d\theta \quad (\text{III.1.24}) \\
& + 4 \left( \frac{\sin \theta}{lry} + \frac{\cos \theta}{lrz} \right) N_i^{(e)}(0, 0)
\end{aligned}$$

## Cinquième partie - Annexe D

# Relations constitutives

Il existe un tenseur qui lie les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$ . De même pour les champs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$ , et  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{J}_c$ . Ces tenseurs sont des grandeurs complexes. Les relations ainsi établies sont appelées relations constitutives du milieu.

### V.D.1 Permittivité diélectrique

Sous l'effet d'un champ électrique, le mouvement de charges liées est caractérisé par le tenseur des permittivités électriques  $\underline{\epsilon}$  (F/m), qui décrit le pouvoir de polarisation du milieu. Plus un matériau est isolant, plus sa permittivité est élevée. Le vecteur de déplacement électrique  $\mathbf{D}$  et le vecteur champ électrique  $\mathbf{E}$  sont liés par la relation :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \underline{\epsilon}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{V.D.1})$$

### V.D.2 Perméabilité magnétique

Sous l'effet d'un champ magnétique, la polarisation de la rotation des électrons autour de leurs noyaux est caractérisée par le tenseur des perméabilités magnétiques  $\underline{\mu}$  (H/m), qui décrit le pouvoir de polarisation du milieu. Le vecteur d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  (Webers/m<sup>2</sup>) est une fonction du champ magnétique  $\mathbf{H}$  (A/m) et s'écrit :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mu}(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{V.D.2})$$

Les valeurs de perméabilité magnétique ne sont pas fixes et dépendent de nombreux paramètres comme par exemple la température.

### V.D.3 Conductivité électrique

Sous l'effet d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  (V/m), le mouvement des charges libres est caractérisé par le tenseur des conductivités électriques  $\underline{\sigma}$  (S/m) selon la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) = \underline{\sigma}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \text{ où } \mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) \text{ est le courant de conduction (en } A/m^2).$$

Selon les matériaux,  $\sigma$  varie de  $10^8$  S/m à  $10^{-22}$  S/m. La conductivité caractérise la résistance au passage du courant ou de la chaleur dans un matériau. La caractéristique inverse est la résistivité.

La conductivité d'un bon conducteur, tel que l'argent ou le cuivre peut être plus d'un million de fois supérieure à celle d'un bon isolant comme le verre ou le mica. On observe un phénomène de supraconductivité lorsque certaines substances sont refroidies à une température voisine du zéro absolu : leur conductivité devient alors quasi infinie.

Le cuivre pur est un excellent conducteur d'électricité d'une conductivité égale à 95% de celle de l'argent. On utilise le cuivre pour sa conductivité électrique, la plus importante de tous les métaux industriels. Ainsi, on l'emploie pour fabriquer des dispositifs électriques, tels que les câbles, les fils ou les appareillages électriques.

La conductivité de l'air est de  $10^{-8}$  S/m.

## V.D.4 Cas d'un milieu linéaire, isotrope, non ferromagnétique et homogène

Un matériau linéaire est un matériau dans lequel s'applique le principe de superposition. Un corps est dit isotrope lorsqu'il présente les mêmes propriétés dans toutes les directions. Dans le cas d'un matériau linéaire, isotrope et homogène, les tenseurs présentés se réduisent à leurs termes diagonaux qui sont tous égaux. Le cas échéant, la non nullité des éléments non diagonaux rend compte du caractère anisotrope du matériau considéré.

