

Numéro d'ordre : 2004-09

Année 2004

THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : Mécanique

par

Julien BERTHAUT

**CONTRIBUTION A L'IDENTIFICATION
LARGE BANDE DES STRUCTURES
ANISOTROPES**

Application aux tables d'harmonie des pianos

Soutenue publiquement le 4 juin 2004 devant le jury :

MM.	X. BOUTILLON	Examineur
	A. CHAIGNE	Rapporteur
	M.N. ICHCHOU	Examineur
	L. JEZEQUEL	Directeur
	R. OHAYON	Rapporteur
	G. PAVIC	Président

ECOLE CENTRALE DE LYON

Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

A	ALLARD Bruno	maître de conférence	CEGELY	INSA
	AIT-EL-HADJ Smaïl	professeur	GRESTI	ECL
	ARQUES Philippe	professeur		ECL
	AURIOL Philippe	professeur	CEGELY	ECL
B	BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
	BATAILLE Jean	professeur	LMFA	UCBL
	BAYADA Guy	professeur	MAPLY	INSA
	BEN HADID Hamda	professeur	LMFA	UCBL
	BERGHEAU Jean-Michel	professeur	LTDS	ENISE
	BEROUAL Abderrahmane	professeur	CEGELY	ECL
	BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	BLAIZE Alain	maître de conférence	LTDS	UCBL
	BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	BLANCHET Robert	professeur	LEOM	ECL
	BUFFAT Marc	professeur	LMFA	UCBL
	BUREAU Jean-Claude	professeur	CEGELY	INSA
C	CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
	CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS
	CHAMBAT Michèle	professeur	MAPLY	UCBL
	CHAMPAGNE Jean-Yves	maître de conférence	LMFA	INSA
	CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur	LMFA	ECL
	CHANTE Jean-Pierre	professeur	CEGELY	INSA
	CHEN Liming	professeur	ICTT	ECL
	CLERC Guy	professeur	CEGELY	UCBL
	COMTE-BELLOT Geneviève	professeur émérite	LMFA	ECL
	COQUILLET Bernard	maître de conférence	IFOS	ECL
CREPEL Pierre	chargé de recherche	MAPLY	CNRS	
D	DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
	DUBUJET Philippe	maître de conférence	LTDS	ECL
E	ESCODIE Dany	directeur de recherche	LMFA	CNRS
F	FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS

ECOLE CENTRALE DE LYON

Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

G	GAFFIOT Frédéric	professeur	LEOM ECL
	GAGNAIRE Alain	maître de conférence	LEOM ECL
	GALLAND Marie-Annick	maître de conférence	LMFA ECL
	GARRIGUES Michel	directeur de recherche	LEOM CNRS
	GAY Bernard	professeur	LMFA UCBL
	GENCE Jean-Noël	professeur	LMFA UCBL
	GENDRY Michel	chargé de recherche	LEOM CNRS
	GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS ECL
	GRENET Geneviève	directeur de recherche	LEOM CNRS
	GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	IFOS ECL
H	HAMADICHE Mahmoud	maître de conférence	LMFA UCBL
	HEIBIG Arnaud	professeur	MAPLY INSA
	HELLOUIN Yves	maître de conférence	ECL
	HENRY Daniel	chargé de recherche	LMFA CNRS
	HERRMANN Jean-Marie	directeur de recherche	IFOS CNRS
	HOLLINGER Guy	directeur de recherche	LEOM CNRS
J	JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	IFOS CNRS
	JEANDEL Denis	professeur	LMFA ECL
	JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS ECL
	JOSEPH Jacques	professeur	LEOM ECL
	JUVE Daniel	professeur	LMFA ECL
	JUVE Denise	ingénieur de recherche	IFOS ECL
K	KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS CNRS
	KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	CEGELY CNRS
	KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	LEOM CNRS
L	LACHAL Aimé	PRAG	MAPLY INSA
	LANCE Michel	professeur	LMFA UCBL
	LANGLADE-BOMBA Cécile	maître de conférence	IFOS ECL
	LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS CNRS
	LE HELLEY Michel	professeur	ECL
	LE RIBAULT Catherine	chargée de recherche	LMFA CNRS
	LEBOEUF Francis	professeur	LMFA ECL
	LOEHAC Jean-Pierre	maître de conférence	MAPLY ECL
	LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS CNRS
	LYONNET Patrick	professeur	LTDS ENISE

ECOLE CENTRALE DE LYON

Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

M	MAITRE Jean-François	professeur émérite	MAPLY ECL
	MARION Martine	professeur	MAPLY ECL
	MARTELET Claude	professeur	IFOS ECL
	MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS ECL
	MARTIN Jean-René	professeur	IFOS ECL
	MASSON Jean-Pierre	professeur	CEGELY UCBL
	MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS CNRS
	MATHIEU Jean	professeur émérite	LMFA ECL
	MAZUYER Denis	professeur	LTDS ECL
	MIDOL Alain	maître de conférence	LTDS UCBL
	MOREL Hervé	chargé de recherche	CEGELY CNRS
	MOREL Robert	professeur	LMFA INSA
	MOUSSAOUI Mohand	professeur	MAPLY ECL
	MUSY François	maître de conférence	MAPLY ECL
N	NICOLAS Alian	professeur	CEGELY ECL
	NICOLAS Laurent	directeur de recherche	CEGELY CNRS
P	PERKINS Richard	professeur	LMFA ECL
	PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférence	LTDS ECL
	PERRIN Jacques	professeur	INSA
	PHANER-GOUTORBE Magali	maître de conférence	LEOM ECL
	PICHAT Pierre	directeur de recherche	IFOS CNRS
	POUSIN Jérôme	professeur	MAPLY INSA
	PONSONNET Laurence	maître de conférence	IFOS ECL
	PREVOT Patrick	professeur	ICTT INSA
R	REBOUX Jean-Luc	professeur	LTDS ENISE
	RETIF Jean-Marie	maître de conférence	CEGELY INSA
	ROBACH Yves	professeur	LEOM ECL
	ROGER Michel	professeur	LMFA ECL
	ROJAT Gérard	professeur	CEGELY UCBL
	ROUSSEAU Jacques	professeur émérite	LTDS ENISE
	ROUY Elisabeth	professeur	MAPLY ECL

ECOLE CENTRALE DE LYON

Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

S	SALVIA Michelle	maître de conférence	IFOS ECL
	SANDRI Dominique	maître de conférence	MAPLY UCBL
	SCHATZMAN Michelle	directeur de recherche	MAPLY CNRS
	SCOTT Julian	professeur	LMFA ECL
	SIDOROFF François	professeur	LTDS ECL
	SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA CNRS
	SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	IFOS CNRS
	STREMSDOERFER Guy	professeur	IFOS ECL
SUNYACH Michel	professeur	LMFA UCBL	
T	TARDY Jacques	directeur de recherche	LEOM CNRS
	THOMAS Gérard	professeur	LAGEP UCBL ECL
	THOUVEREZ Fabrice	maître de conférence	LTDS ECL
	TREBINJAC Isabelle	maître de conférence	LMFA ECL
	TREHEUX Daniel	professeur	IFOS ECL
V	VANNES André-Bernard	professeur	IFOS ECL
	VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	LEOM CNRS
	VINCENT Léo	professeur	IFOS ECL
	VOLPERT Vitaly	directeur de recherche	MAPLY CNRS
Z	ZAHOUANI Hassan	professeur	LTDS ENISE

*direction de la recherche
mise à jour le 13 mai 2004*

Résumé

Ce travail aborde l'identification des structures anisotropes et de leur comportement dynamique large bande. Aux basses fréquences, les modèles prévisionnels font couramment appel à une description modale des phénomènes. Les techniques d'identification portent alors sur la construction des triplets modaux $(\omega_m, \xi_m, \phi_m)$. Aux moyennes et hautes fréquences, pour lesquelles cette approche s'avère inopérante, la plupart des modèles prévisionnels fait appel à une vision propagative des comportements dynamiques. L'identification concerne alors les paramètres de la propagation des ondes, en particulier l'équation de dispersion et l'amortissement spatial.

L'identification des équations de dispersion pour des structures anisotropes dans le domaine de fort recouvrement modal est la principale contribution de ce travail. Après l'abandon d'un premier axe de recherche, basé sur des techniques de Prony, qui s'avère inopérant dans le domaine fréquentiel souhaité, une deuxième approche est mise en place. Elle se base sur la projection d'un champ vibratoire sur des ondes inhomogènes. Un indice de corrélation, dénommé IWC (*Inhomogeneous Wave Correlation*), fonction des paramètres de propagation, est alors optimisé, ce qui permet d'extraire dans chaque direction les paramètres de la propagation, tout en éliminant les champs singuliers liés à la source, aux conditions de bords, ... On constitue ainsi une méthode d'identification dans l'espace des nombres d'ondes (*k-space*).

La méthode IWC est ensuite testée aussi bien sur des éprouvettes virtuelles que sur des bancs d'essais. Ces utilisations de la méthode montrent la dualité approche modale/approche propagative, le comportement isotrope très amorti d'un bicouche acier/matériau poreux, l'orthotropie fortement variable avec la fréquence d'un sandwich à base de nid d'abeilles, le comportement orthotrope des parois raidie à basses fréquences (orthotropie structurale). Dans ce dernier cas, la méthode IWC permet de fixer une limite de validité de cette orthotropie structurale et de mettre en évidence, à plus haute fréquence, la propagation multimodale guidée dans ce type de structure. Les courbes de dispersion ainsi obtenue sont comparées avec succès avec les résultats d'une méthode prédictive de mise en œuvre très simple appelée méthode éléments finis propagative.

Les résultats des investigations entreprises dans ce travail sont appliquées à une table d'harmonie de piano à queue. Celle-ci est couplée aux vibrations des cordes et sert de "rayonnateur" d'énergie. C'est une structure anisotrope et raidie, dont le comportement dynamique affecte directement la signature acoustique de l'instrument de musique. Une étude large bande (modale pour les basses fréquences et propagative pour les moyennes fréquences) est opérée, montrant l'application à une structure réelle des techniques développées dans le mémoire.

Mots clefs : comportement dynamique large bande, équations de dispersion, anisotropie, identification, acoustique musicale

Abstract

This work addresses anisotropic structures identification and their dynamics on a large frequency range. For low frequencies, predictive models employ a modal description $(\omega_m, \xi_m, \phi_m)$, as being at the core of identification techniques. This approach fails in the medium and high frequency domain. Propagative approaches are hence preferred. Identification is then based on wave propagation parameters, like dispersion curves and spatial wave decay.

Wave dispersion curves identification for anisotropic structures in the high modal overlap domain is the main contribution of this work. First, an extension of Prony's method is investigated. However, this approach gives poor results in the frequency band of interest. For that purpose the Inhomogeneous Wave Correlation method (IWC) has been developed. This latter is based on the projection of the wavefield on inhomogeneous waves. Once optimized, the correlation between the wavefield and the referred inhomogeneous wave provides propagation parameters for each direction in the plate. Singularities, implied by the source and the bounded domain, are automatically rejected. As a consequence, this k -space method is not sensitive to boundary and excitation conditions.

IWC method is then tested on virtual wavefields as well as on experimental data. Numerous phenomena are exhibited : the wave/mode duality ; the highly damped isotropic behaviour of a multilayered steel/porous material ; the strongly frequency dependent orthotropy of a honeycomb assembly ; the orthotropic behaviour of ribbed-panels in the low frequency domain. In this last case, IWC method shows a frequency limit of this structural orthotropy, which is replaced by a multi-modal wave-guided propagation. The experimental dispersion curves obtained with an extension of the IWC method are successfully compared with numerical results of a simple numerical method based on classical Finite Element tools.

The results of all the investigations of this work are applied to a piano soundboard. This piece of wood is coupled with the strings motion and radiates energy in the air. This is an anisotropic ribbed structure, and it is shown that this latter influences directly the musical tone of the instrument. A broad-band analysis, modal in the low frequency domain and propagative in the medium frequency domain, is carried out as an example of all the identification techniques described earlier.

Keywords : broad-band dynamical behaviour, dispersion curves, anisotropy, identification, musical acoustics

Table des matières

Introduction	1
I Techniques d'identification des structures	7
I.1 Identification des paramètres modaux	8
I.1.0 Formalisme modal	8
I.1.1 Méthodes d'identification modale	10
I.1.2 Ibrahim Time Domain method	13
I.1.3 Méthode de la fraction rationnelle complexe	15
I.1.4 Méthode du pic et méthode du lissage global	17
I.1.5 Conclusion	20
I.2 Identification des paramètres de propagation	20
I.2.1 La dualité approche modale / approche propagative	20
I.2.2 Les modèles prédictifs moyennes et hautes fréquences	22
I.2.3 Les méthodes d'identification des paramètres propagatifs	24
I.3 Conclusion	28
II Identification des paramètres propagatifs des structures bidimensionnelles	29
II.1 Mise en place du problème	30
II.2 Méthode spatiale (<i>SFSD</i>)	31
II.2.1 Description de la méthode	32
II.2.2 Etude de la méthode sur une simulation numérique	33

II.2.3	Conclusion sur la SFSD	35
II.3	Méthodes du plan d'ondes (k -space)	35
II.3.1	Transformée de Fourier Discrète : DFT	36
II.3.2	Transformée de Fourier Continue : CFT	38
II.3.3	Corrélation avec des ondes inhomogènes : IWC	41
II.4	Modèles de plaques; équation de dispersion	45
II.4.1	Modèles analytiques pour l'équation de dispersion	45
II.4.2	Equation de dispersion d'une plaque orthotrope	50
II.5	Construction des paramètres mécaniques apparents	51
II.5.1	Modèle isotrope	52
II.5.2	Modèle d'orthotropie elliptique	52
II.5.3	Modèle d'orthotropie non elliptique	54
II.5.4	Conclusion	55
II.6	Validation dans le cas monodimensionnel	55
II.6.1	Synthèse ondulatoire	55
II.6.2	Synthèse modale	57
II.6.3	Synthèse modale, absence de source	58
II.6.4	Synthèse modale, absence de source, absence de champ proche	59
II.6.5	Conclusion	59
III	Validations : cas des parois poro-élastiques et des nids d'abeilles	61
III.1	Techniques d'acquisition du champ spatial	62
III.1.1	Mesure du champ par vélocimétrie laser à balayage	62
III.1.2	Obtention du champ par calcul numérique : éprouvette virtuelle	64
III.1.3	Calcul du champ par synthèse modale	65
III.2	Analyse d'un champ obtenu par synthèse modale bidimensionnelle	67
III.3	Application aux parois poro-élastiques	71

III.3.1	Résultats pour l'équation de dispersion	71
III.3.2	Résultats pour l'amortissement	72
III.3.3	Conclusion	73
III.4	Application à un sandwich nid d'abeilles	74
III.4.1	Comportement angulaire apparent	75
III.4.2	Rigidités Dynamiques apparentes	76
III.4.3	Vérification de l'orthotropie	77
III.4.4	Modèle analytique	79
III.4.5	Identification des paramètres apparents	80
III.5	Conclusion sur la méthode IWC	83
III.5.1	Identification de structures complexes	83
III.5.2	Limites fréquentielles de la IWC	83
III.5.3	Identification de l'amortissement	84
IV	Etudes des parois raidies	85
IV.1	Diverses modélisations des parois raidies	86
IV.1.1	Homogénéisation des structures	86
IV.1.2	Autres modélisations des parois raidies	92
IV.1.3	Modélisation des parois raidies en hautes fréquences	93
IV.1.4	Modélisation des parois raidies vues comme des milieux périodiques	93
IV.2	Orthotropie structurale	95
IV.2.1	Eprouvette virtuelle	95
IV.2.2	Banc d'essais	98
IV.2.3	Description des segments : modes propagatifs	99
IV.3	Calcul prédictif du nombre d'onde $k_{x'}$	103
IV.3.1	Guide d'onde. Méthode EF-propagative	103
IV.3.2	Application au cas des plaques raidies	106

IV.4	Confrontation calcul/essai pour les nombres d'onde $k_{x'}$	111
IV.4.1	Première méthode d'identification des nombres d'onde	111
IV.4.2	Deuxième méthode d'identification des $k_{x'}$	113
IV.4.3	Validations sur d'autres cas expérimentaux	116
V	Identification large bande d'une table d'harmonie de piano	125
V.1	La table d'harmonie des pianos à queue	125
V.1.1	Le piano	126
V.1.2	La table d'harmonie	127
V.2	Identification modale d'une table d'harmonie	131
V.2.1	Caractérisation du matériau	131
V.2.2	Modélisation numérique d'une table d'harmonie	135
V.3	Tentative d'homogénéisation de la table d'harmonie	148
V.3.1	Problèmes dus aux hypothèses de l'homogénéisation	148
V.3.2	Résultats de l'homogénéisation	150
V.3.3	Conclusion sur l'homogénéisation	152
V.4	Paramètres propagatifs de la table d'harmonie	152
V.4.1	Banc d'essai	153
V.4.2	Orthotropie structurale et mesure des modes	154
V.4.3	Résultats	155
V.5	Conclusion sur la table d'harmonie	157
	Conclusions et perspectives	161
	Bibliographie	165
	Annexe A : Synthèse modale avec correction par le noyau statique	175
A.1	Troncature modale	175
A.2	Correction par le noyau statique	175

A.3	Exemple : synthèse modale de la poutre appuyée-appuyée avec correction par le noyau statique	176
A.4	Discussion sur l'intérêt de la méthode	178
Annexe B : Noyau de Green orthotrope		179
B.1	Noyau de Green pour une plaque isotrope	179
B.2	Noyau de Green pour l'orthotropie elliptique	180
B.3	Noyau de Green pour l'orthotropie non elliptique	181
Annexe C : Modèle de Nilsson pour un nid d'abeilles		183
C.1	Notations et champ de déplacement	183
C.2	Principe de Hamilton	184
C.3	Equation de dispersion	185
C.4	Plaque équivalente	186
Annexe D : mise en place de la méthode de la puissance injectée par une approche expérimentale		188
D.1	Estimation de l'énergie totale	188
D.2	Estimation de la puissance injectée	189
D.3	Estimation de l'amortissement structural	190
Annexe E : : Calcul analytique des modes propagatifs		191
E.1	Application au banc évolutif du chapitre IV.4	194
E.2	Neutralisation du couplage avec la torsion	197

Nomenclature

J. BERTHAUT

Variables générales

r, θ : Coordonnées polaires (m,rad)
 x, y, z : Variables d'espace (m)
 x', y' : Repère aligné sur les raidisseurs (m)
 u, v, w : Champ de déplacement (m)
 t : Temps (s)
 ν : Fréquence (Hz)
 ω, ϖ : Pulsation (rad/s)

Caractéristiques d'un milieu

E : Module d'Young (Pa)
 \tilde{E} : Module d'Young modifié par le coefficient de Poisson ($\tilde{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$)
 G : Module de cisaillement (Pa)
 ν : Coefficient de Poisson (-)
 ρ : Densité volumique (kg/m³)
 σ : Densité surfacique (kg/m²)
 M_{tot} : Masse totale (kg)
 D : Moment d'inertie linéique en flexion (Nm)
 \tilde{D} : Moment d'inertie dynamique en flexion ($\tilde{D} = \frac{D}{\rho h}$, m⁴/s²)

Variables modales

\mathbb{K}, \mathbb{k} : Raideur (matrice, opérateur) (N/m)
 \mathbb{M}, \mathbb{m} : Masse (matrice, opérateur) (kg)
 ω_m : Pulsation modale (rad/s)
 ξ_m : Amortissement modal (-)
 ϕ^m, Φ^m, Ψ^m : Déformée modale (kg^{- $\frac{1}{2}$})

Variables propagatives

c_φ : Vitesse de phase (m/s)
 c_g : Vitesse de groupe (m/s)
 k : Nombre d'onde réel (rad/m)
 \mathcal{k} : Nombre d'onde complexe (rad/m)
 $\hat{\mathcal{K}}$: Pseudo nombre d'onde pour un milieu orthotrope (rad/m)
 γ : Amortissement spatial (-)
 g : Noyau de Green infini (m²)

Variables Energétiques

$n(\nu)$: Densité modale (modes/Hz)
 η : Amortissement énergétique (-)
 μ : Recouvrement modal (-)
 W : Densité d'énergie (J/m^α)
 \mathcal{E} : Energie modale (J/mode)
 Π_{inj} : Puissance injectée (W/m^α)
 T_{60} : Temps de réverbération à 60 dB (s)

Notations mathématiques

i : Nombre imaginaire pur ($i^2 = -1$)
 δ : - Symbole de Kronecker (0 ou 1)
- Distribution de Dirac (-)
 \cdot : Dérivation partielle par rapport au temps (s⁻¹)
 $\hat{}$: Transformée de Fourier d'un signal temporel (s)
 t : Transposée d'une matrice (-)
 $*$: Conjugué d'une grandeur complexe (-)
arg : Argument d'un nombre complexe (rad)
 \Re : Partie réelle d'un nombre complexe (-)
 \Im : Partie imaginaire d'une grandeur complexe (-)

Abréviations

CFT : *Continuous Fourier Transform*
CP : Conditions Périodiques
DFT : *Discrete Fourier Transform*
EF : Eléments Finis
FFT : *Fast Fourier Transform*
FRF : *Frequency Response Function*, Fonction de transfert
ITD : *Ibrahim Time Domain*
IWC : *Inhomogeneous Wave Correlation*
MAC : *Modal Assurance Criterion*
MES : Méthode Energétique Simplifiée
NAH : *Nearfield Acoustical Holography*
PIM : *Power Injected Method*
SEA : *Statistical Energy Analysis*
SFSD : *Single Frequency Space Domain*
SSTD : *Single Station Time Domain*

Introduction

Le comportement vibratoire des structures suscite l'intérêt de la communauté scientifique et technique depuis la révolution industrielle et la généralisation de la machine dans tous les secteurs d'activité. Le fonctionnement des machines représente en effet une source vibratoire qui induit une réponse dynamique des structures, et un rayonnement acoustique souvent indésirable. Or, pendant longtemps la conception et le dimensionnement des structures ne répondaient qu'à des critères de tenue statique. Les contraintes de conception dynamique sont apparues suite à la manifestation d'amplifications importantes entraînant fatigue, endommagement, rupture et nuisances acoustiques. La prévision et la maîtrise des vibrations solidiennes se révèle donc une nécessité pour améliorer la conception des machines.

Les phénomènes vibratoires peuvent être appréhendés selon deux approches phéno-méno-logiques : l'approche modale et l'approche propagative. D'une part, on assiste à un phénomène d'amplification dynamique et de stockage d'énergie ; c'est l'approche modale pour laquelle le formalisme d'ondes stationnaires est approprié. D'autre part, on assiste à un phénomène de propagation et de transfert d'énergie ; c'est l'approche propagative ou ondulatoire, basée sur un formalisme et une vision propagatifs. Les deux approches ne sont nullement en opposition mais offrent une complémentarité dans la description des phénomènes vibratoires et vibroacoustiques. Elles présentent donc une dualité qu'il convient d'exploiter. En effet, certains phénomènes physiques s'expliquent plus facilement avec l'approche modale tandis que d'autres sont mieux appréhendés avec le formalisme propagatif. Cependant, il convient de noter que toutes les "passerelles" mathématiques qui relient les deux approches ne sont pas parfaitement établies, et que certaines interprétations physiques mutuelles restent obscures.

Les outils d'aide à la conception dont les industries ont besoin doivent permettre de modéliser les comportements dynamiques des structures afin de les dimensionner. Cependant, la qualité de leurs résultats dépend étroitement de la pertinence du modèle utilisé. Il convient donc de valider ces modèles à travers des confrontations entre les prédictions des modèles et les comportements réels des structures. C'est le rôle de l'identification, qui permet d'interpréter des données expérimentales sous l'éclairage d'un modèle donné. L'identification a deux buts : valider un modèle au vu de données expérimentales, et quantifier les valeurs des paramètres pertinents auquel le modèle fait appel.

La mécanique des vibrations s'intéresse en premier lieu aux répartitions de la raideur et de la masse inertielle qui caractérisent les oscillations des réponses observées. Une vibration est

un échange permanent entre une énergie cinétique (liée à la masse) et une énergie potentielle de déformation (liée de la raideur). Ce principe physique simple est le cœur de la plupart des modèles, aussi bien dans une approche modale qu’avec un formalisme propagatif. Il permet entre autre de prévoir les fréquences particulières pour lesquelles les systèmes stockent de l’énergie – on parlera de fréquences de résonance, ou fréquences modales. De même, il permet de connaître les caractéristiques de propagation des ondes au sein d’un milieu, comme la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Dans la réalité, aux effets inertiels et élastiques s’ajoutent des effets dissipatifs liés aux divers mécanismes d’amortissement (viscoélasticité, frottement, rayonnement acoustique, ...). La dissipation de l’énergie permet de contrôler les niveaux vibratoires dans les structures et constitue à ce titre un enjeu important dans la conception dynamique des machines. Néanmoins, l’amortissement est beaucoup plus difficile à appréhender que la masse et la raideur. Les modèles qui décrivent les mécanismes de dissipation sont souvent imparfaits. Aujourd’hui encore, l’analyse des phénomènes d’amortissement des structures constitue un pan important de la recherche en mécanique des vibrations.

Dans de nombreuses situations de chargement, le comportement vibratoire des structures présente un caractère fréquentiel large bande. Or, la montée en fréquence s’accompagne inéluctablement de phénomènes particuliers dans lesquels l’amortissement joue un rôle capital. En effet, la montée en fréquence provoque une densification des spectres qui rend inopérante la notion de fréquence de résonance isolée à laquelle l’approche modale fait appel. L’appréciation de cette densification se fait alors par l’intermédiaire du concept de densité modale $n(\nu)$. En outre, cette densification des modes accompagnée de l’amortissement crée un phénomène de recouvrement (noté $\mu = n \times \nu \times \eta$) qui limite l’approche modale aux basses fréquences (domaine de très faible recouvrement modal). Ainsi il apparaît clairement que l’amortissement pénalise plus l’approche modale que l’approche propagative.

D’un point de vue fréquentiel, l’approche propagative semble offrir des avantages aussi bien en basses fréquences qu’en moyennes et hautes fréquences (domaines de fort recouvrement modal). L’identification des paramètres de propagation présente deux avantages majeurs. Elle peut apporter une alternative à l’identification des paramètres modaux afin de caractériser sur un large spectre fréquentiel le comportement vibratoire. Elle peut également fournir les paramètres nécessaires à certains modèles prévisionnels adaptés aux hautes et moyennes fréquences. A titre d’exemple, la SEA (*Statistical Energy Analysis*) prédictive, outil largement employé dans l’industrie, fait appel à une vision purement propagative dans l’établissement des modèles de simulation.

Force est de constater que la littérature scientifique actuelle est largement fournie en termes d’identification modale. Elle est cependant pauvre en techniques d’identification des paramètres de propagation, plus particulièrement en ce qui concerne les structures planes et les milieux bidimensionnels. L’une des motivations de cette thèse est d’apporter une contribution dans ce domaine.

Les sujets d’application de ces techniques sont très variés. Ils vont du plus simple (poutre d’Euler Bernoulli, plaque plane homogène isotrope) aux plus complexes (matériaux viscoélastiques, anisotropie, assemblages complexes comme les parois raidies, les sandwichs ou les nids d’abeilles). La finalité des études associées est très généralement orientée vers la réduction

des niveaux vibratoires et la limitation des émissions vibroacoustiques. Une application plus originale est celle qui consiste à étudier des instruments de musique. En effet, ils présentent pour la plupart une très grande complexité structurale et donc phénoménologique : matériaux exotiques, comme le bois, à la fois légèrement hétérogène, orthotrope, et viscoélastique; formes et assemblages peu communs, avec de fortes discontinuités comme les ouïes des violons ou les barrages des tables de guitare; très large bande de fréquences d'excitation, qui est systématiquement non linéaire. Comme on le voit, l'analyse des instruments de musique présente une grande quantité de défis scientifiques, notamment en mécanique des vibrations. L'originalité de cette application vient du fait qu'elle prend à contre-pied la finalité habituelle des études vibratoires, puisqu'ici la fonction même des structures est de vibrer. Il ne faut plus limiter les vibrations mais au contraire les provoquer tout en les contrôlant.

Les travaux présentés dans ce mémoire, fruit d'une thèse financée par le Ministère de la Recherche et des Nouvelles Technologies, effectuée au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes à l'École Centrale de Lyon, participent à l'appréhension du comportement dynamique des structures complexes. L'accent est mis sur le développement de nouvelles techniques d'identification avec une approche propagative des vibrations.

Le premier chapitre fait un tour d'horizon des différentes techniques d'identification déjà existantes. L'approche modale, dont le formalisme est très rapidement rappelé, a permis le développement d'un grand nombre de techniques, aussi bien temporelles que fréquentielles, *off-line* que *on-line*. Les plus récentes de ces techniques, temporelles et *on-line*, sont la base de certaines techniques de contrôle actif. En ce qui concerne les formalismes propagatifs, les techniques d'identification sont beaucoup moins nombreuses, et se limitent bien souvent à des structures de type guide d'ondes monodimensionnels et à l'identification d'un seul paramètre à la fois.

Le chapitre II tente de compléter ces techniques d'identification dans le cadre propagatif, en en proposant de nouvelles. Le domaine spatial, direct, permet une extension ondulatoire d'une méthode d'identification modale très classique et très performante. On adapte ainsi la méthode ITD (*Ibrahim Time Domain*) en remplaçant la discrétisation temps-espace par une discrétisation espace-espace. La faisabilité de la méthode est testée, et ses limitations mises au jour. D'autres techniques sont proposées à travers l'exploration du plan d'onde, qui est au domaine spatial ce que le domaine fréquentiel est au domaine temporel. La dernière de ces méthodes, la *Inhomogeneous Wave Correlation* (IWC), intègre l'utilisation d'ondes inhomogènes référencées et propose une stratégie d'élimination des champs d'ondes singuliers basée sur la partie imaginaire du nombre d'onde (liée à l'amortissement spatial de l'onde). La technique ainsi élaborée traite un champ spatial et aboutit à l'identification de la courbe de dispersion associée. Cette méthode caractérise les nombres d'onde de flexion dans les structures bidimensionnelles, indépendamment de la forme de l'échantillon traité, des conditions aux limites de l'essai, et de l'excitation utilisée. On rappelle ensuite les modèles classiques de plaque plane, et leurs équations de dispersion, ce qui permet de construire le modèle d'une plaque homogène équivalente à la structure d'origine.

Le chapitre suivant débute par une étude de la validité de la méthode IWC dans le cas monodimensionnel, aussi bien pour l'identification du nombre d'onde que celle de l'amortissement. On y propose ensuite une série d'applications des deux nouvelles méthodes (méthode IWC d'identification des nombres d'onde et de l'amortissement, puis méthode d'identification de la plaque homogène équivalente) à des fins de validation. La première confrontation s'opère sur un champ obtenu par synthèse modale, et permet de comparer deux modèles d'amortissement, en mettant en lumière la dualité approche modale/approche propagative. La seconde confrontation s'appuie sur des résultats expérimentaux acquis par vélocimétrie laser à balayage. Deux cas de structures complexes sont testés. Le premier concerne une plaque d'acier recouverte d'un matériau poroélastique. Cet assemblage présente un comportement fortement amorti. La courbe de dispersion correspondant à cette structure bicouche est alors nettement identifiée. Le second cas de validation expérimentale s'intéresse au comportement complexe d'une structure sandwich de type nid d'abeille. Les résultats de l'identification montrent des comportements particuliers rarement décrits dans la littérature scientifique dédiée – avec notamment une orthotropie dont les rigidités dépendent de la fréquence. Ainsi la méthode proposée s'avère un outil simple et performant, capable de rendre compte de la richesse de la dynamique d'une structure complexe anisotrope sur un large spectre fréquentiel.

Le chapitre IV est dédié aux structures raidies. Il débute par une application numérique de la IWC à partir d'un champ synthétisé par éléments finis sur un échantillon de taille réduite (possibilité de monter assez haut en fréquence). Ceci constitue un principe d'identification de type éprouvette virtuelle. Les résultats des investigations opérées montrent que le comportement propagatif basses fréquences des plaques raidies est celui d'une plaque orthotrope, que l'on désigne par le nom d'orthotropie structurale. A plus hautes fréquences, un comportement original apparaît, confirmé par des mesures sur un assemblage réel. L'interprétation des phénomènes observés sur l'éprouvette numérique et sur les essais est alors entrepris. On montre clairement que l'orthotropie structurale s'efface pour laisser place au concept de propagation multimodale guidée, concept détaillé dans les deux dernières sections du chapitre. On introduit et on rappelle alors une méthode spectrale prévisionnelle des ondes structurellement guidées. Cette méthode est basée sur un nouveau schéma spectral couplé à une modélisation réduite éléments finis de la structure¹. La méthode est appliquée aux échantillons de parois raidies testés, et permet d'extraire les courbes de dispersion dans la direction parallèle aux raidisseurs. Ces prévisions sont ensuite comparées aux résultats de l'identification expérimentale, dont la méthode est adaptée à l'aspect multimodal de la propagation. La confrontation calcul/essais montre une concordance inespérée offrant des possibilités d'interprétation et d'optimisation large bande de ce type de structures.

Le dernier chapitre de cette thèse constitue une synthèse applicative des techniques d'identification modale et propagative étudiées auparavant, sur un cas concret : la table d'harmonie d'un piano à queue. Quelques éléments d'appréciation de la dynamique de la table dans le cadre de la signature acoustique des pianos sont d'abord proposés. Il est montré alors que la table d'harmonie contribue d'une manière significative dans la qualité sonore du piano. En basses fréquences,

¹Cette méthode est développée depuis quelques années au sein de l'équipe Dynamique des Structures et des Systèmes du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, Ecole Centrale de Lyon, France.

une identification modale et une tentative d'homogénéisation sont opérés. Les limites de cette dernière sont ainsi constatées. Puis l'identification des paramètres de propagation est menée. Les courbes de dispersion associées sont fournies et interprétées. L'ensemble des résultats obtenus peuvent servir à des modèles de rayonnement acoustique à des fins d'optimisation de la qualité sonore du piano.

Chapitre I

Techniques d'identification des structures

Ce chapitre dresse un état de l'art concernant les méthodes d'identification des structures. L'accent y est mis respectivement sur les techniques d'identification des paramètres modaux et des paramètres de propagation. La présentation de ces techniques s'appuie également sur une vision large bande du comportement dynamique des structures. En effet, certaines techniques perdent leur pertinence dans le domaine de fort recouvrement modal.

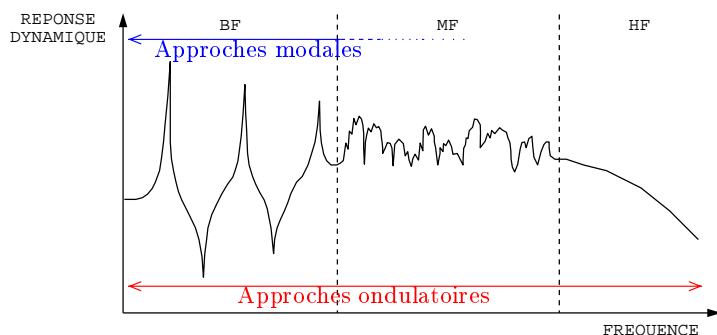


FIG. I.1: Schéma de réponse dynamique d'une structure

En basses fréquences, la dynamique d'une structure est largement dominée par un caractère modal. Les modes créent des résonances (*i.e.* des maxima dans la courbe de réponse fréquentielle, *c.f.* figure I.1) très marquées. L'identification des structures revient donc à définir les caractéristiques de ces modes : déformées, fréquences et amortissements modaux. La littérature scientifique offre alors un grand nombre de techniques de natures diverses : temporelles ou fréquentielles.

En moyennes et hautes fréquences, le comportement modal des structures est moins prononcé (figure I.1). Il convient alors d'aborder la dynamique des structures sous un angle différent. Dans ce domaine, plusieurs modèles prévisionnels sont étudiés et font l'objet de recherches intensives de la part de la communauté scientifique. Contrairement au domaine des basses

fréquences, où les approches modales font l'unanimité, le domaine de fort recouvrement modal est appréhendé tantôt par des approches modales appropriées, tantôt par des approches propagatives. Les techniques de condensation en moyennes et hautes fréquences (Ohayon [27]) relèvent de la première doctrine. Les méthodes énergétiques prédictives globales (comme l'analyse statistique de l'énergie, SEA) ou locales (comme la Méthode Énergétique Simplifiée, MES) font appel quant à elles à une description fortement propagative. Ces dernières nécessitent la connaissance de paramètres de propagation particuliers, comme l'amortissement et l'équation de dispersion. Force est de constater que les techniques d'identification de ces paramètres n'ont pas bénéficié du même engouement que celles du domaine modal. Très peu de références abordent ce sujet.

Le chapitre débute par un bref rappel sur le formalisme modal suivi d'un exposé succinct des techniques classiques d'identification modale. En particulier la méthode ITD, la méthode de la fraction rationnelle complexe et la méthode du lissage global sont développées. La première fera l'objet d'une extension au domaine spatial dans le chapitre II. La seconde partie du chapitre se focalise principalement sur certains modèles prévisionnels de la dynamique moyennes et hautes fréquences et passe en revue les quelques techniques d'identification des paramètres de propagation existantes. La question de l'amortissement, variable essentielle pour ces modèles, est également abordée.

I.1 Identification des paramètres modaux

I.1.0 Formalisme modal

Soit une structure Ω continue soumise à un champ de force F et aux conditions aux limites $C.L.$. Les opérateurs d'inertie, d'amortissement, et de raideur, supposés linéaires, s'écrivent $\mathbf{m}(\ddot{u})$, $\mathbf{c}(\dot{u})$ et $\mathbb{k}(u)$. Le problème à résoudre est alors :

$$\begin{cases} \mathbf{m}(\ddot{u}) + \mathbf{c}(\dot{u}) + \mathbb{k}(u) = F \\ C.L. \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

La première étape consiste à construire la base modale. Les propriétés de linéarité des opérateurs, la nature définie positive de \mathbf{m} et la positivité de \mathbb{k} , permettent de trouver une infinité dénombrable de fonctions ϕ^m de l'espace, qui vérifient une propriété d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi^{m'} \mathbf{m}(\phi^m) &= \delta_{mm'} \\ \int_{\Omega} \phi^{m'} \mathbb{k}(\phi^m) &= \delta_{mm'} \omega_m^2 \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Mathématiquement, (ϕ^m) est la base de co-diagonalisation de \mathbf{m} et de \mathbb{k} , normée par \mathbf{m} . De plus, on fait l'hypothèse de Basile, qui suppose qu'on a :

$$\int_{\Omega} \phi^{m'} \mathbf{c}(\phi^m) = \delta_{mm'} 2\xi_m \omega_m \quad (\text{I.3})$$

Ainsi, on a construit des triplets $(\phi^m, \omega_m, \xi_m)$, appelés *modes*. Chaque mode m est défini par sa *déformée* ϕ^m , sa *pulsation* ω_m et son *amortissement* ξ_m . On peut alors décomposer tout mouvement $u(x, t)$ sur la base modale :

$$u(x, t) = \sum_m q_m(t) \phi^m(x) \quad (\text{I.4})$$

En injectant I.4 dans I.1, on obtient :

$$\mathbf{m} \left(\sum_m \ddot{q}_m \phi^m \right) + \mathbf{c} \left(\sum_m \dot{q}_m \phi^m \right) + \mathbf{k} \left(\sum_m q_m \phi^m \right) = F \quad (\text{I.5})$$

et par linéarité des opérateurs :

$$\sum_m \left[\ddot{q}_m \mathbf{m}(\phi^m) + \dot{q}_m \mathbf{c}(\phi^m) + q_m \mathbf{k}(\phi^m) \right] = F \quad (\text{I.6})$$

Puis en utilisant l'opérateur $\int_{\Omega} \phi^{m'} \bullet$ (projection sur le mode m'), on obtient :

$$\sum_m \left(\ddot{q}_m \int_{\Omega} \phi^{m'} \mathbf{m}(\phi^m) + \dot{q}_m \int_{\Omega} \phi^{m'} \mathbf{c}(\phi^m) + q_m \int_{\Omega} \phi^{m'} \mathbf{k}(\phi^m) \right) = \int_S \phi^{m'} F \quad (\text{I.7})$$

Et, grâce à l'orthogonalité des modes (équation I.2) et l'hypothèse de Basile (équation I.3), l'équation I.7 devient un système découplé selon tous les modes m :

$$\ddot{q}_m + 2\xi_m \omega_m \dot{q}_m + \omega_m^2 q_m = \int_{\Omega} \phi^m F \quad (\text{I.8})$$

Pour une excitation ponctuelle au point x_e , $F(x, t) = F_{x_e}(t) \delta_{x_e}(x)$, le système précédent s'écrit :

$$\ddot{q}_m + 2\xi_m \omega_m \dot{q}_m + \omega_m^2 q_m = F_{x_e} \phi^m(x_e) \quad (\text{I.9})$$

Par transformée de Fourier, notée $\hat{\cdot}$, il vient :

$$-\omega^2 \hat{q}_m + 2i\xi_m \omega_m \omega \hat{q}_m + \omega_m^2 \hat{q}_m = \hat{F}_{x_e} \phi^m(x_e) \quad (\text{I.10})$$

Soit :

$$\hat{q}_m = \frac{\hat{F}_{x_e} \phi^m(x_e)}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \quad (\text{I.11})$$

D'où, après avoir utilisé la transformée de Fourier sur u_{x_e} (équation I.4) :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{x_e}(x, \omega) &= \sum_m \hat{q}_m(\omega) \phi^m(x) \\ &= \sum_m \frac{\hat{F}_{x_e}(\omega) \phi^m(x_e)}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \phi^m(x) \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

Si la force est quelconque, on la décrit comme une distribution de forces ponctuelles :

$$F(x, t) = \int_{\Omega} F_{x_e}(t) \delta_{x_e}(x) dx_e \quad (\text{I.13})$$

Par linéarité, on obtient la solution :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\Omega} u_{x_e}(x, t) dx_e \\ \hat{u}(x, \omega) &= \int_{\Omega} \hat{u}_{x_e}(x, \omega) dx_e \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

soit, finalement :

$$\hat{u}(x, \omega) = \sum_m \frac{\int_{\Omega} \hat{F}_{x_e}(\omega) \phi^m(x_e) dx_e}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \phi^m(x) \quad (\text{I.15})$$

$\hat{F}_m(\omega) = \int_{\Omega} \hat{F}_{x_e}(\omega) \phi^m(x_e) dx_e$ est appelé *effort modal généralisé*, ou encore *contribution modale de la force*.

Il est courant d'utiliser la notion de *fonction de transfert* entre deux points de la structure. En formalisme modal, celle-ci s'écrit donc, pour une mesure en x_i et une excitation en x_j :

$$H_{ij}(\omega) = \frac{\hat{u}_{x_j}(x_i, \omega)}{\hat{F}_{x_j}(\omega)} \quad (\text{I.16})$$

$$H_{ij}(\omega) = \sum_m \frac{\phi^m(x_i) \phi^m(x_j)}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \quad (\text{I.17})$$

La présentation ci-dessus effectuée reste valide avec un système discrétisé (l'opérateur $\int_{\Omega} \phi^{m'} \bullet$ devient ${}^t \phi^m$., et la multiplication par δ_{x_i} est remplacée par l'évaluation de la coordonnée i). Le résultat est alors :

$$H_{ij}(\omega) = \sum_m \frac{\phi_i^m \phi_j^m}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \quad (\text{I.18})$$

On retrouve le *principe de réciprocité* en constatant que l'équation I.17 est symétrique en i et j . La caractérisation des fonctions de transfert consiste à identifier les paramètres présents dans l'expression I.17. Il s'agit respectivement de déterminer la déformée modale, la fréquence du mode, et son amortissement.

I.1.1 Les méthodes d'identification modale

L'identification modale consiste comme on vient de la voir à déterminer les triplets $(\phi^m, \omega_m, \xi_m)$ à partir de mesures expérimentales. Il existe de nombreuses méthodes d'identification modale (Ewins, [16] et Norton [26]). Norton classe dans la référence [26] ces méthodes d'identification en deux grands groupes : celles basées sur la forme des fonctions de transferts – ou méthodes *fréquentielles* – et celles basées sur le décrement logarithmique – ou méthodes *temporelles*.

Les méthodes temporelles

De nombreuses méthodes d'identification modale temporelles existent, et de nombreux ouvrages les recensent ([2], [10], [25], [29]). Plus particulièrement, il convient de citer Ewins [16], qui met en place toutes les méthodes précitées ; Budiwantoro [13], qui propose l'utilisation de la transformée en z (système ARMA – AutoRégressif à Moyenne glissante –, filtre de Kalman), la méthode de la variable instrumentale et celle de la matrice d'autocorrélation ; Pontoizeau [54], dont la classification s'opère en séparant les méthodes *off-line* (ITD, SSTD, Polyréférence, Eigensystem Realisation Algorithm – ERA –, variable instrumentale, maximum de vraisemblance) et les méthodes *on-line* (modèle ARMAX – AutoRegressive Moving Average with exogenous inputs –, moindres carrés récurrents, Least Mean Square, méthode de Burg, filtre de Kalman étendu). Dans cette lignée, de nombreuses techniques d'identification sont associées au contrôle actif, qu'il soit adaptatif ou optimal.

Les méthodes temporelles sont basées sur le fait que chaque mode répond en temps comme un système linéaire à un degré de liberté, c'est-à-dire avec une dépendance temporelle exponentielle. Zaghlool [65] propose une méthode qui minimise l'instrumentation à un unique capteur : la *Single Station Time Domain method* (SSTD). Sa formulation matricielle donne accès aux fréquences propres et amortissements propres – que ceux-ci soient faibles ou non. La méthode d'*Ibrahim Time Domain* [53] (notée par la suite ITD) est beaucoup plus lourde, puisqu'elle met en jeu un nombre important de points de mesure, mais elle identifie les déformées modales ϕ^m inaccessibles avec la SSTD. La section I.1.2 de ce mémoire s'étendra plus largement sur cette méthode ITD, dont s'inspire une nouvelle méthode d'identification propagative présentée au chapitre II.2. Alors qu'ITD utilise une excitation et un grand nombre de points de mesure, la méthode Polyréférence [38] met en jeu une mesure et un grand nombre d'excitations. Là encore, l'ensemble des triplets modaux sont identifiés.

Gade [44] précise certaines difficultés liées à l'utilisation des réponses impulsionnelles dans l'analyse modale. En effet, il est courant d'obtenir ces réponses impulsionnelles par transformées de Fourier inverses des fonctions de transferts entre : un point de mesure et la force d'excitation¹. Or, cette façon d'obtenir les réponses impulsionnelles induit systématiquement des erreurs. En premier lieu, le spectre n'étant pas connu sur l'ensemble de la bande de fréquence $0 \rightarrow +\infty$, on assiste à un problème de "fenêtrage inverse". Celui-ci limite les variations brutales des signaux. Une autre difficulté peut être engendrée par la discrétisation spectrale. En effet, le spectre n'est connu que sur un peigne de Dirac (*i.e* une suite arithmétique de fréquences). Dans le cas d'une résonance très aiguë (amortissement très faible, bande passante à 3 dB très étroite), la discrimination en fréquence peut être insuffisante. C'est ce point particulier, qui a motivé l'utilisation d'une méthode fréquentielle lors de l'analyse modale de la table d'harmonie (*c.f.* chapitre V, page 125).

¹Pour plus d'informations sur ces concepts (transformées de Fourier, réponse impulsionnelle, spectre, ...), voir l'ouvrage de J. Max [22] : "Méthodes et techniques de traitement du signal".

Les méthodes fréquentielles

Les méthodes fréquentielles (référéncées dans tous les ouvrages généraux [16], [25],) travaillent dans l'espace de Fourier, le plus souvent sur des fonctions de transfert du système. La plus classique est celle du pic. Sous l'hypothèse que les modes sont bien isolés et peu amortis, les fonctions de transferts présentent des pics dont les caractéristiques – position, hauteur, largeur – sont liées simplement aux triplets modaux. Cette méthode est détaillée page 17. Une seconde méthode est celle du lissage du cercle : sous les mêmes hypothèses, on peut montrer que le diagramme de Nyquist (fonction de transfert tracée de façon paramétrique dans le plan complexe) forme un cercle sur chaque résonance (chaque pic vu sur la fonction de transfert se transforme en cercle). L'analyse géométrique de ce cercle donne les caractéristiques modales. Cependant, les hypothèses sur lesquelles ces deux méthodes se basent (modes isolés et peu amortis) sont très restrictives. Afin d'élargir les possibilités des méthodes fréquentielles, des méthodes globales ont été développées (méthode de la fraction rationnelle complexe, méthode du lissage global). Elles seront explicitées aux sections I.1.3 et I.1.4. L'arsenal mathématique ne cessant de s'élargir, on utilise désormais aussi la transformée en ondelettes pour l'analyse modale ([48, 49]). Le principal intérêt des ondelettes est de permettre une représentation temps-fréquence des phénomènes. Ainsi, si les caractéristiques d'un mode évoluent avec le temps – comme c'est le cas pour des systèmes non-linéaires –, cette méthode est capable de suivre la fréquence instantanée et l'amplitude instantanée de celui-ci.

Toutes ces méthodes travaillent sur une série de fonctions de transfert en différents points de la structure. Les déformées modales ϕ^m sont obtenues par lecture des résultats de façon "horizontale", c'est-à-dire sur un mode donné en faisant varier le point de lecture. Une alternative pour la mesure des déformées est actuellement développée par Stanbridge [58, 59]. Il utilise un vibromètre laser à balayage dont la fonction balayage s'effectue en continu. En balayant un trajet donné de façon sinusoïdale, la réponse du système est multipliée par la fonction balayage. Dans le domaine fréquentiel, ceci se traduit par une convolution de la réponse modale par une fonction liée à la déformée le long du trajet parcouru. Ainsi, les pics modaux apparaissent avec des "rebonds" dont les amplitudes forment une série qui correspond à la déformée du mode le long du trajet balayé. Ces amplitudes sont obtenues par analyse modale fréquentielle classique (méthode du pic par exemple).

R. Randal [55] fait une comparaison de l'efficacité des principales méthodes appliquées à l'identification modale : méthode de la fraction rationnelle complexe, méthode de l'exponentiel complexe, méthode du cepstre complexe, méthode de l'enveloppe de Hilbert et méthode d'Ibrahim Time Domain (ITD). Ses conclusions sont que les meilleurs résultats sont obtenus avec la méthode de la fraction rationnelle complexe et la méthode ITD. C'est pourquoi les sections suivantes détaillent précisément ces deux méthodes, ainsi qu'une extension de la méthode de la fraction rationnelle.

Remarque : La seule méthode d'identification normalisée est celle de la poutre d'Oberst qui identifie les premiers modes d'une poutre nue, puis ceux de la même poutre recouverte d'un matériau à caractériser. L'analyse de la modification des paramètres modaux permet de déterminer les caractéristiques du matériau ajouté à la poutre. Cependant, cette méthode est plus une méthode d'identification des paramètres mécaniques d'un matériau qu'une méthode d'identification des modes d'une structure.

La comparaison de modèles modaux

La comparaison des modèle modaux est nécessaire pour juger la qualité d'une identification modale. La première démarche simple mais insuffisante consiste à comparer les fréquences modales des deux modèles. Cependant, les fréquences de deux modes proches, dans deux modèles modaux différents, peuvent être rangées dans des ordres différents. On assiste à un croisement des modes. Par exemple, pour une plaque libre libre en flexion, la fréquence du premier mode de torsion (1,1) peut être inférieure *ou* supérieure à celle du premier mode de flexion (0,2). Il convient alors de classer les modes non plus selon leur fréquence, mais selon leur déformée. L'outil classiquement utilisé est le *Modal Assurance Criterion* (MAC) [16]. Cet indice juge de la ressemblance entre deux déformées quelconques ϕ^m et $\phi^{m'}$:

$$MAC(m, m') = \frac{\left| \int \phi^m(x) \cdot \phi^{m'}(x) dx \right|}{\sqrt{\int \phi^m(x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int \phi^{m'}(x)^2 dx}} = \frac{\left| (\phi^m, \phi^{m'}) \right|}{\|\phi^m\| \cdot \|\phi^{m'}\|} \quad (\text{I.19})$$

Un MAC proche de 0 indique que les déformées sont très distinctes tandis qu'un MAC proche de 1 signifie une forte ressemblance entre deux déformées. Ainsi, on peut comparer les fréquences de deux modes semblables. Si on ne connaît les déformées que sur un ensemble discret de points, l'expression I.19 devient :

$$MAC(m, m') = \frac{|{}^t\phi^m \cdot \phi^{m'}|}{\|\phi^m\| \cdot \|\phi^{m'}\|} \quad (\text{I.20})$$

On a vu qu'il existe un grand nombre de méthodes d'identification modale. Les paragraphes suivants sont consacrés plus précisément à la description de trois de ces méthodes : la méthode ITD, la méthode de la fraction rationnelle complexe, et la méthode du lissage globale. Ces techniques seront employées dans la suite de ce travail.

I.1.2 Ibrahim Time Domain method [53]

C'est une méthode d'identification temporelle qui fait appel à la réponse impulsionnelle de la structure. Celle-ci n'est autre que la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert $H_{ij}(\omega)$ (équation I.17). On choisit un point x_j d'excitation, avec j quelconque et invariant. On réécrit alors $H_{ij}(\omega)$ sous la forme :

$$H_{ij}(\omega) = \sum_m \frac{r_m^i}{i\omega - \lambda_m} \quad (\text{I.21})$$

avec

$$\begin{cases} r_{2m}^i = -i \frac{\phi_i^m \phi_j^m}{2\omega_m \sqrt{1 - \xi_m^2}} & , \quad \lambda_{2m} = \omega_m \left(\xi_m + i\sqrt{1 - \xi_m^2} \right) \\ r_{2m+1}^i = -r_{2m}^i & , \quad \lambda_{2m+1} = \omega_m \left(\xi_m - i\sqrt{1 - \xi_m^2} \right) \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

L'expression I.21 permet de revenir au domaine temporel, avec une réponse impulsionnelle qui prend la forme :

$$h_i(t) = \sum_m r_m^i e^{\lambda_m t} \quad (\text{I.23})$$

De plus, il est nécessaire de faire une *troncature modale* au mode n , en supposant que les modes tronqués n'interviennent pas dans la réponse impulsionnelle :

$$h_i(t) \simeq \sum_{m=1}^{2n} r_m^i e^{\lambda_m t} \quad (\text{I.24})$$

La méthode ITD utilise un point d'excitation et N_1 points de mesure, avec un échantillonnage temporel $(t_1 \ t_2 \ \dots \ t_{N_2})$. Deux "jeux" de mesures \mathbb{X} et \mathbb{Y} décalés de ΔT sont faits :

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} h_1(t_1) & h_1(t_2) & \dots & h_1(t_{N_2}) \\ h_2(t_1) & h_2(t_2) & \dots & h_2(t_{N_2}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{N_1}(t_1) & h_{N_1}(t_2) & \dots & h_{N_1}(t_{N_2}) \end{bmatrix} \quad (\text{I.25})$$

et

$$\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} h_1(t_1 + \Delta T) & h_1(t_2 + \Delta T) & \dots & h_1(t_{N_2} + \Delta T) \\ h_2(t_1 + \Delta T) & h_2(t_2 + \Delta T) & \dots & h_2(t_{N_2} + \Delta T) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{N_1}(t_1 + \Delta T) & h_{N_1}(t_2 + \Delta T) & \dots & h_{N_1}(t_{N_2} + \Delta T) \end{bmatrix} \quad (\text{I.26})$$

Il est naturel de penser que les deux matrices \mathbb{X} et \mathbb{Y} sont liées l'une à l'autre par une relation linéaire. Si tel était le cas, on aurait une matrice \mathbb{A} ($N_1 \times N_1$) vérifiant :

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y} \quad (\text{I.27})$$

Afin de calculer \mathbb{A} , la formule des moindres carrés double peut être utilisée :

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} [(\mathbb{Y}^t \mathbb{X})(\mathbb{X}^t \mathbb{X})^{-1} + (\mathbb{Y}^t \mathbb{Y})(\mathbb{X}^t \mathbb{Y})^{-1}] \quad (\text{I.28})$$

Il faut noter à ce stade que N_2 doit être supérieur à N_1 , c'est-à-dire que l'on doit considérer un nombre d'instant de mesure plus important que le nombre de points de mesure pour valider cette méthode. \mathbb{X} et \mathbb{Y} peuvent être réécrites différemment :

$$\mathbb{X} = R\Lambda, \quad \mathbb{Y} = R'\Lambda \quad (\text{I.29})$$

avec

$$R = \begin{bmatrix} r_1^1 & \dots & r_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{N_1} & \dots & r_n^{N_1} \end{bmatrix}, \quad R' = \begin{bmatrix} r_1^1 e^{\lambda_1 \Delta T} & \dots & r_n^1 e^{\lambda_1 \Delta T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{N_1} e^{\lambda_n \Delta T} & \dots & r_n^{N_1} e^{\lambda_n \Delta T} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & \dots & e^{\lambda_1 t_{N_2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_n t_1} & \dots & e^{\lambda_n t_{N_2}} \end{bmatrix} \quad (\text{I.30})$$

De plus, en notant R_m la $m^{\text{ème}}$ colonne de R , on remarque que :

$$R'_m = e^{\lambda_m \Delta T} \cdot R_m \quad (\text{I.31})$$

En combinant les équations I.29 et I.31 avec l'équation I.27, on obtient :

$$\mathbb{A}.R_m = e^{\lambda_m \Delta T}.R_m \quad (\text{I.32})$$

L'identification se pose alors en terme spectral (calcul aux valeurs propres). Connaissant les solutions propres de \mathbb{A} , on aura donc directement les déformées aux points de mesure et les fréquences propres, en inversant le système I.22. L'application de cette méthode se heurte cependant au problème de choisir *a priori* le nombre N_1 de points de mesure, qui doit être supérieur au double du nombre n de modes participants. Il existe quelques méthodes ([13], [16]) pour lever ce problème, qui consistent à faire plusieurs identifications en faisant varier le nombre de modes identifiés N_1 , en suivant l'évolution d'un indicateur de validité de la réponse. Cet indicateur subit un saut au moment où N_1 est optimal. Un autre problème de la méthode ITD vient du fait que l'algorithme trouve exactement $\frac{N_1}{2}$ modes, nombre qui est généralement supérieur à n . Cet écart entre le nombre de modes participants du modèle n et le nombre de modes identifiés $\frac{N_1}{2}$ est nécessaire pour modéliser le bruit de mesure inévitable. Alors comment faire la différence entre un mode effectif du système et un mode dû au bruit de mesure ? Cette question est à ce jour sans réponse claire et précise.

I.1.3 Méthode de la fraction rationnelle complexe

Cette méthode – présentée ici à titre d'exemple de méthode fréquentielle – présente un avantage sur les autres méthodes fréquentielles : elle ne nécessite pas d'avoir des modes bien séparés, car elle travaille directement sur les fonctions de transfert H_{ij} complètes, sans isoler les modes. Elle nécessite cependant une troncature modale, et met la fonction de transfert sous la forme :

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{m=1}^n \frac{\phi^m(x_i)\phi^m(x_j)}{-\omega^2 + 2i\xi_m\omega_m\omega + \omega_m^2} \quad (\text{I.33})$$

Puis cette fraction rationnelle est réécrite sous la forme :

$$H_{ij}(\omega) = \frac{\sum_{p=0}^{2n-1} A_p(i\omega)^p}{(-\omega^2)^n + \sum_{p=0}^{2n-1} B_p(i\omega)^p} = \frac{P_A(i\omega)}{P_B(i\omega)} \quad (\text{I.34})$$

P_A et P_B sont des polynômes de \mathbb{C} . On calcule alors la fonction d'erreur :

$$\varepsilon^2 = \int |P_A(i\omega) - H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)P_B(i\omega)|^2 d\omega \quad (\text{I.35})$$

où $H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)$ est la fonction de transfert mesurée. On peut ajouter une pondération sur le spectre, telle la cohérence par exemple, pour tenir compte de la qualité de la mesure. L'expression I.35 est quadratique en P_A et P_B . On pourra donc trouver directement, par annulation du gradient, les paramètres $((A_p)_{p \leq 2n-1}, (B_p)_{p \leq 2n-1})$:

$$\forall q \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket, \quad \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial A_q} = 0$$

$$\Rightarrow \int H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)(i\omega)^{2n+q}d\omega = \sum_{p=0}^{2n-1} A_p \int (i\omega)^{p+q}d\omega - \sum_{p=0}^{2n-1} B_p \int H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)(i\omega)^{p+q}d\omega \quad (\text{I.36})$$

Récrit matriciellement, ceci donne :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \int (i\omega)^0 d\omega & \cdots & \int (i\omega)^{2n-1} d\omega & \int H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)(i\omega)^0 d\omega & \cdots & \int H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)(i\omega)^{2n-1} d\omega \\ \int (i\omega)^1 d\omega & \cdots & \int (i\omega)^{2n} d\omega & \int H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)(i\omega)^1 d\omega & \cdots & \int H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)(i\omega)^{2n} d\omega \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int (i\omega)^{2n-1} d\omega & \cdots & \int (i\omega)^{4n-2} d\omega & \int H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)(i\omega)^0 d\omega & \cdots & \int H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)(i\omega)^{4n-2} d\omega \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{P} = {}^t \begin{bmatrix} A_0 & \cdots & A_{2n-1} & B_0 & \cdots & B_{2n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \int H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)(i\omega)^{2n} d\omega \\ \int H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)(i\omega)^{2n+1} d\omega \\ \vdots \\ \int H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)(i\omega)^{4n-1} d\omega \end{bmatrix} \quad (\text{I.37})$$

Ainsi, la construction et l'inversion de la matrice \mathcal{M} permettent de trouver directement les polynômes P_A et P_B . Ensuite, une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ donne directement un modèle de la forme :

$$H_{ij}^{\text{mes}}(\omega) \simeq \sum_{i=1}^{2n} \frac{r_i}{i\omega - \lambda_i} \quad (\text{I.38})$$

avec, *théoriquement*, $r_i \in i\mathbb{R}$, $r_{2i} = -r_{2i-1}$ et $\lambda_{2i} = \text{conj}(\lambda_{2i-1})$. On retrouve les paramètres modaux, comme précédemment, en inversant le système I.22. Cependant ces relations entre pôles et résidus associés ne sont pas toujours vérifiées. Il arrive que :

- $r_i \notin i\mathbb{R}$: c'est toujours le cas, à cause du bruit de mesure. En fait, il suffit de vérifier l'*approximation modes réels* en constatant que $\Re(r_i) \ll \Im(r_i)$. Mais il arrive que ce ne soit pas le cas.
- $\exists i_0 / r_{2i_0} \neq -r_{2i_0-1}$: on constate alors que $\lambda_{2i_0} \neq \text{conj}(\lambda_{2i_0-1})$. L'algorithme a trouvé un pôle simple, tandis que le modèle modal impose des pôles doubles.

Dans ces deux cas, il est nécessaire de *perturber* l'algorithme, par exemple en changeant les bornes d'intégration (*i.e.* la plage de fréquences traitée), ou en changeant le nombre de modes n identifiés.

Pour appliquer la méthode il est nécessaire de connaître *a priori* le nombre de modes n recherchés ; les mêmes solutions que celles proposées pour la méthode ITD (voir page 15) peuvent être employées. Mais on peut aussi, plus simplement, tracer le graphe $(\omega, H_{ij}^{\text{mes}}(\omega))$ et dénombrer *de visu* le nombre de modes à identifier. La méthode de la fraction rationnelle, comme la méthode ITD, identifie les paramètres modaux pour chaque points de mesure. C'est nécessaire pour les déformées, mais c'est gênant pour les paramètres ω_m et ξ_m , qui ne doivent pas dépendre du point de mesure. Des écarts peuvent apparaître sur les identification d'un même paramètre sur divers points. La Structural Dynamics Toolbox (SDT) sous MATLAB[©] 5.3 (Etienne Balmès, 1990²), propose une interface très performante qui met en œuvre cette méthode. Elle va même au-delà, en proposant une identification des paramètres ω_m et ξ_m de façon "horizontale", c'est-à-dire ne dépendant pas du point de mesure.

² <http://www.sdtools.com>

I.1.4 Méthode du pic et méthode du lissage global

La méthode du pic est une méthode fréquentielle, qui suppose que les modes sont suffisamment espacés pour pouvoir écrire, localement, la fonction de transfert sous la forme :

$$H_{ij}(\omega) = \frac{\phi^m(x_i)\phi^m(x_j)}{-\omega^2 + 2i\xi_m\omega_m\omega + \omega_m^2} \quad (\text{I.39})$$

L'admittance (fonction de transfert en vitesse) s'écrit alors :

$$H_{ij}^v(\omega) = \frac{i\omega\phi^m(x_i)\phi^m(x_j)}{-\omega^2 + 2i\xi_m\omega_m\omega + \omega_m^2} \quad (\text{I.40})$$

Sous l'hypothèse d'un amortissement faible, on retrouve les caractéristiques du mode par un calcul d'atténuation à 3 dB :

$$\text{Soient } (\omega_1, \omega_2, \omega_{\max}) \text{ tels que } \begin{cases} |H_{ij}^v(\omega_{\max})| = \max(|H_{ij}^v(\omega)|) \\ |H_{ij}^v(\omega_1)|_{dB} = |H_{ij}^v(\omega_2)|_{dB} = |H_{ij}^v(\omega_{\max})|_{dB} - 3 \end{cases}$$

alors, sous l'hypothèse que ξ_m est faible, on a :

$$\begin{cases} \omega_m = \omega_{\max} \\ \xi_m = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2\omega_m} \\ \phi^m(x_i)\phi^m(x_j) = 2\xi_m\omega_m |H_{ij}^v(\omega_m)| \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

Une limitation de cette méthode vient de l'aspect numérique liée à l'échantillonnage. En effet, la fonction de transfert n'est connue que sur un ensemble *discret* de valeurs de ω . Or, pour les amortissements très faibles, le pic est très aigu ($|\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_m$), et il est peu probable que la discrétisation du spectre permette une bonne lecture. Pour lever cette limitation, on peut considérer qu'autour de -3 dB, ξ_m suit la loi :

$$\xi_m \simeq \frac{\Delta\omega}{\omega_m(\Delta H_{(dB)}^v)^{0,62}} \quad (\text{I.42})$$

La figure I.2 montre le résultat de cette estimation pour ξ_m variant de 0,1% à 5%, sur des fonctions de transferts synthétisées. On voit que pour une différence de niveau de la fonction de transfert allant de 1 dB à 4 dB (au lieu de 3 dB dans la méthode de base), l'estimation de ξ_m est correcte à un demi point près. Ceci permet d'avoir plusieurs mesures de ξ_m et lisse ainsi les erreurs induites par la mesure et l'échantillonnage. Cette méthode est très simple et très efficace. Elle permet d'estimer très rapidement les paramètres modaux. Mais, du fait de ses hypothèses qui sont rarement vérifiées (influence mutuelle des modes), elle ne réalise qu'une *estimation* des paramètres : les résultats sont peu précis, surtout pour l'amortissement et le résidu ($\phi^m(x_i)\phi^m(x_j)$). C'est pourquoi d'autres méthodes plus robustes sont développées.

La méthode du lissage global est également une méthode fréquentielle, qui considère un point d'excitation x_j et N points de mesure $(x_i)_{i \leq N}$. Comme dans la méthode de la fraction

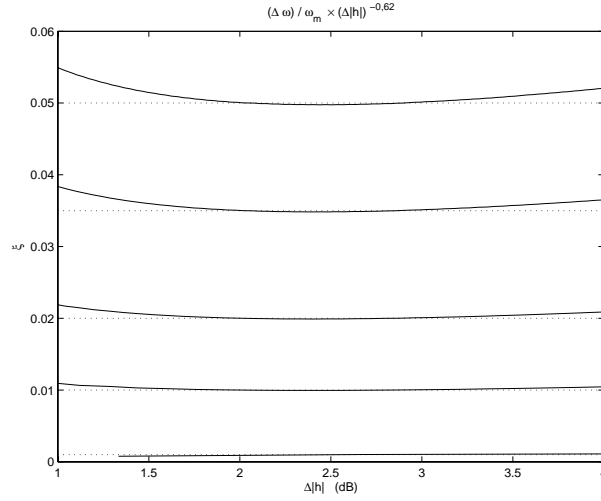


FIG. I.2: ξ_m estimé par l'équation précédente (—), et ξ_m réel (⋯)

rationnelle complexe, la méthode du lissage global modélise les fonctions de transfert par une troncature au mode n :

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{m=1}^n \frac{\phi^m(x_i)\phi^m(x_j)}{-\omega^2 + 2i\xi_m\omega_m\omega + \omega_m^2} \quad (\text{I.43})$$

Il s'agit d'une méthode "manuelle", qui fonctionne en deux étapes.

- Tout d'abord, elle identifie *horizontalement* les paramètres modaux (ω_m, ξ_m) . Pour ce faire, un sous ensemble aléatoire $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}_N$ est utilisé pour sommer des fonctions de transfert en vitesse :

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{I}}^v &= \sum_{i \in \mathbb{I}} \left(\sum_{m=1}^n \frac{i\omega \phi^m(x_i)\phi^m(x_j)}{-\omega^2 + 2i\xi_m\omega_m\omega + \omega_m^2} \right) \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{i\omega \sum(\phi^m(x_i)\phi^m(x_j))}{-\omega^2 + 2i\xi_m\omega_m\omega + \omega_m^2} \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{i\omega R_{\mathbb{I}}^m}{-\omega^2 + 2i\xi_m\omega_m\omega + \omega_m^2} \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

en notant $R_{\mathbb{I}}^m = \sum_{i \in \mathbb{I}} (\phi^m(x_i)\phi^m(x_j))$.

Le but de la sommation sur quelques points de mesure est triple : détruire une partie du bruit de mesure, s'affranchir des problèmes posés par un point sur une ligne nodale³ (le mode disparaît alors de la fonction de transfert correspondante), et moyenner les éventuelles variations des paramètres modaux d'un point à l'autre. La méthode du pic est alors utilisée sur $H_{\mathbb{I}}^v$, ce qui donne une première estimation des paramètres $(\omega_m, \xi_m, R_{\mathbb{I}}^m)$ ($R_{\mathbb{I}}^m$ n'a aucune signification

³Les modes peuvent avoir une déformée qui est nulle sur certains points. Dans un système monodimensionnel, ces points sont isolés et sont appelés *nœuds*. Pour une structure bidimensionnelle, on peut montrer que ces points se regroupent en une courbe continue (au moins C^2), appelée *ligne nodale*. Les nœuds d'un mode en trois dimensions se retrouvent sur une *surface nodale*.

physique). Ensuite vient une phase d'optimisation de chaque paramètre, avec comme critère d'optimisation la minimisation de l'erreur :

$$\varepsilon = \int \left| \sum_{i \in \mathbb{I}} (i\omega H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)) - H_{\mathbb{I}}^v(\omega) \right| d\omega \quad (\text{I.45})$$

Il est utile de préciser que cette minimisation d'erreur fait “coller” les deux fonctions de transfert en module *et* en phase. L'effet d'une variation d'un paramètre est très visible sur les fonctions de transfert : ω_m contrôle la position horizontale du pic, ξ_m dirige la largeur du pic, et $R_{\mathbb{I}}^m$ pilote la position verticale du pic (*c.f.* fig. I.3).

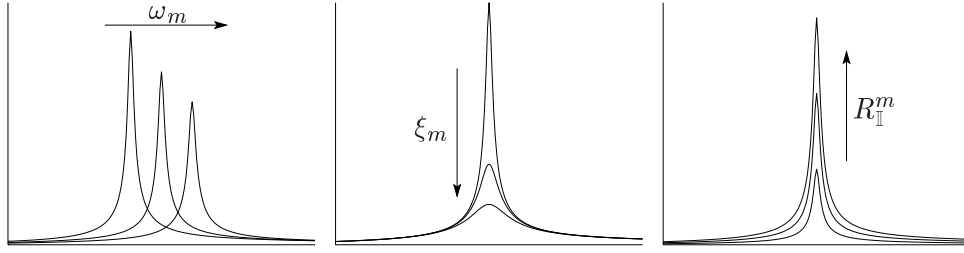


FIG. I.3: Effets des variations des paramètres modaux sur un pic

Comme on le voit, les paramètres modaux ne sont pas indépendants. Il faut donc affiner itérativement chacun des paramètres, ce qui en fait une méthode un peu longue. Finalement, on peut vérifier ou affiner les résultats en changeant de sous ensemble \mathbb{I} .

• Dans un deuxième temps, à partir de cette identification des paramètres modaux (ω_m, ξ_m) , la méthode identifie les résidus $R_i = (\phi_i^m \phi_j^m)$. Maintenant que les paramètres globaux (ω_m, ξ_m) sont fixés, il suffit de travailler sur les fonctions de transfert en déplacement $(H_{ij}^{\text{mes}}(\omega))_{i \leq N}$. La méthode manuelle décrite plus haut est de nouveau utilisée, avec minimisation de l'erreur :

$$\varepsilon_i = \int_{\omega} |H_{ij}^{\text{mes}}(\omega) - H_{ij}(\omega)| d\omega \quad (\text{I.46})$$

Il faut noter que $\forall i \neq j, \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial R_j} = 0$, ce qui simplifie grandement la méthode.

Enfin, grâce à la mesure colocalisée ($i = j$), on peut remonter aux déformées modales normées par la relation :

$$\phi_i^m = \frac{R_i}{\sqrt{R_j}} \quad (\text{I.47})$$

Ainsi, à partir de fonctions de transfert en déplacement (dont une colocalisée), la méthode du lissage global appuyée par une méthode du pic améliorée, permet d'identifier complètement les paramètres modaux $(\omega_m, \xi_m, \phi^m)_{m \leq n}$. Cette méthode est plus robuste que la méthode de la fraction rationnelle complexe, et présente l'avantage d'identifier les paramètres globaux (ω_m, ξ_m) *horizontalement*, c'est-à-dire indépendamment du point considéré. Néanmoins, elle a le défaut d'être assez manuelle et donc coûteuse en temps.

I.1.5 Conclusion

Le formalisme modal offre une grande variété de méthodes d'identification, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients. Aucune de ces méthodes ne peut prétendre être systématiquement la mieux adaptée à une application donnée; il faudra choisir la méthode employée en fonction de la situation. On retiendra cependant les points suivants :

- la méthode ITD, temporelle et *off-line*, est très performante, tant qu'on dispose des réponses temporelles du système (et non des fonctions de transfert à partir desquelles on peut reconstruire les réponses temporelles, mais de façon erronée).
- la méthode du lissage global, basée sur celle de la fraction rationnelle complexe, relaxe l'hypothèse de modes bien séparés. C'est la plus performante des méthodes fréquentielles.

De façon formelle, la représentation modale est valide pour tout le spectre. Aucune hypothèse explicite sur la fréquence n'est faite. Mais, dans les faits, deux constats limitent sa validité. D'une part, la dynamique haute fréquence est sensible à la troncature modale, la base modale devant être d'autant plus riche que la fréquence augmente. D'autre part, l'amortissement joue un rôle fondamental lors de cette montée en fréquence. Si l'amortissement est important ou si les fréquences modales sont rapprochées, les modes n'émergent plus de façon isolée. Le formalisme modal n'a plus d'intérêt. Lyon [21] propose un indicateur nommé *recouvrement modal* pour quantifier cette limite. Le *recouvrement modal* définit par :

$$\mu = n \times \nu \times \eta \quad (\text{I.48})$$

où n est la densité modale, ν la fréquence et η l'amortissement énergétique ($\eta = 2\xi$). Avec un recouvrement modal de 30%, il devient difficile d'isoler un mode donné; à partir de 50%, il est impossible de séparer les modes. Il s'agit d'ailleurs d'une des définitions possibles du domaine des moyennes et hautes fréquences. *On sort du domaine modal pour entrer dans le domaine des moyennes fréquences lorsque le recouvrement modal atteint un tiers à un demi.*

I.2 Identification des paramètres de propagation

Cette partie fournit des éléments concernant la représentation ondulatoire du comportement dynamique des structures. L'accent y est mis d'abord sur la dualité formelle entre les approches modales et propagatives et sur les difficultés d'interprétation qui y sont rattachées. Une brève revue des modèles prévisionnels basés sur les approches propagatives est ensuite proposée. Enfin, les techniques d'identification des paramètres de propagation (paramètres d'entrée de ces modèles) sont alors exposés.

