

T H E S E

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR-INGENIEUR

Spécialité : Génie électrique.

par M. Laurent Krähenbühl
ingénieur E.P.F.L.

La méthode des équations intégrales de frontière
pour la résolution des problèmes de potentiel en
électrotechnique, et sa formulation axisymétrique.

soutenue le 16 décembre 1983
devant la commission d'examen

Jury: M. J.C. Sabonnadière, Président

et MM. B. Ancelle,
A. Foggia,
M. Jufer,
M. Lajoie-Mazenc et
A. Nicolas.

ECOLE CENTRALE DE LYON

DIRECTEUR **A. MOIROUX**
DIRECTEUR ADJOINT **R. RICHE**

DEPARTEMENTS D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE

MATHEMATIQUES-INFORMATIQUE-SYSTEMES	C.M. BRAUNER J.F. MAITRE
PHYSICOCHIMIE DES MATERIAUX	P. CLECHET J. CURRAN
METALLURGIE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX	P. GUIRALDENQ D. TREHEUX
ELECTRONIQUE	J.J. URGELL P. VIKTOROVITCH S. KRAWCZYK R. BLANCHET
ELECTROTECHNIQUE	Ph. AURIOL A. FOGGIA
MECANIQUE DES SOLIDES	F. SIDOROFF
MECANIQUE DES SURFACES	J.M. GEORGES J. SABOT
MECANIQUE DES FLUIDES ET ACOUSTIQUE	J. MATHIEU G. COMTE-BELLOT (Mlle) D. JEANDEL
MACHINES THERMIQUES	X. LYS M. BRUN
CONCEPTION ET DEVELOPPEMENT DE PRODUITS INDUSTRIELS	R. RUSSIER P. CLOZEL

**Sont aussi habilitées à diriger des thèses à l'E.C.L.
les personnes dont les noms suivent :**

**MM. E. ALCARAZ
H. ARBEY
J. BATAILLE
J. BOREL (LETI)
Cl. CAMBON
B. CAMBOU
J.P. CHANTE
G. CHARNAY
B. COQUILLET
J. DIMNET
A. HAUPAIS
J. JOSEPH
Ph. KAPSA
Cl. MARTELET
J.M. MARTIN
J.R. MARTIN
T. MATHIA
H. MONTES
R. MOREL
NGUYEN DU
R. OLIER
R. PHILIPPE
G. ROJAT
J.P. SCHON
M. SUNYACH
Cl. SURRY
A. TAILLAND
G. THOMAS
L. VINCENT**

Je remercie Monsieur Moiroux, Directeur, et Philippe Auriol, Directeur du Département d'Electrotechnique pour leur accueil à l'Ecole Centrale de Lyon.

Jean-Claude Sabonnadière, Président du jury d'examination et Albert Foggia, Directeur de thèse, m'ont conseillé tout au long de ce travail. Marcel Jufer, Professeur dont j'ai été l'élève à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Monsieur M. Lajoie-Mazenc, Professeur au LEEI à Toulouse et Bernard Ancelle dont j'ai poursuivi le travail de thèse d'état, ont accepté de participer à ce jury : je les en remercie tous.

Je remercie particulièrement Alain Nicolas, Maitre-assistant à l'Ecole Centrale de Lyon pour ses encouragements constants et amicaux et pour les précieux conseils dont il m'a fait bénéficier.

Je remercie aussi chaleureusement mes camarades chercheurs et enseignants et tout le personnel du laboratoire pour l'ambiance agréable qu'ils ont su créer et l'aide que j'ai, au besoin, trouvée chez chacun(e).

Ma profonde gratitude va enfin à l'ex-DGRST pour l'incalculable soutien financier qu'elle m'a prodigué.

THESES DE L'ACADEMIE DE LYON : ECOLE CENTRALE DE LYON

NOM : K R A H E N B U H L (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)	DATE de SOUTENANCE										
Prénoms : Laurent François	16.12.83										
TITRE : La méthode des équations intégrales de frontière pour la résolution des problèmes de potentiel en électrotechnique, et sa formulation axisymétrique.											
NATURE :	Numéro d'ordre :										
<table style="width:100%; border: none;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 15%;">DOCT. d'UNIV.</td> <td style="text-align: center; width: 15%;">DOCTEUR- INGENIEUR</td> <td style="text-align: center; width: 15%;">DOCTORAT D'ETAT</td> <td style="text-align: center; width: 15%;">DOCTORAT de 3^e CYCLE</td> <td style="width: 40%;">Spécialité : Génie électrique</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> <td style="text-align: center;"><input checked="" type="checkbox"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> <td></td> </tr> </table>	DOCT. d'UNIV.	DOCTEUR- INGENIEUR	DOCTORAT D'ETAT	DOCTORAT de 3 ^e CYCLE	Spécialité : Génie électrique	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
DOCT. d'UNIV.	DOCTEUR- INGENIEUR	DOCTORAT D'ETAT	DOCTORAT de 3 ^e CYCLE	Spécialité : Génie électrique							
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>								
Cole B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bio	CLASSE :										
<p align="center">R E S U M E</p> <p>Sur le plan international, deux formulations des problèmes de champs par les équations intégrales de frontières sur un potentiel scalaire se sont imposées. Au premier chapitre, nous établissons ces deux formulations: "globale" et "de l'identité de Green" à partir des équations physiques fondamentales et nous dégageons l'intérêt et les limites de chacune.</p> <p>Le domaine d'application privilégié de la première est l'électrostatique en raison de la linéarité des milieux généralement rencontrés et des conditions aux limites qui lui sont propres. La seconde est une généralisation de la première et permet de résoudre le problème de Laplace associé à n'importe quelles conditions aux limites: on peut de ce fait envisager dans l'avenir un couplage avec une méthode variationnelle pour la résolution des problèmes non linéaires.</p> <p>Le second chapitre est consacré à la méthode de l'identité de Green en général.</p> <p>Dans un premier paragraphe, nous établissons de façon originale les conditions d'équivalence entre les équations physiques et les équations intégrales de frontières, ce qui nous conduit en particulier à une condition a priori d'équivalence pour les systèmes plan.</p> <p>Le traitement numérique et en particulier la discrétisation des équations introduit des erreurs que nous cherchons à caractériser au second paragraphe.</p> <p>Le troisième paragraphe est consacré plus spécialement aux problèmes associés à la discrétisation par des éléments finis isoparamétriques: critères de choix des ensembles de points où sont écrites les équations, de la méthode de résolution - directe ou projective -; traitement particulier des points anguleux, rôle et utilisation du facteur angulaire de l'équation intégrale.</p> <p style="text-align: right;">Le chapitre se termine par un paragraphe consacré à l'exploitation des résultats: calcul des grandeurs en dehors des frontières et des grandeurs globales, tracé de lignes équipotentielles.</p> <p style="text-align: right;">Le troisième chapitre concerne la formulation axisymétrique de la méthode de l'identité de Green: lorsqu'un système possède une symétrie de révolution, il n'a en fait que deux dimensions et il est possible d'exprimer directement les équations intégrales dans ces deux dimensions.</p> <p style="text-align: right;">Après avoir établi les expressions analytiques nécessaires et montré la démarche faite pour les traiter numériquement, nous présentons des résultats de validation obtenus avec le programme d'ordinateur PHIAX que nous avons développé.</p>											
MOTS-CLES : Electrotechnique - Equations intégrales de frontière - Potentiel scalaire - Axisymétrie											
Laboratoire (s) de recherches : Département d'électrotechnique											
Directeur de recherches : Prof. A. FOGGIA											
Président de jury : Prof. J.C. Sabonnadière											
Composition du jury : MM B. Ancelle, A.Foggia, M. Jufer, M. Lajoie-Mazenc, A. Niclas.											

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'article 3 de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu le rapport de présentation de Messieurs

J.C. SABONNADIÈRE

B. ANCELLE

A. FOGGIA

M. JUFER

M. LAJOIE-MAZENC


A. NICOLAS

M. KRAHENBUHL Laurent

est autorisé à présenter une soutenance de thèse pour l'obtention du titre de **DOCTEUR INGÉNIEUR, Spécialité Génie Électrique.**

Fait à Ecully, le 22 novembre 1983

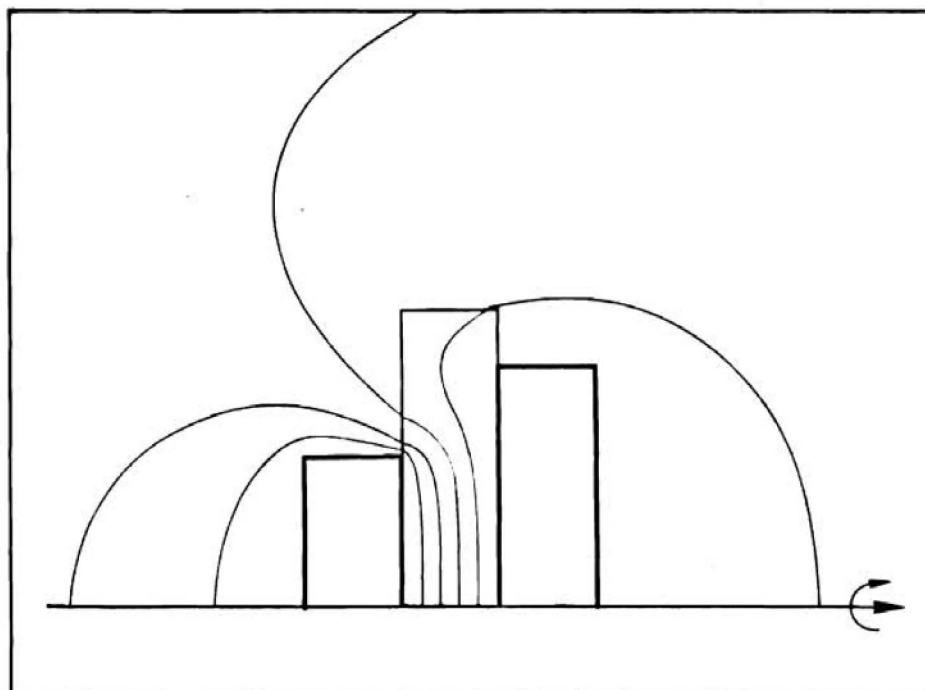
Le Directeur de l'E.C.L.


A. MOIROUX



La méthode des équations intégrales de frontière
pour la résolution des problèmes de potentiel
en électrotechnique, et sa formulation axisymétrique.

Laurent Krähenbühl



La méthode des équations intégrales de frontière
pour la résolution des problèmes de potentiel
en électrotechnique,
et sa formulation axisymétrique.

Laurent Krähenbühl

L'application de la Conception Assistée par Ordinateur (C.A.O.) à l'électrotechnique nécessite la maîtrise de la modélisation des champs électromagnétiques dans des structures complexes.

Dès la fin du second millénaire, la puissance de calcul des ordinateurs a permis de réaliser numériquement cette modélisation, à l'aide de techniques d'*éléments finis* ou d'*équations intégrales de frontières*.

Ce travail, qui date de 1983, présente dans le cas simple des champs bidimensionnels statiques, le *principe* des méthodes intégrales utilisables et les principales *techniques* nécessaires à leur mise en oeuvre numérique.

T A B L E D E S M A T I E R E S

RESUME	1	
INTRODUCTION	3	
CHAPITRE 1	Formulation en équation intégrale de frontière sur un potentiel scalaire des problèmes de champs électro- ou magnéostatiques	5
	1.1 Les champs	6
	1.2 Les potentiels scalaires	9
	1.3 Formulation intégrale globale	10
	1.4 Méthode intégrale tirée de l'identité de Green	16
	1.5 Conclusion	22
CHAPITRE 2	Méthode des équations intégrales de frontière tirée de l'identité de Green	23
	2.1 Equivalence avec l'équation de Laplace	23
	2.2 Généralités sur la discrétisation des équations intégrales de frontière	31
	2.3 Choix de la discrétisation et résolution	37
	2.4 Exploitation des résultats	49
	2.5 Conclusion	54
CHAPITRE 3	Formulation en axisymétrie de la méthode d'équations intégrales de frontière tirée de l'identité de Green	55
	3.1 Méthode	55
	3.2 Détermination des noyaux et intégration	57
	3.3 Résultats de validation	63
	3.4 Conclusion	75
CONCLUSION	76	
BIBLIOGRAPHIE	77	
liste des symboles	79	

R E S U M E

Sur le plan international, deux formulations des problèmes de champs par les équations intégrales de frontières sur un potentiel scalaire se sont imposées. Au premier chapitre, nous établissons ces deux formulations: "globale" et "de l'identité de Green" à partir des équations physiques fondamentales et nous dégagons l'intérêt et les limites de chacune.

Le domaine d'application privilégié de la première est l'électrostatique en raison de la linéarité des milieux généralement rencontrés et des conditions aux limites qui lui sont propres. La seconde est une généralisation de la première et permet de résoudre le problème de Laplace associé à n'importe quelles conditions aux limites: on peut de ce fait envisager dans l'avenir un couplage avec une méthode variationnelle pour la résolution des problèmes non linéaires.

Le second chapitre est consacré à la méthode de l'identité de Green en général.

Dans un premier paragraphe, nous établissons de façon originale les conditions d'équivalence entre les équations physiques et les équations intégrales de frontières, ce qui nous conduit en particulier à une condition a priori d'équivalence pour les systèmes plans.

Le traitement numérique et en particulier la discrétisation des équations introduit des erreurs que nous cherchons à caractériser au second paragraphe.

Le troisième paragraphe est consacré plus spécialement aux problèmes associés à la discrétisation par des éléments finis isoparamétriques: critères de choix des ensembles de points où sont écrites les équations, de la méthode de résolution - directe ou projective -; traitement particulier des points anguleux, rôle et utilisation du facteur angulaire de l'équation intégrale.

Le chapitre se termine par un paragraphe consacré à l'exploitation des résultats: calcul des grandeurs en dehors des frontières et des grandeurs globales, tracé de lignes équipotentielles.

Le troisième chapitre concerne la formulation axisymétrique de la méthode de l'identité de Green: lorsqu'un système possède une symétrie de révolution, il n'a en fait que deux dimensions et il est possible d'exprimer directement les équations intégrales dans ces deux dimensions.

Après avoir établi les expressions analytiques nécessaires et montré la démarche faite pour les traiter numériquement, nous présentons des résultats de validation obtenus avec le programme d'ordinateur PHIAX que nous avons développé.

I N T R O D U C T I O N

Le modèle macroscopique de Maxwell conduit à des équations différentielles simples pour les champs statiques ou quasi-statiques: les champs magnétique et électrique sont découplés et on obtient deux types de problèmes indépendants: électrostatique ou magnéto-statique.

Si les équations sont simples, leur solution analytique ne peut être obtenue que dans de rares configurations. Dans la plupart des cas pratiques, l'emploi de méthodes numériques de résolution s'imposera donc.

Deux catégories de méthodes ont été successivement développées: les méthodes de différences finies, puis les méthodes variationnelles associées aux éléments finis. Dans la première, on approche l'opérateur différentiel lui-même et on cherche la solution d'un système simplifié; pour la seconde, c'est la solution (le potentiel par exemple) qui est approchée au départ et la méthode consiste à trouver la meilleure approximation possible tout en conservant l'opérateur différentiel telquel. Dans les deux cas, la solution approchée est obtenue spatialement et ces méthodes peuvent être appliquées aux problèmes non linéaires.

Une troisième catégorie de méthodes fait l'objet d'études et de recherches, et a déjà débouché sur quelques logiciels mais n'a pas atteint le degré de développement des précédentes. Dans cette catégorie, on trouve la méthode des équations intégrales de frontière, la méthode des multiples multipôles développée à Zürich | 2 |, les méthodes de développements limités | 6 |, etc.; dans toutes ces méthodes, la solution cherchée est approchée par une somme de solutions élémentaires de l'équation: on applique donc le théorème de superposition et l'hypothèse de base est la linéarité. Ces méthodes sont semi-analytiques.

En électrotechnique, les dispositifs rencontrés sont le plus souvent formés de régions parfaitement linéaires d'une part (par exemple l'air dans les entrefers et à l'extérieur) et de régions fortement non linéaires d'autre part (fer saturable). A terme, il nous semble séduisant de décrire les milieux non linéaires à l'aide des méthodes variationnelles et leur interaction à distance, à travers les milieux linéaires, par les méthodes intégrales.

Ce travail est consacré aux seules méthodes intégrales de frontière, mais il a été pensé dans l'optique de ce couplage entre méthodes: deux chapitres sur trois concernent la formulation dite "de l'identité de Green" qui paraît inutilement compliquée si on ne la considère que du point de vue des méthodes intégrales. Ceci dit, la plupart des résultats théoriques et techniques obtenus dans le cadre de la méthode de l'identité de Green s'applique directement aux autres formulations.

Nous ne prétendons pas tout dire sur la méthode des équations intégrales appliquées à l'électrotechnique: il existe déjà dans ce domaine des études très complètes qu'il était inutile de répéter, en particulier la thèse d'état de M. B. Ancelle [1] et celle de M. A. Nicolas [15]. Nous invitons le lecteur à s'y reporter.

Notre exposé est centré sur ce que nous avons apporté d'original à la méthode et sur les points qui ne font pas l'unanimité dans les publications. Nous avons réduit les considérations banales au strict minimum nécessaire pour obtenir un exposé suivi.

C H A P I T R E 1

FORMULATION EN EQUATION INTEGRALE DE FRONTIERE SUR UN POTENTIEL SCALAIRE DES PROBLEMES DE CHAMPS ELECTRO- OU MAGNETOSTATIQUES

Le modèle de Maxwell des champs électromagnétiques se trouve dans l'esprit de beaucoup de scientifiques et, à défaut, dans de nombreux ouvrages. Nous le rappellerons cependant très brièvement pour familiariser le lecteur aux notations et terminologies que nous utilisons.

Après avoir introduit les potentiels scalaires, nous montrons qu'une première formulation intégrale s'obtient simplement en exprimant le potentiel induit comme la somme (intégrale) des potentiels des dipôles induits.

Cette formulation considère globalement tout l'espace; on peut également exprimer dans chaque région l'équation différentielle du potentiel, l'intégrer et lier les solutions régionales entre elles par les conditions d'interfaces: l'intégration de l'équation différentielle peut être éventuellement menée dans chaque région par une méthode différente et c'est là l'intérêt de cette démarche.

Pour les régions linéaires et homogènes, la méthode intégrale de frontière tirée de l'identité de Green présente des avantages certains par rapport aux méthodes variationnelles par exemple. Nous l'introduisons, de façon assez brève puisqu'elle fait l'objet des deux autres chapitres.

1.1 LES CHAMPS

1.1.1 Equations de Maxwell en statique, aimantation, polarisation.

Les relations fondamentales qui définissent les grandeurs électriques et magnétiques statiques sont les équations de Maxwell statiques:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{champ électrique} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad \text{champ magnétique} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{déplacement} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{induction} \quad (1.4)$$

auxquelles il faut ajouter les relations qui décrivent la réaction des matériaux:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{M} + \mathbf{H}) \quad (1.5)$$

qui définit l'aimantation \mathbf{M} : une densité de moments magnétiques dipolaires apparaît dans les milieux magnétiques sous l'action du champ. Ces milieux sont plus ou moins susceptibles et on note:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (1.6)$$

ou encore:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (1.7)$$

où χ est la susceptibilité magnétique et $\mu_r = 1 + \chi$ est la perméabilité relative; χ et μ_r dépendent éventuellement de \mathbf{H} .

On a de même:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.8)$$

qui définit la polarisation \mathbf{P} : une densité de dipôles électriques apparaît dans les milieux diélectriques sous l'action du champ. Ces milieux sont plus ou moins susceptibles et on note:

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.9)$$

ou encore:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (1.10)$$

où χ est la susceptibilité diélectrique relative et $\epsilon_r = 1 + \chi$ est la permittivité relative; χ et ϵ_r dépendent éventuellement de E .

M et P représentent la réaction des matériaux face aux champs H et E . La difficulté du calcul des champs vient de ce que cette réaction agit sur la cause; on peut séparer par l'esprit cause et conséquence en séparant les grandeurs en grandeurs inductrices et induites.