Dans un milieu linéaire, isotrope, non ferromagnétique et homogène, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{V.D.3a})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{V.D.3b})$$

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{V.D.3c})$$

On définit les constantes du vide :

$$\text{permittivité du vide} \quad \epsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9} = 8,85 \times 10^{-12} C^2 / (N \cdot m^2) \quad (\text{V.D.4a})$$

$$= 8,85 \times 10^{-12} F/m \quad (\text{V.D.4b})$$

$$\text{perméabilité du vide} \quad \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} H/m \quad (\text{V.D.4c})$$

Issue des équations de Maxwell, la relation suivante entre  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  s'écrit :

$$\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot c^2 = 1$$

avec  $c = 2.99 \cdot 10^9 \text{ m/s}$  : vitesse de la lumière

## V.D.5 Permittivité et perméabilité relatives

Pour un matériau donné de permittivité  $\epsilon$  et de perméabilité  $\mu$ , il est possible de définir les quantités relatives associées normalisées par rapport aux constantes du vide.

$$\text{Permittivité relative} \quad \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

$$\text{Perméabilité relative} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Ces valeurs ne possèdent pas d'unité.

**Permittivité relative** La permittivité relative se nomme aussi constante diélectrique. C'est une valeur qui varie de 1 à l'infini. Voici quelques exemples de valeurs de permittivité relative :

Air	:	1
Papier paraffiné	:	2
Polystyrène	:	2.5
Verre	:	4 à 6
Diamant	:	5.5

La permittivité relative des matériaux avec lesquels nous travaillons (aluminium, inconel, alliages ferromagnétiques) est égale à 1.

**Perméabilité relative** La valeur de la perméabilité relative d'un matériau dépend de ses propriétés magnétiques, dues elles-mêmes à la rotation de l'électron autour de l'atome. On peut classer les matériaux en fonction de leurs propriétés magnétiques, et à chaque catégorie va correspondre une fourchette de valeur de perméabilité relative. Voici une classification simplifiée, en réalité les phénomènes sont plus complexes.

**Matériau diamagnétique** Le champ propre aux électrons d'un matériau diamagnétique placé dans un champ magnétique s'oriente en sens contraire au champ qui les a déplacés. L'effet est faible. La perméabilité relative correspondante est très légèrement inférieure à 1. Comme matériaux diamagnétiques, on peut citer le cuivre, le zinc, l'or et l'argon.

**Matériau paramagnétique** La réaction d'un matériau paramagnétique placé dans un champ magnétique est encore faible, mais cette fois ci les électrons s'orientent de telle façon que leur champ propre s'oriente dans le même sens que le champ qui les a déplacé. La permittivité relative correspondante est très légèrement supérieure à 1. Comme matériaux paramagnétiques, on peut citer l'aluminium, le platine et le manganèse.

**Matériau ferri / ferro magnétique** Le champ propre des électrons s'oriente encore dans le même sens que le champ qui les a déplacés, mais pour cette catégorie de matériau l'effet du champ est bien plus fort. La perméabilité relative peut être très élevée. La loi constitutive  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  devient approximative, en réalité, à partir d'une certaine valeur de  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  n'augmente plus. Le fer, le nickel, l'acier et le cobalt sont des matériaux ferromagnétiques. De plus, on distingue différent types de ferromagnétismes.

# Théorèmes de Green Ostrogradsky et de Stokes

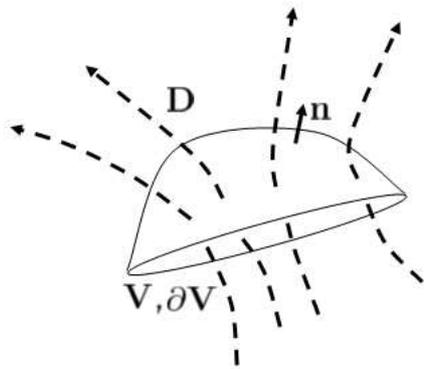


FIG. V.E.1 – Flux d'un champ de vecteurs à travers la surface  $\partial V$

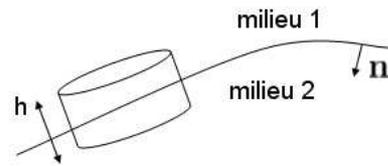


FIG. V.E.2 – Choix d'un cylindre à l'interface des milieux 1 et 2 pour application du théorème de Green Ostrogradsky