I.2.1 La dualité approche modale / approche propagative

La question de la "dualité approche modale / approche propagative" est à la fois séculaire et très contemporaine. Elle a passionné et continue à le faire d'illustres scientifiques et de nombreux chercheurs. Comme le rappelle Langley [74], la réponse dynamique – vibratoires ou acoustiques – peut être vue aussi bien en termes de modes (ondes stationnaires) qu'en termes d'ondes

élastiques libres. On peut citer la SEA en exemple. Les principes fondamentaux de cet outil sont souvent exprimés en termes modaux tandis que certains paramètres, comme les facteurs de pertes par couplage, sont issus d'une argumentation basée sur des phénomènes ondulatoires. Mais cette dualité n'est pas évidente à mettre en œuvre, comme le précise Lyon [21] : *Soulignons qu'il est toujours possible, DU MOINS EN THEORIE, d'arriver aux mêmes conclusions par les deux approches.* Pour Fahy [17], *la génération d'un champ parfaitement stationnaire à partir de réflexions arbitraires d'ondes propagatives reste un véritable mystère.*

Dans le cas monodimensionnel, cette dualité est montrée formellement de façon mathématique. En effet, pour les vibrations libres d'un tel système, la combinaison d'une onde progressive et d'une onde rétrograde, de même nombre d'onde k satisfaisant l'équation de dispersion, forme une onde stationnaire appelée *mode*. La manière avec laquelle ces ondes se combinent, en termes de phase réciproque et de rapport d'amplitudes, est déterminée à partir des conditions aux limites. Mais cette dualité n'est valable que pour un mode unique excité sur sa fréquence propre. Pour une autre fréquence, la forme du mode est inchangée mais son nombre d'onde k n'est plus compatible avec l'équation de dispersion. La dualité entre *un* mode et deux ondes propagatives s'effondre. La réponse forcée du système est en réalité une combinaison linéaire des modes de la structure. Pour percevoir la dualité approche modale/approche propagative dans ce cas, il faut faire appel à la décomposition de Mittag-Leffler⁴ de la réponse ondulatoire du système :

$$w(\omega) = A^+ e^{-ik(\omega)x} + A^- e^{ik(\omega)x} = w(0) + \sum_r b_r \left[\frac{1}{\omega - \omega_r} + \frac{1}{\omega_r} \right] \quad (\text{I.49})$$

Cette expression est formellement la même que I.21, vue précédemment concernant le formalisme modal. Les deux approches, ondulatoire et modale, sont donc ici mises en parallèle. Mais l'interprétation physique de cette dualité est plus difficile à exhiber. Loin d'une résonance, les modes se combinent entre eux de façon complexe pour former les ondes propagatives, aucun des modes pris isolément n'étant associé simplement à ces ondes. Pour une excitation large bande, la situation est différente puisque la réponse est largement dominée par les modes résonants qui, comme on l'a vu plus haut, peuvent chacun être considérés comme une combinaison d'une onde aller et d'une onde retour.

Dans le cas bidimensionnel, le problème est nettement plus compliqué. En amont même de la dualité approche modale / approche propagative, Langley [74] met en évidence le problème de l'unicité de la représentation ondulatoire d'un champ de vibration. Il exhibe en effet :

- une formulation "guide d'onde" dans un sens (resp. dans l'autre sens),

$$w(x, y) = \sum_{s=1}^{+\infty} w_s(x) \sin\left(\frac{s\pi y}{L}\right) \quad \left(\text{resp.} \sum_{s=1}^{+\infty} w_s(y) \sin\left(\frac{s\pi x}{l}\right) \right)$$

- une formulation en terme de réseau d'interférence d'ondes cylindriques (à travers la méthode des sources images),

$$w(x, y) = \left(-\frac{iP}{8Dk^2}\right) \sum_n (\pm 1) \left[H_0^{(2)}(kr_n) - H_0^{(2)}(ikr_n) \right]$$

⁴La décomposition de Mittag-Leffler est en fait la décomposition en série de Laurent d'une fonction méromorphe. Les fonctions méromorphes sont des fonctions disposant de pôles isolés et holomorphes sur l'ouvert privé de ces points.

- et enfin une formulation par superposition d'ondes planes

$$w(x, y) = \int_0^{2\pi} A(\theta) e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\theta + \int_0^{2\pi} B(\theta) e^{-k(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\theta + w_p(x, y)$$

Cette dernière représentation peut être lue comme la superposition d'un champ réverbéré dominé par des ondes planes et d'un champ direct ($u_p(x, y)$) correspondant au noyau de Green de la plaque infinie. Cependant, la distribution angulaire des amplitudes $A(\theta)$ ne peut pas être déterminée de façon unique. Cette non-unicité de la vision propagative est de nature à soulever bien des questions. A l'opposé, la représentation modale *est* unique, chaque déformée modale étant clairement définie. Une autre manière de prouver cette unicité est d'invoquer l'unicité de la décomposition de Mittag-Leffler I.49.

Malgré les ambiguïtés d'interprétation de la dualité approche modale/approche propagative, force est de constater que les deux approches "cohabitent" parfaitement dans la littérature scientifique. Faire appel à l'une ou à l'autre de ces approches est plus une question de culture scientifique. L'approche modale semble être préférée dans un contexte numérique et expérimental alors que l'approche ondulatoire correspond mieux à une démarche analytique. Cette distinction ne prend pas en considération la montée en fréquence qui limite de fait l'approche modale et "épargne" dans une certaine mesure l'approche propagative.

I.2.2 Les modèles prédictifs moyennes et hautes fréquences

Lorsque la fréquence augmente, la plupart des structures accusent une *densification modale*, accompagnée d'une hausse du *recouvrement modal* (c.f. Lyon [21]). Ce phénomène "brouille" les modes, les mélange, ce qui pénalise les approches purement modales. Ainsi de nombreuses alternatives à ces dernières ont été proposées, dont certaines sont encore en cours de développement. Il ne s'agit dans ce mémoire de faire une revue exhaustive de toutes ces méthodes, mais d'en présenter quelques-unes à titre d'exemple, pour lesquelles les paramètres de propagation sont des données essentielles.

L'Analyse Statistique de l'Energie (*Statistical Energy Analysis*, SEA), dont les fondements sont donnés par Lyon [21], est une méthode énergétique : les variables ne sont plus des grandeurs cinématiques (linéaires), mais des grandeurs énergétiques (quadratiques). De nombreuses hypothèses sont nécessaires à son application (modes résonants, équirépartition de l'énergie sur tous les modes, couplages conservatifs, ...). La SEA est une approche globale qui consiste à subdiviser les structures complexes en sous-systèmes plus simples qui respectent les hypothèses fondatrices. Armé d'indicateurs globaux sur ces sous-systèmes – périmètre L , section S , volume V , densité modale n_i , facteur de pertes par dissipation η_i , facteurs de pertes par couplage $\eta_{i,j}$ –, il est possible d'établir des bilans d'énergie. Par exemple, pour une structure composée de deux sous-systèmes, on a le schéma présenté figure I.4. Avec la relation de réciprocité $n_1 \eta_{1,2} = n_2 \eta_{2,1}$, le bilan énergétique donne pour le sous-système Σ_2 l'énergie modale \mathcal{E}_i suivante :

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \frac{\eta_{2,1}}{\eta_{1,2} + \eta_2} \quad (\text{I.50})$$

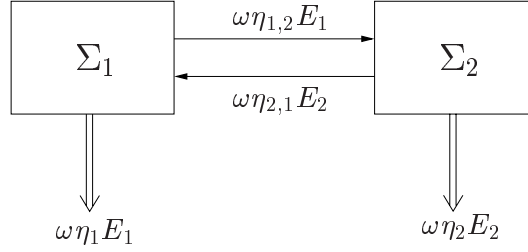


FIG. I.4: Exemple d'analyse SEA pour deux sous-structures

Or, la **SEA prédictive** fait fortement appel à une représentation propagative des sous-systèmes. Les indicateurs cités plus haut dépendent donc des caractéristiques des ondes se propageant dans la structure. A titre d'exemple, la densité modale pour un système isotrope vaut :

	1-D	2-D	3-D	
$n(\nu) =$	$\frac{L}{\pi c_g}$	$\frac{S\omega}{2\pi c_\varphi c_g}$	$\frac{V\omega^2}{2\pi^2 c_\varphi^2 c_g}$	(I.51)

où $c_\varphi = \frac{\omega}{k}$ est la vitesse de phase et $c_g = \frac{d\omega}{dk}$ la vitesse de groupe des ondes concernées. Il en est de même pour le calcul des facteurs de pertes par couplage qui font appel non seulement aux propriétés géométriques et mécaniques des liaisons mais aussi aux caractéristiques des ondes. Aussi est-il nécessaire, en SEA prédictive, de bien connaître l'équation de dispersion du milieu. Elle constitue en effet une *donnée* du problème.

Cependant, la SEA présente intrinsèquement une limitation concernant la répartition spatiale de l'énergie. En effet, elle utilise des valeurs moyennes en temps et en espace sur chaque sous-système. Ces moyennes engendrent une perte d'information, en particulier sur le plan de la localisation de l'énergie. Afin de pallier cet inconvénient majeur, une méthode locale a vu le jour à partir de la SEA ([11, 15, 19, 20, 23, 31]). Baptisée Méthode Énergétique Simplifiée, elle met en place des équations énergétiques issues des bilans de puissance locaux. La MES se base également sur une description propagative des comportements vibratoires et acoustiques et sur la relation intrinsèque entre flux de puissance \vec{I} et densité d'énergie W (loi de Biot) :

$$\vec{I} = c_g W \vec{n} \quad (\text{I.52})$$

Ainsi, dans le cas d'ondes planes, il est établi que la densité d'énergie associée est régie par une équation du type :

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \Delta W + \eta\omega W = \Pi_{\text{inj}} \quad (\text{I.53})$$

équation dans laquelle apparaissent les deux paramètres pertinents : c_g et η . D'autres modèles peuvent être formulés pour des ondes cylindriques ou sphériques ou pour des phénomènes couplés ces différents types d'ondes. Là encore la connaissance de l'équation de dispersion, à travers la vitesse de groupe c_g , est nécessaire.

L'utilisation de l'équation de dispersion du milieu n'est pas l'apanage des méthodes énergétiques. La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC [82]), par exemple, nécessite elle aussi la connaissance de l'équation de dispersion. D'autres approches à variables

cinématiques se basent également sur la connaissance précise des paramètres de propagation, parmi lesquelles on peut citer la méthode numérique dénommée *Wave Based Method* développée entre autres par Bareille [67]. Comme pour les éléments finis, cette approche numérique consiste à utiliser pour la description du champ solution, une base de fonctions de formes. Cependant, *a contrario* des éléments finis, ces fonctions de formes ne sont plus des polynômes mais une base d'ondes planes propagatives, solutions exactes de l'équation du mouvement homogène. Ainsi on passe outre le problème de discrétisation du maillage connu par la méthode des éléments finis. Le calcul des amplitudes se fait par interférences au niveau des frontières. L'intérêt de cette méthode est de constituer un problème *de taille invariante par rapport à la longueur d'onde*. Cependant, lors de la sélection des ondes propagatives utilisées pour la projection des champs, l'équation de dispersion est supposée connue. Cette fois-ci, il est nécessaire de connaître l'équation de dispersion *complète*, c'est-à-dire dépendant de la pulsation *et* de la direction de propagation.

I.2.3 Les méthodes d'identification des paramètres propagatifs

Identification de l'équation de dispersion

Dans le cas monodimensionnel, Mac Daniel [51] propose une méthode d'identification du nombre d'onde complexe basé sur un formalisme ondulatoire. Avec des conditions initiales identiquement nulles et une excitation en bruit blanc aux seules extrémités de la poutre, il montre qu'elle est le lieu de propagation de quatre ondes inhomogènes :

$$\hat{w}(x, \omega) = c_1(\omega)e^{ikx} + c_2(\omega)e^{-ikx} + c_3(\omega)e^{kx} + c_4(\omega)e^{-kx} \quad (\text{I.54})$$

avec (en notant m la masse linéique de la poutre)

$$k = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{E(1 - i\eta(\omega))I}} \quad (\text{I.55})$$

Il utilise expérimentalement une antenne de n accéléromètres, placés sur la poutre aux points $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Une écriture matricielle de l'équation I.54 estimée à chacune de ces positions fournit :

$$\begin{bmatrix} \hat{w}^{\text{mes}}(x_1, \omega) \\ \hat{w}^{\text{mes}}(x_2, \omega) \\ \vdots \\ \hat{w}^{\text{mes}}(x_n, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ikx_1} & e^{-ikx_1} & e^{kx_1} & e^{-kx_1} \\ e^{ikx_2} & e^{-ikx_2} & e^{kx_2} & e^{-kx_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{ikx_n} & e^{-ikx_n} & e^{kx_n} & e^{-kx_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(\omega) \\ c_2(\omega) \\ c_3(\omega) \\ c_4(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{I.56})$$

(où la notation ^{mes} signifie *mesurée*). Ainsi, à partir d'un nombre d'onde k donné, les amplitudes $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ peuvent être estimées par moindres carrés (simples ou doubles⁵). Pour juger de la validité du nombre d'onde k qu'on s'est initialement donné, une fonction d'erreur est calculée

⁵Pour un problème linéaire d'inconnues \mathbb{X} , posé sous la forme $\mathbb{Y} = \mathbb{M}\mathbb{X}$ avec \mathbb{M} matrice quelconque, la formule des moindres carrés simples fournit $\mathbb{X} = (\mathring{\mathbb{M}}\mathbb{M})^{-1}(\mathring{\mathbb{M}}\mathbb{Y})$ et la formule des moindres carrés doubles fournit $\mathbb{X} = \frac{1}{2} \left((\mathring{\mathbb{M}}\mathbb{M})^{-1}(\mathring{\mathbb{M}}\mathbb{Y}) + (\mathring{\mathbb{Y}}\mathbb{M})^{-1}(\mathring{\mathbb{Y}}\mathbb{Y}) \right)$.

en comparant au champ expérimental le champ reconstitué à partir des amplitudes trouvées :

$$\varepsilon^2(\mathcal{k}) = \frac{\sum_{i=1}^n |\hat{w}^{\text{mes}}(x_i, \omega) - \hat{w}(x_i, \omega)|^2}{\sum_{i=1}^n |\hat{w}(x_i, \omega)|^2} \quad (\text{I.57})$$

Ainsi, à tout nombre d'onde \mathcal{k} est associé un indice d'erreur qui juge de la capacité de ce nombre d'onde \mathcal{k} à représenter le champ expérimental. Il suffit alors d'utiliser un algorithme d'optimisation non linéaire pour minimiser l'erreur ε en faisant varier le paramètre \mathcal{k} . En répétant cet algorithme pour toutes les fréquences contenues dans l'excitation, l'équation de dispersion complexe est retrouvée. Mac Daniel utilise ces résultats principalement pour identifier l'amortissement η dans la poutre testée, grâce à la formule :

$$\eta = \left| \frac{\Im(\mathcal{k}^4)}{\Re(\mathcal{k}^4)} \right| \quad (\text{I.58})$$

Sa méthode permet d'identifier l'amortissement sur une large bande de fréquence, contrairement aux méthodes modales. Cette bande de fréquence est cependant limitée : du côté des basses fréquences, la longueur d'onde ne doit pas trop dépasser la longueur de la poutre. Ainsi, la première fréquence modale est une limite en dessous de laquelle la méthode est inefficace. Du côté des hautes fréquences, il s'agit d'avoir un bon rapport signal/bruit : les ondes ne doivent pas avoir la place d'être trop amorties. Pour connaître cette limite hautes fréquences, Mac Daniel construit une fonction d'erreur $\varepsilon'(\omega)$ qui stocke l'erreur résiduelle $\varepsilon(\mathcal{k}^{\text{opt}})$ (à la convergence de l'algorithme d'optimisation). Cet indicateur subit un saut à la fréquence de coupure de la méthode.

La méthode de Mac Daniel correspond aux méthodes temporelles vues à la section précédente (page 13). On reconnaît en effet, dans l'équation matricielle I.56, une écriture similaire à la formulation I.29 de la méthode ITD. Ces écritures matricielles consistent à écrire les résultats des mesures sous la forme du produit d'une matrice composée d'exponentielles multipliée par le vecteur des amplitudes de ces exponentielles. Pour ITD, la variable est le temps tandis que pour Mac Daniel, la variable est l'espace. On qualifiera donc sa méthode de *spatiale*. Les méthodes fréquentielles de la section précédente sont basées sur le passage dans le domaine fréquentiel grâce à la transformée de Fourier. Parallèlement ici, on peut former des méthodes basées sur le passage dans le domaine de Fourier, appelé *domaine des nombres d'onde* (*k-space*). Dans le cas bidimensionnel, ce domaine est un plan ; on parlera du *plan d'onde*. Les deux méthodes exposées dans ce qui suit sont des méthodes d'analyse du plan d'onde.

En ce qui concerne l'identification de l'équation de dispersion d'un milieu bidimensionnel, Ferguson [43] propose une méthode utilisant un vibromètre Laser à balayage, qui mesure le champ de vibration d'une portion de plaque plane. Cette portion de champ mesuré est choisie avec soin : elle doit être loin de la source ponctuelle utilisée pour exciter la plaque, et loin des bords de la plaque. Ainsi, on peut supposer qu'une seule direction de propagation transmet de l'énergie. L'utilisation d'une transformée de Fourier continue $2-D$, au lieu d'une transformée de Fourier discrète (à travers un algorithme FFT)⁶, permet de détecter précisément le nombre

⁶Les notions de transformées de Fourier Discrète ou Continue sont explicitées au chapitre II.3.

d'onde correspondant à cette propagation. La limitation de cette technique vient du fait que l'équation de dispersion n'est alors identifiée que dans une direction.

Dans le même ordre d'idée Williams [64] utilise une technique dérivée de l'holographie de champ proche (NAH) pour déterminer l'équation de dispersion d'une cavité cylindrique. La NAH est une méthode de mesure d'un champ vibratoire à partir du champ acoustique rayonné par la structure ([50, 63]). A partir de la mesure du champ proche rayonné par la structure, une procédure de rétropropagation utilisant l'espace des nombres d'onde et l'équation de Helmholtz permet de connaître la vitesse normale de la structure. Cette structure peut être plane ([61]) ou cylindrique ([62]). Williams [64], donc, utilise cette méthode de mesure pour déterminer l'équation de dispersion d'un tube de section circulaire. Il constate que sa mesure donne directement l'équation de dispersion, en fréquence et en espace. En particulier, toutes les directions de propagation sont examinées. Cependant, deux limitations sont à préciser. Tout d'abord l'amortissement interne n'est pas déterminé. Ensuite, et c'est là surtout la principale limitation, la nature périodique de la structure permet une utilisation efficace de l'algorithme FFT (qui suppose le champ périodique).

Le présent travail de thèse se veut une extension des techniques visant à identifier l'équation de dispersion de structures planes non périodiques ainsi que l'amortissement de celles-ci.

Identification de l'amortissement

Il serait absurde de présenter les méthodes d'identification liées aux modélisations moyennes et hautes fréquences (SEA, MES, ...) en omettant l'identification de l'amortissement. Celui-ci en effet, bien que ne présentant pas un caractère purement propagatif, suscite l'attention toute particulière de nombreuses publications. Le grand intérêt porté par la communauté scientifique sur l'amortissement est justifié par le rôle crucial qu'il joue dans la détermination des amplitudes vibratoires des structures.

Norton [26] rappelle les deux grandes techniques d'identification du facteur de perte énergétique η . La première est la méthode de la puissance injectée (*Power Injected Method* [36], PIM). Cette méthode est basée sur un bilan d'énergie, qui égalise la puissance injectée dans une structure à la puissance dissipée :

$$\Pi_{\text{inj}} = \eta\omega W \quad (\text{I.59})$$

Il insiste tout particulièrement sur le fait que la mesure de la puissance injectée doit être effectuée avec la plus grande rigueur, les résultats quant à l'amortissement étant très sensibles. Pour une excitation en bruit blanc, il conseille l'utilisation de l'interspectre pour estimer la puissance injectée, tandis que pour une excitation déterministe (sinus glissant par exemple), on préférera la mesure de la partie réelle de l'impédance. A titre d'exemple, on peut citer Bloss [37] qui mesure et compare l'amortissement de différentes vitres de voiture, et dont l'originalité vient de l'utilisation d'un vibromètre laser à balayage pour obtenir l'énergie portée par la structure. On remarquera néanmoins qu'il ne suit pas les recommandations de Norton puisqu'il utilise une excitation en bruit blanc et estime la puissance injectée à travers l'impédance au point

d'excitation. Des précisions sur l'utilisation de la méthode PIM sur un cas expérimental, avec cette démarche de Bloss, sont détaillées en Annexe D.

La seconde technique d'identification du facteur de perte énergétique citée par Norton est celle du temps de réverbération à 60 dB, T_{60} , qui est lié à l'amortissement η par la formule :

$$\eta = \frac{13,82}{\omega T_{60}} \quad (\text{I.60})$$

La structure doit être excitée par un bruit blanc, puis laissée libre (arrêt de la source). On aura donc intérêt à utiliser une excitation sans contact, par exemple acoustique ou électromagnétique (un contact entre la source coupée et la structure rendrait la mesure sensible à l'amortissement interne de la source). On pourrait être tenté de préférer une méthode d'excitation de type choc, mais Crocker [41] montre les difficultés liées à cette méthode, principalement celle d'exciter uniformément toutes les bandes de fréquence.

Une modification de cette méthode est mise en œuvre par Chaigne [40] pour valider divers modèles d'amortissement dans des plaques (couplage thermo-élastique, viscosité, radiation acoustique). L'excitation de la plaque est assurée par une source acoustique monochromatique accordée précisément sur une fréquence modale de la plaque, tandis que la mesure s'effectue grâce à un vibromètre laser. Ainsi, il a accès aux temps de réverbération non pas moyennés sur des bandes de fréquence mais précisément sur les modes de la plaque. Ses résultats montrent que les modèles d'amortissement utilisés rendent parfaitement compte de la dépendance fréquentielle du taux d'amortissement, sur un large panel de cas tests (aluminium, verre, fibre de carbone, épica).

Mais les deux méthodes de mesure de l'amortissement citées, – la méthode du temps de réverbération et la méthode de la puissance injectée – ne donnent pas les mêmes résultats, comme le constatent Bies [36] et Brown [39]. En effet, si on considère, sur une bande de fréquence, un amortissement modal très variable, seuls les modes peu amortis seront très résonants, et donc porteront beaucoup d'énergie. La méthode de la puissance injectée, basée sur l'énergie contenue dans la structure, ne sera sensible qu'aux faibles amortissements. Si on coupe la source, pour mettre en œuvre la méthode du temps de réverbération, les premiers instants de la décroissance seront pilotés par les modes décroissant le plus vite, c'est à dire les grands amortissements, tandis que la décroissance tardive sera gouvernée par les faibles amortissements. Sum [60] corrige un peu cette analyse, expliquant que pour la méthode de la puissance injectée, la mesure concerne les amortissements des modes qui dominent (en énergie) le champ de vibration. Or ceux-ci ne sont pas nécessairement les modes les moins amortis. D'après Ranky [56], quelle que soit la raison réelle qui fait différer les résultats des deux méthodes, c'est celle de la puissance injectée qui donne les résultats adéquats pour une analyse SEA. Dans le cas d'un amortissement constant d'un mode à l'autre, les deux méthodes donnent des résultats similaires.

Afin d'affiner un peu la méthode du temps de réverbération dans le cas d'amortissements modaux très variables, Norton [26, 52] propose de traiter le temps de décroissance avec une analyse temps-fréquence. Ainsi, on peut suivre l'évolution d'un pic donné, qui correspond à un mode, et identifier l'amortissement de chaque mode. De plus, cette méthode permet de mesurer d'éventuels couplages intermodaux, avec des transferts d'énergie entre modes. Mais

cette technique est délicate, les résultats étant très sensibles aux paramètres de l'analyse temps-fréquence (fréquence d'échantillonnage, pas d'avancement temporel, ...).

I.3 Conclusion

Dans le domaine des basses fréquences, la dynamique des structures est dominée par son comportement modal. Ceux-ci créent des pics importants et isolés dans les réponses fréquentielles des structures. L'identification revient alors à caractériser ces pics. De nombreuses méthodes existent. On les classe en général selon deux groupes, selon qu'elles soient temporelles ou fréquentielles. Cependant, alors que la fréquence augmente, les pics créés par les modes sont de plus en plus larges et de plus en plus rapprochés. L'identification modale devient très délicate. Dans ce domaine des forts recouvrements modaux, d'autres modèles prédictifs sont nécessaires. Si aucun ne semble aujourd'hui remporter tous les suffrages de la communauté scientifique, nombreux font appel à une vision propagative des phénomènes. La question de l'identification se trouve alors focalisée sur les paramètres de propagation. Si peu de références existent aujourd'hui dans ce domaine, on retiendra cependant deux types de méthodes. Le premier, représenté principalement par Mac Daniel [51], est dérivé des méthodes de Prony et s'appuie sur la description spatiale des ondes, à travers un exponentiel complexe. On parlera de méthode spatiale. Mais, pour l'instant, ce type de méthodes n'a été développé que pour des structures monodimensionnelles. Le chapitre suivant met en place une extension de cette méthode spatiale, à travers le développement de la *Single Frequency Space Domain*. Le second type de méthode d'identification, dont Ferguson [43] et Williams [64] sont les principaux représentants, s'appuie sur la description des vibrations à travers leur contenu spectral, c'est à dire en décomposant les champs dans l'espace des nombres d'onde. Le chapitre suivant propose une nouvelle méthode de ce type, baptisée méthode *Inhomogeneous Wave Correlation*. L'originalité de cette méthode réside dans l'utilisation d'ondes inhomogènes pour décrire le champ, ce qui permet de masquer l'effet des champs singuliers et de donner une indication sur l'amortissement structural.

Chapitre II

Identification des paramètres propagatifs des structures bidimensionnelles

Ce chapitre présente la mise en place de deux nouvelles méthodes visant l'identification de l'équation de dispersion et de l'amortissement spatial des structures $2-D$. Après une rapide mise en place du problème et des conventions d'écritures, se tient une description détaillée de la première de ces méthodes. Celle-ci travaille sur un champ monochromatique et directement dans le domaine spatial, d'où son nom de *Single Frequency Space Domain* (SFSD). C'est une adaptation dans le domaine spatial et en deux dimensions de la méthode temporelle ITD présentée dans le chapitre précédent. La méthode ainsi réalisée est une méthode de type Prony pour l'identification des nombres d'ondes. Elle est ensuite numériquement testée. Ses limitations sont discutées.

La troisième section du chapitre concerne la description de méthodes du plan d'onde, depuis la FFT jusqu'à une nouvelle méthode désignée IWC – *Inhomogeneous Wave Correlation*. Cette dernière est basée sur des hypothèses typiquement moyennes et hautes fréquences et semble être très prometteuse. Elle permet de construire une équation de dispersion à partir d'un champ vibratoire spatial. L'équation de dispersion obtenue dépend de la fréquence et de la direction. La méthode IWC offre entre autres l'avantage de s'affranchir par construction des variations singulières du champ spatial (champs proches), ce qui la rend en partie indépendante des conditions aux limites et d'excitation. L'équation de dispersion ainsi obtenue est ensuite exploitée. Divers modèles de plaque sont brièvement rappelés. Pour chacun de ces modèles (Love-Kirchhoff, Mindlin, cas isotrope, cas orthotrope), l'équation de dispersion théorique est présentée. L'identification des paramètres apparents s'obtient alors par traitement des équations de dispersion : celle identifiée par IWC et celle donnée par l'un des modèles. Ce traitement s'appuie sur une technique de moindres carrés. Ainsi, la méthode IWC couplée à cette méthode d'identification des paramètres permet de déterminer une plaque homogène équivalente à la structure d'origine. On peut parler d'homogénéisation adaptée au domaine des petites longueurs d'ondes.

La dernière partie s'attache à valider numériquement l'approche proposée ici. Pour ce faire, on s'intéresse en premier lieu aux cas des structures monodimensionnelles. Il semble en effet nécessaire de vérifier la pertinence de la méthode IWC dans ce cas. Les structures bidimensionnelles feront l'objet de nombreuses validations (expérimentales et numériques) dans les chapitres qui suivent.

II.1 Mise en place du problème

Lorsque la fréquence d'analyse augmente, les longueurs d'onde de vibration au sein de la structure diminuent. Du point de vue d'une onde, la structure devient grande, et l'influence des conditions aux limites est localisée. La plupart des points de la structure sont loin des conditions aux limites et l'équation du mouvement y est homogène. Quantitativement, le champ est donc composé majoritairement de fonctions solution de cette équation homogène, c'est-à-dire des ondes libres. On notera, pour une pulsation ω donnée :

$$\varphi_{\vec{k}}(x, y, t) = e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (\text{II.1})$$

$$\varphi_{k_x, k_y}(x, y, t) = e^{-i(\omega t - (k_x x + k_y y))} \quad (\text{II.2})$$

$$\varphi_{k, \theta}(x, y, t) = e^{-i(\omega t - k(x \cos \theta + y \sin \theta))} \quad (\text{II.3})$$

Pour passer de la formulation II.2 à la formulation II.3, on a besoin de la relation suivante :

$$\tan \theta = \frac{k_y}{k_x} \quad , \quad k_x \cdot \cos \theta > 0 \quad (\text{II.4})$$

Un champ harmonique de pulsation ω (dont la dépendance en ω est implicitement incluse dans le signe $\hat{}$) est donc écrit sous la forme :

$$\hat{w}(x, y) = \sum_{m=1}^n a_m e^{i(k_{m_x} x + k_{m_y} y)} = \sum_{m=1}^n a_m \hat{\varphi}_{k_{m_x}, k_{m_y}} \quad (\text{II.5})$$

de façon discrète, et

$$\hat{w}(x, y) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} a(\theta) e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\theta dk = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} a(\theta) \hat{\varphi}_{k, \theta} d\theta dk \quad (\text{II.6})$$

de façon continue.

Un autre point clef dans l'étude des vibrations est la prise en compte de l'amortissement structural. Celui-ci dépend fortement du modèle utilisé (comme le rappelle Lyon [21], p.154), et il n'est pas toujours aisé d'établir un lien rigoureux entre les différents amortissements des différents modèles. En effet certains modèles présentent des équivalences à fréquences pures (fréquences de résonances), alors que d'autres sont valides en bandes larges. Il convient alors de souligner les risques de confusion et d'interprétation incorrecte entre ces différents modèles. Avec le formalisme ondulatoire utilisé ici, le modèle d'amortissement le plus adapté est celui de

l'amortissement spatial, noté γ^1 , qui transforme les ondes propagatives en ondes inhomogènes :

$$k \longleftrightarrow \mathcal{k} = k(1 + i\gamma)$$

$$\hat{\varphi}_{\mathcal{k}_x, \mathcal{k}_y}(x, y) = e^{i(\mathcal{k}_x x + \mathcal{k}_y y)} \quad (\text{II.7})$$

$$\hat{\varphi}_{k, \gamma, \theta}(x, y) = e^{ik(1+i\gamma)(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad (\text{II.8})$$

L'équation II.8 fait implicitement appel à une hypothèse supplémentaire. En effet l'amortissement d'une onde est supposée être identique selon les deux directions x et y . Ceci amène les relations suivantes :

$$k = \sqrt{\Re(\mathcal{k}_x)^2 + \Re(\mathcal{k}_y)^2} \quad (\text{II.9})$$

$$\tan \theta = \frac{\Re(\mathcal{k}_y)}{\Re(\mathcal{k}_x)} \quad , \quad \cos(\theta) \cdot \Re(\mathcal{k}_x) > 0 \quad (\text{II.10})$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\Im(\mathcal{k}_x)}{\Re(\mathcal{k}_x)}\right)^2 + \left(\frac{\Im(\mathcal{k}_y)}{\Re(\mathcal{k}_y)}\right)^2} \quad (\text{II.11})$$

Dans ces expressions, le nombre d'onde et l'amortissement spatial sont laissés libres de varier aussi bien en fréquence qu'en direction de propagation θ . Les relations présentées dans cette section forment le socle de toute technique d'identification des paramètres d'identification. Il faut tout de même noter que les techniques recherchées ne s'intéressent absolument pas à l'amplitude des ondes, mais bien à leurs formes. Les questions d'unicité de représentation, évoquée au chapitre précédent, n'ont pas lieu d'être ici.

II.2 Méthode spatiale (*SFSD*)

Par analogie avec la méthode *Single-Station Time-Domain* (SSTD), extension de la méthode d'*Ibrahim Time Domain* (ITD), la méthode proposée ici travaille de façon harmonique dans le domaine spatial. Elle est donc baptisée *Single-Frequency Space-Domain* (SFSD)². Exposée de façon synthétique, la méthode ITD explore un champ à deux variables (position x et temps t). Par une réorganisation de mesures effectuées sur une grille uniforme (les avancements en x et en t sont constants), elle identifie ce champ à une suite de fonctions exponentielles en temps et quelconque en espace. La même démarche sera employée par la suite dans le domaine purement spatial.

¹Il convient de signaler à ce stade que la définition utilisée ici s'écarte légèrement de celle employée par Lyon dans son ouvrage de référence [21]. L'amortissement spatial γ y est défini en Nepers/m, tandis qu'ici, il est adimensionalisé par k .

²Pour l'identification des signaux temporels, on a à disposition les méthodes *temporelles* et les méthodes *fréquentielles*. Pour des signaux spatiaux comme c'est le cas ici, on construit par analogie des méthodes *spatiales* et des méthodes *du plan d'onde*. La variable temporelle est le temps t , tandis que la variable fréquentielle est la pulsation ω . La variable spatiale est la position x (ou la position (x, y)), tandis que la variable du plan d'onde est le nombre d'onde k (ou le vecteur d'onde (k_x, k_y)).

II.2.1 Description de la méthode

L'idée ici consiste à transposer l'algorithme ITD sur un champ doublement spatial, en substituant aux couples (position/temps) les couples (position x / position y). Ceci revient à mettre l'équation II.7 sous la forme :

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y}(x, y) = e^{i\mathbf{k}_x x} e^{i\mathbf{k}_y y} \quad (\text{II.12})$$

ce qui permet d'écrire le champ (équation II.5) sous la forme :

$$\hat{w}(x, y) = \sum_{m=1}^n a_m \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{m,x}}(x) e^{i\mathbf{k}_{m,y} y} \quad (\text{II.13})$$

On reconnaît formellement la formulation I.23 de la méthode ITD. Cette méthode impose donc que le champ soit connu sur une grille uniforme. On définit alors les suites $(x_i)_{i < N_1}$ et $(y_j)_{j < N_2}$:

$$x_i = x_0 + i \times \Delta x, \quad y_j = y_0 + j \times \Delta y \quad (\text{II.14})$$

Ceci permet de former les deux matrices \mathbb{X} et \mathbb{Y} :

$$\forall i \leq N_1, \forall j \leq N_2 - 1, \quad \mathbb{X}_{ij} = \hat{w}(x_i, y_j) \quad , \quad \mathbb{Y}_{ij} = \hat{w}(x_i, y_j + \Delta y) \quad (\text{II.15})$$

ce qui permet de calculer la matrice \mathbb{A} :

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} [(\mathbb{Y}^t \mathbb{X})(\mathbb{X}^t \mathbb{X})^{-1} + (\mathbb{Y}^t \mathbb{Y})(\mathbb{X}^t \mathbb{Y})^{-1}] \quad (\text{II.16})$$

dont les couples propres vérifient :

$$\forall m, \quad \mathbb{A} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{m,x}}(x_1) \\ \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{m,x}}(x_2) \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{m,x}}(x_{N_1}) \end{bmatrix} = e^{i\mathbf{k}_{m,y} \Delta y} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{m,x}}(x_1) \\ \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{m,x}}(x_2) \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{m,x}}(x_{N_1}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

La résolution d'un problème aux valeurs propres donne toujours des vecteurs propres connus à une constante multiplicative près. L'amplitude a_m de chaque onde, qui est une constante multiplicative devant la forme d'onde, n'est donc pas identifiée par la méthode. Elle a disparue dans la norme du vecteur propre. La première composante du vecteur d'onde est donc estimée par la valeur propre de la matrice \mathbb{A} . Quant au vecteur propre, chacune de ses lignes est reliée à la précédente par la relation :

$$\frac{\hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{m,x}}(x_{i+1})}{\hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{m,x}}(x_i)} = \frac{e^{i\mathbf{k}_{m,x} x_{i+1}}}{e^{i\mathbf{k}_{m,x} x_i}} = e^{i\mathbf{k}_{m,x} \Delta x} \quad (\text{II.18})$$

On a donc à disposition une grandeur liée au nombres d'onde recherchés. En notant $(\lambda^{(m)}, V^{(m)})$ les couples propres de la matrice \mathbb{A} , on peut calculer la moyenne et l'écart type de la relation II.18 :

$$\mu^{(m)} = \frac{1}{N_1 - 1} \sum_{i=1}^{N_1-1} \frac{V_{i+1}^{(m)}}{V_i^{(m)}} \quad (\text{II.19})$$

$$\sigma^{(m)} = \left(\frac{1}{N_1 - 1} \sum_{i=1}^{N_1-1} \left(\mu^{(m)} - \frac{V_{i+1}^{(m)}}{V_i^{(m)}} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{II.20})$$

Les deux composantes du vecteur d'onde sont données par les relations :

$$k_{my} = \frac{\ln(\lambda^{(m)})}{i\Delta y} \quad \text{et} \quad k_{mx} = \frac{\ln(\mu^{(m)})}{i\Delta x} \quad (\text{II.21})$$

D'après la relation II.18, l'écart type $|\sigma^{(m)}|$ devrait être nul. Ceci permet de mesurer la qualité de l'identification du vecteur d'onde k_m : si $|\sigma^{(m)}|$ est faible, l'identification est correcte tandis que pour $|\sigma^{(m)}|$ élevé, elle est mauvaise. La méthode SFSD élimine automatiquement les ondes incorrectes lorsque l'indice $|\sigma^{(m)}|$ est supérieur à l'unité. Ainsi, le problème soulevé avec la méthode ITD (*c.f.* page 15), portant sur la différenciation, parmi les ondes identifiées, entre les ondes du champ et les ondes modélisant le bruit, trouve une solution avec l'indicateur $|\sigma^{(m)}|$ de validité de l'onde identifiée.

Cependant un autre problème est soulevé : tandis que cette nouvelle méthode SFSD se situe par hypothèses dans le domaine des courtes longueurs d'onde (moyennes/hautes fréquences), elle n'identifie qu'un nombre fini et relativement faible d'ondes (= nombre de colonnes de mesures, soit à peu près la racine carrée du nombre de points de mesures). La méthode SFSD nécessite donc *à la fois* une longueur d'onde faible (hautes fréquences) *et* une densité modale faible (basses fréquences), ce qui la situe de fait à la frontière entre domaine modal et moyennes fréquences.

II.2.2 Etude de la méthode sur une simulation numérique

La méthode SFSD semble efficace, avec sa capacité à reconnaître les "bonnes" ondes des artefacts de calcul et des erreurs de mesure, tout en semblant limitée par le nombre des ondes présentes dans le champ. Qu'en est-il réellement ? La réponse à cette question est explorée grâce à la synthèse d'un champ, afin de contrôler parfaitement son contenu propagatif. Soit donc un champ synthétique $\hat{w}(x, y)$ donné sous la forme :

$$\hat{w}(x_i, y_j) = \sum_{m=1}^{\mathring{n}} \mathring{a}_m e^{i(\mathring{k}_{mx}\Delta x + j\mathring{k}_{my}\Delta y)} + b_{ij} \quad (\text{II.22})$$

Le symbole ($\mathring{}$) représente un paramètre connu, qui est la cible de la méthode SFSD. La grille est parfaitement uniforme sur 21×23 points, ce qui permet d'identifier au plus 22 ondes. $b(x_i, y_j) = b_{ij}$ représente un bruit de mesure simulé, complexe, gaussien centré sur 0 et d'écart type 10^{-4} m. Les paramètres cibles de chacune des ondes sont choisis aléatoirement avec une distribution uniforme :

$$\begin{aligned} \mathring{a} &\in [0 \ 1] + i[0 \ 1] \\ \mathring{k} &\in \left[\frac{1}{\Delta x} \quad \frac{\pi}{\Delta x} \right] \\ \mathring{\theta} &\in [0 \ 2\pi] \end{aligned}$$

tandis que l'amortissement $\hat{\gamma}$ est gaussien centré sur 1% et d'écart type 0,1%. Le nombre des ondes \hat{n} est paramétrique et variera de 0 à 30. Pour chaque valeur de \hat{n} , 1000 champs aléatoires II.22 sont testés avec la méthode SFSD (la convergence statistique est atteinte). Connaissant les ondes effectivement contenues dans le champ, il est possible de classer les ondes identifiées en deux groupes :

- 1 . Ondes correctement identifiées (—) : les paramètres (k_m, θ_m) de l'onde identifiée m sont proches des paramètres $(\hat{k}_{m'}, \hat{\theta}_{m'})$ d'une onde m' présente dans le champ ($\theta_m = \hat{\theta}_{m'} \pm 1,5^\circ$ et $k_m / \hat{k}_{m'} = 1 \pm 1\%$). On ne prend pas en compte la qualité de l'estimation de l'amortissement.
- 2 . Artefacts (—) : dans le cas contraire (l'onde identifiée est lointaine de toutes les ondes présentes dans le champ)

La figure II.1 indique les résultats statistiques de cette opération : les abscisses indiquent le nombre \hat{n} d'ondes présentes dans le champ. Les ordonnées représentent le nombre n des ondes identifiées rapporté à \hat{n} . Les niveaux de gris indiquent la probabilité (blanc pour 0, noir pour 1) de trouver, avec \hat{n} ondes présentes dans la champ, n ondes identifiées. La courbe bleue représente le nombre des ondes correctement identifiées (en moyenne statistique), la courbe rouge le nombre d'artefacts de la méthode (ces deux courbes sont rapportées au nombre \hat{n} d'ondes présentes dans le champ).

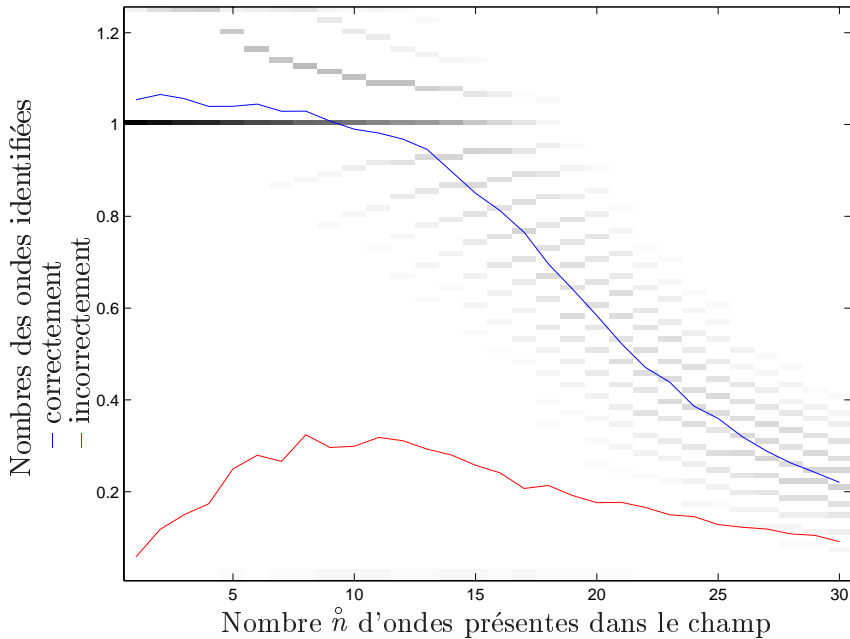


FIG. II.1: Résultats statistiques obtenus pour la SFSD

Pour une onde présente dans le champ ($\hat{n} = 1$), l'algorithme basé sur la SFSD trouve la plupart du temps la bonne onde. Parfois, il trouve deux ondes qui sont proches de l'onde présente dans le champ (la courbe bleu est à 105%). De temps en temps, il trouve aussi une onde incorrecte (courbe rouge à 5%).

Ce comportement se poursuit jusqu'à $\hat{n} = 11$ ondes présents dans le champ : les ondes présentes sont correctement identifiées, parfois en double (courbe bleue au dessus de l'unité),

tandis que le nombre des ondes incorrectes augmentent jusqu'à représenter le quart des ondes identifiées correctement (courbes rouges croissantes de 5% à 25%).

De $\hat{n} = 11$ à $\hat{n} = 22$ ondes présentes dans le champ, tandis que le nombre des ondes mal identifiées est presque stable (il passe de 25 à 20%), le nombre des ondes correctement identifiées d'effondre pour atteindre à peine 50%. Dans ces conditions, parmi les ondes identifiées, il y en a plus d'une sur trois qui est incorrecte, sans possibilité de savoir laquelle; de plus, l'algorithme, n'a identifié que la moitié des ondes présentes dans le champ.

Au delà de $\hat{n} = 22$, les nombres des ondes correctement identifiées et mal identifiées continue de chuter, ce qui pouvait être prévu puisque l'algorithme ne peut pas identifier plus de $N_2 - 1 = 22$ ondes.

II.2.3 Conclusion sur la SFSD

L'algorithme proposé semble donc être limité en nombre des ondes présentes dans le champ. Celui-ci doit être inférieur à *la moitié* du nombre de colonnes dans la grille de point de mesures. Une solution à ce problème, comme dans la méthode ITD, consisterait à faire varier le nombre de ces lignes (en particulier les augmenter). Mais cette voie semble sans issue : contrairement à la méthode ITD où ces points sont des mesures temporelles (un millier de points supplémentaires ne représentent qu'une fraction de seconde de mesure supplémentaire), les points dans SFSD sont des mesures spatiales beaucoup plus coûteuses en temps (la mesure d'un point supplémentaire dure environ 10 secondes). De plus, puisqu'il faut N_1 de l'ordre de N_2 (grille carrée), le nombre de points de mesure est égal *au carré* du nombre des ondes potentiellement identifiées. Toute augmentation du nombre des ondes potentiellement identifiées sera donc très coûteuses en termes de processus expérimental. Il est donc impossible d'envisager l'augmentation du nombre de points de mesure comme solution à la limitation du nombre des ondes identifiées par la SFSD.

Le nombre peu élevé des ondes présentes dans le champ est un problème très limitant. En effet, cette méthode était développée pour travailler sur des champs moyennes et hautes fréquences, mais cette limitation en nombre des ondes revient à utiliser la méthode dans le domaine modal, où les outils présentés dans la section I.1 sont plus performants et moins coûteux. Un dernier point convainquant d'abandonner cette méthode, est le fait qu'elle ne lève pas un problème soulevé par Ferguson [43] à propos de l'obtention de champ de mesures. D'après lui, *il est difficile d'obtenir des mesures de bonne qualité, sans bruit, [...] sur une grille spatiale uniforme*. Or, la méthode SFSD suppose acquises de telles mesures, puisqu'elle utilise une grille uniforme et ne permet pas de prendre en compte la qualité d'une mesure. L'investigation doit être menée dans une autre direction.

II.3 Méthodes du plan d'ondes (*k*-space)

Il existe peu de références quant à l'identification des nombres d'ondes dans les structures bidimensionnelles. On citera seulement Ferguson [43], qui, grâce à une transformée de Fou-

rier continue et une procédure de moindres carrés, identifie le nombre d'onde dominant dans une partie du champ d'une plaque. Cette méthode est donc limitée à l'identification d'une direction de propagation à la fois. De plus, elle est sensible aux singularités du champ spatial. La méthode développée ici vise en premier lieu l'identification des structures bidimensionnelles planes, mais il convient de noter qu'elle sera parfaitement adaptée aux champs monodimensionnels. La construction de la méthode généralise des notions classiques en traitement du signal, issues de la transformée de Fourier. On commence donc, pour des raisons de clarté, par exposer les différentes techniques déjà existantes.

II.3.1 Transformée de Fourier Discrète : DFT

Cette méthode est la première qui vienne à l'idée quand il s'agit d'explorer le contenu en k d'un champ spatial (de la même façon qu'elle permet d'explorer le contenu spectral d'un signal temporel). Sont rappelées ici les hypothèses et les limitations de ce calcul, mis en lumière de telle façon qu'il apparaisse comme la base de ce qui suivra.

(H1) : Le champ est connu sur une grille uniforme $(x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y)_{\substack{0 \leq i \leq N_1-1 \\ 0 \leq j \leq N_2-1}}$

(H2) : En dehors de cette grille, le champ est supposé $2D$ -périodique, à savoir :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}^2, \quad \hat{w}(i\Delta x, j\Delta y) = \hat{w}((i \setminus N_1)\Delta x, (j \setminus N_2)\Delta y) \quad (\text{II.23})$$

en notant \setminus le reste de la division euclidienne.

On montre alors que la famille des exponentielles de nombres d'onde

$$(k_{xp} = p\Delta k_x, k_{yq} = q\Delta k_y)_{\substack{0 \leq q \leq N_2-1 \\ 0 \leq p \leq N_1-1}}$$

avec $\Delta k_x = \frac{2\pi}{N_1\Delta x}$ et $\Delta k_y = \frac{2\pi}{N_2\Delta y}$ est une base de description de l'ensemble des fonctions complexes de l'espace. Autrement dit, on peut écrire le champ \hat{w} sous une unique forme :

$$\hat{w}(x_i, y_j) = \sum_{p=0}^{N_1-1} \sum_{q=0}^{N_2-1} \hat{w}(k_{xp}, k_{yq}) e^{i(k_{xp}x_i + k_{yq}y_j)} \quad (\text{II.24})$$

La transformation $\hat{w} \rightarrow \hat{\hat{w}}$, appelée transformée de Fourier discrète (DFT : Discrete Fourier Transform), a pour formulation :

$$\hat{\hat{w}}(k_{xp}, k_{yq}) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \hat{w}(x_i, y_j) e^{-i(k_{xp}x_i + k_{yq}y_j)} \quad (\text{II.25})$$

La DFT est bijective : toute l'information contenue dans le champ $\hat{w}(x_i, y_j)$ est contenue dans sa transformée $\hat{\hat{w}}(k_{xp}, k_{yq})$, et réciproquement. On pourra donc passer librement et dans les deux sens d'une fonction spatiale à sa transformée de Fourier discrète. Cependant la DFT est

confrontée à plusieurs problèmes³ qui limitent son utilisation. Ces problèmes peuvent se résumer comme suit :

- *Repliement (aliasing)* : Du fait de la discrétisation du champ \hat{w} , sa DFT est $\frac{2\pi}{\Delta x}$ -périodique :

$$\hat{w}(k_x, k_y) = \hat{w}(k_x + \frac{2\pi}{\Delta x}, k_y) = \hat{w}(k_x, k_y + \frac{2\pi}{\Delta y})$$

Cette propriété implique que si le champ contient un nombre d'onde k_x en dehors de $[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}]$ ou k_y en dehors de $[-\frac{\pi}{\Delta y}, \frac{\pi}{\Delta y}]$, cette onde apparaîtra à une mauvaise place dans la DFT.

- *Fenêtrage (leakage)* : Le champ \hat{w} étant connu sur une surface finie, une onde (k_x, k_y) unique, qui devrait apparaître dans la DFT comme une distribution de Dirac, apparaît sous la forme d'un sinus cardinal : l'épaisseur du Dirac s'élargit et des rebonds apparaissent (figure II.2).

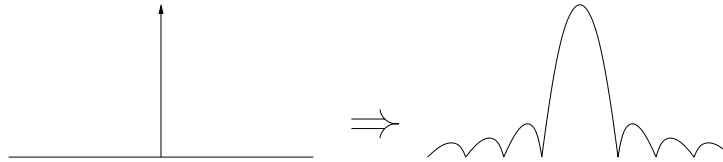


FIG. II.2: Schéma de l'effet du fenêtrage sur un sinus pur

- *Discrimination en k* : La composition en ondes du champ \hat{w} n'est connue que sur une grille du plan d'onde. Il est donc impossible de connaître précisément les vecteurs d'onde (faible discrimination en k).

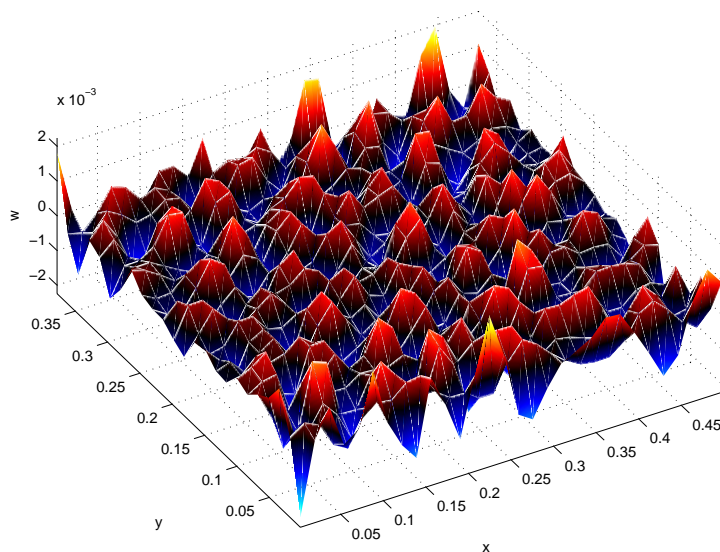
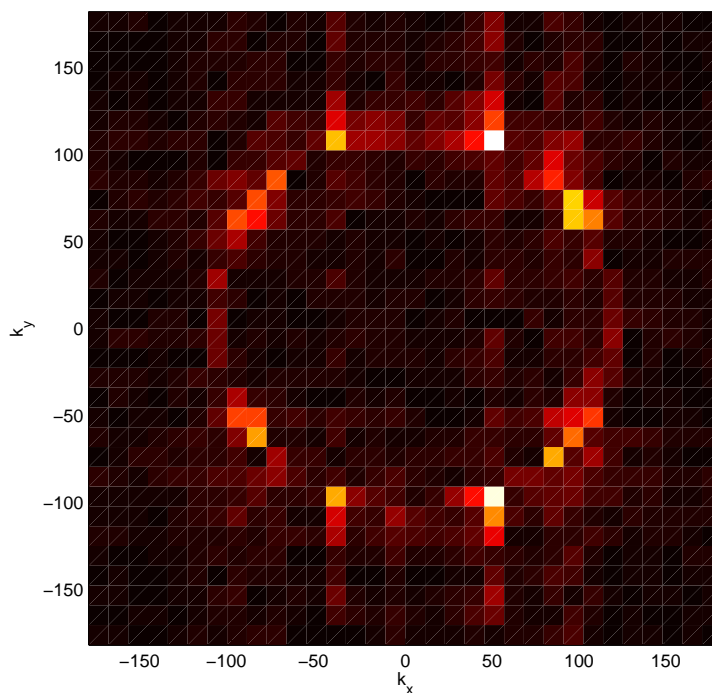
Elle présente également des avantages notables qu'il convient de souligner :

- *Bijektivité* : La DFT étant bijective, on peut construire une fonction réciproque, nommée IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform). Cette fonction permet par exemple de synthétiser un champ à partir de sa composition en k -space, ou de filtrer aisément un champ (un filtrage est une convolution ; dans le plan d'onde, cette convolution devient une simple multiplication).
- *Rapidité* : Il existe un algorithme rapide de calcul des DFT, la FFT (Fast Fourier Transform). Même si cet algorithme impose aux nombres de lignes et colonnes du champ d'être une puissance de 2, sa grande rapidité le rend très populaire.

Afin d'illustrer la progression DFT→CFT→IWC, le champ de la figure II.3 sera traité avec les trois méthodes. L'obtention de ce champ n'étant pas le propos de ce chapitre, elle ne sera pas explicitée ici (il s'agit d'un champ extrait de l'étude de la section III.3). La figure II.4 est le résultat de la DFT sur ce champ.

Dans cet exemple, la faible discrimination en k est évidente : les "pixels" sont grossiers, donc imprécis. De plus, on peut voir les effets du fenêtrage, qui crée des "lignes" autour des points à forte valeur (sur la ligne $k_x = 50$ rad/m en particulier).

³Repliement, fenêtrage, discrimination, bijectivité et rapidité sont les caractéristiques classiques de toute transformée de Fourier discrète. Pour plus d'informations sur ce sujet, on peut se référer à l'ouvrage de de MAX [22]

FIG. II.3: *Champ test pour la DFT, CFT et IWC*FIG. II.4: *Exemple de calcul de DFT*

II.3.2 Transformée de Fourier Continue : CFT

Cette méthode vise à augmenter la discrimination en k en estimant le contenu ondulatoire du champ pour n'importe quel couple (k_x, k_y) . Pour ce faire, l'hypothèse **(H2)** est abandonnée (le champ est nul en dehors des points de mesures). La définition de la transformée de Fourier

continue (Continuous Fourier Transform, CFT) est alors :

$$\widehat{w}(k_x, k_y) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \widehat{w}(x_i, y_j) e^{-i(k_x x_i + k_y y_j)} \quad (\text{II.26})$$

C'est formellement, à une constante multiplicative près, la même formulation que pour la DFT. Cette transformée n'est plus bijective, la CFT "inventant" de l'information. Mais elle est aussi précise que l'on souhaite, la transformée pouvant être évaluée pour n'importe quel nombre d'onde k . Le fait de ne pas utiliser la FFT permet de plus d'ajouter quelques souplesses dans le calcul de l'intégrale :

- (i) Il est possible d'ajouter une pondération sur les points, de telle sorte qu'un point mal mesuré affecte peu le résultat.
- (ii) Le champ n'a pas besoin d'être connu sur une grille uniforme. Dans ce cas, il est nécessaire, pour chaque point de mesure $(x_i, y_i)_{i \in \mathbb{N}_N}$ de connaître la surface dS_i qu'il représente.

Le point (i) est facile à traiter. En notant $\rho_i \in [0, 1]$ l'indice de qualité du point i , l'équation II.26 s'écrit :

$$\widehat{w}(k_x, k_y) = \sum_{i=1}^N \rho_i \widehat{w}(x_i, y_i) e^{-i(k_x x_i + k_y y_i)} \quad (\text{II.27})$$

En ce qui concerne le point (ii), une approximation de la surface représentée par un point peut être faite. On note $d(i, j)$ la distance euclidienne séparant deux points :

$$d(i, j)^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \quad (\text{II.28})$$

Il faut ensuite trier, pour chaque point i , les distances le séparant des points du maillage. Soit donc σ_i la permutation de \mathbb{N}_N qui trie ces distances entre le point i et tous les points du maillage :

$$\begin{aligned} \forall i, \sigma_i(1) &= i \\ d(i, \sigma_i(1)) &= 0 \leq d(i, \sigma_i(2)) \leq d(i, \sigma_i(3)) \leq \dots \leq d(i, \sigma_i(N-1)) \leq d(i, \sigma_i(N)) \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Une estimation de dS_i est alors la moyenne des quatre plus petites distances au carré :

$$dS_i = \langle d(i, \sigma_i(j))^2 \rangle_{j=2..5} \quad (\text{II.30})$$

La figure II.5 montre un exemple de maillage non uniforme. L'estimation de dS_i , notée sur la figure par un dégradé de couleurs et par la taille des carrés entourant chaque point, est pertinente : un point isolé a un carré de fortes dimensions et de couleur sombre (dS_i élevé) tandis qu'aux points de maillage dense, le carré est petit et de couleur claire (dS_i faible). De plus, afin de vérifier la cohérence de l'estimation, une estimation de l'aire (connue) de la surface est faite :

$$S = \iint_S dS \approx \sum_i dS_i \quad (\text{II.31})$$

Avec cette définition de dS_i , l'expression de la CFT donnée par l'équation II.26 s'écrit :

$$\widehat{w}(k_x, k_y) = \sum_{i=1}^N \rho_i \widehat{w}(x_i, y_i) e^{-i(k_x x_i + k_y y_i)} dS_i \quad (\text{II.32})$$

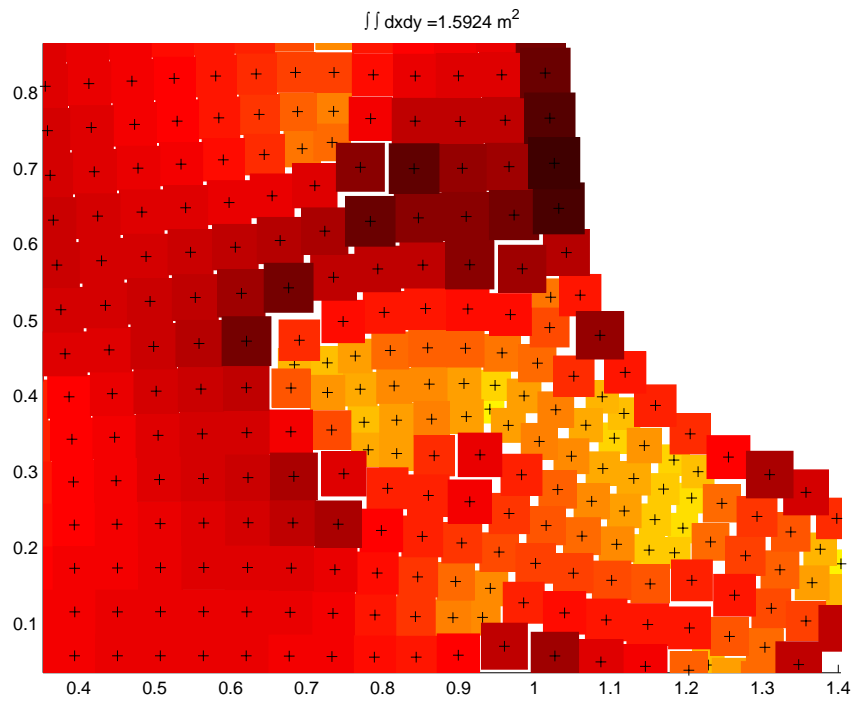


FIG. II.5: Estimation des surfaces élémentaires pour le calcul des intégrales de surface. La surface de chacun point (+) est symbolisée par un carré de la même surface. La couleur correspond elle aussi à la surface associée au point courant.

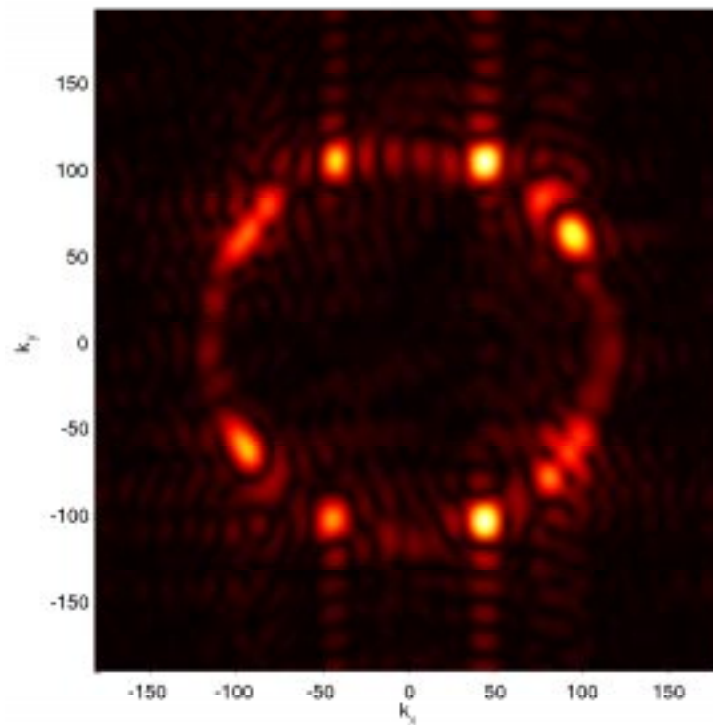


FIG. II.6: Exemple de calcul de CFT.

La CFT du champ de la figure II.3, qui sert d'exemple pour les trois méthodes du plan d'ondes, est montrée dans la figure II.6. Comme on s'y attend, le problème de discrimination en k a disparu, tandis que le problème de fenêtrage est toujours là (on voit clairement les "rebonds" autour des fortes valeurs de la CFT). L'utilisation d'un maillage quelconque semble être très intéressante, puisque la méthode devient très souple d'utilisation. Néanmoins, cette nouvelle distribution des points du maillage s'accompagne de l'apparition d'un nouveau problème : tandis qu'avec une grille uniforme le repliement est bien maîtrisé (on connaît précisément les périodes du plan d'onde, et donc ses axes de symétrie), le repliement avec un maillage quelconque devient lui aussi quelconque. Il y a donc danger de ne plus rien reconnaître dans le plan d'onde (aucun filtre anti-repliement ne peut être mis en place).

II.3.3 Corrélation avec des ondes inhomogènes : IWC

L'expression II.26, qui exprime la façon de calculer une CFT, est, à y bien regarder, une façon de comparer le champ \hat{w} avec une onde plane progressive de vecteur d'onde (k_x, k_y) . Pour tenir compte de l'amortissement, on veut comparer le champ à une onde inhomogène référencée (de formulation II.8). Cependant, l'énergie portée par l'onde $\hat{\varphi}_{k,\gamma,\theta}$ est différente de celle portée par l'onde $\hat{\varphi}_{k,\gamma',\theta}$ (même direction, même longueur d'onde, amortissement différent). Il faut donc rapporter la co-énergie des fonctions à leurs énergies respectives. C'est la transposition, dans le l'espace des nombres d'ondes, du calcul d'un MAC effectué dans le domaine modal (*c.f.* page 13) :

$$IWC(k, \gamma, \theta) = \frac{\left| \iint_S \hat{w} \cdot \hat{\varphi}_{k,\gamma,\theta}^* \, dx dy \right|}{\sqrt{\iint_S |\hat{w}|^2 \, dx dy \cdot \iint_S |\hat{\varphi}_{k,\gamma,\theta}|^2 \, dx dy}} \quad (\text{II.33})$$

où $*$ désigne le conjugué d'une grandeur complexe. La quantité $IWC(k, \gamma, \theta)$ représente la contribution de l'onde $\hat{\varphi}$ dans le champ \hat{w} , c'est à dire la quantité d'énergie portée par cette onde, rapportée à l'énergie totale contenue dans le champ. Avec $\gamma = 0$, ce calcul est exactement, à une constante près, un calcul de CFT. Les intégrales doubles sont calculées de la même manière que pour la CFT, c'est-à-dire avec estimation des surfaces élémentaires dS_i et prise en compte d'un indice ρ_i de qualité de la mesure :

$$IWC(k, \gamma, \theta) = \frac{\left| \sum_N \rho_i \hat{w}(x_i, y_i) \cdot \hat{\varphi}_{k,\gamma,\theta}^*(x_i, y_i) \, dS_i \right|}{\sqrt{\sum_N \rho_i |\hat{w}(x_i, y_i)|^2 \, dS_i \cdot \sum_N \rho_i |\hat{\varphi}_{k,\gamma,\theta}(x_i, y_i)|^2 \, dS_i}} \quad (\text{II.34})$$

La IWC est soumise aux mêmes limitations que la CFT :

- *Repliement* : Du fait du maillage non uniforme, le repliement éventuel est non maîtrisé.
- *Fenêtrage* : Le fenêtrage brouille le plan d'onde
- *Bijektivité* : L'opération n'est pas bijective; on ne peut pas construire de "IWC inverse".

La transformée IWC est une fonction $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, qu'on peut donc difficilement représenter. C'est pourquoi il est nécessaire de sélectionner certaines ondes au détriment d'autres. On cherche

à identifier le comportement du milieu, à travers son équation de dispersion. D'après les modèles classiques de plaques planes (modèles qui seront explicités en détails par la suite), l'équation de dispersion, à ω fixé, est une bijection entre k et θ . Ainsi à ω et θ fixés, on ne recherche donc qu'une onde. Cette recherche s'effectue par la maximisation de la fonction $(k, \gamma) \mapsto IWC(k, \gamma, \theta)$. Cependant, une attention particulière doit être apportée à la recherche de ce maximum. En effet, à cause du fenêtrage, le comportement de cette fonction est fortement non monotone. La recherche est donc prévue en trois temps :

1) à $\gamma = 0$ fixé. Cela revient à trouver le maximum de la CFT sur un rayon, c'est à dire à θ fixé. C'est ici qu'apparaît clairement l'effet de fenêtrage, comme le montre l'exemple de la figure II.7. C'est pourquoi un algorithme de type dichotomie, qui se focalise sur les meilleurs k trouvés, est d'abord adopté.

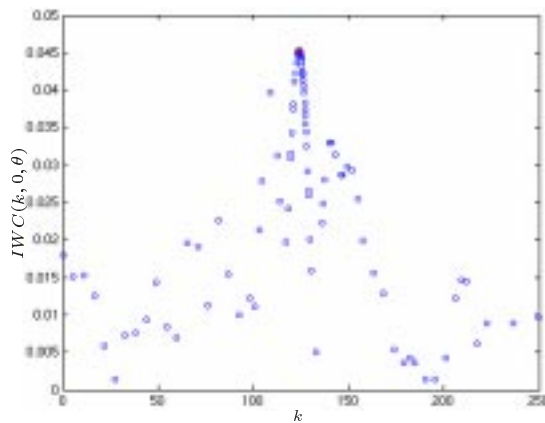


FIG. II.7: Première recherche de (k, γ) , avec $\gamma = 0$ fixé.

2) k étant fixé sur la valeur trouvée à la première étape, on cherche le meilleur amortissement γ qui fait correspondre l'onde φ au champ dans cette direction. Cette fonction est beaucoup plus lisse, mais le même algorithme que celui de la première étape est utilisé (figure II.8).

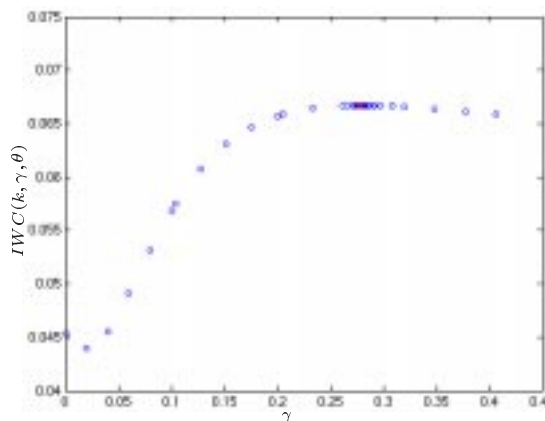


FIG. II.8: Deuxième recherche de (k, γ) , avec k fixé à la valeur trouvée à l'étape 1.

3) Autour du couple (k, γ) ainsi trouvé, un algorithme de gradient est utilisé pour affiner la recherche (figure II.9). Ainsi, pour n'importe quelle direction θ , on peut identifier les

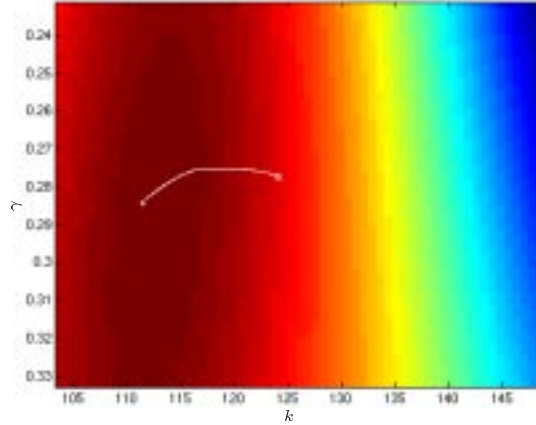


FIG. II.9: Troisième recherche de (k, γ) , par le gradient, autour de (k, γ) identifié aux deux premières étapes.

paramètres de propagation de l'onde, à savoir $(k(\theta), \gamma(\theta))$.

On fait alors varier l'angle θ sur un échantillonnage angulaire $(\theta_i = (i - 1) \frac{2\pi}{N_\theta})_{1 \leq i \leq N_\theta}$. Pour chaque θ_i , le calcul précédent est appliqué, ce qui identifie un couple de fonctions $(k(\theta), \gamma(\theta))$ sur l'échantillonnage angulaire $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}_{N_\theta}}$. Dans le cadre du comportement dynamiques moyennes fréquences exposé dans le chapitre précédent, on peut supposer qu'une grande majorité de directions θ portent de l'énergie. Cependant pour les autres directions, l'algorithme arrive tout de même à identifier des ondes, qui risquent d'être incorrectes. L'algorithme est alors affiné en éliminant dans deux cas particulier les ondes identifiées :

- si la corrélation $IWC(k(\theta_i), \gamma(\theta_i), \theta_i)$ est trop basse (ici $< 35\%$ du maximum de IWC^4 , maximum au sens des angles), ce qui signifierait que l'onde porte très peu d'énergie;
- si l'amortissement de l'onde est trop fort (ici $\gamma(\theta_i) > 1$), ce qui signifierait que l'onde ne transporte pas d'énergie (elle est suramortie ou évanescence).

On notera par la suite \mathbb{I}_θ l'ensemble des indices i des directions de propagation restant après cette élimination. On a donc :

$$\forall i \in \mathbb{I}_\theta, \quad IWC(k(\theta_i), \gamma(\theta_i), \theta_i) > .35 IWC_{\max} \quad \text{et} \quad \gamma(\theta_i) < 1$$

Le deuxième critère de sélection permet d'éliminer automatiquement la contribution du champ proche. Or celui-ci provient des conditions aux limites et de la source; on peut donc s'attendre, grâce à ce critère, à ce que *cette méthode d'identification ne dépende ni de la source ni des conditions aux limites*. Ce point très important sera vérifié expérimentalement dans la suite du mémoire. Ce point distingue également la méthode IWC des travaux antérieurs. De

⁴Cette valeur seuil de 35% est un paramètre de la méthode qui a été fixé suite à une étude numérique. Cette valeur s'est imposée car elle laissait suffisamment d'ondes dans la discrétisation des angles tout en éliminant les valeurs considérées comme incorrectes.

plus, le premier critère de sélection élimine les directions portant peu d'énergie. Afin d'avoir un ensemble \mathbb{I}_θ d'ondes identifiées assez grand, il est donc important d'avoir beaucoup de directions de propagation. Ceci revient à dire qu'on a une forte densité modale, c'est-à-dire qu'on se place à moyenne ou haute fréquence. Cet algorithme est donc dédié à l'analyse moyennes et hautes fréquences.

Seules les ondes propageant suffisamment d'énergie sont ainsi sélectionnées. On peut alors représenter les deux fonctions angulaires $k(\theta)$ et $\gamma(\theta)$ (figure II.10 pour l'exemple), échantillonnées sur un ensemble $(\theta_i)_{i \in \mathbb{I}_\theta}$. On notera par la suite $k_i = k(\theta_i)$ et $\gamma_i = \gamma(\theta_i)$ les identifications dans les directions $(\theta_i)_{i \in \mathbb{I}_\theta}$. Bien sûr, ce résultat IWC n'a de valeur qu'après comparaison des figures II.4, II.6 et II.10.

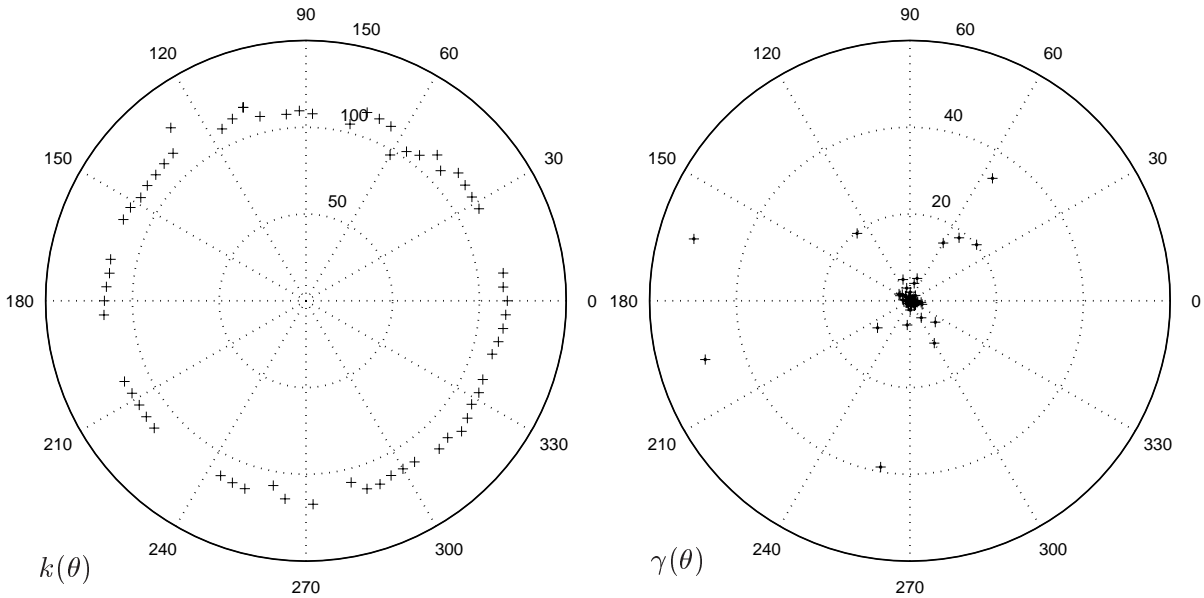


FIG. II.10: Exemple de calcul IWC

Il convient de préciser que l'algorithme IWC aboutit à des amortissements spatiaux aussi bien négatifs que positifs. Bien que paraissant anormal (un amortissement négatif modélise une onde progressive dont l'amplitude augmente, ce qui est physiquement incorrect), ce comportement n'a été ni expliqué ni contraint à disparaître. Considérant qu'il s'agissait juste d'une convention de signe pour la propagation, l'algorithme IWC prend la *valeur absolue* de l'amortissement $|\gamma|$.