1.1.2 Champs inducteurs et champs induits.

Les sources du champ magnétique sont les courants; la loi de Biot et Savart donne le champ dû à ces courants dans le vide:

$$H_o = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j \times r}{r^3} dv \quad (1.11)$$

Les mêmes courants en présence de matériaux magnétiques donnent un champ H différent de H_o qui permet de définir le champ H_i induit par les courants et la matière:

$$H = H_o + H_i \quad (1.12)$$

En électrostatique, le champ inducteur est le champ coulombien E_o ; le champ induit E_i est défini par:

$$E = E_o + E_i \quad (1.13)$$

Pour ces grandeurs induites, les équations de Maxwell se simplifient; on a:

$$\nabla \times E_i = 0 \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r E_i) = 0 \quad (1.15)$$

$$\nabla \times H_i = 0 \quad (1.16)$$

$$\nabla \cdot (\mu_r H_i) = 0 \quad (1.17)$$

1.1.3 Conditions d'interface et conditions aux limites.

Les conditions de continuité des divers champs aux interfaces entre régions de propriétés différentes se déduisent des équations 1.1 à 1.7: pour les composantes tangentielles des champs on a:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0} \quad (1.18)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{A} \quad \text{densité de courant surfacique} \quad (1.19)$$

et pour les composantes normales de l'induction et du déplacement:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (1.20)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad \text{densité de charge surfacique} \quad (1.21)$$

Pour les grandeurs induites, on obtient des relations légèrement différentes:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{1i} - \mathbf{E}_{2i}) = \mathbf{0} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{1i} - \mathbf{H}_{2i}) = \mathbf{0} \quad (1.23)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mu_{r1} \mathbf{H}_{1i} - \mu_{r2} \mathbf{H}_{2i}) = \mathbf{n} \cdot (\mu_{r2} - \mu_{r1}) \mathbf{H}_o \quad (1.24)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\epsilon_{r1} \mathbf{E}_{1i} - \epsilon_{r2} \mathbf{E}_{2i}) = \mathbf{n} \cdot (\chi_2 \mathbf{E}_{o2} - \chi_1 \mathbf{E}_{o1}) \quad (1.25)$$

$$= \mathbf{n} \cdot (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}) \mathbf{E}_o \quad \text{en absence de charge de surface} \quad (1.26)$$

On peut aussi introduire des conditions aux limites (abrégées CAL dans la suite) qui excluent une partie de l'espace du domaine de résolution. Par exemple en électrostatique, un conducteur sera souvent considéré comme parfait: le champ est nul à l'intérieur et on aura:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1.27)$$

sur la face extérieure. On a l'équivalent en magnétostatique lorsque μ_r est très élevé: sur la face extérieure on posera:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (1.28)$$

Dans les deux cas, les lignes de champ arrivent perpendiculairement sur le conducteur.

1.2 LES POTENTIELS SCALAIRES

De l'équation 1.1 et de l'identité $\nabla \times (\nabla u) = \mathbf{0}$ on déduit que le champ électrique dérive d'un potentiel:

$$\mathbf{E} = - \nabla V \quad (1.29)$$

$$\mathbf{E}_0 = - \nabla V_0 \quad (1.30)$$

il en est de même des champs électrique et magnétique induits:

$$\mathbf{E}_i = - \nabla \Phi \quad (1.31)$$

$$\mathbf{H}_i = - \nabla \Phi \quad (1.32)$$

On peut également définir un potentiel magnétique total dans un domaine qui ne contient pas de courant:

$$\mathbf{H} = - \nabla V \quad (1.33)$$

$$\mathbf{H}_0 = - \nabla V_0 \quad (1.34)$$

Ces potentiels scalaires sont définis à une constante près qu'on choisit généralement nulle à l'infini. Pour des problèmes intérieurs, on la fixe arbitrairement en un point.

L'expression en potentiel scalaire est intéressante car elle permet de passer d'un champ vectoriel inconnu (3 inconnues par point) à un champ scalaire inconnu (une inconnue par point). La taille des problèmes à résoudre est réduite d'autant.

1.3 FORMULATION INTEGRALE GLOBALE

Le potentiel d'un dipôle ponctuel vaut:

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 \cdot r^2} = - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla_P \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla_Q \left(\frac{1}{r} \right) \quad (1.35)$$

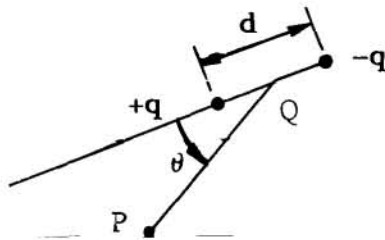


Fig. 1.1: Dipôle électrique
($d \rightarrow 0$ avec $p=qd$ constant)

La polarisation, qui est une densité volumique de dipôles, crée donc le potentiel induit [6 Vol. 3, III, 100 et suivantes]:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} dv \quad (1.36)$$

$$= - \frac{1}{4\pi} \int \chi \nabla V \cdot \nabla \frac{1}{r} dv \quad (*) \quad (1.37)$$

ce qui explicite la relation $\Phi = \Phi(V)$. On va donc pouvoir écrire l'équation:

$$V = V_0 + \Phi(V) \quad (1.38)$$

et nous allons montrer que, sous les hypothèses d'homogénéité, d'isotropie et de linéarité du diélectrique, Φ ne dépend que du potentiel total sur la frontière du diélectrique.

(*) Si $\mathbf{p} = -\chi \epsilon_0 \nabla V$ implique bien le passage de 1.36 à 1.37, la réciproque utilisée pour résoudre le problème n'est établie que si les deux équations sont écrites sur certains ensembles infinis de points. Un cas similaire sera discuté en détails au §2.2

1.3.1 L'équation intégrale de frontière.

Avec les hypothèses ci-dessus, χ est constant dans tout le volume diélectrique: on peut intégrer l'expression 1.37 par parties:

$$\begin{aligned} \Phi &= - \frac{\chi}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \nabla V \cdot \nabla \frac{1}{r} dv \\ &= - \frac{\chi}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \left(\nabla \cdot \left(V \nabla \frac{1}{r} \right) - V \Delta \frac{1}{r} \right) dv \\ &= - \frac{\chi}{4\pi} \int_S V \nabla \frac{1}{r} \cdot ds - \frac{\Omega_P(\mathcal{V}) \chi(P)}{4\pi} V(P) \end{aligned}$$

où $\Omega_P(\mathcal{V})$ est l'angle solide sous lequel le point P voit le volume \mathcal{V} [6 Vol. 1, I, 101]. L'équation 1.38 prend ainsi la forme explicite (voir fig. 2):

$$V(P) \left(1 + \frac{\Omega_P(\mathcal{V})}{4\pi} \chi(P) \right) = V_0(P) - \chi(\mathcal{V}) \int_S V(Q) \frac{dG_P(Q)}{dn} ds \quad (1.39)$$

avec

$$G_P(Q) = \frac{1}{4\pi PQ} \quad (1.40)$$

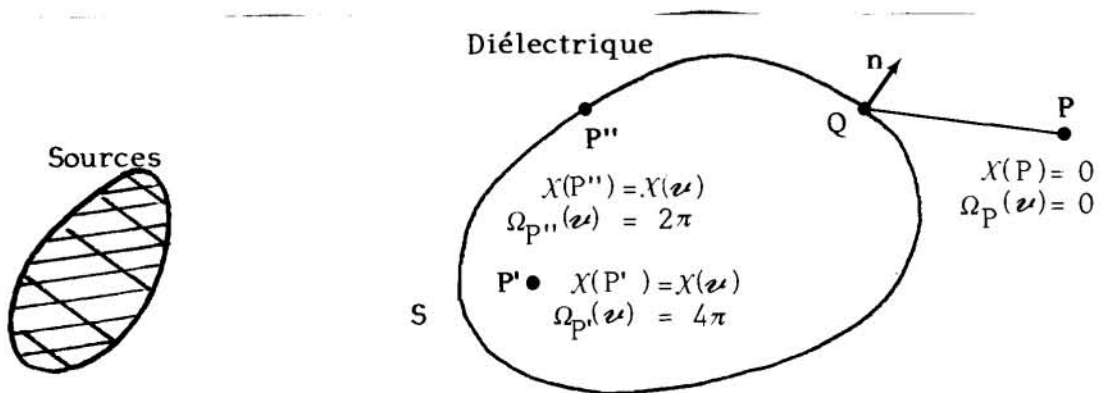


Fig. 2: Illustration de l'équation 1.39.

S'il y a N régions diélectriques de propriétés différentes, on obtient (voir fig. 3):

$$\left(1 + \sum_i^N \frac{\Omega_i}{4\pi} \chi_i\right) V(P) = V_o(P) - \sum_j^N \chi_j \int_{S_j} V(Q) \frac{dG_P(Q)}{dn} ds \quad (1.41)$$

Le terme de droite contient dans tous les cas N intégrales de surface sur les surfaces des N régions. Le terme de gauche s'écrit par exemple:

$$(1 + \chi_1) V(P) = \epsilon_{r1} V(P)$$

si P est à l'intérieur de ν ,

$V(P')$ si P' est en dehors de tous les diélectriques,

$$\left(1 + \frac{\Omega_1 \chi_1 + \Omega_2 \chi_2}{4\pi}\right) V(P'') = \frac{\Omega_1 \epsilon_{r1} + \Omega_2 \epsilon_{r2}}{4\pi} V(P'')$$

si P'' est sur l'interface des diélectriques 1 et 2, etc.

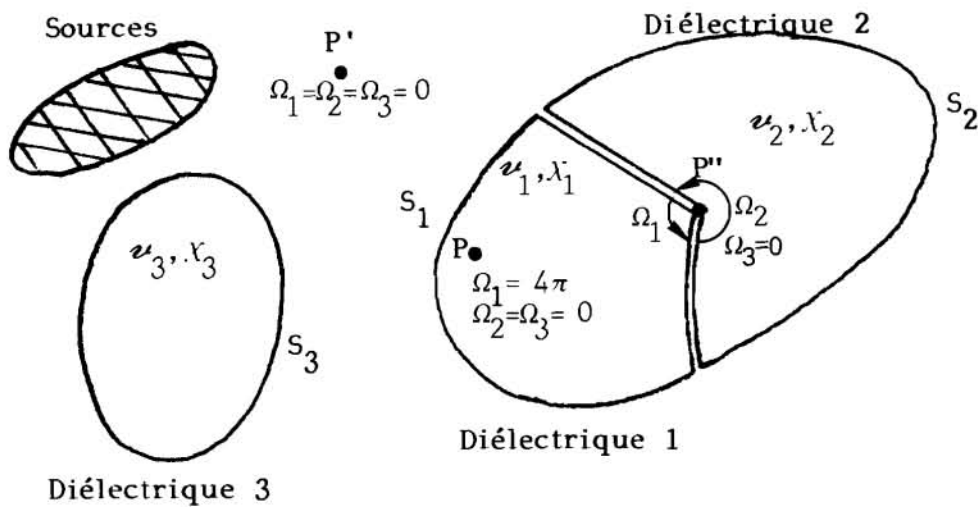


Fig. 3: Illustration de l'équation 1.41

En magnétostatique et avec les hypothèses d'homogénéité, d'isotropie et de linéarité des milieux magnétiques, les équations 1.39 et 1.41 sont valables à condition d'avoir $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ c'est-à-dire aucun courant dans un domaine contenant toutes les régions magnétiques. Le potentiel de source est alors défini à partir d'un point P_0 :

$$V_0(P) = \int_{P_0}^P \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{l} \quad (1.42)$$

Cette formulation ne permet pas d'introduire directement des CAL. Son domaine d'application est réduit mais, dans son domaine, c'est de loin la meilleure.

1.3.2 Distribution de dipôles équivalente à la polarisation.

L'intégrale:

$$-\frac{1}{\epsilon_0} \int_s \tau_n \frac{dG}{dn} ds \quad (1.43)$$

représente le potentiel d'une distribution surfacique de dipôles normaux [6 Vol. 1, VI, 58] de densité τ_n . L'équation 1.39 montre qu'on peut remplacer les volumes diélectriques par des densités

$$\tau_n = \epsilon_0 \chi V(Q) \quad (1.44)$$

de dipôles normaux sur leurs surfaces. Le potentiel total en un point se calcule comme la somme du potentiel V_0 des sources et du potentiel 1.43 des distributions 1.44 équivalentes à la polarisation.

1.3.3 Introduction d'un conducteur.

Dans cette formulation, un conducteur ne peut être introduit que par l'intermédiaire du terme V_o , c'est-à-dire sous forme de source: il faudra donc déterminer la densité de charges à sa surface, autrement dit le déplacement ou le champ normal. On pose ainsi:

$$V_o(P) = \int_{S_{\text{cond}}} \frac{dV}{dn} G_P(Q) ds$$

qui représente le potentiel coulombien de la densité surfacique de charges $\epsilon_o \frac{dV}{dn}$. On obtient l'équation [6 Vol. 3, III, 206-207]:

$$\int_{S_{\text{cond}}} \frac{dV}{dn} G_P ds - \chi(\mathbf{r}) \int_{S_{\text{diel}}} V \frac{dG_P}{dn} ds = \left(1 + \frac{\Omega_P \chi(P)}{4\pi}\right) V(P) \quad (1.45)$$

la grandeur connue qui permet de résoudre étant le potentiel total sur le conducteur (fig. 4).

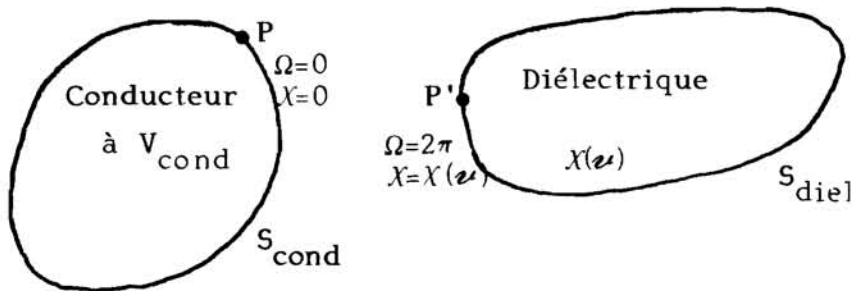


Fig. 4: Influence d'un conducteur sur un diélectrique (équation 1.45).

On voit apparaître deux types d'inconnues: $\frac{dV}{dn}$ et V , associées respectivement aux noyaux G et $\frac{dG}{dn}$. Nous allons les retrouver dans le cadre de la méthode de l'identité de Green au §1.4.

1.3.4 Discussion

La méthode que nous venons de développer est particulièrement adaptée à l'électrostatique. Elle permet l'introduction de CAL sous la forme de surfaces équipotentielles correspondant aux conducteurs. Pour les problèmes multirégions, les intégrales de surface deviennent nombreuses pour l'écriture de chaque équation, mais soulignons qu'il n'y a qu'une inconnue scalaire par point de surface.

L'équivalent magnétostatique a été largement publié par Trowbridge [18, 19]. L'intérêt pratique en est limité aux milieux linéaires (ce qui est une importante limite en magnétostatique): en effet, l'introduction d'un milieu non linéaire en 1.37 impose de compléter 1.39 par l'intégrale de volume [18]:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \chi \cdot \nabla \frac{1}{r} \, dv \quad (1.46)$$

qui est beaucoup plus lourde à calculer que l'intégrale de volume correspondante en méthode variationnelle car l'intégrant est non nul dans tout le volume.

On pourrait aussi chercher à généraliser les CAL introduites à la section 1.3.3 afin de traiter la région non linéaire par méthode variationnelle: on retomberait, par une démarche plus compliquée, sur la méthode de l'identité de Green.

1.4 METHODE INTEGRALE TIREE DE L'IDENTITE DE GREEN

1.4.1 Equation de Poisson dans une région.

L'équation $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (1.3) combinée avec (1.10) s'écrit:

$$\epsilon_r \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon_r = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.47)$$

Comme \mathbf{E} dérive du potentiel V (1.29) on a:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} + \frac{1}{\epsilon_r} \nabla V \cdot \nabla \epsilon_r \quad (1.48)$$

Si ϵ_r est constant dans la région considérée, on obtient l'équation de Poisson:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (1.49)$$

et, en absence de charges, l'équation de Laplace:

$$\Delta V = 0 \quad (1.50)$$

De même en magnétostatique on obtient:

$$\Delta V = -\frac{1}{\mu_r} \nabla V \cdot \nabla \mu_r \quad (1.51)$$

sans courant dans la région, et une équation semblable sur le potentiel induit s'il y a des courants:

$$\Delta \Phi = -\frac{1}{\mu_r} (\mathbf{H}_0 - \nabla \Phi) \cdot \nabla \mu_r \quad (1.52)$$

et, dans les deux cas, l'équation de Laplace si μ_r est constant:

$$\begin{array}{l} \Delta V = 0 \quad (\mu_r = \text{cste, sans courant}) \\ \text{ou} \\ \Delta \Phi = 0 \quad (\mu_r = \text{cste, avec courant}) \end{array} \quad (1.53)$$

1.4.2 Discussion.

Dans chaque région (diélectrique, magnétique, à surface conductrice ou non, entrefer, milieu infini) le problème est défini par l'une des équations différentielles ci-dessus; la solution dépend des valeurs limites du potentiel (total ou induit) et de sa dérivée normale. Comme nous l'écrivions dès l'introduction de ce chapitre, on peut résoudre dans chaque région en fonction des valeurs aux limites avec la méthode la mieux adaptée au type d'équation différentielle, la solution globale étant obtenue en liant ces solutions entre elles à l'aide des conditions d'interface et en exprimant les éventuelles conditions aux limites.

Par exemple, les deux équations 1.51 et 1.53 sont d'une complexité bien différente.

Dans la première, $\mu_r = f(|\nabla V|)$: il est nécessaire d'exprimer V et μ_r en chaque point du domaine; les méthodes variationnelles associées aux éléments finis ont démontré leur efficacité pour résoudre ce problème.

La seconde est l'équation de Laplace: c'est un cas particulier de la première, et les méthodes variationnelles conduisent aussi à la solution. Mais on montre facilement (§1.4.3) que l'expression des valeurs intérieures du potentiel n'est pas nécessaire en cours de résolution (on peut si besoin est les déterminer après-coup à partir des seules valeurs aux limites de la région): les méthodes intégrales que nous allons présenter sont adaptées à ce cas. Elles évitent le travail de maillage en éléments finis des régions linéaires et réduisent le nombre des inconnues. Ce double gain sera spécialement apprécié pour la résolution des problèmes tridimensionnels.

De plus, les méthodes variationnelles ne permettent pas directement la modélisation exacte d'un milieu extérieur infini et sont peu adaptées à la description de l'espace entre deux pièces mobiles, en raison de la présence du maillage: ces deux inconvénients n'existent plus avec les méthodes intégrales.

1.4.3 Autres problèmes conduisant aux mêmes équations.

D'autres phénomènes physiques obéissent à l'équation de Laplace associée à des conditions aux limites: la méthode des équations intégrales de frontière permet évidemment de les traiter tous. En restant dans le domaine de l'électrotechnique, citons par exemple:

- Les problèmes de conduction, pour lesquels l'équation de conservation de la charge $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ et la loi d'Ohm $\mathbf{j} = -\sigma \nabla V$ conduisent à l'équation de Laplace 1.50 à laquelle on peut associer des CAL analytiques pour tenir compte d'une conductivité de surface σ_s (fig. 5).

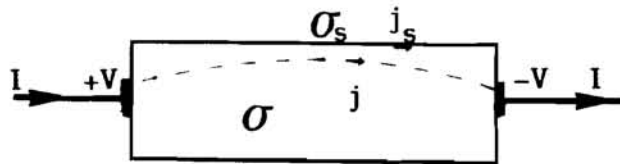


Fig. 5: Exemple de problème de conduction.

- Les problèmes d'électromagnétisme sans propagation, dans un milieu linéaire non conducteur (entrefer, milieu extérieur). Lorsque les champs varient "lentement" dans le temps, c'est-à-dire tant que la longueur d'onde reste grande par rapport aux dimensions du système étudié, seule l'équation 1.1 est modifiée et devient:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Le potentiel magnétique total ou induit obéit toujours à l'équation de Laplace.

Dans ce cas, qui est l'approximation électrotechnique habituelle des équations de Maxwell, la méthode intégrale pourra être utilisée pour décrire les entrefers et le milieu extérieur des dispositifs. Le couplage avec une méthode variationnelle envisagé dès l'introduction de cette thèse ne concernera donc pas seulement les problèmes statiques, ce qui donne un intérêt supplémentaire aux méthodes intégrales.