**Théorème de Green Ostrogradsky** Soit  $V$  un volume délimité par une surface  $\partial V = S$ , comme représenté en figure V.E.1.  $S$  est donc une surface fermée. Alors le théorème de Green Ostrogradsky, aussi appelé théorème de flux divergence, relie la divergence d'un champ vectoriel  $\mathbf{D}$  à la valeur de l'intégrale de surface du flux défini par ce champ.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{V.E.1})$$

$dv$  est l'élément unitaire infinitésimal de volume,  $\mathbf{n}$  est la normale à  $\partial V$ ,  $ds$  l'élément infinitésimal de surface.

**Théorème de Stokes** Le théorème de Stokes, également appelé théorème de Stokes-Ampère, relie le flux du rotationnel d'un champ vectoriel à travers une surface  $S$  avec la circulation du champ sur le contour  $\partial S = \Gamma$  de celle-ci.

$$\int_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot \overline{ds} = \oint_S \nabla \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{V.E.2})$$

## Cinquième partie - Annexe F

# Liste des communications et publications liées (au 30 septembre 2006)

### Conférences avec actes

J. Pávó, L. Maurice, D. Prémel, D. Lesselier, "Error Estimation of Calculated ECT Signal due to Thin Crack in a Plate Using a Global Approximation of the Dipole Density", *11th International Symposium on Applied Electromagnetics and Mechanics (ISEM 2005)*, Bad Gastein, Autriche, pages 292-295, Septembre 2005.

L. Maurice, D. Prémel, J. Pávó, D. Lesselier, A. Nicolas, "Volumetric and surface flaw models for the computation of the EC T/R probe signal due to a thin opening flaw", *11th International Workshop on Electromagnetic Nondestructive Evaluation (ENDE 2006)* Iwate, Japan, 14 -16 Juin 2006.

L. Maurice, D. Prémel, J. Pávó, D. Lesselier, A. Nicolas, "Hybridization of volumetric and surface models for the T/R EC probe response due to a thin opening, 2006", à paraître, Proc. *7th International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF 2006)* Aussois, Juin 2006.

L. Maurice, D. Prémel, A. Nicolas, G. Pichenot, J. Pávó, D. Lesselier, "Modélisation Courants de Foucaults de Défauts Plans", *Journées COFREND de Beaune (Mai 2005)*.

### Revue internationale

J. Pávó, L. Maurice, D. Prémel, D. Lesselier, "Error Estimation of Calculated ECT Signal due to Thin Crack in a Plate Using a Global Approximation of the Dipole Density", *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, IJAEM*, IOS Press, 2006. Suite à ISEM 2005. En cours d'édition.

L. Maurice, D. Prémel, J. Pávó, D. Lesselier, A. Nicolas, "Volumetric and surface flaw models for the computation of the EC T/R probe signal due to a thin opening flaw", soumis à publication dans *Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, Electromagnetic Non- Destructive Evaluation*.

L. Maurice, D. Prémel, J. Pávó, D. Lesselier, A. Nicolas, "Hybridization of volumetric and surface models for the T/R EC probe response due to a thin opening, 2006", à paraître, Proc. *7th International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF 2006)* Aussois, Juin 2006.



## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 avril 2002,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur A. NICOLAS

et les rapports de

Monsieur G. MEUNIER

Directeur de Recherche CNRS - LEG - ENSIEG - BP 46 - 38402 SAINT-MARTIN-D'HERES cedex

et de

Monsieur C. MARCHAND

Professeur - Laboratoire de Génie Electrique de Paris - Plateau du Moulon - 11 rue Joliot Curie -  
91192 GIF SUR YVETTE

**Mademoiselle MAURICE Léa**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE (EEA)**

Fait à Ecully, le 12 décembre 2006

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
Le Directeur des Etudes