Afin de résumer la description de la méthode fournie dans cette section, un schéma de l'algorithme développé (on suppose que la fonction IWC est une fonction de trois paramètres réels (θ, k, γ) qui renvoie la corrélation (entre 0 et 1) correspondante à l'équation II.33) est proposé :

```

% Construction de deux fonctions  $\theta \rightarrow k$  et  $\theta \rightarrow \gamma$  de candidats :
Pour  $\theta_i$  variant de 0 à  $2\pi$ 
    trouve  $k1$  /  $IWC(\theta_i, k1, 0) = \max_{(k)}(IWC(\theta_i, k, 0))$ 
    trouve  $\gamma1$  /  $IWC(\theta_i, k1, \gamma1) = \max_{(\gamma)}(IWC(\theta_i, k1, \gamma))$ 
    trouve  $(k_i, \gamma_i)$  autour de  $(k1, \gamma1)$  /  $IWC(\theta_i, k_i, \gamma_i) = \max_{(k, \gamma)}(IWC(\theta_i, k, \gamma))$ 
fin pour
% Repérage du maximum de la IWC :
 $IWC_{max} \leftarrow \max_{(i)}(IWC(\theta_i, k_i, \gamma_i))$ 
% Elimination des mauvais candidats :
 $listeOK \leftarrow [ ]$ 
Pour  $\theta_i$  variant de 0 à  $2\pi$ 
    Si  $\gamma_i < 1$ 
        Si  $IWC(\theta_i, k_i, \gamma_i) > 35\%IWC_{max}$ 
             $listeOK \leftarrow [ listeOK \ i ]$ 
        fin si
    fin si
fin pour

```

Les deux fonctions $\theta \rightarrow k$ et $\theta \rightarrow \gamma$ sont alors connues sur les couples (θ_i, k_i) et (θ_i, γ_i) pour i dans la liste des sélectionnés $listeOK$ (qui correspond à l'ensemble \mathbb{I}_θ , défini page 43). Les fonctions ne sont donc connues que sur une discrétisation *non uniforme* de l'intervalle $[0 \ 2\pi]$. La fonction $\theta \rightarrow k$ est l'équation de dispersion identifiée dans les direction $(\theta_i)_{i \in \mathbb{I}_\theta}$. Cette fonction est traitée dans la section suivante afin d'estimer les paramètres mécaniques apparents.

II.4 Modèles de plaques ; équation de dispersion

La section précédente a permis d'identifier, pour une structure donnée, une fonction $k(\omega, \theta)$ appelée équation de dispersion. Or il existe un certain nombre de modèles de plaques qui permettent l'établissement analytique d'une telle équation. Cette section présente ces modèles analytiques. La section suivante aura pour but de confronter l'équation de dispersion trouvée par la méthode IWC à celle d'un modèle choisi, et ainsi d'identifier les paramètres mécaniques apparents du modèle correspondants à la structure testée. Fortement inspirée de l'ouvrage de Graff [18], cette section présente d'abord le modèle classique de Reissner-Mindlin, puis sa simplification qui donne le modèle de Love-Kirchhoff. Est ensuite présenté le modèle orthotrope correspondant au modèle de Love-Kirchhoff.

II.4.1 Modèles analytiques pour l'équation de dispersion

La théorie de la flexion des plaques remonte à la fin du 19^{ème} siècle avec le modèle de Love [75] basé sur les hypothèses de Kirchhoff. Rayleigh [28] puis Timoshenko [83] approfondissent ce modèle en ajoutant des effets d'inertie en rotation et de cisaillement, et finalement Reissner [80]

et Mindlin [76] parachèvent le modèle pour lui donner sa forme actuelle.

Hypothèses et champ de déplacement : Le modèle de Reissner-Mindlin fait tomber deux hypothèses du modèle de Love-Kirchhoff : 1) les sections droites, au repos perpendiculaires à la fibre neutre de la plaque, *ne* restent *pas* normales à la fibre neutre. 2) L'inertie en rotation *n'est pas* négligée. Par contre, de même que dans l'ancien modèle, la contrainte σ_z , dans la direction transversale, est nulle (devant s'annuler sur les deux surfaces extérieures de la plaque, et celle-ci étant fine, elle est supposée nulle partout). Le champ de déplacement, quant à lui, est supposé de la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= -z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= -z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

où u et v sont les déplacements dans le plan, w le déplacement transverse, ϕ_x et ϕ_y les rotations des sections par rapport à la fibre neutre (*c.f.* fig.II.11).

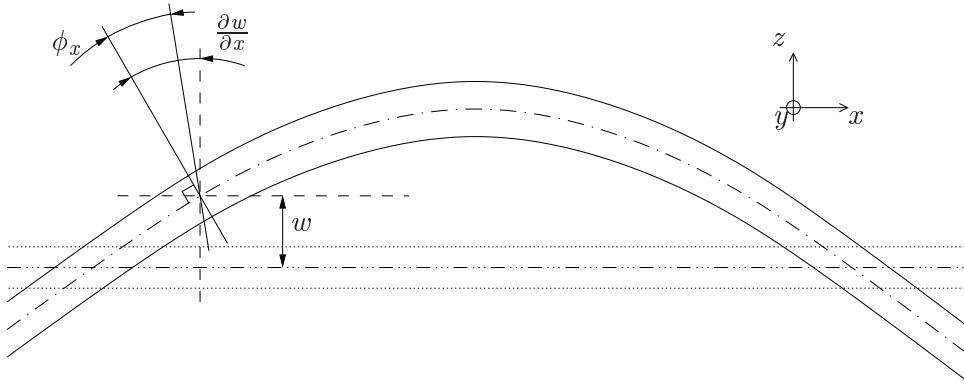


FIG. II.11: *Champ de déplacement dans la théorie de Reissner-Mindlin*

Relations contraintes-déformations : D'après le système II.35, les déformations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{z}{2} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \left(\phi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \left(\phi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

Avec les hypothèses de Kirchhoff, le modèle de Love considère que $\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_x$ et $\frac{\partial w}{\partial y} = \phi_y$ ce qui implique en particulier que les cisaillements transverses ε_{xz} et ε_{yz} sont nuls. La loi de Hooke, décrivant le comportement d'un matériau linéaire, élastique et isotrope, s'écrit⁵ :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \tilde{E} & \nu\tilde{E} & \nu\tilde{E} & 0 & 0 & 0 \\ \nu\tilde{E} & \tilde{E} & \nu\tilde{E} & 0 & 0 & 0 \\ \nu\tilde{E} & \nu\tilde{E} & \tilde{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \vec{\varepsilon} \quad \text{avec}^5 \quad \tilde{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (\text{II.37})$$

Fonctions d'énergies : L'énergie potentielle de déformation est, pour un volume V , donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{\sigma} : \vec{\varepsilon} \, dV \quad (\text{II.38})$$

Ce qui donne, avec le champ de déformations II.36 et la loi constitutive II.37, et après intégration sur l'épaisseur $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$:

$$U = \frac{1}{2} \int_S D \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 \right) \right] + \kappa^2 Gh \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right)^2 \right] dS \quad (\text{II.39})$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ est le moment d'inertie en flexion de la section droite. κ^2 est un facteur qui corrige l'hypothèse qui suppose les contraintes σ_{xz} et σ_{yz} constantes dans l'épaisseur ; en effet, celle-ci est en contradiction avec leur nullité sur les faces extérieures de la plaque. La valeur numérique de κ^2 , semblant dépendante du coefficient de Poisson ν , et autour de 0,8, reste sujette à caution et continue de faire couler de l'encre.

L'énergie cinétique, quant à elle, s'écrit (en utilisant le signe $\dot{(\)}$ pour la dérivée partielle par rapport au temps) :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) \, dV \quad (\text{II.40})$$

soit, en utilisant le champ II.36 et après intégration sur l'épaisseur :

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_S \left(\dot{w}^2 + \frac{h^2}{12} (\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2) \right) dS \quad (\text{II.41})$$

⁵Le problème de l'apparition du coefficient de Poisson dans le module de Young apparent (quand on passe d'une poutre à une plaque, E est remplacé par \tilde{E}) est un problème très délicat étudié récemment par Norris [79]. Il conclut qu'on peut prendre en compte un terme de transition entre la poutre et la plaque, terme qui dépend fortement *et* des dimensions de la plaque *et* du modèle utilisé pour la plaque (Mindlin, Kirchhoff, ...).

Principe de Hamilton : Le principe de Hamilton appliqué aux énergies II.39 et II.41 donne directement l'équation du mouvement d'une plaque libre sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} \left((1-\nu)\nabla^2\phi_x + (1+\nu)\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial\phi_y}{\partial y} \right) \right) - \kappa^2 Gh \left(\phi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\phi}_x &= 0 \\ \frac{D}{2} \left((1-\nu)\nabla^2\phi_y + (1+\nu)\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial\phi_y}{\partial y} \right) \right) - \kappa^2 Gh \left(\phi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\phi}_y &= 0 \\ \kappa^2 Gh \left(\nabla^2 w - \frac{\partial\phi_x}{\partial x} - \frac{\partial\phi_y}{\partial y} \right) - \rho h \ddot{w} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

Equation de dispersion : On cherche des solutions en *ondes planes*, c'est à dire de la forme, pour une fonction χ :

$$\chi(\vec{x}, t) = \chi_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (\text{II.43})$$

Les fonctions exponentielles formant une base de l'espace des fonctions (c'est en particulier une famille libre), la pulsation ω et le vecteur d'onde \vec{k} sont donc communs à toutes les fonctions de l'espace : les rotations (ϕ_x, ϕ_y) et le déplacement w ont même fréquence et même longueur d'onde. Cette forme des solutions permet de passer dans l'espace des fréquences et des nombres d'ondes, grâce aux relation :

$$\frac{\partial}{\partial x} = ik_x \quad \frac{\partial}{\partial y} = ik_y \quad \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Et pour plus de clarté dans l'exposé, les notations suivantes sont adoptées :

$$\begin{aligned} A^- &= \frac{D(1-\nu)}{2\rho h} & A^+ &= \frac{D(1+\nu)}{2\rho h} & A &= A^+ + A^- = \frac{D}{\rho h} \\ B &= \kappa^2 \frac{G}{\rho} & a &= \frac{h^2}{12} \end{aligned}$$

Le système II.42 se met alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} -A^- k^2 - A^+ k_x^2 - B + a\omega^2 & -A^+ k_x k_y & iBk_x \\ -A^+ k_x k_y & -A^- k^2 - A^+ k_y^2 - B + a\omega^2 & iBk_y \\ -iBk_x & -iBk_y & -Bk^2 + \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x^0 \\ \phi_y^0 \\ w^0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.44})$$

Les solutions non identiquement nulles sont obtenues par annulation du déterminant du système :

$$(-A^- k^2 - B + a\omega^2) \left[(A^+ + A^-) B k^4 - (A^+ + A^- + aB) \omega^2 k^2 + (a\omega^2 - B) \omega^2 \right] = 0 \quad (\text{II.45})$$

Cette équation, qui relie le vecteur d'onde k et la pulsation w , est l'*équation de dispersion*. C'est une équation d'ordre 3 en k^2 . Dans les milieux à comportement symétrique, l'équation de dispersion est toujours en k^2 : pour une solution k_1 donnée, le vecteur d'ondes $-k_1$ est aussi solution. Il s'agit en fait du même type d'onde, l'une se propageant dans un sens et l'autre dans l'autre sens. Les plaques épaisses de Mindlin admettent donc trois types d'ondes :

- Les deux premiers types d'ondes sont coupés à $\omega_c^2 = 12 \frac{\kappa^2 G}{\rho h^2}$. En dessous de cette pulsation, ces ondes sont *évanescentes*, c'est-à-dire à vecteur d'ondes imaginaire pur, avec une décroissance exponentielle et pas d'oscillations. Les vecteurs propres associés permettent de connaître la forme de ces ondes. La composante verticale est très faible : il s'agit en fait d'ondes faisant tourner les sections sans modifier la hauteur de la fibre neutre. Ce ne sont donc pas des ondes de flexion.
- Le troisième type d'onde n'est pas coupé. L'équation de dispersion pour cette onde est :

$$k^2 = \frac{(A + aB)\omega^2 + \sqrt{(A - aB)^2\omega^4 + 4AB\omega^2}}{2AB} \quad (\text{II.46})$$

soit, en notant $\tilde{G} = \kappa^2 G$ et $\tilde{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$:

$$k^2 = \frac{(\tilde{E} + \tilde{G})\omega^2 + \sqrt{(\tilde{E} - \tilde{G})^2\omega^4 + \tilde{E}\tilde{G}^2 \frac{48}{\rho h^2}\omega^2}}{2 \frac{\tilde{E}\tilde{G}}{\rho}} \quad (\text{II.47})$$

Comportements asymptotiques ; modèle de Love-Kirchhoff : En basses fréquences, on retrouve l'équation de dispersion des plaques minces, avec le modèle de Love-Kirchhoff :

$$Dk^4 \underset{0}{\sim} \rho h \omega^2 \quad (\text{II.48})$$

En hautes fréquences, cette onde de flexion se transforme en onde de cisaillement (au facteur correctif κ^2 près) :

$$\kappa^2 G k^2 \underset{+\infty}{\sim} \rho \omega^2 \quad (\text{II.49})$$

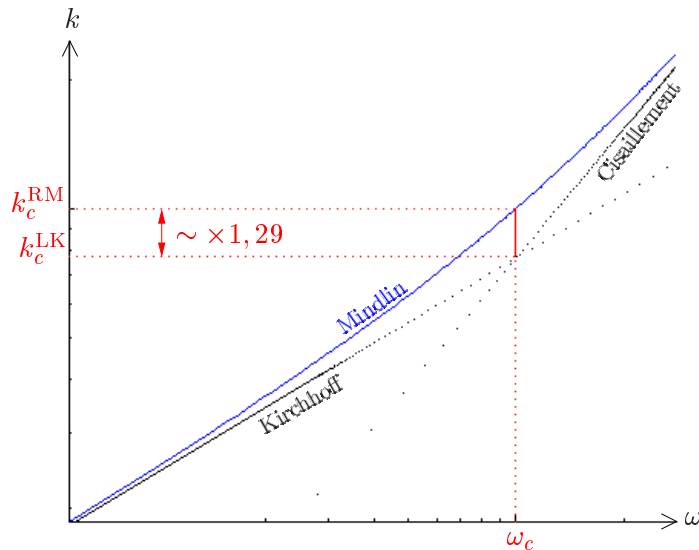


FIG. II.12: Equation de dispersion d'une plaque épaisse (Reissner-Mindlin)

La figure II.12 présente en échelles logarithmiques l'équation de dispersion du modèle de Mindlin (en bleu) et ses deux asymptotes (en noir, modèle de flexion de Love-Kirchhoff et onde de cisaillement). On peut préciser les rapports qu'il existe entre ces modèles :

- Le modèle de Kirchhoff et l'onde de cisaillement se croisent pour $\omega_c^2 = \frac{\kappa^4 G^2 h}{\rho D}$ (comparaison Cisaillement/Flexion \times Cisaillement/Inertie Massique).
- A cette fréquence de coupure, l'écart entre les modèles de Mindlin et de Kirchhoff vaut :

$$\text{avec } \alpha = \frac{\kappa^2(1-\nu)}{2}, \quad \frac{k_c^{\text{RM}}}{k_c^{\text{LK}}} = \sqrt{\frac{1 + \alpha + \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4}}{2}} \quad (\text{II.50})$$

Le gain apporté par le modèle de Mindlin vis-à-vis du modèle de Kirchhoff est donc limité aux hautes fréquences et pour les plaques très épaisses. L'utilisation de ce modèle sera donc exceptionnelle, réservée à des cas bien particuliers. Dans tout ce qui suit, on n'utilisera que le modèle de Love-Kirchhoff.

II.4.2 Equation de dispersion d'une plaque orthotrope

Isotropie : L'équation de dispersion pour une plaque isotrope est donc, avec le modèle de Love-Kirchhoff (avec $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$) :

$$Dk^4 = \rho h \omega^2 \quad (\text{II.51})$$

Orthotropie quelconque : Pour un matériau orthotrope bidimensionnel, le comportement mécanique est régi par cinq paramètres : E_x le module d'Young dans la direction x , E_y le module d'Young dans la direction y , ν_x le coefficient de Poisson de $x \rightarrow y$, G le module de cisaillement dans le plan et ρ la masse volumique. On retrouve le coefficient de Poisson $y \rightarrow x$ par la formule $\nu_x E_y = \nu_y E_x$. La loi de Hooke II.37 (qui a perdu les lignes et colonnes 3, 5 et 6 du fait du modèle de Kirchhoff, dans lequel $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$), s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y} & \frac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ \frac{\nu_x E_y}{1-\nu_x\nu_y} & \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

L'équation de dispersion devient :

$$\frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)} k_x^4 + \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)} k_y^4 + \frac{h^3}{12} \left(\frac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y} + \frac{\nu_x E_y}{1-\nu_x\nu_y} + 4G \right) k_x^2 k_y^2 = \rho h \omega^2 \quad (\text{II.53})$$

(On retrouve bien le modèle isotrope avec $E_x = E_y = E$ et $G = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu}$.) En posant :

$$D_x = \frac{h^3}{12} \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}, \quad D_y = \frac{h^3}{12} \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}, \quad D_{xy} = \frac{h^3}{12} \left(\frac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y} + \frac{\nu_x E_y}{1-\nu_x\nu_y} + 4G \right)$$

on obtient l'équation :

$$D_x k_x^4 + D_y k_y^4 + D_{xy} k_x^2 k_y^2 = \rho h \omega^2 \quad (\text{II.54})$$

En coordonnées polaires, cette équation devient :

$$k^4(\theta) (D_x \cos^4(\theta) + D_y \sin^4(\theta) + D_{xy} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)) = \rho h \omega^2 \quad (\text{II.55})$$

Orthotropie elliptique : Afin de simplifier l'équation II.54, on peut faire une hypothèse quant à la valeur du module de cisaillement. En effet, :

$$\text{si } G = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{E_x E_y} - \nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} \quad \text{alors } D_{xy} = 2\sqrt{D_x D_y}$$

et l'équation II.54 se factorise en :

$$\left(\sqrt{D_x} \cdot k_x^2 + \sqrt{D_y} \cdot k_y^2 \right)^2 = \rho h \omega^2 \quad (\text{II.56})$$

Ce type d'orthotropie sera appelé *orthotropie elliptique*⁶. En coordonnées polaires, cette équation devient :

$$k^4(\theta) \left(\sqrt{D_x} \cos^2(\theta) + \sqrt{D_y} \sin^2(\theta) \right)^2 = \rho h \omega^2 \quad (\text{II.57})$$

Autres cas de figure : Dans les cas plus compliqués, deux possibilités sont envisagées :

– Le module de rigidité en flexion, constant dans le modèle de Love-Kirchhoff, est rendu variable avec la fréquence. Ceci donne alors l'équation de dispersion suivante :

- dans le cas isotrope :

$$D(\omega) k^4 = \rho h \omega^2 \quad (\text{II.58})$$

- dans le cas orthotrope elliptique :

$$k^4(\theta) \left(\sqrt{D_x(\omega)} \cos^2(\theta) + \sqrt{D_y(\omega)} \sin^2(\theta) \right)^2 = \rho h \omega^2 \quad (\text{II.59})$$

- dans le cas orthotrope quelconque :

$$k^4(\theta) \left(D_x(\omega) \cos^4(\theta) + D_y(\omega) \sin^4(\theta) + D_{xy}(\omega) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \right) = \rho h \omega^2 \quad (\text{II.60})$$

– On ne s'intéresse qu'à la relation de dispersion elle-même, dans une direction donnée. La construction d'un modèle devient hors de propos :

$$k_\theta : \omega \longmapsto k_\theta(\omega) \quad (\text{II.61})$$

Les modèles présentés ci-dessus doivent être confrontés aux résultats de la méthode IWC afin d'en extraire les paramètres pertinents. C'est l'objet de la section suivante.

II.5 Construction des paramètres mécaniques apparents

Cette section présente une méthode d'“homogénéisation” adaptée au domaine des moyennes et hautes fréquences. A partir d'hypothèses hautes fréquences (méthode IWC), on construit un modèle simple dont le comportement dans l'espace des nombres d'ondes s'apparente à celui

⁶On trouve parfois la valeur $D_{xy} = \sqrt{D_x D_y}$, considérée comme valide dans la plupart des cas. Cependant, cette valeur n'apportant pas de simplification de l'équation de dispersion, elle ne sera pas particularisée (elle rentrera dans la catégorie “orthotropie quelconque”).

de la structure initiale. La construction des paramètres apparents de ce modèle – à travers ses caractéristiques dynamiques (D_x, ρ, \dots) – fait l’objet de cette section. Pour une plaque en flexion, c’est le rapport $\tilde{D} = \frac{D}{\rho h}$ qui pilote la dépendance entre la pulsation ω et le nombre d’onde k (*c.f.* section II.4). C’est donc cette “rigidité dynamique” qu’on se propose de reconstruire. L’homogénéisation est complétée par la donnée d’une épaisseur h de plaque équivalente. On en déduit alors une densité volumique apparente ρ connaissant la masse totale de la structure M_{tot} ($\rho = \frac{M_{\text{tot}}}{S \cdot h}$). La détermination des modules apparents est liée d’abord à la forme des équations de dispersion identifiées et au modèle que l’on souhaite leur associer.

II.5.1 Modèle isotrope

Dans le cas du modèle de plaque isotrope de Love-Kirchhoff (*c.f.* page 50), l’équation de dispersion s’écrit (équation II.51) :

$$Dk^4 = \rho h \omega^2$$

Par définition, le comportement d’une plaque isotrope ne dépend pas de la direction. Le nombre d’onde k et l’amortissement γ ne doivent donc pas dépendre de l’angle θ . On prendra alors la moyenne, sur les directions identifiées, du nombre k et de l’amortissement γ , soit :

$$k = \langle k_i \rangle_{i \in \mathbb{I}_\theta} \quad (\text{II.62})$$

$$\gamma = \langle \gamma_i \rangle_{i \in \mathbb{I}_\theta} \quad (\text{II.63})$$

La rigidité dynamique vaut donc :

$$\tilde{D} = \frac{\omega^2}{k^4} \quad (\text{II.64})$$

La donnée de \tilde{D} permet de décrire complètement le comportement de la structure étudiée. Pour un matériau plus complexe mais toujours isotrope, cette rigidité dynamique peut dépendre de la variable ω .

II.5.2 Modèle d’orthotropie elliptique

Dans le cas orthotrope elliptique du modèle de Love-Kirchhoff (*c.f.* page 51), l’équation de dispersion, exprimée dans le repère d’orthotropie (les coordonnées polaires de ce repère s’écriront avec le signe $'$), s’écrit :

$$k'^4(\theta') \left(\sqrt{D_x} \cos^2(\theta') + \sqrt{D_y} \sin^2(\theta') \right)^2 = \rho h \omega^2$$

soit, en notant θ_\perp l’angle d’orthotropie, c’est-à-dire la direction d’un axe d’orthotropie mesuré dans le repère initial :

$$k^4(\theta) \left(\sqrt{\tilde{D}_x} \cos^2(\theta - \theta_\perp) + \sqrt{\tilde{D}_y} \sin^2(\theta - \theta_\perp) \right)^2 = \omega^2 \quad (\text{II.65})$$

Les paramètres recherchés sont alors $\left(\theta_\perp, d_x = \sqrt{\tilde{D}_x}, d_y = \sqrt{\tilde{D}_y} \right)$.

Angle d'orthotropie θ_\perp : Par définition de l'orthotropie, la droite portée par le vecteur \vec{u}_{θ_\perp} est axe de symétrie du comportement. On doit donc avoir :

$$\forall \theta, \quad k(\theta - \theta_\perp) = k(-\theta - \theta_\perp), \quad \text{d'où} \quad k(\theta) = k(-\theta - 2\theta_\perp) \quad (\text{II.66})$$

D'où l'idée de calculer la fonction d'intercorrélation $\mathcal{R}(\Delta\theta)$ suivante :

$$\mathcal{R}(\Delta\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\theta)k(-\theta - \Delta\theta)d\theta \quad (\text{II.67})$$

On a, d'après l'équation (II.66) :

$$\mathcal{R}(\Delta\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\theta)k(\theta + 2\theta_\perp - \Delta\theta)d\theta \quad (\text{II.68})$$

qui est donc maximal pour $\Delta\theta = 2\theta_\perp$. On trouve donc un angle principal d'orthotropie θ_\perp en recherchant le maximum de la fonction d'intercorrélation des fonctions $k(\theta)$ et $k(-\theta)$, atteint pour $\Delta\theta_{\max} = 2\theta_\perp$. L'implémentation numérique de cette recherche mérite quelques explications. Cherchant un angle d'orthotropie dans $[0 \ \pi]$, la fonction d'intercorrélation \mathcal{R} sera calculée sur l'intervalle $[0 \ 2\pi]$ ($\Delta\theta_{\max} = 2\theta_\perp$). Ce résultat va donc concerner les valeurs de k sur $[-2\pi \ 2\pi]$. Il faut donc commencer par doubler la taille des vecteurs k_i et θ_i en posant :

$$\forall i \in \mathbb{I}_\theta, \quad \theta_{-i} = \theta_i - 2\pi \quad (\text{II.69})$$

$$k_{-i} = k_i \quad (\text{II.70})$$

De plus, il faut se rappeler que la méthode IWC n'a sélectionné que certaines ondes : dans certaines directions $(\theta_i)_{i \notin \mathbb{I}_\theta}$, le nombre d'onde n'est pas connu. Afin de pouvoir calculer $\mathcal{R}(\Delta\theta)$ pour n'importe quel $\Delta\theta$, il faut sur-échantillonner la fonction k , par exemple par une méthode d'interpolation linéaire. La précision sur l'angle d'orthotropie sera double de celle de ce sur-échantillonnage ($\theta_\perp = \frac{1}{2}\Delta\theta_{\max}$). Ceci complète le processus de recherche de la direction apparente d'orthotropie.

Rigidités dynamiques en flexion \tilde{D}_x, \tilde{D}_y : Pour trouver les rigidités en flexion de la plaque orthotrope équivalente, un indice d'erreur est calculé à partir de l'équation (II.65) et des identifications $(k_i)_{i \in \mathbb{I}_\theta}$ de $k(\theta)$. Soit ε défini par :

$$\varepsilon = \sum_{i \in \mathbb{I}_\theta} \left(d_x \cos^2(\theta_i - \theta_\perp) + d_y \sin^2(\theta_i - \theta_\perp) - \frac{\omega}{k_i^2} \right)^2 \quad (\text{II.71})$$

Les paramètres recherchés (d_x, d_y) étant linéaires dans l'expression mise au carré, il est aisé de calculer les valeurs optimales au sens des moindres carrés. Afin d'alléger les écritures, il est nécessaire de définir les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum & \text{ remplace } \sum_{i \in \mathbb{I}_\theta} \\ c_i & \text{ remplace } \cos(\theta_i - \theta_\perp) \\ s_i & \text{ remplace } \sin(\theta_i - \theta_\perp) \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

L'équation (II.71) devient :

$$\varepsilon = \sum \left(d_x c_i^2 + d_y s_i^2 - \frac{\omega}{k_i^2} \right)^2 \quad (\text{II.73})$$

Dans un premier temps, le gradient de cette erreur est mis sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varepsilon = 2 \cdot \begin{bmatrix} \sum c_i^4 & \sum c_i^2 s_i^2 \\ \sum c_i^2 s_i^2 & \sum s_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} \sum c_i^2 \frac{\omega}{k_i^2} \\ \sum s_i^2 \frac{\omega}{k_i^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.74})$$

Or, le minimum de cette erreur est atteint lorsque s'annule son gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varepsilon(d_x, d_y) = 0 \quad (\text{II.75})$$

d'où

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum c_i^4 & \sum c_i^2 s_i^2 \\ \sum c_i^2 s_i^2 & \sum s_i^4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum c_i^2 \frac{\omega}{k_i^2} \\ \sum s_i^2 \frac{\omega}{k_i^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.76})$$

Ainsi, le calcul puis l'inversion d'une matrice (2×2) donne directement les rigidités en flexion de la plaque orthotrope elliptique équivalente (la meilleure au sens des moindres carrés). Les trois paramètres d'orthotropie ($\tilde{D}_x = d_x^2$, $\tilde{D}_y = d_y^2$, θ_\perp) ont donc été retrouvés à partir des couples $(\theta_i, k_i)_{i \in \mathbb{I}_\theta}$.

II.5.3 Modèle d'orthotropie non elliptique

Dans le cas orthotrope non elliptique du modèle de Love-Kirchhoff (*c.f.* page 50), l'équation de dispersion s'écrit (équation II.55), dans le repère d'orthotropie (coordonnées (k', θ')) :

$$k'^4(\theta') (D_x \cos^4(\theta') + D_y \sin^4(\theta') + D_{xy} \cos^2(\theta') \sin^2(\theta')) = \rho h \omega^2$$

soit, en notant θ_\perp l'angle d'orthotropie, c'est-à-dire la direction d'un axe d'orthotropie mesuré dans le repère initial :

$$k^4(\theta) \left(\tilde{D}_x \cos^4(\theta - \theta_\perp) + \tilde{D}_y \sin^4(\theta - \theta_\perp) + \tilde{D}_{xy} \cos^2(\theta - \theta_\perp) \sin^2(\theta - \theta_\perp) \right) = \omega^2 \quad (\text{II.77})$$

Les paramètres recherchés sont $(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y, \tilde{D}_{xy}, \theta_\perp)$.

Angle d'orthotropie θ_\perp : La même méthode que pour l'orthotropie elliptique est adoptée (recherche du maximum de la fonction d'intercorrélacion entre $k(\theta)$ et $k(-\theta)$).

Rigidités en flexion : Un indice d'erreur est fabriqué à partir de l'équation II.77 :

$$\varepsilon = \sum_{i \in \mathbb{I}_\theta} \left(\tilde{D}_x \cos^4(\theta_i - \theta_\perp) + \tilde{D}_y \sin^4(\theta_i - \theta_\perp) + \tilde{D}_{xy} \cos^2(\theta_i - \theta_\perp) \sin^2(\theta_i - \theta_\perp) - \frac{\omega^2}{k_i^4} \right)^2 \quad (\text{II.78})$$

Les mêmes notations que précédemment (équations II.72) sont utilisées ici. Le minimum de l'indice d'erreur est atteint à l'annulation du gradient, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} \tilde{D}_x \\ \tilde{D}_y \\ \tilde{D}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum c_i^8 & \sum c_i^4 s_i^4 & \sum c_i^6 s_i^2 \\ \sum c_i^4 s_i^4 & \sum s_i^8 & \sum c_i^2 s_i^4 \\ \sum c_i^6 s_i^2 & \sum c_i^2 s_i^4 & \sum c_i^4 s_i^4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum c_i^4 \frac{\omega^2}{k_i^4} \\ \sum s_i^4 \frac{\omega^2}{k_i^4} \\ \sum c_i^2 s_i^2 \frac{\omega^2}{k_i^4} \end{bmatrix} \quad (\text{II.79})$$

Les quatre paramètres d'orthotropie $(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y, \tilde{D}_{xy}, \theta_\perp)$ ont donc été retrouvés à partir des couples $(\theta_i, k_i)_{i \in \mathbb{I}_\theta}$.

II.5.4 Conclusion

On a donc vu qu'à partir d'un champ de vibration monochromatique, la méthode IWC permet de trouver, pour un ensemble discret et non maîtrisé de directions θ , le nombre d'onde et l'amortissement dans une structure plane. On construit en particulier une fonction $k(\theta)$, pour une pulsation donnée. Selon que cette fonction exhibe un comportement uniforme, elliptique, ou non elliptique, on peut, grâce à une procédure de moindres carrés, trouver les paramètres mécaniques d'un modèle de Love-Kirchhoff équivalent. Pour chaque pulsation, on peut donc construire une rigidité dynamique \tilde{D} (ou des rigidités dynamiques avec un angle d'orthotropie). Ces rigidités peuvent être constantes vis à vis de la pulsation (modèle de Love-Kirchhoff classique), ou ne pas l'être ($\tilde{D}(\omega)$). La méthode sera validée aussi bien numériquement qu'expérimentalement dans le cas bidimensionnel dans les chapitres qui suivent. Cependant, afin d'en apprécier les potentialités, on propose dans la section suivante une étude numérique dans le cas monodimensionnel.

II.6 Validation dans le cas monodimensionnel

Dans cette section on se donne un champ spatial monodimensionnel. Celui-ci est synthétisé selon plusieurs approches – propagatives et modales. La synthèse de ce champ permet de modéliser un grand nombre de cas de figure. Une adaptation monodimensionnel de la méthode IWC lui est alors appliquée. Les comparaisons entre les ondes utilisées lors de la synthèse et les ondes identifiées par IWC sont fournies et commentées.

II.6.1 Synthèse ondulatoire

Dans son article sur la dualité approche modale / approche ondulatoire, Langley [74] représente n'importe quel champ 1D sous la forme suivante :

$$w(x) = A_0 e^{i\mathcal{k}(x-x_0)} \frac{(1 + R_1 e^{2i\mathcal{k}x_0})(1 + R_2 e^{2i\mathcal{k}(L-x)})}{1 - R_1 R_2 e^{2i\mathcal{k}L}} \quad (\text{II.80})$$

où A_0 est une amplitude, x_0 la position de la source, R_1 et R_2 les coefficients de réflexion en amplitude (de module 1), et L la longueur du milieu de propagation. Le nombre d'onde \mathcal{k} est

complexe avec $k = k(1+i\gamma)$ (*c.f.* page 31). En réalité, un tel champ peut être mis sous la forme :

$$w(x) = A_0 e^{i k x} + B_0 e^{-i k x} \quad (\text{II.81})$$

Il faut préciser qu'en fait, cette formulation n'est correcte que loin des singularités, c'est-à-dire qu'elle néglige la contribution du champ proche et n'est valide que si le domaine ne contient pas de source. Un tel champ est synthétisé avec des paramètres aléatoires⁷. La figure II.13 en est un exemple. Une centaine de champs aléatoires sont synthétisés puis identifiés par une version

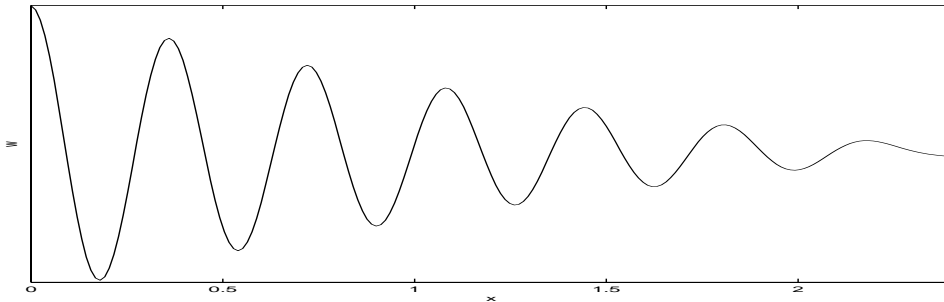


FIG. II.13: Exemple de champ synthétisé par la formule II.80

simplifiée de la méthode IWC. La corrélation des fonctions est calculée sur un grand ensemble de couples (k, γ) , définis sur une grille uniforme. Le maximum est trouvé directement parmi ces valeurs. La figure II.14 (gauche) montre le résultat pour le nombre d'onde k . La correspondance

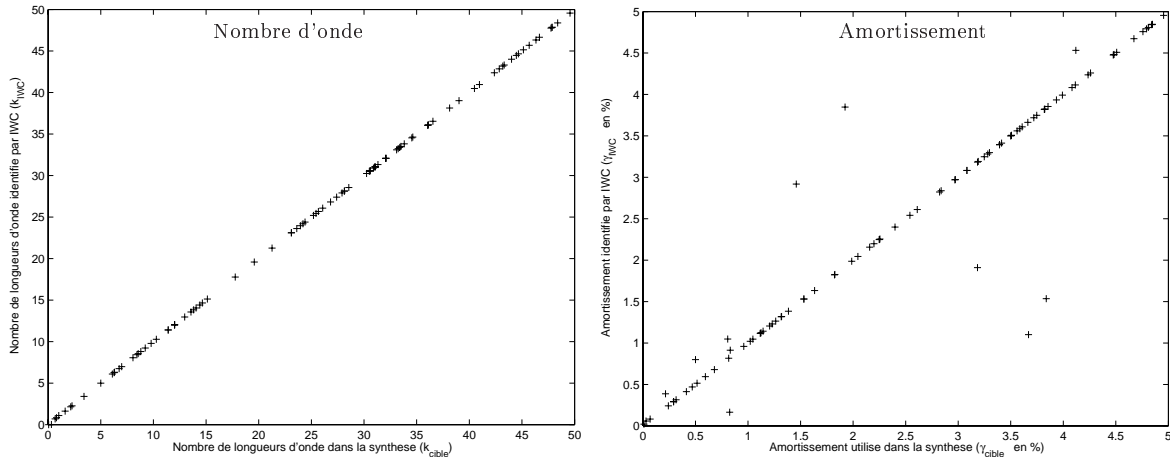


FIG. II.14: Résultats de recherche de k et γ sur le champ obtenu par synthèse ondulatoire.

entre le nombre d'onde utilisé dans la formule II.80 et le nombre d'onde identifié par la IWC est parfaite. De même la figure II.14 (droite) indique que l'algorithme IWC est valide aussi pour l'identification de l'amortissement γ , à quelques exceptions près.

⁷ Tous les paramètres sont choisis aléatoirement (selon une loi uniforme) dans un intervalle donné : $L \in [1 \ 10]$ m, $|R_1| = |R_2| = 1$, $\arg(R_1, R_2) \in [0 \ 2\pi]^2$, $x_0 \in L \times]0 \ 1[$, $k \in \frac{2\pi}{L} \times [0 \ 50]$, ce qui équivaut à avoir entre 0 et 50 longueurs d'ondes dans la poutre, $\gamma \in [0 \ 0, 2]$.

II.6.2 Synthèse modale

On s'intéresse ici à la synthèse du champ d'une poutre par la formulation modale (*c.f.* chapitre I.1). Dans le cas appuyée-appuyée par exemple, la solution modale s'écrit (tronquée⁸ au mode m_{\max} , dont la fréquence est 9 fois supérieure à la fréquence excitée) :

$$w(x) \approx A_0 \sum_{m=1}^{m_{\max}} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 - k^4} \quad (\text{II.82})$$

Comme pour la synthèse ondulatoire, ce champ modal est synthétisé avec les mêmes paramètres aléatoires (exemple figure II.15), puis testé par la méthode IWC simplifiée (figure II.16). A

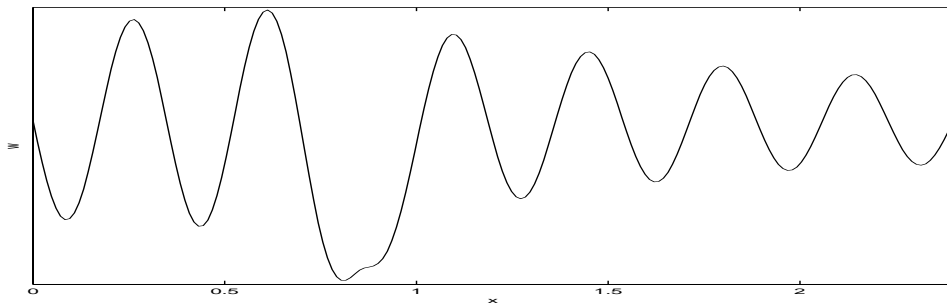


FIG. II.15: Exemple de champ synthétisé par l'équation II.82

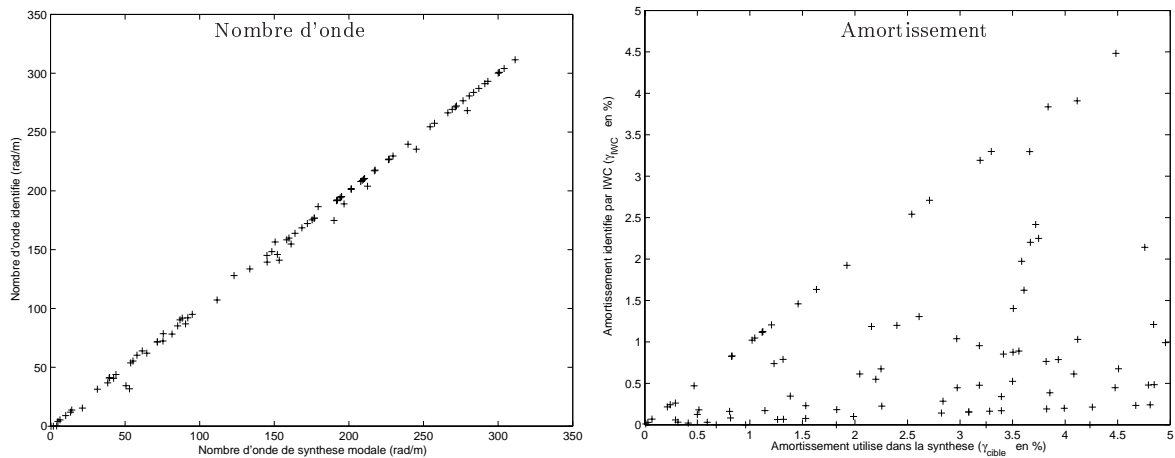


FIG. II.16: Résultats de recherche de k et γ sur le champ obtenu par synthèse modale.

gauche, les résultats pour k demeurent excellents. A droite, les résultats de l'identification IWC sur le champ modal pour l'amortissement γ sont quant à eux plutôt décevants; la majorité du temps, la méthode IWC n'arrive pas à identifier correctement l'amortissement. Elle le sous-estime. Quelles différences existe-t-il entre les deux champs qui puissent expliquer que l'identification de l'amortissement ne soit pas la même? Elles sont au nombre de deux. La première est l'absence de la source dans le champ ondulatoire (formule II.80). La seconde est l'absence du champ proche (termes en e^{kx} et e^{-kx}) dans le champ ondulatoire.

⁸En réalité, la troncature modale n'influe pas sur le résultat. Des tests ont même été effectués sur un champ obtenu par synthèse modale avec prise en compte du noyau statique (voir l'annexe A page 175). Les résultats IWC sont les mêmes avec ou sans cette correction.

II.6.3 Synthèse modale, absence de source

Afin de ne plus prendre en compte la source, on réduit le domaine d'intégration de la IWC à l'espace compris entre la source et le second appui (figure II.17). Les résultats sont

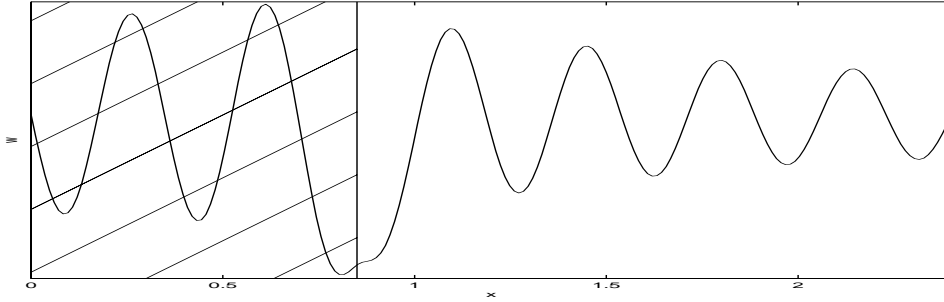


FIG. II.17: Exemple de limitation du domaine d'intégration pour exclure la source

tracés figure II.18. Le nombre d'onde est toujours identifié correctement, et l'identification de

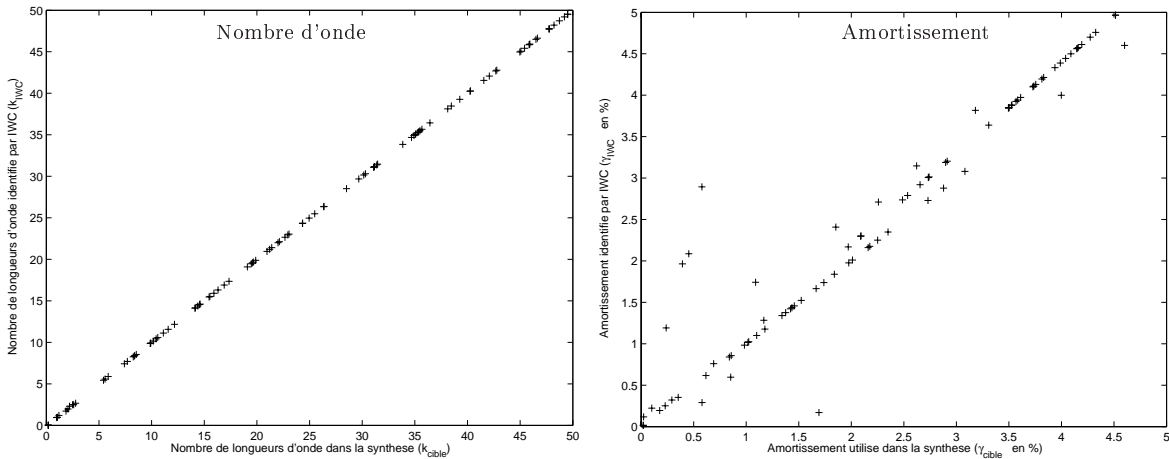


FIG. II.18: Résultats de recherche de k et γ sur le champ obtenu par synthèse modale. Les intégrales de la IWC ne sont calculées que sur une portion du champ.

l'amortissement spatial est presque parfaite. C'est donc la présence de la source dans le champ d'intégration qui empêche la IWC d'identifier correctement l'amortissement. On voit en effet sur la figure II.15 que les termes dominant du champ sont, à gauche de la source, une onde rétrograde amortie (son enveloppe croît quand x augmente), et à droite de la source une onde propagative amortie (son enveloppe décroît quand x augmente). Pour une identification dans le sens propagatif ($k > 0$), la partie gauche apparaît donc avec un amortissement négatif. La IWC fait une sorte de moyenne de cet amortissement négatif avec l'amortissement positif de l'onde propagative, et l'amortissement final trouvé est inférieur à l'amortissement théorique.

Cette explication implique que l'identification de l'amortissement est sensible, lui, à la présence et à la position de la source, contrairement à celle du nombre d'onde k .

II.6.4 Synthèse modale, absence de source, absence de champ proche

Afin de retrouver le cas de la parfaite identification vue avec la synthèse ondulatoire, on réduit encore le domaine d'intégration de la IWC pour éliminer le champ proche. La contribution de celui-ci n'est perceptible qu'aux bords du précédent domaine : proche de la source et de l'appui⁹. On enlève donc ces zones lors du calcul des intégrales (figure II.19). Les résultats,

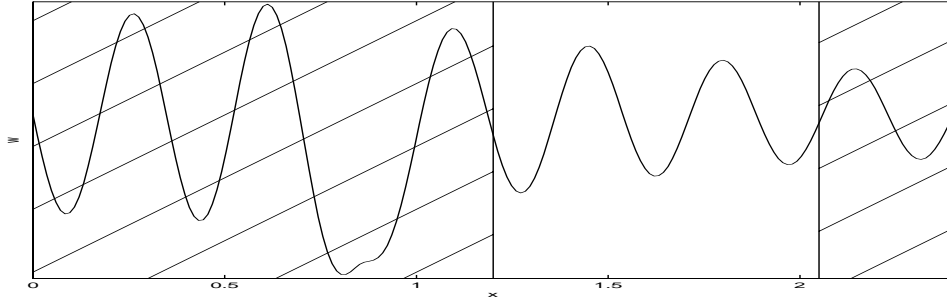


FIG. II.19: Exemple de limitation du domaine d'intégration pour exclure la source et le champ proche

présentés sur la figure II.20, sont équivalents à ceux trouvés dans le cas de la synthèse ondulatoire.

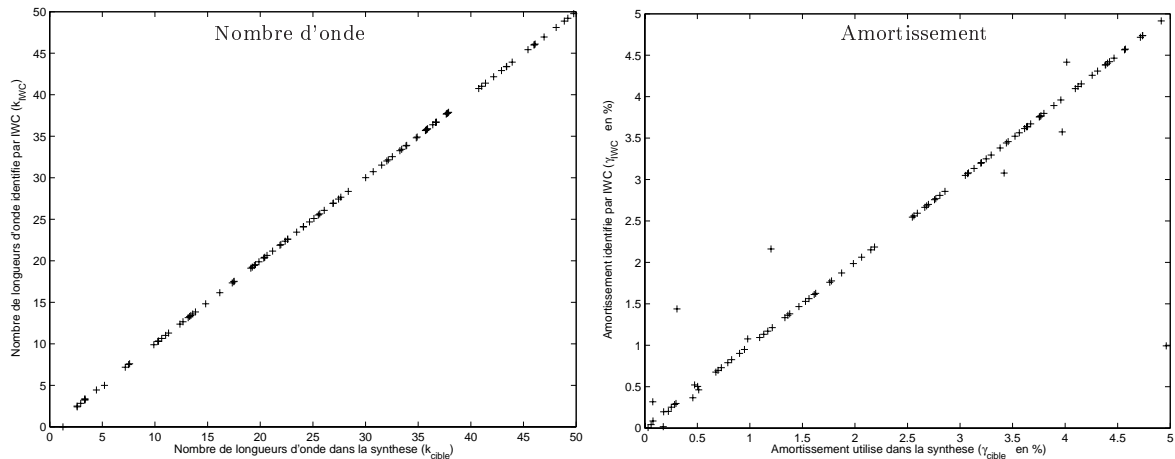


FIG. II.20: Résultats de recherche de k et γ sur le champ obtenu par synthèse modale. Les intégrales de la IWC ne sont calculées que sur une portion du champ.

On voit bien que l'influence du champ proche est bien plus faible que celle de la source.

II.6.5 Conclusion

Cette première validation justifie l'utilisation de la méthode IWC pour identifier les nombres d'ondes réels. La méthode est parfaitement efficace dans ce cas monodimensionnel. Il a été montré, de façon plus particulière, qu'elle est totalement *insensible à la position de la source*, ce qui a été prévu par l'analyse de la méthode (*c.f.* page 43). Le nombre d'onde est correctement

⁹Plus précisément, le champ proche n'est présent qu'aux abords de la source puisque la condition d'appui simple ne crée pas d'ondes évanescentes. Mais pour rester plus général, la portion située proche de la limite du domaine est écartée.

identifié, quel que soit la taille de la structure, les conditions aux limites, la position de la source, l'amortissement. En ce qui concerne l'amortissement, par contre, la méthode IWC semble sensible à la présence de la source, et dans une moindre mesure à la présence du champ proche. L'amortissement trouvé est alors systématiquement sous-évalué.

Dans le cas monodimensionnel, la méthode IWC identifie parfaitement du nombre d'onde réel, et donne une indication *par défaut* de l'amortissement. Qu'en est-il du cas bidimensionnel, auquel la méthode est dédiée ? Afin de répondre à cette question, le chapitre suivant propose des validations de la méthode aussi bien numériques qu'expérimentales, sur des structures complexes.

Chapitre III

Validations : cas des parois poro-élastiques et des nids d'abeilles

Ce chapitre propose quelques applications de la méthode IWC pour diverses structures. Le comportement apparent est pour chacune d'entre elles identifié. Les applications concernent des structures planes et des champs bidimensionnels, domaine privilégié de l'application de la méthode IWC. Le chapitre débute par une présentation des différents moyens permettant d'obtenir un champ de vibration spatial (synthèse modale, éléments finis, techniques expérimentales). En particulier le moyen de mesure employé couramment dans le cadre de ce travail est décrit. Il s'agit d'une mesure par vélocimétrie laser à balayage, mesure sans contact qui s'avère être d'une grande souplesse dans le cas présent. Le chapitre se poursuit par un test numérique de la méthode IWC. Dans ce cas, la synthèse modale est mise œuvre dans le cas 2D, afin de valider la dualité approche modale/approche propagative. Elle montre une parfaite cohérence du point de vue des nombres d'ondes, mais relate une divergence entre amortissement modal et amortissement spatial.

Sont ensuite présentées les validations expérimentales de la méthode. Deux structures particulièrement intéressantes ont été sélectionnées : une structure bicouche à base de matériaux poro-élastiques, et une structure sandwich nid d'abeilles. Plusieurs motivations ont justifié ce choix. En effet, ces structures font encore l'objet d'intenses efforts d'un point de vue modélisation numérique, alors que peu de résultats expérimentaux sont disponibles. En particulier, ces modélisations numériques ne concernent pour le moment que le domaine des basses fréquences. D'autre part, ces structures sont représentatives des matériaux couramment utilisés dans l'industrie. Enfin, ce sont des assemblages de diverses constituants qui leur confère un riche comportement dynamique. Ainsi, un banc d'essai générique est construit.

Le champ spatial des vitesses normales obtenu expérimentalement par sollicitation dynamique du bicouche acier/poreux est traité par la méthode IWC. Les résultats de l'analyse montre un comportement de type plaque de Kirchhoff isotrope. La présence des poreux se traduit par un très fort amortissement structural apparent (de l'ordre de la dizaine de pour cent). Ensuite, le sandwich en nid d'abeilles est traité sur le même banc d'essai. L'application de la méthode

IWC montre des comportements particuliers remarquables. En effet, les rigidités dynamiques en flexion apparaissent fortement dépendantes de la fréquence. De plus, le sandwich a un comportement orthotrope, lui-même dépendant de la fréquence. Un fait particulier est à souligner : pour une petite bande de fréquence, le sandwich testé a un comportement isotrope. Une confrontation avec un modèle analytique monodimensionnel référencé dans la littérature conclut le chapitre. Les comparaisons entre ce modèle et les identifications expérimentales montrent un accord concluant.

III.1 Techniques d'acquisition du champ spatial

Toutes les méthodes d'identification de l'équation de dispersion présentées dans le chapitre précédent présupposent la connaissance du champ harmonique \hat{w} sur un maillage $(x_i, y_i)_{i \leq N}$ référencé. Comment obtenir ce champ ? Quelles informations peut-on alors tirer de l'analyse de l'équation de dispersion ainsi obtenue ? Plusieurs méthodes existent quant à l'obtention du champ : mesure par balayage manuel d'une méthode ponctuelle (marteau de choc, vélocimétrie, accéléromètres, ...), mesure par holographie acoustique de champ proche (Near field Acoustic Holography, NAH), mesure par thermographie infrarouge (thermo-élastocimétrie), mesure par vélocimétrie laser à balayage, calcul numérique éléments-finis, calcul analytique par synthèse modale. Seules les trois dernières techniques sont développées dans cette section. En effet, le balayage manuel est bien trop coûteux en temps ; la NAH nécessite l'utilisation d'une chambre sourde et d'une antenne acoustique ; et la thermographie suppose connues les relations thermodynamiques au sein du matériau.

III.1.1 Mesure du champ par vélocimétrie laser à balayage

Vélocimètre : La vélocimétrie laser est une mesure sans contact qui permet de connaître la vitesse dans une direction donnée d'un point situé à la surface d'une structure. Un faisceau laser est envoyé sur ce point. Si la zone d'impact est suffisamment diffusante, une partie du rayon est renvoyée à l'émetteur qui peut comparer le signal initial à ce rayon réfléchi. L'analyse est effectuée grâce à un interféromètre de Michelson. L'effet Doppler implique que la fréquence du rayon réfléchi soit différente de la fréquence d'origine, du fait de la vitesse de déplacement du point d'impact du rayon (en notant ν et λ les fréquence et longueur d'onde du laser, $\delta\nu = \frac{2\dot{w}}{\lambda}$). Ainsi, un analyseur de signal permet de décrire instantanément le signal $\dot{w}(t)$ de la vitesse de translation du point d'impact. La position relative de l'émetteur laser et du point d'impact n'est pas anodine. Du fait de l'utilisation des interférences entre les signaux émis et réfléchis, la longueur du trajet lumineux ne doit pas être un multiple de la longueur d'onde du rayon. En d'autres termes, il existe des plages de fonctionnement du laser hors desquelles la mesure ne peut pas être effectuée. De plus, la qualité du signal est inversement proportionnelle à la distance entre émetteur et point d'impact.

Vélocimètre à balayage : La fonction “balayage” permet, grâce aux mouvements des optiques au sein de l’appareil, de changer automatiquement l’angle d’émission du rayon. Ainsi, le rayon peut être dirigé n’importe où dans un angle solide donné (son “champ de vision”).

Le positionnement du laser par rapport à la structure devient alors critique, puisqu’il est le résultat d’un compromis : le laser doit être suffisamment loin de la structure pour qu’elle entre entièrement dans son champ de vision, mais suffisamment près pour ne pas trop dégrader le signal. De plus, pour des structures planes, le fait de changer la position du point d’impact change la longueur du trajet lumineux (la variation de longueur est d’autant plus grande que le laser est proche de la structure). Cette variation risque d’être plus importante que la largeur d’une plage de fonctionnement, et certains points de la structure auront du mal à être mesurés. Enfin, on peut préciser que l’état de surface de la structure ne doit pas être trop lisse : en effet, si la structure est très réfléchissante, la réflexion risque d’être spéculaire (angle d’incidence égale angle de réflexion), et du fait du balayage et de son incidence variable, le rayon réfléchi risque de rater l’émetteur.

Bien que paraissant très souple à utiliser, la technologie de laser à balayage est assez délicate à mettre en œuvre, et donne des résultats parfois décevants. En particulier, pour certains points de mesure, le signal perd de sa qualité, et ne représente plus la vitesse de la structure. C’est pourquoi il est indispensable d’avoir un indice de qualité ρ_i pour chaque point de mesure.

Mesure d’une référence : Le vélocimètre ne mesure évidemment la vitesse de la structure qu’au point d’impact du laser (“spot” laser). Les différents points de mesure sont donc mesurés à des temps différés : il est alors nécessaire d’avoir une référence temporelle.

Afin de régler ces deux problèmes (indice de qualité des mesures et référence temporelle), le montage utilise la mesure de la force injectée dans la structure. Celle-ci est provoquée par un pot vibrant attaché à la structure via un capteur de force. Afin d’avoir des mesures larges bandes (pour plusieurs fréquences différentes), le signal envoyé au pot vibrant est un bruit blanc, et on récupère les signaux sous forme de fonctions de transfert entre la vitesse des points de mesure et la force au point d’excitation :

$$H_i(\omega) = \frac{\hat{w}_{x_i}(\omega)}{\hat{F}(\omega)} \quad (\text{III.1})$$

(avec toujours le signe $\hat{}$ pour la transformée de Fourier). La cohérence des signaux indique la qualité de la mesure :

$$\rho_i(\omega) = \frac{|\hat{w}_{x_i}(\omega)\hat{F}(\omega)|}{|\hat{w}_{x_i}(\omega)||\hat{F}(\omega)|} \quad (\text{III.2})$$

On a le déplacement de la surface par la relation :

$$\begin{aligned} \hat{w}(x_i, y_i, \omega) &= \frac{\hat{w}(x_i, y_i, \omega)}{i\omega} \\ &= \frac{\hat{F}(\omega)H_i(\omega)}{i\omega} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

$$\begin{aligned} &= \text{constante}_\omega \times H_i(\omega) \\ &\propto H_i(\omega) \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

A ω donnée, le champ \hat{w} est donc proportionnel aux fonctions de transfert directement obtenue par le laser. Toutes les méthodes d'identification du plan d'onde ne s'intéressant pas à l'amplitude du champ (mais à sa répartition) on identifiera donc \hat{w}_i à H_i .

Banc de mesure : Le principe du banc de mesure est synthétisé dans le schéma de la figure III.1. Un laser à balayage Ometron VPI+ est utilisé¹. Il est interfacé grâce à Ideas Master

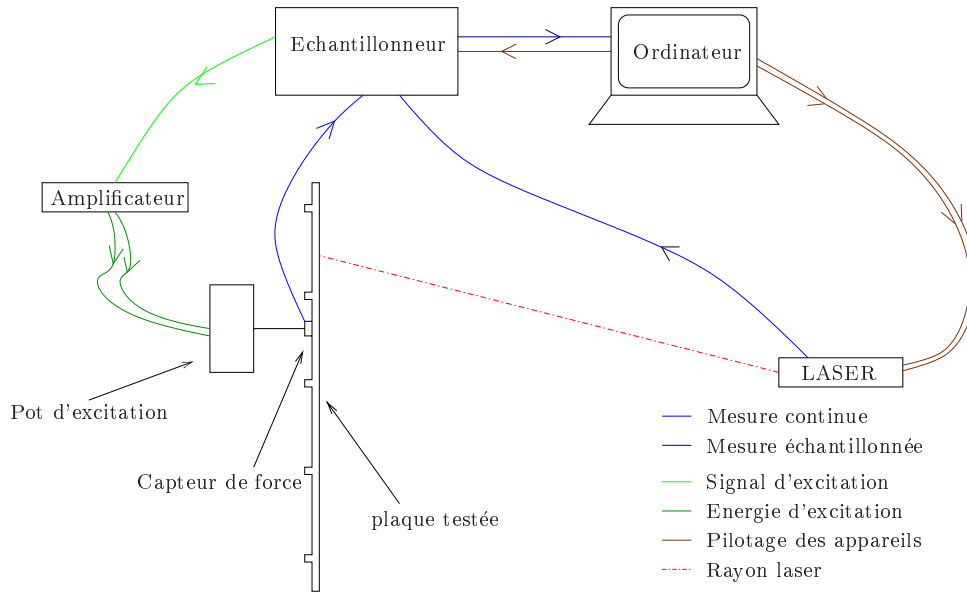


FIG. III.1: Schéma du banc d'acquisition

Series OpenGL, qui permet à la fois de générer le maillage, de piloter la position du laser, et de gérer un échantillonneur Paragon Hewlett Packard 35654A. Celui-ci a deux fonctions : il récupère les signaux du laser et du capteur de force Brüel & Kjær 8001 qui recueille la force ponctuelle injectée, et il génère le bruit blanc envoyé au pot d'excitation Brüel & Kjær 4801.

Le résultat d'une acquisition est sous la forme de N fonctions de transfert. Il suffit alors de lire toutes ces fonctions de transfert à une même pulsation pour fabriquer le champ $(\hat{w}_i)_{i \leq N}$ souhaité. La figure III.2 est une photographie du banc de mesure.

Résultats : Ce type de banc, avec l'analyse IWC, permet de caractériser des structures réelles. En particulier, on pourra ainsi faire des mesures d'amortissement ou valider des théories construisant des équations de dispersion.

III.1.2 Obtention du champ par calcul numérique : éprouvette virtuelle

Une autre méthode pour avoir les champs harmoniques d'une plaque consiste à effectuer un calcul numérique précis et coûteux d'un échantillon de la structure. En effet, il faut rappeler que

¹Cet équipement a été acquis dans le cadre du contrat régional IMPACT [32] portant sur la vibroacoustique passive et active. La région Rhône Alpes est remerciée pour son aide financière.



1 : Laser à balayage 2 : Pilotage laser, pilotage Paragon, stockage données 3 : Echantillonneur HP Paragon
 4 : Chaîne d'excitation 5 : plaque testée

FIG. III.2: *Banc de mesure avec Vibromètre Laser à Balayage*

c'est le milieu qui est caractérisé, indépendamment des conditions aux limites (et en particulier de la taille de la structure). Les résultats obtenus sur une plaque pourront être utilisés pour une plaque beaucoup plus grande. Les caractéristiques de cette plaque équivalente prenant en compte toutes les subtilités constitutives du milieu, on n'aura pas besoin de les décrire dans cette grande structure. Il n'est plus nécessaire de prendre un maillage très précis, ce qui permet un très grand gain au niveau du coût numérique des calculs.

Le calcul numérique peut être très compliqué, avec prise en compte d'une géométrie complexe (présence de raidisseurs, matériaux multicouches, ...), et mettant en jeux de nombreux phénomènes (couplages multiphysiques). Le principe est que toutes ces particularités influenceront l'équation de dispersion en flexion de la plaque, la "signeront". Le fait d'utiliser cette équation de dispersion comme modèle d'une plaque homogène sera donc une façon de modéliser l'ensemble de ces caractéristiques, à un coût très faible.

Enfin, cette démarche pourra servir pour dimensionner les assemblages. En effet, la modélisation d'un échantillon puis l'analyse de son plan d'onde permet de connaître, sans rien fabriquer réellement, les caractéristiques nécessaires à la structures pour respecter des contraintes vibratoires. C'est le principe de l'*éprouvette virtuelle*.

III.1.3 Calcul du champ par synthèse modale

Les plaques homogènes isotropes rectangulaires appuyées-appuyées sont un cas canonique très utilisé en mécanique des vibrations. En effet, leur schéma modal est connu. Pour une plaque de dimensions $a \times b$, de masse $M_{\text{tot}} = \rho h a b$, appuyée sur son pourtour, le problème est modélisé

sous la forme :

$$\begin{cases} D\Delta^2 w + \rho h \ddot{w} = 0 & \text{sur }]0 \ a[\times]0 \ b[\\ w(x, 0) = w(x, b) = 0 & \text{sur } [0 \ a] \\ w(0, y) = w(a, y) = 0 & \text{sur } [0 \ b] \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, b) = 0 & \text{sur } [0 \ a] \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a, y) = 0 & \text{sur } [0 \ b] \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

On pose alors :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad k_{xm} = m \frac{\pi}{a}, \quad k_{yn} = n \frac{\pi}{b} \quad (\text{III.6})$$

$$\phi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{M_{\text{tot}}}} \sin(k_{xm}x) \sin(k_{yn}y) \quad (\text{III.7})$$

$$\omega_{mn} = (k_{xm}^2 + k_{yn}^2) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (\text{III.8})$$

On montre aisément que la famille $(\omega_{mn}, \phi_{mn})_{m,n}$ est la base modale du système (selon la définition de la page 8). La dissipation est modélisée sous forme d'amortissement visqueux ce qui permet, grâce à l'hypothèse de Basile, de poser l'amortissement modal ξ_{mn} . Pour une excitation ponctuelle harmonique au point (x_e, y_e) d'amplitude F_0 , cela implique que le champ peut être écrit sous la forme (*c.f.* équation I.12) :

$$\begin{aligned} \hat{w}(x, y) &= \sum_{mn} \frac{F_0 \phi_{mn}(x_e)}{-\omega^2 + 2i\xi_{mn}\omega_{mn}\omega + \omega_{mn}^2} \phi_{mn}(x, y) \\ &= \frac{4F_0}{M_{\text{tot}}} \sum_{mn} \frac{\sin(k_{xm}x_e) \sin(k_{ym}y_e) \sin(k_{xm}x) \sin(k_{ym}y)}{-\omega^2 + 2i\xi_{mn}\omega_{mn}\omega + \omega_{mn}^2} \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Il reste un point à traiter avant de pouvoir synthétiser le champ : l'équation III.9 comporte une somme infinie sur l'ensemble des modes. On sait qu'en dessous de sa fréquence propre, la contribution modale d'un mode diminue quand sa fréquence propre augmente. Réciproquement, à une fréquence donnée, les modes de grande fréquence propre auront une contribution faible. On pourra donc approximer la réponse de la structure par la réponse des premiers modes (troncature modale²). Le seuil à partir duquel un mode est négligé est fixé à 3 : la troncature modale écarte les modes dont la fréquence propre est supérieure à 3 fois la fréquence d'excitation :

$$\begin{aligned} \hat{w}(x, y) &= \frac{4F_0}{M_{\text{tot}}} \sum_{mn/\omega_{mn} \leq 3\omega} (\dots) + \frac{4F_0}{M_{\text{tot}}} \sum_{mn/\omega_{mn} > 3\omega} (\dots) \\ &\approx \frac{4F_0}{M_{\text{tot}}} \sum_{mn/\omega_{mn} \leq 3\omega} (\dots) \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

On peut ajouter que le produit des sinus joue en faveur de la troncature modale. Quelles que soient les coordonnées (x, y, x_e, y_e) , le signe d'un sinus sera variable. Sa contribution sera parfois positive, parfois négative, et finalement sa somme sera presque nulle. La figure III.3 présente un exemple de troncature.

² Cette approximation peut être affinée en ajoutant une correction grâce au noyau statique. L'annexe A page 175 présente cette correction, qui n'est pas nécessaire ici.

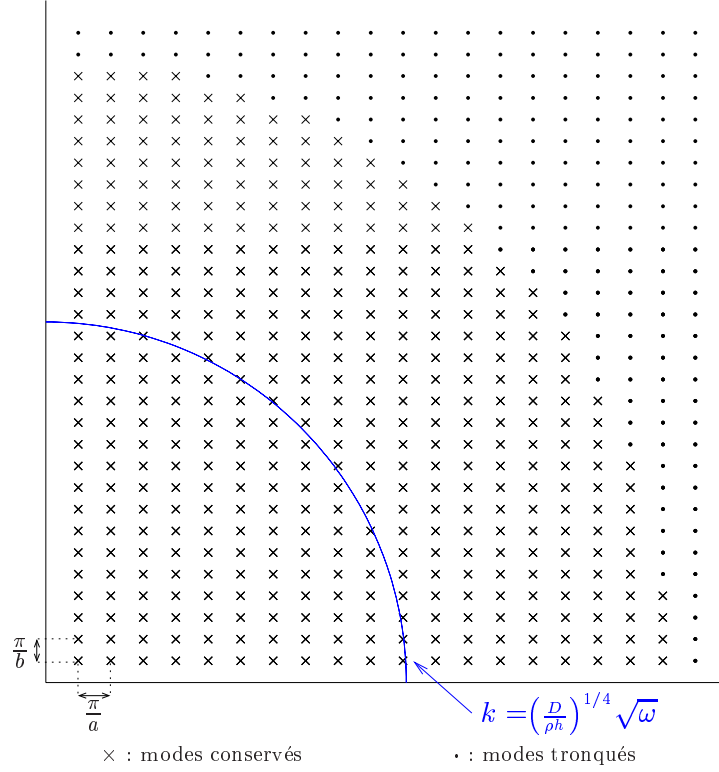


FIG. III.3: Exemple de troncature modale pour la synthèse du champ d'une plaque appuyée-appuyée

Ce cas purement académique a deux objectifs. Premièrement, il met en évidence la dualité approche modale / approche ondulatoire (*wave/mode duality*, c.f. Langley [74]), puisque le champ est synthétisé avec le formalisme modal tandis qu'il est identifié avec le formalisme ondulatoire. Deuxièmement, il permet de mettre en relation les amortissements modal (ξ_m) et spatial ($\gamma(\theta)$).

III.2 Analyse d'un champ obtenu par synthèse modale bidimensionnelle

La méthode de recherche IWC est appliquée à un champ issu d'une synthèse modale modélisant les vibrations d'une plaque homogène isotrope appuyée-appuyée. Les dimensions de cette plaque sont $a = 90$ cm, $b = 70$ cm. L'excitation est placée au point de coordonnées $x_0 = 50$ cm, $y_0 = 50$ cm. La grille des "points de mesure", c'est-à-dire des points où est évalué le champ \hat{w} , a pour espacements $\Delta x = \Delta y = 2$ cm, ce qui en fait une grille uniforme de $N = 1656$ points. Le champ est généré pour 90 pulsations différentes, correspondantes aux trentièmes d'octave allant de 200 Hz à 1600 Hz. L'amortissement visqueux modal ξ est choisi constant. Trois cas tests sont exposés (tableau III.a). A titre indicatif, on précise la densité modale, son inverse, ainsi que le recouvrement modal (aux bornes de l'intervalle de fréquence) pour ces 3 cas test³.

³La densité modale est donnée par la formule I.51 page 23 : $n(\omega) = \frac{S\omega}{2\pi c_\varphi c_g}$ qui donne dans le cas d'une plaque de Love Kirchhoff $n = \frac{S}{4\pi\sqrt{D}}$. La densité modale d'une plaque ne dépend pas de la fréquence. Le recouvrement modal est donné par la formule I.48 page 20 : $\mu = n\eta\nu$.

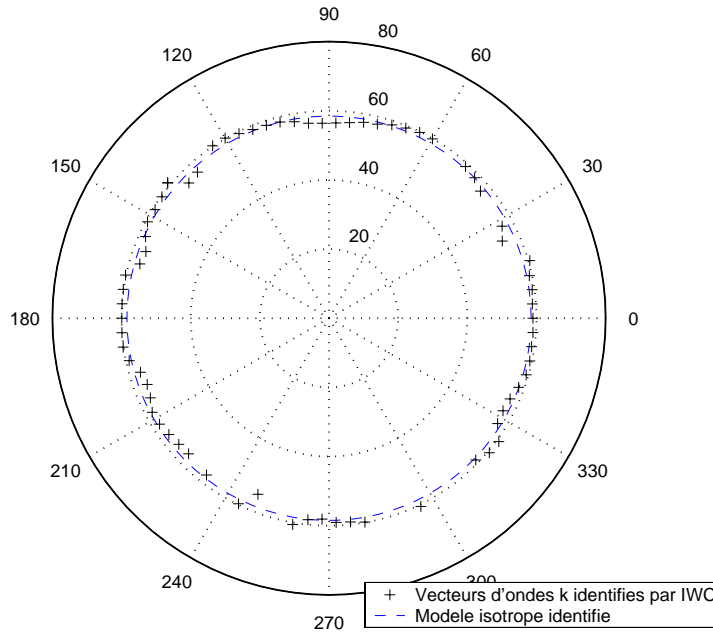
	Cas 1	Cas 2	Cas 3
\tilde{D} (m^4s^{-2})	5	2	0,5
ξ (%)	8	0,5	4
n (mode/Hz)	$22,4 \cdot 10^{-3}$	$35,4 \cdot 10^{-3}$	$70,9 \cdot 10^{-3}$
n^{-1} (Hz/mode)	45	28	14
$\mu(\nu)$ (%)	72 \rightarrow 573	7 \rightarrow 56	113 \rightarrow 900

TAB. III.a: *Caractéristiques dynamiques des trois cas test*

Vue la synthèse modale (équation III.8), l'équation de dispersion du milieu devrait être celle de Love-Kirchhoff isotrope II.51 :

$$\tilde{D}k^4 = \omega^2$$

La figure III.4 montre un exemple de résultat IWC (cas test 1) à 1270 Hz). Le modèle isotrope

FIG. III.4: *Exemple de résultat IWC sur un champ issu de synthèse modale*

semblant pertinent, on pourra utiliser l'algorithme d'homogénéisation hautes fréquences pour les plaques isotropes exposés dans le chapitre précédent (section II.5.1), et tenter de retrouver \tilde{D} constant. Le figure III.5 indique le résultat pour les trois cas tests.

On voit que la méthode, bien que subissant une déviation⁴ systématique en basses fréquences (surestimation), identifie correctement la rigidité dynamique. Il est même surprenant que la méthode donne un bon résultat dans le cas test 2), où l'hypothèse de fort recouvrement modal n'est pas vérifiée. Le méthode IWC, bien que prévue pour fonctionner en moyennes et hautes fréquences, s'avère tout de même efficace dans le domaine modal.

⁴De plus, il faut rappeler que la méthode IWC s'applique à identifier des vecteurs d'ondes ; or, la rigidité dynamique dépend de k en k^{-4} (équation II.64). Une erreur d'identification en k se propagera donc sur \tilde{D} à la puissance 4 : il faut voir les erreurs d'identification de la figure III.5 comme très faibles (les erreurs sont très "zoomées").