- Problèmes de courants de Foucault à fréquence élevée [15].
A partir d'une certaine fréquence du champ d'excitation, la profondeur de pénétration des champs devient faible par rapport aux dimensions de la pièce étudiée. Les courants de Foucault ne se développent plus qu'en surface. Sur cette surface, le champ induit qu'ils créent s'oppose exactement au champ inducteur. On a donc simplement la condition:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial n} = H_o \cdot n$$

sur la surface, associée à l'équation de Laplace à l'extérieur de la pièce métallique.

La résolution permet de déterminer la densité de courant surfacique en fonction de l'inducteur. Un tel dispositif peut être utilisé pour la trempe superficielle (engrenages par exemple), et la méthode intégrale permet le dimensionnement de l'inducteur.

1.4.4 Méthode "de l'identité de Green".

Nous cherchons à résoudre les équations 1.49 ou 1.50:

$$\Delta V = \frac{-\rho}{\epsilon_o \epsilon_r} \quad \text{ou} \quad \Delta V = 0 \quad \text{dans } \mathcal{V}$$

c'est-à-dire à exprimer V dans \mathcal{V} en fonction des valeurs de V et de sa dérivée normale sur la frontière S de \mathcal{V} .

La seconde identité de Green pour un scalaire s'écrit:

$$\int (V \Delta G - G \Delta V) dv = \int_S (V \nabla G - G \nabla V) \cdot ds \quad (1.54)$$

En choisissant pour G la "fonction de Green" 1.40:

$$G = G_P(Q) = \frac{1}{4\pi PQ}$$

on obtient:

$$c.V(P) = - \int_{\mathcal{V}} G \Delta V \, dv - \int_{\mathcal{S}} \left(V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right) ds \quad (1.55)$$

avec $c = \frac{\Omega_P(\mathcal{V})}{4\pi}$ (1.56)

L'équation de Poisson 1.49 portée dans 1.55 donne l'équation intégrale de frontière pour l'électrostatique avec charges:

$$c.V(P) = V_0(P) - \int_{\mathcal{S}} \left(V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right) ds \quad (*) \quad (1.57)$$

et l'équation de Laplace 1.50 conduit à l'expression:

$$c.V(P) = - \int_{\mathcal{S}} \left(V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right) ds \quad (*) \quad (1.58)$$

adaptée à l'électrostatique sans charge et à la magnétostatique sans courant.

S'il y a lieu, il faut exprimer les conditions d'interface 1.18 à 1.21 en fonction du potentiel. La continuité de la composante tangente du champ en absence de courant de surface est assurée par la définition unique du potentiel sur la surface. Pour la composante normale de l'induction, on doit avoir:

$$\mu_{r1} \frac{\partial V_1}{\partial n} = \mu_{r2} \frac{\partial V_2}{\partial n} = \Psi \quad (1.59)$$

(*) Même remarque que pour l'équation 1.37

et, pour le déplacement normal:

$$\epsilon_{r1} \frac{\partial V_1}{\partial n} = \epsilon_{r2} \frac{\partial V_2}{\partial n} + \rho_s = \Psi \quad (1.60)$$

Le choix de Ψ comme inconnue à la place des dérivées normales du potentiel dans les deux régions | 1 | assure la seconde condition d'interface. L'équation intégrale 1.58 s'écrit alors:

$$c.V(P) = - \int_s (V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\Psi}{\mu_r}) ds \quad (*) \quad (1.61)$$

on a une expression semblable en électrostatique.

Pour les problèmes de magnétostatique avec courant, la formulation en potentiel induit s'impose. L'équation intégrale de départ est la même que 1.58 mais l'expression de Ψ est différente (voir équation 1.24):

$$\Psi = \mu_{r1} (\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - H_{on}) = \mu_{r2} (\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - H_{on}) \quad (1.62)$$

et on obtient pour chaque région les équations intégrales:

$$c.\Phi(P) = - \int_s (\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - (\frac{\Psi}{\mu_r} + H_{on}) G) ds \quad (*) \quad (1.63)$$

En posant $H_{on} = 0$ on retrouve le cas précédent; cette formulation est donc la plus générale et nous l'adopterons dans la suite. Notons qu'elle est plus complexe que la méthode globale du §1.3: nous avons sur les interfaces deux inconnues scalaires par point; par contre, chaque équation s'écrit par intégration sur la frontière d'une seule région.

(*) Même remarque que pour l'équation 1.37

1.4.5 Distributions de sources surfaciques équivalentes.

Pour la méthode globale, nous avons remarqué au §1.3.2 que le potentiel s'exprimait comme celui d'une distribution de dipôles normaux sur les surfaces, auquel il convenait d'ajouter celui des sources, c'est-à-dire celui d'une distribution surfacique de monopôles dans le cas des conducteurs (§1.3.3). Il fallait, pour calculer le potentiel en un point, tenir compte de toutes ces distributions, c'est-à-dire intégrer sur toutes les interfaces.

Il y a en fait pour chaque région une infinité de couples de distributions surfaciques de dipôles normaux et de monopôles (τ_n, ρ) qui conduisent aux conditions aux limites V et $\frac{\partial V}{\partial n}$. Un de ces couples s'identifie à $(V, \frac{\partial V}{\partial n})$, nous venons de le montrer à l'aide de l'identité de Green. C'est celui qui permet d'exprimer le plus simplement les conditions d'interface, puisqu'il coïncide avec elles.

1.5 CONCLUSION

Nous avons présenté les formulations "globale" puis "de l'identité de Green" des équations intégrales de frontière. On aurait aussi pu déduire la première de la seconde, qui est la plus générale et que nous utilisons dans la suite.

On peut imaginer des variantes de ces formulations. Par exemple pour la méthode de Green, l'utilisation simultanée du potentiel total dans les régions sans courant et du potentiel induit ailleurs conduit à des équations bien adaptées à la magnétostatique linéaire. Notre propos n'est pas l'énumération de ces variantes, mais le développement de la théorie et l'amélioration des techniques d'équations intégrales en général, que ce soit en vue d'une utilisation indépendante ou d'un couplage avec une autre méthode.

C H A P I T R E 2

METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERE TIREE DE L'IDENTITE DE GREEN

Notre travail a porté plus particulièrement sur la formulation axisymétrique de la méthode des équations intégrales de frontière tirée de l'identité de Green. Cependant, certaines des réflexions et des remarques que nous avons à présenter s'appliquent aussi aux formulations tridimensionnelle ou bidimensionnelle plane: nous les avons regroupées dans ce chapitre.

2.1 EQUIVALENCE AVEC L'EQUATION DE LAPLACE

La méthode des équations intégrales de frontière (é.i.f.) est le plus souvent présentée comme nous l'avons fait au chapitre 1: en portant dans l'identité de Green 1.55 l'équation physique de Laplace 1.50, on obtient l'é.i.f. 1.58:

$$c.V(P) = - \int_s (V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n}) ds$$

Généralement, les auteurs ne justifient pas l'équivalence de cette équation avec l'équation physique de départ, ou alors seulement a posteriori en constatant l'unicité de la solution.

Pour les problèmes bidimensionnels plans, Jawson [10] a démontré que, pour chaque contour L, il existe un contour homothétique L_m qui conduit à un système singulier: il propose

dans un tel cas de recommencer la résolution après avoir changé l'échelle du contour. En pratique, on ne peut se contenter de ce remède: les contours approchant L_m donneront lieu à des systèmes numériques mal conditionnés: les résultats pourront être faux sans qu'on en soit averti.

Nous allons directement rechercher les conditions d'équivalence de l'é.i.f. 1.58 et de l'équation de Laplace pour les systèmes tridimensionnels et nous en déduirons une condition d'équivalence pour les systèmes bidimensionnels plans.

2.1.1 Signification de l'é.i.f. écrite en un point P.

En toute logique, l'é.i.f. 1.58 écrite en un point P_i n'est pas équivalente à l'équation de Laplace écrite au même point: la comparaison avec l'identité de Green 1.55 montre qu'on a seulement l'équivalence:

$$\text{e.i.f. en } P_i \iff \int_{\mathbf{v}} \Delta V \cdot G_{P_i} dv = 0 \quad (2.1)$$

Physiquement, $m = \Delta V$ représente la densité de sources monopolaires dans \mathbf{v} et

$$\int_{\mathbf{v}} m \cdot G_{P_i} dv$$

son potentiel en P_i . L'équivalence 2.1 peut donc s'énoncer:

$$\text{e.i.f. en } P_i \iff \text{la distribution de monopôles } m \text{ annule son potentiel en } P_i \quad (2.2)$$

2.1.2 Equivalence avec l'équation de Laplace, cas tridimensionnel.

Parmi les méthodes permettant d'annuler une grandeur R dans un volume \mathbf{v} , celle qui consiste à annuler les intégrales:

$$I_i = \int_{\mathbf{v}} R \cdot f_i \, dv \quad f_i \in F \quad (2.3)$$

est appelée méthode projective. On n'aura l'équivalence:

$$I_i = 0, \quad f_i \in F \mapsto R = 0 \quad \text{dans } \mathbf{v}$$

que pour certains ensembles F de fonctions. L'équivalence 2.1 montre que la méthode des é.i.f. est une méthode projective, les fonctions de projection étant:

$$f_i = G_{P_i}$$

Ces fonctions présentent l'intérêt de réduire les intégrales de volume 2.3 à des intégrales de surface. Le choix de l'ensemble F des fonctions f_i revient au choix de l'ensemble des points P_i où seront écrites les équations intégrales. Nous allons montrer qu'une surface S' entourant \mathbf{v} est suffisante.

Lorsque les conditions aux limites sont posées correctement (problème de Dirichlet par exemple), le système:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & P \in \mathbf{v} \\ \text{CAL} \end{cases} \quad (2.4)$$

a une solution unique V_{sol} . Nous nous plaçons dans ce cas pour plus de clarté.

Nous cherchons donc un potentiel $- V_{sol}$ - qui n'a pas de source dans v . Si on écrit l'é.i.f. en tous les points d'une surface S' entourant v on obtient une condition apparemment moins forte: on n'impose pas la nullité de la distribution ΔV dans v mais seulement la nullité de sa contribution au potentiel sur S' .

Par exemple, toute distribution à "charge" totale nulle et symétrie sphérique annule son potentiel à l'extérieur d'elle-même (fig. 6): il y a donc dans le volume v une infinité de solutions $V_{sol} + V_m$ à l'é.i.f. écrite sur S' .

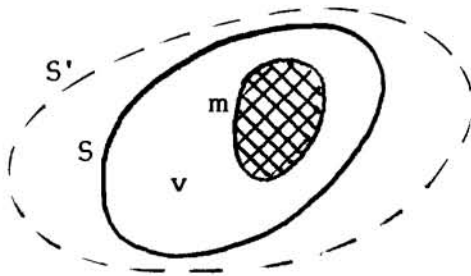


Fig. 6

Mais $V_m = 0$ sur S' et à l'infini: il est donc identiquement nul dans tout l'espace sauf peut-être dans v où sont situées les sources m qui interdisent d'appliquer le théorème du maximum. On en déduit que:

$$V_m = \frac{\delta V_m}{\delta n} = 0 \quad \text{sur } S \quad (2.5)$$

c'est-à-dire que toutes les solutions données par les é.i.f. ont les mêmes valeurs aux limites sur S que la solution cherchée.

La solution $V_{sol}(P)$ en un point P intérieur à v est obtenue en écrivant:

$$V_m(P) = 0 \iff \int_v \Delta V_m \cdot G_P \, dv = 0 \quad (2.6)$$

c'est-à-dire en utilisant la formule intégrale de frontière 1.58.

Ainsi l'équation de Laplace écrite en tout point de \mathbf{v} est-elle équivalente à l'é.i.f. écrite en tout point de S' (l'intégration se faisant sur S et S' pouvant être confondue avec S) et en tout point de \mathbf{v} ; cependant, le problème physique est résolu lorsque les valeurs limites de V_{sol} sur S sont déterminées, donc par l'écriture de l'é.i.f. sur S' seule. La quadrature qui conduit à la solution dans \mathbf{v} peut être considérée implicitement.

2.1.3. Cas de la région extérieure.

Nous cherchons maintenant à résoudre l'équation de Laplace dans le volume \mathbf{v} extérieur à la surface S et s'étendant jusqu'à l'infini (fig. 7).

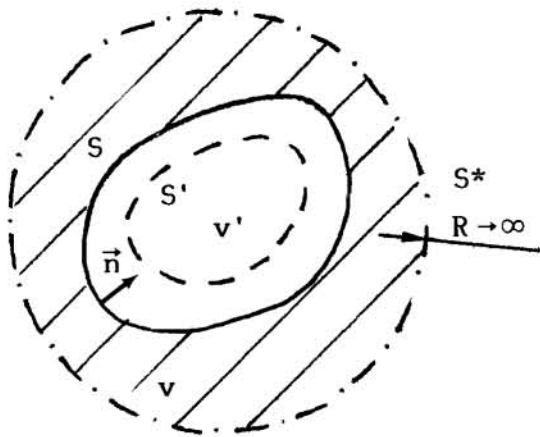


Fig. 7

Le raisonnement du paragraphe précédent s'applique à nouveau en choisissant S' dans le volume \mathbf{v}' limité par la surface S . Les é.i.f. écrites sur tout S' permettent d'affirmer que les éventuelles sources m situées dans \mathbf{v} annulent leur potentiel sur tout S' , donc dans \mathbf{v}' tout entier: on en déduit encore que le potentiel V_m et sa dérivée normale s'annulent sur S (2.5).

Pour cette région extérieure, il est encore nécessaire de préciser la valeur du coefficient angulaire c défini en 1.56.

La région extérieure à S peut être considérée comme une région intérieure à la sphère de surface S^* dont on fait tendre

le rayon R vers l'infini. Le potentiel décroissant au moins comme $1/R$ et sa dérivée normale comme $1/R^2$, l'intégrale de surface 1.58 sur S^* tend vers 0. Il faut par contre tenir compte de:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} - \int_{S^*} \frac{\delta G}{\delta n} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S^*} d\Omega = 1 \quad (2.7)$$

dans le calcul du coefficient c . Remarquons que la normale extérieure à v est ici tournée vers l'intérieur de S : l'intégrale 2.7 calculée sur S prend les valeurs:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } P \text{ est à l'intérieur de } v \\ -\frac{1}{2} & \text{si } P \text{ est un point régulier de } S \\ -1 & \text{si } P \text{ est dans le volume limité par } S. \end{cases}$$

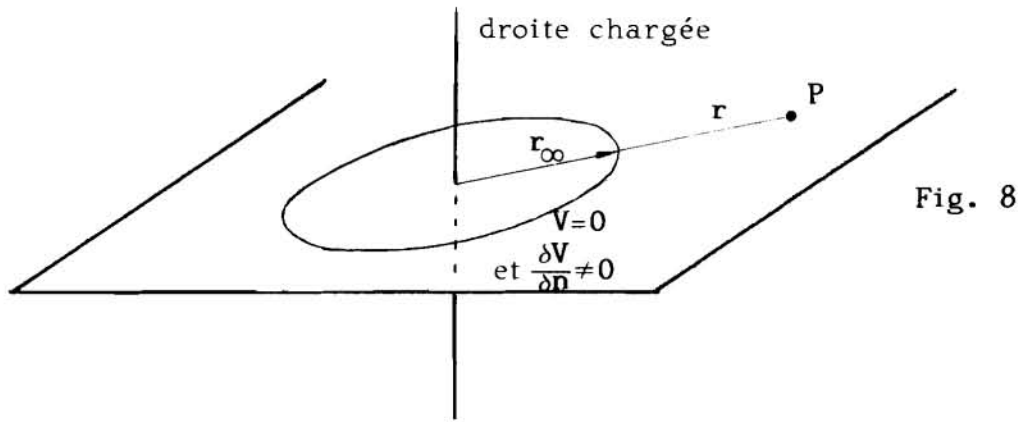
La somme des intégrales 2.7 sur S^* et sur S donne bien au coefficient c les valeurs habituelles:

$$c = \frac{\Omega_P(v)}{4\pi} = 1 - \int_S \frac{\delta G}{\delta n} ds = \begin{cases} 1 & \text{si } P \in v \\ \frac{1}{2} & \text{si } P \in S \text{ (} P \text{ régulier)} \\ 0 & \text{si } P \notin v \cup S \end{cases} \quad (2.8)$$

Concluons en soulignant que les é.i.f. prendront exactement en compte la région extérieure infinie par la seule intégration sur S .

2.1.4 Cas des systèmes cylindriques infinis.

Le raisonnement du §2.1.2 qui montre l'équivalence des é.i.f. avec l'équation de Laplace est mis en défaut dans le cas des systèmes cylindriques infinis (autrement dit: problèmes bidimensionnels plans). En effet, le potentiel d'une distribution uniforme de monopôles sur une droite infinie est donné par (fig.8):



$$V = k \cdot \log \frac{r}{r_\infty} \tag{2.9}$$

Il s'annule sur le cercle de rayon r_∞ sans que sa dérivée normale ne s'annule (ce potentiel ne peut être posé nul à l'infini): l'équation 2.5 ne sera pas vérifiée dans tous les cas; par exemple, les é.i.f. ne conduiront pas à la solution si la géométrie étudiée est un cylindre circulaire infini de rayon r_∞ .

C'est là l'origine des systèmes singuliers signalés par Jawson dans le cadre de la théorie du potentiel bidimensionnel et qui reçoivent ici une explication simple et concrète.

En réalité, les systèmes cylindriques infinis n'existent pas et il est toujours possible de considérer que le potentiel s'annule à l'infini. Le potentiel logarithmique est cependant une bonne approximation du potentiel coulombien dans un domaine proche du milieu d'objets très longs: le potentiel d'un segment de droite chargé uniformément, de longueur r_∞ , est donné par:

$$V = k \cdot \log \frac{r}{r_\infty}$$

dans le plan médian et pour $r \ll r_\infty$. Si cette inégalité est respectée c'est-à-dire en choisissant r_∞ supérieur* à la plus grande dimension de la coupe de l'objet cylindrique étudié, on ne risque pas d'obtenir un système intégral singulier.

(*) En partant de l'étude formellement plus rigoureuse de Jawson [10], on montre que l'inégalité stricte est mathématiquement suffisante. Numériquement, il faut prendre r_∞ très supérieur à la plus grande coupe pour éviter les systèmes quasi-singuliers.

Cette condition de régularité a priori du système d'é.i.f. est plus efficace qu'une correction a posteriori consistant à changer l'échelle du domaine si on a eu la malchance d'obtenir un système singulier ou quasi-singulier.

2.1.5 Récapitulation.

Nous pouvons nous résumer de la façon suivante:

- Le problème de Laplace est résolu lorsque les valeurs aux limites (potentiel et dérivée normale sur la surface S de v) sont connues.

- Pour obtenir ces valeurs aux limites, il faut écrire les é.i.f. sur toute une surface S' extérieure à v , éventuellement confondue avec S . Pour les problèmes à plusieurs régions R_i , on aura autant de surfaces S'_i que de régions R_i et on appliquera les équations 1.61 ou 1.63.

- Pour les problèmes bidimensionnels plans, il faut choisir la constante r_∞ du potentiel logarithmique 2.9 très supérieure à la plus grande dimension de la coupe de l'objet étudié.

D'un point de vue pratique, il est exclu d'écrire les é.i.f. de façon continue sur toute une surface: nous allons étudier les conséquences de cette impossibilité à la section 2.2.

2.2 GENERALITES SUR LA DISCRETISATION DES E.I.F.

Nous venons de montrer qu'il est équivalent d'écrire l'équation de Laplace dans un volume v ou l'équation intégrale de frontière sur une surface S' entourant v . A de rares exceptions près pour des géométries très particulières, il est impossible de déterminer les fonctions Φ et Ψ sur S qui vérifieraient exactement l'é.i.f. 1.63 en chaque point de S' : on a donc recours à des procédés d'approximation numériques de ces fonctions.

Nous tentons dans cette section d'analyser le comportement dans l'espace de l'erreur associée à cette approximation numérique et nous cherchons un moyen de l'estimer.

2.2.1 Démarche pour la résolution numérique et sources d'erreur.

Les grandeurs Φ et Ψ sont approchées sur la surface S par des combinaisons linéaires de fonctions de base A_i et B_i . On aura ainsi en un point Q de la surface S :

$$\hat{\Phi}(Q) = \sum_{i=1}^N a_i A_i(Q) \quad \text{et} \quad \hat{\Psi}(Q) = \sum_{i=1}^M b_i B_i(Q) \quad (2.10)$$

Les fonctions A_i et B_i sont, par exemple, les fonctions poids des éléments finis; le type précis de développement utilisé ne joue aucun rôle dans notre raisonnement.

Certains des coefficients a_i ou b_i peuvent être connus a priori (CAL fixées); certains sont inconnus: pour les déterminer, nous écrivons dans chaque région un système linéaire du type:

$$-\int_S \left(\hat{\Phi}(Q) \frac{\partial G_{P_i}}{\partial n} \Big|_Q - \left(\frac{\hat{\Psi}(Q)}{\mu_r} + H_{on}(Q) \right) \cdot G_{P_i}(Q) \right) ds = c \cdot \hat{\Phi}(P_i) \quad (2.11)$$

avec $P_i \in S'$ ($c = 0$ si $S' \neq S$)

Nous considérons ici que l'erreur due à l'approximation numérique de l'intégration est négligeable et il faudra utiliser des techniques suffisamment performantes pour que ce soit le cas (sans quoi les résultats finaux ne peuvent être corrects). Par contre nous admettons deux sources d'erreur:

- Les développements $\hat{\Phi}$ et $\hat{\Psi}$ sont forcément limités: par exemple, un développement en éléments finis du second ordre ne pourra pas se superposer exactement à une solution sinusoïdale: c'est l'erreur de discrétisation.

- La résolution du système linéaire 2.11 ne peut être numériquement exacte. C'est en face de cette erreur numérique que l'erreur commise sur une intégration doit être rendue négligeable. Une conséquence de cette erreur de résolution est que les développements $\hat{\Phi}$ et $\hat{\Psi}$ finalement obtenus ne vérifieront pas rigoureusement le système 2.11.

L'erreur due à l'approximation de la géométrie est plus difficile à analyser rigoureusement et nous ne la prenons pas en compte. A une certaine distance des frontières, elle se comporte comme les précédentes.

2.2.2 Valeur approchée dans l'espace du potentiel et erreur réelle maximale.

Le développement que nous avons noté $\hat{\Phi}$ est une valeur approchée du potentiel, mais il n'est défini que sur la frontière. Dans le volume, nous notons Φ^* l'approximation du potentiel obtenue à partir de $\hat{\Phi}$ et de $\hat{\Psi}$ par la quadrature:

$$\Phi^*(P) = I(P) \quad (P \in v-S) \quad (2.12)$$

avec:

$$I(P) = - \int_S \left(\hat{\Phi} \frac{\delta G}{\delta n} - \left(\frac{\hat{\Psi}}{\mu} + H_{on} \right) G \right) ds \quad (2.13)$$

Le potentiel Φ^* ainsi défini est, dans v , le potentiel des distributions surfaciques:

$$\hat{\Phi} \quad \text{et} \quad - \left(\frac{\hat{\Psi}}{\mu} + H_{on} \right)$$

Il obéit donc à l'équation de Laplace tout comme la solution exacte Φ . La différence $(\Phi - \Phi^*)$ obéit par conséquent aussi à l'équation de Laplace et on peut lui appliquer le théorème du maximum:

$$\text{"Les extréma de l'erreur sont sur } S\text{"} \quad (2.14)$$

Cela peut sembler paradoxal dans le cas d'un problème de Dirichlet: l'erreur sur la grandeur cherchée est maximale justement là où cette grandeur est connue!

Dans ce cas du problème de Dirichlet, la valeur exacte Φ du potentiel est connue sur la surface S et est utilisée pour construire le développement $\hat{\Phi}$ qui peut être exact. La résolution des é.i.f. nous donne $\hat{\Psi}$ qui est lié à la dérivée normale du potentiel: on pourrait penser que l'erreur sur le potentiel serait nulle sur la frontière et non nulle en dehors.

En réalité, sur la frontière, $\hat{\Phi}$ et Φ^* ne sont pas confondus. Pour appliquer 2.14, on doit en effet poser (fig. 9):

$$\Phi^*(P_S) = \lim_{P \rightarrow P_S} I(P) \quad (2.15)$$

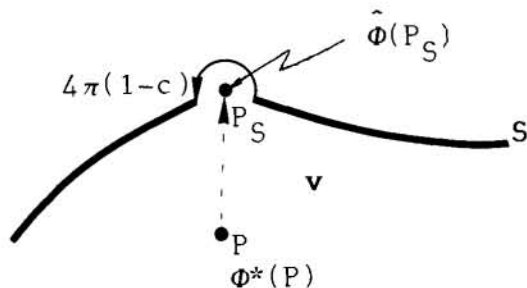


Fig. 9

ce qui n'est pas trivial puisque I n'est pas continue à travers S . Cette limite est liée aux valeurs de I et de $\hat{\Phi}$ sur S : en définissant Φ_S^* par analogie à 2.11:

$$c \cdot \Phi_S^*(P_S) = I(P_S) \quad P_S \in S \quad (2.16)$$

on obtient l'expression :

$$\Phi^*(P_S) = c \cdot \Phi_S^*(P_S) + (1-c) \cdot \hat{\Phi}(P_S) \quad P_S \in S \quad (2.17)$$

ou:

$$\Phi^* - \hat{\Phi} = c \cdot (\Phi_S^* - \hat{\Phi}) \quad \text{sur } S \quad (2.18)$$

Exemple:

Déterminons l'erreur commise pour le problème de Dirichlet. Le potentiel imposé sur S est Φ et le développement $\hat{\Phi}$ choisi de façon qu'on ait exactement:

$$\Phi = \hat{\Phi} \quad \text{sur } S$$

L'écriture des é.i.f. permet de déterminer un développement $\hat{\Psi}$ et le potentiel est approché en tout point de v par Φ^* . L'erreur maximale sur ce potentiel se trouve en un point de la frontière: elle peut donc être déterminée; on aura:

$$\begin{aligned} \Phi - \Phi^* \Big|_S &= c \cdot (\Phi - \Phi_S^*) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\Phi - \Phi_S^*) \quad \text{pour un point régulier.} \end{aligned}$$

Φ est une donnée du problème, Φ^* peut être calculé en tout point de S par 2.16 et 2.13. Une application numérique est présentée au §3.3.1.

2.2.3 Erreur réelle pondérée.

Les remarques du paragraphe précédent permettent de borner l'erreur commise sur le potentiel lorsque la valeur exacte du potentiel est connue sur la frontière, c'est-à-dire seulement dans le cas du problème de Dirichlet. Dans les autres cas, la comparaison du développement $\hat{\Phi}$ avec le potentiel intégral Φ^* sur S permet une estimation de l'erreur.

En effet, définissons l'intégrale:

$$I_{\text{erreur}}(P) = - \int_S (\Phi - \hat{\Phi}) \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{1}{\mu} (\Psi - \hat{\Psi}) G \, ds \quad (2.19)$$

qui est l'intégrale 2.13 des erreurs sur les conditions aux limites. On a alors:

$$c.\Phi(P) = I(P) + I_{\text{erreur}}(P) \quad (2.20)$$

et, pour un point P_S de la surface:

$$(\hat{\Phi} - \Phi^*)_{P_S} = \lim_{P \rightarrow P_S} I_{\text{erreur}}(P) \quad (2.21)$$

L'écart 2.21 est donc bien une mesure, définie par l'intégrale 2.19, de l'erreur sur les valeurs aux limites.

Remarquons que le système discrétisé d'équations intégrales de frontière 2.11 est équivalent à:

$$I_{\text{erreur}}(P_i) = 0 \quad \text{si } S' \neq S, P_i \in S' \quad (2.22)$$

$$\lim_{P \rightarrow P_i} (I_{\text{erreur}}(P_i)) = 0 \quad \text{si } S' = S, P_i \in S, P \notin S$$

ce qui montre, comme en §2.1.2 que la méthode intégrale est une méthode projective.

2.2.4 Commentaire.

Nous voyons maintenant mieux à quoi correspond la solution Φ^* donnée par les équations intégrales de frontière: c'est, dans chaque domaine, une combinaison linéaire de solutions exactes de l'équation physique, choisie de façon à ce que les conditions d'interfaces soient "au mieux" vérifiées. Ce "au mieux" sera précisé aux paragraphes 2.3.3 et 2.3.4; cela peut signifier par exemple qu'on annule autant de "mesures" $I_{\text{erreur}}(P)$ de l'erreur sur ces conditions d'interfaces qu'on dispose de degrés de liberté dans la combinaison linéaire.

Le principe des méthodes variationnelles associées aux éléments finis est très différent: Φ^* s'exprime également comme combinaison linéaire de "fonctions poids", mais ces fonctions ne sont pas solution de l'équation physique.

2.3 CHOIX DE LA DISCRETISATION ET RESOLUTION

En principe, de nombreux développements peuvent convenir pour les fonctions $\hat{\Phi}$ et $\hat{\Psi}$ (polynomes, séries de Fourier, etc.) et ils ne sont pas à rejeter pour des applications particulières.

Pour les géométries complexes et variées qui sont à envisager lors de la conception d'un logiciel général de résolution, il devient impossible de dissocier ce problème de l'approximation des grandeurs physiques sur la frontière de celui de l'approximation géométrique de cette frontière. De plus, des logiciels très élaborés de résolution des problèmes de champs fondés sur les méthodes variationnelles existent déjà, et utilisent des éléments finis isoparamétriques pour la discrétisation numérique.

Notre choix s'est ainsi porté sur ces éléments finis, ce qui simplifiera le couplage - envisagé pour la résolution des problèmes non linéaires - de la méthode des équations intégrales de frontière avec une méthode variationnelle.

2.3.1 Expression discrétisée de l'é.i.f.

Nous ne nous étendrons pas sur la définition des éléments finis isoparamétriques amplement décrits par ailleurs. Nous avons choisi l'ordre deux qui est l'ordre minimum permettant une description précise des surfaces courbes.

Dans l'exemple bidimensionnel, rappelons seulement que les grandeurs géométriques et physiques sont approximées sur chaque élément fini défini par l'abscisse curviligne $u \in]-1,1[$ à l'aide des mêmes fonctions poids paraboliques $p_i(u)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{x}(u) &= \sum_i x_i \cdot p_i(u) \\ \hat{y}(u) &= \sum_i y_i \cdot p_i(u) \end{aligned} \right. \quad (2.23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\Phi}(u) &= \sum_i \Phi_i \cdot p_i(u) \\ \hat{\Psi}(u) &= \sum_i \Psi_i \cdot p_i(u) \end{aligned} \right. \quad (2.24)$$

avec, toujours pour l'ordre deux:

$$\left\{ \begin{aligned} p_1(u) &= \frac{1}{2}u(u-1) \\ p_2(u) &= 1-u^2 \\ p_3(u) &= \frac{1}{2}u(1+u) \end{aligned} \right. \quad u \in [-1, 1] \quad (2.25)$$

si bien que, pour le point $P_i(x_i, y_i)$ on a:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\Phi}(P_i) &= \Phi_i \quad \text{et} \\ \hat{\Psi}(P_i) &= \Psi_i \end{aligned} \right. \quad (2.26)$$

L'expression de l'intégrale 2.13 discrétisée est donc:

$$I(P) = \sum_k \sum_{i=1}^3 (\Phi_{ki} a_{ki} - (\frac{1}{\mu} \Psi_{ki} + H_{on_{ki}}) \cdot b_{ki}) \quad (2.27)$$

avec:

$$\begin{aligned} a_{ki}(P) &= \int_{-1}^1 p_i(u) \frac{\delta G_{Pk}(u)}{\delta n} J(u) du \\ b_{ki}(P) &= \int_{-1}^1 p_i(u) \cdot G_{Pk}(u) \cdot J(u) du \end{aligned} \quad (2.28)$$

k: indice sur les éléments finis de S

i: indice sur les fonctions poids p_i

J(u): Jacobien du changement de variable ($ds=J(u)du$)

Les coefficients $a_{ki}(P)$ et $b_{ki}(P)$ sont purement géométriques et dépendent du point P où est calculée l'intégrale I , de l'élément k parcouru et de la fonction poids i considérée.

Remarquons que:

$$\sum_{i=1}^3 a_{ki}(P) = - \int_{-1}^1 \frac{\delta G_{Pk}(u)}{\delta n} J(u) du = \frac{1}{4\pi} \Omega_k(P) \quad (2.29)$$

où $\Omega_k(P)$ est l'angle sous lequel le point P voit l'élément k .

Ces coefficients sont déterminés numériquement par la méthode d'intégration numérique de Gauss [9].

2.3.2 Choix de la surface S' où seront écrites les é.i.f.

Deux choix sont possibles pour la surface S' sur laquelle sont centrés les noyaux de l'équation intégrale (cf. §2.1.2):

- S' hors du volume v , séparée de la surface d'intégration S de ce volume (fig. 10).

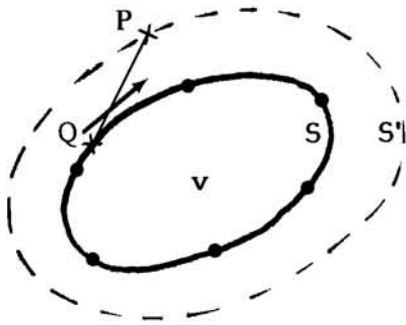


Fig. 10

Dans ce cas le point P , centre des noyaux G et $G' = \delta G / \delta n$ n'est à aucun moment confondu avec le point courant Q de l'intégration. Le même algorithme simple de calcul des coefficients a_{ki} et b_{ki} pourra être utilisé pour l'intégration sur toute la surface S et à partir de tout point P de S' (à condition toutefois que P ne soit pas "trop proche" de S : la variation très rapide

des intégrants au passage du point courant Q près de P conduirait à des imprécisions inadmissibles de l'intégration numérique. Cette proximité est définie relativement à la taille des éléments finis définissant S).

Il est par contre nécessaire de définir une surface S' , ce qui peut représenter un travail supplémentaire important, difficilement automatisable.

- S' confondue avec S (fig. 11).

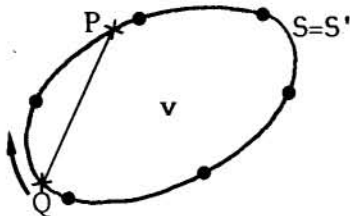


Fig. 11

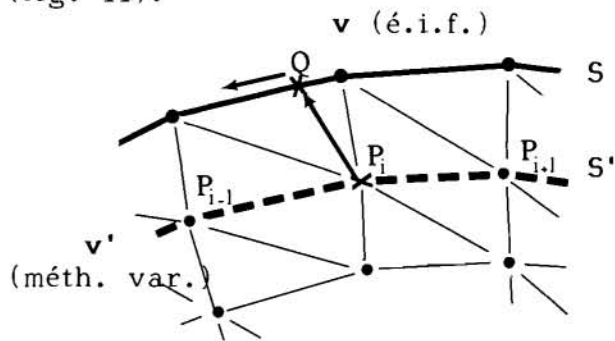


Fig. 12

Il n'y a plus aucune difficulté pour définir les points P , centres des noyaux de l'équation intégrale; il faudra par contre développer des algorithmes d'intégration particuliers pour le calcul des coefficients a_k et b_k (éq. 2.28) lorsque l'élément k contient le point P . En effet, les noyaux $p_i G$ et $p_i G'$ sont singuliers lorsque Q tend vers P , alors que l'intégrale est, bien entendu, régulière. Nous présentons l'exemple axisymétrique au §3.2.2.

Nous avons pour notre part choisi cette seconde solution. La première pourrait être envisagée pour alléger l'ensemble du programme de calcul lors d'un couplage avec une méthode variationnelle (fig. 12): la région extérieure au volume traité par équations intégrales le serait par éléments finis, ce qui permettrait de définir très simplement les points P .

2.3.3 Résolution par la méthode directe (corrélation par point).

La méthode de résolution dite "directe" ou "par corrélation par points" est celle suggérée au §2.2.1 (éq. 2.11): pour N coefficients Φ_i ou Ψ_i inconnus, on écrit N équations:

$$\Phi_S^*(\hat{\Phi}, \hat{\Psi}) = \hat{\Phi} \quad (2.30)$$

en N points P_i de S, par exemple aux noeuds du maillage.

La structure générale de la matrice pour l'exemple de la topologie de la figure 13 est celle de la figure 14. Cette matrice n'est pas symétrique, et est entièrement pleine lorsqu'il n'y a qu'une interface.

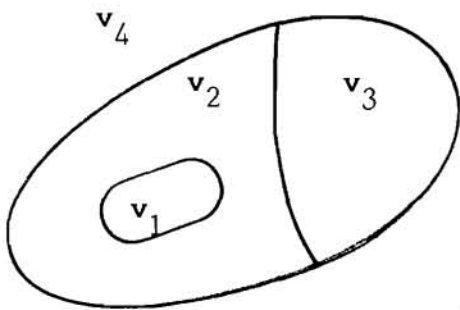


Fig. 13: Topologie

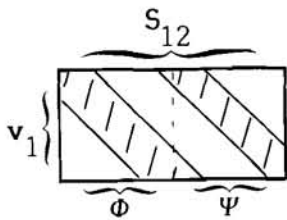


Fig. 15: sous diagonale dominante.

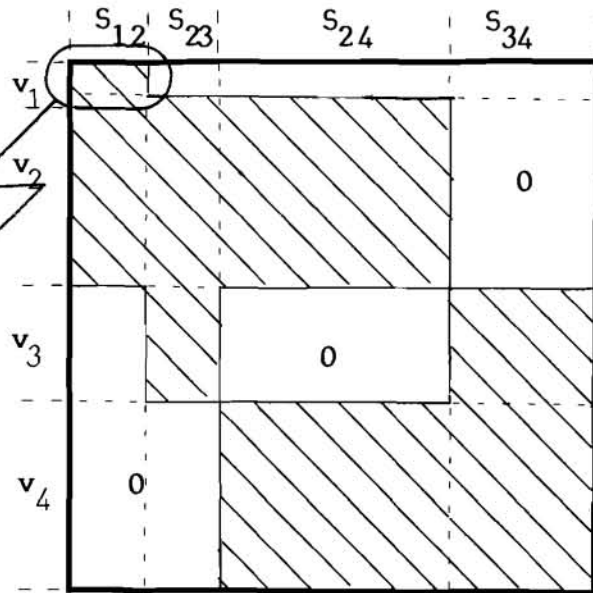


Fig. 14: Forme de la matrice.

Elle est heureusement assez bien conditionnée: l'équation 2.11 écrite au point P_i donne un facteur dominant pour Ψ_i en raison de la décroissance en $1/r$ de G; le membre de droite de l'équation et la décroissance en $1/r^2$ du facteur $\partial G/\partial n$ produisent le même effet pour Φ_i . Chaque sous-matrice a donc des sous-diagonales dominantes (fig. 15).

La résolution elle-même du système linéaire se fait par triangularisation de Gauss avec test de pivots et substitution inverse.

2.3.4 Résolution par une méthode projective.

Au lieu d'écrire N équations 2.30 pour déterminer directement les N inconnues, on peut écrire:

$$\int_s (\Phi_s^*(\hat{\Phi}, \hat{\Psi}) - \hat{\Phi}) \cdot w_i ds = 0 \quad (2.31)$$

pour N fonctions w_i ; c'est la méthode de projection de Galerkin si les fonctions w_i sont les fonctions poids p_i définies au §2.3.1.

L'estimation de l'intégrale 2.31 nécessite le calcul de Φ^* en plus de N points P de S, par exemple en 4 points de Gauss par élément, ce qui revient à doubler le temps d'assemblage de la matrice. Pour une discrétisation donnée, la qualité des résultats peut être ainsi améliorée [19].

La méthode intégrale étant elle-même une méthode projective, il peut paraître curieux de procéder ainsi à une seconde projection. Pour expliquer l'intérêt de cette procédure, calculons l'erreur quadratique moyenne:

$$\overline{\epsilon^2} = \int_s (\Phi_s^* - \hat{\Phi})^2 \cdot ds \quad (2.32)$$

et minimisons la par rapport à un coefficient Φ_{ki} :

$$\frac{d\overline{\epsilon^2}}{d\Phi_{ki}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_s (\Phi_s^* - \hat{\Phi}) \cdot \left(- \frac{d(\Phi_s^* - \hat{\Phi})}{d\Phi_{ki}} \right) \cdot ds = 0 \quad (2.33)$$

ce qui correspond à une projection sur la fonction:

$$\begin{aligned} w_{ki}(P_{k'}) &= - \frac{d(\Phi_s^* - \hat{\Phi})}{d\Phi_{ki}} P_{k'} \\ &= p_{ki}(P_{k'}) - a_{ki}(P_{k'}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

p_{ki}, a_{ki} : voir §2.3.1

k : N° de l'élément correspondant au coefficient du potentiel par rapport auquel on minimise ϵ^2 .

k' : N° de l'élément sur lequel se trouve le point $P_{k'}$, qui est le point courant de la fonction de projection.