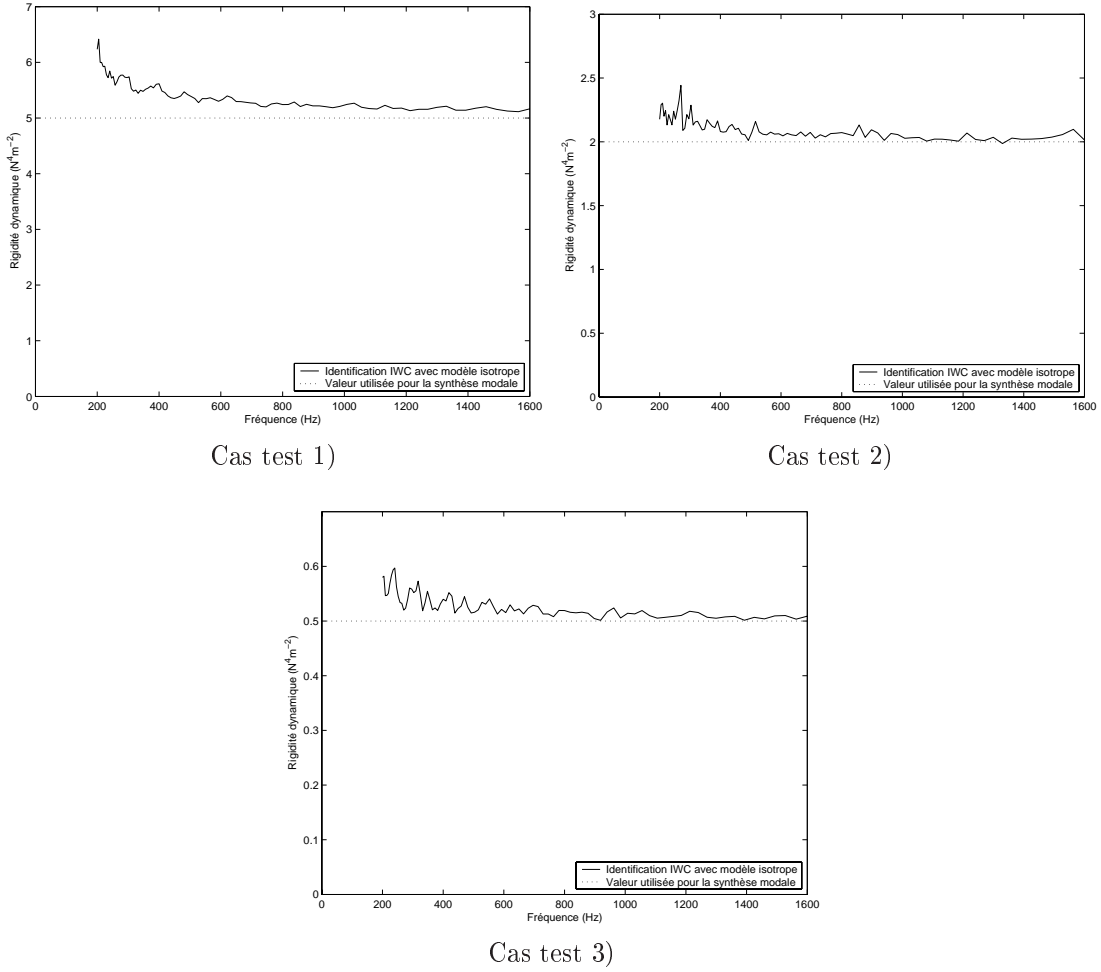


FIG. III.5: Comparaison des rigidités dynamiques utilisées pour la synthèse modale et identifiées par la IWC (modèle isotrope)

Il est difficile de concevoir une relation directe entre amortissement modal et amortissement spatial : le premier est un paramètre donnant la décroissance temporelle d'un mode donné, tandis que le second explicite la décroissance spatiale d'une onde donnée. C'est entre autres l'avis de Lyon [21] : *L'amortissement spatial d'une onde est un concept délicat à exprimer en termes de description modale*. Cependant, il précise que ces deux amortissements sont liés à l'amortissement énergétique η par les deux formules :

$$\eta = 2\xi \quad (\text{III.11})$$

$$\eta = 2\gamma \frac{c_g}{c_\phi} \quad (\text{III.12})$$

Dans le cas présent d'une plaque de Love-Kirchhoff, pour laquelle on a $c_g = 2c_\phi$, ces relations aboutissent à :

$$\gamma = \frac{\xi}{2} \quad (\text{III.13})$$

C'est pourquoi la figure III.6 compare les amortissement spatiaux $\gamma(\omega)$ identifiés par la méthode IWC à la moitié de l'amortissement modal utilisé lors de la synthèse modale. Les résultats pour l'amortissement γ ne sont pas aussi concluants que pour la rigidité dynamique \tilde{D} . Néanmoins,

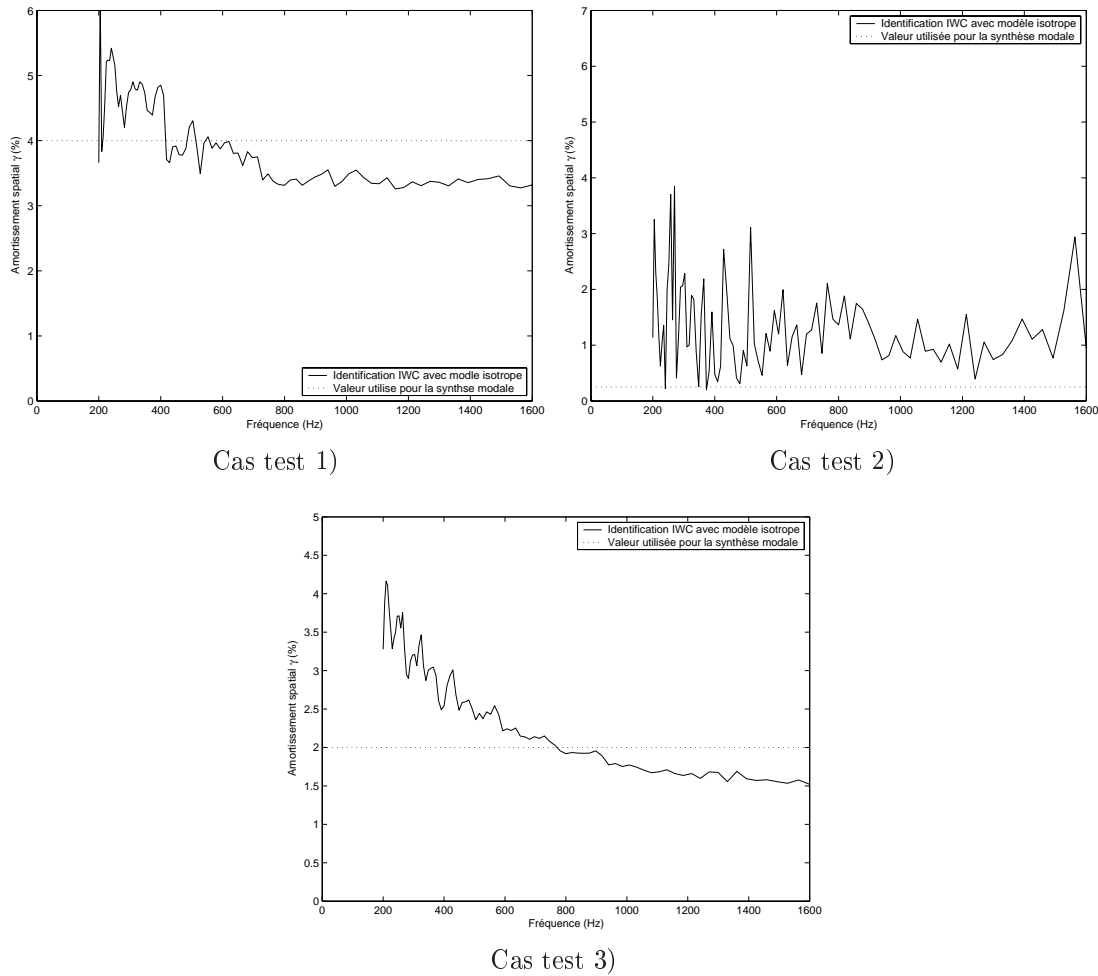


FIG. III.6: Comparaison de l'amortissement modal (synthèse) et spatial (identification IWC)

on peut dire que sur les cas test 1) et 3) l'identification de l'amortissement est satisfaisante. Pour le cas test 2), par contre, l'identification est incorrecte. Mais dans ce cas, il faut se rappeler que le recouvrement modal est très faible : les hypothèses de bases de la méthode IWC ne sont pas vérifiées. Il est donc naturel qu'elle ait du mal à identifier l'amortissement. L'allure de l'amortissement identifié en fonction de la fréquence semble être systématiquement une fonction décroissante, alors que l'amortissement modal de synthèse était lui, constant. L'identification n'est donc pas idéale pour toutes les fréquences. On peut s'interroger sur cette décroissance, sans doute liée aux mêmes problèmes que dans le cas monodimensionnel (sous-estimation de l'amortissement γ). Comme on le voit, les mêmes doutes que dans le cas monodimensionnel subsistent quant à l'identification de l'amortissement.

La synthèse modale d'un champ a permis de valider la méthode IWC de façon générale. Elle s'avère capable d'identifier les rigidités dynamiques de la structure testée de façon très précise. La plage de fréquence dans laquelle cette identification est correcte s'étend des hautes fréquences jusqu'à une partie du domaine modal, où ses hypothèses ne sont pourtant pas vérifiées. Du point de vue de l'amortissement, elle ne permet d'avoir qu'une estimation de l'amortissement spatial – même si cette identification n'est pas parfaite. On peut ajouter que cette section, qui

concerne un champ obtenu par synthèse modale identifié par une méthode utilisant le formalisme ondulatoire, est en soi une validation très explicite de la dualité approche modale / approche ondulatoire de Langley [74].

III.3 Application aux parois poro-élastiques

Cette section s'attache à valider la méthode IWC sur un champ vibratoire obtenu expérimentalement. Deux assemblages sont testés. Le premier est constitué d'une plaque en acier couverte d'un feutre, le second est une plaque d'acier similaire recouverte d'une mousse visco-élastique (figure III.7). La rigidité de ces plaques est dominée par celle de l'acier, et les masses sont comparables. L'équation de dispersion devrait donc être identique. Par contre, la mousse semble beaucoup plus dense que le feutre : l'amortissement de ce second assemblage devrait donc être supérieur à celui de la plaque avec le feutre.

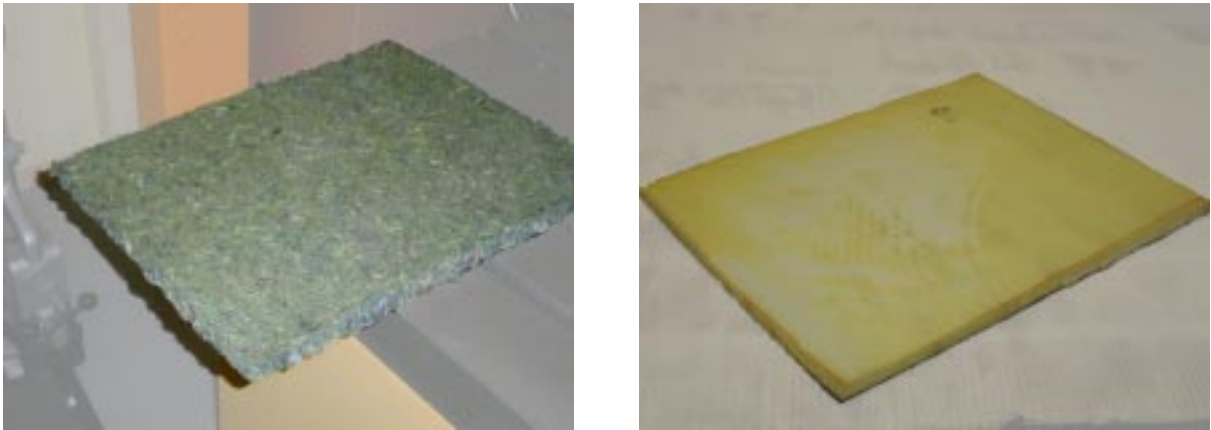


FIG. III.7: *Bicouches acier/poreux (à gauche feutre, à droite, mousse)*

Les plaques sont de dimension 50×38 cm. Leurs conditions aux limites sont considérées libre-libre grâce à une suspension verticale très souple. La grille de mesure est uniforme de pas $\Delta x = \Delta y = 17,2$ mm ($N = 690$). L'enregistrement de la cohérence ρ_i donne un indice de qualité de chaque mesure. Les fonctions de transfert sont récupérées sur [500 6700] Hz avec un pas de $\delta\nu = 1$ Hz.

III.3.1 Résultats pour l'équation de dispersion

Dans un premier temps, on s'assure que la méthode IWC donne des résultats cohérents. Puisque l'acier est beaucoup plus rigide que la partie poreuse, l'équation de dispersion devrait être proche de celle de l'acier, donc isotrope. De plus, la plaque étant extrêmement fine (quelques dixièmes de millimètre), le modèle de Love-Kirchhoff paraît *a priori* adapté. Le nombre d'onde k ne doit donc pas dépendre de l'angle θ , et la rigidité dynamique \tilde{D} doit être constante vis à vis de ω .

Les figures III.8 et III.9 montrent que ces hypothèses sont correctes pour les deux plaques : à gauche, l'isotropie est vérifiée (pour la fréquence 2500 Hz, choisie à titre d'exemple), à droite le modèle de Love-Kirchhoff est mis en évidence (avec $\tilde{D}(\omega) = cst$). La rigidité de la plaque recouverte de mousse étant légèrement inférieure à celle de la plaque recouverte de feutre, on peut en déduire qu'elle est légèrement plus souple et/ou plus lourde.

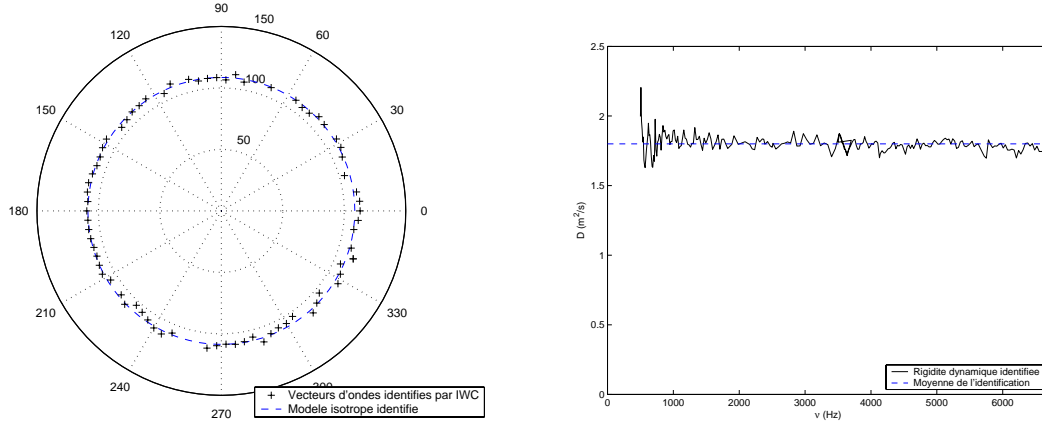


FIG. III.8: *Comportement isotrope de Love-Kirchhoff pour la plaque d'acier recouverte de feutre*

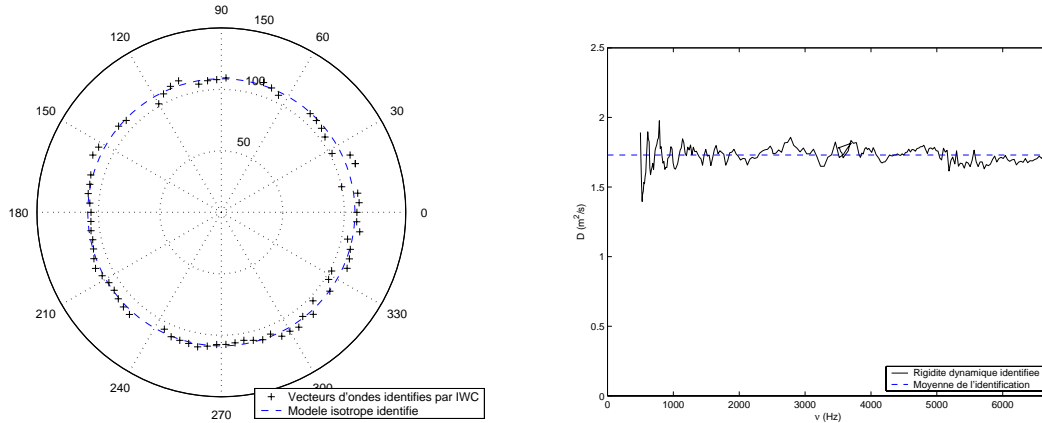


FIG. III.9: *Comportement isotrope de Love-Kirchhoff pour la plaque d'acier recouverte de mousse*

III.3.2 Résultats pour l'amortissement

En ce qui concerne l'amortissement, les résultats sont indiqués sur la figure III.10. Les valeurs de l'amortissements spatial $\gamma(\omega)$ ont été moyennées sur des tiers d'octave. Ces résultats d'amortissement sont très élevés. Il faut en effet se rappeler que l'amortissement spatial est lié à l'amortissement énergétique par la relation III.12 :

$$\eta = 4\gamma$$

Les niveaux d'amortissement énergétique η sont donc ici de l'ordre de 10 % pour la plaque avec le feutre, et de 15 % pour la plaque avec la mousse au delà de 1000 Hz. Ces résultats sont en relatif accord avec ceux récemment publiés ([42], [51]). Mais ces fortes valeurs s'expliquent aisément

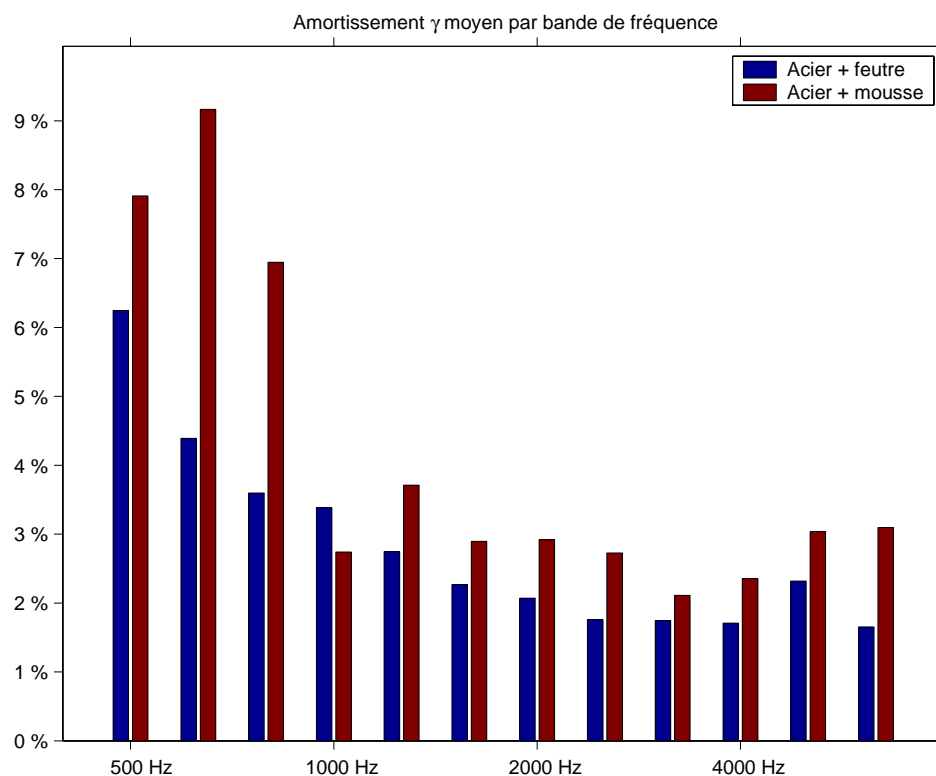


FIG. III.10: Amortissements spatiaux comparés des deux plaques testées

par la présence des matériaux poreux, dont la fonction ici est de dissiper l'énergie. La mousse est plus dense que le feutre, il est normal qu'elle amortisse plus la plaque que ne le fait le feutre. On n'a cependant aucune valeur de référence à laquelle comparer ces niveaux d'amortissement, ce qui permettrait de lever les doutes émis à la section précédente concernant l'identification de l'amortissement.

III.3.3 Conclusion

Sur une structure réelle, isotrope et amortie, la méthode IWC est tout à fait valide en large bande, jusqu'à des fréquences bien supérieures aux limites de l'analyse modale. Sa mise en œuvre sur des données expérimentales a été accomplie sans problème et s'avère fructueuse. Elle est capable d'identifier correctement le comportement d'une plaque isotrope de Love-Kirchhoff, et donne une indication assez précise de l'amortissement interne de la structure. De plus, on peut noter que bien que la méthode IWC soit itérative (l'algorithme possède de nombreuses boucles imbriquées), elle est entièrement automatique. Elle s'avère donc beaucoup plus rapide que toutes les méthodes d'identification modale présentées au chapitre I.1.

III.4 Application à un sandwich nid d'abeilles

Le but de cette section est d'utiliser la IWC avec une structure plus complexe qu'une plaque de Love-Kirchhoff isotrope, par exemple une "plaque sandwich en nid d'abeilles".

Les sandwiches nid d'abeilles représentent un intérêt tout particulier dans l'industrie, du fait de leur très faible masse pour des rigidités équivalentes très élevées, en compression notamment. Elles sont couramment utilisées dans la fabrication automobile, aéronautique et ferroviaire (par exemple sur le prochain Train à Grande Vitesse de la Compagnie Japonaise des Chemins de Fer). Le problème majeur dans la modélisation de ces structures est la variété d'échelles différentes mises en jeu : les parois des nids d'abeilles sont très fines, les cavités hexagonales d'un ordre 100 fois supérieur, et les panneaux eux-mêmes peuvent être 100 plus grands que les alvéoles. Aucun modèle éléments-finis ne peut traiter simultanément toutes ces échelles.

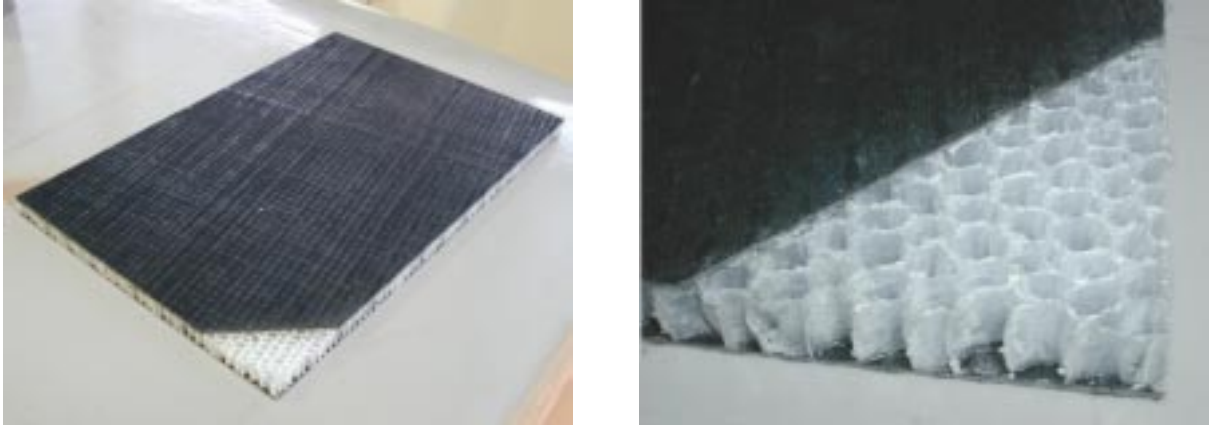
C'est pourquoi on tente de trouver un comportement équivalent de la plaque, à travers des caractéristiques dynamiques comme la masse surfacique, le moment d'inertie en flexion, ... Saito [57], par exemple, utilise une poutre en nid d'abeilles, dont il identifie les caractéristiques modales (méthode du marteau de choc). Grâce à un modèle de poutre de Timoshenko, il optimise un jeu de paramètres (E, G) afin que les fréquences du modèle "collent" aux fréquences expérimentales. Les paramètres ainsi obtenus peuvent être utilisés dans tout modèle Eléments Finis utilisant une telle plaque en nid d'abeilles.

Nilsson [78] utilise une méthode tout à fait similaire (analyse modale de poutres) pour identifier les paramètres apparents d'un sandwich nid d'abeilles. Il utilise cette identification pour valider un modèle comportemental qui permet de prédire le nombre d'onde de ces structures (ce modèle comportemental provient d'une étude antérieure [77] sur les assemblages multicouches). Néanmoins, il teste l'orthotropie de tels matériaux en prenant des poutres découpées selon des axes d'orthotropie ; son analyse n'est pas vraiment bidimensionnel.

L'objectif de cette section est donc de reprendre son modèle pour le confronter aux résultats bidimensionnels obtenus grâce à la IWC.

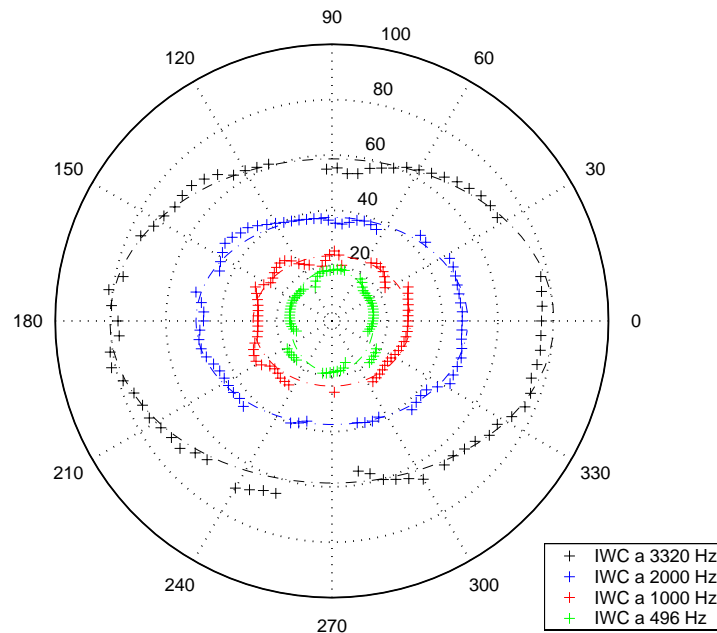
La structure choisie est un sandwich nid d'abeilles⁵, de dimensions 50×80 cm, composé de deux peaux en plastique qui semble tissé, et une âme en nid d'abeilles dans une autre matière plastique. La figure III.11 est une vue de cette plaque, avec à droite un zoom mettant en évidence la structure alvéolaire de l'âme. L'absence de connaissances sur les matériaux est totale. La seule manière de modéliser le comportement de ce matériau est donc d'utiliser son équation de dispersion, qu'on peut identifier grâce à la IWC.

⁵Cette structure a été aimablement fournie par RIETER SA.


 FIG. III.11: *Plaque en nid d'abeilles (à droite, zoom sur l'âme)*

III.4.1 Comportement angulaire apparent

Afin d'analyser le comportement dynamique de cet assemblage, quelques analyses IWC sont faites. Le résultat, figure III.12, montre clairement que la structure a un comportement orthotrope, avec un angle d'orthotropie θ_{\perp} proche de 0. La dépendance de k en θ est assez


 FIG. III.12: *Traitement IWC pour quelques fréquences différentes*

lisse, sans variation particulière entre deux directions d'orthotropie (la courbe n'a ni bosse ni creux prononcé). On fera donc l'hypothèse que l'orthotropie est elliptique. De plus, l'aspect de la courbe $k(\theta)$ change avec la fréquence : la courbe verte, à 496 Hz, est allongée vers le haut. La courbe rouge (1000 Hz) est à peu près circulaire, tandis que la courbe noire (3320 Hz) est allongée horizontalement. Les rigidités dynamiques sont donc variables. Ces trois points expliquent l'utilisation du modèle orthotrope elliptique à rigidités variables (équation II.59,

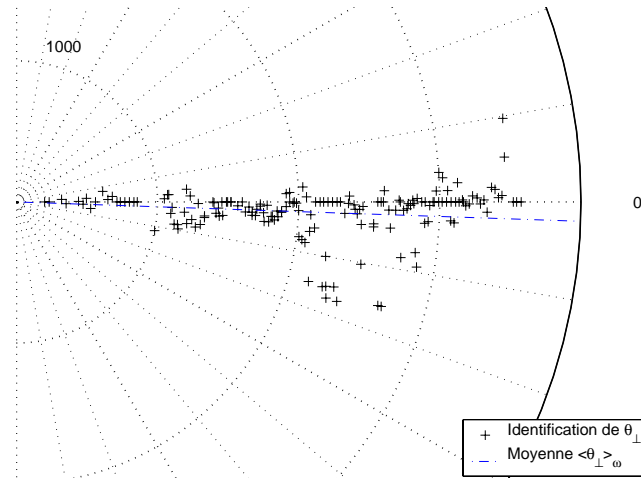


FIG. III.13: Recherche de l'angle d'orthotropie pour le sandwich en nid d'abeilles ($R(\theta) = \frac{\omega}{2\pi}$)

page 51) :

$$k^4(\theta) \left(\sqrt{\tilde{D}_x(\omega)} \cos^2(\theta) + \sqrt{\tilde{D}_y(\omega)} \sin^2(\theta) \right)^2 = \omega^2$$

Une première analyse est faite sur l'angle d'orthotropie. Sur un échantillonnage fréquentiel, la courbe $\theta_{\perp}(\omega)$ est identifiée. On moyenne ensuite cet angle pour trouver θ_{\perp} (supposé indépendant de la fréquence). La figure III.13 indique le résultat de cette recherche : on trouve $\theta_{\perp} \approx -2^\circ$.

III.4.2 Rigidités Dynamiques apparentes

Avec cet angle θ_{\perp} fixé, on peut passer à l'analyse des nombres d'onde avec le modèle des rigidités dynamiques variables, et fabriquer ainsi les deux fonctions $\tilde{D}_1(\omega)$ et $\tilde{D}_2(\omega)$. Parallèlement, on construit, à titre indicatif, l'amortissement $\gamma(\omega)$ (en l'absence de modèle plus fin, l'amortissement spatial est supposé isotrope). La figure III.14 montre les rigidités dynamiques et l'amortissement ainsi trouvés. On voit que ces fonctions sont très variables avec la fréquence. Deux comportements peu communs sont à souligner. Premièrement, les deux rigidités dynamiques se croisent : la direction la plus rigide change selon la fréquence. En deuxième point, il faut noter que la courbe \tilde{D}_2 n'est pas monotone ; en particulier, en basses fréquences, cette fonction est croissante tandis que globalement, elle est décroissante. Les données expérimentales inspirent les trois remarques suivantes :

1. Ces résultats sont la compilation de résultats obtenus à partir de deux jeux de mesure. Celles-ci étaient décalées en fréquences (0→3200 Hz, 1000→4000 Hz). Voilà pourquoi il apparaît, pour la courbe \tilde{D}_1 autour de 2250 Hz, une sorte de "dédoublément". Cependant, ce très léger dédoublément, presque nul et concentré sur une plage de fréquence très faible, montre que la mesure est fortement reproductible.

2. Pour des raisons inexplicables, la cohérence issue du signal laser chute sur une petite bande autour de 2600 Hz, et aussi à partir de 3500 Hz. Ceci explique les "accidents" dans les courbes à ces fréquences (autant sur \tilde{D}_1 et \tilde{D}_2 que sur γ).

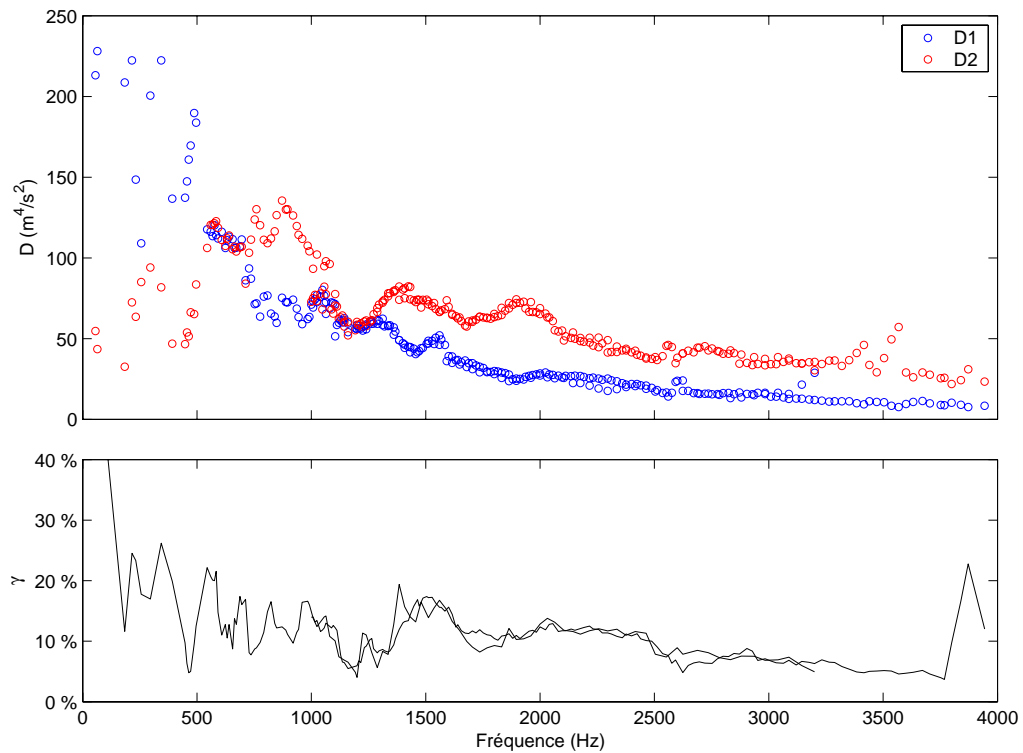


FIG. III.14: Résultats de l'analyse IWC et modèle orthotrope elliptique à rigidités variables, pour la plaque en nid d'abeilles

3. Les courbes sont très chahutées en basses fréquences. C'est normal, puisque la IWC est une méthode moyennes et hautes fréquences.

La lecture des résultats concernant l'amortissement présentés dans la figure III.14 est délicate. En effet, l'atténuation des ondes γ est de l'ordre de la dizaine de pour cent dans la bande de fréquence de 1000 Hz à 4000 Hz, ce qui correspond à un amortissement structural de l'ordre de 40 pour cent. Cette valeur semble être très importante. Il est également difficile de juger de sa pertinence vu le manque indéniable de résultats équivalents dans la littérature scientifique. La bande de fréquence en dessous de 1000 Hz est hors des limites de la méthode. Dans cette bande, le résultat n'est pas pertinent.

III.4.3 Vérification de l'orthotropie

Afin de vérifier que le modèle ne dépend pas des conditions aux limites, la plaque est retaillée aux dimensions de 58.2×38.5 cm, avec un angle de $12,4^\circ$ par rapport à la première (*c.f.* figure III.15). La photo III.11 est d'ailleurs une prise de vue de cette plaque retaillée. Deux nouvelles mesures sont faites. Les résultats de la méthode IWC et de la recherche des paramètres mécaniques sont présentés figure III.16. En ce qui concerne les rigidités, les résultats sont très semblables à ceux de la figure III.14. Ceci signifie que, comme prévu, la méthode IWC ne dépend pas des conditions aux limites : c'est bien le matériau qui est identifié, et non son environnement. Il faut nuancer ce propos pour les basses fréquences, où les mesures de la plaque retaillée sont

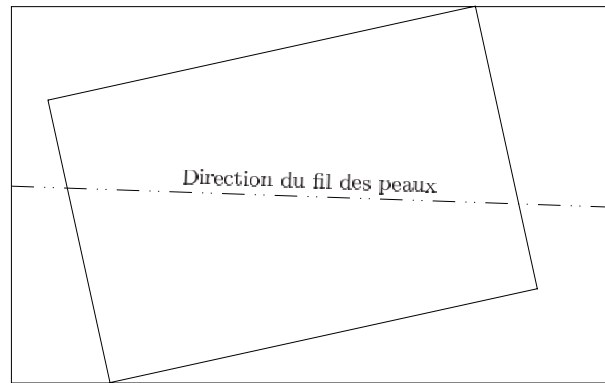


FIG. III.15: *Changement des conditions aux limites et de la direction du fil pour la plaque sandwich nid d'abeilles*

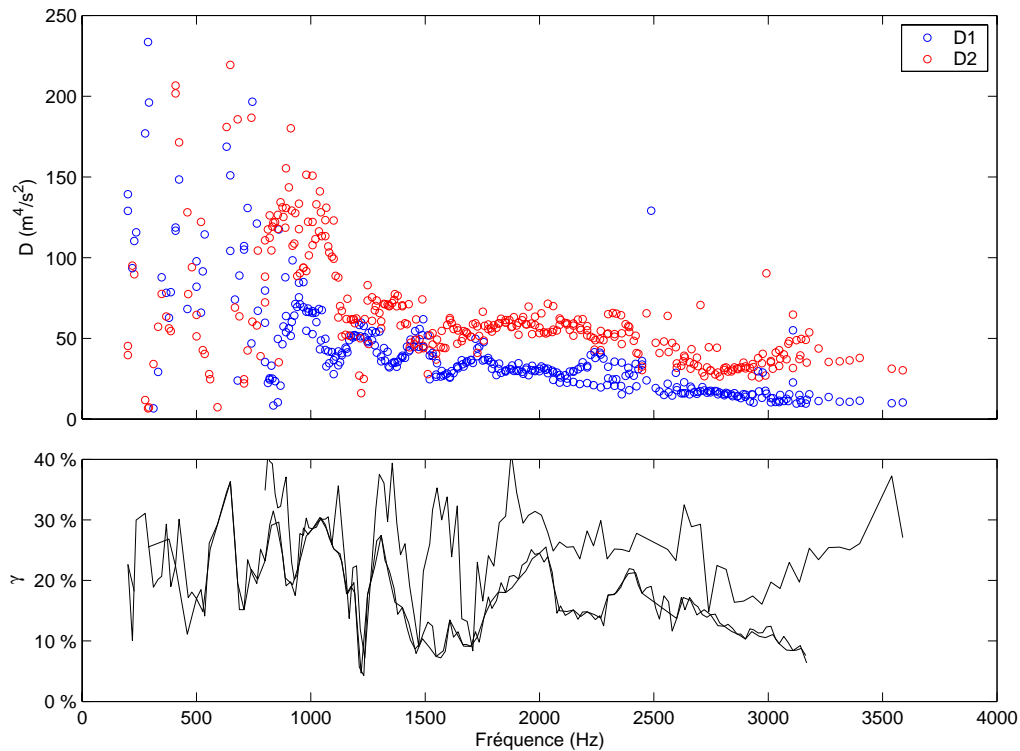


FIG. III.16: *Résultats IWC pour la plaque en nid d'abeilles retaillée*

peu exploitables car très chahutées. Ce comportement s'explique par le fait qu'ayant retaillé la plaque, la limite domaine modal/moyennes fréquences est repoussée vers le haut (tous les modes sont de fréquence plus élevée). En ce qui concerne l'amortissement, on remarque que les mesures de γ ne se suivent ni entre la plaque entière et la plaque retaillée, ni entre les différents essais sur la plaque retaillée. Il semble donc que la mesure de l'amortissement, elle, dépende des conditions aux limites.

III.4.4 Modèle analytique

La littérature concernant les plaques en nid d'abeilles est relativement récente, mais on trouve plusieurs approches ([77, 78, 81]). Celle adoptée par Nilsson [77, 78] est particulièrement intéressante car elle permet de construire analytiquement une équation de dispersion pour les ondes de flexion dans les systèmes monodimensionnels sandwich nid d'abeilles.

Equation de dispersion : Les caractéristiques géométriques de l'assemblage sont données figure III.17. Les caractéristiques mécaniques sont notées, pour le cœur et dans une direction

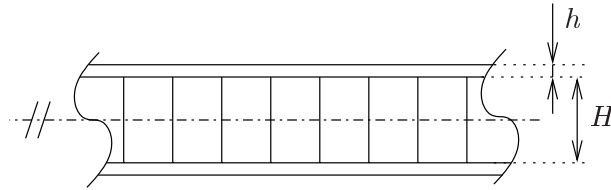


FIG. III.17: Caractéristiques géométriques de l'assemblage dans le modèle de Nilsson

donnée, E^c (module d'Young), G (module de cisaillement) et ρ^c (densité). Pour les peaux, les données mécaniques sont E^p pour le module d'Young et ρ^p pour la densité. On construit alors quelques grandeurs générales qui allégeront les écritures postérieures. Tout d'abord, la densité surfacique de l'assemblage est donnée par :

$$\sigma = 2h\rho^p + H\rho^c$$

Puis la rigidité statique de l'assemblage⁶ est calculée :

$$D_{\text{BF}} = \frac{E^c H^3}{12} + E^p h \left(\frac{H^2}{2} + Hh + \frac{2h^2}{3} \right)$$

Enfin, la rigidité d'une peau seule est notée :

$$D_{\text{HF}} = \frac{E^p h^3}{12}$$

On sait qu'à chaque fréquence, il existe un nombre d'onde k dans la structure. On définit alors la rigidité équivalente à cette fréquence par l'expression :

$$D(\omega) = \frac{\sigma \omega^2}{k^4}$$

Grâce à ces écritures, et dans une direction donnée, l'analyse de Nilsson (développée en Annexe C) amène l'équation de dispersion suivante :

$$\left(\frac{GH}{\omega \sqrt{\sigma}} \right) \left[\frac{D^{\frac{3}{2}}(\omega)}{D_{\text{BF}}} - D^{\frac{1}{2}}(\omega) \right] + D(\omega) - 2D_{\text{HF}} = 0 \quad (\text{III.14})$$

⁶Cette rigidité statique est obtenue par assemblage des rigidités de chacune des couches avec décalage de la fibre neutre (théorème de Koenig). On verra à la section IV.1.1 une extension de ce théorème.

Comportements asymptotiques : En basses fréquences, on obtient :

$$D(\omega) \underset{0}{\sim} D_{\text{BF}} \quad (\text{III.15})$$

soit

$$k(\omega) \underset{0}{\sim} \left(\frac{\sigma}{D_{\text{BF}}} \right)^{1/4} \sqrt{\omega} \quad (\text{III.16})$$

On retrouve une plaque de Love-Kirchhoff avec une rigidité équivalente issue d'une homogénéisation basse fréquence (théorème de Koenig, *c.f.* section IV.1.1 page 86). En hautes fréquences, on obtient :

$$D(\omega) \underset{+\infty}{\sim} 2D_{\text{HF}} \quad (\text{III.17})$$

soit

$$k(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\sigma}{2D_{\text{HF}}} \right)^{1/4} \sqrt{\omega} \quad (\text{III.18})$$

Ceci équivaut à une flexion des deux peaux en phase, avec cisaillement pur du cœur. Mais le cisaillement est en ω tandis que la flexion est en $\sqrt{\omega}$; c'est donc elle qui domine le mouvement (elle demande un plus faible nombre d'onde, donc une énergie de déformation moindre). La figure III.18 est une vue de cette équation de dispersion, avec ses deux asymptotes (à gauche, $k(\omega)$ en échelles log-log, à droite, $D(\omega)$ en échelle semilogarithmique en fréquence).

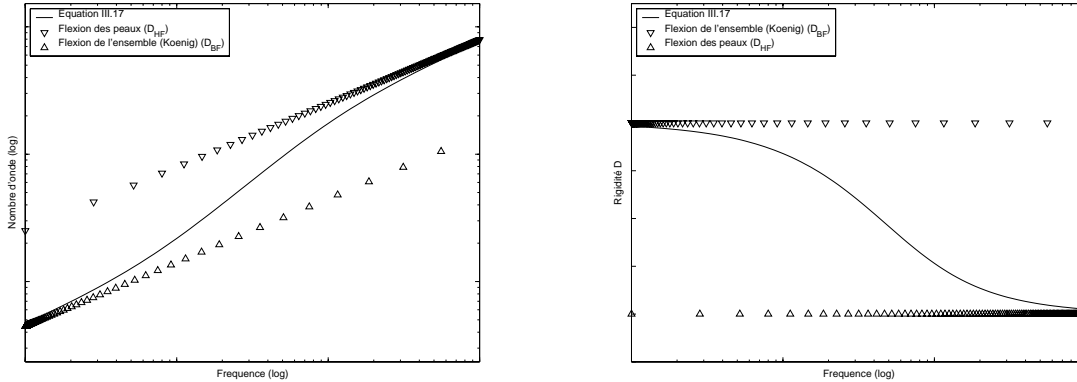


FIG. III.18: *Equation de dispersion analytique de Nilsson pour les nid d'abeilles*

III.4.5 Identification des paramètres apparents

Les données issues de la méthode IWC vont pouvoir servir à identifier les paramètres nécessaires au modèle de Nilsson, ce qui permettra de comparer le modèle analytique identifié et les mesures expérimentales. Une première série d'identification repose sur les mesures de caractéristiques globales de la plaque. Soit, dans le cas présent :

$$M_{\text{tot}} = 1,72 \text{ kg} \quad S = 0,40 \text{ m}^2 \quad H + 2h = 20,6 \text{ mm} \quad (\text{III.19})$$

$$\Rightarrow \sigma = 4,3 \text{ kg.m}^{-2} \quad (\text{III.20})$$

Les paramètres restants à identifier (H, E, G, \dots) sont ensuite trouvés par moindres carrés. L'équation de Nilsson III.14 peut être écrite sous la forme, pour la direction α ($\alpha \in \{x, y\}$) :

$$A_\alpha D_\alpha^{\frac{3}{2}} - B_\alpha D_\alpha^{\frac{1}{2}} - \omega C_\alpha = -D_\alpha \omega \quad (\text{III.21})$$

On forme alors la matrice \mathbb{A} (toutes les fonctions de la fréquences sont connues sur l'échantillonnage fréquentiel $(\omega_i)_i$) :

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} D_x^{\frac{3}{2}}(\omega_1) & -D_x^{\frac{1}{2}}(\omega_1) & -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_x^{\frac{3}{2}}(\omega_2) & -D_x^{\frac{1}{2}}(\omega_2) & -\omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_x^{\frac{3}{2}}(\omega_i) & -D_x^{\frac{1}{2}}(\omega_i) & -\omega_i & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & D_y^{\frac{3}{2}}(\omega_1) & -D_y^{\frac{1}{2}}(\omega_1) & -\omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & D_y^{\frac{3}{2}}(\omega_2) & -D_y^{\frac{1}{2}}(\omega_2) & -\omega_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & D_y^{\frac{3}{2}}(\omega_i) & -D_y^{\frac{1}{2}}(\omega_i) & -\omega_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

et le vecteur \mathbf{V} :

$$\mathbf{V} = - \begin{bmatrix} D_x(\omega_1).\omega_1 \\ D_x(\omega_2).\omega_2 \\ \vdots \\ D_x(\omega_i).\omega_i \\ \vdots \\ D_y(\omega_1).\omega_1 \\ D_y(\omega_2).\omega_2 \\ \vdots \\ D_y(\omega_i).\omega_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Les estimations optimales des paramètres ($A_x B_x C_x A_y B_y C_y$), optimales au sens des moindres carrés de l'équation III.21, sont alors :

$${}^t [A_x B_x C_x A_y B_y C_y] = ({}^t \mathbb{A} \mathbb{A})^{-1} {}^t \mathbb{A} \mathbf{V} \quad (\text{III.24})$$

De plus, on peut ajouter des lignes à la matrice \mathbb{A} et au vecteur \mathbf{V} pour augmenter le nombre de contraintes. Ici, les contraintes suivantes ont été ajoutées :

- $[-9.5e^4 \ 1e^2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ et $[0]$: D_x fini et de dérivée nulle en 0 (limite D_{BFx})
- $[0 \ 0 \ 0 \ -3e^4 \ 1e^1 \ 0]$ et $[0]$: D_y fini et de dérivée nulle en 0 (limite D_{BFy})
- $[0 \ 0 \ 1e^5 \ 0 \ 0 \ 0]$ et $[1.5e^6]$: limitation de D_{HFx}
- $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5e^4]$ et $[3.87e^5]$: limitation de D_{HFy}
- $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1e^5 \ 0]$ et $[6e^6]$: repousse l'inflexion vers les basses fréquences (limite G_y)

Cœur				Peaux		
H	E	G_{xz}	G_{yz}	h	E_x	E_y
15,6 mm	643 MPa	20 MPa	40 MPa	2,5 mm	2,12 GPa	1,28 GPa

TAB. III.b: Résultats de l'identification des paramètres du modèle de Nilsson pour le nid d'abeilles

On remonte ensuite aux caractéristiques mécaniques en identifiant terme à terme les équations III.14 et III.21. Le tableau III.b indique les résultats de cette identification. Ces résultats sont globalement en accord avec le modèle de Nilsson comme le montre la figure III.19. La moitié gauche de celle-ci présente les identifications des nombres d'onde k_x en bleu et k_y en rouge, ainsi que le modèle de Nilsson en noir. Les pointillés indiquent les comportements asymptotiques décrits précédemment. Sur la partie droite de la figure, ces résultats sont traduits en termes de rigidité (comme dans la figure III.18). L'accord sur les nombres d'ondes est probant en

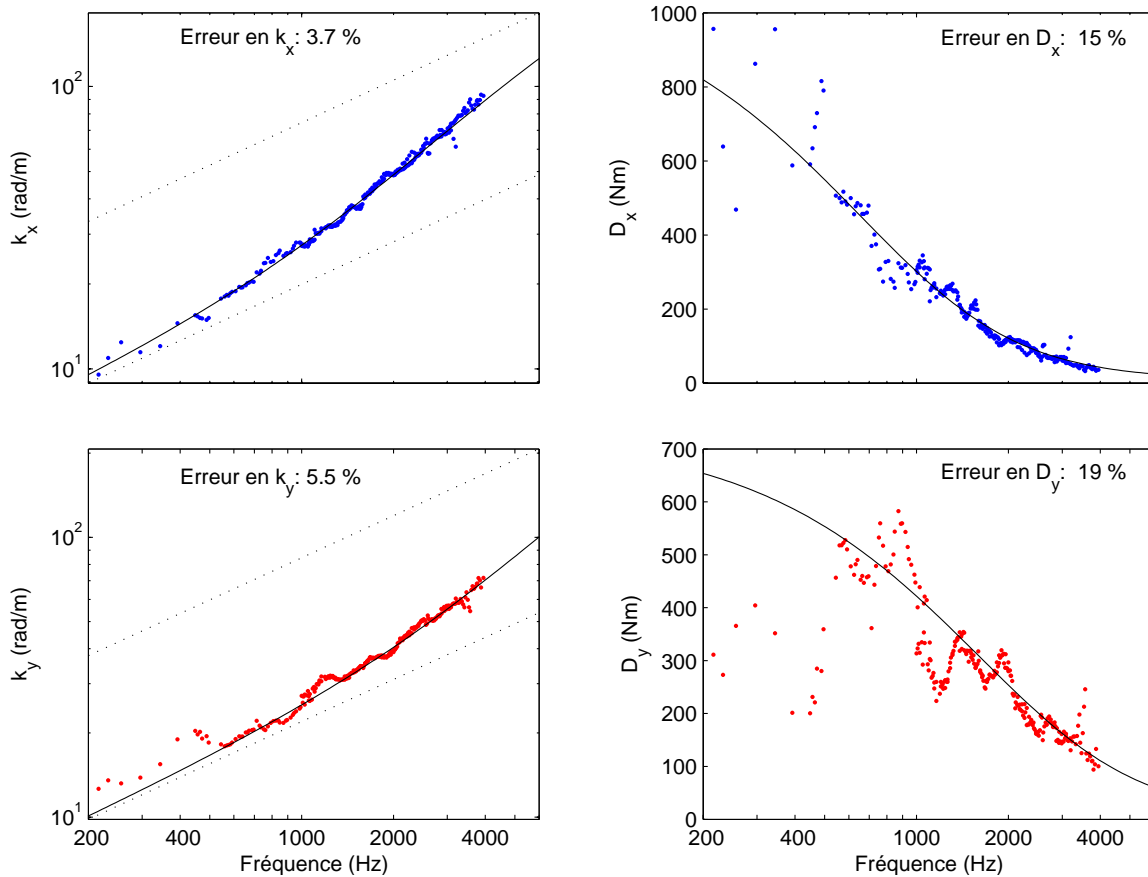


FIG. III.19: Comparaison entre le modèle de Nilsson identifié (en noir) et les mesures IWC (en couleurs)

particulier dans la direction x et à partir de 400 Hz, l'erreur restant confinée à quelques pour cent. La comparaison des rigidités dynamiques montre quant à elle des écarts paraissant plus importants (dûs à l'amplification de l'erreur par passage des nombres d'onde aux rigidités). En dessous de 400 Hz, les écarts entre modèle et identifications sont très importants du fait de la limitation basse fréquence de la méthode IWC.

III.5 Conclusion sur la méthode IWC

III.5.1 Identification de structures complexes

Grâce à la méthode IWC et à la recherche d'un modèle de plaque équivalente, la dynamique complexe d'un assemblage sandwich nid d'abeilles peut être appréhendée. En particulier, la dépendance de la rigidité en fonction de la fréquence est bien perçue. Le modèle analytique correspondant, développé par Nilsson [78], peut ainsi être validé et les paramètres physiques qu'il utilise identifiés. On peut même se féliciter de voir la IWC très précise et acérée, puisqu'elle détecte un phénomène non prévu par le modèle de Nilsson : autour de 1200 Hz, la structure est isotrope, avec une rigidité dynamique dans une direction plus faible que prévue (sur la figure III.14, la courbe rouge, autour de la fréquence citée, est anormalement basse, égale à la rigidité dans l'autre direction).

Au niveau implémentation numérique, la méthode IWC est performante. Le même programme permet d'utiliser aussi bien un champ synthétisé numériquement qu'un champ obtenu par des mesures expérimentales (robustesse). L'algorithme est entièrement automatique : les balayages fréquentiel et angulaire, les recherches de $(k(\omega, \theta), \gamma(\omega, \theta))$, la sélection des identifications correctes, l'identification des paramètres d'un modèle équivalent, sont entièrement automatiques. Si cette procédure, qui donne les modèles complets sur l'ensemble de la bande de fréquence à disposition, est relativement longue (une à deux heures sur des PC cadencés à 2GHz), l'utilisateur n'a aucune intervention à faire, contrairement à la majorité des méthodes modales.

III.5.2 Limites fréquentielles de la IWC

La méthode IWC est typiquement une méthode moyennes fréquences : en dessous d'une certaine fréquence – limite qui dépend de la taille de la structure, de son équation de dispersion, et de son amortissement –, l'approche utilisée est non valide. En effet, l'un des fondements de la méthode est l'hypothèse de fort recouvrement modal, qui implique une répartition de l'énergie dans toutes les directions de propagation. On a vu cependant que la méthode est toujours valide pour des recouvrements modaux très inférieurs à l'unité. Cependant, afin d'amoindrir cette limitation, plusieurs pistes sont à envisager. Tout d'abord l'analyse modale, vue à la section I.1, une méthode explicitement basses fréquences, et qui vient donc compléter la méthode IWC. Néanmoins, ses détracteurs lui reprochent de n'estimer les caractéristiques d'une structure que sur quelques fréquences particulières – ses fréquences propres. Une seconde piste consisterait à densifier le schéma modal avec un léger balayage en fréquence. A la fréquence centrale de la bande, certaines directions sont excitées tandis que d'autres ne transportent aucune énergie : le diagramme de la IWC, à cette fréquence, possède de grands secteurs angulaires vides, et la recherche d'un modèle de plaque équivalente s'appuie sur trop peu de données. Mais pour des fréquences voisines, sans doute les directions excitées seront-elles différentes. En superposant les diagrammes IWC, ceux-ci se densifieraient et la recherche des paramètres équivalents seraient de nouveau efficace. Il faudrait cependant supposer *a priori* un type d'équation de dispersion (par exemple $k^4 \propto \omega^2$) afin de stabiliser le nombre d'onde dans la bande de fréquence (en suivant

notre exemple, il faudrait comparer, dans la bande de fréquence, non pas les nombres d'onde mais les grandeurs $k/\sqrt{\omega}$.

Mais un tel développement est-il vraiment nécessaire, alors que les efforts se portent aujourd'hui principalement vers les plus hautes fréquences ? La méthode IWC, de ce côté-là, ne connaît pas vraiment de limite, à part peut-être celle du maillage spatial. En effet, plus la fréquence va augmenter, plus les longueurs d'onde vont diminuer. La limitation vient du problème de repliement, avec le théorème de Shannon imposant à l'expérimentateur au moins deux points de mesure par longueur d'onde. Cependant, la IWC est insensible aux conditions aux limites. Une solution pour obtenir une équation de dispersion à des fréquences plus élevées consiste simplement à ne mailler qu'une partie de la structure à étudier, en limitant la surface à une petite zone. Le choix de cette zone n'est pas anodin, puisqu'il risque de privilégier une direction de propagation donnée (comme dans l'article de Ferguson [43]). Afin de minimiser ce risque, il faut prendre une petite zone autour de la source ponctuelle, qui émet des ondes dans toutes les directions. Grâce à cette limitation de la taille de la zone mesurée, la IWC n'a de fait aucune réelle limite en hautes fréquences. Cette méthode est mise en œuvre sur le cas concret de la table d'harmonie qui sera exposé dans le dernier chapitre de ce manuscrit.

III.5.3 Identification de l'amortissement

Un autre aspect de la méthode IWC est sa capacité à estimer l'amortissement spatial γ . Mais cette estimation reste obscure : le signe changeant de l'amortissement identifié est difficilement interprétable, et les valeurs des identifications dans le cas d'un champ synthétisé de façon modale apparaissent trop faibles. De plus, on a vu dans l'étude théorique du cas monodimensionnel que la mesure de l'amortissement était dépendante des conditions aux limites et de la position de la source. Ce fait est mis en évidence par des constatations expérimentales :

La figure III.14 présentait les résultats de *deux* essais identiques, espacés dans le temps. Les *deux* résultats d'amortissement sont quasiment superposés : la mesure est bien reproductible. Ce n'est pas le cas lors des essais pour la plaque retaillée (figure III.16). Si la mesure de l'amortissement est reproductible, elle est donc très sensible aux conditions de l'expérience (peut-être celles-ci ont légèrement changé entre les deux derniers essais). La comparaison des courbes d'amortissement entre la plaque d'origine et la plaque retaillée (figures III.14 et III.16) montre que la mesure des rigidités dynamiques est à peu près la même dans les deux cas, alors que l'amortissement spatial est lui très différent. Il est donc certain que l'amortissement spatial n'est pas qu'un amortissement local, interne à la structure, mais bien le reflet d'un amortissement global prenant en compte toutes les pertes énergétiques. Ces pertes semblent dépendre fortement des conditions aux limites, de la position de la source, et de la taille de la structure.

Le chapitre suivant applique la méthode IWC à un autre type de structure anisotrope que sont les parois raidies.

Chapitre IV

Etudes des parois raidies

Ce chapitre traite de la vibration en flexion des plaques raidies périodiquement, structures typiquement anisotropes. Ces structures sont très souvent utilisées dans l'industrie, aussi bien dans le bâtiment, les transports maritimes et aériens, que dans la construction d'instruments de musique à travers leur table d'harmonie. Le comportement dynamique de ces structures offre une richesse phénoménologique notable. Ces structures, bien qu'abondamment étudiées dans la littérature scientifique, cachent des concepts de base non encore explorés. C'est en particulier le cas lorsqu'on s'intéresse à la propagation des ondes dans ce type de complexité structurale. De plus, force est de constater que les résultats expérimentaux manquent pour appuyer certains modèles de comportement.

La première partie du chapitre offre une revue bibliographique succincte sur les méthodes d'analyse de ces structures. La première de ces approches, qu'on détaille précisément, est une homogénéisation à partir d'hypothèses statiques, qui aboutit à un modèle de plaque homogène orthotrope, qu'on désigne par la suite par l'*orthotropie structurale*. Des simulations numériques sont proposées afin de valider cette homogénéisation basses fréquences. Lorsque la fréquence d'analyse augmente, les dynamiques du voile et des raidisseurs doivent être considérées séparément. Une autre approche pour analyser ces structures est de les considérer comme des milieux périodiques, présentant des caractéristiques bien particulières (notamment le phénomène de bandes passantes/bloquantes).

La seconde section se propose d'explorer les limites de validité de la méthode d'homogénéisation. Celle-ci est en effet couramment employée sur un large spectre fréquentiel. Des tests numériques sur un grand nombre de cas de figure sont réalisés. L'exploration des plans d'onde des champs associés est opérée. Elle montre une bonne concordance entre le modèle homogénéisé et les éprouvettes numériques. Cette concordance est cependant limitée aux basses fréquences. On définit ainsi une limite fréquentielle de validité du modèle homogénéisé. Pour des fréquences plus élevées, des comportements atypiques sont observés. Leur interprétation précise fait appel au concept de *modes propagatifs*. Des tests expérimentaux sur un échantillon de paroi raidie viennent corroborer ces observations.

La troisième section se focalise sur un outil numérique de calcul des nombres d'onde de ces modes propagatifs. Elle détaille une méthode numérique spectrale s'appuyant sur un modèle éléments finis et permettant de calculer les nombres d'onde et les vitesses de groupe de ces modes propagatifs. C'est une approche de type propagation multi-modale guidée. Cette méthode est appliquée à la structure testée expérimentalement et fournit les équations de dispersion associées à la propagation guidée le long des raidisseurs. La dernière section offre une comparaison calcul/essais à travers une validation expérimentale effectuée sur plusieurs bancs de mesure. Deux méthodes expérimentales, basées sur l'exploration du plan d'onde et sur l'aspect bien particulier des modes propagatifs, sont mises en place. Elles permettent d'adapter la méthode IWC à la recherche de plusieurs modes de propagation. Les résultats des comparaisons sont probants et offrent des perspectives très encourageantes quant à la prévision du comportement dynamique large bande des parois raidies.

IV.1 Diverses modélisations des parois raidies

IV.1.1 Homogénéisation des structures

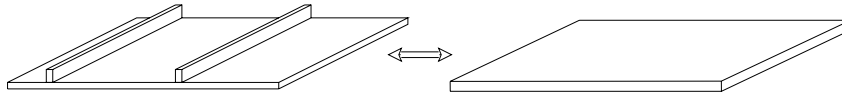


FIG. IV.1: La plaque isotrope raidie équivaut à une plaque orthotrope homogène.

L'idée d'homogénéisation des structures nervurées n'est pas très originale, car très attirante, puisqu'elle permet de "fondre" les subtilités d'une structure au sein même d'un matériau équivalent (figure IV.1). Par ce biais, il est possible, lors de modélisations ultérieures, de prendre un maillage beaucoup plus grossier que les subtilités géométriques. Par exemple, les coques de navires et d'avions sont constituées de voiles métalliques tendus sur un squelette – une structure nervurée. La taille des renforts est de l'ordre du centimètre tandis que la structure elle-même est de l'ordre de la dizaine de mètres. Un maillage de la structure entière avec une longueur de mailles adaptée aux raidisseurs serait bien trop gros pour être exploitable. C'est pourquoi des procédures d'homogénéisation ont été développées, notamment à partir des travaux de Timoshenko [30]. On citera en particulier la thèse de Cordonnier-Cloarec [14] dont l'étude qui suit s'inspire.

Homogénéisation des structures nervurées

La nouveauté proposée ici est de mener les calculs avec le matériau du voile et le matériau des raidisseurs *différents* et *orthotropes*. Les directions principales des matériaux sont supposées alignées avec les raidisseurs. Le calcul est effectué en statique (valide en basses fréquences) grâce au théorème de Koenig [8].

Notations : (a, b, h, p) définissent la géométrie de la plaque nervurée (fig. IV.2). Z désigne l'élévation verticale d'une fibre neutre donnée. Les caractéristiques mécaniques, $(\rho \ E_x \ E_y \ G_{xy} \ \nu_{xy} \ \nu_{yx} = \nu_{xy} \frac{E_x}{E_y})$ sont suivies d'un exposant correspondant au matériau (^P pour la plaque, ^r pour les raidisseurs, ^H pour la plaque Homogénéisée). La direction x correspond à la direction

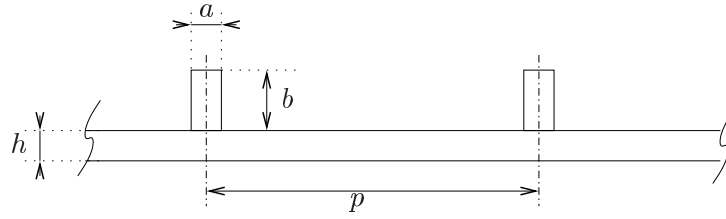


FIG. IV.2: Plaque raidie en coupe. Définition des notations

des raidisseurs, y est sa perpendiculaire, et z est normale à la plaque. De plus, il est pratique de définir les modules d'Young modifiés par les coefficients de Poisson¹ :

$$\tilde{E}_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}^2 \frac{E_x}{E_y}} \quad ; \quad \tilde{E}_y = \frac{E_y}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}^2 \frac{E_x}{E_y}} \quad (\text{IV.1})$$

Enfin, le moment d'inertie en flexion est défini de façon linéique et est noté par :

$$D. = \frac{h^3}{12} \tilde{E}. \quad (\text{IV.2})$$

Densité massique : La fibre neutre de masse est obtenue par la relation :

$$Z_G(\rho^p p h + \rho^r a b) = \frac{h}{2} \rho^p p h + (h + \frac{b}{2}) \rho^r a b \quad (\text{IV.3})$$

d'où

$$Z_G = \frac{\frac{h}{2} \rho^p p h + (h + \frac{b}{2}) \rho^r a b}{\rho^p p h + \rho^r a b} \quad (\text{IV.4})$$

Ceci permet de définir une épaisseur équivalente : en considérant que la structure équivalente est une plaque homogène, la fibre neutre est à la moitié de l'épaisseur ($Z_G = \frac{1}{2} h^H$), donc :

$$h^H = 2 Z_G \quad (\text{IV.5})$$

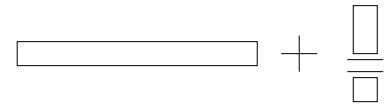
Et par conservation de la masse dans les deux modèles :

$$\rho^H = \frac{\rho^p h p + \rho^r a b}{h^H p} \quad (\text{IV.6})$$

Flexion y , perpendiculaire aux raidisseurs :

C'est l'association en série, sur une période, de deux éléments :

- la plaque seule (sur $p - a$)
- un assemblage double couche de la plaque et du raidisseur (sur a).



Le premier segment a un moment d'inertie égal à :

$$D_y^1 = \frac{h^3}{12} \tilde{E}_y^p \quad (\text{IV.7})$$

Le théorème de Koenig donne le moment d'inertie du second segment autour d'une fibre Z_y quelconque :

$$D_y^2 = \tilde{E}_y^p \left(\frac{h^3}{12} + h \left(Z_y - \frac{h}{2} \right)^2 \right) + \tilde{E}_y^r \left(\frac{b^3}{12} + b \left(Z_y - h - \frac{b}{2} \right)^2 \right) \quad (\text{IV.8})$$

¹A propos du coefficient de Poisson dans le module d'Young apparent, voir la note de pied de page, page 47.

Par définition, la fibre Z_y minimise ce moment d'inertie :

$$Z_y = \frac{\tilde{E}_y^p h^2 + \tilde{E}_y^r b^2 + 2\tilde{E}_y^r b h}{2(\tilde{E}_y^p h + \tilde{E}_y^r b)} \quad (\text{IV.9})$$

Enfin, l'association en série des deux segments s'écrit :

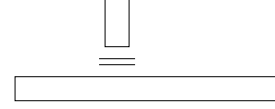
$$\frac{p}{D_y^H} = \frac{p-a}{D_y^1} + \frac{a}{D_y^2} \quad \text{d'où} \quad D_y^H = \frac{D_y^1}{1 - \frac{a}{p} \frac{D_y^2 - D_y^1}{D_y^2}} \quad (\text{IV.10})$$

Pour remonter au module d'Young, on utilise le fait que la structure homogène est une plaque, d'où :

$$\tilde{E}_y^H = \frac{12}{(h^H)^3} D_y^H \quad (\text{IV.11})$$

Flexion x , dans la direction des raidisseurs :

C'est l'association en parallèle, sur une période p , de la plaque (de longueur p) et du raidisseur (de longueur a).



Sur cette période entière, la structure a un moment d'inertie en flexion autour d'une fibre Z_x égal à :

$$D_x^H = \tilde{E}_x^p p h \left(\frac{h^2}{12} + \left(Z_x - \frac{h}{2} \right)^2 \right) + \tilde{E}_x^r a b \left(\frac{b^2}{12} + \left(Z_x - h - \frac{b}{2} \right)^2 \right) \quad (\text{IV.12})$$

Avec, toujours, Z_x qui minimise ce moment :

$$Z_x = \frac{\tilde{E}_x^p p h^2 + \tilde{E}_x^r a b^2 + 2\tilde{E}_x^r a b h}{2(\tilde{E}_x^p p h + \tilde{E}_x^r a b)} \quad (\text{IV.13})$$

Comme précédemment, la structure homogénéisée étant une plaque, il vient :

$$\tilde{E}_x^H = \frac{1}{p} \frac{12}{(h^H)^3} D_x^H \quad (\text{IV.14})$$

Couplage des directions $x - y$: Tous les effets de couplages sont mis dans le module de cisaillement, ce qui implique :

$$\begin{aligned} \nu_{xy}^H &= 0 \\ \implies \tilde{E}^H &= E^H \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Ensuite, la structure équivalente est supposée avoir une orthotropie *elliptique* (voir la section II.4, page 45), à savoir :

$$\begin{aligned} G^H &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{E_x^H E_y^H + E_y^H \nu_{xy}^H}}{1 - \nu_{xy}^H \nu_{yx}^H} \\ \implies G^H &= \frac{1}{2} \sqrt{E_x^H E_y^H} \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Sommaire du calcul : Les données géométriques et matériaux d'un panneau raidi permettent de définir une plaque orthotrope équivalente, dite *homogénéisée* :

- L'équation IV.4 injectée dans l'équation IV.5, donne l'épaisseur de la plaque équivalente h^H .
- Grâce à cette épaisseur, on utilise l'équation IV.6 qui calcule la densité massique ρ^H de la plaque homogène.
- L'équation IV.9 utilisée dans l'équation IV.8, accompagnée de l'équation IV.7, permet de connaître D_y^H grâce à l'équation IV.10. Finalement, on trouve le module d'Young E_y^H de la plaque équivalente dans la direction perpendiculaire aux raidisseurs en utilisant les équations IV.11 et IV.15.
- De la même façon, l'équation IV.13 sert dans l'équation IV.12, pour définir D_x^H . Le module d'Young E_x^H de la plaque homogène, dans la direction des raidisseurs, est alors donné par les équations IV.14 et IV.15.
- Finalement, l'équation IV.16 donne le module de cisaillement équivalent G^H .
- Les coefficients ν_{xy}^H et ν_{yx}^H sont nuls par hypothèse.

Validation numérique

Quelle est la validité de ces calculs ? Afin de répondre à cette question, quatre cas tests sont envisagés numériquement. La première configuration est un panneau d'aluminium rectangulaire encasté sur l'un de ses bords. Les raidisseurs sont perpendiculaires à cet encastrement. Le second cas modélise une plaque carrée libre-libre en aluminium. Les raidisseurs sont alignés à l'un des bords de la plaque. La troisième structure se rapproche d'une table d'harmonie réelle en utilisant un matériau orthotrope (épicéa, *c.f.* page 134). La plaque est encadrée sur deux bords contigus, et les raidisseurs alignés à un côté. La dernière plaque envisagée est orthotrope (épicéa), libre-libre, et les raidisseurs (alignés sur l'orthotropie du voile) sont tournés par rapport aux côtés de la plaque.

Le calcul de référence est un calcul 3-D à maille fine, constitué d'éléments "brique" à trois degrés de liberté par nœud (Solid45 sous ANSYS[©]). Une première comparaison est effectuée avec un calcul 2-D constitué d'éléments plans quadratiques à quatre nœuds, six degrés de liberté par nœud (Shell163 pour le voile, Shell181 pour les raidisseurs sous ANSYS[©]). Le décalage de la fibre neutre est pris en compte par une rigidification globale des paramètres mécaniques (cette rigidification est explicitée page 136). La deuxième comparaison est faite avec un calcul 2-D homogénéisé avec la technique citée plus haut. Les éléments sont les mêmes que pour le voile du modèle précédent (Shell163 sous ANSYS[©]). La troisième comparaison tente d'améliorer le processus d'homogénéisation ; en effet, l'hypothèse d'*orthotropie elliptique* est assez forte. Afin de la lever, on considère dans ce nouveau modèle que le module de cisaillement G_{xy}^H est celui du voile seul. Cette hypothèse ne semble ni plus ni moins vraisemblable que la précédente.

Afin de comparer les résultats de façon très lisible, les modes sont regroupés selon leurs déformées :

- avec la première structure, le nombre de lignes nodales perpendiculaires aux raidisseurs (parallèles à l'encastrement) est compté.

- avec la deuxième structure, le classement s’effectue aussi grâce aux lignes nodales perpendiculaires aux raidisseurs.
- avec la troisième structure, c’est la symétrie par rapport à la diagonale qui sert au classement (modes symétriques, plutôt parallèles, plutôt perpendiculaires)
- avec la quatrième structure, on exploite le couplage entre les directions (modes de flexion pure si directions découplées, modes parallèles, modes perpendiculaires).

Ces comparaisons sont tracés sur la figure IV.3 page suivante. Les résultats ne sont pas parfaits : les fréquences propres trouvées par les différents modèles ne sont pas identiques. Mais on peut quand même conclure que l’homogénéisation est assez efficace, puisque les résultats trouvés grâce à elle ne diffèrent pas plus de la référence que le modèle 2-D complet. Ce type d’homogénéisation est donc valide pour les premiers modes d’une structure.

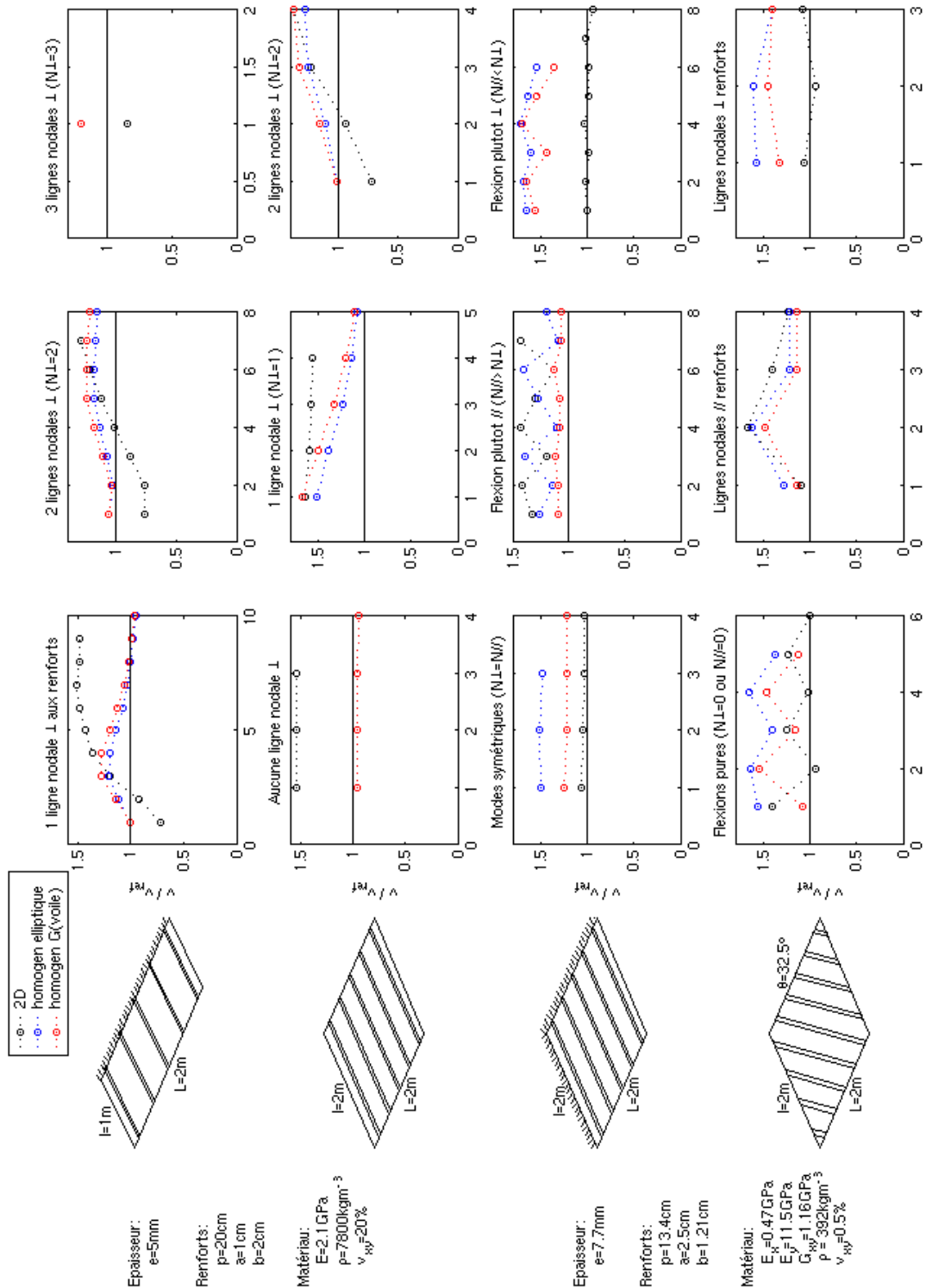


FIG. IV.3: Comparaison des fréquences modales des quatre structures tests, trouvées avec les quatre différents modèles (3-D pour référence, 2-D en noir, homogène elliptique en bleu, homogène cisaillement du voile en rouge)

IV.1.2 Autres modélisations des parois raidies

L’homogénéisation vue dans la section précédente permet de modéliser simplement les parois raidies pour des fréquences faibles. Au delà, il est nécessaire de différencier la dynamique des raidisseurs de celle de la plaque.

A cette fin, Grice [88] propose une analyse phénoménologique de l’assemblage : si les dynamiques des deux milieux sont très différentes (longueur d’onde dans les raidisseurs plus que deux fois plus importante que celle dans la plaque), alors on peut considérer que l’énergie est principalement véhiculée, à grande distance, par les raidisseurs. La plaque a une influence réactive sur ceux-ci, en “pompe” l’énergie vibratoire des raidisseurs. Dans cette vision, les raidisseurs rayonnent de l’énergie au sein de plaque. Les deux paramètres principaux sont alors la longueur d’onde dans la plaque et la distance inter-raisseurs.

Dans le domaine modal, Kuravsky [90] propose une méthode de correction des éléments finis, dénommée “Correction by Elastic Connection Insertion” (CECI method). Ses comparaisons avec diverses méthodes éléments finis mettent en évidence la validité de son approche, ainsi que l’économie informatique qu’elle entraîne (un modèle éléments finis maillant l’ensemble des raidisseurs a un coût très élevé dont la méthode CECI permet de s’affranchir). Toujours avec une approche modale, Chakraborty [85] fait une étude très complète et originale concernant l’identification des structures raidies. A partir de données modales sur des structures, et grâce à une modélisation éléments finis, il est capable d’identifier les caractéristiques mécaniques du voile, celles des raidisseurs, ainsi que la position et la géométrie des raidisseurs. Il montre notamment que grâce à l’utilisation des déformées modales, il suffit d’un faible nombre de modes pour identifier tous ces paramètres. Néanmoins, il ne fait aucune validation expérimentale (tous ses cas tests sont numériques).