Cette fonction est prépondérante sur l'élément k ; aux noeuds du maillage, elle correspond aux coefficients du potentiel dans la matrice de la méthode directe, ce qui est conforme à la théorie de la résolution des systèmes linéaires surdéterminés par la méthode des moindres carrés. Elle peut être développée avec précision à l'aide des fonctions p :

$$w_{ki}(P_{k'}) \simeq p_{ki}(P_{k'}) - \sum_j a_{ki}(P_{kj}) \cdot p_{kj} \quad (2.35)$$

i, j : N° des fonctions poids p .

Si on résoud 2.31 par la méthode de Galerkin, on impose la nullité de la projection sur chaque fonction poids p , donc aussi sur toute combinaison linéaire de ces fonctions, en particulier sur l'expression 2.35 de w_{ki} .

La méthode de projection de Galerkin revient ainsi en première approximation à minimiser l'écart quadratique moyen entre le développement $\hat{\Phi}$ et le potentiel intégral Φ^* ce qui explique l'amélioration de résultats constatée: on n'annule plus le terme $\Phi^* - \hat{\Phi}$ en certains points prédéterminés (ce qui ne limite pas les oscillations de cette grandeur) mais on minimise ses oscillations autour de zéro.

Au §2.3.2 nous avons choisi d'écrire l'équation intégrale en des points P_i de S , sans autre précision. Il est clair que les solutions obtenues dépendent du choix des points P_i et qu'il doit exister un choix optimal pour une discrétisation donnée. La méthode de Galerkin conduit indirectement à ce choix optimal, au prix d'un travail d'assemblage au moins deux fois plus important que celui de la méthode directe.

L'expérience des résolutions effectuées jusqu'ici nous a montré que les solutions obtenues sont très peu sensibles à la position des points P_i des équations, dans la mesure où ils sont assez régulièrement répartis sur les interfaces (ce qui est nécessaire pour obtenir un bon conditionnement de la matrice) **sauf** à proximité des points anguleux: nous envisageons pour l'avenir une méthode mixte de résolution, directe sur les parties lisses des frontières et par méthode projective de Galerkin sur les éléments contenant un point anguleux.

2.3.5 Arêtes et points anguleux.

Aux points géométriquement singuliers: arêtes et points côniques en tridimensionnel, points anguleux en bidimensionnel, la fonction Ψ liée à une dérivée normale du potentiel n'est pas continue. On définit donc une valeur limite de Ψ en un tel point par élément fini concerné (fig. 16).

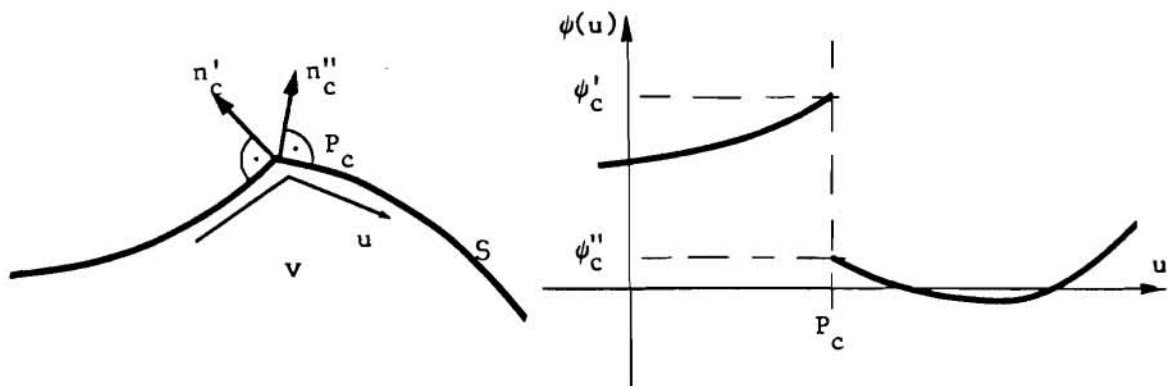


Fig. 16

Nous introduisons par là des inconnues supplémentaires: même en utilisant la méthode directe (§2.3.3), il ne sera plus possible de résoudre par l'écriture de l'équation intégrale aux seuls noeuds du maillage. Il est théoriquement possible de se contenter d'écrire l'équation supplémentaire nécessaire entre deux des noeuds de ce maillage, mais on obtient un système linéaire numériquement mieux conditionné en répartissant régulièrement les points des équations (fig. 17).

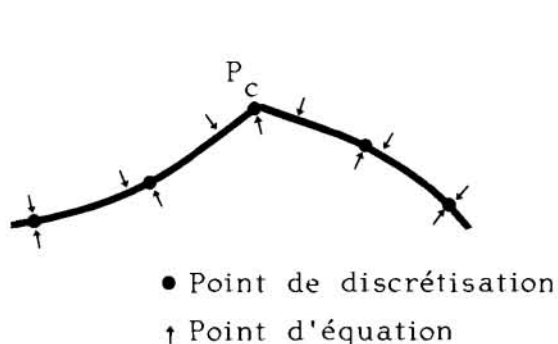


Fig. 17: Ecriture d'une équation supplémentaire dans l'angle.

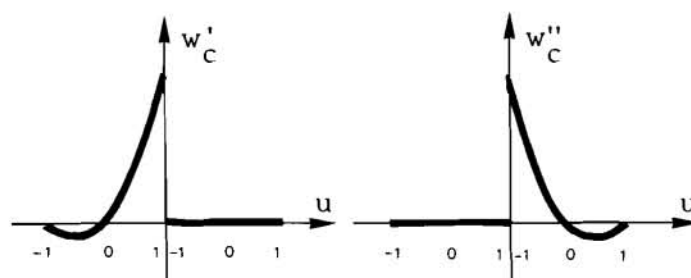


Fig. 18: Fonction de projection dédoublée dans l'angle.

Si la méthode projective (§2.3.4) est utilisée pour la résolution, l'équation supplémentaire est obtenue en dédoublant la fonction de projection w au point singulier (fig. 18).

Ces considérations, pour triviales qu'elles puissent paraître, n'en sont pas moins originales: pour les problèmes à frontières lisses sans condition aux limites, nous avons deux inconnues Φ_i et Ψ_i en chaque noeud P_i du maillage en éléments finis des interfaces. Chaque noeud appartenant à deux régions, il est possible d'y écrire deux équations intégrales différentes, et ainsi de résoudre le problème.

Cette correspondance noeuds-inconnues-équations qui fonctionne très bien sauf en présence de points géométriquement singuliers, a introduit dans l'esprit de quelques auteurs une confusion certaine; lorsqu'ils introduisent des points singuliers, ils tentent désespérément de conserver cette correspondance: angles arrondis par de "petits" éléments finis, définition d'une normale moyenne

dans l'angle, définition de deux points géométriquement "proches" à la place du coin |3|, traitement de la variable discontinue par éléments finis d'ordre zéro |5|, etc..

A côté de cette question relative à la discontinuité de Ψ , à laquelle nous pensons avoir apporté une réponse raisonnable, demeure un problème lié à la physique des angles diélectriques (conducteurs, à la limite) ou magnétiques: le champ y devient en théorie infini |6 Vol. 2, préface|. L'approximation de Ψ par un segment parabolique ne peut conduire à une solution d'excellente qualité à proximité immédiate de l'angle et il peut s'avérer intéressant - en particulier pour les problèmes conducteurs de l'électrostatique - d'introduire un développement spécial du type $r^{(\pi/\alpha)-1}$ |6 Vol. 2, I, 256| comme fonction poids complémentaire (fig. 19).

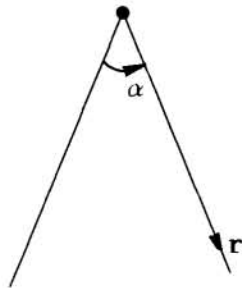


Fig. 19

2.3.6 Le facteur angulaire "c" de l'équation intégrale.

Ce facteur intervient dès l'écriture de l'identité de Green 1.55 et est défini en 1.56 et 2.8; il est proportionnel à l'angle (angle solide en tridimensionnel) sous lequel le point P, centre des noyaux de l'intégrale 2.13, voit la surface d'intégration S: si P est un point régulier de S, c vaut $\frac{1}{2}$; si P est dans le volume correspondant à cette surface, c vaut 1.

Numériquement, c peut être évalué à partir de 2.29:

$$c_P = \sum_k \frac{\Omega_k(P)}{4\pi} = \sum_k \sum_i a_{ki}(P) \quad (2.36)$$

en sommant des coefficients qui doivent être de toutes façons calculés.

Mais pourquoi calculer un coefficient dont on connaît la valeur ? C'est intéressant pour les raisons suivantes:

- lorsqu'une équation est écrite en un point singulier de la frontière, l'angle solide n'y est pas connu a priori;

- aux points-extrémités des éléments finis de frontières courbes, il apparaît en général de "faux" points anguleux, jonction de ces éléments: leur compensation par le calcul exact du facteur c correspondant non pas à la frontière réelle mais à sa représentation discrétisée améliore les résultats de façon décisive |12| (fig. 20).

- le facteur c , numériquement calculé en des points où sa valeur théorique est connue, peut être considéré comme un facteur de qualité de l'intégration numérique (§2.4.2-3.3.1, |13|).

Erreur maximale sur ...	$c = \frac{1}{2}$ pour chaque équation:	c calculé d'après l'équation 2.36:
le potentiel :	1.6 %	0.04 %
l'induction normale:	8.8 %	0.1 %

Fig. 20: Correction des "faux" points anguleux.
Sphère magnétique dans un champ uniforme; représentation axisymétrique par 4 éléments finis du second ordre.

Terminons par une remarque illustrant l'importance de ce facteur angulaire: Pour chaque région intérieure, le système

linéaire 2.30 se met sous la forme plus détaillée:

$$c \bar{1} \Phi = A \Phi + B \left(\frac{1}{\mu} \Psi - H_{on} \right) \mapsto (A-C) \Phi + B \left(\frac{1}{\mu} \Psi - H_{on} \right) = 0 \quad (2.37)$$

où A, B, et C sont des matrices. En particulier, d'après 2.36, C est une matrice diagonale dont chacun des termes est égal à la somme des termes correspondants de A.

La matrice (A-C) est donc singulière, son noyau (au sens de l'algèbre linéaire) correspondant à un potentiel constant sur S, ce qui est conforme à la réalité: un problème de Neumann intérieur est défini à un potentiel constant près qu'on peut fixer arbitrairement.

Pour le problème extérieur, la définition particulière 2.8 de c liée à la fixation du potentiel à zéro à l'infini, conduit à des problèmes de Neumann bien définis.

Nous venons d'étudier dans cette section 2.3 les principaux problèmes rencontrés lors de la résolution par la méthode des équations intégrales de frontière de l'équation de Laplace. Cette résolution qui fournit les fonctions surfaciques $\hat{\Phi}$ et $\hat{\Psi}$ ne sera en général qu'une première étape suivie d'une "exploitation" conduisant aux grandeurs utiles cherchées: la section 2.4 est consacrée à cette seconde étape.

2.4 EXPLOITATION DES RESULTATS

La différence de principe des méthodes intégrales en variationnelles se retrouve au niveau de l'exploitation des résultats.

L'utilisation des méthodes variationnelles pour la résolution des problèmes de champs nécessite la discrétisation par éléments finis de tout le domaine d'étude: après résolution, la grandeur physique correspondante est connue en chaque point et le tracé d'isovaleurs est élémentaire, spectaculaire et souvent rassurant quant à la qualité de la solution; il n'est que rarement utile.

En méthode intégrale, la solution est obtenue dans un premier temps sur les interfaces. Sa détermination en d'autres points nécessite un travail supplémentaire important qui rend peu réaliste le tracé systématique d'isovaleurs: on s'attachera avant tout au calcul des grandeurs utiles du type champ aux points critiques, flux, charge, force.

2.4.1 Calcul du potentiel et du champ en dehors des interfaces.

Le potentiel en un point P n'appartenant pas aux interfaces est donné par la quadrature 2.12:

$$\Phi^*(P) = I(P)$$

l'expression discrétisée de I étant donnée par 2.27. La quantité de calcul nécessaire à la détermination du potentiel en un point est donc la même que pour la construction d'une ligne de la matrice de résolution par la méthode directe (§2.3.3).

Le champ induit en ce point P, correspondant à cette approximation Φ^* du potentiel est donnée par l'équation 1.32:

$$\begin{aligned}
 H_1^* &= -\nabla\Phi^* \\
 &= -\nabla I(P) \\
 &= + \int_S \left(\hat{\Phi} \nabla \frac{\delta G}{\delta n} - \left(\frac{\hat{\Psi}}{\mu} + H_{on} \right) \nabla G \right) ds
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

et on a une expression semblable pour l'électrostatique. La forme discrétisée est du même type que celle (2.27) du potentiel $|1|$. On a par exemple, pour une direction \mathbf{m} donnée:

$$H_1^* \cdot \mathbf{m} = \sum_k \sum_i [\phi_{ki} a'_{ki}(\mathbf{m}) - \left(\frac{\psi_{ki}}{\mu} + H_{on_{ki}} \right) b'_{ki}(\mathbf{m})] \tag{2.39}$$

avec:

$$\begin{aligned}
 a'_{ki}(\mathbf{m}) &= - \int_{-1}^1 p_i(u) \frac{\delta}{\delta \mathbf{m}} \left(\frac{\delta G_{Pk}(u)}{\delta n} \right) J(u) du \\
 b'_{ki}(\mathbf{m}) &= - \int_{-1}^1 p_i(u) \frac{\delta}{\delta \mathbf{m}} (G_{Pk}(u)) J(u) du
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{m}} \left(\frac{G_{Pk}(u)}{n} \right) = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{r^2} - 2 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^4} \tag{2.41}$$

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{m}} (G_{Pk}(u)) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}}{r^2}$$

en bidimensionnel plan et des formules comparables en tridimensionnel $|1|$.

Cette possibilité de déterminer le potentiel et le champ approchés en un point quelconque du volume \mathbf{v} par une intégration sur sa surface S peut être appliquée au tracé d'une ligne équipotentielle: les procédés de tracé habituels sont liés à un maillage du volume et sont inutilisables ici.

Nous proposons une méthode pas à pas dans le plan illustrée par la figure 21.

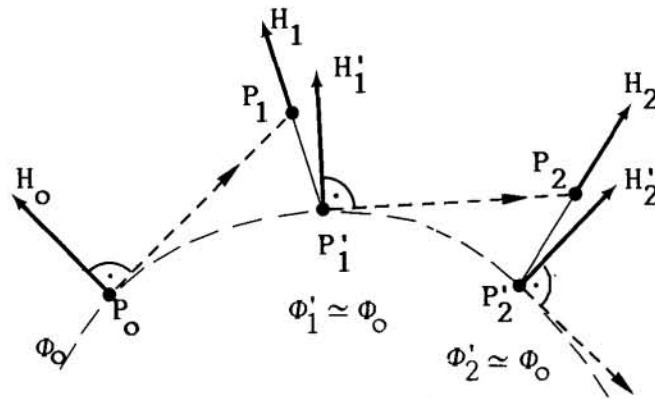


Fig. 21: Principe du tracé d'une équipotentielle.

- P_0 est le point de départ,
- le potentiel et le champ sont calculés en P_1 ;
- une correction linéaire donne P_1' sur la ligne;
- si nécessaire, une seconde correction (quadratique) est calculée,
- etc., pas à pas.

2.4.2 Cas d'un point "proche" d'une frontière.

Lorsque le point P est proche de la frontière, les intégrants G , $\delta G / \delta n$, ∇G et $\nabla(\delta G / \delta n)$ varient très rapidement au passage du point courant Q près de P et l'intégration numérique perd sa précision. Nous l'avons déjà signalé au §2.3.2 dans le cadre de la construction du système linéaire d'é.i.f..

Cette divergence numérique n'est pas gênante dans la mesure où le calcul du facteur de qualité de l'intégration numérique, c , permet d'en être averti (exemple numérique au §3.3.1): les grandeurs physiques seront déterminées en ce point par interpolation entre les valeurs sur la frontière et celles en un point plus éloigné pour lequel l'intégration numérique aura retrouvé sa qualité.

2.4.3 Point sur une frontière.

Sur la frontière, deux grandeurs approchent le potentiel: $\hat{\Phi}$ et Φ^* . $\hat{\Phi}$ étant connu dès que le système d'é.i.f. est résolu, nous le choisissons comme potentiel approché sur la frontière. Rappelons que le calcul de Φ^* (et sa comparaison avec $\hat{\Phi}$) permet l'estimation de l'erreur (§§2.2.2-2.2.3).

Les mêmes remarques s'appliquent au calcul du champ sur la frontière: l'approximation la plus simple est:

$$\hat{H}_i = - \left(\frac{\hat{\Psi}}{\mu} + H_{on} \right) n - \frac{\delta \hat{\Phi}}{\delta t} t \quad (2.42)$$

Il serait également possible de rechercher les limites de $-\nabla \Phi^*(P)$ lorsque le point P tend vers la surface S. Les expressions analytiques et les algorithmes de calcul associés sont d'une rare complexité, leur mise en oeuvre n'est guère justifiée.

2.4.4 Grandeurs globales.

Le calcul d'un flux à travers une surface A est particulièrement simple lorsque A fait partie des frontières définissant le problème: il suffit dans ce cas d'intégrer la variable Ψ :

$$F(A) = \sum_{k_A} \sum_i \left(\hat{\Psi}_i \int_{-1}^1 p_i(u) J(u) du \right) \quad (2.43)$$

Si A est en dehors des frontières, nous la définirons par k_A éléments finis; nous calculerons le champ total normal en chacun des points de discrétisation et nous appliquerons la formule ci-dessus.

Le tenseur de Maxwell [7 ; 11] permet de calculer la force ou le couple s'exerçant sur un volume par une intégrale des

grandeurs surfaciques. Les composantes du tenseur sont:

$$\begin{aligned} T_{mn} &= \mu(H_n H_m - \frac{1}{2} \delta_{mn} H^2) && \text{pour le magnétisme et} \\ & && (2.44) \\ T_{mn} &= \epsilon(E_n E_m - \frac{1}{2} \delta_{mn} E^2) && \text{pour l'électrostatique.} \end{aligned}$$

La composante F_m de la force vaut:

$$F_m = \oint_s T_m \cdot ds \quad \text{avec} \quad T_m = \begin{pmatrix} T_{m1} \\ T_{m2} \\ T_{m3} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

μ et H sont respectivement la perméabilité et le champ en surface, à l'extérieur du volume. Ainsi, même si le problème intérieur, non linéaire, était résolu par une méthode variationnelle et le problème extérieur par méthode intégrale, le tenseur de Maxwell pourrait être utilisé pour déterminer la force.

La forme discrétisée des expressions 2.44 et 2.45 est donnée par B. Ancelle dans [1].

Soulignons pour conclure cette section consacrée à l'exploitation des résultats que les grandeurs globales les plus utiles, c'est-à-dire: force sur une région, flux d'induction à travers une partie de frontière (qui permet de calculer une inductance), flux du déplacement électrique (qui permet de calculer la charge, et donc les capacités) sont calculées à partir de la solution **sur les frontières** obtenue directement par la méthode des équations intégrales de frontière.

2.5 CONCLUSION

La façon originale avec laquelle nous avons abordé dans ce chapitre la méthode des équations intégrales de frontière nous a permis d'établir la condition d'équivalence avec l'équation de Laplace bidimensionnelle. Nous avons ensuite abordé l'étude des erreurs introduites du fait de la discrétisation numérique, avec une méthode proche de celle utilisée par E. Durand pour la méthode des réseaux [6 Vol. 3, I].