Une autre approche est celle de Orrenius [97], qui utilise un formalisme “guide d’ondes” pour trouver les équations de dispersion au sein d’une plaque raidie. Il ne considère dans un premier temps qu’une bande bordée de deux raidisseurs. Il construit une formulation faible associée au comportement dynamique d’une manière classique. Puis il impose des fonctions d’interpolation assez une dépendance exponentielle dans la direction privilégiée de propagation. Une nouvelle formulation éléments finis en découle alors, formulation qui aboutit à la détermination des équations de dispersion (qui sont multiples : à partir d’une certaine fréquence, plusieurs ondes de flexion peuvent se propager). Dans un deuxième temps, il rajoute à sa structure des bandes. Chaque mode de propagation se voit multiplié par le nombre de raidisseurs modélisés. Par extrapolation – qui n’engage que l’auteur de cette thèse, et non Orrenius –, on retrouve les bandes passantes et bloquantes des milieux périodiques infinis. En effet, chaque mode ainsi trouvé est compris entre deux cas limites (qui correspondent, du point de vu des raidisseurs, à un mouvement de flexion et un mouvement de torsion). Pour un milieu périodique infini, les ondes propagatives pourraient donc avoir n’importe quel nombre d’onde, tant que celui-ci est compris entre les deux limites “torsion” et “flexion”.

Khumbah [89] utilise une hybridation de la méthode de la raideur dynamique (Dynamic Stiffness Method) avec la méthode des Eléments Finis. La méthode de la raideur dynamique

permet de voir une structure $2-D$ à travers un modèle $1-D$. L'originalité de Khumbah consiste à utiliser la méthode éléments finis pour modéliser un raidisseur dans la direction perpendiculaire à la dimension restante (raidisseur transverse), alors que la méthode de la raideur dynamique prend facilement en considération un raidisseur dans l'autre direction. Ainsi, son modèle pourra à terme traiter de raidisseurs dans les deux directions.

IV.1.3 Modélisation des parois raidies en hautes fréquences

Une approche SEA des parois raidies est faite par Maidanik [95]. Il compare une résolution classique, en terme de variables cinématiques, à une résolution énergétique. Une profonde différence entre les deux approches est la perte d'information sur la phase dans la méthode énergétique. D'après ses résultats, l'auteur conclut que cette non connaissance de la phase empêche à la méthode énergétique de bien appréhender les phénomènes de bandes passantes et bloquantes. L'approche classique, quant à elle, montre la très grande variabilité de la solution selon que la fréquence est proche du centre d'une bande passante ou non. Une autre approche SEA est menée par Bremner [84]. A partir de l'orthotropie structurale vue dans la section précédente (homogénéisation basse fréquence), et des périodicités des raidisseurs, l'auteur estime la densité modale d'un panneau raidi. C'est grâce à cette estimation précise de la densité modale que sa comparaison avec un cas test est correcte.

Une modélisation directe d'un raidisseur posé sur une plaque est réalisée par Goyder [87]. Il modélise une poutre infinie accrochée à une plaque infinie, et conclue que les ondes de flexion et de torsion de la poutre ont des comportements très différents. Les ondes de flexion sont faiblement couplées avec la plaque, qui se comporte comme un récepteur : la poutre émet des ondes de flexion dans la plaque, avec une très forte directivité. Pour les ondes de torsion de la poutre, les deux systèmes sont fortement couplés (on ne peut plus dire que l'un émet dans l'autre). Dans ce cas, à basses fréquences, c'est la plaque qui domine la dynamique de l'assemblage tandis qu'à hautes fréquences, c'est la poutre qui domine. Ses calculs sont entièrement analytiques, sans validation expérimentale.

IV.1.4 Modélisation des parois raidies vues comme des milieux périodiques

Les structures périodiques présentent un comportement très particulier, étudié déjà depuis Newton. La spécificité de ces milieux est mis en évidence par Brillouin [12]. Le fait de devoir se répéter égal à lui-même impose au champ vibratoire une certaine longueur d'onde, et donc une certaine fréquence (à travers l'équation de dispersion). On montre en particulier que pour certaines bandes de fréquences, aucune onde ne peut se propager. On parle de bandes passantes et bandes bloquantes.

Sen Gupta [98] utilise ce formalisme pour déterminer les fréquences modales d'une poutre finie périodiquement appuyée. En effet, la nature périodique des appuis contraint les ondes propagatives à certaines bandes de fréquences. Les modes sont vus comme des interférences d'ondes propagatives, interférences pilotées par les conditions aux limites. Il met en place une

méthode graphique très simple pour la détermination des fréquences propres.

Une simplification de la modélisation des milieux périodiques est apportée par Lin [94], qui utilise, pour un milieu monodimensionnel, la méthode de la matrice de transfert. Celle-ci, pour une portion de trajet donnée – ici une période –, permet de relier déplacement et force à l’entrée et déplacement et force à la sortie. Cette méthode s’avère très performante pour les milieux $1-D$, surtout pour les systèmes d’extension finie.

Plus récemment, Tso [99], à travers un modèle SEA, étudie le couplage entre une structure périodiquement raidie et une plaque simple. Il utilise le concept de bandes passantes et bandes bloquantes induites par le théorème de Floquet (théorie de Bloch). Une validation grâce à la PIM montre que l’analyse est valide au moins pour les basses fréquences, et l’auteur invoque la non modélisation des ondes dans le plan (ondes S et P) pour justifier les écarts entre théorie et constatations expérimentales. En effet, on doit rappeler qu’un assemblage de deux plaques avec un angle couple les ondes de flexion et les ondes de compression/cisaillement.

Bocquillet [11, 68] applique la MES à une structure $1-D$ périodiquement raidie. Sa formulation permet de retrouver exactement les bandes passantes et bloquantes prévues par les modèles cinématiques classiques. Son intérêt consiste en l’allègement du modèle, dû à l’utilisation d’une formulation énergétiques, tout en gardant la localisation spatiale de l’énergie.

Généralement, les structures périodiques sont appréhendées comme une succession infinie de petites structures identiques. Mead [96] propose une autre vision des choses. Il considère une structure idéalisée infinie, une poutre par exemple, posée en un point sur un appui élastique. Les caractéristiques de la poutre en ce point sont condensées dans le terme d’*impédance ponctuelle du système infini*. Dans le milieu périodique, chaque support (périodique) verra cette impédance ponctuelle. Pour une onde propagative, deux supports consécutifs verront le même mouvement, décalé par le terme d’exponentielle complexe. Les vibrations des deux supports seront donc identiques à la phase près. Cette vision des choses permet de voir la structure comme un milieu infini simple (poutre par exemple) excité par ce “réseau de phases” dont l’impédance ponctuelle est connue. Sa méthode est alors très peu coûteuse, et permet de retrouver les constantes de propagation (équation de dispersion), avec notamment les bandes passantes et bloquantes.

Langley [91, 92] étudie une structure $2-D$ infinie bipériodique, en utilisant le concept de surface à phase stationnaire. Il montre alors que deux comportements peuvent surgir, selon la fréquence. Le premier comportement est assez lisse, isotrope, tandis que le second présente des caustiques qui drainent la grande majorité de l’énergie. Des zones d’ombres apparaissent alors, suggérant des applications directes dans l’optique d’un filtrage spatial. Ce filtrage, nommée “beaming”, impose à l’énergie de ne se déplacer que dans une direction bien particulière. Ses calculs sont validés [93] sur un grillage métallique très amorti (le fort amortissement veut que l’énergie soit très absorbée avant d’atteindre les bords de la plaque; ainsi, le milieu peut être considéré comme infini).

IV.2 Orthotropie structurale

La section IV.1.1 exposait une méthode d'homogénéisation des structures raidies. Celle-ci, à partir d'hypothèses basses fréquences, proposait de concentrer tout le comportement des raidisseurs dans les rigidités dynamiques d'une plaque équivalente orthotrope. Le chapitre II exposait, de son côté, des méthodes moyennes fréquences pour l'identification des équations de dispersion d'un milieu bidimensionnel. Cette section présente le résultat de ces méthodes appliquées à des plaques raidies, afin de valider la méthode d'homogénéisation en basses fréquences. De plus, elle propose une estimation de la limitation en fréquence de la méthode, et permet d'appréhender le comportement des plaques raidies au delà de cette limite.

IV.2.1 Epreuve virtuelle

Modèle numérique : La notion d'épreuve virtuelle, développée à la section III.1.2, est mise en œuvre. La structure modélisée est une plaque raidie, déclinée sous la forme de 5 exemples, dont les caractéristiques sont fournies dans la table IV.a.

	a.	b.	c.	d.	e.
Surface de la plaque :	$2 \times 2 \text{ m}^2$	$2 \times 2 \text{ m}^2$	$2 \times 2 \text{ m}^2$	$2,2 \times 2,2 \text{ m}^2$	$1,2 \times 0,9 \text{ m}^2$
Epaisseur de la plaque : h	7,7 mm	7,7 mm	5 mm	5 mm	1,25 mm
Raidisseurs : $a \times b$	$25 \times 12,1 \text{ mm}^2$	$25 \times 12,1 \text{ mm}^2$	$1 \times 20 \text{ mm}^2$	$1 \times 20 \text{ mm}^2$	$10 \times 4 \text{ mm}^2$
Période : p	134 mm	134 mm	250 mm	300 mm	110 mm
Angle : θ_{\perp}	$32,5^{\circ}$	$32,5^{\circ}$	45°	20°	20°
Matériaux :	Epicéa sur epicéa (fils alignés)	Epicéa sur epicéa (fils croisés)	Acier sur aluminium	Acier sur aluminium	Duralumin sur duralumin

TAB. IV.a: *Caractéristiques des exemples de plaques raidies*

Le champ de déplacement de cette plaque raidie est obtenu grâce à une modélisation fine éléments finis. Les éléments utilisés sont de type brique (8 nœuds à 6 degrés de liberté) de petites dimensions. Le maillage du cas **c.** est exposé figure IV.4 à titre d'exemple. Pour éviter les

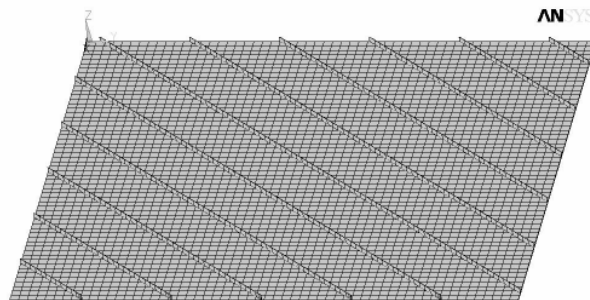
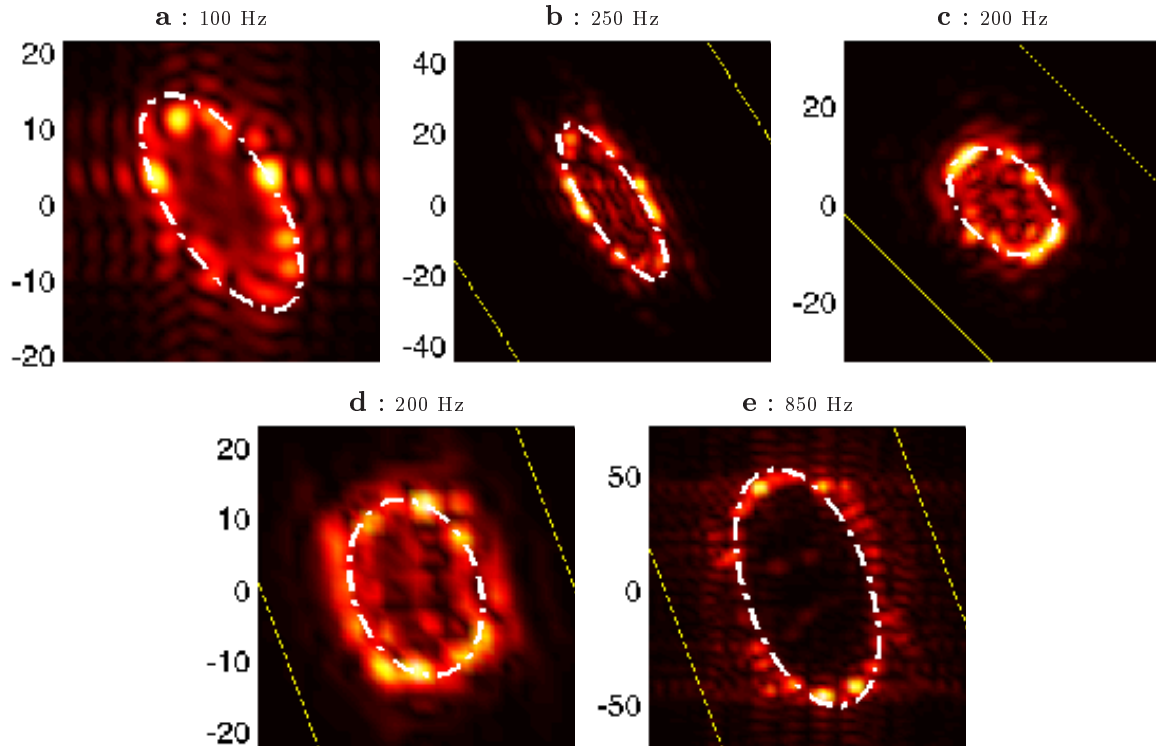


FIG. IV.4: *Maillage de l'exemple c de plaque raidie*

éventuelles singularités engendrées par le calcul sur les fréquences modales, une dissipation est introduite via un amortissement modal constant de 0,4 %. Quelques calculs harmoniques (*i.e.* à fréquence ν unique fixée), sont effectués pour chaque plaque. Les résultats sont extraits sous la forme du déplacement “vertical” (normal à la plaque au repos) de chacun des nœuds de la plaque. Ainsi, les méthodes d’exploration du plan d’onde peuvent être appliquées. L’amortissement n’étant pas ici le sujet d’étude, on se limite à l’emploi de la transformée de Fourier continue (CFT, voir la section II.3).

Validation de l’homogénéisation basses fréquences : La méthode d’homogénéisation basses fréquences (section IV.1.1) est appliquée avec les paramètres utilisés dans les modèles éléments finis (épaisseur de la plaque, matériaux, ...). Elle permet de construire une équation de dispersion orthotrope (elliptique), qui peut être superposée au plan d’onde obtenu à partir des CFT des champs numériques. Les résultats pour une excitation basse fréquence sont présentés figure IV.5 : la CFT est affichée en nuances de couleurs, l’orthotropie structurale (résultat de l’homogénéisation basses fréquences) est tracée en ligne pointillée blanche. De plus, la présence des rigidificateurs est manifestée par les droites d’équation $k_{x'} = \frac{2\pi}{p}$ et $k_{x'} = -\frac{2\pi}{p}$ (lignes jaunes). Ces résultats sont très probants : la courbe de l’orthotropie structurale passe bien par les points



En abscisses et en ordonnées : nombre d’onde k , en rad/m

FIG. IV.5: Résultats de la CFT et de l’homogénéisation basses fréquences pour des fréquences peu élevées

les plus “chauds” de la CFT, *i.e.* les nombres d’onde effectivement porteurs d’énergie. On s’attendait à ce résultat dans les deux directions d’orthotropie, sur lesquelles reposent les calculs d’homogénéisation. Mais la courbe blanche suit les points chauds de la CFT pour *toutes* les directions, pas uniquement pour les deux directions d’orthotropie : il est très satisfaisant de

constater que la proposition d'orthotropie *elliptique*, qui n'était fondée sur aucune hypothèse, est tout à fait correcte. Une imprécision de la méthode apparaît néanmoins : dans la direction $k_{y'}$, c'est-à-dire lorsque la direction de propagation est perpendiculaire aux raidisseurs, la méthode d'homogénéisation surestime légèrement le nombre d'onde. En faisant varier la fréquence, on s'aperçoit que cette surestimation diminue pour des fréquences plus faibles (jusqu'à être imperceptible), et augmente pour des fréquences plus élevées. Une première limitation en fréquence de la méthode d'homogénéisation basses fréquences est liée à cette surestimation du nombre d'onde dans la direction perpendiculaire aux raidisseurs.

Il convient ici de préciser les fréquences d'excitation utilisées. On parle en effet de "basses fréquences". Mais en réalité, les fréquences d'excitation des exemples résultent d'un compromis. Le but dans cette partie était de valider la méthode d'homogénéisation basses fréquences : il fallait donc une excitation basse fréquence. Cependant, afin de reconnaître une équation de dispersion, il est nécessaire d'avoir un certain nombre de points chauds, donc une certaine densité modale (comme avec la IWC). Les fréquences choisies correspondent à ce compromis.

Dérives par rapport à l'homogénéisation basses fréquences : Les résultats pour une excitation à plus haute fréquence sont présentés figure IV.6. Deux dérives entre résultats CFT

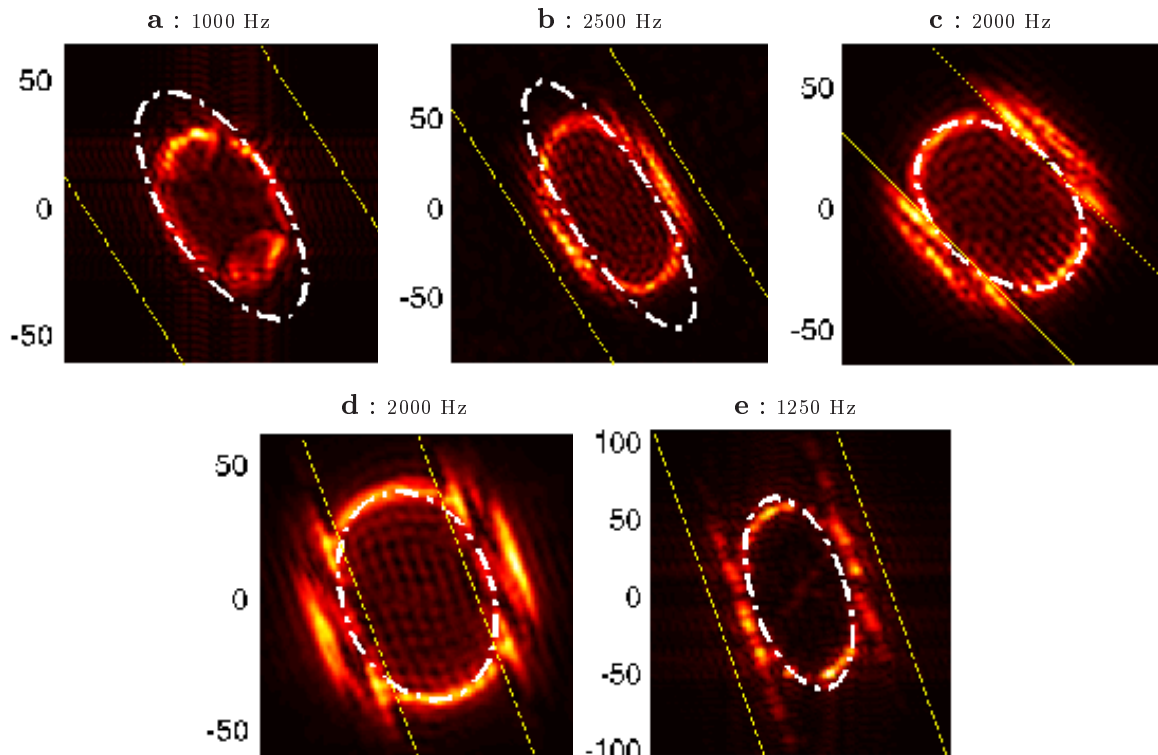


FIG. IV.6: Résultats de la CFT et de l'homogénéisation basses fréquences pour des fréquences élevées

et homogénéisation sont à noter : la surestimation des nombres d'onde en $k_{y'}$ et l'apparition de lignes parallèles $k_{x'} = \text{constante}$ au delà de l'orthotropie structurale.

Première dérive : il s'agit de la même surestimation que celle notée plus haut. S'agissant d'une surestimation de k , elle correspond à une sous-estimation de \tilde{D} , donc soit une surestimation de la masse, soit une sous-estimation de la raideur. Or, les plus grandes erreurs sont obtenues dans les exemples **a** et **b**, et dans une moindre mesure dans l'exemple **e**. Dans les deux premiers cas, les raidisseurs sont plus larges que hauts, et dans le cas **e** ils sont de section carrée. L'ajout de masse est lié surtout à la largeur, tandis que l'ajout de raideur est lié surtout à la hauteur des raidisseurs. L'erreur semble donc plus liée à la masse qu'à la raideur (cas **a** et **b** : fort ajout de masse, forte surestimation. Cas **e** : ajout de masse faible, surestimation faible. Cas **c** et **d** : ajout de masse quasi nul, surestimation quasi nulle).

Pourquoi cette surestimation dépend-elle de la fréquence ? Une explication pourrait venir du fait que la longueur d'onde diminue quand la fréquence augmente. Pour une très faible longueur d'onde, un très grand nombre de périodes se situe sur la plaque seule, entre deux raidisseurs. La densité surfacique γ est celle de la plaque seule, sans correction de masse. Tandis qu'à basses fréquences (et *a fortiori* en statique, où la longueur d'onde est infinie), toutes les longueurs d'onde subissent l'effet inertiel du raidisseur. Cette explication semble acceptable, mais une implantation numérique simple — qui consiste à utiliser la rigidité D de l'homogénéisation et la masse surfacique ρh de la plaque seule — donne des résultats insatisfaisants, du même ordre que ceux de la figure IV.6.

Deuxième dérive : dérivant complètement de toute orthotropie elliptique, il apparaît dans les CFT des lignes à $k_{x'}$ constant. Elles sont situées soit à la limite de l'orthotropie structurale, soit nettement au delà. De dimension finie, chaque segment est centré sur l'axe des $k_{x'}$, et possède son symétrie par rapport à l'axe des $k_{y'}$. La dimension du segment n'excède jamais le grand axe de l'ellipse. En faisant varier la fréquence, on s'aperçoit qu'elles apparaissent progressivement : tout d'abord, pour les fréquences faibles, il n'y en a aucune (comme dans la figure IV.5). Puis un premier couple de segments apparaît tangent à l'ellipse, dont il se détache (figure IV.6 **e**). Puis un deuxième couple de segments tangente l'ellipse, le premier continuant de s'écarter (figure IV.6 **b** et **c**). Puis un troisième (figure IV.6 **d**), et ainsi de suite. Soupçonnant un artefact numérique venant du modèle éléments finis, on réalise un banc d'expérimentation basé sur l'exemple **e**.

IV.2.2 Banc d'essais

Afin de contrôler la validité des résultats précédents, un banc de mesure est réalisé (figure IV.7). Le champ de vibration \hat{w} est obtenu grâce à la mesure au vibromètre laser exposée à la section III.1.1. La même analyse que précédemment est faite. Les résultats sont présentés figure IV.8. Le comportement décrit plus haut, et constaté sur les champs numériques, est de nouveau observé pour la plaque réelle. Il est donc nécessaire de décrire plus avant ces segments de droites.

Cependant, avant de décrire plus avant ces segments de droites, il est très intéressant de préciser que les résultats de la figure IV.8 sont issus de plusieurs essais. En particulier, la plaque a été excitée soit entre deux raidisseurs, soit sur un raidisseur. Ses conditions aux limites étaient soit libre-libre, soit partiellement encastrée sur un coté (*c.f.* figure IV.7). Mais les différences

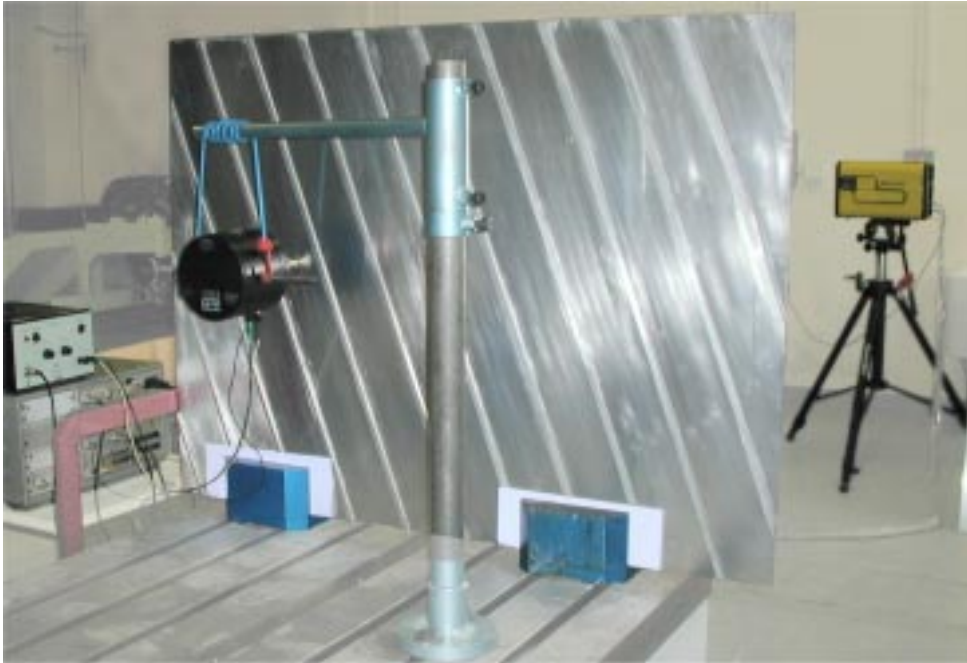


FIG. IV.7: Banc de mesure pour la plaque raidie

entre les résultats de ces essais n'est pas perceptible. C'est pourquoi la provenance de chaque champ n'est pas précisée. Cependant, on constate une fois de plus que ce type de méthodes *n'est pas sensible aux conditions de l'essai*.

IV.2.3 Description des segments : modes propagatifs

Filtrage dans l'espace des nombres d'onde et reconstruction d'un mode : On veut mieux comprendre quelle interprétation physique il est possible de faire à partir de ces segments de droite. Pour ce faire, on veut isoler dans le champ \hat{w} la contribution d'un unique segment de droite, afin de connaître la déformation correspondante. On utilise donc la transformée de Fourier discrète (DFT, voir la section II.3, page 35). En effet, c'est la seule méthode qui soit bijective, ce qui permet de reconstruire un champ à partir de la connaissance de son plan d'onde (sous la forme d'une DFT). L'algorithme est le suivant : la DFT du champ est calculée. Puis, on filtre brutalement celle-ci en baissant à 0 l'amplitude des ondes vérifiant $k_{x'} > \text{seuil}^+$ ou $k_{x'} < \text{seuil}^-$. Les valeurs des seuils sont trouvées "à la main", de façon à ne laisser dans la DFT que la ligne qu'on veut mettre en évidence. Enfin, une DFT inverse permet de reconstruire un champ (de la taille du champ d'origine), et ainsi de voir la déformation induite par la ligne. La figure IV.9 montre pour l'exemple le filtrage de la seconde ligne pour la fréquence 2400 Hz de la figure IV.8. Le champ reconstruit de la figure IV.9 semble très structuré. Afin de mieux l'appréhender, il est tracé figure IV.10 en deux dimensions (la couleur représente la troisième dimension. En bleu, le champ est négatif, en rouge positif). De plus, la position des raidisseurs a été marquée par des lignes blanches.

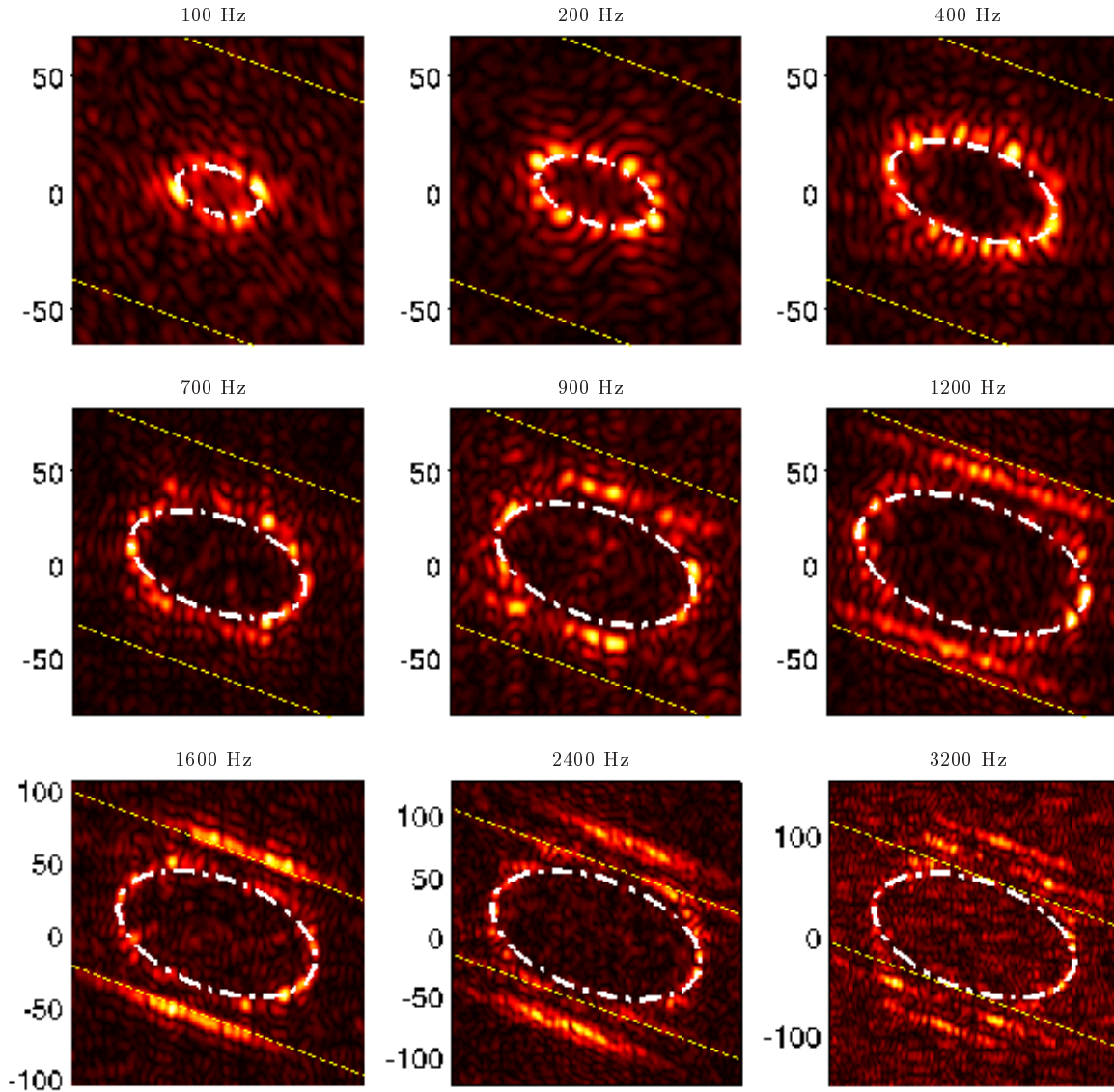


FIG. IV.8: Résultats de la CFT et de l'homogénéisation basses fréquences

Analyse de la déformation : concept de mode propagatif. On analyse la dépendance spatiale du mode selon les deux directions principales.

Dépendance en x' : comme la DFT a été filtrée pour ne garder que les $k_{x'}$ constants, on a évidemment une contribution en $e^{k_{x'}x'}$ qui correspond à une onde *propagative*. La ligne représente un phénomène *propagatif* en x' .

Dépendance en y' : le champ est quasiment nul sur chaque raidisseur. Il y a deux lobes, l'un positif l'autre négatif, entre deux raidisseurs. De plus, si on fait varier la phase (en temps) dans la figure IV.10, on s'aperçoit que ces lobes ne se déplacent pas dans la direction y' . Ceci vient de la symétrie des segments par rapport à l'axe des $k_{x'}$. Plus précisément, on constate que la fonction $k_{y'} \rightarrow DFT(k_{x'}, k_{y'})$ est à symétrie hermitienne (partie réelle paire, partie imaginaire impaire). Les ondes portées par $(k_{x'}, k_{y'})$ et $(k_{x'}, -k_{y'})$ se couplent alors pour former un sinus : la

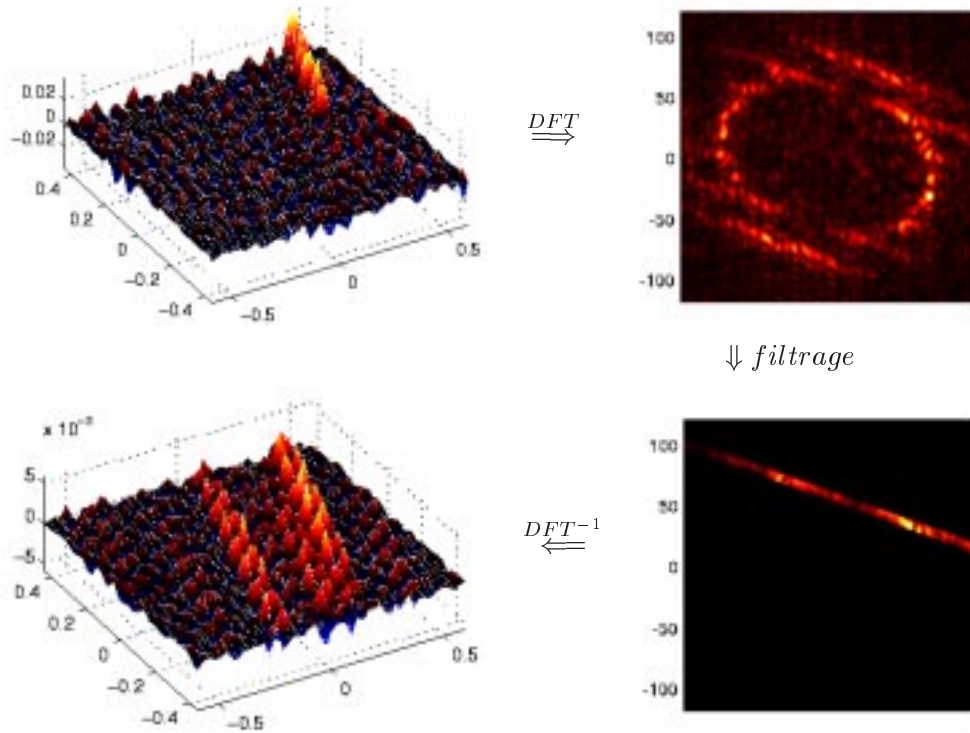


FIG. IV.9: Exemple de filtrage d'une ligne dans la DFT pour une plaque raidie

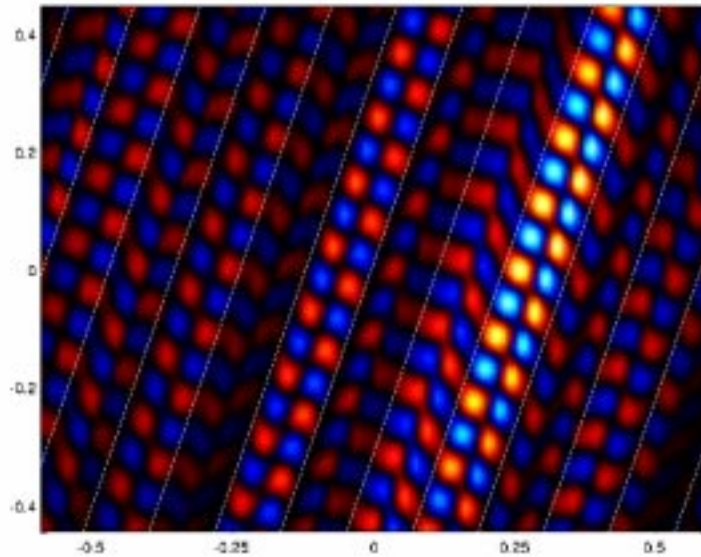


FIG. IV.10: Champ reconstruit à partir de la seule contribution de la seconde ligne (mode 2)

superposition de ces deux ondes en fait une *onde stationnaire*, ou encore *mode*. Dans la direction y' , la ligne représente un phénomène *modal*.

L'analyse de la dépendance en x' et en y' du champ associé au segment de droite amène à présenter le concept de *mode propagatif* : dans une direction donnée, la déformation est stationnaire (c'est un mode), tandis que dans l'autre direction, elle se propage. Chacune des lignes

se formant dans le plan d'onde correspond à un mode propagatif distinct. Un autre exemple est fourni dans la figure IV.11 qui trace la contribution du seul premier segment de droite, correspondant au premier mode.

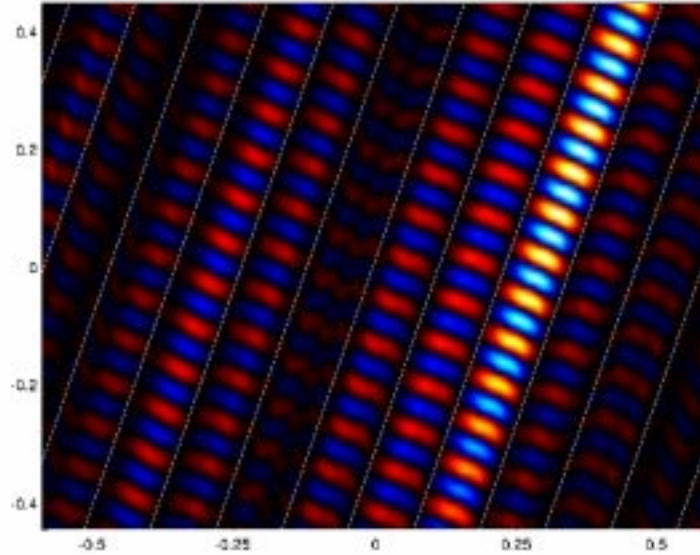


FIG. IV.11: *Champ reconstruit à partir de la seule contribution de la première ligne (mode 1)*

Déformée de section : La dépendance en x' d'un mode propagatif se propageant dans la direction x' est par définition celle d'une exponentielle complexe. Mais quelle est, dans l'autre sens, sa dépendance spatiale ? Autrement dit, quelle est sa déformée ? Le filtrage de chacun des modes est riche d'enseignements. Tout d'abord, on s'aperçoit que quel que soit le mode filtré, la déformée est nulle sur les raidisseurs. Les raidisseurs constituent une ligne nodale commune à tous les modes propagatifs. Pour le mode propagatif à $k_{x'}$ maximal, appelé premier mode, la déformée entre deux raidisseurs ne change pas de signe (*c.f.* figure IV.11) : il n'y a qu'un lobe. Le deuxième mode propagatif (à $k_{x'}$ immédiatement inférieur à celui du premier mode), lui, a deux lobes (*c.f.* figure IV.10). Pour le troisième, il devient nécessaire d'interpréter un peu le champ car la discrétisation du maillage devient légèrement insuffisante, et les trois lobes apparaissent difficilement. En extrapolant, on suppose que la déformée du mode propagatif n contient exactement n lobes.

Etude de la phase des lobes : En examinant attentivement la figure IV.10, on s'aperçoit que chaque bande contenue entre deux raidisseurs semble indépendante de ses voisines : parfois deux bandes côte-à-côte ont la même phase, et l'alternance de signe est respectée (dans la figure IV.10, en numérotant les bandes à partir de celle qui débouche sur le "0", en bas de la figure, qui prendrait alors le numéro 0, on assiste à ce déphasage nul entre les bandes -1 et -2). Parfois, deux bandes côte-à-côte sont en opposition de phase (dans l'exemple, entre les bandes -1 et 0). D'autres fois, le déphasage est quelconque (entre les bandes 0 et 1 dans l'exemple). Chaque bande est donc indépendante de ses voisines, et représente un milieu de propagation bien

particulier. On parlera de *guide d'onde*, puisque la propagation est permise dans la direction x' et bloquée dans la direction y' .

Les plaques raidies, pour les hautes fréquences, apparaissent donc sous un jour nouveau : ce sont une juxtaposition de guides d'onde quasiment indépendants, de largeur l'espace entre deux raidisseurs. Dans ces guides d'ondes, seules quelques valeurs discrètes de $k_{x'}$ sont permises. Il s'agit des modes propagatifs. On classe ceux-ci par leur nombre d'onde. Le mode de plus grand nombre d'onde est le mode 1 et a un lobe. Le second est le mode 2 et a deux lobes. Le $n^{\text{ème}}$ est le mode n et possède n lobes. Ayant décrit — certes grossièrement — la dépendance en y' des modes, c'est à dire leur déformée, il reste la question de leur dépendance en x' . Celle-ci, par le fait même qu'il s'agisse de modes propagatifs, est une exponentielle complexe. Mais de quelle longueur ? L'objet de la section suivante est de calculer la longueur d'onde de ces modes propagatifs grâce à une méthode numérique basée sur une hypothèse de guide d'onde. La section IV.4 mettra en œuvre une méthode expérimentale pour trouver la longueur d'onde de ces modes, et comparera les résultats des deux techniques.

IV.3 Calcul prédictif du nombre d'onde $k_{x'}$

Cette section présente une méthode numérique permettant de calculer les modes propagatifs. A l'origine des méthodes de calcul des nombres d'onde dans les guides d'ondes, on trouve par exemple Gavric [71] qui jette les bases d'une méthode employée pour prédire la propagation dans les rails de chemin de fer. Cette méthode est reprise ensuite par Orrenius [97] et Finnveden [70] pour des applications plus générales. Elle aboutit à une nouvelle formulation en éléments finis, dite méthode des éléments finis spectraux (*Spectral Finite Element Method*) ou méthode éléments finis guide d'ondes (*Wave-guide Finite Element Method*). Une alternative à cette technique consiste à utiliser des éléments finis classiques avec une hypothèse supplémentaire de guide d'onde. C'est cette méthode, développée par Ichchou [20] et Houillon [19, 73] et appliquée par Akrouf [66], qui est exposée dans cette section.

IV.3.1 Guide d'onde. Méthode EF-propagative¹

Le principe fondamental de cette méthode est d'utiliser un modèle mixte pour décrire le mouvement de certaines structures comportant une direction privilégiée de propagation x .

- Dans la direction x , une hypothèse de guide d'onde est faite : le champ est supposé être de la forme :

$$w(x, y, z, t) = \Re \left(\tilde{w}(y, z) e^{i(\omega t - k_\omega x)} \right) \quad (\text{IV.17})$$

On retrouve le concept de mode propagatif, où $\tilde{w}(y, z)$ est la déformée du mode et k_ω le nombre d'onde propagatif correspondant.

¹Cette méthode s'apparente dans ses principes fondamentaux aux techniques hautes fréquences d'optique géométrique comme la *Wentzel Kramers Brillouin*, WKB.

• Dans les directions (y, z) , le champ est supposé stationnaire, de la forme $\tilde{w}(y, z)$. La recherche de cette forme, qui est une déformée modale, est effectuée par éléments finis. En effet, cette méthode est tout particulièrement adaptée au formalisme modal.

Cette méthode est donc basée sur l'hypothèse de guide d'ondes IV.17, et sa résolution utilise des outils numériques standards. Il est notable que l'hypothèse IV.17 ne peut être faite que sur une structure élancée dont la section est uniforme. On s'intéresse à un petit tronçon de guide d'onde de profondeur d , discrétisée comme dans la méthode des éléments finis (*c.f.* figure IV.12). L'assemblage des matrices de masse et de raideur est appliqué de façon classique à la structure.

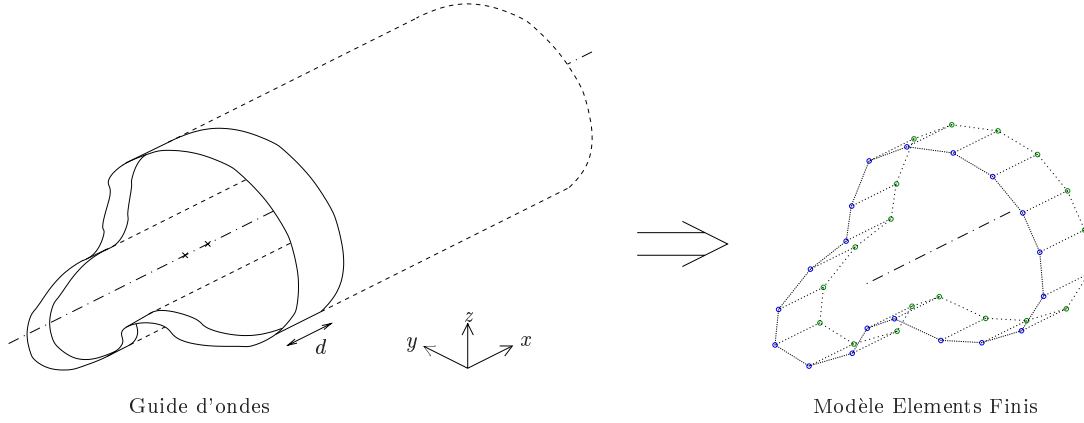


FIG. IV.12: Schéma de discrétisation du tronçon de guide d'ondes

Il permet en particulier d'extraire les matrices de masse \mathbb{M} et de raideur \mathbb{K} du tronçon. Ensuite, les nœuds du modèles EF sont classés en deux groupes : les nœuds de la face "gauche" (en bleu sur la figure) et ceux de la face "droite" (en vert). L'équation du mouvement est mise sous une forme matricielle par blocs :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M}^{(G,G)} & \mathbb{M}^{(G,D)} \\ \mathbb{M}^{(D,G)} & \mathbb{M}^{(D,D)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_{\omega}^{(G)} \\ \ddot{\mathbf{U}}_{\omega}^{(D)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}^{(G,G)} & \mathbb{K}^{(G,D)} \\ \mathbb{K}^{(D,G)} & \mathbb{K}^{(D,D)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{\omega}^{(G)} \\ \mathbf{U}_{\omega}^{(D)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\omega}^{(G)} \\ \mathbf{F}_{\omega}^{(D)} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

Dans la suite, on notera $\mathbb{S}_{\omega} = -\omega^2 \mathbb{M} + \mathbb{K}$. L'hypothèse de guide d'onde IV.17 impose les conditions :

$$\mathbf{U}_{\omega}^{(D)} = e^{-ik_{\omega}d} \mathbf{U}_{\omega}^{(G)} \quad (\text{IV.19})$$

$$\mathbf{F}_{\omega}^{(D)} = -e^{-ik_{\omega}d} \mathbf{F}_{\omega}^{(G)} \quad (\text{IV.20})$$

(le signe négatif devant la force provient du principe de réciprocité). En injectant ces conditions dans l'équation du mouvement IV.18, on obtient le système :

$$\mathbb{S}_{\omega}^{(G,G)} \mathbf{U}_{\omega}^{(G)} + e^{-ik_{\omega}d} \mathbb{S}_{\omega}^{(G,D)} \mathbf{U}_{\omega}^{(G)} = \mathbf{F}_{\omega}^{(G)} \quad (\text{IV.21})$$

$$\mathbb{S}_{\omega}^{(D,G)} \mathbf{U}_{\omega}^{(G)} + e^{-ik_{\omega}d} \mathbb{S}_{\omega}^{(D,D)} \mathbf{U}_{\omega}^{(G)} = -e^{-ik_{\omega}d} \mathbf{F}_{\omega}^{(G)} \quad (\text{IV.22})$$

La combinaison linéaire $e^{-ik_{\omega}d} \times (\text{IV.21}) + (\text{IV.22})$ donne l'équation :

$$\left[e^{-2ik_{\omega}d} \mathbb{S}_{\omega}^{(G,D)} + e^{-ik_{\omega}d} \left(\mathbb{S}_{\omega}^{(G,G)} + \mathbb{S}_{\omega}^{(D,D)} \right) + \mathbb{S}_{\omega}^{(D,G)} \right] \mathbf{U}_{\omega}^{(G)} = 0 \quad (\text{IV.23})$$

Cette équation est un problème polynomial aux valeurs propres (*polynomial eigenvalue problem*), et on montre que si les matrices $\mathbb{S}_\omega^{(G,D)}$ et $\mathbb{S}_\omega^{(D,G)}$ ne sont pas singulières toutes les deux, alors le problème est bien posé. Pour un nombre N de nœuds sur une face, ce problème admet $2N$ couples propres $\left(e^{-ik_\omega^{(i)}d}, \mathbf{U}_\omega^{(i)} \right)_{i \leq 2N}$. De plus, du fait que $\mathbb{S}_\omega^{(G,D)}$ est la transposée de $\mathbb{S}_\omega^{(D,G)}$ (\mathbb{M} et \mathbb{K} sont symétriques), on peut montrer que si $k_\omega^{(i)}$ est solution du problème, alors $-k_\omega^{(i)}$ est solution du problème. Ces deux solutions représentent la même onde se dirigeant dans les deux directions x et $-x$. On ne sélectionne que celles vérifiant :

$$\arg(k_\omega^{(i)}) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{IV.24})$$

Pour chaque fréquence ω , on a ainsi N solutions, ce qui est physiquement impossible (le nombre de modes propagatifs ne saurait dépendre du nombre de points de discrétisation de la section). De fait, un grand nombre de solutions sont obtenues avec un nombre d'onde $k_\omega^{(i)}$ complexe : ces ondes sont des ondes inhomogènes. Ne cherchant que les ondes propagatives, on sélectionne parmi les N solutions celles vérifiant :

$$\left| \Im \left(k_\omega^{(i)} \right) \right| \ll \Re \left(k_\omega^{(i)} \right) \quad (\text{IV.25})$$

Enfin, par continuité en fréquence, on peut supposer que les solutions pour deux pulsations (ω, ω') proches l'une de l'autre seront assez semblables, en valeur propre et en déformée propre. Ceci permet de suivre le long la fréquence l'évolution d'une solution donnée : pour les deux pulsations (ω, ω') proches l'une de l'autre, deux solutions (i, j) représentent le même mode propagatif si :

$$\text{et } \begin{cases} k_\omega^{(i)} \text{ proche de } k_{\omega'}^{(j)} : \frac{k_\omega^{(i)}}{k_{\omega'}^{(j)}} \approx 1 \\ \mathbf{U}_\omega^{(i)} \text{ proche de } \mathbf{U}_{\omega'}^{(j)} : MAC \left(\mathbf{U}_\omega^{(i)}, \mathbf{U}_{\omega'}^{(j)} \right) \approx 1 \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

où MAC est le Modal Assurance Criterion, déjà vu à la section I.1 page 13. C'est un indice permettant de comparer deux déformées.

Discussion de la méthode : Cette méthode présente l'intérêt d'utiliser exclusivement des outils numériques très largement diffusés, puisqu'un logiciel Eléments Finis classique accompagné d'un langage de programmation (MATLAB[®] par exemple) suffit à l'implémenter. De plus, aucune hypothèse n'est faite sur la section du guide d'onde : celui-ci pourra tout aussi bien être un rail de chemin de fer, un tube de section quelconque, ou une plaque nervurée. En ce qui concerne la validité des résultats, et en particulier la plage de fréquence où ces résultats seront pertinents, il est important de garder en tête les deux approches utilisées (modale pour la section et analytique pour la propagation) :

- La section du guide d'onde est numérisée par éléments finis classiques : le nombre de nœuds dans la section doit être suffisamment important pour pouvoir suivre la complexité de forme du mode de section. Une section très déformée demandera un grand nombre de nœuds tandis que les premiers modes, très lisses, se contenteront de quelques points de maillage. Réciproquement, pour un maillage donné, la méthode aura tendance à dévier pour les modes élevés dont la déformée de

section est très chahutée. Cependant, on doit préciser que cette limitation n'apparaît que pour des maillages à très faible nombre de noeuds.

- Dans la direction de propagation, l'unique élément utilisé est censé représenter une portion d'onde progressive, et donc avoir la forme d'un sinus. Celui-ci ne sera connu que sur les deux sections Gauche et Droite du tronçon de guide d'onde. On assistera donc à une sorte de théorème de Shannon qui limitera la validité des nombres d'onde trouvés à :

$$k_\omega^{(i)} < \frac{\pi}{d} \quad (\text{IV.27})$$

On pourrait avoir tendance à choisir le paramètre d très petit, afin que cette limite ne soit jamais atteinte, mais la diminution de ce paramètre se heurte à des problèmes d'erreurs numériques : pour d très faible, les valeurs propres du système IV.23 sont toutes très proches de 1. Pour d tendant vers 0, la formule permettant de trouver le nombre d'onde à partir de la valeur propre, à savoir

$$k_\omega^{(i)} = -\frac{\ln(\lambda_i)}{id} \quad (\text{IV.28})$$

devient une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Pour d faible, la formule IV.28 est très sensible au bruit numérique.

IV.3.2 Application au cas des plaques raidies

On applique la méthode EF-propagative à une plaque raidie par des poutres. Le modèle éléments finis est exposé figure IV.13 (les notations pour les caractéristiques géométriques de la

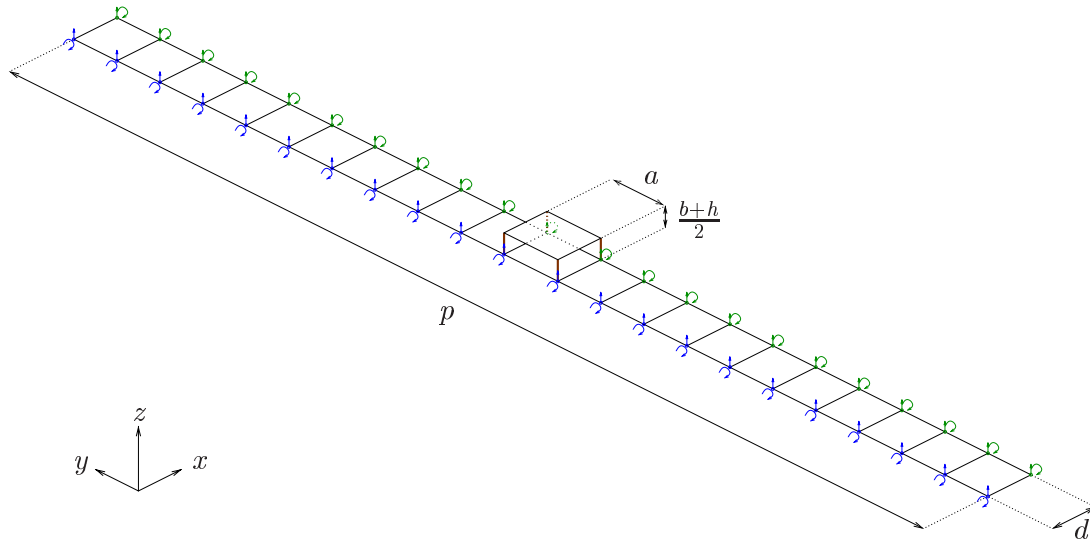


FIG. IV.13: Modèle éléments finis pour la méthode EF-propagative appliquée à une plaque raidie

plaques raidies sont les mêmes que précédemment ; définitions page 95). La plaque est modélisée par 21 éléments plaque d'épaisseur h . Seuls les modes de flexion sont recherchés : on limite donc le nombre de degrés de liberté de chaque nœud à 2 (déplacement w en z , rotation rot_x dans le plan (y, z)). Le raidisseur est modélisé par 1 élément plaque d'épaisseur b , décalé en altitude

d'une hauteur $\frac{b+h}{2}$ par des poutres indéformables sans masse (en marron dans la figure IV.13). Ces quatre nœuds ont leurs 6 degrés de liberté chacun, mais les liaisons indéformables les font disparaître du vecteur \mathbf{U} .

Quelles conditions aux limites faut-il appliquer à cette structure ? Il faut garder à l'esprit ce qu'elle est censée représenter : c'est une période d'un système. De plus, on aimerait que la méthode puisse modéliser tous les mouvements de flexion de la plaque dans la direction x . En particulier, le mouvement de flexion pure, en onde plane, est recherché. De plus, on aimerait modéliser tous les modes de sections qui sont apparus dans la section précédente, qui présentait tous la caractéristique d'avoir le raidisseur fixe. Une solution consiste donc à relier les degrés de liberté de chaque extrémité de la bande : ainsi, on aura bien une structure périodique de période p . Ces conditions aux limites, qu'on nommera par la suite CP, s'écrivent :

$$\begin{cases} w|_{y=0} = w|_{y=p} \\ \text{rot}_x|_{y=0} = \text{rot}_x|_{y=p} \end{cases} \quad (\text{IV.29})$$

On vérifie aisément qu'on aura accès aux déformées de l'onde plane (figure IV.14 0) et du premier mode (figure IV.14 1)².



FIG. IV.14: Allure des premières déformées de section recherchées

Qu'en est-il du mode suivant ? On trace un mode avec ces conditions aux limites et avec deux lobes (figure IV.15). On remarque que le raidisseur a tendance à travailler en torsion (d'où la

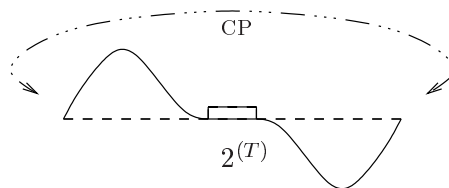


FIG. IV.15: Allure du mode CP suivant

numérotation du mode : $2^{(T)}$ pour 2 lobes en Torsion). Or, l'équation de dispersion d'une poutre en torsion est de la forme $k \propto \omega$ tandis que celle d'une poutre en flexion est de la forme $k \propto \sqrt{\omega}$: en basses fréquences, la rigidité en torsion est supérieure à la rigidité en flexion. Le raidisseur préférera donc la flexion à la torsion. On remarque aussi que dans la figure IV.15, les conditions aux limites correspondent à des appuis simples. On peut essayer de changer les conditions aux limites, pour voir si le problème évoqué à propos de la prédominance de la flexion sur la torsion

²Il est nécessaire à ce stade de préciser que toutes ces déformées ne sont que des *allures* de déformées, des *croquis* issus de l'analyse des modes de sections apparaissant dans la structure. Pour les tracer, on s'attache à respecter 1) les conditions aux limites, 2) le mouvement nul du raidisseur (sauf pour l'onde plane nommée "0"), 3) le nombre de lobes le long d'une période (précisé à chaque fois sous la figure).

est levé par des appuis simples. La figure IV.16 est le fruit de cette recherche. On voit que le



FIG. IV.16: *Allure des premières déformées avec des conditions appui-appui*

premier mode appui (figure IV.16–2, à gauche), a bien deux lobes et fait travailler le raidisseur en flexion. Par contre, on retrouve exactement le mode $2^{(T)}$ déjà prédit par les conditions aux limites CP. Il semble donc qu'il faille un calcul CP pour les modes 0 et 1, et un calcul pour le mode 2. Et pour les modes suivants ? La figure IV.17 montre les deux modes CP suivants, tandis que la figure IV.18 figure les deux modes Appui suivants.



FIG. IV.17: *Allure modes CP suivants*



FIG. IV.18: *Allure modes Appui suivants*

Il semble donc que ce schéma se répète. La modélisation CP montre un mode de flexion impair, puis un mode de torsion pair. La modélisation Appui montre un mode de flexion pair, puis un mode de torsion pair – le même que dans la modélisation CP. Chacune des modélisation montre la moitié des modes de flexion, ainsi que tous les modes de torsion. Il faut rappeler que ces résultats sont à prendre au conditionnel, puisqu'ils ne sont issus que d'une analyse purement cinématique des conditions aux limites. Le calcul effectif reste à faire.

Résultats : Le paragraphe précédent a établi que deux calculs doivent être menés afin d'avoir accès à tous les modes de flexion de la plaque : un calcul avec des conditions aux limites de périodicité (calcul CP), et un calcul avec des conditions aux limites d'appuis simples (calcul Appui). La méthode EF-propagative est donc appliquée à ces deux modèles pour des fréquences allant de 0 à 6400 Hz. Les résultats sont tracés figure IV.19, à travers les fonctions $\omega \rightarrow k_\omega^{(i)}$. Ces résultats sont conformes à ce que l'on attendait. La première courbe qui apparaît (en bleu dans le calcul CP), part de 0 Hz : c'est un mode de corps rigide, dans lequel la section ne se déforme pas. Il s'agit donc du mode 0, correspondant à l'onde plane. Ce mode s'écarte d'une parabole (qui serait le comportement normal de l'onde plane en flexion, $Dk^4 = \rho h \omega^2$), et se transforme en plus hautes fréquence pour devenir le mode 1.

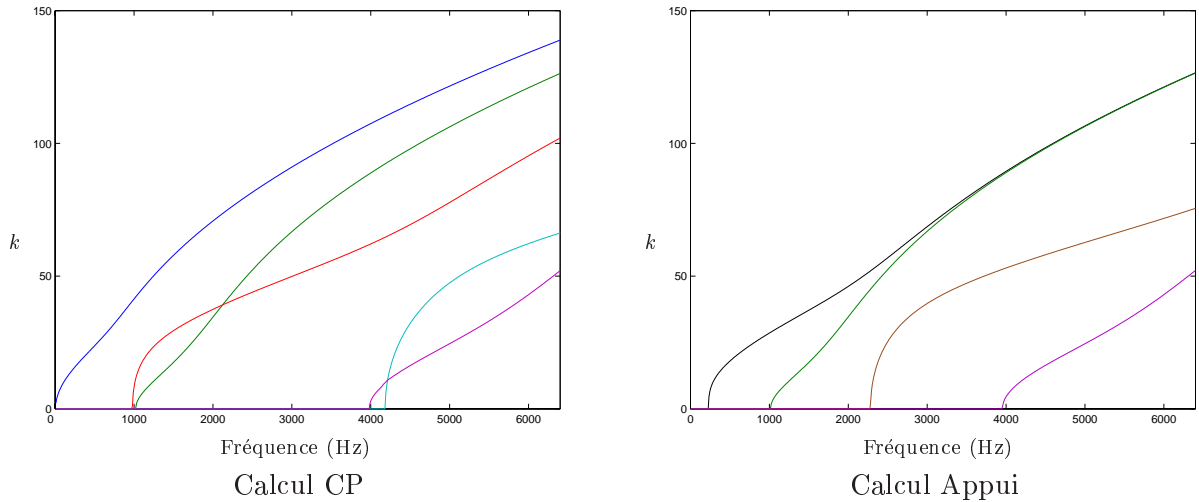


FIG. IV.19: Résultat de la méthode EF-propagative sur la plaque raidie

Le deuxième courbe (en vert dans le calcul CP) se retrouve à l'identique dans le calcul Appui : il s'agit donc du mode $2^{(T)}$ de torsion prévu dans l'analyse précédente. Dans la figure IV.19 calcul Appui, on voit que la courbe de ce mode $2^{(T)}$ se rapproche d'une autre courbe (en noir) : il s'agit du mode 2, dont la déformée est très proche de celle du mode $2^{(T)}$ (elles sont identiques, à la phase des demi périodes près). Il est donc normal que leurs courbes se rejoignent.

La courbe suivante du calcul CP (en rouge), est unique, et correspond au mode 3. Le mode de flexion suivant, numéro 4, est visible dans le calcul Appui (en marron). La courbe suivante dans le calcul Appui (violet), et qui se retrouve dans le calcul CP, est le mode $4^{(T)}$, qui, logiquement devrait à plus hautes fréquences (au delà de 6400 Hz) rejoindre le mode 4. Le dernier mode calculé est présent dans le calcul CP (en cyan). Il s'agit du mode de flexion 5.

L'interprétation des courbes correspond à l'analyse qui avait été faite, mais on peut s'en convaincre en traçant les déformées de section correspondantes. La figure IV.20 trace la déformée de la courbe bleue, à son apparition (0 Hz), et la déformée de la même courbe à 6400 Hz. Cette figure est à comparer avec les modes recherchés de la figure IV.14.

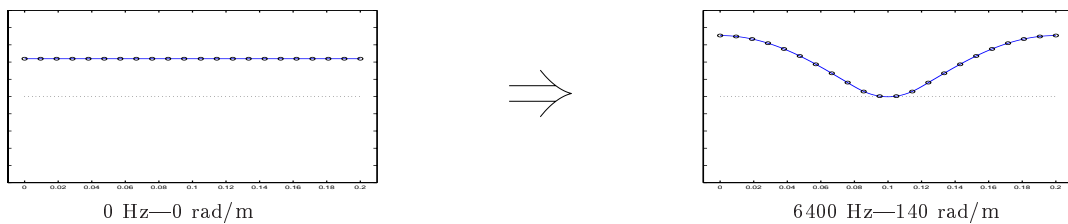


FIG. IV.20: Déformées du premier mode de section au démarrage et à haute fréquence

La figure IV.21 représente les déformées de section du mode 2 à son déclenchement (235 Hz) et à 6400 Hz (à comparer à la figure IV.16-2, à gauche).

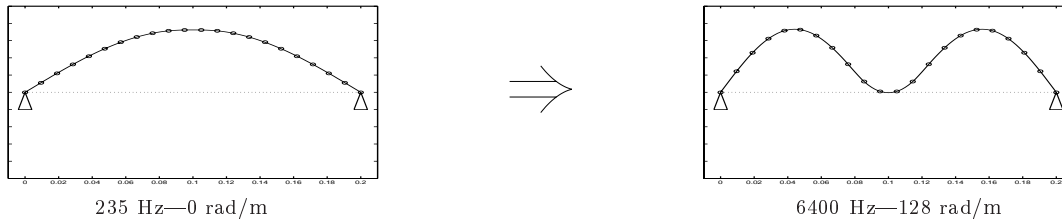


FIG. IV.21: *Déformées du deuxième mode de section au déclenchement et à haute fréquence*

Sur la figure IV.22, il s'agit du premier mode de torsion. On voit nettement à son apparition (1020 Hz) cette torsion : la section du raidisseur tourne. A haute fréquence (6400 Hz), cette torsion est beaucoup moins visible. Cette figure est le mode calculé correspondant au mode prévu des figures IV.15 et IV.16-2^(T).

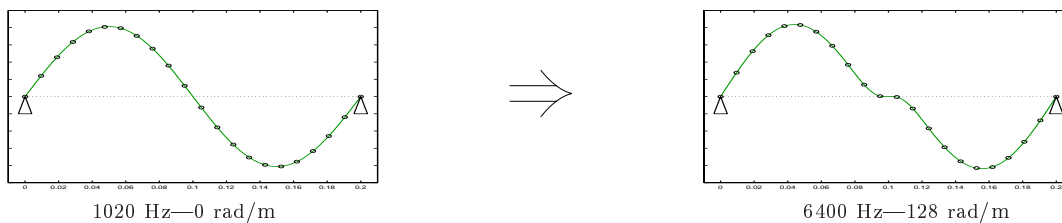


FIG. IV.22: *Déformées du premier mode de torsion (2 lobes) à l'apparition et à haute fréquence*

Le mode 3 est tracé sur la figure IV.23, à son apparition (985 Hz) et à haute fréquence (6400 Hz). Là encore il correspond à la prévision de la figure IV.17-3.

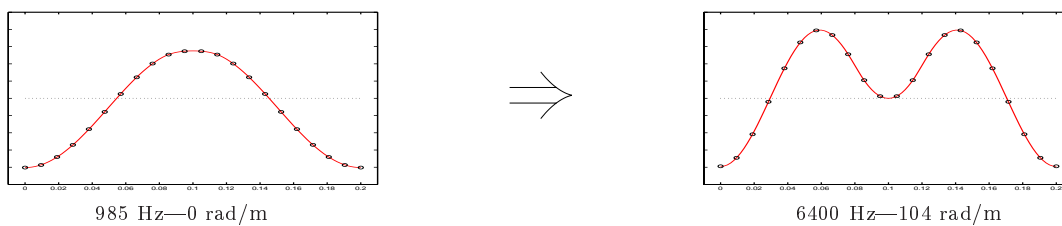


FIG. IV.23: *Déformées du troisième mode de flexion au déclenchement et à haute fréquence*

La figure IV.24 concerne le mode 4, à sa fréquence d'apparition 2285 Hz et à haute fréquence (6400 Hz). La correspondance s'établit avec la figure IV.18-4.

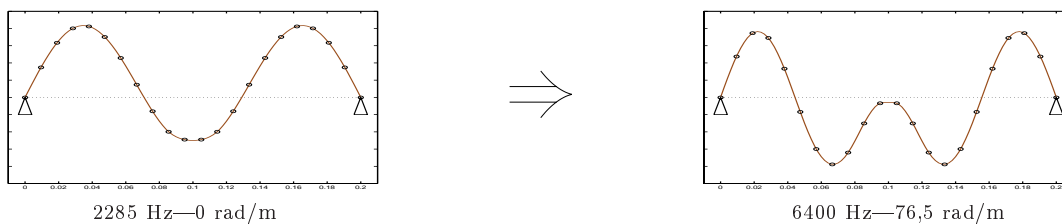


FIG. IV.24: *Déformées du troisième mode de flexion au déclenchement et à haute fréquence*

Conclusion : Ainsi, on dispose d’un outil numérique qui permet de prévoir le nombre d’onde des modes propagatifs des structures raidies. En modélisant un tronçon de la structure par éléments finis, et en appliquant l’hypothèse de guide d’onde, cette méthode prévoit le nombre d’onde et la déformée de section des modes pour toute fréquence souhaitée. On peut préciser que cette méthode possède un homologue analytique écrit par Fahy [69], mais qui est lui, limité aux cas simples. Cet homologue, mis en œuvre par Houillon [19], et qu’on détaille en annexe E, ne traite que des guides d’onde constitués de deux poutres en liaison avec une plaque plane. Sans vérification expérimentale, les calculs fait ici n’ont qu’une valeur toute relative. En effet, les hypothèses utilisées, en particulier sur les conditions aux limites, sont critiquables. La section suivante propose donc une confrontation de ces résultats à des cas tests réels.

IV.4 Confrontation calcul/essai pour les nombres d’onde $k_{x'}$

On a vu que, dans le plan d’onde d’une plaque raidie, il apparaît des segments de droites perpendiculaires à l’axe des $k_{x'}$, tout d’abord tangents à l’orthotropie structurale puis s’en éloignant. Ces segments ont été identifiées comme étant des modes propagatifs, “coincés” entre les raidisseurs. Des considérations géométriques ont permis à la méthode EF-propagative de construire les équations de dispersion $k(\omega)$ de chacun de ces modes. Mais ces calculs sont-ils exacts? Prédissent-ils effectivement la position des segments de droites observés dans les plans d’onde?

IV.4.1 Première méthode d’identification des nombres d’onde

Au delà de l’orthotropie structurale, la méthode de reconnaissance des rigidités dynamiques exposée à la section II.5 est inopérante. Elle est en effet basée sur une équation de dispersion *continue* en θ (celle de Love Kirchhoff orthotrope), alors qu’on observe que les segments de droites apparaissent *disjoints* de l’orthotropie structurale. Une solution très simple pour lever ce problème consiste à n’identifier le comportement ondulatoire que dans les deux directions principales x' (direction des raidisseurs) et y' (perpendiculaire aux raidisseurs). On utilise donc la méthode IWC de la section II.3, mais uniquement pour les angles $(\theta_{\perp} + i\frac{\pi}{2})_{i \in [-1..2]}$. Cependant, la structure est tout de même orthotrope : le comportement est symétrique par rapport aux axes x' et y' . On regroupe donc les nombres d’onde $(\theta_{\perp}, \theta_{\perp} + \pi)$ (qui représentent les $k_{x'}$ et $-k_{x'}$) d’un côté, et les nombres d’onde $(\theta_{\perp} + \frac{\pi}{2}, \theta_{\perp} - \frac{\pi}{2})$ d’un autre côté.

La figure IV.25 présente les résultats de la méthode IWC appliquée à ces quatre directions ; les directions $k_{x'}$ et $-k_{x'}$ sont tracées en bleu et les directions $k_{y'}$ et $-k_{y'}$ en rouge. De plus, les paraboles correspondantes à l’orthotropie structurale ($k_{x'} = \tilde{D}_{x'}^{-1/4} \sqrt{\omega}$ et $k_{y'} = \tilde{D}_{y'}^{-1/4} \sqrt{\omega}$) sont tracées en pointillés avec les mêmes couleurs. On a superposé la première courbe de la figure IV.19 calcul CP, sensée représentée le premier mode de flexion. Enfin, à titre indicatif, les nombres d’onde correspondant à des longueurs d’onde en rapport avec la période des raidisseurs ($2p = n\lambda$) sont indiqués.

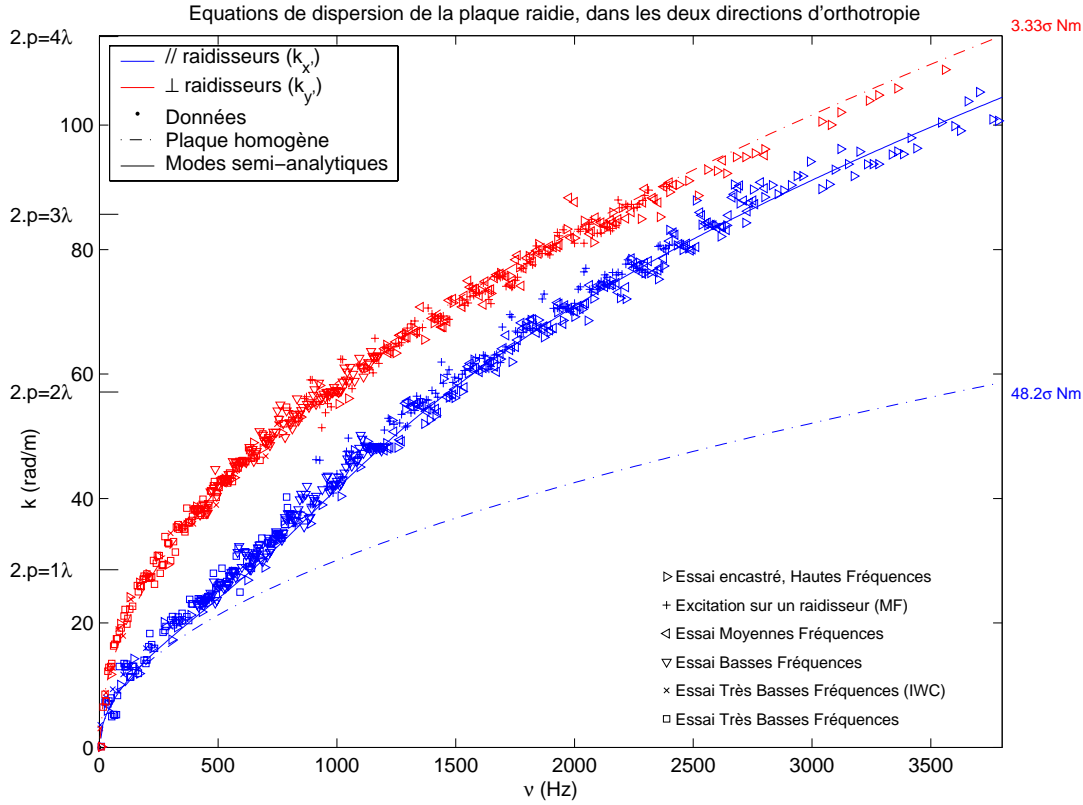


FIG. IV.25: Résultats de l'identification des nombres d'onde parallèles et perpendiculaires, comparés à l'orthotropie structurale et au premier mode de la méthode EF-propagative

Malgré de légères imprécisions de l'identification des nombres d'onde par la méthode IWC, ces résultats sont excellents : la courbe de l'orthotropie structurale, dans la direction $k_{y'}$ (en rouge) passe effectivement par le nuage de points de l'identification IWC. De même, le premier mode de la méthode EF-propagative, dû au calcul CP, traverse précisément le nuage de points issus de l'identification IWC dans la direction $k_{x'}$ (en bleu).

Un fois de plus, on peut apporter quelques précisions quant aux données expérimentales. Les résultats de la figure IV.25 proviennent des mêmes essais que pour l'exploration du plan d'onde (figure IV.8, page 100). La parfaite superposition des courbes issues des diverses conditions d'essais montrent en particulier que la méthode n'est sensible ni aux conditions aux limites, ni à l'échantillonnage fréquentiel, ni à la position de la source. De plus, il apparaît dans cet exemple que pour toutes les fréquences testées, c'est le premier mode de propagation qui a la plus forte amplitude (puisque c'est celui détecté par la IWC).

La prédiction du premier mode est donc très satisfaisante. Qu'en est-il des modes suivants ? La méthode IWC n'identifie que le nombre d'onde dominant dans la plaque, pour une direction donnée. Il est donc nécessaire de mettre en place une autre méthode d'identification des nombres d'onde $k_{x'}$, capable d'estimer plusieurs modes de section.

IV.4.2 Deuxième méthode d'identification des $k_{x'}$

Le but de cette méthode est de pouvoir identifier l'ensemble des segments de droites du plan d'onde. La première idée qui vient à l'esprit est de modifier la méthode IWC afin de chercher plusieurs maxima dans une direction donnée. Mais on serait alors sensible au problème de fenêtrage (*leakage*, voir page 37) : celui-ci provoque des "rebonds" dans le plan d'onde (DFT, CFT et IWC), fabriquant artificiellement des maxima relatifs. De plus, il n'est pas certain que les segments de droites aient une forte amplitude sur l'axe des $k_{x'}$, ce qui les rendrait invisibles à l'exploration de la IWC dans la direction θ_{\perp} (intersection du segment avec l'axe des $k_{x'}$). On préfère donc exploiter la topologie des éléments recherchés : ceux-ci, on l'a vu à la section IV.2, sont des segments de droites parallèles à l'axe des $k_{y'}$. Au lieu d'*intersecter* le plan d'onde avec l'axe des $k_{x'}$, on va le *projeter* sur l'axe. Ainsi, *tous* les points d'un segment vont participer à la détection. Comme la CFT semble suffisante (on ne recherche pas l'amortissement), c'est elle qui est utilisée. Ensuite, grâce à un balayage sur l'ensemble des points du plan d'onde calculés par CFT, chacun des points $CFT(k_{xp}, k_{yq})$ est projeté sur l'axe des $k_{x'}$:

$$k'_{p,q} = k_x \cos(\theta_{\perp}) + k_y \sin(\theta_{\perp}) \quad (\text{IV.30})$$

$$CFT'_{p,q} = CFT(k_{xp}, k_{yq}) \quad (\text{IV.31})$$

Ceci crée une fonction $k' \rightarrow CFT'$ échantillonnée n'importe comment en k' (les $k'_{p,q}$ ne sont pas forcément distribués uniformément). Il faut donc recompter les amplitudes sur un échantillonnage régulier. Pour ce faire, on choisit un incrément $\delta k'$ (par exemple $\delta k' = 0,05$ rad/m), et on fabrique la fonction discrète $i \rightarrow CFT'_i$ suivante :

$$\forall i \geq 0, \mathbb{N}_i^2 = \left\{ p, q / i \leq \frac{|k'_{p,q}|}{\delta k'} < i + 1 \right\}, \quad CFT'_i = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}_i^2} |CFT'_{p,q}| \quad (\text{IV.32})$$

La valeur absolue autour de $k'_{p,q}$, dans l'expression de l'ensemble de sommation \mathbb{N}_i^2 , a pour effet d'associer les ondes se propageant dans les deux sens à la même vitesse (de vecteurs d'onde $k_{x'}$ et $-k_{x'}$). Le module autour de la CFT projetée, a pour effet d'oublier la phase relative dans un même segment de droite : seule l'amplitude d'un point nous intéresse (comme dans les graphiques des figures IV.5, IV.6, et IV.8).

Enfin, un filtrage est effectué pour limiter les problèmes de leakage. Par exemple, on peut filtrer grâce à une convolution de la fonction $(i\delta k') \rightarrow CFT'_i$ avec une fenêtre de Hanning de largeur calibrée (par exemple 10 rad/m). Une attention particulière doit être apportée lors de cette convolution afin de ne pas décaler le signal $(i\delta k') \rightarrow CFT'_i$. Le résultat de cette démarche (projection \rightarrow comptage \rightarrow filtrage) est tracé figure IV.26. Or, on sait que les segments de droites n'apparaissent qu'au dessus de l'orthotropie structurale. Seuls les maxima (détectés par changement de signe de la dérivée) au dessus de la limite $\frac{\sqrt{\omega}}{D_x^{1/4}}$ sont donc extraits. Les valeurs $k_{\omega}^{(i)}$ recherchées sont les abscisses de ces maxima. La figure IV.26 trace la limite de l'orthotropie structurale (en bleu) et les maxima trouvés (cercles blancs). On a bien deux modes détectés, comme dans la figure IV.8 2400 Hz, qui traçait le plan d'onde correspondant (CFT).

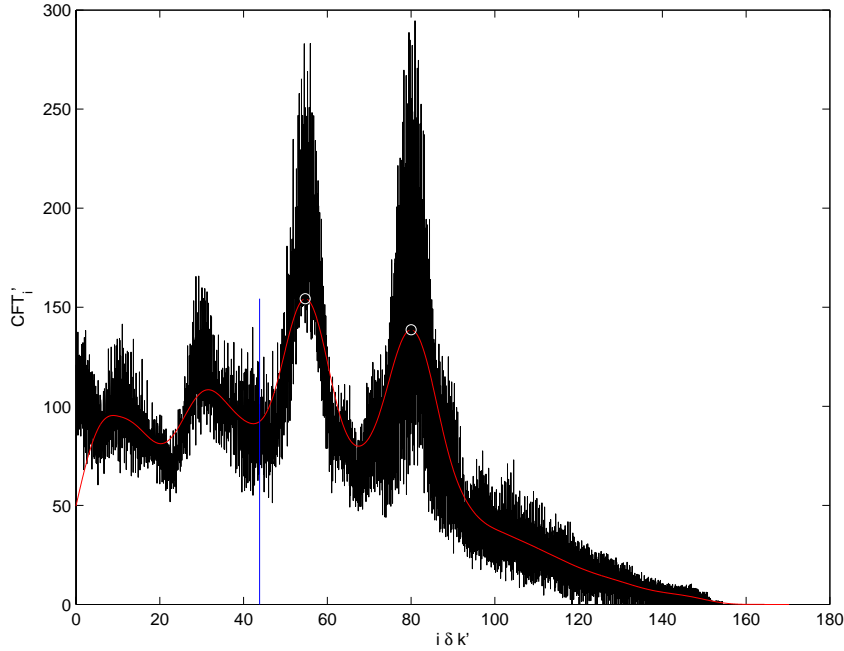


FIG. IV.26: Exemple de la projection de la CFT à 2400 Hz de la figure IV.8

On peut noter que ces résultats dépendent de deux paramètres de la méthode : $\delta k'$ et la largeur de la fenêtre de Hanning, notée par la suite BW . Du fait du filtrage, la variation de l'incrément $\delta k'$ n'a pas d'effet sur le résultat, tant que sa valeur est suffisamment faible (en deçà de la distance minimale entre deux points de la CFT). Par contre, la largeur de la fenêtre BW doit être choisie avec précaution : trop faible, elle ne lisse pas assez la fonction, et de nombreux maxima locaux sont détectés (correspondants à des erreurs de mesure ou de calcul, à des effets de discrétisation du plan d'onde, et à l'effet de fenêtrage du champ – *leakage*). Trop forte, elle moyenne tous les résultats et les modes propagatifs n'émergent plus. Il faut donc caler ce paramètre en fonction du champ de mesure (typiquement, de l'ordre de 2 à 12 rad/m dans les cas traités).

Enfin, un balayage en fréquence donne des nuages de points $(\omega, k_{\omega}^{(i)})$. La figure IV.27 indique le résultat de ce balayage. On voit clairement apparaître une, deux, puis trois courbes. La tentation de comparer les courbes des figures IV.19 et IV.27 est grande ; on n'y résiste pas sur la figure IV.28, sur laquelle ont été regroupées les courbes du calcul CP et du calcul Appui ainsi que les résultats expérimentaux. Les couleurs des résultats expérimentaux sont choisies *a posteriori*, afin de correspondre avec celles des calculs EF-propagatifs. Les résultats sont aussi convaincants que ceux de la figure IV.25 qui ne concernait que le premier mode. Ici, on voit très clairement que les trois modes apparaissant dans le plan d'onde sont les trois premiers modes de flexion issus de la méthode EF-propagative, et que le mode de torsion n'est pas visible (courbe verte). Il semble donc que seuls les modes de flexion participent à la dynamique des plaques raidies. Ainsi, l'analyse présentée à la section précédente est tout à fait pertinente.

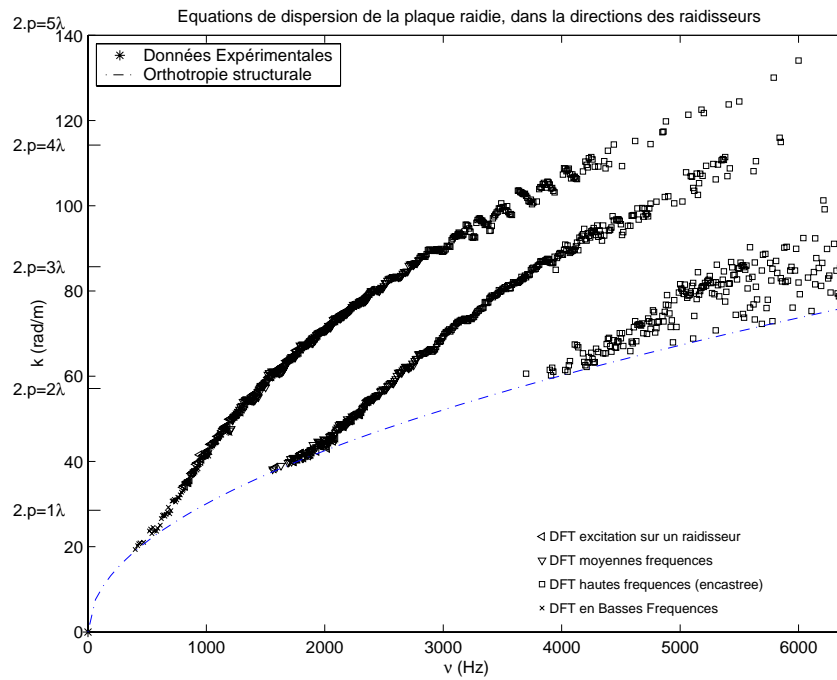


FIG. IV.27: Recherche des modes de section par projection de la CFT sur l'axe de k_x , dans le cas de la plaque raidie

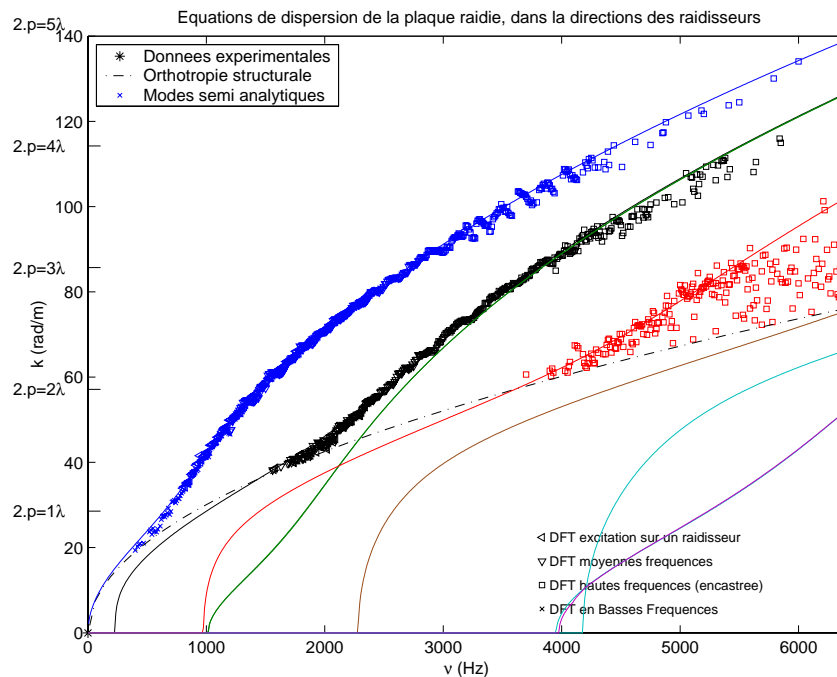


FIG. IV.28: Comparaison des calculs CP, et Appui avec les résultats expérimentaux

IV.4.3 Validations sur d'autres cas expérimentaux

Dans le doute d'une correspondance fortuite entre les nombres d'onde calculés et ceux identifiés sur le cas test précédent, un deuxième banc est construit. Celui-ci se compose d'une plaque en aluminium raidie par des raidisseurs de section rectangulaire, mais dont l'espacement est variable : un premier cas concerne des raidisseurs largement espacés ($p = 40$ cm). Le second voit la période des raidisseurs abaissée ($p = 20$ cm). Le troisième raccourcit encore l'espacement des raidisseurs ($p = 10$ cm). Les caractéristiques géométriques du voile et des raidisseurs sont donnés dans la figure IV.29

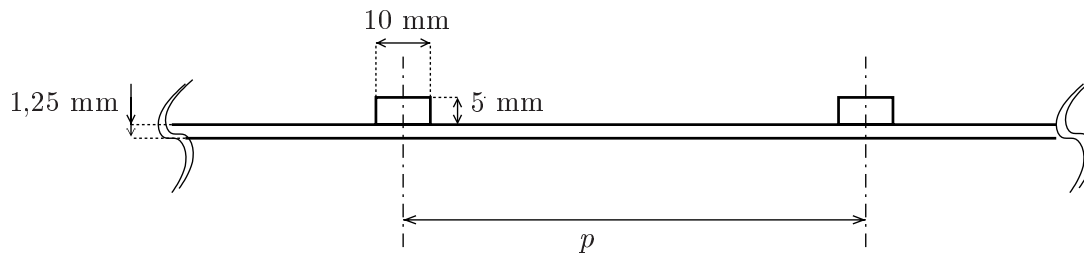


FIG. IV.29: Schéma de construction du banc évolutif (coupe)

A chaque étape (depuis $p = 40$ cm jusqu'à $p = 10$ cm), une acquisition large bande d'un champ de vibration est effectuée. On peut alors utiliser la première méthode d'identification pour estimer les fonctions $k_{x'}^{(1)}(\omega)$ et $k_{y'}(\omega)$ correspondantes aux directions de l'orthotropie. De même, on applique la seconde méthode qui identifie les fonctions $(k_{x'}^{(i)}(\omega))_i$ représentant les nombres d'onde des modes propagatifs. Parallèlement, un calcul d'homogénéisation basses fréquences est effectué avec les données correspondantes à chaque cas. On a ainsi accès aux caractéristiques de l'orthotropie structurale. Enfin, les deux calculs EF-propagatifs (CP et Appui) sont menés. On en élimine les résultats représentant les modes de torsion (qui sont systématiquement les modes impairs des deux calculs) en ne gardant que les modes de flexion (modes pairs des calculs). Cette élimination *a priori* des modes de torsion reste un point à valider, la disparition du premier mode de torsion dans l'expérience précédente pouvant être fortuite.

Premier cas : raidisseurs très espacés.

Les résultats de la première méthode (dans les deux directions perpendiculaires) pour le premier cas sont tracés figure IV.30.

Deux points méritent d'être commentés :

- dans la direction des raidisseurs ($k_{x'}$), le nuage de points est très étendu, ne suivant pas une courbe unique. Il semble donc que l'affirmation «c'est donc systématiquement le premier mode qui transporte le plus d'énergie» (page 112), vraie dans le cas particulier précédent, est fautive dans le cas général. Ici, aucun mode particulier n'émerge de cette première analyse.
- à partir de 1700 Hz, il apparaît des nombres d'onde très lointains des prévisions. Cependant, ces nombres d'onde ont l'air structurés (il sont presque alignés). Il s'agit du phénomène de repliement

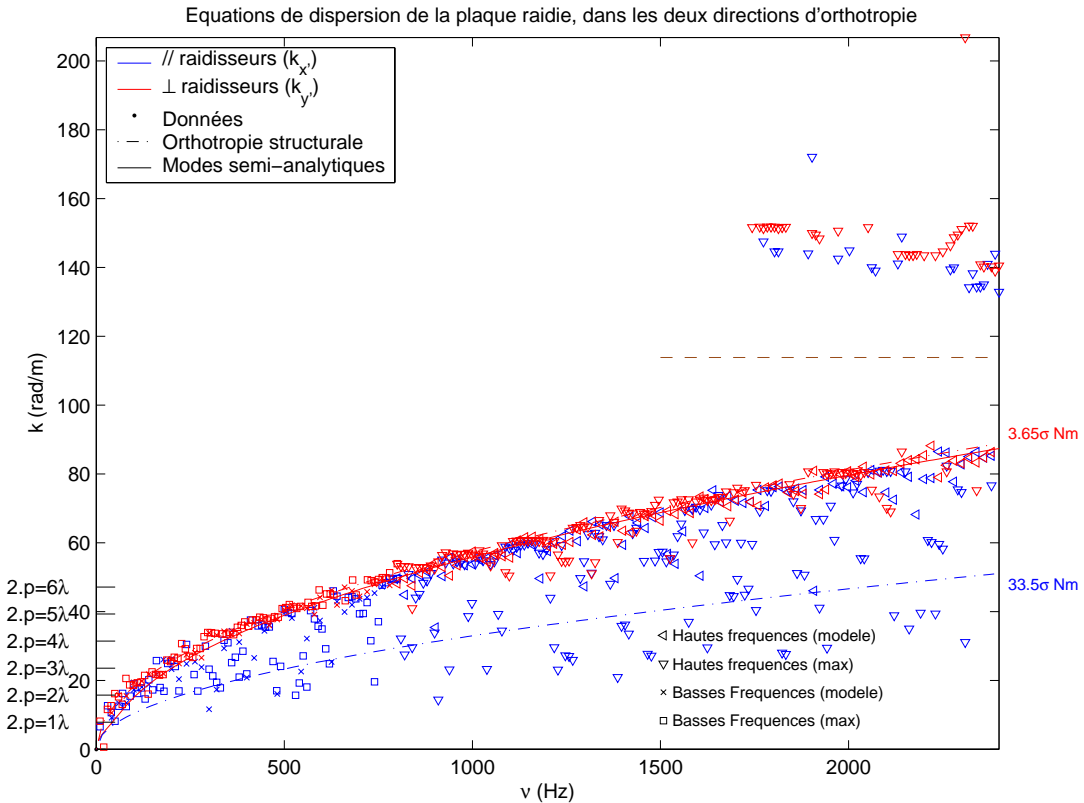
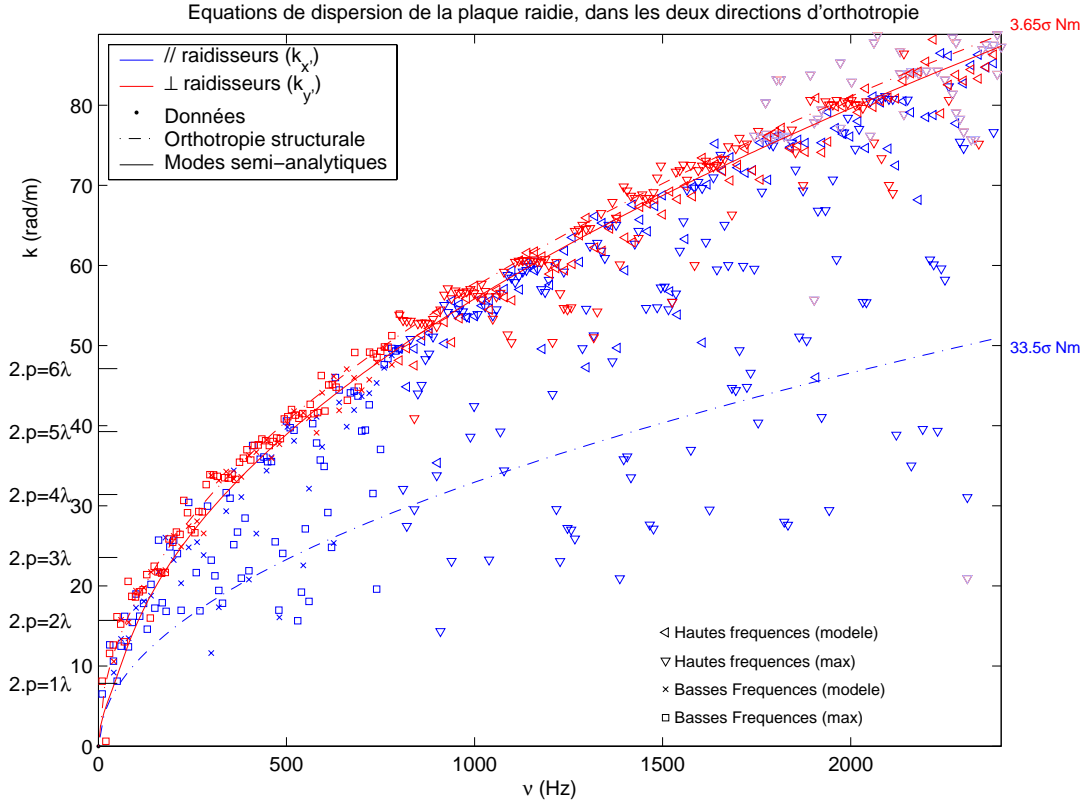


FIG. IV.30: Nombres d'onde principaux dans le premier cas ($p=40 \text{ cm}$)

(aliasing, c.f. page 37) : à cause de la discrétisation du champ sur une grille $(x_i, y_i)_i$, des nombres d'onde différents peuvent apparaître à la même place dans le plan d'onde (DFT, CFT ou IWC). Plus précisément, si la grille est uniforme de pas $(\Delta x, \Delta y)$, les nombres d'onde k_x et $k_x + \frac{2\pi}{\Delta x}$ (réciproquement k_y et $k_y + \frac{2\pi}{\Delta y}$) apparaissent au même endroit. Dans le cas présent, la grille est effectivement uniforme, alignée sur les raidisseurs. Le nombre d'onde $-k_x^{(1)}$ peut donc apparaître au même endroit que le nombre d'onde $-k_x^{(1)} + \frac{2\pi}{\Delta x}$ (réciproquement, les nombres d'onde $-k_y$ et $-k_y + \frac{2\pi}{\Delta y}$ apparaissent au même endroit). Pour remédier à ce problème, il suffit de se rappeler qu'on a déjà placé au même endroit k_x et $-k_x$ (réciproquement k_y et $-k_y$). Les nombres d'onde apparaissant au dessus de la limite $\frac{\pi}{\Delta x}$ (réciproquement $\frac{\pi}{\Delta y}$) subissent donc deux opérations : une symétrisation, $k_x \rightarrow -k_x$ (réciproquement $k_y \rightarrow -k_y$) puis un "anti-aliasing" $k_x \rightarrow k_x + \frac{2\pi}{\Delta x}$ (réciproquement $k_y \rightarrow k_y + \frac{2\pi}{\Delta y}$). Cette suite d'opération revient à faire une symétrie par rapport à l'axe $k_x = \frac{\pi}{\Delta x}$ (tracé sur la figure IV.30 en pointillés marrons) (réciproquement $k_y = \frac{\pi}{\Delta y}$). Dans tout ce qui suit, un nombre d'onde ayant subi cette symétrie est noté en couleur plus claire dans les figures.

La figure IV.31 présente les mêmes résultats que précédemment, mais "dé-repliés". Les points initialement positionnés autour de 140 rad/m se confondent maintenant avec le nuage de points situé sur les prévisions. Dans le sens perpendiculaire aux raidisseurs (k'_y , en rouge), la prévision d'orthotropie structurale est très pertinente. Par contre, dans le sens des raidisseurs, on ne voit pas de mode particulier. La deuxième méthode est donc nécessaire.

FIG. IV.31: Nombres d'onde principaux dans le premier cas ($p=40$ cm), avec procédure de dé-repliement

Les résultats de la deuxième méthode (par projection de la CFT) sont tracés figure IV.32. Malheureusement, la précision de la méthode semble insuffisante au vue de la densité des modes : ceux-ci sont très rapprochés ($k_{x'}^{(i)}(\omega) \approx k_{x'}^{(i+1)}(\omega)$), et on ne sait pas vraiment à quel mode rattacher une estimation $(\omega, k_{x'})$ donnée. Sur la figure, deux paraboles ont été tracées en pointillés noirs. Il s'agit des équations de dispersion des deux structures (poutre et plaque) découplées. En haut de la figure, c'est l'équation de dispersion de la plaque qui apparaît ($\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}k^4 = \rho h\omega^2$) tandis qu'en bas, c'est celle de la poutre en flexion ($\frac{Eb^3}{12}k^4 = \rho b\omega^2$).

Asymptote “plaque” : On constate que la courbe représentant la plaque seule est une asymptote des modes de flexion : en effet, à haute fréquence, l'espacement entre deux raidisseurs devient infini devant la longueur d'onde. Dans cet espace inter-raideur, seule la plaque vibre ; c'est donc son équation de dispersion qui apparaît à haute fréquence.

Asymptote “poutre” : A titre informatif, on trace simplement l'équation de dispersion de la poutre seule en flexion. On s'aperçoit qu'elle croise les modes propagatifs de section systématiquement en leur premier point d'inflexion. Ce comportement particulier n'est peut-être qu'un hasard (il est montré dans la suite de l'exposé que ce n'est pas le cas). Mais ce point est suffisamment remarquable pour qu'on modifie légèrement la deuxième méthode de recherche des nombres d'onde $k_{x'}^{(i)}$: la limite inférieure de recherche, initialement prévue à l'orthotropie structurale, est baissée à l'asymptote poutre $k = \left(\frac{12\rho}{Eb^2}\right)^{1/4} \sqrt{\omega}$.

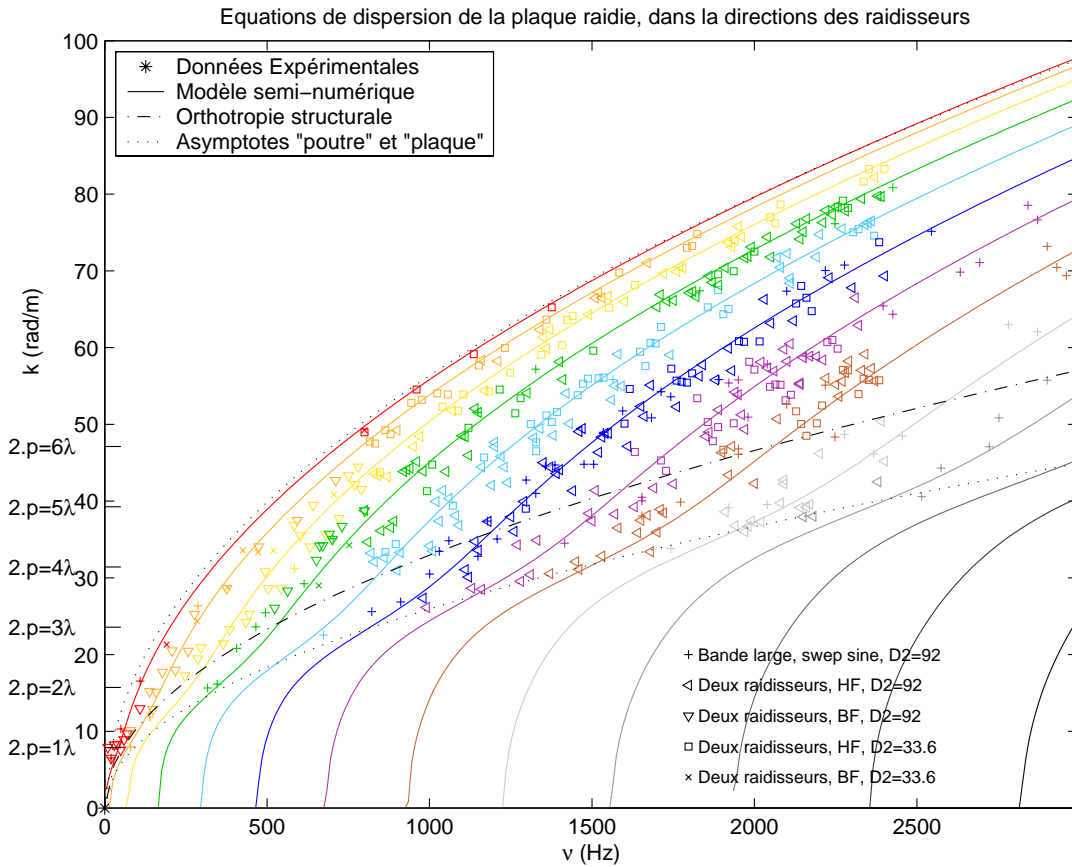


FIG. IV.32: Nombres d'onde de tous les modes propagatifs dans le premier cas ($p=40$ cm)

Les résultats dans le cas des raidisseurs très espacés sont mitigés :

- Dans la direction perpendiculaire aux raidisseurs, le modèle d'orthotropie structurale (homogénéisation basses fréquence) est très pertinent.
- Tous les modes propagatifs de flexion semblent avoir un point d'inflexion sur l'asymptote poutre. Cette asymptote est utilisée comme nouvelle limite basse pour la recherche des modes.
- Le fait d'avoir un espacement très long entre les raidisseurs provoque un grand nombre de modes propagatifs. En effet, ceux-ci s'établissent à partir de la fréquence du mode *non propagatif* correspondant de la section ($k_x = 0 \Leftrightarrow$ mode non propagatif). Or, plus la structure de la section est grande, plus ses modes ont une fréquence basse. Autrement dit, plus la période des raidisseurs est grande, plus les fréquences de déclenchement sont basses. Etant limitées à 0, ces fréquences sont donc de plus en plus rapprochées quand la période augmente.
- Le fait d'avoir un grand nombre de modes propagatifs empêche de pouvoir les distinguer lors de la deuxième analyse (projection des CFT). Il est donc nécessaire de rapprocher les raidisseurs.

Deuxième cas : raidisseurs moyennement espacés.

La figure IV.33 présente les résultats de l'identification des nombres d'onde dans les deux directions principales (première méthode, par intersection du plan d'onde avec les axes $k_{x'}$ et $k_{y'}$). De nouveau, des problèmes des repliements apparaissent. Mais traités avec la méthode

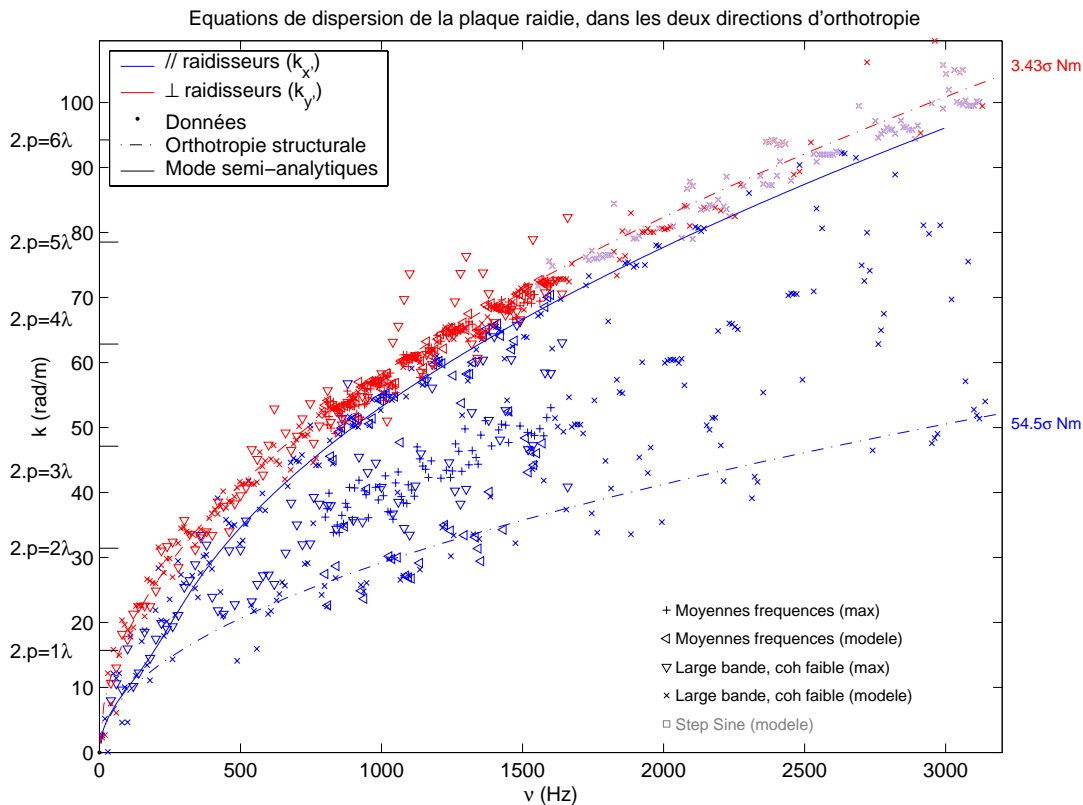


FIG. IV.33: Nombres d'onde principaux dans le deuxième cas ($p=20$ cm)

décrites plus haut, les points du plan d'onde dé-repliés sont de nouveau bien placés (en couleurs claires sur la figure IV.33).

Dans la direction $k_{y'}$, les résultats sont encore très satisfaisants : l'orthotropie structurale prévoit bien la position des nombres d'onde. Dans l'autre direction, plusieurs modes semblent apparaître. Mais les structures de ceux-ci n'émergent pas. La deuxième méthode est nécessaire.

Les résultats de la deuxième analyse du deuxième cas sont présentés figure IV.34. Cette fois-ci, la périodicité des raidisseurs, plus faible, impose un faible nombre de modes propagatifs dans le bande de fréquence. En conséquence de quoi il est aisé de constater que les modes prévus et mesurés sont en bonne concordance, et que les modes de torsion n'apparaissent toujours pas dans les données expérimentales. De plus, on constate que le point d'inflexion des modes calculés est toujours sur la courbe de l'asymptote poutre. Dans cette direction, l'orthotropie structurale semble sans intérêt : en basses fréquences, elle ne prévoit pas mieux la position des nombres d'onde que l'asymptote poutre, et en hautes fréquences elle ne semble jouer aucun rôle. La méthode d'homogénéisation n'est pas valide dans cette direction. Afin de confirmer ces

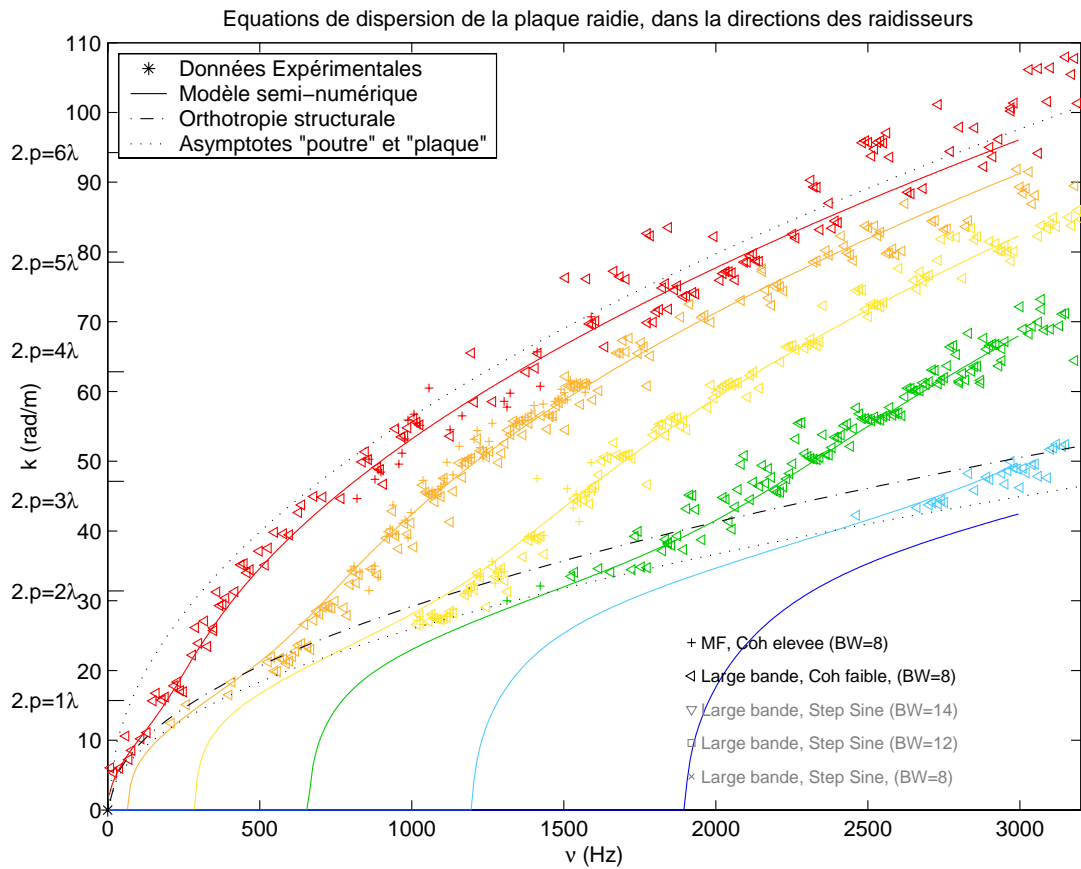
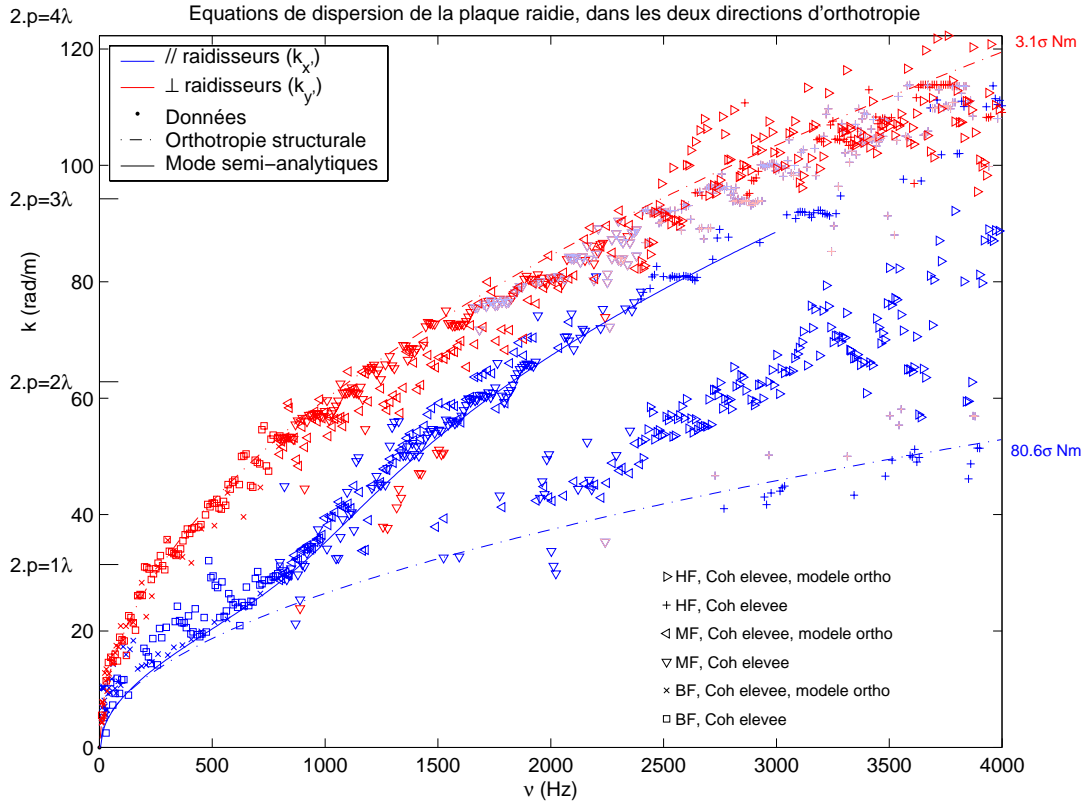


FIG. IV.34: Nombres d'onde de tous les modes propagatifs dans le deuxième cas ($p=20$ cm)

résultats, un dernier cas est testé.

Troisième cas : raidisseurs peu espacés.

En ce qui concerne la première analyse (figure IV.35), on voit dans ce cas des raidisseurs très peu espacés que les deux premiers modes peuvent être perçus par cette méthode. En effet, on détecte la présence de *deux* courbes (bleues) correspondantes à la direction de propagation dans le sens des raidisseurs. L'énergie n'est donc pas systématiquement majoritaire sur le premier mode de propagation. Sur la figure IV.36, qui présente les résultats de la seconde méthode d'analyse, les deux premiers modes sont très marqués, et le troisième émerge de l'asymptote poutre à partir de 3500 Hz. Cependant, on note la présence d'un grand nombre de couples (ω, k) , sur l'ensemble de la gamme de fréquence, à grands nombres d'onde (en gris sur la figure). Ces points viennent d'un mauvais paramétrage de la seconde méthode d'estimation des modes propagatifs : la bande BW utilisée pour le filtrage est sans doute un peu trop fine, ce qui laisse aux variations dues au bruit la possibilité d'être détectées comme des modes propagatifs. Cependant, on constate que le nombre de points détectés sur les modes n'est pas très élevé non plus : avec une bande de filtrage plus large, on éliminerait les erreurs de mesure (en gris), mais on éliminerait aussi des points de mesure valides (sur les courbes, en rouge, orange et jaune).

FIG. IV.35: Nombres d'onde principaux dans le troisième cas ($p=10$ cm)

Cette explication mérite un complément : pourquoi ce compromis dans le réglage de la largeur de bande du filtrage est-il plus difficile à atteindre dans le cas des raidisseurs rapprochés que dans les autres cas ? La réponse à cette question tient au fait que la structure étant beaucoup plus raide, les amplitudes de déplacement sont beaucoup plus petites. Comparativement, le bruit est donc plus fort. C'est pourquoi il est détecté.

D'autres identifications incorrectes semblent surgir au milieu des courbes (en bleu sur la figure IV.36). Ces apparitions viennent elles aussi d'une largeur de bande du filtrage (paramètre BW) un peu trop courte. Dans ce cas, ce sont les rebonds dus au fenêtrage (*leakage*) qui sont détectés. Ceux-ci sont situés systématiquement à la même distance (correspondant à $\frac{3\pi}{L_{x'}}$ si $L_{x'}$ est la dimension de la structure dans la direction x'). D'une autre manière que précédemment, ces points correspondent à des erreurs de mesures (provenant cette fois-ci du fenêtrage, non du bruit de mesure).

Conclusion

A partir d'une certaine fréquence, l'orthotropie structurale n'est plus suffisante pour décrire le comportement dynamique des plaques raidies. La longueur d'onde diminuant, les ondes ont la possibilité d'être réfléchies par les raidisseurs, et créent un réseau d'interférence dans chaque période de la structure. Ce réseau d'interférence est vu comme une superposition de *modes propa-*

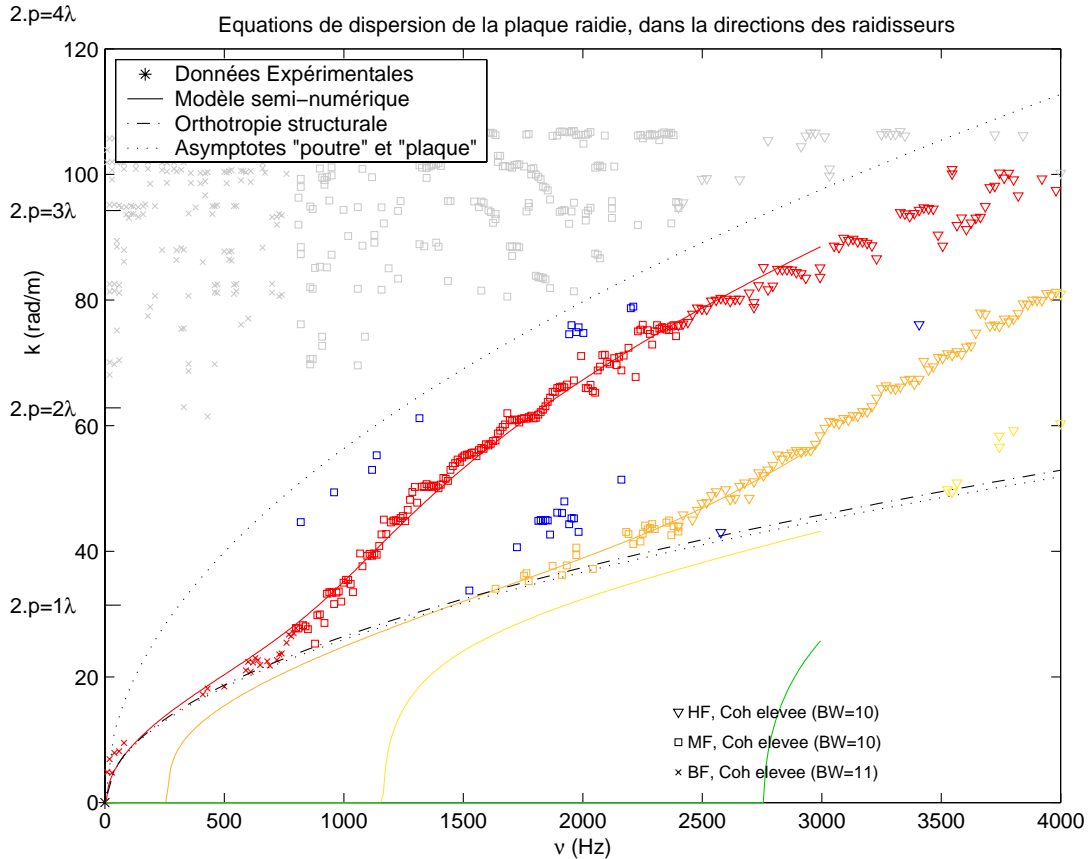


FIG. IV.36: Nombres d'onde de tous les modes propagatifs dans le troisième cas ($p=10$ cm)

gatifs, dont les caractéristiques sont calculables grâce à deux modèles EF-propagatifs (calcul CP et Appui). Dans le plan d'onde, ces modes apparaissent comme des segments de droites parallèles à l'axe des k_y . Des méthodes d'identification adaptées à ces caractéristiques permettent de mesurer les vitesses de propagation associées à chacun des modes. La confrontation de ces calculs analytiques avec les résultats des méthodes d'identification sur des bancs expérimentaux est excellente. Ceci permet de confirmer le fait qu'au delà de la première fréquence de "décollement" du nombre d'onde par rapport à l'orthotropie structurale (fréquence calculable grâce à la méthode EF-propagative, et de l'ordre de $\nu_c = \frac{\pi\sqrt{D_x}}{8p^2}$, correspondant à $\lambda = 4p$), la plaque raidie se comporte comme une juxtaposition de guides d'onde. La dynamique prédite par cette juxtaposition est alors valable en large bande (aucune limite n'a été constatée).

Le chapitre suivant est une application de tout ce qui a été présenté dans les quatre premiers chapitres. La structure étudiée est la table d'harmonie d'un piano à queue. Elle fait l'objet d'une étude modale, puis d'une étude moyennes fréquences grâce à la méthode IWC, ce qui exhibe le comportement de plaque raidie étudié dans ce chapitre.

Chapitre V

Identification large bande d'une table d'harmonie de piano

Ce chapitre est une application de l'ensemble des précédents chapitres à une structure donnée : la table d'harmonie d'un piano à queue. Après une rapide présentation de ce “rayonneur d'énergie acoustique”, une analyse modale complète est effectuée. Dans un premier temps, les caractéristiques des matériaux sont déterminées sur des échantillons à travers une analyse modale et un modèle éléments finis. Dans un deuxième temps, la structure complète est d'un coté modélisée par un logiciel éléments finis, et d'un autre coté, testée à travers une analyse modale. Un recalage permet de constater que la méthode des éléments finis prévoit pertinemment le comportement modal de la structure, malgré les hétérogénéités et les imperfections du matériau de construction (du bois).

La table d'harmonie des pianos est construite comme une plaque raidie quasi-périodiquement. L'utilisation de l'outil d'homogénéisation basses fréquences vu au chapitre précédent est donc accomplie, mais sans succès. Les raidisseurs de cette structure étant de hauteurs très variables, la structure ne peut être homogénéisée. Pour les plus hautes fréquences, on tente de voir la table d'harmonie sous l'aspect d'une juxtaposition de guides d'ondes. Les méthodes exposées dans le chapitre précédent sont employées, cette fois-ci, avec succès. La présence, pour une même fréquence, de plusieurs ondes de vitesses différentes entraîne des conclusions inédites quant à la fabrication des tables d'harmonie.

V.1 La table d'harmonie des pianos à queue

Cette section présente rapidement la nature du piano et de sa table d'harmonie. Elle présente aussi une justification de l'étude modale qui suit, à travers la mise en évidence de l'influence du comportement modal de la table d'harmonie dans le son du piano. Pour plus d'informations concernant le piano, on citera une étude bibliographique complète du piano effectuée par l'auteur, dont les sources bibliographiques sont compilées à la fin de cet ouvrage (page 171).

V.1.1 Le piano

L'invention du piano peut être attribuée à Cristofori : il créa en 1709 un nouveau système d'attaque des cordes du clavecin. La sonorité de l'instrument en fut radicalement modifiée : il devint possible de choisir l'intensité des notes jouées entre le doux – *piano* – et le fort – *forte*. Le nom de l'instrument résuma ces possibilités. On l'appela *pianoforte*, nom que l'usage simplifia en *piano*. Quelques évolutions, au XIX^{ème} siècle, dont les plus importantes furent celles de Erard et de Steinway, ont amené le piano à une “norme” tacite.

Blackham [100] distingue plusieurs grandes parties dans un piano (fig. V.1) :

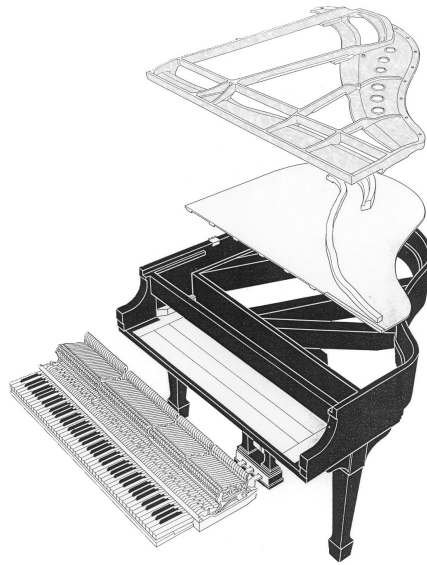


FIG. V.1: Vue éclatée d'un piano à queue

- 1) Le meuble : c'est la partie visible de l'instrument, souvent laquée ou en marqueterie, et qui sert de support à la mécanique et aux parties vibrantes. Le meuble est constitué au centre d'un treillis massif en bois appelé *barrage*, d'un “muret” (la *ceinture*) entourant l'ensemble d'harmonie, des pieds, et des pédales.
- 2) L'ensemble de commande : il s'agit des 88 touches du clavier, de la mécanique constituée des diverses pièces mobiles, et des marteaux.
- 3) La table d'harmonie : c'est une pièce de bois qui entre en vibration sous l'action des cordes pour permettre un rayonnement efficace dans le milieu fluide ambiant. Du point de vue acoustique, c'est la pièce maîtresse du piano. Elle est excitée en vibration par les cordes *via* deux *chevalets* (pièces de bois collées sur la table pour permettre la liaison entre les cordes et la table).
- 4) Le plan de cordes : Cette pièce est un moulage monolithique de métal supportant la tension des 244 cordes, de l'ordre de 10 tonnes en moyenne et allant jusqu'à 30 tonnes sur les pianos les plus puissants, dits “de concert”. Cette pièce est techniquement difficile à réaliser car son cahier des charges est exigeant : elle doit résister à la compression, être rigide pour offrir aux cordes de bonnes conditions aux limites, ne pas être trop lourde (pour ne pas alourdir l'ensemble du piano), être acoustiquement transparente (pour ne pas bloquer les

ondes émises par la table située juste en dessous d'elle), ne pas gêner la disposition des cordes.

- 5) Le couvercle : il s'agit d'un capot articulé fermant le piano (protection de la poussière et des projections) et qui, suivant le degré d'ouverture, joue un rôle important dans le rayonnement et le timbre du piano.

V.1.2 La table d'harmonie

En jeu, l'instrumentiste agit sur le clavier qui, au travers de la mécanique, projette le marteau contre la corde. Ce contact non linéaire provoque une excitation large bande de la corde, qui répond sur l'ensemble de sa base modale (légèrement inharmonique). Intervient enfin la table d'harmonie, servant à faire rayonner l'énergie vibratoire emmagasinée dans la corde. D'où l'importance de l'étude vibratoire et vibroacoustique du comportement dynamique de cette structure.

Description

D'après Conklin [103], le matériau le plus couramment utilisé pour cette table d'harmonie est l'épicéa. Des planches sont tirées du coeur de l'arbre, avec une orientation des anneaux annuels inférieure à 45°. Ces planches sont ensuite assemblées entre elles. La découpe selon la forme finale se fait avec un angle de 30° à 50° entre le petit coté et le fil du bois.

L'épicéa est un matériau orthotrope, dont le rapport $\frac{E_{//}}{E_{\perp}}$ est de l'ordre de 10 à 20. La grande faiblesse de la table dans la direction perpendiculaire au fil du bois a imposé l'ajout de renforts ; ce sont des barres d'épicéa, pleines et épaisses, qui sont collées sous la table, dans une orientation quasi perpendiculaire au fil du bois. L'idée est que, statiquement, ces renforts évitent la fissuration du bois au fil du temps, tandis que dynamiquement, ils rigidifient la structure pour les basses fréquences sans la modifier pour les hautes fréquences. La figure V.2 montre le positionnement des renforts sur une table d'harmonie ainsi que l'orientation des fibres du bois de la table. Les fibres du bois des renforts est orientée dans leur grande dimension. Il faut noter qu'en dépit de l'apparence, l'espacement des renforts est variable ; le milieu de propagation est donc quasi périodique.

La pièce qui forme un triangle, en bas à gauche de la figure V.2, est appelée *mouchoir*. Outre le fait de servir d'appui aux renforts, le mouchoir est mis en place par les facteurs de piano pour «stopper les vibrations parasites qui ont lieu dans cette partie de la table d'harmonie»¹. Sur certains pianos, cet ajout n'est pas nécessaire (par exemple sur le Pleyel P170).

¹Propos recueillis par l'auteur aux Manufactures Françaises de Piano.

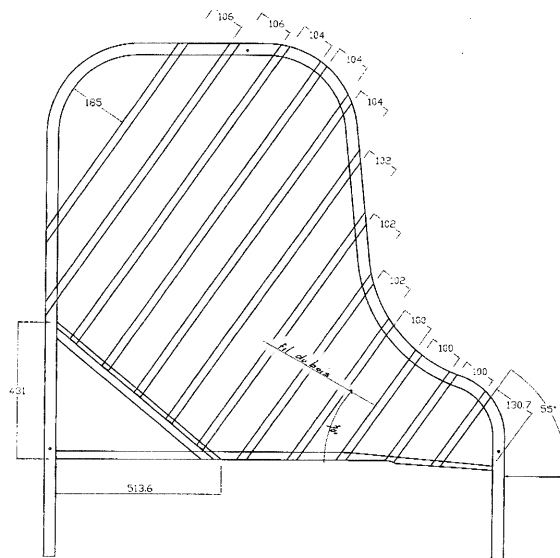
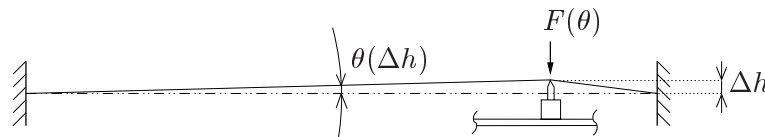


FIG. V.2: Positions des barres de tables (modèle P190)

Réponse statique et dynamique

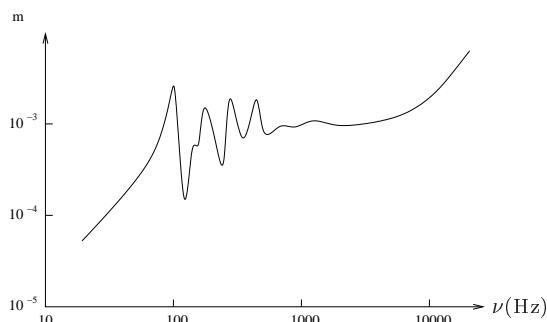
La corde tendue sur le plan de cordes est en appui sur le chevalet ; celui-ci reçoit donc une poussée verticale vers le bas, qu'il transmet à la table d'harmonie (fig V.3). Cette poussée est directement reliée à la tension de la corde et à l'angle de la corde avec le plan de cordes. L'agrafe au chevalet (qui définit la liaison entre la corde et le chevalet) est réglable en hauteur, ce qui permet de modifier cet angle.

FIG. V.3: Montage d'une corde au chevalet : mise en évidence de la charge statique F

En statique, la table d'harmonie doit donc résister à une charge répartie le long du chevalet, charge qui la déforme. Pour conserver de bonnes caractéristiques de rayonnement, on assemble la table dans un moule convexe qui lui donne au repos une cambrure : elle est bombée (la flèche fait quelques centimètres). Cette cambrure est prévue pour que la table soit à peu près plane quand elle sera en charge. C'est donc précontrainte que la table est utilisée.

Au niveau dynamique, idéalement, la table d'harmonie devrait avoir de grands mouvements uniformément sur toute la gamme d'excitation, *i.e.* de 27.5 Hz à au moins 4186 Hz (pour les fondamentales de chaque corde), quelle que soit la position de l'excitation sur le chevalet. Cette capacité de déplacement est souvent quantifiée par l'admittance au chevalet, qui est le rapport déplacement/force $\frac{d}{F}$. Or, cette admittance varie fortement avec la fréquence (*c.f.* figure V.4) :

- En très basses fréquences ($\nu < \sim 100$ Hz) – le registre grave du piano –, le mouvement de la table n'est influencé que par sa raideur : elle vibre d'autant moins qu'il s'agit de basses fréquences. Dans cette plage fréquentielle, la volonté des facteurs de piano est alors de

FIG. V.4: *Allure de l'admittance ($y-y$) au milieu du chevalet*

diminuer la raideur pour augmenter l'admittance; dans cette optique, certains facteurs diminuent l'épaisseur de la table sur son contour.

- Dans les basses fréquences – le registre médium-grave –, apparaît la structure modale de la table avec ses résonances. La valeur moyenne de l'admittance est alors de l'ordre de 1 ms/kg qui est la valeur optimale du point de vue du timbre (compromis puissance/durée).
- Puis dans les moyennes et hautes fréquences ($\nu > \sim 1000$ Hz) – le registre médium-aigu et aigu –, l'admittance redevient une fonction lisse et croissante de la fréquence.

D'après Giordino [118], la stabilité de l'admittance dans les moyennes fréquences, autour de la valeur moyenne de 1 ms/kg, est due à une forte densité modale. L'admittance est d'autant moins variable avec la fréquence que la densité modale est grande. L'auteur construit pas à pas un modèle numérique de table d'harmonie et conclut que c'est l'anisotropie (orthotropie) du bois qui est à l'origine de cette forte densité modale.

Mise en évidence du filtrage dynamique de la table

Comment vérifier si le comportement modal de la table d'harmonie influe sur le son du piano? Comment prouver qu'il existe, dans le son final du piano joué par un instrumentiste, une trace de la dynamique modale de la table? L'idée est de tracer, en fonction de la fréquence, le niveau acoustique émis par la table, pour une excitation référencée utilisant l'ensemble du piano – de la touche à la table, en passant par le marteau. Le balayage en fréquence va être obtenu par deux moyens : tout d'abord, chaque note de piano est constituée de plusieurs partiels, c'est-à-dire plusieurs fréquences émergentes. Ensuite, changer de note revient à décaler dans le domaine fréquentiel tous ces partiels. Ainsi, une analyse fréquentielle de toutes les notes du piano permet de reconstituer une fonction fréquentielle quasiment complète.

Afin de vérifier l'importance de l'influence du comportement modal de la table d'harmonie sur le son du piano, l'échantillonnage complet d'un Yamaha C2 est effectué. L'excitation constante du clavier est réalisée grâce à un *impacteur*, composé d'une masse (254 g) guidée en pivot glissant verticalement, lâchée d'une hauteur constante (40 mm), munie d'un amortisseur en mousse. Des tests de reproductibilité ont montré une grande stabilité de l'excitation.

Chaque note est enregistrée via un microphone GRAS d'un quart de pouce placé à 30 cm à la verticale du LA 440. L'échantillonnage à 44,1 kHz assure une bande passante suffisante. La figure V.5-gauche montre un exemple de son échantillonné. On distingue aisément les quatre phases habituelles d'un son de piano : attaque (attack), décroissance (decay), chant (sustain), relâchement (release).

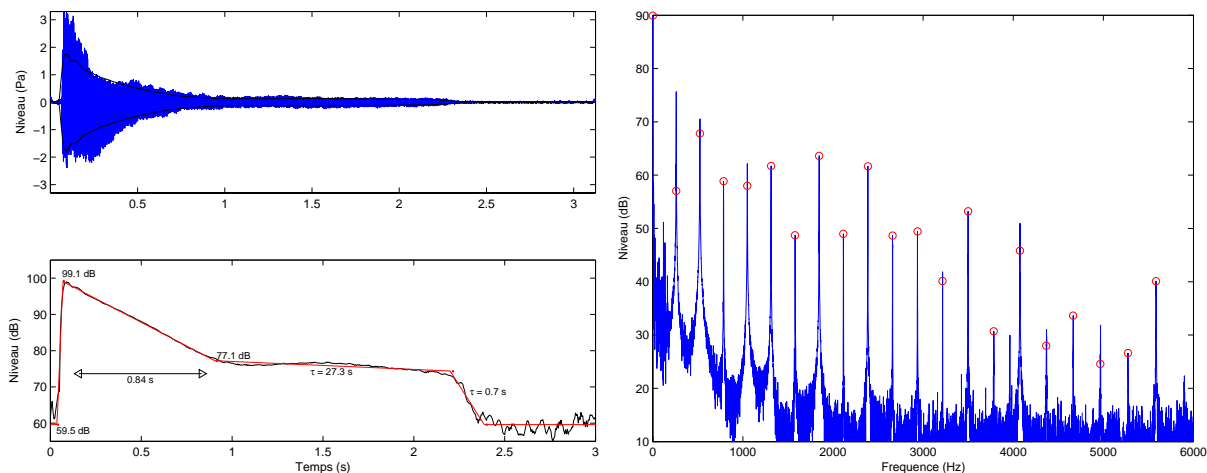


FIG. V.5: Exemple de son de piano. A gauche, dépendance temporelle ; à droite, dépendance fréquentielle du chant

La partie la plus stable, le chant, subit une analyse fréquentielle, mettant en évidence des partiels très émergents et inharmoniques, comme l'a montré pour la première fois R.W. Young [138, 139, 140] (*c.f.* figure V.5).

Enfin, la fréquence et le niveau de chacun de ces partiels sont stockés, afin d'en suivre l'évolution le long du clavier. Sur la figure V.6, sont tracées les courbes (fréquence du partiel n en Hz)/(niveau du partiel n en dB). Ainsi, on sépare complètement les variations de fréquence dues au changement de note d'un côté, et dues au changement de partiel d'un autre côté. En première approximation, on peut supposer le niveau d'excitation constant d'un partiel à l'autre et d'une note à l'autre. La figure V.6 est donc similaire à une fonction de transfert, et met en évidence un premier pic vers 110 Hz en dessous duquel le niveau est très faible. Puis une forte baisse de niveau, autour de 160 Hz, suivie d'un autre pic à 210 Hz. Il semble évident, toutes choses étant égales par ailleurs, qu'il s'agit ici du filtrage de la table d'harmonie avec un premier mode vers 110 Hz et un second vers 210 Hz. Une autre interprétation de la forte variabilité fréquentielle de la pression acoustique pourrait être liée à la nature du champ acoustique. En effet, le microphone était placé dans le champ proche acoustique, où les niveaux de pressions sont fortement variables. Mais cette variabilité est surtout spatiale et non fréquentielle ; de l'avis de l'auteur, c'est bien à la table d'harmonie que sont dues les fortes variations fréquentielles du niveau acoustique rayonné.

Ainsi, on peut montrer qu'il existe, dans le son des pianos, la trace, la *signature* du comportement modal de la table d'harmonie. Une étape importante dans l'analyse du piano est donc l'analyse modale, qui régit les basses fréquences ($\sim 50 \rightarrow 300$ Hz). C'est l'objet de la prochaine section du chapitre.

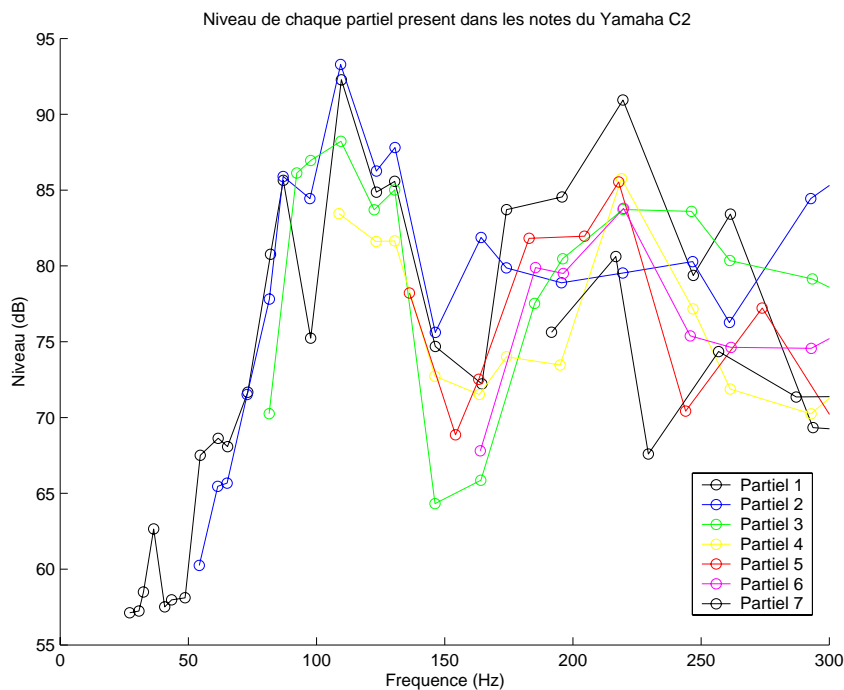


FIG. V.6: Niveau acoustique en fonction de la fréquence

Dans le domaine des basses fréquences, le formalisme modal est à la fois pertinent et bien maîtrisé. Par contre, dans le domaine des moyennes et hautes fréquences, les méthodes sont plus récentes et moins performantes. En particulier, ces méthodes nécessitent l'identification de paramètres caractéristiques des vibrations au sein de la structure. On appliquera donc les méthodes d'exploration du plan d'onde évoquée au chapitre II. La présence des renforts font de la table d'harmonie une plaque périodiquement raidie : on interprétera les résultats avec les méthodes du chapitre IV.

V.2 Identification modale d'une table d'harmonie

V.2.1 Caractérisation du matériau

La première étape dans la construction d'un modèle numérique de la table d'harmonie consiste à identifier les paramètres physiques des matériaux utilisés dans la construction de la table d'harmonie. A cette fin, des échantillons de bois sont testés, puis une analyse modale leur est appliquée. Parallèlement, un modèle numérique, basé sur une estimation des paramètres physiques, est construit. L'écart entre les résultats est enfin minimisé en faisant varier les paramètres physiques du modèle numérique. A la convergence, on a trouvé les paramètres corrects.

Analyse modale

Un échantillon d'épicéa utilisé pour la table d'harmonie est testé. Les caractéristiques de cette plaque sont données dans la table V.a.

Longueur	Largeur	Épaisseur	Masse	Densité
300 mm	240 mm	7,9 mm	223 g	392 kg/m ³

TAB. V.a: *Caractéristiques géométriques de l'échantillon d'essai*

La plaque est suspendue puis excitée par un marteau d'impact sur un maillage régulier de $N = 30$ points. La force est mesurée par un capteur de force Brüel & Kjær 8200 et l'accélération dans un coin de la plaque par un micro-accéléromètre P.C.B. M357 B11. Les signaux sont recueillis sur un micro-ordinateur via l'interface d'acquisition OROS-OR25, qui donne directement les $H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)$ échantillonnées de 0 à 1000Hz sur 401 lignes fréquentielles ($\delta\nu = 2,5\text{Hz}$).

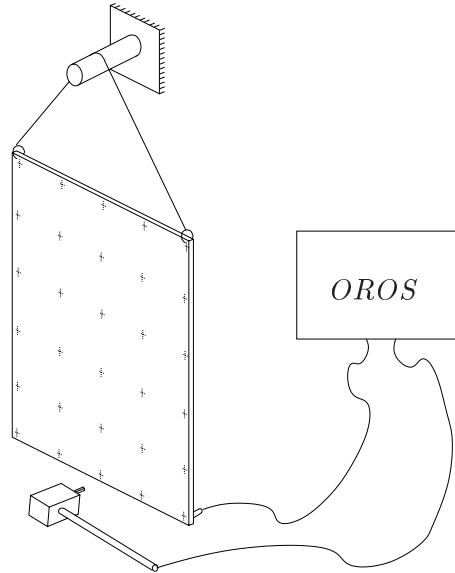


FIG. V.7: *Schéma de l'expérience pour identification des paramètres physiques*

Sur ces $N = 30$ fonctions de transfert, dont une mesure colocalisée en $i = j = 1$, la méthode de la fraction rationnelle complexe (*c.f.* page 15) est appliquée. Elle donne un nombre de modes identifiés variable en fonction du point de mesure, comme le montre la figure V.8-gauche. On sait que, si un mode m_0 est manquant pour un point i_0 , c'est que ce point est sur une ligne nodale, *i.e.* $\phi_{i_0}^{m_0} = 0$. Il suffit donc, pour égaliser le nombre de modes identifiés sur chaque point, de recopier les caractéristiques globales du mode m_0 identifié au point colocalisé $i = 1$, en lui donnant un résidu nul. Ainsi, on complète le tableau, ce qui donne la figure V.8-droite.

Pour avoir les caractéristiques globales des modes, il suffit de moyenner les résultats le long du point de mesure. Les fréquences propres sont données dans le tableau V.b.

Remarque : On ne s'intéresse ici qu'aux fréquences propres, mais on a aussi à disposition les amortissements propres et les déformées. Sur la figure V.8, on constate que l'estimation de la

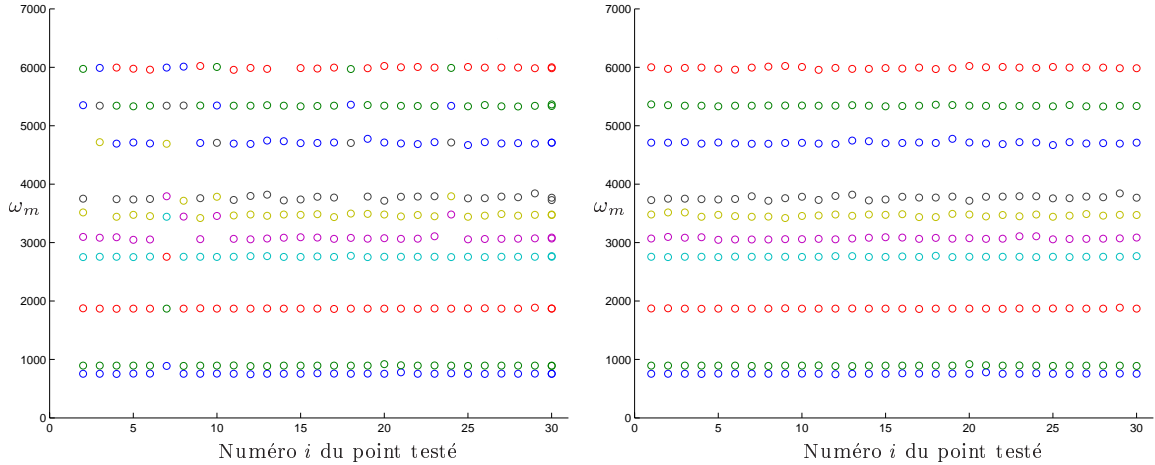


FIG. V.8: *A gauche, pulsations modales en fonction du numéro du point. A droite, les pulsations complétées.*

Numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence (Hz)	120.5	142	298	439	489	552	599	749	850	953

TAB. V.b: *Fréquences propres expérimentales de l'échantillon d'épicéa*

fréquence propre est très stable vis-à-vis du point testé. Ce n'est pas le cas pour l'amortissement, sur la figure V.9. C'est un problème très délicat, car l'amplitude d'un pic, *i.e.* sa valeur maximale, est proportionnelle au résidu R_i^m et inversement proportionnelle à l'amortissement ξ_m . Une erreur d'estimation de l'amortissement se répercutera donc directement sur l'estimation du résidu, c'est-à-dire de la déformée au point considéré. C'est pourquoi une méthode "horizontale" est préférable.

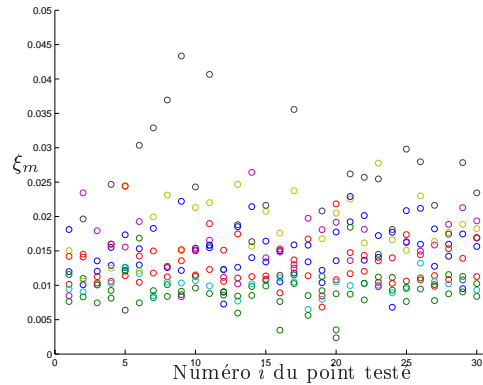


FIG. V.9: *Amortissements modaux identifiés en fonction du numéro du point*

Modèle numérique et identification des paramètres physiques

Le modèle numérique est construit sous ANSYS[©] grâce à un élément quadratique à 4 nœuds–6 degrés de liberté par nœud. Le maillage correspond au maillage expérimental (vu la simplicité de la géométrie et le domaine fréquentiel traité, ce maillage est suffisant). Les caractéristiques mécaniques, que nous recherchons, se réduisent aux cinq paramètres $(E_x, E_y, \nu_{xy}, G_{xy}, \theta_{\perp})$. AN-

sys possède un module d'optimisation ; ces paramètres sont rentrés comme variables et une fonction d'erreur est générée :

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^n (f_m^{\text{ANSYS}} - f_m^{\text{EXP}})^2 \quad (\text{V.1})$$

A partir de paramètres physiques tirés de la littérature (on trouve pour l'épicéa $E_x \simeq 10$ GPa et $E_y \simeq 1$ GPa), le module d'optimisation trouve un minimum local par une méthode du gradient. Après plusieurs passages, on arrive aux valeurs finales de la table V.c.

E_x	E_y	ν_{xy}	G_{xy}	θ_{\perp}
11,5 GPa	0,47 GPa	0,5%	0,5 GPa	1,5°

TAB. V.c: Valeurs des paramètres qui minimisent la fonction d'erreur

La table V.d compare les fréquences propres trouvées avec ces paramètres aux fréquences propres trouvées expérimentalement. Les deux premiers modes ont été inversés aux vues des déformées modales. En effet, il est apparu que le premier mode expérimental avait une déformée plus proche du mode numérique numéro deux, et inversement. Les deux premières fréquences numériques ont donc été inversées.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_m^{ANSYS} (Hz)	155	130	315	436	487	552	617	750	878	1073
f_m^{EXP} (Hz)	120	140	298	440	490	550	600	750	850	950
écart relatif	+29%	-7.1%	+5,7	-0,1%	-0,6%	+0,4%	+2,8%	+0%	+3,3%	+14%

TAB. V.d: Comparaison des résultats de l'identification des paramètres avec les fréquences propres expérimentales

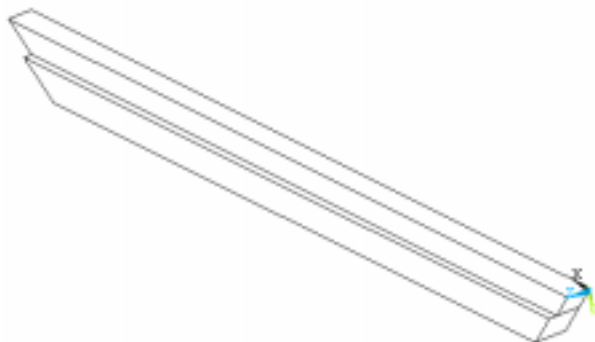
Ces résultats sont un peu décevants, vu l'écart qui subsiste entre les fréquences modales du modèle numérique et celles mesurées. Néanmoins, il faut se rappeler que le matériau testé, du bois, n'est pas parfaitement homogène, contrairement au modèle utilisé. Mais il semble impossible de prendre en compte cette hétérogénéité. Dans tous les cas, cette inhomogénéité ne peut pas expliquer l'écart sur la première fréquence propre, qui reste donc inexplicée.

Identification du sapin

Le mouchoir, cette "poutre" épaisse qui arrête les raidisseurs et forme ainsi un triangle dans le coin de la table correspondant aux aigus, n'est pas en épicéa mais en sapin (fig. V.10). Il est donc nécessaire de connaître ses caractéristiques mécaniques propres.

Un mouchoir isolé est donc testé de façon similaire. Seuls les premiers modes sont pris en compte. La table V.e indique les résultats.

La comparaison de ces caractéristiques avec celles de l'épicéa (table V.c) confirme l'explication de l'utilisation de ce matériau pour la fabrication de la table d'harmonie : l'épicéa est en effet plus rigide et surtout beaucoup plus léger que le sapin. Or on a vu que c'est le rapport


 FIG. V.10: *Mouchoir isolé du reste de la table d'harmonie*

ρ	E_x	E_y	ν_{xy}	G_{xy}
691 kg.m^{-3}	8,86 GPa	0,54 GPa	0,5%	1,6 GPa

 TAB. V.e: *Caractéristiques mécaniques identifiées sur le mouchoir seul, en sapin*

E/ρ qui importe pour le comportement vibratoire d'une structure, puisqu'il pilote le lien entre fréquence et longueur d'onde.

V.2.2 Modélisation numérique d'une table d'harmonie

La connaissance de la géométrie de la table d'harmonie, ainsi que de ses paramètres physiques identifiés sur des échantillons, permet la construction d'un modèle numérique de cette structure. Mais quelle validité celui-ci aura-t-il ? Afin de répondre à cette question, ce modèle numérique est comparé à un modèle expérimental. Si la comparaison est satisfaisante, cela veut dire que le modèle numérique est suffisamment fin, et qu'il est prédictif. Ainsi, de légères modifications de ce modèle numérique pourront servir à une optimisation de la structure.

Modélisation éléments finis de la table

Le modèle éléments finis $2D$ de la table a été réalisé d'après les données constructeur d'une table d'harmonie d'un piano modèle P190 (Pleyel, longueur hors-tout 190 cm). Comme précédemment, les éléments utilisés sont quadratiques à 4 nœuds, 6 degrés de liberté par nœud. Le maillage (*c.f.* figure V.11) est suffisamment fin pour prendre en considération tous les détails géométriques.