D'un point de vue moins théorique, nous espérons avoir apporté quelque clarification sur les méthodes de construction et de résolution du système d'équations intégrales discrétisées: sur quelles surfaces écrire les équations et comment les répartir; qu'attendre d'une méthode projective pour la résolution; comment aborder les singularités géométriques; comment compenser les erreurs introduites par les "faux" points anguleux dus à la discrétisation géométrique; comment estimer la précision de l'intégration numérique; etc...

Nous pensons enfin avoir montré que le fait que la solution ne soit connue, dans un premier temps, que sur les interfaces, n'est pas un réel handicap pour l'obtention de grandeurs globales.

C H A P I T R E 3

FORMULATION EN AXISYMETRIE DE LA METHODE D'E.I.F. TIREE DE L'IDENTITE DE GREEN

La résolution des problèmes axisymétriques intéresse à l'évidence l'électrotechnicien qui utilise quotidiennement des dispositifs dont un premier modèle, et même parfois un bon modèle, est axisymétrique: par exemple certains contacteurs ou un moteur de haut-parleur pour le magnétisme, des isolateurs, des éclateurs et diverses parties d'appareillages haute tension pour l'électrostatique.

D'un autre point de vue, un objet axisymétrique est un objet tridimensionnel exactement descriptible dans un demi-plan: les problèmes associés intéressent donc aussi le théoricien qui s'affranchit ainsi des difficultés de représentation dans l'espace sans pour autant faire d'approximation physique a priori, comme il doit le faire pour les problèmes dits "plans". Les résultats obtenus pourront servir de tests de validation pour les méthodes de résolution tridimensionnelles actuellement en développement.

3.1 METHODE

Considérons un problème axisymétrique quelconque et plaçons-nous dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , dont l'axe est l'axe de symétrie du problème (fig. 22, page suivante).

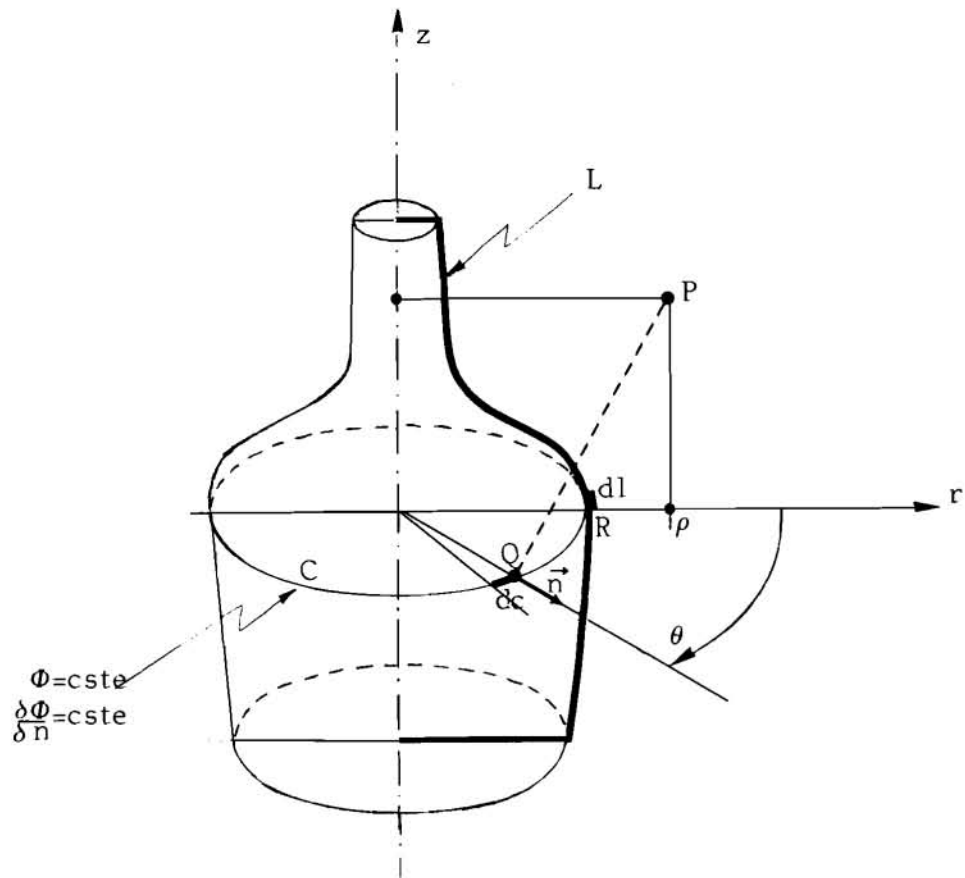


Fig. 22: Problème axisymétrique typique.

La géométrie et les sources étant axisymétriques, les grandeurs physiques Φ et $\delta\Phi/\delta n$ (ou Ψ) sont indépendantes de l'angle θ . Par contre, la fonction de Green centrée en P, $G_p(Q)$ et sa dérivée normale, qui sont les "noyaux" des é.i.f. 1.58 et 1.63 dépendent de cet angle: $R = PQ$ varie avec θ pour r et z fixés.

L'intégrale de l'é.i.f. porte sur $ds=dc dl$. Φ et $\delta\Phi/\delta n$ ne dépendant pas de l'angle θ on aura:

$$\begin{aligned}
 c.\Phi(P) &= - \int_S \left(\Phi \frac{\delta G}{\delta n} - G \frac{\delta \Phi}{\delta n} \right) dc dl \\
 &= - \int_L \left(\Phi \int_C \frac{\delta G}{\delta n} dc - \frac{\delta \Phi}{\delta n} \int_C G dc \right) dl \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Ainsi, en "préintégrant" les noyaux sur les cercles C on obtient

l'expression des é.i.f. en axisymétrie:

$$c.\phi(P) = - \int_L (\phi G'_{ax} - \frac{\delta\phi}{\delta n} G_{ax}) dl \quad (3.2)$$

avec:

$$G_{ax} = \int_C G dc \quad \text{et} \quad G'_{ax} = \int_C \frac{\delta G}{\delta n} dc \quad (3.3)$$

Le problème axisymétrique est entièrement défini par une coupe passant par l'axe de symétrie; l'intégration 3.2 porte sur les frontières curvilignes L ainsi définies. L'expression 3.2 obtenue pour les équations intégrales de frontière en axisymétrie est comparable aux expressions tri- et bidimensionnelles: on n'a fait que remplacer les noyaux habituels par les noyaux G_{ax} et G'_{ax} ; du point de vue théorique, la différence la plus remarquable est qu'on n'a pas l'égalité entre $\delta G_{ax}/\delta n$ et G'_{ax} .

3.2 DETERMINATION DES NOYAUX ET INTEGRATION

L'expression 3.3 des noyaux de la forme axisymétrique de l'é.i.f. n'est pas satisfaisante car elle suppose une description tridimensionnelle de la géométrie. Nous allons donc réaliser analytiquement les intégrations sur les cercles C.

3.2.1 Calcul des noyaux G_{ax} et G'_{ax} .

L'analogie entre la fonction de Green G et le potentiel d'une charge ponctuelle est, à la dimension près, évidente. Le calcul de G_{ax} est donc analogue au calcul du potentiel d'une distribution linéique uniforme de charges sur un cercle.

Ce résultat est classique [6 Vol. 1, IV, 202], on obtient:

$$G_{ax} = \frac{R}{\pi D} K(k^2) \quad (3.4)$$

$$k^2 = 4R\rho/D^2 \quad (3.5)$$

$$K(k^2) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \quad (3.6)$$

K est donc la fonction intégrale elliptique complète de première espèce [9]. ρ , R et D sont définis en figure 23.

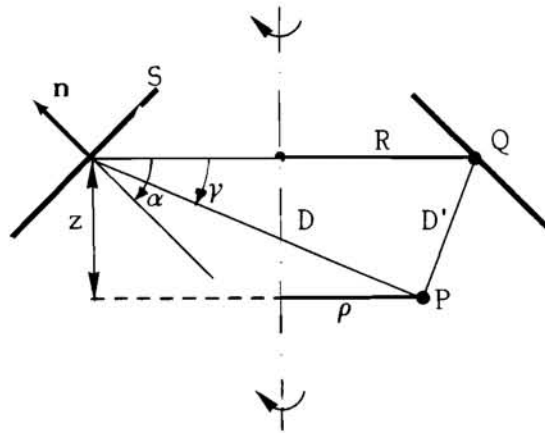


Fig. 23

Le calcul de G'_{ax} ressemble à celui de G_{ax} quoiqu'il soit encore plus fastidieux; le résultat est le suivant:

$$G'_{ax} = \frac{\cos \alpha}{2 D} K(k^2) + \frac{D \cos \alpha - 2R \cos(\alpha - \gamma)}{2 D'^2} E(k^2) \quad (3.7)$$

$$E(k^2) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \quad (3.8)$$

E est donc la fonction intégrale elliptique complète de deuxième espèce [9]. α , γ et D' sont définis en figure 23.

Les fonctions K et E ont l'allure présentée en figure 24. La singularité de K pour $k^2 = 1$ correspond à la confusion, en cours d'intégration, du point courant Q avec le point P , centre des noyaux G_{ax} et G'_{ax} .

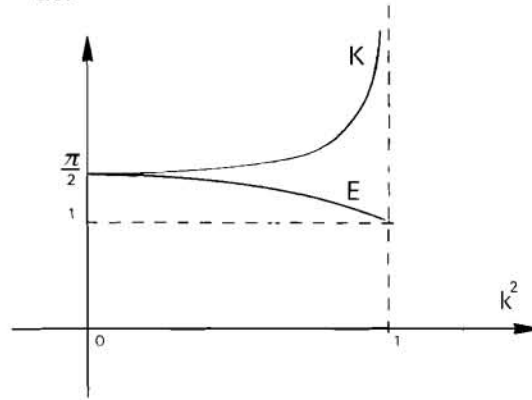


Fig. 24: allure des fonctions K et E .

3.2.2 Intégrations singulières.

Dans la méthode intégrale que nous avons choisie, les é.i.f. 3.2 sont écrites avec $P \in L$ (§2.3.2). En cours d'intégration, le point courant Q se trouvera donc une fois confondu avec P ; les noyaux G_{ax} et G'_{ax} tendent alors vers l'infini. L'intégrale de surface 3.2 converge cependant puisqu'elle vaut $c \cdot \Phi(P)$.

Cette situation est banale, par exemple:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \ln(r) = -\infty \quad \text{et} \quad \int_0^1 \ln(r) dr = -1$$

mais il est nécessaire de prendre des précautions au niveau de l'intégration numérique.

On montre [9] que:

$$\lim_{k^2 \rightarrow 1} \left(K(k^2) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{16}{1-k^2} \right) \right) = 0 \quad (3.9)$$

c'est-à-dire que la singularité de K est du type logarithmique.

Il existe heureusement une formule de Gauss pour l'intégration numérique des fonctions présentant une telle singularité | 9 | :

$$\int_0^1 f(x) \ln(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \epsilon_n \quad (3.10)$$

où les poids et abscisses de Gauss, w_i et x_i , sont donnés par une table pour chaque n .

L'application de cette méthode d'intégration numérique nécessite "l'extraction" du logarithme de l'intégrand de 3.2 ce qui est rendu possible par le développement | 9 | :

$$K(k^2) = \sum_{i=0}^N (a_i h^i + b_i h^i \ln(1/h)) + \epsilon \quad (3.11)$$

$$h = 1 - k^2$$

$$\epsilon < 2 \cdot 10^{-8} \text{ pour } N=4$$

a_i et b_i sont tabulés.

Les singularités des intégrands dues à la fonction K peuvent ainsi être intégrées.

La limite du facteur de E dans l'expression 3.7 de G'_{ax} lorsque le point courant Q tend vers P apparaît sous la forme indéterminée $0^2/0^2$. Le calcul analytique de cette limite ne pose pas de problème à partir des expressions de toutes les grandeurs géométriques en fonction du paramètre u des éléments finis.

3.2.3 Noyaux pour le calcul du champ.

Comme nous l'avons montré au §2.4.1, le champ induit en un point P n'appartenant pas aux interfaces peut être calculé par intégration de $\hat{\Phi}$ et $\hat{\Psi}$ sur la frontière de sa région:

$$H_i^* = \int_L (\hat{\Phi} \nabla G'_{ax} - (\frac{\hat{\Psi}}{\mu} + H_{on}) \nabla G_{ax}) dl \quad (3.12)$$

ce qui nécessite le calcul des noyaux vectoriels $\nabla G'_{ax}$ et ∇G_{ax} .
Avec beaucoup de persévérance, on obtient [13] :

$$\frac{dG_{ax}}{d\rho} = \frac{R}{\pi D} \left(-\frac{R+\rho}{D^2} \cdot K + \frac{dK}{dk} \cdot \frac{dk}{d\rho} \right) \quad (3.13)$$

$$\frac{dG_{ax}}{dz} = \frac{R}{\pi D} \left(-\frac{z}{D^2} \cdot K + \frac{dK}{dk} \cdot \frac{dk}{dz} \right) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{dG'_{ax}}{d\rho} &= -\frac{\cos \alpha}{2 \cdot R} \cdot \frac{dG_{ax}}{d\rho} \quad (3.15) \\ &+ \frac{D \cdot \cos \alpha - 2 \cdot R \cdot \cos(\alpha - \nu)}{2 \cdot \pi \cdot D'^2} \cdot \left(\frac{dE}{dk} \frac{dk}{d\rho} + \frac{2 \cdot (R - \rho)}{D'^2} \cdot E \right) \\ &+ \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot D D'^2} \cdot \left[(\rho - R) \cdot \cos \alpha + \frac{2 \cdot R}{D} \cdot (R + \rho) \cdot \cos(\alpha - \nu) \right] \cdot E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dG'_{ax}}{dz} &= -\frac{\cos \alpha}{2 \cdot R} \cdot \frac{dG_{ax}}{dz} \quad (3.16) \\ &+ \frac{D \cdot \cos \alpha - 2 \cdot R \cdot \cos(\alpha - \nu)}{2 \cdot \pi \cdot D'^2} \cdot \left(\frac{dE}{dk} \frac{dk}{dz} - \frac{2 \cdot z}{D'^2} \cdot E \right) \\ &+ \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot D D'^2} \cdot \left[z \cdot \cos \alpha - 2 \cdot R \left(\sin \alpha - \frac{z}{D} \cdot \cos(\alpha - \nu) \right) \right] \cdot E \end{aligned}$$

$$\frac{dK}{dk} = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{E}{1-k^2} - K \right) \quad (3.17)$$

$$\frac{dE}{dk} = \frac{1}{k} \cdot (E - K) \quad (3.18)$$

$$\frac{dk}{dz} = -\frac{z \cdot k^3}{4 \cdot R \cdot \rho} \quad (3.19)$$

$$\frac{dk}{d\rho} = \frac{k}{2 \cdot \rho} - \frac{k^3}{4} \cdot \frac{R + \rho}{R \cdot \rho} \quad (3.20)$$

$$K = K(k^2) \quad E = E(k^2) \quad (3.21)$$

Notons que toutes ces expressions dépendent des mêmes fonctions elliptiques K et E que G_{ax} et G'_{ax} .

Lorsque le point P appartient à une frontière L , nous procédons comme au §2.4.3 et calculons le champ directement à partir des fonctions $\hat{\Phi}$ et $\hat{\Psi}$ (équation 2.42).

3.2.4 Calcul numérique.

L'intégration numérique pour l'équation 3.2 revient au calcul des intégrales 2.28 associées aux noyaux axisymétriques 3.4 et 3.7.

Les intégrales 2.28 sont calculées par une méthode de Gauss: méthode normale lorsque le point P n'appartient pas à l'élément k sur lequel porte l'intégration, méthode spéciale de l'équation 3.10 lorsque P appartient à cet élément.

Les intégrants de l'é.i.f. 3.2 sont donc à évaluer un très grand nombre de fois, par exemple en 4 ou 6 points de Gauss par élément fini de discrétisation; il est donc indispensable de minimiser la durée de leur calcul.

Nous avons tabulé avec précision les intégrales elliptiques K et E en 101 points correspondants à la variation du paramètre k^2 entre 0 et 1; nous interpolons entre ces valeurs tabulées pour améliorer la précision. Pour $k^2 \in]0,99,1[$ K est calculé à l'aide du développement 3.11, beaucoup plus long à mettre en oeuvre.

Les résultats de cette section 3.2 et les techniques présentées au chapitre 2 ont permis la réalisation d'un programme d'ordinateur pour la résolution des problèmes axisymétriques de champs, par la méthode des équations intégrales de frontières tirée de l'identité de Green. A la section suivante, nous présentons les résultats de validation pour ce programme PHIAX.

3.3 RESULTATS DE VALIDATION

La validation des résultats est réalisée à partir de problèmes dont la solution analytique est connue. Il s'agit principalement de la sphère diélectrique ou magnétique dans un champ d'excitation uniforme, de la sphère creuse, ou de géométries plus compliquées mais à permittivité ou perméabilité relatives unitaires.

3.3.1 Sphère conductrice chargée dans l'espace infini.

Il s'agit d'un problème de Dirichlet extérieur: le potentiel est imposé à zéro à l'infini par la méthode elle-même (§2.1.3) et à V_0 sur la sphère par les données (fig. 25).

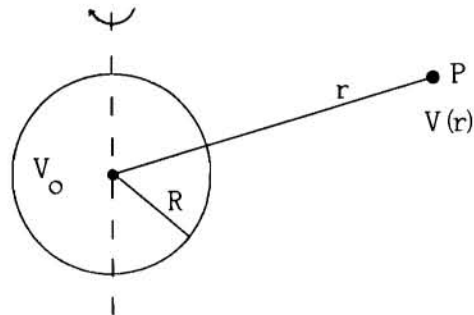


Fig. 25

La méthode intégrale donne comme solution le champ électrique normal à la surface de la sphère, c'est-à-dire la densité de charge; le potentiel approché Φ^* et le champ électrique E^* peuvent ensuite être calculés en tout point de l'espace.

La solution analytique est obtenue en remarquant simplement que tout se passe à l'extérieur de la sphère comme s'il n'y avait pas de sphère mais seulement une charge ponctuelle en son centre:

$$\left. \begin{aligned} V(r \gg R) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ V(r=R) &= V_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = V_0 \frac{R}{r} \quad (3.22)$$

Le champ est radial et vaut par conséquent $|E_n| = V_0 \cdot \frac{R}{r^2}$, son module est constant à la surface de la sphère.

L'erreur sur la solution donnée par la méthode intégrale est représentée en figure 26 en fonction de l'abscisse curviligne, et pour deux discrétisations assez grossières: 2 et 4 éléments finis du second ordre pour la demi-sphère. Elle est de l'ordre de 1%, respectivement 1‰ sur E_n . Remarquons que les valeurs théoriques (constantes) du potentiel et de sa dérivée normale sur la frontière pourraient être exactement représentées par les fonctions de discrétisation: l'erreur provient ici de l'inexactitude de la discrétisation géométrique.

Sur la même figure, nous avons représenté l'erreur sur la limite sur la frontière du potentiel intégral Φ^* (§2.2.2) qui fournit les valeurs extrêmes de l'erreur dans l'espace entier; nous avons ici moins de 0.5%, respectivement 0.8‰ par rapport à la valeur maximale du potentiel sur la frontière.

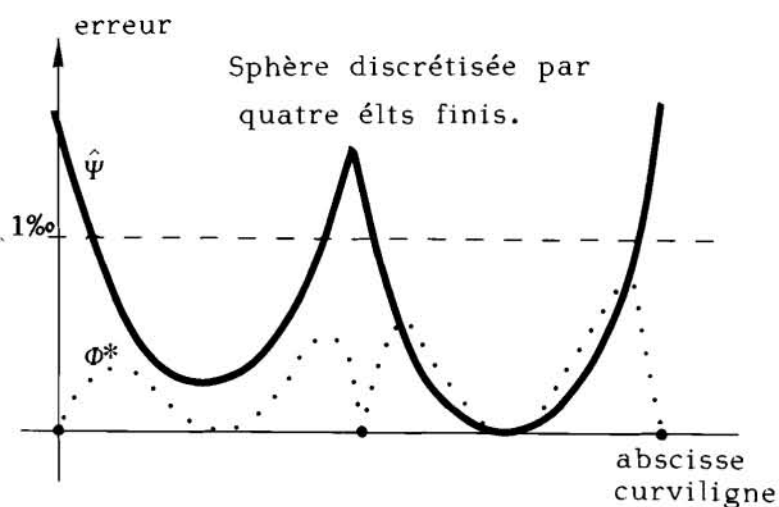
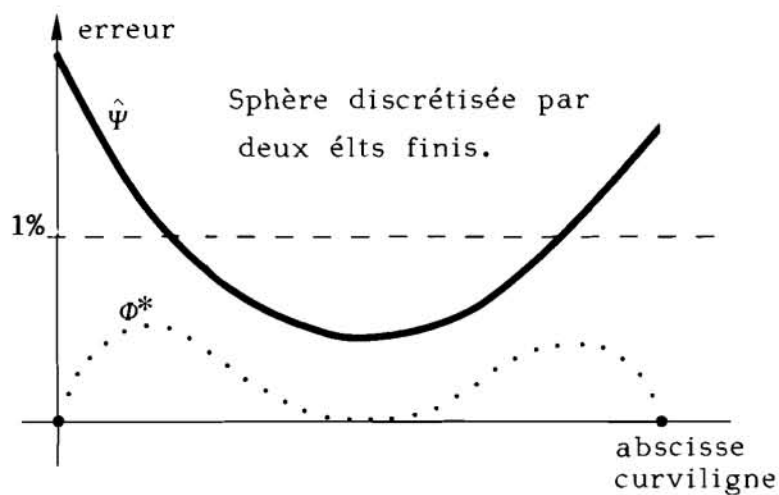


Fig. 26
Problème de la
sphère chargée:
erreurs curvilignes

Dans ce cas, il est même possible d'être plus précis encore: l'erreur est, tout comme Φ , un potentiel dont les sources sont sur la sphère: ces deux "potentiels" vont décroître sensiblement selon la même loi (*) lorsqu'on s'éloigne de la sphère: l'erreur peut donc être estimée inférieure à 0.5%, respectivement 0.8% par rapport à la valeur locale de Φ^* , ce qu'on peut vérifier par le calcul (fig. 27). Cette remarque s'applique à tous les problèmes de Dirichlet extérieurs.

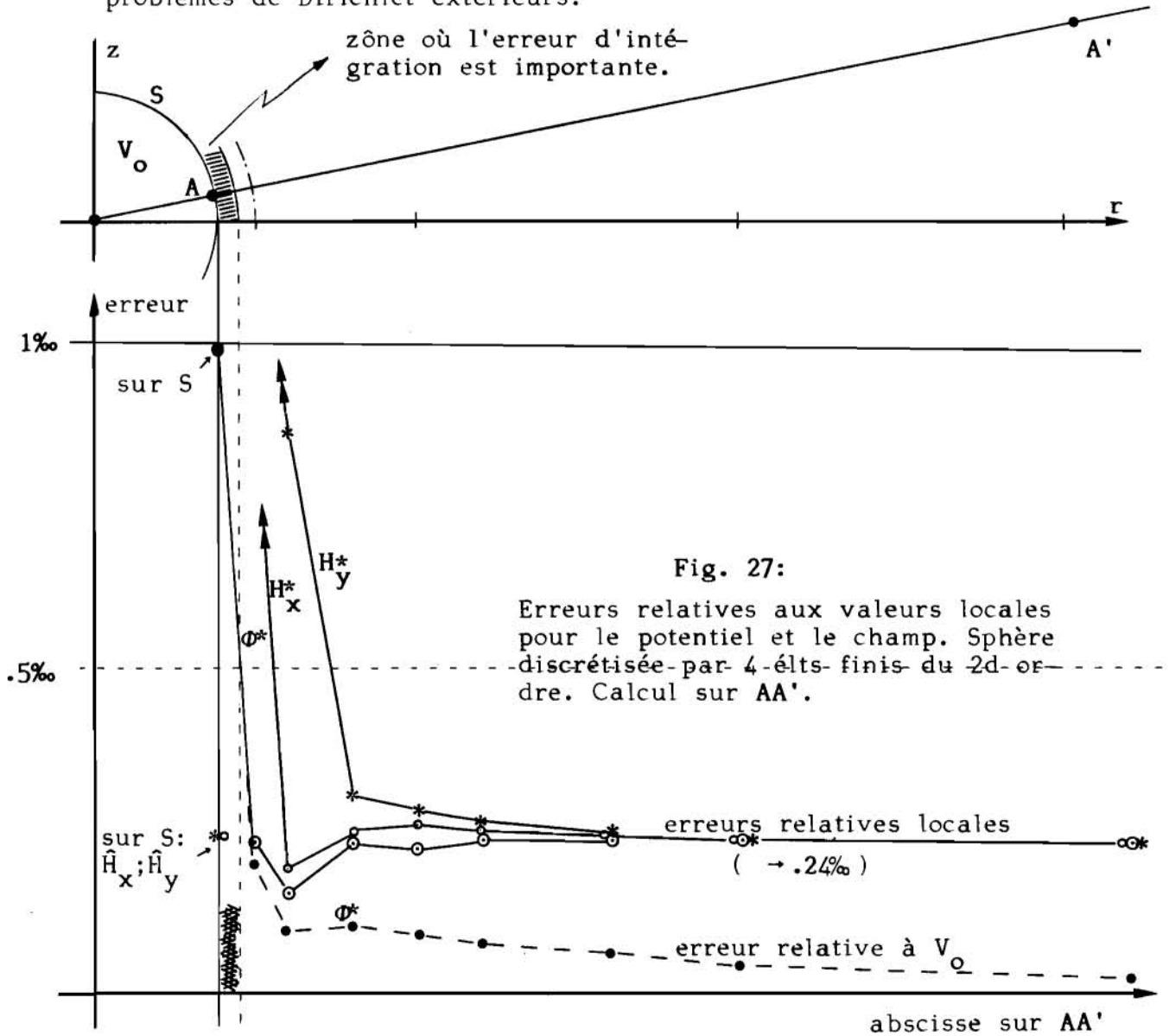


Fig. 27:

Erreurs relatives aux valeurs locales pour le potentiel et le champ. Sphère discrétisée par 4 éléments finis du 2d ordre. Calcul sur AA'.

(*) c'est la décroissance en $1/r$ du moment monopolaire des sources.

Le coefficient angulaire c (§2.3.6) a été utilisé pour définir la "zone interdite" à proximité de la sphère (fig. 27): dans cette zone, l'intégrale définissant $\Phi^*(P)$ est numériquement imprécise, car le point courant sur la frontière passe très près de P et l'intégrand varie trop brusquement. Mais c peut être calculé à partir des mêmes intégrales, et la valeur obtenue comparée à la valeur théorique qui est 1.

Notre expérience permet de définir le critère suivant (fig. 28):

erreur sur c	intégration numérique
$> 0.1 \%$	fantaisiste
$> 0.05\%$	peu précise
$< 0.05\%$	parfaite

Fig. 28:
Facteur de qualité de l'intégration.

On peut considérer le même problème, mais vu de l'intérieur de la sphère: théoriquement, le potentiel y est constant et égal à V_0 , le champ et sa composante normale sur la frontière y sont nuls.

Cette fois-ci, l'erreur de discrétisation est nulle, car l'erreur de discrétisation géométrique ne modifie pas les résultats théoriques: n'importe quelle surface fermée à potentiel constant a dans son volume le potentiel constant et le champ nul; ces constantes peuvent être exactement représentées par les éléments finis.

En pratique, le programme d'équations intégrales donne exactement le résultat théorique ($E_n = 0$. en simple précision) ce qui montre que les erreurs d'intégration numérique, d'arrondis et de résolution sont négligeables dans ce cas simple. Pour des

problèmes définis par un grand nombre d'éléments finis, la résolution du problème intérieur de Dirichlet à potentiel constant pourra servir à l'estimation des erreurs numériques.

3.3.2 Sphère magnétique creuse dans un champ uniforme.

Le problème posé est schématisé en figure 29. La solution analytique est ici aussi connue [7, VI, 348 et suivantes]: le champ induit dans le trou est uniforme et s'oppose au champ inducteur H_o :

$$H_i = (A-1) \cdot H_o \quad (3.23)$$

avec:

$$A = \frac{9\mu_r}{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1) - 2(\mu_r - 1)^2(a/b)^3} \quad (3.24)$$

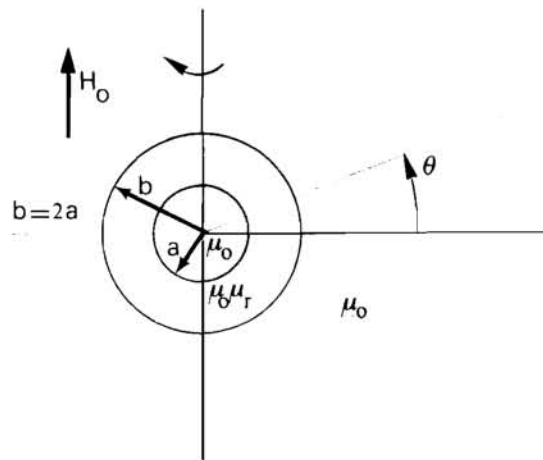


Fig. 29: Problème de la sphère creuse.

μ_r	A
1	1.
10	.556
100	.0499
1000	.00513
10000	.000514

Fig. 30:
Valeurs de A en fonction de μ_r .

La figure 30 donne quelques valeurs de A en fonction de la perméabilité relative de la sphère; par exemple, pour $\mu_r = 1000$, on a $A = .00513$, c'est-à-dire:

$$H_i = -.995 H_o \quad (3.25)$$

Le potentiel induit dans le trou aura la forme:

$$\Phi = - (A-1) H_o \cdot r \cdot \sin \theta \quad (3.26)$$

La validation de la méthode intégrale en tant que telle ne se fait pas en comparant la solution (champ et potentiel induit) obtenue à cette solution analytique, mais en la comparant à la meilleure approche possible (au sens des moindres carrés) de la solution analytique par la **même** discrétisation.

Pour illustrer cette remarque fondamentale, nous avons représenté en figure 31 l'erreur curviligne sur le potentiel pour l'un des éléments finis discrétisant le "trou". Cette erreur oscille entre -1.6% et +1.7% alors qu'elle vaut environ -0.3% aux noeuds de discrétisation. Si cette erreur devait être attribuée à la méthode intégrale elle-même, on ne pourrait qu'être très pessimiste sur son avenir, ce problème ne comptant que 18 noeuds.

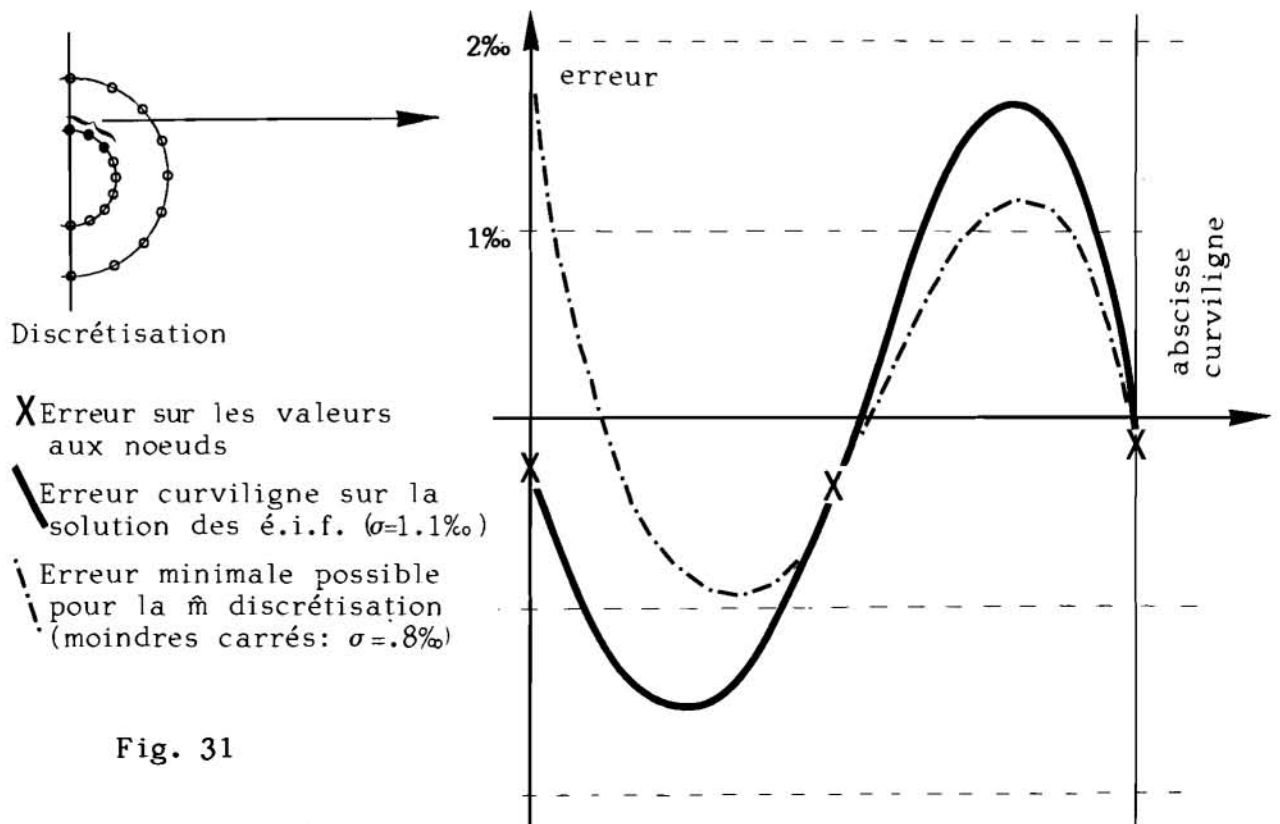


Fig. 31

La seconde courbe de la figure 31 représente l'erreur entre la solution analytique et la meilleure représentation possible de cette solution à l'aide des fonctions de discrétisation qui ont été utilisées pour la méthode intégrale (les coefficients ont été obtenus en minimisant l'erreur quadratique moyenne).

Deux remarques s'imposent:

- la solution obtenue est proche de la solution optimale (les résultats sont du même type pour les autres éléments de discrétisation), ce qui constitue une validation de la méthode.
- on constate que l'erreur sur les valeurs aux noeuds de discrétisation n'est pas significative: elle est, pour cet élément, inférieure à 0.3% ; on aurait pu, par hasard, tomber sur des valeurs encore plus faibles qui n'auraient guère modifié la courbe d'erreur, ou encore sur les valeurs "idéales" qui sont plus élevées: la publication de résultats destinés à la validation d'une méthode ou à des comparaisons entre méthodes sous forme de valeurs en un ou en quelques points est contestable. Deux valeurs permettent éventuellement de résumer un résultat: la moyenne et l'écart type de l'erreur.

Au delà de cette validation de la méthode intégrale, nous devons mettre ici en évidence la faiblesse de notre méthode, et en général des méthodes liées au calcul des grandeurs induites: les grandeurs physiques utiles sont le potentiel ou le champ **total**.

Dans la sphère, ils sont calculés en faisant la différence de deux nombres voisins, H_0 et $-H_1$ (cf. éq. 3.25): l'erreur résultante peut être de l'ordre de la valeur exacte! Par exemple, pour $\mu_r = 1000$, une erreur de 0.3% sur le potentiel induit se traduit par une erreur de 6% sur le potentiel total; pour $\mu_r = 10000$ on aurait déjà 60%, etc..

Ce problème ne se pose pas en électrostatique; pour le magnétisme, le couplage avec une méthode variationnelle devra être formulé de façon à éviter cette difficulté.

La comparaison des solutions sur le potentiel total obtenues par différentes méthodes numériques, avec des discrétisations sensiblement équivalentes est donnée en figure 32.

Les valeurs correspondantes du champ total dans le creux sont données en figure 33.

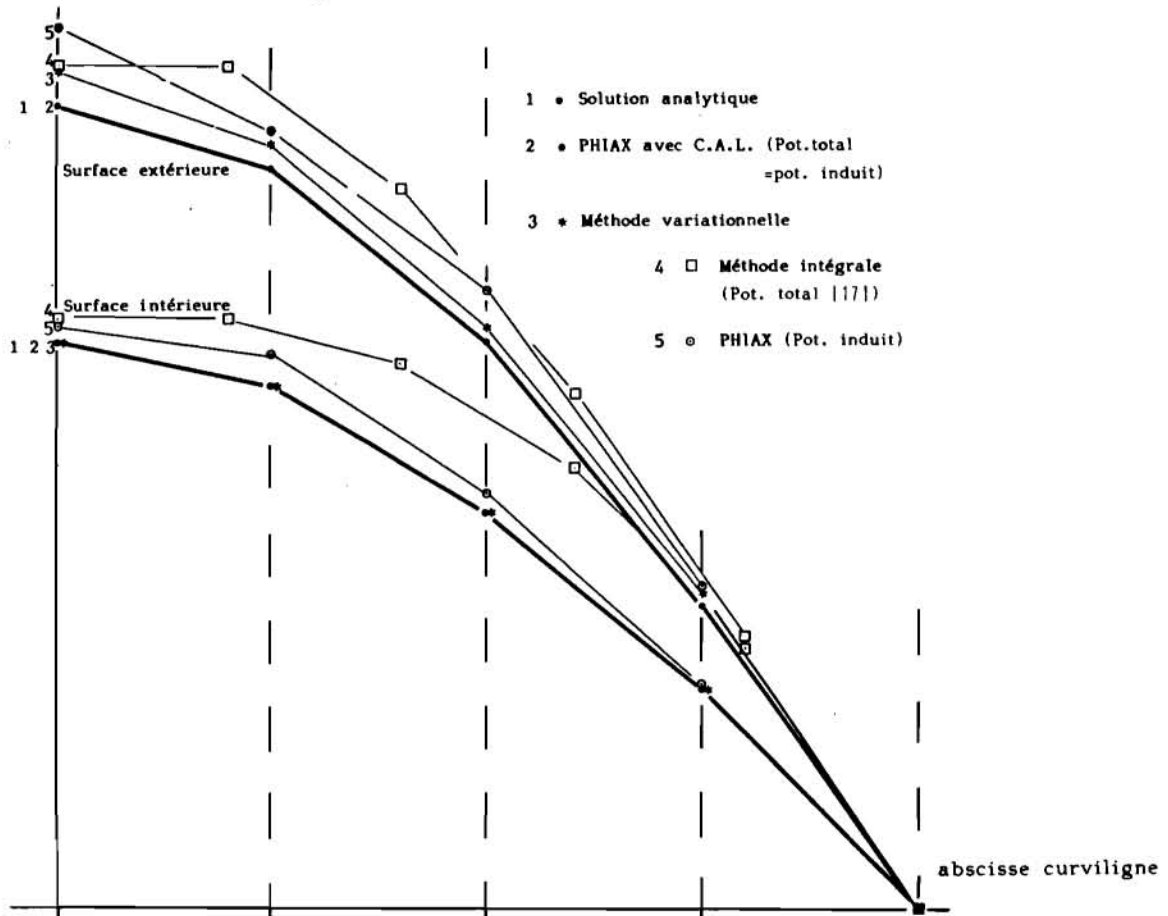


Fig. 32: Potentiel sur les frontières, problème de la sphère creuse.

Méthode	Erreur sur le champ dans le creux	
	moyenne	écart type
é.i.f. 3D pot. total 19	+6.1%	valeur ponctuelle
variationnelle	+1.6%	1%
é.i.f. axi pot. induit	+6.1%	1%
idem avec CAL (pot. induit = pot. total)	+0.057%	0.063%

} PHIAX

Fig. 33: Champ total dans le creux.

Pour le calcul par méthode variationnelle, le champ d'excitation uniforme a été simulé à l'aide de conditions aux limites adéquates (fig. 34) avec $a'=10a$. En posant le problème de cette manière, on identifie grandeurs induites et grandeurs totales: la solution donnée par notre méthode intégrale est directement le potentiel total et nous l'avons déterminée à titre comparatif, avec $a'=100a$.

La précision obtenue sur le potentiel total est la même que précédemment sur le potentiel induit. Le potentiel et le champ dans le creux sont obtenus avec une erreur moyenne de 0.057% et un écart type de 0.063%, la solution exacte étant donc incluse dans cette fourchette d'erreur.

L'estimation de l'erreur par le calcul de $\hat{\Phi} - \Phi^*$ donne à la surface du creux un écart type de 0.02% plus difficile à interpréter que dans le cas du problème de Dirichlet du §3.3.1.