Remarque : en réalité, la table n'est pas plane, mais très légèrement bombée (elle est mise en forme sur une portion de sphère). Cette subtilité géométrique n'est pas prise en considération.

L'angle d'orthotropie, c'est-à-dire la direction du fil du bois, est prise en compte par une définition des caractéristiques mécaniques par rapport à un repère local tourné de 55° .

Les éléments des raidisseurs ainsi que du mouchoir sont *collés* sur la table. En entrant un

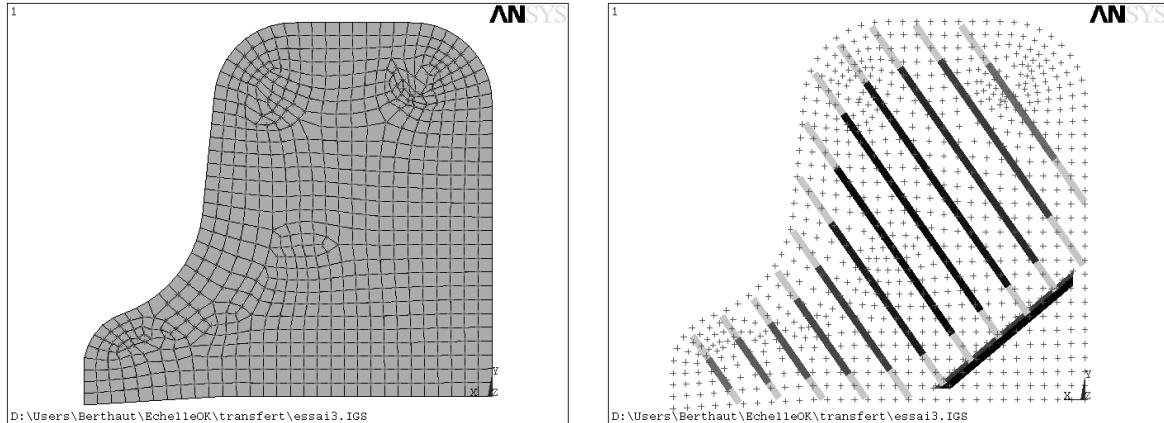


FIG. V.11: *Maillage 2D de la table d'harmonie. À droite, détail sur les différents éléments utilisés pour prendre en compte la troisième dimension (les niveaux de gris correspondent à l'épaisseur des éléments).*

peu dans les détails du logiciel éléments finis, cela revient à imposer aux noeuds des éléments collés (raidisseurs et mouchoir) un déplacement calculé à partir des mouvements des éléments sur lesquels ils sont collés (la table d'harmonie). Les caractéristiques dynamiques des éléments collés (masse et raideur) sont ainsi intégrés dans ceux de la table.

Mais les éléments finis 2D sont définis par rapport à leur *fibre neutre*. Ceci signifie que les éléments des raidisseurs et du mouchoir sont mal modélisés, puisqu'ils paraissent “noyés” dans la table, au lieu d'être placés au-dessus de celle-ci (c.f. figure V.12).

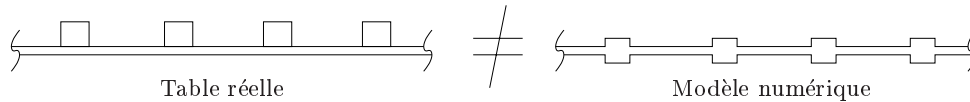


FIG. V.12: *Table et modèle en coupe*

Cette “erreur de modélisation”, liée au décalage de la fibre neutre, est corrigée par l'ajout d'un paramètre supplémentaire γ , qui va rigidifier l'ensemble des caractéristiques mécaniques des matériaux : les modules d'Young utilisés dans le calcul éléments finis seront donc γE_x , γE_y , γG_{xy} , ... Pour l'instant, ce facteur γ est pris égal à l'unité, et il sera recalé par la suite, par comparaison avec le modèle expérimental.

Remarque : Il est possible de mieux modéliser ce décalage de la fibre neutre, par ajout de petites poutres rigides de masse nulle, qui relierait les noeuds des raidisseurs à leurs projections sur le plan de la table (ces petites poutres seraient donc perpendiculaires au plan de la table, et de longueur $\frac{h+b}{2}$ si h est l'épaisseur de la table et b celle du raidisseur). Le problème de cette technique vient du fait qu'il faut alors mailler la table en fonction de la position des raidisseurs (les projections des noeuds des raidisseurs doivent être des noeuds de la table).

Un calcul modal, effectué sur l'ensemble des degrés de liberté correspondant à la translation “verticale” (condensation de Guyan [46]), avec $\mathcal{M} = 30$ modes, donne une base modale

numérique, notée par la suite $(\varpi_m, \Psi^m)_{m < \mathcal{M}}$. Il est possible aussi de récupérer les opérateurs \mathbb{M} et \mathbb{K} de masse et de raideur. Par définition des modes propres, on a les relations suivantes :

$$\forall m \leq \mathcal{M}, \quad -\varpi_m^2 \mathbb{M} \Psi^m + \mathbb{K} \Psi^m = 0 \quad (\text{V.2})$$

Construction expérimentale d'un modèle modal

Acquisition et identification modale : Afin de construire une base modale expérimentale, une table d'harmonie réelle issue de la chaîne de production du P190 des Manufactures Françaises de Piano est testée. Le modèle précédent en est une construction numérique fidèle. Le maillage choisi pour l'expérimentation est un *sous-maillage* ($N = 60$ points) du maillage numérique (figure V.13). La position du capteur, en rouge sur la figure V.13, est choisie en fonction des résultats numériques : c'est le point de la table dont la déformée modale est globalement la plus importante sur l'ensemble des $\mathcal{M} = 30$ modes numériques. Ceci garantit que la mesure ne sera pas "aveugle" pour certains modes (le capteur n'est sur aucune ligne nodale : $\forall m \Phi_j^m \neq 0$).

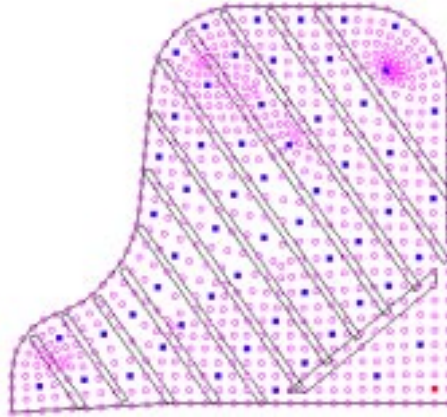


FIG. V.13: Maillages ANSYS et expérimental

Les mesures sont effectuées avec la méthode du marteau de choc avec la même instrumentation que lors des essais sur les échantillons d'épicéa (*c.f.* page 132 et figure V.14). Les deux signaux sont échantillonnés et stockés grâce au module d'acquisition SIGLAB[©]. Les fonctions de transfert sont calculées avec 5 moyennes sur 801 points pour une bande passante $[0 - 200 \text{ Hz}]$ ($\delta\nu = 0,25\text{Hz}$). Les $\left(H_{ij}^{\text{mes}}(\omega)\right)_{\substack{1 \leq i \leq 60 \\ j = 60}}$ sont ensuite récupérées sous MATLAB[©] pour identification des modes.

Celle-ci est faite grâce à la *méthode du lissage globale* (*c.f.* page 17), qui donne les $M = 30$ triplets modaux $(\omega_m, \xi_m, \Phi^m)_{m \leq M}$, dont les paramètres globaux (ω_m, ξ_m) sont donnés table V.f.

Comparaison au contexte bibliographique : Il existe très peu de travaux précédents concernant une telle analyse modale d'une table d'harmonie de piano. On citera seulement Kindel [121] et Suzuki [126], qui ne trouvèrent que quelques modes (4 à 5) sur $[50 - 160 \text{ Hz}]$. Mais leurs process expérimentaux étaient différents, puisque leurs tables d'harmonie étaient montées dans leur ceinture, ce qui approche les conditions aux limites d'un encastrement. Ici, la



FIG. V.14: Banc de mesure pour expertise modale

Fréquence (Hz)	1.5	11.8	12.7	13.4	18.0	24.9	36.7	41.7	52.4
Amortissement (%)	4.6	.6	.6	.6	.6	1.45	.65	.8	.65
Fréquence (Hz)	55.2	56.9	63.3	66.9	83.8	86.8	95.1	100	113
Amortissement (%)	.8	.65	.6	1.2	1.25	.6	.95	.7	.8
Fréquence (Hz)	124	129	135	140	158	167	176	186	192
Amortissement (%)	.8	.75	1.3	1	.9	.8	1.15	.95	.9

TAB. V.f: Caractéristiques modales identifiées. Le premier mode est un mode de corps rigide

table est suspendue, ce qui modifie entièrement l'allure des déformées et les fréquences modales (l'encastrement, qui rigidifie la structure sur son pourtour, accroît fortement les fréquences propres). Concernant les amortissements, seul Suzuki [126] les a identifiés, autour de 2 à 3 %. Là encore, ces amortissements légèrement plus élevés que ceux trouvés ici peuvent s'expliquer par le montage sur le corps de l'instrument, montage qui peut dissiper de l'énergie (colle visco-élastique, micro-glissements, ...). Les résultats trouvés sont donc cohérents avec ceux de la littérature.

Limite fréquentielle : La table d'harmonie est sollicitée uniformément de 27.5Hz à plus de 4000Hz (*c.f.* page 128). Alors pourquoi stopper l'analyse modale à 200 Hz ? D'après la table V.f, l'estimation du recouvrement modal donne :

$$\begin{aligned}
 n(200\text{Hz}) &\approx 0.1 \text{ modes/Hz} \\
 \eta(200\text{Hz}) &= 2.\xi(200\text{Hz}) \approx 2\% \\
 \Rightarrow \mu(200\text{Hz}) &\approx 40\%
 \end{aligned}
 \tag{V.3}$$

200 Hz semble être la limite du domaine modal. Il serait délicat voire impossible de repousser cette borne vers les hautes fréquences, les modes n'étant plus isolés et n'émergeant plus (de

plus, l'hypothèse de Basile, qui suppose l'opérateur d'amortissement co-diagonalisable avec ceux d'inertie et de raideur – *c.f.* page 8 – est, classiquement, mise en défaut pour des domaines de fréquences plus élevées; or un opérateur non co-diagonalisable entraîne un couplage entre les modes, ce qui interdit aux fonctions de transfert d'être mises sous la forme I.17). Les fréquences plus élevées devront être traitées avec d'autres outils.

Comparaison des modèles

Maintenant que les bases modales numériques et expérimentales sont à disposition, il est nécessaire de les comparer. Puisque ces deux bases modales décrivent le comportement dynamique de la même structure, elles doivent être identiques.

Projections des modèles : Les maillages utilisés pour décrire les déformées sont différents; les déformées numériques sont décrites sur le maillage numérique (on notera donc ${}^n\Psi^m$), tandis que les déformées expérimentales sont décrites sur le maillage expérimental (on notera ${}^e\Phi^m$) – l'exposant précédant la déformée indique l'initiale du maillage de description. Ce maillage grossier est volontairement un sous-ensemble du maillage numérique, plus fin. Il suffit donc de ne “regarder” les modes numériques que sur le maillage expérimental (*projection des résultats numériques sur le maillage expérimental*). On construit alors la matrice de projection $\mathbf{\Pi}$:

$$\forall i \leq M, j < \mathcal{M}, \quad \Pi_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le nœud expérimental } i \\ & \text{correspond au nœud numérique } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

Le vecteur ${}^e\Psi^m = \mathbf{\Pi} {}^n\Psi^m$, de taille M , représente donc, sur le maillage expérimental, la déformée modale numérique m . Cette méthode dégrade les résultats numériques, en “oubliant” les points n'appartenant pas au maillage expérimental (décimation).

Il est aussi possible de “faire le contraire”, c'est-à-dire de décrire les déformées expérimentales sur le maillage (fin) numérique. On cherche donc les $({}^n\Phi^m)_{m \leq M}$ telles que :

$${}^e\Phi^m = \mathbf{\Pi} {}^n\Phi^m \quad (\text{V.5})$$

Or, les déformées numériques $({}^n\Psi^m)_{m \leq \mathcal{M}}$ forment une base tronquée de l'ensemble des mouvements possibles de la table. Chaque mode expérimental peut donc être décrit, du moins partiellement, dans cette base : c'est la *projection des résultats expérimentaux sur la base numérique*. Plus précisément, il s'agit d'écrire :

$$\begin{aligned} \forall m \leq M, \quad {}^n\Phi^m &= \sum_{m'=1}^{\infty} a_{mm'} \cdot {}^n\Psi^{m'} \\ &\approx \sum_{m'=1}^{\mathcal{M}} a_{mm'} \cdot {}^n\Psi^{m'} \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

Une écriture matricielle donne :

$$\begin{aligned} {}^n\Phi &= \begin{bmatrix} {}^n\Phi^1 & {}^n\Phi^2 & \dots & {}^n\Phi^M \end{bmatrix} \\ {}^n\Psi &= \begin{bmatrix} {}^n\Psi^1 & {}^n\Psi^2 & \dots & {}^n\Psi^M \end{bmatrix} \\ {}^n\Phi &= {}^n\Psi \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

En projection sur le maillage expérimental, cette équation devient :

$$\begin{aligned} \Pi {}^n\Phi &= \Pi {}^n\Psi \cdot \mathbf{a} \\ {}^e\Phi &= \Pi {}^n\Psi \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

L'inversion du système se fait par moindres carrés :

$$\mathbf{a} = \left({}^t(\Pi {}^n\Psi) \Pi {}^n\Psi \right)^{-1} \cdot {}^t(\Pi {}^n\Psi) {}^e\Phi \quad (\text{V.9})$$

Remarque : L'inversion pourrait être faite par moindres carrés doubles :

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \left(\left({}^t(\Pi {}^n\Psi) \Pi {}^n\Psi \right)^{-1} \cdot {}^t(\Pi {}^n\Psi) {}^e\Phi + \left({}^t({}^e\Phi) \Pi {}^n\Psi \right)^{-1} \cdot {}^t({}^e\Phi) {}^e\Phi \right) \quad (\text{V.10})$$

Comparaison des modes : Cette matrice \mathbf{a} permet de comparer aisément *de visu* les modes expérimentaux et numériques. La figure V.15 montre pour exemple le 8^{ème} mode numérique (${}^n\Psi^8$) et le 8^{ème} mode expérimental (8^{ème} colonne de ${}^n\Psi \cdot \mathbf{a}$), sur le maillage expérimental. La ressemblance entre ces deux modes est assez grande.

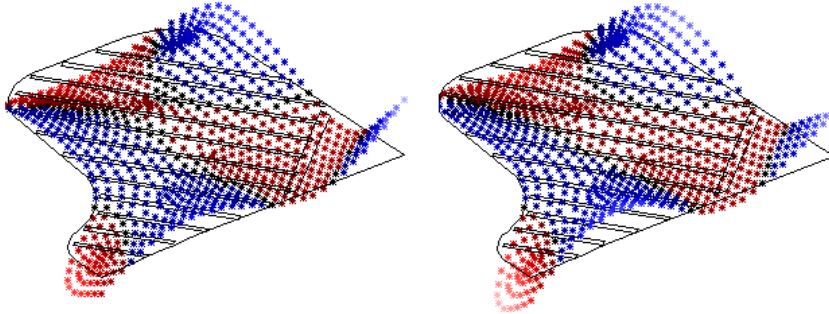


FIG. V.15: *Comparaison visuelle des modes 8 ANSYS (à gauche) et expérimental (à droite)*

Dans l'optique de vouloir quantifier cette ressemblance, le Modal Assurance Criterion [16] est formé (noté par la suite MAC). Cet indice indique la corrélation spatiale entre deux modes quelconques décrits sur le même maillage. Ici, les modes numériques sont comparés aux modes expérimentaux, sur le maillage expérimental (la projection sur la base numérique n'ajoute aucune information) :

$$MAC(m, m') = \frac{|{}^t({}^e\Phi^m) \cdot (\Pi {}^n\Psi^{m'})|}{\|{}^e\Phi^m\| \cdot \|\Pi {}^n\Psi^{m'}\|} \quad (\text{V.11})$$

La figure V.16 trace cet indice pour l'ensemble des paires $(e\Phi^m, n\Psi^{m'})$. Cette figure est très encourageante, aux vues de la plupart des MAC qui sont presque nuls (en blanc), et de la présence d'une "ligne" de MAC importants (rouge foncé/noir), de l'ordre de 90 % sur les 10 premiers modes.

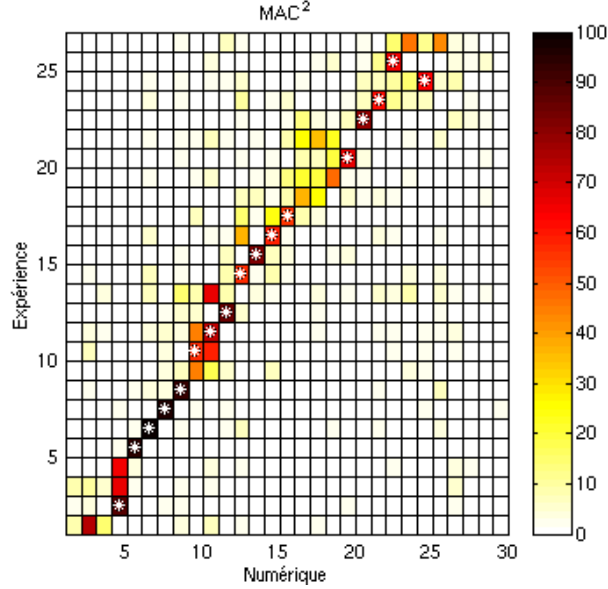


FIG. V.16: *Modal Assurance Criterion pour l'ensemble des paires (mode numérique/mode expérimental).*

Là où le MAC est important, les modes peuvent être *appariés*, grâce à une fonction de correspondance créée par l'algorithme suivant :

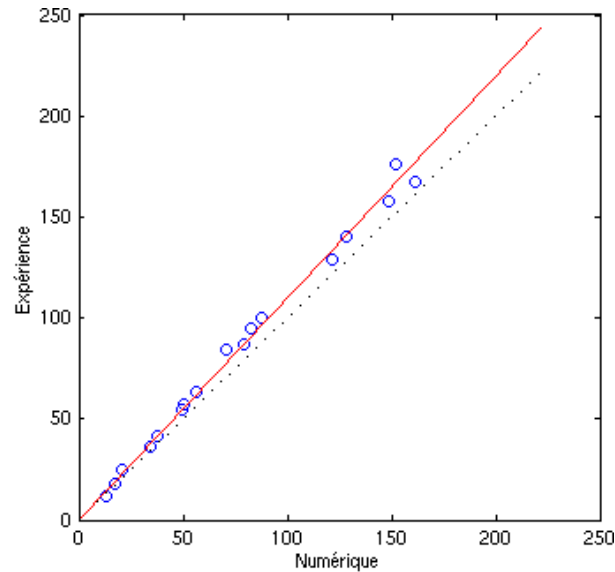
```

n ← 1
trouve (m1, m'1) / MAC(m1, m'1) = max(MAC)
∀m, MAC(m, m'1) ← 0
∀m', MAC(m1, m') ← 0
tant que MAC(mn, m'n) > valeur seuil
    n ← n + 1
    trouve (mn, m'n) / MAC(mn, m'n) = max(MAC)
    ∀m, MAC(m, m'n) ← 0
    ∀m', MAC(mn, m') ← 0
fin tant que
    
```

Il est utile de préciser que cet algorithme détruit le MAC au fur et à mesure.

Ainsi, les modes se retrouvent classés non par fréquences propres croissantes mais par MAC décroissantes. La meilleure correspondance est entre le mode numérique m'_1 et le mode expérimental m_1 ; la deuxième meilleure correspondance est entre le mode numérique m'_2 et le mode expérimental m_2 ; ... De plus, il est alors possible de comparer les fréquences propres des modes appariés. La figure V.17 propose cette comparaison.

Là encore, la correspondance est très bonne, chaque mode propre numérique ayant une fréquence très proche de la fréquence propre du mode expérimental apparié avec lui. Il existe ce-

FIG. V.17: *Comparaison des fréquences numériques et expérimentales*

pendant une légère sous-estimation systématique des fréquences propres par le calcul numérique (correspondant à une surestimation de la masse ou une sous-estimation de la raideur).

L'étape suivante consiste à localiser les erreurs de modélisation et à recalibrer le modèle numérique.

Recalage du modèle numérique

Recalage global de la masse totale : La première erreur est aisément visible : le calcul éléments finis donne la masse totale de la structure, qu'il suffit de comparer à la masse réelle mesurée avec une simple balance :

Masse mesurée :	6,4 kg
Masse calculée :	6,185 kg
Erreur relative :	+ 3,5 %

Le premier recalage consiste donc à prendre des masses volumiques plus importantes de 3,5%, soit 405 kg.m^{-3} pour l'épicéa et 715 kg.m^{-3} pour le sapin.

Recalage global de la raideur : Il est prévisible, vu l'"erreur de modélisation" de la fibre neutre (*c.f.* page 136), que le modèle numérique sous-estime la raideur, et donc sous-estime les fréquences propres des modes. Sur la comparaison entre les fréquences numériques et expérimentales (figure V.17), cette sous-estimation apparaît clairement. C'est donc maintenant que le facteur γ va devenir un paramètre. La sous-estimation des fréquences étant en moyenne de 12 %, et les fréquences modales étant proportionnelles à la racine carrée du module d'Young (*c.f.* équation I.2 page 8, avec k proportionnel à E), le facteur de rigidification est donc choisi comme :

$$\gamma = (+12\%)^2 = 1,256 \quad (\text{V.12})$$

Les deux recalages globaux qui viennent d'être faits, agissant grâce à un facteur multiplicatif sur les caractéristiques de l'ensemble des matériaux utilisés (respectivement les masses volumiques et les modules d'Young et de cisaillement), ne modifient pas les répartitions spatiales de masse et de raideur ; les allures des déformées s'en trouvent donc inchangées. Ainsi, on a exactement les mêmes MAC, et donc le même appariement, qu'avant le recalage.

Localisation des erreurs de modélisation : méthode des résidus. Pour localiser les erreurs, les modes expérimentaux sont réinjectés dans l'équation dynamique numérique V.2, issue du calcul ANSYS[©]. On forme ainsi les *résidus en force*, définis pour chaque mode m par :

$$\mathcal{R}_m = \text{abs} \left(-\omega_m^2 \mathbb{M}^n \Phi^m + \mathbb{K}^n \Phi^m \right) \quad (\text{V.13})$$

où ${}^n \Phi^m$ est la $m^{\text{ème}}$ colonne de ${}^n \Psi \cdot \mathbf{a}$, la fonction abs appliquée à un vecteur est un vecteur constitué des valeurs absolues des coordonnées du vecteur :

$$\text{abs} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Si les modes expérimentaux étaient solution de l'équation dynamique (numérique), alors ces résidus seraient nuls. Pour avoir une erreur globale, indépendante du mode apparié n considéré, il faut commencer par normer les résidus modaux. Puis, en leur affectant un poids égal à $(1 - MAC(m_n, m_n^l))$ afin de prendre en compte la bonne ou mauvaise modélisation, le résidu *global* est formé :

$$\mathcal{R} = \sum_{n=1}^M (1 - MAC(m_n, m_n^l)) \frac{\mathcal{R}_{m_n}}{\|\mathcal{R}_{m_n}\|} \quad (\text{V.14})$$

Le vecteur \mathcal{R} obtenu est du même type que les modes numériques ${}^e \Psi^m$ (c'est une fonction de l'espace définie sur le maillage numérique). Il représente l'erreur de modélisation *locale* en espace et *globale* en fréquence (figure V.18).

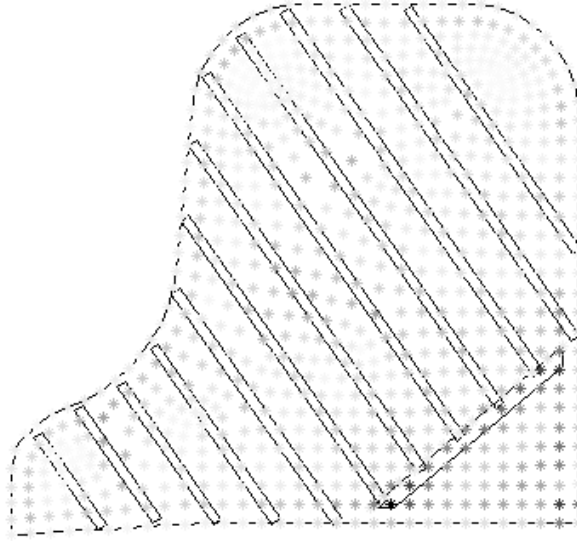
L'erreur paraît concentrée sur le mouchoir, cette pièce trapézoïdale qui vient arrêter les renforts de tables. Mais l'erreur de modélisation est-elle plutôt en masse ou en raideur ?

Localisation des erreurs : adaptation de la méthode de Baruch et Berman. Pour différencier la localisation des erreurs de modélisation en masse et en raideur, il est possible d'adapter la méthode de recalage de Baruch [33, 34] et Berman [35]. En considérant que les données expérimentales sont exactes, et en privilégiant la connectivité de la matrice de masse, cette méthode permet de calculer des matrices de correction $\Delta \mathbb{M}$ et $\Delta \mathbb{K}$ qui minimisent les résidus.

En notant $\Phi = {}^n \Psi \cdot \mathbf{a}$ les modes expérimentaux décrits sur le maillage numérique et

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

la matrice diagonale du carré des pulsations propres, ces matrices de

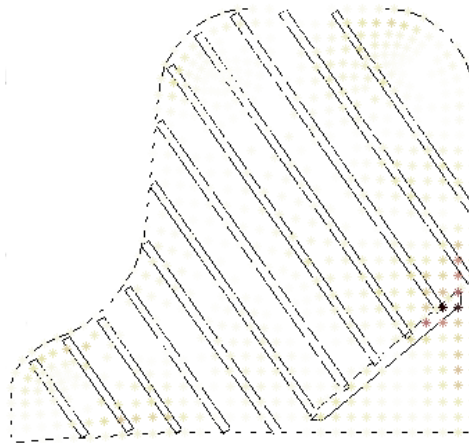
FIG. V.18: *Résidus*

correction sont définies par :

$$\Delta \mathbb{M} = \mathbb{M} \Phi ({}^t \Phi \mathbb{M} \Phi)^{-1} (\mathbb{I} - {}^t \Phi \mathbb{M} \Phi) ({}^t \Phi \mathbb{M} \Phi)^{-1} {}^t (\mathbb{M} \Phi) \quad (\text{V.15})$$

$$\Delta \mathbb{K} = -\mathbb{K} \Phi . {}^t (\mathbb{M} \Phi) - \mathbb{M} \Phi . {}^t (\mathbb{K} \Phi) + \mathbb{M} \Phi . ({}^t \Phi \mathbb{K} \Phi) . {}^t (\mathbb{M} \Phi) + \mathbb{M} \Phi . \Lambda . {}^t (\mathbb{M} \Phi) \quad (\text{V.16})$$

Classiquement, ces matrices de correction sont ajoutées aux matrices \mathbb{M} et \mathbb{K} pour rendre les modes expérimentaux solution de l'équation dynamique numérique. Mais il est aussi possible de s'en servir pour localiser les erreurs de masse et de raideur. Pour ce faire, on peut prendre la norme infinie de chaque vecteur ligne de $\Delta \mathbb{M}$, ce qui donne un vecteur d'erreur en \mathbb{M} , qui peut être tracé dans l'espace (figure V.19).

FIG. V.19: *Erreur de modélisation en masse*

L'erreur en masse semble localisée au bout du mouchoir. Or, la suspension de la table a été réalisée avec des petits crochets, eux-mêmes accrochés à des tendeurs. Le modèle numérique est donc agrémenté de masses réparties sur 4 noeuds, à chaque bout du mouchoir. A partir

d'une estimation de ces masses (quelques dizaines de grammes), il est possible de faire des "tirs" successifs en contrôlant la progression du MAC. Cette optimisation donne une masse de 64 g à l'extrémité droite et de -24 g à gauche. Cette masse négative est assez curieuse, mais peut s'expliquer par le fait que les données constructeur sont assez approximatives concernant le mouchoir (en particulier sur la longueur de celui-ci). Après correction, l'erreur en masse devient très homogène, ce qui interdit toute progression dans ce domaine (figure V.20).

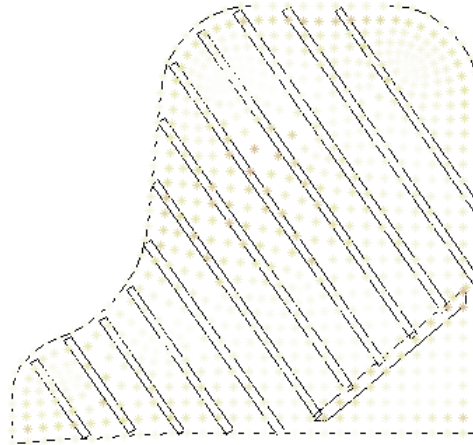


FIG. V.20: Erreur de modélisation en masse après ajout de masses

L'erreur de modélisation en raideur peut être obtenue de la même façon. Elle semble localisée très précisément sur le mouchoir (figure V.21).

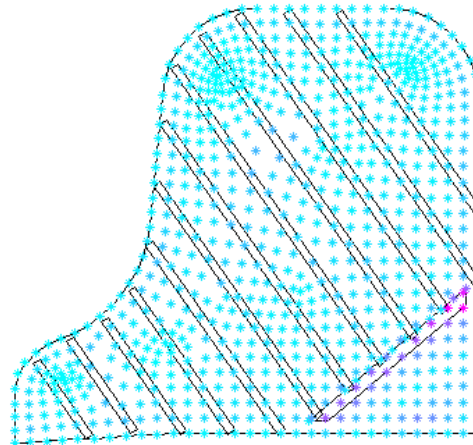


FIG. V.21: Erreur de modélisation en raideur après recalage en masse

Une optimisation des paramètres mécaniques du sapin, de même type que l'optimisation pour la masse, est menée. Elle amène les résultats curieux de la table V.g.

ρ	E_x	E_y	ν_{xy}	G_{xy}
700 kg.m ⁻³	5,04 GPa	0,54 GPa	-23,8%	1,8 GPa

TAB. V.g: Optimisation des caractéristiques mécaniques du mouchoir (sapin)

En fait, il faut relativiser l'importance de ces paramètres : ils influent sur une très petite surface (un très faible nombre d'éléments), et finalement, n'améliorent guère le modèle. L'erreur de modélisation en raideur est pratiquement inchangée. Cette erreur de modélisation en raideur et l'inefficacité de l'optimisation s'expliquent par l'“erreur de fibre neutre” du modèle (voir page 136). Le mouchoir est en effet, parmi toutes les pièces collées sur la table, celle qui est la plus épaisse, donc loin de la fibre neutre. Or, la rigidification par le facteur γ laisse le modèle *symétrique par rapport au plan $z = 0$* , tandis que le collage du mouchoir sur l'une des faces de la table ne l'est pas. Sans doute la solution évoquée plus haut (le décalage effectif des raidisseurs par ajout de petites poutres rigides et sans masse) serait à même de prendre en compte cette dissymétrie. Malgré tout, le modèle actuel est très satisfaisant, et la rentabilité d'un modèle plus fin n'est pas assurée.

Modèle final : Finalement, on obtient le modèle optimisé suivant :

Géométrie : inchangée

Direction du fil : 150 ° (inchangé)

Matériau Epicéa :

E_x	E_y	ν_{xy}	G_{xy}	ρ
14,4 GPa	0,62 GPa	1%	0,62 GPa	405 kg.m ⁻³

Matériau Sapin :

E_x	E_y	ν_{xy}	G_{xy}	ρ
5,04 GPa	0,54 GPa	-23.8%	1,8 GPa	700 kg.m ⁻³

Masses en bout de mouchoir : 62 g et -24 g.

Avec ces caractéristiques mécaniques, le modèle numérique est très proche des modes expérimentaux (figure V.22).

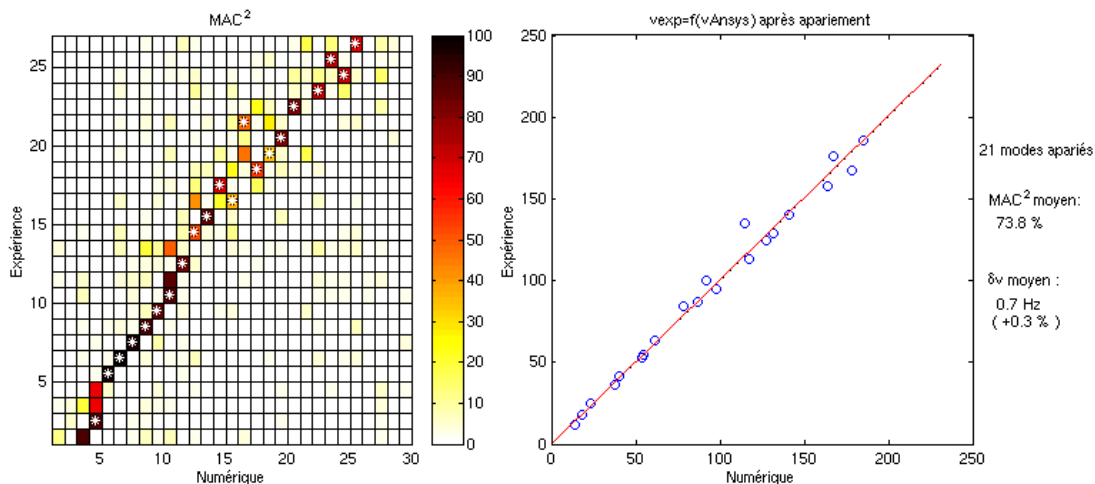


FIG. V.22: MAC final sur les 21 modes appariés

Le MAC est en moyenne de 90%, ce qui est très élevé au vu du nombre de modes appariés (21). Les modes non appariés s'expliquent comme suit :

- Le premier mode expérimental est un mode de suspension, assimilable à un mode de corps

rigide (un mode de corps rigide est un mode dans lequel la structure ne se déforme pas ; il a une fréquence nulle, et le nombre de modes de corps rigides égale le degré d'hyperstatisme négatif de la structure).

- Les 1^{er} et 7^{ème} modes se “détriplent” ; ce phénomène est lié à la suspension (couplage des “vrais” modes avec les modes de suspension). L’usage veut que l’on groupe ces modes sous le nom de *famille de modes* (en anglais *family modes* [121]).
- Enfin, le mode numérique n°22 ne s’apparie avec aucun mode expérimental. Ceci s’explique en regardant l’allure de sa déformée (figure V.23). En effet, on s’aperçoit qu’il s’agit d’un *mode local*, qui ne fait vibrer que le coin placé derrière le mouchoir. La majorité des contributions modales de ce mode ($\Phi^{22}(x_i)$) sont donc nulles, et le mode est invisible. Le même phénomène pourrait apparaître si le capteur avait été placé sur une ligne nodale (auquel cas on aurait simplement $\Phi^m(x_j) = 0$, ce qui suffit à ne pas voir le mode puisque $\Phi^m(x_j)$ est en facteur dans chaque fonction de transfert).

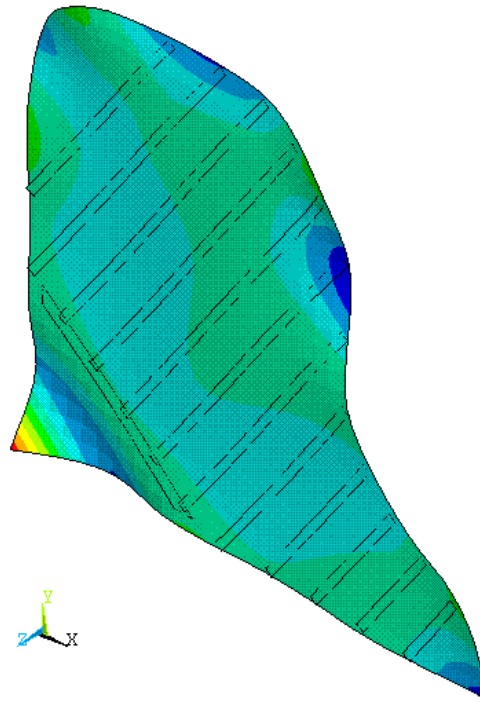


FIG. V.23: Déformée modale du mode numérique 22. Il s’agit d’un mode local où seul le coin est en vibration.

Finalement, on peut conclure que la modélisation éléments finis, si elle est réalisée avec assez de soins, peut être très précise. Ce constat amène deux conséquences :

- Le modèle éléments finis actuel est quasiment exact. Il peut servir pour des calculs ultérieurs, par exemple un calcul de rayonnement.
- Le processus de modélisation éléments finis est fiable, donc prédictif. Il peut donc être intégré dans une démarche d’optimisation : la modification d’une donnée de construction (épaisseur du mouchoir, emplacement du 3^{ème} raidisseur, ...) influencera la dynamique de la table, et la modélisation éléments finis permettra de *prédire* cette influence. Ainsi,

il ne sera plus nécessaire de construire, monter, puis tester la pièce pour savoir si la modification est positive ou négative.

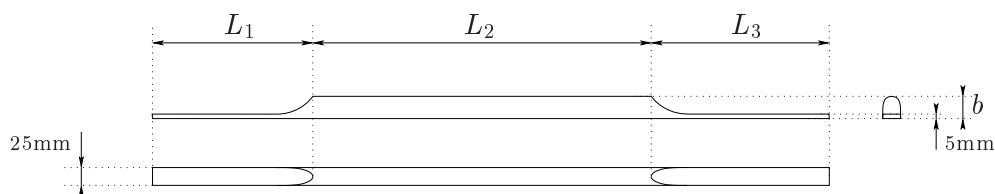
Dans cette optique d'optimisation, se présente pourtant un écueil insurmontable : en quoi la connaissance des modes de la structure peut-elle nous renseigner sur la qualité d'un instrument ? Quel rapport existe-t-il entre les caractéristiques modales de la table d'harmonie et sa performance, au sens employé par les facteurs de pianos ? Autrement dit, il manque à l'optimisation des pianos la notion de *fonction de coût*, qui permet de juger de la qualité d'un instrument. Or toute optimisation se base sur la maximisation – ou minimisation – d'une fonction de coût. Cependant, la notion de qualité, en musique, est nécessairement lié à des aspects psycho-acoustiques, qui sortent du cadre de cette thèse. Aussi l'investigation dans cette direction n'ira-t-elle pas plus loin dans ce travail.

V.3 Tentative d'homogénéisation de la table d'harmonie

Toujours dans l'optique d'une optimisation structurale de la table d'harmonie, il semble utile de fabriquer un modèle un peu plus *paramétrique*. En effet, il est délicat d'optimiser la position de chaque renfort, l'épaisseur de chaque pièce, etc... A la place, il serait plus souple d'utiliser des paramètres plus généraux, comme par exemple l'espacement des renforts. A cette fin, il est possible d'envisager un modèle semi analytique, où les caractéristiques mécaniques globales de l'assemblage seraient calculées analytiquement, puis un modèle numérique, basé sur ces caractéristiques mécaniques, donneraient les solutions modales à partir de la géométrie extérieure de la table. C'est l'*homogénéisation* (c.f. page 87).

V.3.1 Problèmes dus aux hypothèses de l'homogénéisation

Un modèle homogénéisé de la table est donc construit à partir des données constructeur de la table d'harmonie (fig. V.24). La position de chaque renfort, avec un angle constant de 55° , est donnée par le tableau V.h.



N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
L_1	90	98	125	140	160	170	160	160	162	162	245	215
L_2	70	125	165	250	370	485	630	760	792	758	600	348
L_3	130	130	140	155	190	235	235	218	206	215	190	197
b	14	15	16	17	18	21	23	23	22	20	18	14

FIG. V.24: Dimensions des renforts de table du P190

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$l(i)$	245	106	106	104	104	104	102	102	102	100	100	100	190

TAB. V.h: Positionnement des renforts sur le P190

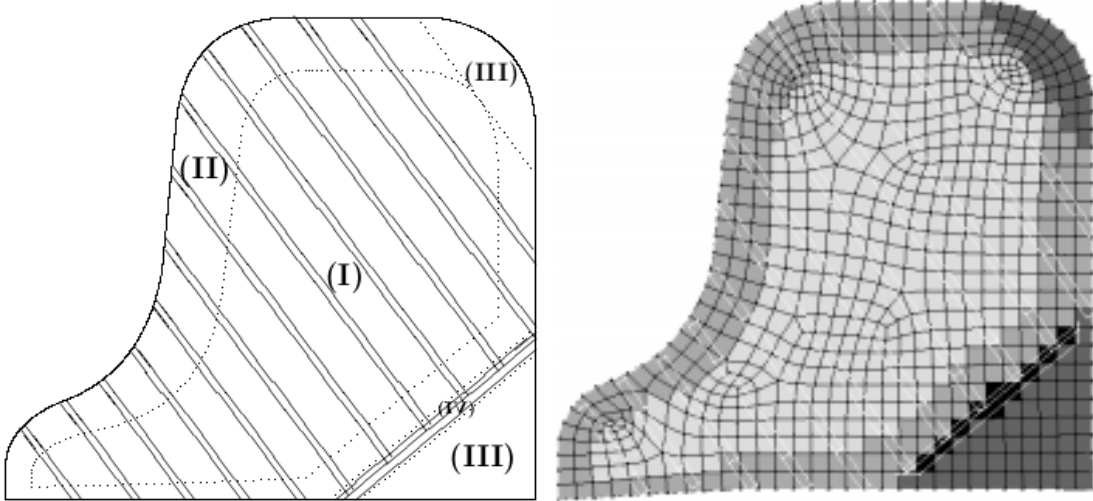


FIG. V.25: Découpage en 4 zones de la table pour homogénéisation (à droite, maillage correspondant)

La table va donc être “découpée” en quatre zones (fig.V.25) :

- Zone **(I)** fortement raidie
- Zone **(II)** faiblement raidie
- Zone **(III)** non raidie (table seule)
- Zone **(IV)** bicouche table+mouchoir

Chacune de ces zones est homogénéisée séparément.

Dans la zone **(I)**, la variation de l'épaisseur des raidisseurs doit être moyennée. Or, d'après l'expression IV.2, le moment d'inertie en flexion est proportionnel à b^3 . La moyenne va donc être une moyenne cubique, avec une pondération en fonction de la longueur du raidisseur :

$${}^{(I)}b = \left(\frac{1}{\sum_i L_2(i)} \sum_i L_2(i) b(i)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{V.17})$$

Remarque : Dans le calcul d'homogénéisation de la masse volumique (équation IV.6), c'est b et non b^3 qui intervient. Le fait de moyennner de façon cubique induit donc une erreur sur la masse. Pour résoudre ce problème, il faut faire un premier calcul d'homogénéisation avec une moyenne arithmétique de b , qui donne une certaine épaisseur et une certaine densité h_1 et ρ_1 . Ensuite, il faut faire un deuxième calcul avec la moyenne cubique de b , qui donne h_2 et ρ_2 . On sait que ρ_2 est incorrect ; sa valeur correcte est simplement $\rho_2 = \rho_1 \frac{h_1}{h_2}$ (conservation de la densité surfacique). Cependant, dans le cas présent, cette correction est très faible (à peine 1%).

Dans les zones **(I)** et **(II)**, la direction du bois (30°) et la direction des raidisseurs (35°) ne correspondent pas tout à fait. La seule idée raisonnable est de moyennner ces directions et de

Zone	h^H	ρ^H	E_x^H	E_y^H	G_{xy}^H	θ_{\perp}
(I)	17,2 mm	264 kg.m ⁻³	1,23 GPa	5,27 GPa	1,27 GPa	32,5 °
(II)	9,1 mm	373 kg.m ⁻³	7,15 GPa	2,39 GPa	2,07 GPa	32,5 °
(III)	7,7 mm	392 kg.m ⁻³	11,5 GPa	0,47 GPa	1,16 GPa	30 °
(IV)	35,5 mm	571 kg.m ⁻³	7,52 GPa	0,40 GPa	0,86 GPa	35 °

TAB. V.i: *Caractéristiques mécaniques homogénéisées des quatre zones de découpage de la table.*

prendre 32,5° comme direction d'orthotropie.

Dans les zones (I) et (II), l'espacement entre les raidisseurs est moyenné (moyenne arithmétique sans pondération).

Ces approximations des caractéristiques géométriques du voile raidi sont discutables et mettent en péril la validité du calcul d'homogénéisation. Il faut cependant noter qu'elles n'ont jamais été évitées dans la littérature ([118, 121]). On peut s'attendre à ce qu'elles ne perturbent pas trop le modèle, surtout dans le domaine des basses fréquences qui traite la structure de façon globale.

La table V.i donne en résumé les caractéristiques (épaisseur, densité, modules d'Young, module de cisaillement et angle d'orthotropie) des quatre zones de découpage.

V.3.2 Résultats de l'homogénéisation

Afin de valider ces homogénéisations, un calcul éléments finis est effectué avec le nouveau modèle (fig. V.25). L'intérêt de l'homogénéisation est de pouvoir mailler de façon plus grossière ; cependant, afin de pouvoir comparer plus aisément les résultats, c'est l'ancien maillage numérique qui est utilisé.

Comparaison des modèles

Le MAC entre les deux modèles (expérimental / homogénéisé en quatre zones, figure V.26-gauche) est plutôt décevant ; il est "flou", c'est-à-dire que plusieurs modes "homogènes" ressemblent à plusieurs modes expérimentaux. Et surtout, ses valeurs sont assez faibles. L'appariement des modes a donc du mal à se faire, et seules 12 paires peuvent être mises en évidence (figure V.26-droite).

Le résultat est là encore assez mauvais, les fréquences propres du modèle homogénéisé étant toutes largement supérieures à celles du modèle expérimental, et, plus grave, dans des proportions variables (les ronds bleus de la figure V.26-droite ne sont pas alignés).

Il est possible, comme dans la partie précédente, de recalculer globalement le modèle en raideur. On pourrait ainsi éviter le décalage systématique en fréquence. Mais le recalage ne peut aller

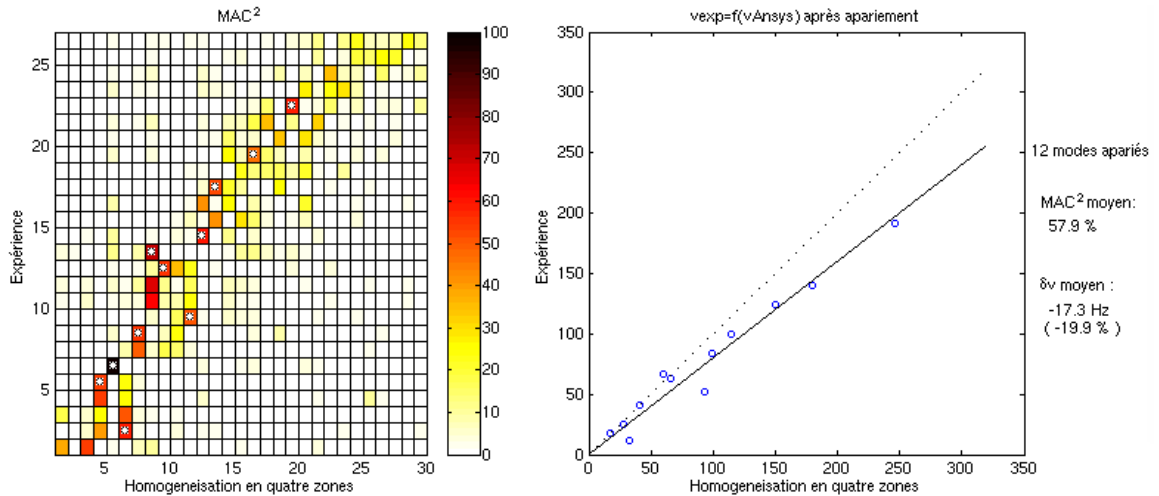


FIG. V.26: A gauche, MAC^2 entre le modèle expérimental et le modèle homogénéisé. A droite, comparaison des fréquences des modes appariés.

plus loin : tout d'abord, le MAC étant très mauvais, on ne peut pas utiliser brutalement les méthodes exposées plus haut, qui consistent à utiliser les modes expérimentaux dans l'équation dynamique numérique. En effet, si les modèles sont trop éloignés, les erreurs trouvées n'ont plus aucun sens. De plus, l'homogénéisation, de part sa fonction de simplification de modèle, doit être *prédictive*. Le recalage nécessaire ici éloignerait beaucoup le modèle des paramètres initiaux tirés de l'homogénéisation. Le cœur du modèle ne se situerait plus dans cette homogénéisation, mais dans le recalage. . .

Une explication possible

En réalité, même si on tente d'optimiser les paramètres du modèle homogénéisé, il est impossible de le faire "coller" au modèle expérimental (avec un grand MAC sur un nombre important de paires de modes). Ce qui veut dire qu'*aucun* modèle homogénéisé (en quatre zones) ne peut synthétiser le comportement réel de la structure. Pourquoi ?

Une ébauche d'explication consiste à revenir sur la moyenne des hauteurs des raidisseurs (page 149). Au lieu de moyenniser cette hauteur, on peut essayer de la laisser variable. Pour ce faire, on fait un calcul d'homogénéisation sur *chaque période spatiale* de la table. Même si ce calcul est faux (le milieu est supposé périodique, alors qu'il n'est composé que d'une seule période), il représente néanmoins une indication de la rigidité dynamique de l'assemblage, en fonction de la position sur la table d'harmonie. La figure V.27 présente l'indicateur vibratoire $\tilde{D} = \frac{D}{\rho h}$, appelé *rigidité dynamique*, qui pilote le rapport existant entre la longueur d'une onde et sa fréquence (voir l'équation II.51 page 50).

Le résultat est saisissant : dans la zone **(I)** fortement raidie, la rigidité dynamique $\frac{D}{\rho h}$, dans la direction parallèle aux raidisseurs (*i.e.* quand ceux-ci se déforment) varie *du simple au double* (300 m^2Hz à 550 m^2Hz) ! Il semble donc tout à fait logique qu'un unique paramètre ne puisse en aucun cas décrire la richesse de ce comportement.

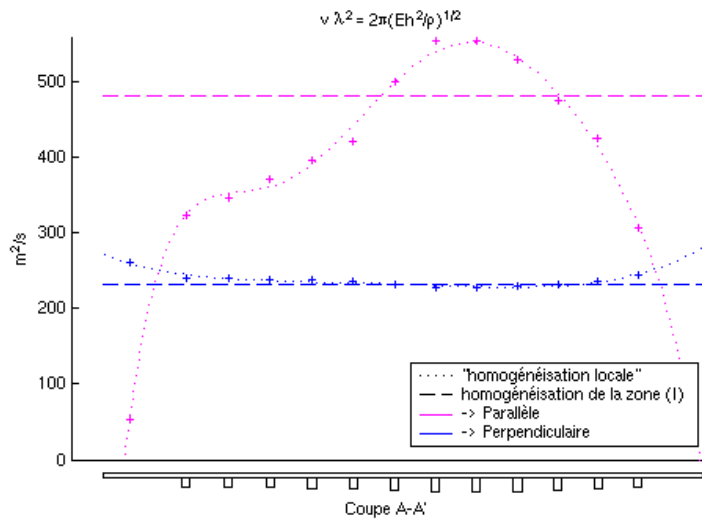


FIG. V.27: Indicateur de la rigidité dynamique de la table, avec une “homogénéisation locale”

V.3.3 Conclusion sur l’homogénéisation

Malgré un outil qui semble efficace – l’homogénéisation basses fréquences des structures orthotropes raidies –, la table d’harmonie semble résister à l’homogénéisation. Cette résistance vient du fait que les raidisseurs sont tous différents, en particulier de hauteur variable, ce qui fait varier grandement la rigidité de l’ensemble (dépendant du cube de l’épaisseur). Il semble donc vain de vouloir utiliser un modèle simple de table d’harmonie (contrairement à tout ce que l’on trouve dans la littérature). Néanmoins, cette conclusion amène une question : cette forte variation de dynamique le long de la table est-elle voulue par les facteurs, et si oui, pourquoi ? Ne pourrait-on envisager une manière plus simple et mieux maîtrisable de la faire varier (en ne faisant varier que l’épaisseur ou que l’écartement par exemple) ?

Finalement, on peut faire ressortir de cette étude deux outils majeurs pour la conception des pianos. Le premier est l’utilisation des éléments finis ; leur validité a été montrée avec précision. Le second est l’homogénéisation des plaques orthotropes raidies, qui peut faire sortir des indicateurs pouvant servir aux facteurs d’instruments à déterminer la taille et l’emplacement des raidisseurs de leur table d’harmonie.

V.4 Paramètres propagatifs de la table d’harmonie

L’identification comportementale de la table d’harmonie a été réalisée avec le formalisme modal, mais la plage de fréquence était limitée à quelques centaines de Hertz. Or, on sait que la table d’harmonie est utilisée sur un domaine fréquentiel bien plus large. C’est pourquoi il est nécessaire d’utiliser les techniques présentées au chapitre II pour compléter l’analyse qui a été faite.

V.4.1 Banc d'essai

La table d'harmonie est donc de nouveau suspendue. Elle est excitée par la même chaîne d'excitation que celle des bancs précédents (explications à la section III.1.1 page 62). Le montage est photographié figures V.28 et V.29.



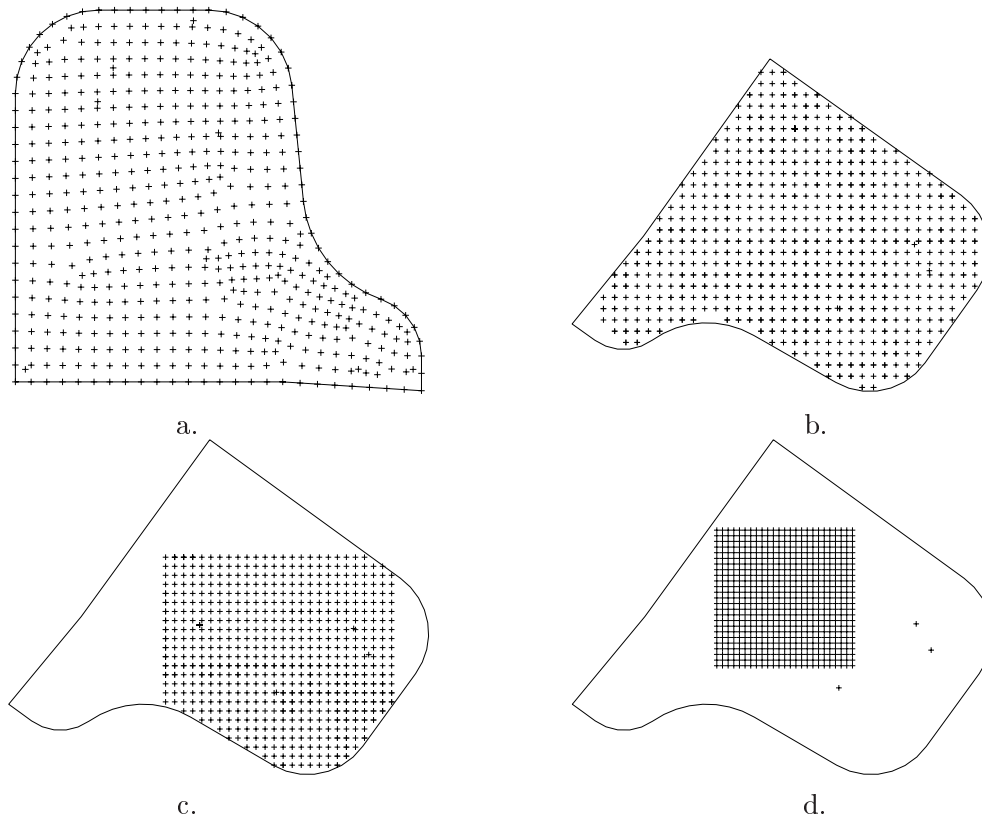
FIG. V.28: Photo du banc de mesure avec la table d'harmonie et le Laser (chaîne de mesure)



FIG. V.29: Photo du banc de mesure avec la table d'harmonie et le Laser (chaîne d'excitation et raidisseurs)

Plusieurs échantillonnages spatiaux $(x_i, y_i)_i$ sont réalisés (figure V.30).

a. C'est le résultat d'un mailleur libre qui maille à partir des bords vers l'intérieur. Comme on l'a vu, ce type de maillage empêche de contrôler le problème de repliement (*aliasing*). Afin

FIG. V.30: *Les quatre maillages de la table d'harmonie*

de pouvoir monter en fréquence, on prévoit un deuxième maillage.

b. Le maillage n'est plus lié à la géométrie (à part quelques points, cinq ici, qui servent de référence spatiale pour calibrer le Laser). La surface étant relativement élevée ($1,6 \text{ m}^2$), le nombre de points est assez grands. On ne peut pas diminuer beaucoup la taille de la maille Δx , qui pourtant est un facteur limitant de la méthode. Il faut prévoir une autre solution.

c. Afin de diminuer la taille de la maille sans augmenter le nombre de points, c'est la surface de mesure qui est diminuée. On reste dans le centre de la table d'harmonie, là où les raidisseurs se trouvent effectivement. La maille tombe à 4 cm.

d. Le dernier maillage complète le précédent en faisant diminuer la maille jusqu'à 2,5 cm.

V.4.2 Orthotropie structurale et mesure des modes

Un calcul prédictif est fait suivant la méthode d'homogénéisation basses fréquences (section IV.1.1). On rappelle qu'elle fournit les caractéristiques d'une plaque homogène, appelées orthotropie structurale. Comme la structure n'est que pseudo périodique (*c.f.* page 148), on est obligé de faire une moyenne des caractéristiques géométriques de l'assemblage. Finalement, la plaque homogénéisée retenue est celle correspondant à la zone (I), c'est à dire la zone fortement

raidie, qui représente la majorité de la surface de la plaque.

L'analyse des données expérimentales est, comme pour le banc précédent, effectuée en deux temps : estimation du nombre d'onde dominant dans chacune des deux direction d'orthotropie, puis recherche de tous les modes propagatifs dans la direction des raidisseurs.

V.4.3 Résultats

Orthotropie

Les résultats de la première analyse sont présentés figure V.31.

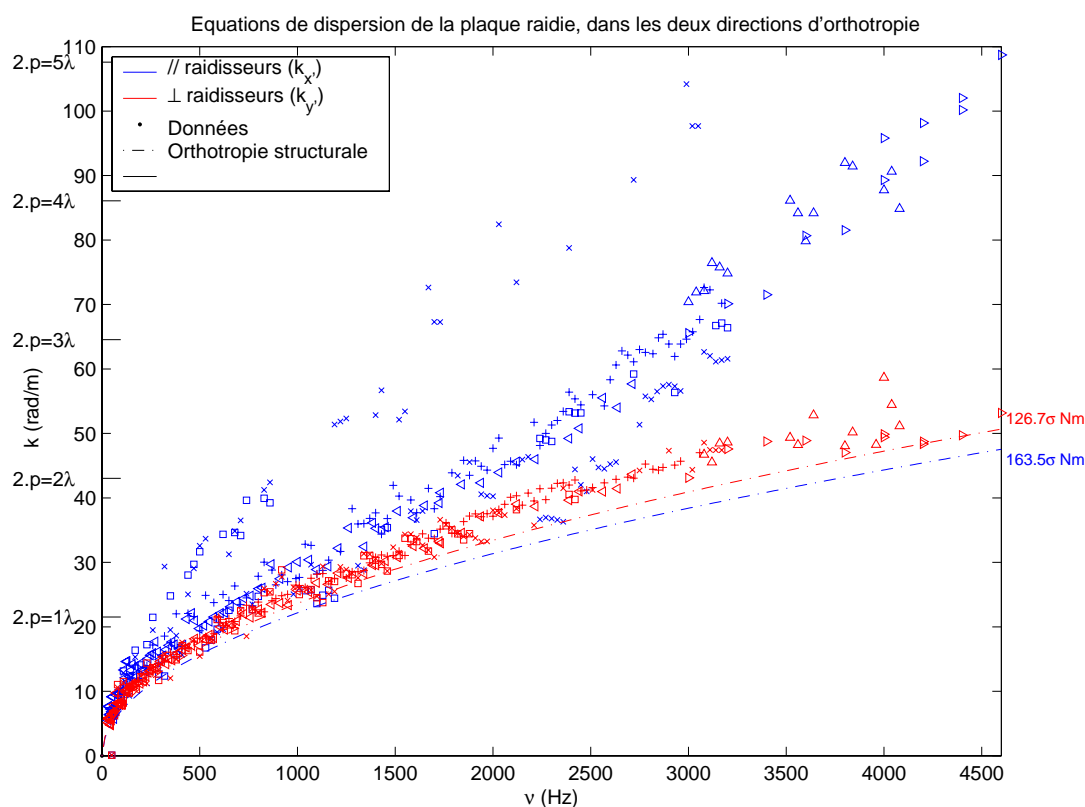


FIG. V.31: Nombres d'onde principaux dans la table d'harmonie

Tout d'abord, on remarque que la plaque homogène (orthotropie structurale) est quasiment isotrope : les raidisseurs ont pour effet de compenser la souplesse de la table dans la direction perpendiculaire au fil. Cette remarque est valable pour le domaine de validité de l'homogénéisation, c'est-à-dire en statique et en basses fréquences. On retrouve l'explication apportée par les facteurs de piano concernant les raidisseurs de la table (page 127) : «statiquement, ces renforts évitent la fissuration du bois au fil du temps».

Dans la direction y' , on voit que l'orthotropie structurale sur-estime légèrement les nombres d'onde. On a vu à la section IV.2 de ce chapitre (page 97) que c'était le cas pour les gros raidisseurs très lourds (comparativement à la plaque), ce qui est le cas ici.

Dans la direction x' , on perçoit déjà la présence de deux modes, mais encore de façon assez floue. Il est cependant remarquable que le formalisme des guides d'onde continue d'être pertinent avec cette structure seulement pseudo périodique.

Modes propagatifs

Les résultats de la seconde analyse sont présentés figure V.32.

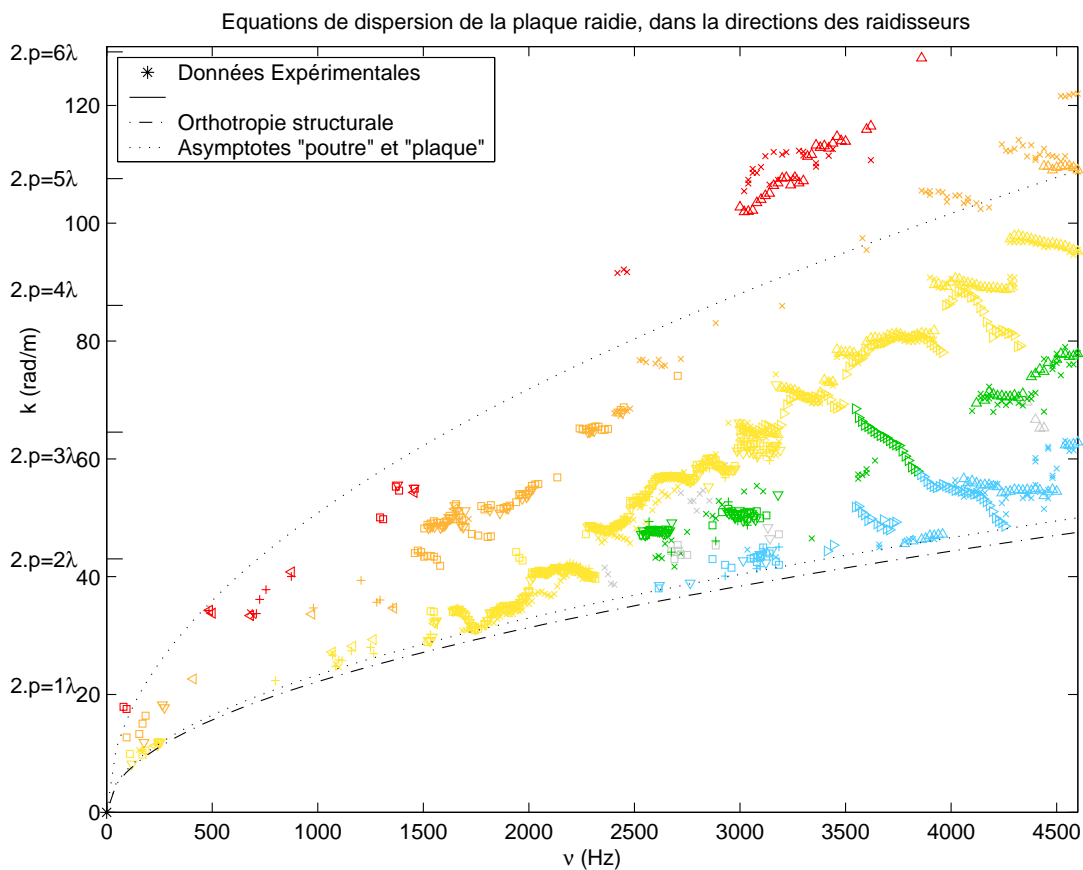


FIG. V.32: Nombres d'onde des modes propagatifs dans la table d'harmonie

Remarque : sur ces données expérimentales, la recherche des nombres d'onde des modes propagatifs est beaucoup plus ardue. En particulier, on remarque une grande sensibilité à la largeur de bande BW du filtre. Les résultats présentés sont en réalité *épurés* : on a volontairement omis de tracer les couples $(\omega, k_{\omega}^{(i)})$ correspondant à des erreurs de mesure (en gris sur les figures précédentes). Le critère de sélection est subjectif : une identification est supposée erronée si elle

apparaît isolée, sans aucune autre identification $(\omega, k_\omega^{(i)})$ proche d'elle.

Ces résultats sont moins concluants que dans les cas plus purs exposés plus haut. Ici, le mode 1 et le mode 2 n'apparaissent pas de façon continue. Leurs contributions semblent concurrentes car l'un disparaît lorsque l'autre est présent.

Plus généralement, les courbes sont moins bien définies, plus "hésitantes".

De plus, il faut remarquer un phénomène nouveau : à certaines fréquences (par exemple sur la plage 3500~4000 Hz), des "branches descendantes" surviennent dans l'équation de dispersion. Ce phénomène ressemble à un problème de repliement (*aliasing*) : le mode 3 (en jaune) semble "rebondir" sur la droite imaginaire $k_{x'} \simeq 78$ rad/m. De même, au-delà de 4000 Hz, les modes 2 (en orange) et 3 (en jaune) présentent des portions de courbes décroissantes. Si ce phénomène *ressemble* au repliement, ce n'en est pourtant pas, les nombres d'onde de rebonds n'ayant aucun rapport ici avec la longueur de maille.

Malgré ces quelques réserves, les résultats des méthodes d'identification des nombres d'onde sont très satisfaisants. Le formalisme des guides d'onde est bien adapté à la structure, même si elle n'est que pseudo périodique. Les méthodes de mesure comme l'analogie avec les guides d'onde sont donc validées.

V.5 Conclusion sur la table d'harmonie

En basses fréquences, le formalisme modal est tout à fait indiqué pour l'analyse vibratoire des tables d'harmonie. L'outil des éléments finis, notamment, s'avère très pertinent. Il permet de reconstruire correctement les vingt premiers modes de la structure libre-libre. Il pourrait par exemple servir à un outil d'optimisation, mais celui-ci ne peut exister sans critère de qualité. Un autre axe de recherche, qui n'a pas été abordé ici, est la connaissance et la modélisation correcte des conditions aux limites de la table en fonctionnement. Celle-ci n'est pas libre-libre, mais imparfaitement encastrée. Les éléments finis et l'analyse modale peuvent être très utiles dans ce domaine (identification des conditions aux limites, détection de défauts de collage).

Mais l'utilisation des éléments finis est relativement lourde et délicate. C'est pourquoi on a tenté d'utiliser un outil d'homogénéisation des structures raidies, validé grâce à plusieurs cas tests. Néanmoins il s'est avéré incapable de reproduire le comportement modal d'une table d'harmonie. Il a été montré que c'est à cause de la grande variation de rigidité due à l'utilisation de raidisseurs de hauteurs très diverses. Le centre de la table est très raidi tandis que les bords le sont beaucoup moins. Il est alors normal qu'un outil d'homogénéisation, qui répartit la raideur uniformément, s'avère inutile.

A plus hautes fréquences, l'outil d'analyse basé sur une méthode d'exploration du plan d'onde (CFT, IWC) met en évidence le comportement "guide d'ondes" de la table d'harmonie :

les tables d'harmonie des pianos peuvent être vues comme des juxtapositions de guides d'onde. Ceci implique en particulier que le nombre d'onde propagé dans le sens des raidisseurs est *multiple* : il y a plusieurs ondes, à chaque fréquence, capables de transporter de l'énergie dans la table d'harmonie. Ce comportement est-il connu des facteurs d'instruments ? Est-il voulu par le constructeur, ou bien est-ce un “défaut” de la méthode de construction ?

De l'avis de l'auteur, les facteurs d'instruments n'ont jamais pris en considération ce phénomène – sans doute par ignorance de celui-ci. Cette multiplicité des ondes est-elle une qualité ou un défaut ? Il faut se rappeler la fonction de la table d'harmonie : elle permet la transformation de l'énergie vibratoire contenue dans la corde en une énergie acoustique émise dans l'air ambiant. Ce sont donc ses qualités vibroacoustiques qui doivent être au centre des préoccupations. On peut alors apporter deux types de réponses à la question de l'effet de la multiplicité des ondes :

Les modes propagatifs : un “moins” dans la qualité du piano ? On sait que si la vitesse de phase d'une onde dans la structure est supérieure à la vitesse du son dans l'air, alors le rayonnement de la structure est très efficace. Autrement dit, ce sont les petits nombres d'onde qui rayonnent efficacement. Les premiers modes, à grands nombres d'onde, sont donc “inutiles”. De façon plus gênante, même, ils consomment de l'énergie vibratoire. Du point de vue du rayonnement, il serait donc préférable de n'avoir qu'un mode, mais très rigide (faible nombre d'onde) pour obtenir un meilleur rendement. Dans ce cas, une solution simple serait d'homogénéiser *réellement* la structure, en “fondant” les raidisseurs dans le matériau. On a vu qu'en basses fréquences, la structure est quasiment isotrope. Il faudrait alors utiliser un matériau isotrope qui aurait une rigidité et une masse équivalente. On pourrait se tourner vers des matériaux composites (fibre de verre, de carbone), qui grâce à leurs fibres ont une très grande rigidité pour une faible masse. L'intérêt dans leur cas est de pouvoir croiser leurs fibres afin d'obtenir ce matériau isotrope recherché. Mais, afin de conserver son aspect et ses spécificités, on pourrait utiliser de l'épicéa, en contrecollant deux tables d'harmonie non raidies l'une sur l'autre, en croisant les fils du bois. Les caractéristiques statiques seraient conservées ; à hautes fréquences, les ondes à grand nombre d'onde seraient éliminées ; l'aspect de la table serait quasiment inchangée ; les connaissances techniques particulières aux matériaux composites ne seraient pas nécessaires.

Les modes propagatifs : un “plus” dans la qualité du piano ? Cependant, on sait aussi que deux ondes se propageant à des vitesses différentes ne rayonnent pas dans l'air avec le même angle d'émission (dans le cas des ondes supersoniques). La multiplicité des ondes provoque donc une meilleure répartition angulaire de l'émission du son : la directivité est sans doute moins marquée avec plusieurs ondes qu'avec une seule. Dans ce cas, la spatialisation du son est plus homogène, ce qui est une bonne caractéristique pour un piano.

Malheureusement, il n'est pas possible de pousser plus loin l'analyse par manque de connais-

sances en acoustique musicale. Ici encore, comme pour le domaine modal (section V.2), il manque un indice permettant de juger de la qualité d'un instrument.

Comme on l'a vu, la poursuite de l'analyse, après ces considérations purement mécaniques, se heurte à la pluridisciplinarité qui est nécessaire à l'élaboration d'une aide à la conception de pianos de qualité. On peut se réjouir que dans cette direction, un vaste "programme de recherche d'aide à la conception innovante de piano" a été lancé récemment à Paris (France). Ce projet s'articule autour de domaines très divers, comprenant notamment ceux :

- de la facture instrumentale (E. Marandas, CNSM² de Paris),
- de la modélisation numérique (J. Frelat [115], LMM³),
- de l'intelligence artificielle (M. Sebag, M. Schoenauer, CMA⁴),
- de la perception de la qualité acoustique (V. Maffiolo, LAM⁵, M. Castellengo, LAM),
- de la synthèse sonore (M.P. Verge, LAM),
- du contrôle actif des structures (C. Besnainou [115], LAM),
- des matériaux composites (C. Besnainou, LAM).

Cet ambitieux projet, qui tente la synergie de quatre laboratoires, et mobilise plus d'une dizaine de participants, est prévu sur une durée de quatre années.

²Conservatoire Nationale Supérieur de Musique

³Laboratoire en Modélisation Mécanique

⁴Centre de Mathématiques Appliquées

⁵Laboratoire d'Acoustique Musicale

Conclusions et perspectives

Conclusions

L'étude du comportement vibratoire des structures est classiquement divisée en deux domaines fréquentiels : en basses fréquences, les modes sont très marqués et leur formalisme est donc très adapté. En plus hautes fréquences, l'amortissement et la densification modale impliquent que chaque mode n'est plus visible individuellement. Une vision propagative, basée sur un formalisme ondulatoire, est alors plus adaptée à l'étude des vibrations.

L'identification est l'une des tâches à accomplir dans l'étude des vibrations d'une structure. L'identification part d'une série de mesure et l'interprète selon un modèle donné. Elle permet à la fois de constater si un modèle décrit la réalité et de trouver les valeurs numériques des paramètres de ce modèle. Avec le formalisme modal, il existe un grand nombre de méthodes d'identification. On a vu que les plus performantes devaient identifier les modes de façon horizontale, c'est-à-dire indépendamment du point de mesure. Par contre, avec le formalisme ondulatoire, et en particulier dans les systèmes à deux dimensions, il existe très peu de méthodes. On a donc développé quelques idées concernant l'identification du nombre d'onde complexe dans les milieux de propagation à deux dimensions. Ce développement a abouti à la méthode par corrélation d'ondes inhomogènes (méthode IWC). On a vu qu'une application de cette méthode consistait en l'identification d'un paramètre baptisé "raideur dynamique" – qui n'est autre que le rapport de la raideur et de la densité surfacique –, et qui synthétise l'ensemble de l'équation de dispersion d'un milieu orthotrope.

L'application de cette méthode d'identification sur un grand nombre de cas tests a aboutit à diverses conclusions. La dualité approche modale/approche propagative a été mise en évidence sur une plaque isotrope. On a validé le concept d'éprouvette virtuelle, qui consiste à modéliser numériquement un échantillon de structure pour en déduire des caractéristiques globales du comportement, caractéristiques qui sont valides pour une structure complète. Une application plus riche de la méthode IWC a été menée sur un cas orthotrope à coefficients variables, incarné par une plaque sandwich en nid d'abeilles. La méthode IWC s'est révélée très bien adaptée aux moyennes fréquences, c'est-à-dire au-delà du domaine modal. De plus, il a été montré que l'identification des paramètres mécaniques régissant l'équation de dispersion n'est sensible ni aux conditions aux limites, ni à la position d'une source ponctuelle sur la structure. Quelles que soient ces conditions, la méthode identifie bien les caractéristiques de propagation du milieu.

L'utilisation d'ondes inhomogènes comme fonctions de projection dans la méthode IWC avait deux buts. Le premier était de pouvoir prendre en considération les champs proches. Ceux-ci sont générés par les discontinuités du milieu, en particulier la source et les conditions aux limites. Ils sont modélisés par des nombres d'onde fortement complexes. Un algorithme adapté est donc capable de reconnaître la contribution de ces champs proches et de les éliminer automatiquement. Ce premier but a été atteint : l'analyse de la raideur dynamique ne dépend ni des conditions aux limites ni de la position de la source. Le second but de l'utilisation des ondes inhomogènes était de mesurer l'amortissement des ondes au sein de la structure. Il a été montré dans le cas 1D que, si cette mesure est bien liée à l'amortissement de la structure, elle est cependant très sensible à la présence et la position de la source dans le champ mesuré. Dans le cas 2D, la relation entre amortissement spatial et amortissement modal, qui est bien croissante, n'a cependant pas été clairement identifiée. La conclusion quant à la mesure de l'amortissement interne par la méthode IWC est donc que cette mesure ne représente qu'une *estimation* de l'amortissement structural.

Le cas des plaques raidies présente une séparation des domaines fréquentiels. A basses fréquences, la plaque rigidifiée présente un comportement d'orthotropie elliptique, nommée orthotropie structurale. La méthode IWC confirme ce comportement. A plus haute fréquence, l'équation de dispersion n'a plus la forme d'une ellipse mais d'une portion d'ellipse complétée par des segments de droites. Cette équation de dispersion n'est alors plus continue. Les portions d'ellipse se situent autour de la direction perpendiculaire aux raidisseurs, alors que les segments de droites se situent dans la direction des raidisseurs. Ces segments de droites correspondent à des modes propagatifs : ce concept chimérique vient du fait que dans une direction, le comportement est modal, stationnaire, tandis que dans l'autre, il est propagatif. Les raidisseurs se comportent alors comme des guides d'onde. Une méthode baptisée EF-propagative, utilisant des outils classiques d'éléments finis et de calcul numérique, a été mise en œuvre pour calculer les nombres d'ondes de ces modes dans la direction des raidisseurs. Une méthode dérivée de la méthode IWC a été développée pour la mesure de ces nombres d'onde, et la confrontation de ces résultats avec les calculs prévisionnels s'avère excellente sur un grand nombre de cas tests.