Soulignons pour conclure cet exemple que la qualité de ces résultats (très proches des meilleurs résultats possibles pour cette discrétisation) est obtenue dans ce dernier cas avec un rapport de 100 entre les dimensions de la sphère et celles du milieu, ce qui permet d'espérer de très bons résultats même avec des écarts d'ordres de grandeurs dans les dimensions des objets modélisés, particulièrement en électrostatique.

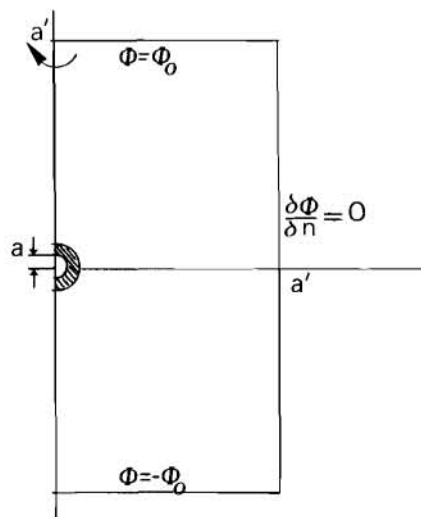


Fig. 34: Simulation d'un champ uniforme par des conditions aux limites.

3.3.3 Exemple de problème d'électrostatique.

Pour illustrer notre travail, nous présentons ci-dessous des tracés d'isovaleurs pour une géométrie axisymétrique simple mais comportant une pointe et des arêtes.

La figure 35 correspond à une pointe conductrice (potentiel 0.V) face à un plan conducteur (potentiel +1.V) et la figure 36 à la même pointe dans un tube conducteur.

Le problème de la figure 35 a aussi été résolu à l'aide d'une méthode variationnelle, associée à des éléments finis choisis de manière à ce que les frontières du problème soient discrétisées de la même façon que pour la méthode intégrale.

La comparaison des résultats (fig. 37) montre:

- que la méthode intégrale fournit des résultats de bonne qualité, particulièrement à proximité de la pointe et et de l'arête où ils sont plus réalistes que ceux obtenus par méthode variationnelle;
- l'économie de moyens de la méthode intégrale (fig. 38), économie qui sera particulièrement appréciée pour les applications à venir aux problèmes tridimensionnels.

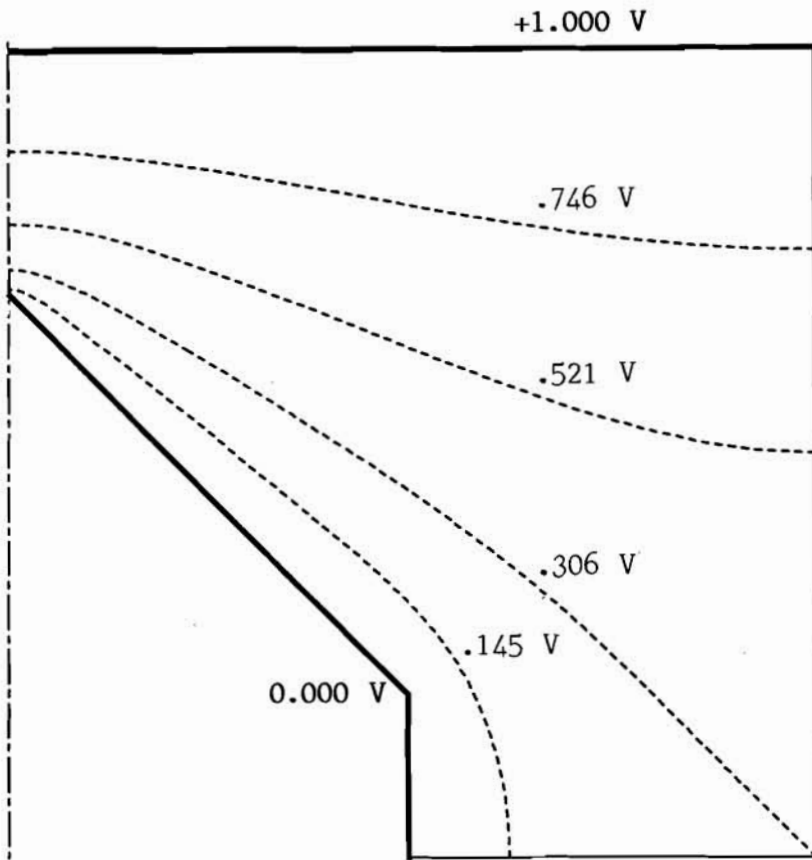


Fig. 35 : Pointe conductrice face à un plan conducteur.

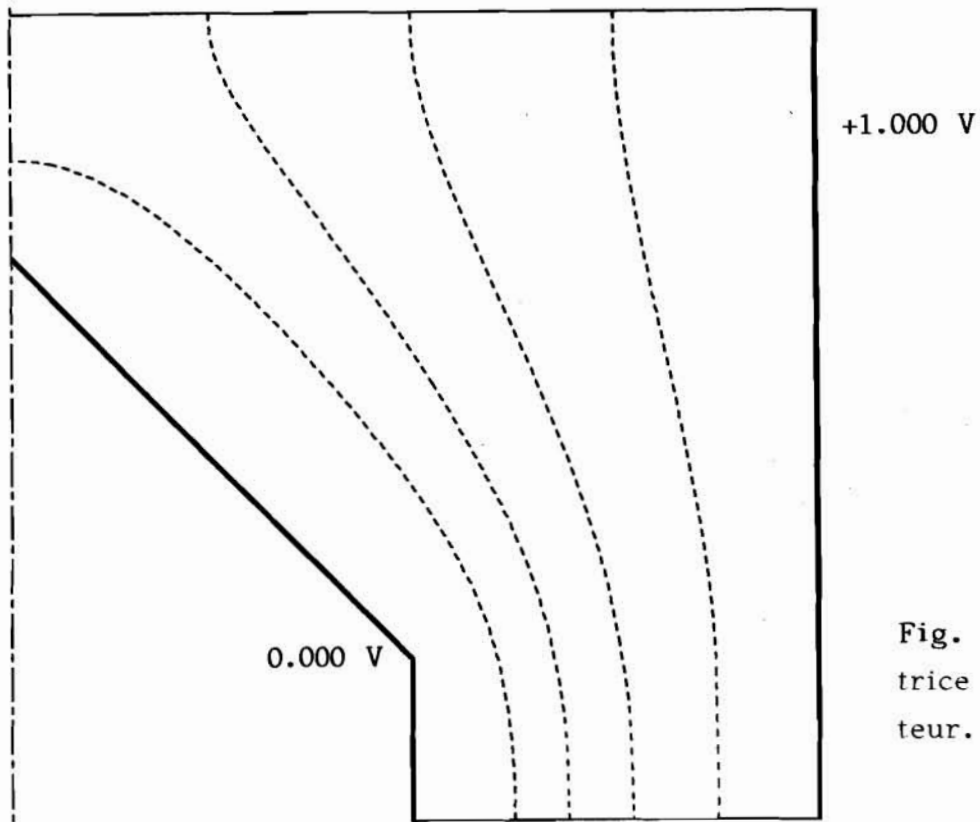


Fig. 36 : Pointe conductrice dans un tube conducteur.

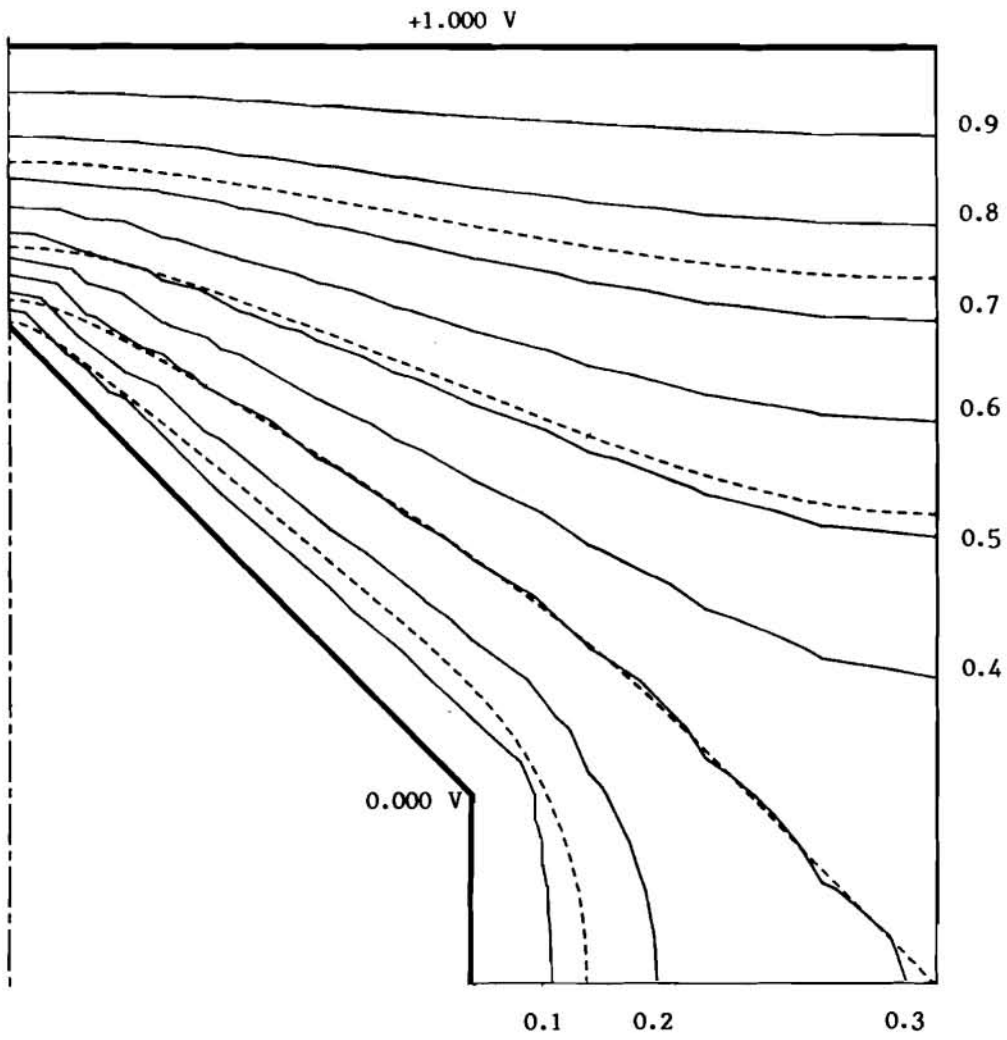


Fig. 37 : Comparaison des résultats.
- - - méthode des é.i.f.
— méthode variationnelle

	é.i.f.	méth. var.
Nbre de noeuds	23	120
Largeur de bande de la matrice	24	39
Longueur de la matrice	576	2573

Fig. 38 : Comparaison des moyens mis en oeuvre.

3.4 CONCLUSION

Au cours du développement théorique de cette formulation axisymétrique de la méthode des équations intégrales de frontières, nous avons pu craindre que la complexité des expressions algébriques obtenues ne conduise à des résultats numériques d'une part excessivement longs à obtenir, d'autre part de piètre qualité.

Pour ce qui est de la qualité des résultats qu'il est possible d'obtenir, nous pouvons être pleinement rassurés. Pour ce qui est des temps de calcul, nous les estimons compris entre 150% et 200% de ceux de la version bidimensionnelle plane du programme.

Cependant, nous n'avons jusqu'ici traité que de très petits problèmes (60 noeuds au maximum) car le programme interactif pour la construction des données que nous mettons au point n'est pas encore opérationnel. Dès qu'il le sera, des tests plus complets et des comparaisons systématiques de résultats obtenus par d'autres méthodes numériques pourront être réalisés.

L'étude de questions restées jusqu'ici sous silence pourra alors être entreprise: rôle et choix du nombre de points de Gauss par élément pour l'intégration, taille de problème maximale possible, précision nécessaire pour le calcul du champ inducteur à partir des courants, autres méthodes de résolution pour les très grands systèmes linéaires, etc...

Si beaucoup a déjà été fait, beaucoup reste à faire!

C O N C L U S I O N

Après deux années de travail consacrées principalement aux méthodes des équations intégrales de frontières, nous pensons avoir offert au lecteur un point de vue original sur ces méthodes et espérons l'avoir ainsi aidé à les comprendre plus intimement.

Toutes les techniques nouvelles que nous avons développées ont été implantées sur les programmes PHI2D (résolution des problèmes plans) et PH1AX (version axisymétrique du chapitre 3); elles le seront prochainement sur la version tridimensionnelle PHI3D. Elles s'appliqueraient cependant tout aussi bien à la méthode intégrale "directe" (§1.3) et nous espérons avoir l'occasion de développer selon cette méthode et avec ces techniques un logiciel performant destiné aux problèmes de l'électrostatique.

Les équations intégrales de frontières permettent de résoudre le problème de Laplace, qui régit des phénomènes physiques assez nombreux pour justifier à lui seul des études comme la nôtre; cependant, tout au long de notre exposé, nous avons posé des jalons pour le couplage de ces équations avec les méthodes variationnelles associées aux éléments finis: pour les problèmes de magnétisme, c'est dans ce couplage que la méthode des équations intégrales de frontières tient sa justification.

Il est inutile de disposer d'une "Mercedes" si l'on doit remorquer un antique char à boeufs: si les méthodes variationnelles ont aujourd'hui atteint un niveau de perfection certain - tout au moins pour les problèmes à deux dimensions - les méthodes intégrales en étaient restées à leur préhistoire jusqu'au milieu des années 70. Nous espérons avoir modestement contribué à leur modernisation, et les premiers essais d'attelage aux méthodes variationnelles pourront bientôt être tentés sans trop de ridicule.

B I B L I O G R A P H I E

- |1| ANCELLE B. : "Emploi de la méthode des équations intégrales de frontière et mise en oeuvre de la conception assistée par ordinateur dans le calcul des systèmes électromagnétiques" - Thèse d'état, Grenoble, 14.12.79
- |2| BALLISTI R., HAFNER Ch. : "The multiple multipole method" - Conférence Compumag, Gênes, mai 1983 - IEEE Trans. on Magnetism (à paraître).
- |3| BREBBIA C. A. : "The boundary element method for engineers" - Pentech Press, Plymouth, 1980.
- |4| "Application de la méthode des équations intégrales à la mécanique" - CETIM, Senlis, 1979.
- |5| CRISTINA S., DI NAPOLI A. : "Combination of finite and boundary elements for magnetic field analysis" - Conférence Compumag, Gênes, mai 1983 - IEEE Trans. on Magnetism (à paraître).
- |6| DURAND E. : "Electrostatique", 3 volumes - Masson, Paris, 1964 et 1966.
- |7| DURAND E. : "Magnétostatique" - Masson, Paris, 1968.
- |8| FAWZI T. H., ALI K. F., EARL BURKE P. : "Boundary Integral Equations Analysis of Induction Devices with Rotational Symmetry" - IEEE Trans. on Magnetism, Vol. Mag-19, N°1, janvier 1983.
- |9| ABRAMOWITZ M., STEGUN A. : "Handbook of mathematical functions" - Dover Publication.
- |10| JASWON M. A. : "Integral equation method in potential theory" - Proceedings of the Royal Society, 1963, vol. A275.
- |11| JUFER M. : "Transducteur électromécaniques" - Traité d'électricité vol. IX, éditions Georgi, 1979.

- |12| KRAHENBUHL L., NICOLAS A. : "Efficient techniques for boundary integral equations method for potential problems" - Conférence Compumag, Gênes, mai 1983 - IEEE Trans. on Magnetics (à paraître).
- |13| KRAHENBUHL L., NICOLAS A. : "Axisymmetric formulation for boundary integral equations methods in scalar potential problems" - Conférence Compumag, Gênes, mai 1983 - IEEE Trans. on Magnetics (à paraître).
- |14| MAYERGOYZ I. D. : "Boundary Galerkin's method for 3D finite element electromagnetic field computation" - Conférence Compumag, Gênes, mai 1983 - IEEE Trans. on Magnetics (à paraître).
- |15| NICOLAS A. : "Application de la méthode des équations intégrales de frontière à la modélisation des phénomènes d'induction" - Thèse d'état, Lyon, 24.06.83
- |16| SALON S. J., SCHNEIDER J. M. : " An hybrid finite element boundary integral formulation of Poisson's equation" - Conférence Intermag, Grenoble, 1981 - IEEE Trans. on Magnetics, vol. MAG 17-6, pp. 2574-2576.
- |17| SAVALLE D. : "Adaptation à l'axisymétrie d'un programme de calcul de systèmes électromagnétiques en deux dimensions, utilisant la méthode des équations intégrales de frontières" - Laboratoire Rutherford, Oxford et DEA, ECL, septembre 1983.
- |18| TROWBRIDGE C. W. : "The solution of 3D magnetostatic problems using scalar potentials" - Conférence Compumag, Grenoble, 1978.
- |19| TROWBRIDGE C. W., SIMKIN J., ARMSTRONG A. : "The Galerkin method of weighted residual applied to the restricted magnetostatic scalar-potential boundary-integral equation in three dimensions" - Conférence Compumag, Gênes, mai 1983 - IEEE Trans. on Magnetics (à paraître).
- |20| ZIENKIEWICZ O. C., KELLY D. W., BETTESS P. : "The coupling of the finite element method and boundary solution procedures" - IJNME, vol. 11, p. 355.

Liste des symboles utilisés

1. Lettres majuscules.

	équation	figure	définition
A	1.19		densité de courant surfacique
B	1.4		induction
C		22	contour
D	1.3		déplacement électrique
D, D'		23	distances
E	1.1		champ électrique
E _o			" inducteur
E _i	1.13		" induit
E(k ²)	3.8		fonction int. ell. de 2ème espèce
F	2.43		flux
G, G _P	1.40		fonction de Green (de centre P)
G _{ax}			noyaux de l'é.i.f. en axisymétrie
G' _{ax}	3.3		
H	1.2		champ magnétique
H _o	1.12		" inducteur
H _i			" induit
H _{on}	1.62		champ inducteur normal
I(P)	2.13		expression intégrale
I _{erreur}	2.19		"
J(u)	2.29		jacobien
K(k ²)	3.6		fonction int. ell. de 1ère espèce
L		22	contour
M	1.5		aimantation
P	1.8		polarisation
P			point
Q			point courant (intégration)
S			surface d'intégration
S'		6	surface des centres des noyaux d'intégration
T			tenseur de Maxwell
V	1.29-1.33		potentiel total
V _o	1.30-1.34		" du champ inducteur
V _m	2.6		potentiel erreur

2. Lettres minuscules.

a _{ki}			coefficients de la matrice du système
b _{ki}	2.28		d'équations intégrales de frontières.
c	1.56		facteur d'angle de l'é.i.f.
f _i	2.3		fonction de projection
j	1.2		densité de courant
j _s		5	" surfacique
k	3.5		coefficient

Lettres minuscules suite.

	équation	figure	définition
n			vecteur normal (normale extérieure)
p	1.35		densité de dipôles
p_i	2.25		fonctions poids (élts finis)
q	3.22		coefficient
r			distance PQ rayon en coordonnées cyl.
r	2.9		rayon définissant le potentiel logarithmique
s			surface (d'intégration)
t	2.42		vecteur tangent unitaire
v			volume (d'intégration)
w			fonction de projection
z			coordonnée cylindrique

3. Lettres grecques.

α		19-23	angle
ϵ		23	"
ϵ_0	1.8		permittivité du vide
ϵ_r	1.10		" relative
$\frac{\epsilon_r}{2}$			
ϵ^2	2.32		erreur quadratique moyenne
θ		1-22	angle
μ_0	1.5		perméabilité du vide
μ_r	1.7		" relative
ρ	1.3		densité de charge
ρ_s	1.21		" surfacique
σ		5	conductivité
σ_s			" surfacique
τ_n	1.44		densité surfacique de dipôles normaux
Φ	1.31-1.32		potentiel du champ induit
χ	1.6-1.9		susceptibilité
Ψ	1.59-1.62		induction ou champ électrique normal normalisé
Ω	1.39-1.41		angle solide

4. Autres symboles.

∇	opérateur del
∇_P	" (dérivation par rapport aux coordonnées de P)
Δ	opérateur laplacien
\sim	approximation par une combinaison linéaire (2.10-2.24-2.33 etc.)
*	approximation par une expression intégrale (2.12-2.38 etc.)
\equiv	équivalence
caractère gras: vecteurs.	