Une synthèse applicative de toutes les méthodes d'identification décrites a été présentée. Elle s'intéresse aux vibrations d'une table d'harmonie de piano. Il a été d'abord montré que le comportement modal de la table peut être perçu dans le son issu du piano, ce qui justifie l'étude modale qui a été menée par la suite. Celle-ci a mis en évidence que la modélisation numérique pouvait prédire le comportement modal de la table d'harmonie. Cette modélisation numérique peut donc servir d'outil de développement pour simuler des modifications des plans de construction. A plus haute fréquence, il a été démontré que la table d'harmonie se comporte comme un guide d'onde, avec en particulier la présence de plusieurs ondes pour une même fréquence. La multiplicité de ces ondes peut avoir des conséquences particulières sur le son des pianos.

Perspectives

Quatre grands axes de travail peuvent être développés à partir du travail de cette thèse. Le premier consiste en l'approfondissement de la maîtrise et de l'interprétation de l'amortissement spatial γ . Une première étude simple porterait sur un milieu monodimensionnel, par exemple un poutre fortement amortie. On a vu que dans ce cas, amortissement spatial et amortissement modal doivent être identiques pour un champ loin des singularités. Ce comportement bien particulier doit être retrouvé expérimentalement sur banc d'essai. Une deuxième étude, plus ambitieuse, mettrait en place différentes méthodes d'identification expérimentales de l'amortissement sur la même structure bidimensionnelle. Plus particulièrement, la méthode IWC, la méthode de la puissance injectée, une mesure de temps de réverbération et une analyse temps-fréquence mériteraient d'être comparées. Les relations analytiques liant ces différents modèles d'amortissement, modèles pourtant basés sur différents types d'hypothèses, seraient ainsi mis expérimentalement en lumière ou en défaut.

Un second axe de recherche qui vient dans la lignée de ce travail de thèse est l'étude du rayonnement des plaques. On sait en effet que celui-ci est étroitement lié aux caractéristiques des ondes propagatives de la structure. On définit en particulier une fréquence de coïncidence pour laquelle les nombres d'ondes acoustique et structural sont identiques. Or, cette fréquence de coïncidence devient une plage de fréquences pour les milieux orthotropes. Le couplage fluide-structure est alors plus complexe. Une étude expérimentale vibroacoustique, basée sur une technique de type holographie de champ proche et sur l'exploration du contenu des plans d'ondes, serait très adaptée à l'étude de ce couplage. Dans cette optique, une collaboration avec l'Institute of Fundamental Technological Research, à Varsovie (Pologne), est actuellement mise en place avec le professeur Holnicki. Plus particulièrement, les moyens d'essais acoustiques de ce laboratoire serait mis à profit pour compléter l'étude du comportement des plaques raidies.

Un prolongement plus direct du travail présenté dans ce mémoire est l'exploitation du code de calcul basé sur la méthode IWC et fourni au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes. Ce programme autonome et de prise en main aisée ne nécessite que la donnée des champs vibratoires des structures, et permet de déterminer les équations de dispersion associées grâce à l'exploration des plans d'onde. Plusieurs structures sont envisagées pour être testées. La première consisterait en une plaque raidie dans deux directions perpendiculaires, assemblages très courants dans l'industrie. On s'attend à retrouver l'orthotropie structurale et le comportement guide d'onde dans les deux directions. Un banc d'essai expérimental est actuellement en construction. Une deuxième structure, consistant en une plaque isotrope recouverte d'un matériau poro-élastique, serait testée à travers le concept d'éprouvette virtuelle. Une modélisation Eléments Finis très précise, intégrant des modèles complexes de matériaux poreux, est en cours de développement. Elle fournira des champs spatiaux de vibration qui pourront être testés grâce à la méthode IWC intégrée dans le logiciel fourni. Dans une perspective à plus long terme, la méthode IWC pourrait être appliquée à l'étude des plaques perforées, des plaques recouvertes de matériau fortement visco-élastique (bitume), ou de la propagation guidée à travers des géométries toriques (comme les pneumatiques des véhicules terrestres).

Références bibliographiques

Contributions de l'auteur

- [1] S. AKROUT, J. BERTHAUT et M.N. ICHCHOU : Numerical and experimental analysis of wave propagation in rib-stiffened plate structures. Dans *11th International Congress on Sound and Vibrations*, 2004.
- [2] J. BERTHAUT : *Etude de plaques orthotropes*. Rapport de D.E.A, École Centrale de Lyon, 2000.
- [3] J. BERTHAUT, M.N. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL : k -space identification of apparent structural behaviour. *Journal of Sound and Vibration*, à paraître (2004).
- [4] J. BERTHAUT, M.N. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL : Comportement vibroacoustique large bande d'une table d'harmonie de piano. Dans *9^{eme} Colloque de la Recherche de l'Intergroupe des Ecoles Centrales*, 2002.
- [5] J. BERTHAUT, M.N. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL : Caractérisation du comportement dynamique des structures dans l'espace des nombres d'onde : application aux parois raidies et aux structures sandwich poro-élastiques. Dans *16^{eme} Congrès Français de Mécanique*, 2003.
- [6] J. BERTHAUT, M.N. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL : Identification des nombres d'onde complexes 2-D par la Inhomogeneous Wave Correlation (I.W.C.) : théorie et applications. Dans *6^{eme} Colloque National en Calcul des Structures*, 2003.
- [7] J. BERTHAUT, M.N. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL : Identification large bande des paramètres équivalents de structures 2D anisotropes dans l'espace des nombres d'onde. *Mécanique et industries*, 4, 2003.
- [8] J. BERTHAUT, M.N. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL : Piano soundboard : structural behavior, numerical and experimental study in the modal range. *Applied Acoustics*, 64(11), 2003.
- [9] J. BERTHAUT, M.N. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL : Wavenumbers identification in two dimensional structures : comparison between two new methods. Dans *10th International Congress on Sound and Vibrations*, 2003.

Livres, thèses

- [10] P. ARGOUL : *Identification des structures vibrantes*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1990.
- [11] A. BOCQUILLET : *Méthodes énergétiques de caractérisations vibroacoustiques des réseaux complexes*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2000.
- [12] L. BRILLOUIN : *Wave propagation in periodic structures*. Dover publication, 1953.
- [13] B. BUDIWANTORO : *Identification temporelle des structures linéaires et non linéaires*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 1990.
- [14] P. CORDONNIER-CLOAREC : *Contribution à l'étude du rayonnement acoustique de parois métalliques nervurées*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, 1989.
- [15] V. COTONI : *Modélisation de phénomènes vibro-acoustiques en moyennes et hautes fréquences par méthodes énergétiques*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2001.
- [16] D.J. EWINS : *Modal testing*. Research studies press, 1984.
- [17] F.J FAHY : *Sound and structural vibration : radiation, transmission and response*. Academic press, 1985.
- [18] K.F. GRAFF : *Wave motion in elastic solids*. Dover publications, 1991.
- [19] L. HOUILLON : *Modélisation vibratoire des carrosseries automobiles en moyennes et hautes fréquences*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1999.
- [20] M.N. ICHCHOU : *Formulation énergétique pour l'étude moyennes et hautes fréquences des systèmes : théorie et application*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1996.
- [21] R.H. LYON et R.G. DEJONG : *Theory and application of Statistical Energy Analysis (2nd edition)*. Butterworth Heinemann, 1995.
- [22] J. MAX : *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. Masson, 4^o édition.
- [23] P. MORON : *Mise en oeuvre de méthodes énergétiques dans l'étude du comportement vibratoire de structures complexes dans le domaine des moyennes et des hautes fréquences*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 1998.
- [24] P.M. MORSE et K.U. INGARD : *Theoretical acoustics*. Princeton university press, 1986.
- [25] M. NAJIM : *Modélisation et identification en traitement du signal*. Masson, Paris, 1988.
- [26] M.P. NORTON : *Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers*. Cambridge university press, 1989 (2nd edition : 2003).
- [27] R. OHAYON et C. SOIZE : *Structural Acoustics and Vibration*. Academic Press, 1998.
- [28] L. RAYLEIGH : *Theory of Sound*. Dover Pub., 1945.
- [29] F. THOUVEREZ : *Identification temporelle des structures non-linéaires*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 1992.
- [30] S.P. TIMOSHENKO et S. WOINOWSKI-KRIEGER : *Theory of plates and shells (2nd edition)*. McGraw-Hill International Editions, 1989.
- [31] M. VIKTOROVITCH : *Formulations statistiques des structures vibrantes sur un large spectre fréquentiel*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 1998.

Identification des structures

- [32] Compte rendu du projet européen IMPACT. *Innovations en Mécanique PAssive et AC-Tive pour la prévision et le contrôle vibroacoustique*, 2003.
- [33] M. BARUCH : Optimization procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration data. *AIAA journal*, 16(11), 1978.
- [34] M. BARUCH et I.Y. BAR-ITZACK : Optimal Weighted Orthogonalization of Measured Modes. *AIAA journal*, 16(4), 1978.
- [35] A. BERMAN et E.J. NAGY : Improvement of a large analytical model using test data. *AIAA journal*, 21(8), 1983.
- [36] D.A. BIES et S. HAMID : *In situ* determination of loss and coupling factors by the power injected method. *Journal of Sound and Vibration*, 70(2), 1980.
- [37] B. BLOSS et M.D. RAO : Measurement of damping in structures by the power injected method. *Experimental techniques*, 2002.
- [38] D.L. BROWN, R.J. ALLEMANG et F. CHEN DEBLAUWE : The polyreference time domain technique. Dans *International modal analysis conference*, 1988.
- [39] K.T. BROWN et M.P. NORTON : Some comments on the experimental determination of modal densities and loss factors for statistical energy analysis applications. *Journal of Sound and Vibration*, 102(4), 1985.
- [40] A. CHAIGNE et C. LAMBOURG : Time-domain simulation of damped impacted plates. I. theory and experiments. *Journal of Acoustical Society of America*, 109(4), 2001.
- [41] M.J. CROCKER et A.J. PRICE : Damping in plates. *Journal of Sound and Vibration*, 9(3), 1969.
- [42] N. DAUCHEZ, S. SAHRAOUI et N. ATTALA : Investigation and modelling of damping in a plate with a bonded porous layer. *Journal of Sound and Vibration*, 256, 2003.
- [43] N.S. FERGUSON, C.R. HALKYARD, B.G. MACE et K.H. HERON : The estimation of wavenumbers in two dimensional structures. Dans *Proceedings of ISMA 2002, Volume II*, 2002.
- [44] S. GADE et H. HERLUFSEN : *The use of Impulse Response Function for Modal Parameter Estimation*. Technical review, Bruel & Kjaer, 1994.
- [45] S. GADE, K. ZAVERI, H. KONSTANTIN-HANSEN et H. HERLUFSEN : *Complex Modulus and Damping Measurements using Resonant and Non-resonant Methods*. Technical review, Bruel & Kjaer, 1994.
- [46] R.J. GUYAN : Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3(2), 1965.
- [47] R.S. LANGLEY : A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 159(3), 1992.
- [48] J. LARDIES, M.N. TA et M. BERTHILLER : Transformée en ondelettes et entropie en analyse modale. Dans *16^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 2003.
- [49] T.-P. LE et P. ARGOUL : Utilisation de la transformée en ondelettes pour l'identification des systèmes mécaniques non-linéaires en vibration. Dans *16^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 2003.

- [50] J.D. MAYNARD, E.G. WILLIAMS et Y. LEE : Nearfield acoustic holography : I. theory of generalized holography and the development of NAH. *Journal of Acoustical Society of America*, 78(4), 1985.
- [51] J.G. MCDANIEL, P. DUPONT et L. SALVINO : A wave approach for estimating frequency-dependent damping under transient loading. *Journal of Sound and Vibration*, 231(2), 2000.
- [52] M.P. NORTON et R. GREENHALGH : On the estimation of loss factors in lightly damped pipeline systems : some measurements techniques and their limitations. *Journal of Sound and Vibration*, 105(3), 1986.
- [53] R.S. PAPPA et S.R. IBRAHIM : A parametric study of the Ibrahim Time Domain modal identification technique. *Schock and vibration bulletin*, 1981.
- [54] B. PONTOIZEAU : *Présentation des principales méthodes d'identification des structures mécaniques dans le domaine temporel*. Rapport, École Centrale de Lyon, 1997.
- [55] R. RANDALL : A comparative study of curve-fitting algorithms for the extraction of modal parameters from response measurements. Dans *10th International Congress on Sound and Vibration*, 2003.
- [56] M.F. RANKY et B.L. CLARKSON : Frequency average loss factors of plates and shells. *Journal of Sound and Vibration*, 89(3), 1983.
- [57] T. SAITO, R.D. PARBERY, S. OKUNO et S. KAWANO : Parameter identification for aluminum honeycomb sandwich panels based on orthotropic timoshenko beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 208(2), 1997.
- [58] A.B. STANBRIDGE, M. MARTARELLI et D.J. EWINS : The scanning laser doppler vibrometer applied to impact modal testing. Dans *XVIIth International Modal Analysis Conference*, 1999.
- [59] A.B. STANBRIDGE, M. MARTARELLI et D.J. EWINS : Measuring area mode shapes with a scanning laser doppler vibrometer. Dans *SPIE 2000*, 2000.
- [60] K.S SUM et J. PAN : On the steady-state and the transient decay methods for the estimation of reverberation time. *Journal of Acoustical Society of America*, 112(6), 2002.
- [61] M. VILLOT, G. CHÉVIRAT et J. ROLAND : Phonoscopy : an acoustical holography technique for plan structures radiating in enclosed spaces. *Journal of Acoustical Society of America*, 91(1), 1992.
- [62] E.G. WILLIAMS et H.D. DARDY : Generalized nearfield acoustical holography for cylindrical geometry : theory and experiment. *Journal of Acoustical Society of America*, 81(2), 1987.
- [63] E.G. WILLIAMS, H.D. DARDY et R.G. FINK : A technique for measurement of structure-borne intensity in plates. *Journal of Acoustical Society of America*, 78(6), 1985.
- [64] E.G. WILLIAMS, B.H. HOUSTON et J.A. BUCARO : Experimental investigation of the wave propagation on a pointed driven, submerged capped cylinder using k-space. *Journal of Acoustical Society of America*, 87(2), 1990.
- [65] S.A. ZAGHOOL : Single-Station Time-Domain (SSTD) vibration testing technique : theory and application. *Journal of Sound and Vibration*, 72, 1980.

Moyennes fréquences, équation de dispersion

- [66] S. AKROUT : *Calculation of wave propagation in ship hulls*. Rapport annuel piezodiagnostic, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [67] O. BAREILLE, M.N. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL : A mid-frequency selective approach for wave-based methods. Dans *8th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, 2003.
- [68] A. BOCQUILLET, M.N. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL : Local energy approach of complex periodic wave-guides. Dans *Inter-Noise 99*, 1999.
- [69] F.J. FAHY et E. LINDQVIST : Wave propagation in damped, stiffened structures characteristic of ship construction. *Journal of Sound and Vibration*, 45(1), 1976.
- [70] S. FINNVEDEN : Spectral finite element analysis of the vibration of straight fluid-filled pipes with flanges. *Journal of Sound and Vibration*, 199(1), 1997.
- [71] L. GAVRIC : Finite element computation of dispersion properties in thin-walled wave-guides. *Journal of Sound and Vibration*, 173(1), 1994.
- [72] J.F. HAMET : Propagating wave formulation of tire vibrations using the orthotropic plate model. Dans *Proceedings of Inter-Noise 2002*, 2002.
- [73] L. HOUILLOIN, M.N. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL : Thin walled structures propagation characterisation. Dans *Inter-Noise'2000*, 2000.
- [74] R.S. LANGLEY : Some perspectives on wave-mode duality in SEA. Dans *IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis*, 1997.
- [75] A. E. H. LOVE : On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philosophical trans. of the Royal Society, A*, 1888.
- [76] R. D. MINDLIN : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1951.
- [77] A.C. NILSSON : Wave propagation in and sound transmission through sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 138(1), 1990.
- [78] E. NILSSON et A.C. NILSSON : Prediction and measurement of some dynamic properties of sandwich structures with honeycomb and foam cores. *Journal of Sound and Vibration*, 251(3), 2002.
- [79] A.N. NORRIS : Flexural waves on narrow plates. *Journal of Acoustical Society of America*, 113(5), 2003.
- [80] E. REISSNER : The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1945.
- [81] K. RENJI, P.S. NAIR et S. NARAYANAN : Modal density of composite honeycomb sandwich panels. *Journal of Sound and Vibration*, 195(3), 1996.
- [82] H. RIOU, P. LADEVEZE et P. ROUCH : La théorie variationnelle des rayons complexes pour le calcul des vibrations moyennes fréquences des structures coques. Dans *16^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 2003.
- [83] S. TIMOSHENKO : On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars. *Phil. Mag.*, 6(41), 1921.

Plaques raidies, milieux périodiques

- [84] P.G. BREMNER : Vibro-acoustics of ribbed structures - a compact modal formulation for S.E.A. models. Dans *Noise-Con 94*, 1994.
- [85] S. CHAKRABORTY et M. MUKHOPADHYAY : Estimation of in-plane elastic parameters and stiffener geometry of stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 231(1), 2000.
- [86] S. FINNVEDEN : Exact spectral finite element analysis of stationary vibrations in a railway car structure. *Acta Acustica*, 2, 1994.
- [87] H.G.D. GOYDER et R.G. WHITE : Vibrational power flow from machines into built-up structures, part II : wave propagation and power flow in beam-stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 68(1), 1980.
- [88] R.M. GRICE et R.J. PINNINGTON : A method for the vibration analysis of built-up structures. Part I : introduction and analytical analysis of the plate-stiffened beam. Part II : analysis of the plate-stiffened beam using a combination of finite element analysis and analytical impedances. *Journal of Sound and Vibration*, 230(4), 2000.
- [89] F.M. KHUMBAH et R.S. LANGLEY : Efficient dynamic modelling of aerospace box-type structures. Dans *Internoise 98*, 1998.
- [90] L.S. KURAVSKY et E.V. ARNAUTOV : On the approach to computing stiffened structure natural modes. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1), 1991.
- [91] R.S. LANGLEY : The response of two-dimensional periodic structures to point harmonic forcing. *Journal of Sound and Vibration*, 197(4), 1996.
- [92] R.S. LANGLEY : The response of two-dimensional periodic structures to impulsive point loading. *Journal of Sound and Vibration*, 201(2), 1997.
- [93] R.S. LANGLEY, N.S. BARDELL et H.M. RUIVO : The response of two-dimensional periodic structures to harmonic point loading : a theoretical and experimental study of a beam grillage. *Journal of Sound and Vibration*, 207(4), 1997.
- [94] Y.K. LIN et T.J. MCDANIEL : Dynamics of beam-type periodic structures. *Journal of Engineering for Industry*, November, 1969.
- [95] G. MAIDANIK et J. DICKEY : I) Quadratic and energy estimates of the partial response of ribbed panels. II) Influence of variations in loss factor of a panel and line impedances of attached ribs. *Journal of Acoustical Society of America*, 94(3), 1993.
- [96] D.J. MEAD : A new method of analyzing wave propagation in periodic structures : applications to periodic Timoshenko beams and stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 104(1), 1986.
- [97] U. ORRENIUS et S. FINNVEDEN : Calculation of wave propagation in rib-stiffened plate structures. *Journal of Sound and Vibration*, 198(2), 1996.
- [98] G. SEN GUPTA : Natural flexural waves and the normal modes of periodically-supported beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 13(1), 1970.
- [99] Y.K. TSO et C.H. HANSEN : The transmission of vibration through a coupled periodic structure. *Journal of Sound and Vibration*, 215(1), 1998.

Références bibliographiques du piano

Généralités sur le piano

- [100] E.D. BLACKHAM : The physics of the piano. *Scientific America*, 213(6), 1965.
- [101] X. BOUTILLON : Aperçu général sur les modèles physiques de piano. Dans *1er congrès français d'acoustique*, 1990.
- [102] R. CAUSSÉ : Morphologie et acoustique du piano. *Résonance*, 5, 1993.
- [103] A. CONKLIN, Jr. : Design and tone in the mechanoacoustic piano part II / III. *Journal of Acoustical Society of America*, 100(2/3), 1996.
- [104] H. FLETCHER, E.D. BLACKHAM et R. STRATTON : Quality of piano tones. *Journal of Acoustical Society of America*, 34(6), 1962.
- [105] Y. GUILLOUX : Pleyel revient sur le devant de la scène. *Le monde de la musique*, mai, 2000.
- [106] G. WEINREICH : *Pianos and other stringed keyboard instruments*, volume 4. Malcom J. Crocker, 1997.

Le son du piano

- [107] T.C. HUNDLEY, H. BENIOFF et D.W. MARTIN : Factors contributing to the multiple rate of piano tone decay. *Journal of Acoustical Society of America*, 64(5), 1978.
- [108] R.E. KIRK : Tuning preferences for piano unison groups. *Journal of Acoustical Society of America*, 31(12), 1959.
- [109] D.W. MARTIN : Decay rates of piano tones. *Journal of Acoustical Society of America*, 19(4), 1947.
- [110] D.W. MARTIN et W.D. WARD : Subjective evaluation of musical scale temperament in pianos. *Journal of Acoustical Society of America*, 33(5), 1961.
- [111] I. NAKAMURA : Fundamental theory and computer simulation of the decay characteristics of piano sound. *Journal of Acoustical Society of Japan*, 10(5), 1989.
- [112] R. PLOMP : Pitch of complex tones. *Journal of Acoustical Society of America*, 41(6), 1967.
- [113] W.D. WARD : Subjective musical pitch. *Journal of Acoustical Society of America*, 26(3), 1954.
- [114] R.W. YOUNG : Influence of humidity on the tuning of a piano. *Journal of Acoustical Society of America*, 21(6), 1949.

La table d'harmonie

- [115] C. BESNAINOU et J. FRELAT : Modal effective mass *versus* pre-stress on a piano soundboard : modelling know-how of piano makers skill. Dans *International Symposium on Musical Acoustics*, 2001.
- [116] P.H. BIHUBER et C.A. JOHNSON : The influence of the soundboard on piano tone quality. *Journal of Acoustical Society of America*, 11, 1940.
- [117] P. DEROGIS et R. CAUSSÉ : Caractérisation du rayonnement de la table d'harmonie d'un piano droit. *Journal de physique*, IV, 1990.
- [118] N. GIORDANO : Simple model of a piano soundboard. *Journal of Acoustical Society of America*, 102(2), 1997.
- [119] N. GIORDANO : Mechanical impedance of a piano soundboard. *Journal of Acoustical Society of America*, 103(4), 1998.
- [120] N. GIORDANO : Sound production of a vibrating piano soundboard : experiment. *Journal of Acoustical Society of America*, 104(3), 1998.
- [121] J. KINDEL et I-Chih WANG : Modal analysis and finite element analysis of a piano soundboard. Dans *5th International Modal Analysis Conference*, 1987.
- [122] E. KUKADA : Vibrational study of the wood used for the sound boards of pianos. *Nature*, 166, 1950.
- [123] E. RAJCAN : Some differences in psycho-acoustic characteristics of "resonant" and standard spruce wood. *Acustica*, 48, 1981.
- [124] H.L. SCHWAB : Finite element analysis of a guitar soundboard. *Catgut acoustics*, 24, 1975.
- [125] H.L. SCHWAB et K.C. CHEN : Finite element analysis of a guitar soundboard - part ii. *Catgut acoustics*, 25, 1976.
- [126] H. SUZUKI : Vibration and sound radiation of a piano soundboard. *Journal of Acoustical Society of America*, 80(6), 1986.

La corde

- [127] A. CHAIGNE : Numerical simulations of piano strings I. a physical model for a struck string using finite difference methods. *Journal of Acoustical Society of America*, 95(2), 1994.
- [128] H.A. JR CONKLIN : Piano strings and "phantom" partials. *Journal of Acoustical Society of America*, 102(1), 1997.
- [129] H. FLETCHER : Normal vibration frequencies of a stiff piano string. *Journal of Acoustical Society of America*, 36(1), 1964.
- [130] N. GIORDANO et A.J. KORTY : Motion of a piano string : longitudinal vibrations and the role of the bridge. *Journal of Acoustical Society of America*, 100(6), 1996.
- [131] C. KARP : The inharmonicity of strung keyboard instruments. *Acustica*, 60, 1986.

- [132] A.F. KNOBLAUGH : The clang-tone of the pianoforte. *Journal of Acoustical Society of America*, 16, 1944.
- [133] F. Jr MILLER : A proposed loading of piano strings for improved tone. *Journal of Acoustical Society of America*, 21(4), 1949.
- [134] M. PODLESAK et A.R. LEE : Dispersion of waves in piano strings. *Journal of Acoustical Society of America*, 83(1), 1988.
- [135] O.L. RAILSBACK : Scale temperament as applied to piano tuning. *Journal of Acoustical Society of America*, 9, 1937.
- [136] O.H. SCHUNK et R.W. YOUNG : Observations on the vibrations of piano strings. *Journal of Acoustical Society of America*, 15(1), 1943.
- [137] R.S. SHANKLAND et J.W. COLTMAN : The departure of the overtones of a vibrating wire from a true harmonic series. *Journal of Acoustical Society of America*, 10(3), 1939.
- [138] R.W. YOUNG : Inharmonicity of plain wire piano strings. *Journal of Acoustical Society of America*, 24(3), 1952.
- [139] R.W. YOUNG : Inharmonicity of piano bass strings. *Journal of Acoustical Society of America*, 26, 1953.
- [140] R.W. YOUNG : Inharmonicity of piano strings. *Acustica*, 4, 1954.

Les marteaux

- [141] X. BOUTILLON : Model for piano hammers : experimental determination and digital simulation. *Journal of Acoustical Society of America*, 83(2), 1988.
- [142] D.E. HALL : Piano string excitation in the case of small hammer mass. *Journal of Acoustical Society of America*, 79(1), 1986.
- [143] D.E. HALL : Piano string excitation II : general solution for a hard narrow hammer. *Journal of Acoustical Society of America*, 81(2), 1987.
- [144] D.E. HALL : Piano string excitation VI : Nonlinear modeling. *Journal of Acoustical Society of America*, 92(1), 1992.
- [145] D.E. HALL et A. ASKENFELT : Piano string excitation V : spectra for real hammers and strings. *Journal of Acoustical Society of America*, 83(4), 1988.
- [146] D.E. HALL et P. CLARK : Piano string excitation IV : the question of missing modes. *Journal of Acoustical Society of America*, 82(6), 1987.
- [147] A. STULOV : Hysteretic model of the grand piano hammer felt. *Journal of Acoustical Society of America*, 97(4), 1995.
- [148] H. SUZUKI : Model analysis of a hammer-string interaction. *Journal of Acoustical Society of America*, 92(4), 1987.

Annexe A : Synthèse modale avec correction par le noyau statique

A.1 Troncature modale

On a vu au chapitre I.1 que la réponse dynamique de toute structure pouvait être mise sous la forme (équation I.15) :

$$\hat{w}(x, \omega) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\hat{F}_m(\omega)}{-\omega^2 + 2i\xi_m\omega_m\omega + \omega_m^2} \phi^m(x)$$

où $(\omega_m, \phi^m, \xi_m)$ est la base modale de la structure, et $\hat{F}_m(\omega) = \int \hat{F} \phi^m$ est la contribution modale de la force. Cette formule est rigoureusement juste, mais difficile à mettre en œuvre à cause de la somme d'une infinité de termes. En général, on utilise une *troncature modale*, c'est-à-dire qu'on arrête la somme quand la pulsation modale dépasse un certain seuil (par exemple 3 ou 10 fois la pulsation de calcul ω). La solution devient alors approchée, car on considère que :

$$\sum_{\omega_m > 3\omega}^{+\infty} \frac{\hat{F}_m(\omega)}{-\omega^2 + 2i\xi_m\omega_m\omega + \omega_m^2} \phi^m(x) \approx 0 \quad (\text{A.1})$$

Pour chaque mode en effet, on a :

$$\begin{aligned} \omega_m &> 3\omega \\ \Rightarrow \quad |-\omega^2 + 2i\xi_m\omega_m\omega + \omega_m^2| &\approx \omega_m^2 > 9\omega^2 \end{aligned}$$

Les modes tronqués ont donc une contribution au moins neuf fois moins importante que les modes excités. Si le seuil était fixé à 10, cette contribution serait 100 fois moins importante.

A.2 Correction par le noyau statique

On imagine disponible la réponse statique de la structure $u^{st}(x)$. La formule I.15 étant toujours vraie, on peut écrire :

$$w^{st}(x) = \hat{w}(x, 0) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{F_m^{st}}{\omega_m^2} \phi^m(x)$$

soit, en utilisant la troncature modale :

$$w^{st}(x) = \sum_{\omega_m < 3\omega} \frac{F_m^{st}}{\omega_m^2} \phi^m(x) + \sum_{\omega_m > 3\omega}^{+\infty} \frac{F_m^{st}}{\omega_m^2} \phi^m(x) \quad (\text{A.2})$$

Or, pour $\omega_m > 3\omega$, on a :

$$\begin{aligned} |-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2| &\approx \omega_m^2 \\ \left| \frac{1}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \right| &\approx \frac{1}{\omega_m^2} \\ \frac{\hat{F}_m(\omega)}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \phi^m(x) &\approx \frac{\hat{F}_m(\omega)}{\omega_m^2} \phi^m(x) \\ \sum_{\omega_m > 3\omega}^{+\infty} \frac{\hat{F}_m(\omega)}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \phi^m(x) &\approx \sum_{\omega_m > 3\omega}^{+\infty} \frac{\hat{F}_m(\omega)}{\omega_m^2} \phi^m(x) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

L'équation A.3 remplace l'approximation A.1, ce qui donne pour l'équation I.15 originelle :

$$\begin{aligned} \hat{w}(x, \omega) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\hat{F}_m(\omega)}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \phi^m(x) \\ &= \sum_{\omega_m < 3\omega} \frac{\hat{F}_m(\omega)}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \phi^m(x) + \sum_{\omega_m > 3\omega}^{+\infty} \frac{\hat{F}_m(\omega)}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \phi^m(x) \\ &\approx \sum_{\omega_m < 3\omega} \frac{\hat{F}_m(\omega)}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \phi^m(x) + \sum_{\omega_m > 3\omega}^{+\infty} \frac{\hat{F}_m(\omega)}{\omega_m^2} \phi^m(x) \\ &\approx \sum_{\omega_m < 3\omega} \frac{\hat{F}_m(\omega)}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} \phi^m(x) + w^{st}(x) - \sum_{\omega_m < 3\omega} \frac{\hat{F}_m(\omega)}{\omega_m^2} \phi^m(x) \\ \hat{w}(x, \omega) &\approx w^{st}(x) + \sum_{\omega_m < 3\omega} \hat{F}_m(\omega) \left[\frac{1}{-\omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega + \omega_m^2} - \frac{1}{\omega_m^2} \right] \phi^m(x) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

L'équation A.4 est donc une alternative à la troncature modale classique : il s'agit de la troncature modale corrigée par le noyau statique. Si la réponse statique est connue, la formule A.4 est tout à fait exploitable puisque la somme y est finie. La section suivante propose l'exemple de la poutre appuyée-appuyée.

A.3 Exemple : synthèse modale de la poutre appuyée-appuyée avec correction par le noyau statique

Le système étudié en exemple est une poutre appuyée-appuyée de longueur L , de section S , de moment d'inertie en flexion I , de caractéristiques mécaniques E et ρ . Le modèle utilisé est celui de Euler-Bernouilli (correspondant à la plaque de Love-Kirchhoff vue au chapitre II.4) :

$$EI \frac{\partial w^4}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (\text{A.5})$$

La base modale, normée par la masse, est :

$$\left(\omega_m = \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad , \quad \phi_m = \sqrt{\frac{2}{\rho S L}} \cdot \sin \frac{m\pi x}{L} \right)_m$$

L'équation A.4 devient, pour une force harmonique ponctuelle $F(x, t) = F \sin \omega t \delta(x - x_0)$:

$$w(x) \approx w^{st}(x) + \frac{2F}{EIL} \sum_{m=1}^{m_{\max}} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x_0}{L} \left[\frac{1}{-k^4 + 2i\xi_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 k^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4} - \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4} \right]$$

avec $k^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2$ et $m_{\max} = \sqrt{3} \frac{kL}{\pi}$.

En ce qui concerne le noyau statique, on peut le calculer analytiquement sous les hypothèses de la Résistance des Matériaux. La figure A.1 définit les conventions d'écritures.

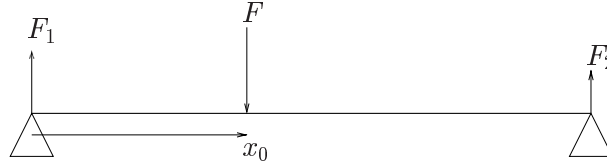


FIG. A.1: Poutre appuyée-appuyée

Le bilan des forces et des moments donne :

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = -F \\ F x_0 + F_2 L = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} F_1 = -F \frac{L-x_0}{L} \\ F_2 = -F \frac{x_0}{L} \end{cases}$$

Pour $x \in [0, x_0]$, le moment est $\mathcal{M}_1(x) = -F_1 x = -EI w_1''$.

Pour $x \in [x_0, L]$, le moment est $\mathcal{M}_2(x) = -F_2 (L - x) = -EI w_2''$.

L'intégration de ces équations donne, avec les conditions aux limites $w(0) = w(L) = 0$:

$$w_1(x) = \frac{F_1}{6EI} x^3 + ax \quad \text{et} \quad w_2(x) = \frac{F_2}{6EI} (L - x)^3 + b(L - x)$$

Les constantes a et b sont déterminées grâce à la continuité \mathcal{C}^1 de la fonction en x_0 :

$$\begin{aligned} w_1(x_0) = w_2(x_0) &\Rightarrow \frac{F_1}{6EI} x_0^3 - \frac{F_2}{6EI} (L - x_0)^3 = -ax_0 + b(L - x_0) \\ w_1'(x_0) = w_2'(x_0) &\Rightarrow \frac{F_1}{2EI} x_0^2 + \frac{F_2}{2EI} (L - x_0)^2 = -a - b \end{aligned}$$

Tous calculs faits, la déflexion de la poutre s'écrit :

- Pour $x \in [0, x_0]$, $w_1(x) = \frac{-F}{6EIL} (L - x_0) x \left[x^2 - x_0 (2L - x_0) \right]$

- Pour $x \in [x_0, L]$, $w_2(x) = \frac{-F}{6EIL} x_0 (L - x) \left[(L - x)^2 - (L - x_0)(L + x_0) \right]$

A.4 Discussion sur l'intérêt de la méthode

Le gain apporté par la correction du noyau statique est en général très faible. De plus, on peut ajouter que :

- cette correction diminue quand la source s'éloigne des bords. En effet, en se rapprochant du bord, les variations spatiales de la déformée statique sont de plus en plus rapides ; autrement dit, plus la source est proche d'un bord, plus les grands nombres d'ondes sont excités. Il faut aller chercher les modes élevés pour bien synthétiser le noyau statique. Réciproquement, si la source est loin des bords, peu de modes suffisent à bien représenter le noyau statique. Dans ce cas, la correction par le noyau statique est inutile.
- elle s'atténue quand la fréquence augmente. En effet, plus la fréquence augmente, plus la limite de la troncature augmente, et mieux le noyau statique est bien représenté par la synthèse modale. Autrement dit, plus la fréquence augmente, plus le terme correctif apporté par le noyau statique est faible.

Pour conclure, cette correction n'est intéressante que dans des cas très particuliers. Tout d'abord, il est nécessaire de connaître le noyau statique, ce qui est rarement le cas (par exemple, dans le cas simple d'une plaque appuyée-appuyée, ce noyau n'est pas connu). De plus, il faut travailler avec une source qui excite les forts nombres d'ondes, c'est à dire qui impose des variations spatiales très brusques (par exemple une source ponctuelle proche d'un bord, ou deux sources ponctuelles de sens opposés très proches l'une de l'autre). Enfin, il faut travailler sur une fréquence relativement basse. Si ces trois caractéristiques sont réunies, et uniquement si les trois sont réunies, alors la correction par le noyau statique présente un intérêt. Dans tous les autres cas, il est inutile de la faire.

Annexe B : Noyau de Green pour une plaque orthotrope

Le noyau de Green est la réponse du milieu, supposé infini, à une sollicitation élémentaire (*c.f.* Morse [24]). Un certain nombre de méthodes utilisant ce noyau pour calculer le champ dans les structures réelles, il semble intéressant de mentionner les principaux résultats sur ce sujet, afin d'apporter une vision d'ensemble des milieux bidimensionnels orthotropes.

B.1 Noyau de Green pour une plaque isotrope

Avec les hypothèses de Love-Kirchhoff, l'équation du mouvement d'une plaque mince isotrope s'écrit :

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Dans le domaine fréquentiel, cette équation devient (avec Δ le Laplacien d'une fonction) :

$$\Delta^2 \hat{w} - \frac{\rho h \omega^2}{D} \hat{w} = 0 \quad (\text{B.2})$$

Le noyau de Green infini g_o doit donc être solution de l'équation :

$$\begin{aligned} \Delta^2 g_o - \frac{\rho h \omega^2}{D} g_o &= \delta(x)\delta(y) && \text{en coordonnées cartésiennes} \\ &= \frac{1}{r} \delta(r)\delta(\theta) && \text{en coordonnées polaires} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Avec des considérations de fonctions finies en $r \rightarrow +\infty$ et $r = 0$, d'ondes divergentes (se déplaçant du point source vers l'extérieur), et d'égalité à la force élémentaire à l'origine, on arrive à la solution indépendante de θ :

$$g_o(r) = \frac{i}{8} \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{\rho h \omega^2}} \left[H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(ikr) \right] \quad (\text{B.4})$$

avec $k = \sqrt{\frac{\rho h \omega^2}{D}}$ le vecteur d'ondes solution de l'équation de dispersion II.51, et $H_0^{(1)}$ la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0.

La figure B.1 est une vue centrée sur l'excitation de ce noyau de Green isotrope.

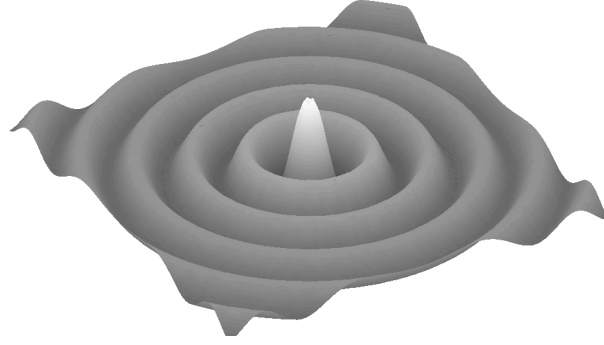


FIG. B.1: Noyau de Green d'une plaque mince isotrope

B.2 Noyau de Green pour l'orthotropie elliptique [72]

Le noyau de Green g doit vérifier, cette fois-ci :

$$\left[D_x \frac{\partial^4 g}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 g}{\partial y^4} + 2\sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} \right] - \rho h \omega^2 g = \delta(x)\delta(y) \quad (\text{B.5})$$

Le changement de variables $X = (D_x)^{-1/4}x$, $Y = (D_y)^{-1/4}y$ permet de revenir au cas précédent ; en effet, en se rappelant que

$$\forall \alpha \neq 0, \quad \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$$

on aboutit à l'équation :

$$\Delta_{XY}^2 g - \rho h \omega^2 g = \sqrt[4]{D_x D_y} \delta(X)\delta(Y) \quad (\text{B.6})$$

qui est exactement, au facteur $\sqrt[4]{D_x D_y}$ près, l'équation B.3. D'où la solution, en notant $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$:

$$g(R) = \frac{i}{8} \frac{\sqrt[4]{D_x D_y}}{\sqrt{\rho h \omega^2}} \left[H_0^{(1)}(\sqrt[4]{\rho h \omega^2} R) - H_0^{(1)}(i\sqrt[4]{\rho h \omega^2} R) \right] \quad (\text{B.7})$$

Il est alors utile d'introduire le pseudo nombre d'ondes $\mathfrak{K}(\theta)$ défini par :

$$\mathfrak{K}(\theta) = (\rho h \omega^2)^{1/4} \sqrt{D_x^{-1/2} \cos^2(\theta) + D_y^{-1/2} \sin^2(\theta)} \quad (\text{B.8})$$

Cette fonction est construite pour avoir la relation :

$$\mathfrak{K}(\theta)r = \sqrt[4]{\rho h \omega^2} R \quad (\text{B.9})$$

ce qui amène finalement la solution définitive :

$$g(r, \theta) = \frac{i}{8} \frac{\sqrt[4]{D_x D_y}}{\sqrt{\rho h \omega^2}} \left[H_0^{(1)}(\mathfrak{K}(\theta)r) - H_0^{(1)}(i\mathfrak{K}(\theta)r) \right] \quad (\text{B.10})$$

La figure B.2 est une vue de ce noyau de Green elliptique, avec $\sqrt{D_y/D_x} = 1/2$.

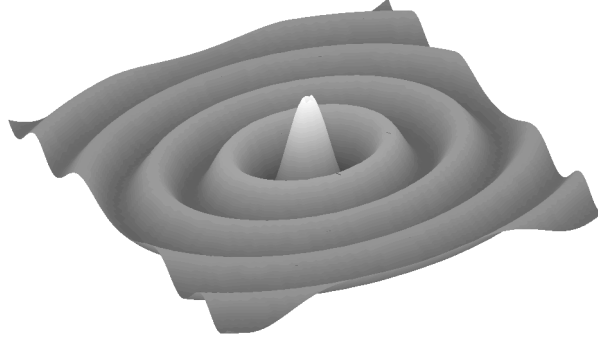


FIG. B.2: Noyau de Green d'une plaque mince orthotrope (orthotropie elliptique)

Remarque : Il est bon de noter que, contrairement au cas isotrope (équation B.4) qui fait intervenir le nombre d'onde dans la fonction de Hankel, ici, dans le cas de l'orthotropie elliptique, le facteur $\mathfrak{K}(\theta)$ apparaissant dans la fonction de Hankel n'est qu'un *pseudo* nombre d'ondes. En particulier, on a $\mathfrak{K}(\theta)$ différent de $k(\theta)$, vrai nombre d'ondes du milieu :

$$\text{II.56} \quad : \quad k^4(\theta) = \frac{\rho h \omega^2}{(\sqrt{D_x} \cos^2(\theta) + \sqrt{D_y} \sin^2(\theta))^2}$$

$$\text{B.8} \quad : \quad \mathfrak{K}^4(\theta) = \rho h \omega^2 \left(\frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{D_x}} + \frac{\sin^2(\theta)}{\sqrt{D_y}} \right)^2$$

B.3 Noyau de Green pour l'orthotropie non elliptique

Dans le cas où $D_{xy} \neq 2\sqrt{D_x D_y}$, il devient très délicat, voir impossible, de trouver le noyau de Green \tilde{g} analytiquement (le signe \sim sera employé pour toutes les grandeurs se rattachant au milieu orthotrope non elliptique). Plusieurs approches peuvent être employées :

- **Intégration directe** : par transformée de Fourier directe puis inverse, on trouve :

$$\tilde{g}(x, y) = \frac{1}{\pi} \iint \frac{e^{i(-k_x x + k_y y)}}{-\rho h \omega^2 + D_x k_x^4 + D_y k_y^4 + D_{xy} k_x^2 k_y^2} dk_x dk_y \quad (\text{B.11})$$

Mais le calcul de cette intégrale résiste aux outils classiques...

- **Changement de variable** : pour se ramener au cas bien maîtrisé de l'isotropie, il suffirait de trouver un changement de variable $(X(x, y), Y(x, y))$ tel que :

$$D_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} + D_{xy} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \longleftrightarrow \frac{\partial^4}{\partial X^4} + \frac{\partial^4}{\partial Y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial Y^2} = \Delta_{XY}^2 \quad (\text{B.12})$$

Mais un tel changement de variable reste introuvable...

- **Analogie avec le cas elliptique** : le terme constant, devant la fonction de Hankel, semble être lié à la racine carrée de l'aire définie par le carré du nombre d'onde

$\left(\sqrt{2\pi} \left(\int_{\theta} \tilde{k}^4(\theta) d\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$. Reste le pseudo vecteur d'onde $\tilde{\mathfrak{K}}(\theta)$, qui est lié à l'équation de dispersion. Le noyau de Green serait alors de la forme :

$$\tilde{g}(r, \theta) = \frac{i}{8} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\int_{\theta} \tilde{k}^4(\theta) d\theta}} \left[H_0^{(1)}(\tilde{\mathfrak{K}}(\theta)r) - H_0^{(1)}(i\tilde{\mathfrak{K}}(\theta)r) \right] \quad (\text{B.13})$$

Mais l'expression analytique du pseudo vecteur d'onde demeure inconnue...

– **Méthode des perturbations** : en notant \mathcal{E} l'opérateur elliptique $-\rho h \omega^2 + D_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2\sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2}$ et $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} + \epsilon \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2}$ où $\epsilon = D_{xy} - 2\sqrt{D_x D_y}$ est supposé petit, on a :

$$\mathcal{E}(g) = \delta \quad (\text{B.14})$$

$$\tilde{\mathcal{E}}(g + g') = \delta$$

$$\implies \mathcal{E}(g') = -\epsilon \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} (g + g') \quad (\text{B.15})$$

ce qui donne au premier ordre en ϵ :

$$\mathcal{E}(g') = -\epsilon \frac{\partial^4 g}{\partial y^2 \partial x^2} \quad (\text{B.16})$$

En passant toutes ces relations dans le domaine de Fourier spatial (noté par le symbole $\hat{\cdot}$), il vient :

$$\text{B.14} \implies \hat{\mathcal{E}}\hat{g} = 1 \implies \hat{g} = \frac{1}{\hat{\mathcal{E}}}$$

$$\text{B.16} \implies \hat{\mathcal{E}}\hat{g}' = -\epsilon k_x^2 k_y^2 \hat{g}$$

$$\implies \hat{g}' = -\epsilon k_x^2 k_y^2 \hat{g}^2$$

$$g' = -\epsilon \frac{\partial^4 (g * g)}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (\text{B.17})$$

où $*$ désigne la convolution de deux fonctions.

Le noyau de Green d'une plaque orthotrope (faiblement) non elliptique serait alors donné en fonction du noyau de Green elliptique g par la relation :

$$\tilde{g}(x, y) = g(x, y) - \epsilon \frac{\partial^4 (g * g)}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) \quad (\text{B.18})$$

Mais là encore, l'expression analytique du deuxième terme n'est pas aisément calculable...

Annexe C : Etablissement du modèle de Nilsson pour les sandwichs nid d'abeilles

Cette section reprend les calculs proposés par Nilsson [78], et qui aboutissent à l'équation de dispersion d'une plaque sandwich nid d'abeilles III.14 (page 79) :

$$\left(\frac{GH}{\omega \sqrt{\sigma}} \right) \left[\frac{D^{\frac{3}{2}}(\omega)}{D_{BF}} - D^{\frac{1}{2}}(\omega) \right] + D(\omega) - 2D_{HF} = 0$$

C.1 Notations et champ de déplacement

Les caractéristiques géométriques de l'assemblage sont celles données figure III.17 page 79, et son rappelées sur la figure C.1 ci-dessous. La déflexion normale de la plaque est supposée provenir non seulement de la flexion de l'ensemble mais aussi du cisaillement et de la rotation de l'âme. La figure C.1 schématise les deux mouvements "purs" associés : la flexion β et le cisaillement γ .

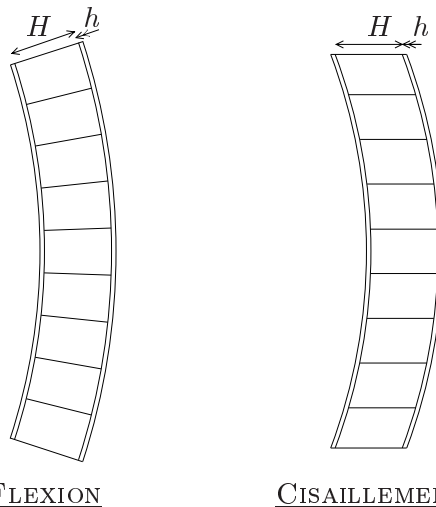


FIG. C.1: Déflexion du sandwich due à la flexion et au cisaillement

La déflexion totale w provient alors des déplacements angulaires dû à la flexion et au cisaillement, respectivement β et γ :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \beta + \gamma \quad (\text{C.1})$$

Les caractéristiques mécaniques sont E^c , G et ρ^c pour le cœur, et E^p et ρ^p pour les peaux. Quelques grandeurs générales sont calculées :

- La densité surfacique : $\sigma = 2h\rho^p + H\rho^c$
- L'inertie en rotation d'une section : $I = \frac{\rho^c H^3}{12} + \rho^p h \left(\frac{H^2}{2} + Hh + \frac{2h^2}{3} \right)$
- La rigidité en flexion de l'assemblage : $D_{\text{BF}} = \frac{E^c H^3}{12} + E^p h \left(\frac{H^2}{2} + Hh + \frac{2h^2}{3} \right)$
- La rigidité en flexion d'une peau : $D_{\text{HF}} = \frac{E^p h^3}{12}$

On peut alors calculer un hamiltonien linéique associé au mouvement de la plaque. Le mouvement β est associé à la flexion de l'ensemble tandis que le mouvement γ est associé au cisaillement de l'âme et à la flexion des deux peaux. L'énergie potentielle est donc :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \left(D_{\text{BF}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + 2D_{\text{HF}} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)^2 + GH\gamma^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(D_{\text{BF}} \beta'^2 + 2D_{\text{HF}} \gamma'^2 + GH\gamma^2 \right) dx \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

L'énergie cinétique, quant à elle, est constituée de la translation verticale de la plaque et de la rotation de la section :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int \left(\sigma \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\sigma \dot{w}^2 + I \dot{\beta}^2 \right) dx \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

L'hamiltonien est alors défini par la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} H &= T - U \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\sigma \dot{w}^2 + I \dot{\beta}^2 - D_{\text{BF}} \beta'^2 - 2D_{\text{HF}} \gamma'^2 + GH\gamma^2 \right) dx \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Les trois fonctions w , β et γ étant linéairement liées, la première étape du calcul consiste à éliminer γ de l'équation C.4 grâce à la définition de w à travers l'équation C.1 :

$$H = \frac{1}{2} \int \left(\sigma \dot{w}^2 + I \dot{\beta}^2 - D_{\text{BF}} \beta'^2 - 2D_{\text{HF}} (w'' - \beta')^2 - GH (w' - \beta)^2 \right) dx \quad (\text{C.5})$$

C.2 Principe de Hamilton

Le principe de Hamilton stipule que :

$$\delta \int H dt = 0 \quad (\text{C.6})$$

Or la minimisation de cette fonctionnelle implique que, si les fonctions sont notées u_i et les variables x_j , on a⁶ :

$$\forall i, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{\partial H}{\partial u_{i,j^{(k)}}} \right]_{,j^{(k)}} = 0 \quad (\text{C.7})$$

Ici, les fonctions sont w et β , et les variables x et t . De plus, la fonctionnelle ne dépend pas des dérivées supérieures à l'ordre 2 des fonctions. En effet, par exemple, pour $i = 1, j = 2, k = 3$:

$$\left[\frac{\partial H}{\partial u_{i,j^{(k)}}} \right]_{,j^{(k)}} = \left[\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial^3 w}{\partial t^3}} \right]_{,t^3} = \left[\frac{\partial H}{\partial \ddot{w}} \right]_{,t^3} = [0]_{,t^3} = 0 \quad (\text{C.8})$$

ou encore, pour $i = 2, j = 1, k = 3$:

$$\left[\frac{\partial H}{\partial u_{i,j^{(k)}}} \right]_{,j^{(k)}} = \left[\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3}} \right]_{,x^3} = \left[\frac{\partial H}{\partial \beta'''} \right]_{,x^3} = [0]_{,x^3} = 0 \quad (\text{C.9})$$

Les équations C.7 s'écrivent alors en un système de deux équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial w} - \left[\frac{\partial H}{\partial w'} \right]_{,x} - \left[\frac{\partial H}{\partial \dot{w}} \right]_{,t} + \left[\frac{\partial H}{\partial w''} \right]_{,x^2} + \left[\frac{\partial H}{\partial \ddot{w}} \right]_{,t^2} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \beta} - \left[\frac{\partial H}{\partial \beta'} \right]_{,x} - \left[\frac{\partial H}{\partial \dot{\beta}} \right]_{,t} + \left[\frac{\partial H}{\partial \beta''} \right]_{,x^2} + \left[\frac{\partial H}{\partial \ddot{\beta}} \right]_{,t^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

dont plusieurs termes sont nuls :

$$\begin{cases} 0 - \left[\frac{\partial H}{\partial w'} \right]_{,x} - \left[\frac{\partial H}{\partial \dot{w}} \right]_{,t} + \left[\frac{\partial H}{\partial w''} \right]_{,x^2} + 0 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \beta} - \left[\frac{\partial H}{\partial \beta'} \right]_{,x} - \left[\frac{\partial H}{\partial \dot{\beta}} \right]_{,t} + 0 + 0 = 0 \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

En utilisant l'expression C.5 de l'hamiltonien, ce système devient :

$$\begin{cases} GH(w'' - \beta') - \sigma \ddot{w} - 2D_{\text{HF}}(w'''' - \beta''') = 0 \\ GH(w' - \beta) + D_{\text{BF}}\beta'' - 2D_{\text{HF}}(w''' - \beta'') - I\ddot{\beta} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

C.3 Equation de dispersion

La solution recherchée est sous la forme d'une onde plane :

$$\begin{aligned} w(x, t) &= w_0 e^{-i(\omega t - kx)} \\ \beta(x, t) &= \beta_0 e^{-i(\omega t - kx)} \end{aligned}$$

⁶Pour plus de précisions sur les conditions d'extremum d'une fonctionnelle, se rapporter par exemple à l'ouvrage de J.F. Imbert : *Analyse des structures par Eléments Finis*, Cepaducs éditions, 2^{ème} édition, 1984, annexe 1 page 441.

Les dérivations par rapport au temps et à l'espace deviennent des multiplications respectivement par $-\mathrm{i}\omega$ et par $\mathrm{i}k$. Le système C.12 s'écrit :

$$\begin{cases} GH(-k^2 w_0 - \mathrm{i}k\beta_0) + \sigma\omega^2 w_0 - 2D_{\mathrm{HF}}(k^4 w_0 + \mathrm{i}k^3\beta_0) = 0 \\ GH(\mathrm{i}k w_0 - \beta_0) - D_{\mathrm{BF}}k^2\beta_0 - 2D_{\mathrm{HF}}(-\mathrm{i}k^3 w_0 + k^2\beta_0) + I\omega^2\beta_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

Et avec une écriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} -GHk^2 + \sigma\omega^2 - 2D_{\mathrm{HF}}k^4 & -\mathrm{i}GHk - 2D_{\mathrm{HF}}k^3 \\ \mathrm{i}GHk + 2D_{\mathrm{HF}}k^3 & -GH - D_{\mathrm{BF}}k^2 - 2D_{\mathrm{HF}}k^2 + I\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{C.14})$$

Une solution non nulle ne peut être trouvée que quand le déterminant s'annule :

$$(-GHk^2 + \sigma\omega^2 - 2D_{\mathrm{HF}}k^4) \times (GH + D_{\mathrm{BF}}k^2 + 2D_{\mathrm{HF}}k^2 - I\omega^2) + (GHk + 2D_{\mathrm{HF}}k^3)^2 = 0 \quad (\text{C.15})$$

Cette équation est un polynôme d'ordre 6 en k :

$$\begin{aligned} & \sigma\omega^2(GH - I\omega^2) \\ & + k^2 \left(-GH(GH - I\omega^2) + \sigma\omega^2(D_{\mathrm{BF}} + 2D_{\mathrm{HF}}) + G^2H^2 \right) \\ & + k^4 \left(-GH(D_{\mathrm{BF}} + 2D_{\mathrm{HF}}) - 2D_{\mathrm{HF}}(GH - I\omega^2) + 4GHD_{\mathrm{HF}} \right) \\ & - k^6 2D_{\mathrm{HF}}(D_{\mathrm{BF}} + 2D_{\mathrm{HF}} - 2D_{\mathrm{HF}}) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

qui se simplifie en :

$$\sigma\omega^2(GH - I\omega^2) + k^2\omega^2 \left(GHI + \sigma(D_{\mathrm{BF}} + 2D_{\mathrm{HF}}) \right) + k^4 \left(2D_{\mathrm{HF}}I\omega^2 - GHD_{\mathrm{BF}} \right) - k^6 2D_{\mathrm{HF}}D_{\mathrm{BF}} = 0 \quad (\text{C.17})$$

C.4 Plaque équivalente

Comme au chapitre II, on cherche une plaque équivalente, dont les caractéristiques de rigidité sont résumées à travers une rigidité équivalente D , définie par le nombre d'onde apparent :

$$D = \sigma \frac{\omega^2}{k^4} \quad (\text{C.18})$$

L'équation C.17 devient alors (en divisant par k^6) :

$$\frac{D^{\frac{3}{2}}}{\omega\sqrt{\sigma}}(GH - I\omega^2) + \frac{D}{\sigma} \left(GHI + \sigma(D_{\mathrm{BF}} + 2D_{\mathrm{HF}}) \right) + \frac{D^{\frac{1}{2}}}{\omega\sqrt{\sigma}} \left(2D_{\mathrm{HF}}I\omega^2 - GHD_{\mathrm{BF}} \right) - 2D_{\mathrm{HF}}D_{\mathrm{BF}} = 0 \quad (\text{C.19})$$

Enfin, deux hypothèses supplémentaires sont apportées :

- $D_{\mathrm{BF}} \gg D_{\mathrm{HF}}$: les peaux sont fines et le cœur épais.
- $I\omega^2 \ll GH$: l'inertie en rotation est négligée devant les efforts de cisaillement.

L'équation de dispersion devient alors, en divisant par D_{BF} :

$$\frac{D^{\frac{3}{2}}}{D_{\text{BF}}\omega\sqrt{\sigma}}GH + D \left(1 + \frac{GHI}{D_{\text{BF}}\sigma}\right) - \frac{D^{\frac{1}{2}}}{\omega\sqrt{\sigma}}GH - 2D_{\text{HF}} = 0 \quad (\text{C.20})$$

Et, en rajoutant l'hypothèse suivante (non fournie par Nilsson dans son article) :

- $GHI \ll \sigma D_{\text{BF}}$: l'inertie de rotation est négligeable devant l'inertie en translation, et/ou le cisaillement du cœur est négligeable devant la flexion de l'ensemble.

l'équation de dispersion devient celle recherchée :

$$\frac{D^{\frac{3}{2}}}{D_{\text{BF}}\omega\sqrt{\sigma}}GH + D - \frac{D^{\frac{1}{2}}}{\omega\sqrt{\sigma}}GH - 2D_{\text{HF}} = 0 \quad (\text{C.21})$$

$$\left(\frac{GH}{\omega\sqrt{\sigma}}\right) \left[\frac{D^{\frac{3}{2}}(\omega)}{D_{\text{BF}}} - D^{\frac{1}{2}}(\omega)\right] + D(\omega) - 2D_{\text{HF}} = 0 \quad (\text{III.14})$$

Annexe D : mise en place de la méthode de la puissance injectée par une approche expérimentale

Cette annexe expose la mise en place de la méthode de la puissance injectée (*Injected Power Method*, PIM [36, 37]) à partir de mesures expérimentales obtenues par vélocimétrie laser à balayage. Cette méthode considère un bilan énergétique global pour une structure en régime permanent. A partir de l'équation locale I.53 (*c.f.* page 23), définie pour une largeur de bande $\Delta\omega$ de fréquence centrale ω_c :

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega_c}\Delta W + \eta\omega_c W = \Pi_{\text{inj}}$$

on construit un bilan énergétique global. En intégrant sur toute la surface, avec une force ponctuelle, et en notant $\overline{W} = \int W$ et $\overline{\Pi_{\text{inj}}} = \int \Pi_{\text{inj}}$, ce bilan devient :

$$\eta\omega_c \overline{W} = \overline{\Pi_{\text{inj}}} \quad (\text{D.1})$$

L'estimation de l'énergie totale \overline{W} et de la puissance injectée totale $\overline{\Pi_{\text{inj}}}$ donnera donc directement l'amortissement structural η . Dans toute cette section, on s'intéresse non plus à la position dans le plan d'onde (équation de dispersion), mais à des valeurs énergétiques proportionnelles aux carrés des amplitudes. C'est donc la relation exacte III.3 qui sera utilisée, et non la relation de proportionnalité III.4.

D.1 Estimation de l'énergie totale

Sur un mode, on sait que l'énergie cinétique d'un système est égale à l'énergie de déformation (en moyenne temporelle). L'énergie totale est donc le double de l'énergie cinétique $\overline{E_c}$:

$$\overline{W} = 2\overline{E_c} \quad (\text{D.2})$$

Cette relation est vérifiée à la fréquence d'un mode propre. A une fréquence plus élevée, c'est l'énergie cinétique qui domine, tandis qu'à une fréquence plus basse, c'est l'énergie de déformation. Ainsi, avec une forte densité modale (il y a beaucoup de modes résonnants, et autant de modes au-dessus qu'en dessous de la fréquence d'excitation), on peut supposer que

cette relation est vraie pour toutes les fréquences. Le fait de l'intégrer sur la largeur de bande $\Delta\omega$ voulue la rend "encore plus vraie".

Connaissant le champ de vitesse $\hat{w}(x, y)$ sur une grille assez dense, on pourrait estimer l'énergie cinétique par la relation (le second $\frac{1}{2}$ vient du calcul de la valeur *RMS*) :

$$\begin{aligned}\overline{E_c} &= \frac{1}{2} \iint_S \rho h \frac{1}{2} \left| \hat{w}(x, y) \right|^2 dS \\ &\approx \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \rho h |\hat{F}(\omega)|^2 |H_i(\omega)|^2 dS_i\end{aligned}\quad (\text{D.3})$$

(en utilisant la relation III.1, voir section III.1). Mais, ne connaissant pas la répartition spatiale de la masse ρh , on est obligé de faire une moyenne :

$$\overline{E_c} \approx \frac{|\hat{F}(\omega)|^2}{4} \frac{M_{\text{tot}}}{N} \sum_{i=1}^N |H_i(\omega)|^2 \quad (\text{D.4})$$

où M_{tot} est la masse totale de la structure. Si on associe le terme $\frac{1}{N}$ au signe \sum , la relation D.4 revient à faire la moyenne quadratique des mesures $\langle |H_i^2(\omega)| \rangle_i$. Voulant une relation sur la bande de fréquence $\Delta\omega$, il faut moyenner cette relation, ce qui amène :

$$\overline{W} = 2\overline{E_c} \approx 2 \frac{M_{\text{tot}}}{4} \left\langle |\hat{F}(\omega)|^2 \left\langle |H_i^2(\omega)| \right\rangle_i \right\rangle_{\omega \in \Delta\omega} \quad (\text{D.5})$$

Enfin, la densité spectrale d'énergie est supposée faiblement variable avec la fréquence, ce qui permet d'écrire :

$$\overline{W} \approx \frac{M_{\text{tot}}}{2} \left\langle |\hat{F}(\omega)|^2 \right\rangle_{\omega \in \Delta\omega} \left\langle \left\langle |H_i^2(\omega)| \right\rangle_i \right\rangle_{\omega \in \Delta\omega} \quad (\text{D.6})$$

D.2 Estimation de la puissance injectée

Elle passe par la connaissance de la vitesse $\dot{w}(x_e, t)$ et de la force $F(t)$ au point d'excitation x_e . La puissance injectée instantanée vaut :

$$\pi_{\text{inj}}(t) = \dot{w}(x_e, t) F(t) \quad (\text{D.7})$$

En moyenne temporelle, pour une pulsation ω , cette équation devient :

$$\Pi_{\text{inj}}(\omega) = \frac{1}{2} \Re \left(\hat{w}_e(\omega) \hat{F}^*(\omega) \right) \quad (\text{D.8})$$

La connaissance de la phase relative entre \dot{w}_e et F est donc très importante, du fait de l'extraction de la partie réelle du produit (qui fait sortir le cosinus de cette phase). Pour être certain de bien mesurer cette différence de phase, il est préférable d'utiliser un capteur et une chaîne d'acquisition bien référencés en phase. Or, le Laser et le capteur de force n'ont pas été étalonnés conjointement : leur différence de phase est incertaine. C'est pourquoi on modifie légèrement le montage expérimental en remplaçant le capteur de force par une tête d'impédance qui délivre

les signaux force $F(t)$ et accélération $\ddot{w}_e(t)$ au point d'excitation. La fonction de transfert $H_e(\omega)$ est ensuite calculée (de même que dans l'équation III.1), et on a la relation :

$$\hat{w}_e(\omega) = \hat{F}(\omega)H_e(\omega) \quad (\text{D.9})$$

A partir de la mesure de l'accélération et de la force au point injecté grâce à une tête d'impédance, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{inj}}(\omega) &= \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\hat{w}_e(\omega)}{i\omega} \hat{F}^*(\omega) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re \left(\frac{-i}{\omega} H_e(\omega) \hat{F}(\omega) \hat{F}^*(\omega) \right) \\ &= \frac{1}{2\omega} \Im(H_e(\omega)) |\hat{F}(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Pour une bande de largeur $\Delta\omega$, il faut moyenner cette dernière équation sur toute la bande :

$$\Pi_{\text{inj}} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{\omega} \Im(H_e(\omega)) |\hat{F}(\omega)|^2 \right\rangle_{\omega \in \Delta\omega} \quad (\text{D.11})$$

De nouveau, l'hypothèse de variation lente de $\hat{F}(\omega)$ sur $\Delta\omega$ est faite, ce qui amène :

$$\Pi_{\text{inj}} \approx \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{\omega} \Im(H_e(\omega)) \right\rangle_{\omega \in \Delta\omega} \left\langle |\hat{F}(\omega)|^2 \right\rangle_{\omega \in \Delta\omega} \quad (\text{D.12})$$

D.3 Estimation de l'amortissement structural

Finalement, grâce aux équation D.6 et D.12, l'équation D.1, socle de la méthode PIM, devient :

$$\eta\omega_c M_{\text{tot}} \left\langle \left\langle |H_i^2(\omega)| \right\rangle_i \right\rangle_{\omega \in \Delta\omega} \approx \left\langle \frac{1}{\omega} \Im(H_e(\omega)) \right\rangle_{\omega \in \Delta\omega} \quad (\text{D.13})$$

Une dernière étape consiste à consolider les hypothèses Moyennes Fréquences (forte densité modale et équipartition de l'énergie). Pour l'instant, ayant excité à un point donné, il est probable que certains modes soient défavorisés par cette excitation (proche d'une ligne nodale) tandis que d'autres soient favorisés. Pour lisser cet effet, on moyenne les résultats sur diverses excitations (par exemple 5). Ces 5 points sont choisis de façon "aléatoire" (en évitant, par exemple, de se placer sur les lignes de symétrie du système). En notant H_{ij} le transfert entre l'excitation j et le point i , on a donc pour chaque bande $\Delta\omega$:

$$\eta\omega_c M_{\text{tot}} \left\langle \left\langle \left\langle |H_{ij}^2(\omega)| \right\rangle_i \right\rangle_{\omega \in \Delta\omega} \right\rangle_{j \in \llbracket 1..5 \rrbracket} \approx \left\langle \left\langle \frac{1}{\omega} \Im(H_{e_j}(\omega)) \right\rangle_{\omega \in \Delta\omega} \right\rangle_{j \in \llbracket 1..5 \rrbracket} \quad (\text{D.14})$$

La méthode de la PIM dans ce cas expérimental revient donc à faire d'un côté la moyenne sur les sources de la moyenne fréquentielle de la moyenne des carrés des modules des FRF aux points de mesures, et de l'autre côté à la moyenne sur les sources de la moyenne fréquentielle de la partie réelle de la FRF en vitesse au point d'excitation (ou le rapport de la partie imaginaire de la FRF en accélération et de la pulsation).

Annexe E : Calcul analytique des modes propagatifs

La section IV.3 proposait une méthode basée sur un calcul éléments-finis, dite méthode éléments-finis propagative, pour calculer les équations de dispersion des modes propagatifs dans les parois raidies. Cette annexe propose quant à elle une approche entièrement analytique, dans le cas particulier d'un assemblage de poutres à section constante posées sur une plaque isotrope. Cette annexe est directement empruntée à la thèse de L. Houillon [19], elle-même un résumé de l'article de Fahy et Lindqvist [69]. Cet article fondateur, écrit en 1976, développe une série de calculs analytiques et d'astuces mathématiques. Le lecteur soucieux de vérifier le développement des calculs permettant les écritures de cette section sont invités à se reporter sur l'article d'origine.

Le but de ce paragraphe est la caractérisation du comportement vibratoire d'un guide d'ondes (poutre) équipé d'une paroi (plaque). Seules les ondes de flexion de la plaque sont considérées, puisque la géométrie de la structure permet de négliger les ondes longitudinales et transverses. Cette hypothèse est correcte si les longueurs d'onde rencontrées sont supérieures à l'épaisseur de la plaque. Soit donc une plaque homogène isotrope de largeur $2L$, de longueur x infinie, munie sur ses deux bords $y = -L$ et $y = L$ d'une poutre. Le mouvement de flexion de la plaque est noté w , celui de la poutre w_b , et le mouvement de torsion de la poutre est noté θ_b (*c.f.* figure E.1).

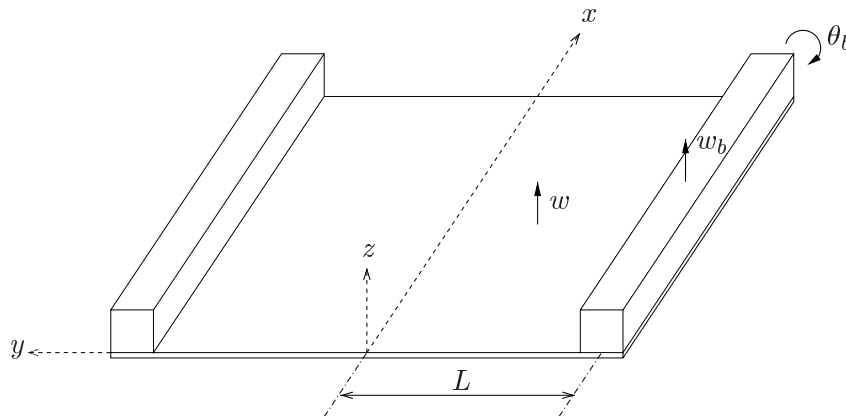


FIG. E.1: Définition de la plaque raidie

Equations du mouvement de la plaque et de la poutre Sous les hypothèses de Love-Kirchhoff, l'équation du mouvement en flexion de la plaque s'écrit :

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{E.1})$$

L'hypothèse de guide d'ondes dans la direction x (*c.f.* équation IV.17 page 103) est appliquée. Dans ce cas, elle s'écrit :

$$w = w_p e^{\alpha y} e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{E.2})$$

L'équation de dispersion dans la plaque est donc :

$$\alpha^4 - 2\alpha^2 k^2 + k^4 - k_p^4 = 0 \quad (\text{E.3})$$

avec $k_p^4 = \rho h \omega^2 / D$, le nombre d'onde de la plaque en flexion. Elle admet 4 solutions :

- λ_1 et $-\lambda_1$ avec $\lambda_1^2 = k^2 + k_p^2$
- λ_2 et $-\lambda_2$ avec $\lambda_2^2 = k_p^2 - k^2$

La solution générale de la plaque en flexion devient :

$$w(x, y, t) = \left(A^{(p)} \cosh \lambda_1 y + A^{(i)} \sinh \lambda_1 y + B^{(i)} \sin \lambda_2 y + B^{(p)} \cos \lambda_2 y \right) e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{E.4})$$

(où les exposants ^(p) et ⁽ⁱ⁾ signifient Paire et Impaire).

Quant à la poutre, il faut distinguer les ondes de flexion et de torsion. Les équations du mouvement sont donc :

$$\bullet \text{ pour la flexion} \quad EI \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{x=L^-} \quad (\text{E.5})$$

$$\bullet \text{ pour la torsion} \quad GJ \frac{\partial^2 \theta_b}{\partial x^2} - \rho J \frac{\partial^2 \theta_b}{\partial t^2} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=L^-} \quad (\text{E.6})$$

où I est l'inertie géométrique par rapport à l'axe yy' , S la section de la poutre, et J l'inertie géométrique en torsion de la poutre. Puisque la poutre se comporte comme un guide d'ondes, les solutions générales sont respectivement en flexion et en torsion :

$$w_b = \overline{w}_b e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \theta_b = \overline{\theta}_b e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{E.7})$$

On étudie alors séparément les modes symétriques et antisymétriques.

Etude des modes symétriques Le mouvement de flexion de la plaque se simplifie :

$$w(x, y, t) = \left(A^{(p)} \cosh \lambda_1 y + B^{(p)} \cos \lambda_2 y \right) e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{E.8})$$

La continuité des déplacements entre la poutre et la plaque à l'ordonnée $y = L$ implique que :

$$\overline{w}_b = A^{(p)} \cosh \lambda_1 L + B^{(p)} \cos \lambda_2 L \quad (\text{E.9})$$

$$\overline{\theta}_b = A^{(p)} \lambda_1 \sinh \lambda_1 L - B^{(p)} \lambda_2 \sin \lambda_2 L \quad (\text{E.10})$$

Dans la suite de l'exposé, les notations suivantes seront utilisées :

$$\begin{aligned} C_1 &= \cosh \lambda_1 L & C_2 &= \sinh \lambda_1 L \\ C_3 &= \sin \lambda_2 L & C_4 &= \cos \lambda_2 L \end{aligned}$$

ce qui permet de récrire les équations E.9 et E.10 :

$$\begin{aligned} \overline{w}_b &= A^{(p)} C_1 + B^{(p)} C_4 \\ \overline{\theta}_b &= A^{(p)} \lambda_1 C_2 - B^{(p)} \lambda_2 C_3 \end{aligned}$$

L'utilisation de ces notations et de la forme des champs (en exponentielles) permet de récrire les équations E.5 et E.6 sous la forme :

$$\begin{aligned} &A^{(p)} (C_1(k^4 - k_b^4) - \phi \lambda_1^3 C_2 + \phi(2 - \nu)k^2 \lambda_1 C_2) \\ &+ B^{(p)} (C_4(k^4 - k_b^4) - \phi \lambda_2^3 C_3 - \phi(2 - \nu)k^2 \lambda_2 C_3) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

$$\begin{aligned} &A^{(p)} (\lambda_1 C_2(k^2 - k_T^2) + \tau \lambda_1^2 C_1 - \tau \nu k^2 C_1) \\ &+ B^{(p)} (-\lambda_2 C_3(k^2 - k_T^2) - \tau \lambda_2^2 C_4 - \tau \nu k^2 C_4) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

où les quantités suivantes ont été définies :

$$\begin{aligned} k_b^4 &= \rho S \omega^2 / EI & : & \text{ nombre d'onde de la poutre libre en flexion} \\ \phi &= D / EI & : & \text{ rapport des flexions de la plaque et de la poutre} \\ k_T^2 &= \rho \omega^2 / G & : & \text{ nombre d'onde de la poutre libre en torsion} \\ \tau &= D / GJ & : & \text{ rapport de la flexion de la plaque et de la torsion de la poutre} \end{aligned}$$

Le système d'équations (E.11,E.12) est de la forme $\mathbb{M} \cdot \mathbb{X} = 0$ (avec ${}^t \mathbb{X} = [A^{(p)} \ B^{(p)}]$), qui admet des solutions non nulles seulement si le déterminant de la matrice \mathbb{M} est nul, soit :

$$\begin{aligned} &\lambda_2 C_1 C_3 ((k^4 - k_b^4)(k^2 - k_T^2) - \phi \tau (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + (2 - \nu)k^2 \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \nu k^2 - (2 - \nu) \nu k^4)) + \\ &\lambda_1 C_2 C_4 ((k^4 - k_b^4)(k^2 - k_T^2) - \phi \tau (\lambda_1^2 \lambda_2^2 - (2 - \nu)k^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \nu k^2 - (2 - \nu) \nu k^4)) + \\ &2k_p^2 (\tau C_1 C_4 (k^4 - k_b^4) - \phi \lambda_1 \lambda_2 C_2 C_3 (k^2 - k_T^2)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Etude des modes antisymétriques En ce qui concerne les modes antisymétriques, le mouvement de flexion de la plaque est régi par l'égalité :

$$w(x, y, t) = \left(A^{(i)} \sinh \lambda_1 y + B^{(i)} \sin \lambda_2 y \right) e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{E.14})$$

A l'ordonnée $y = L$, il y a continuité des déplacements entre la poutre et la plaque, ce qui se traduit par les relations :

$$\overline{w}_b = A^{(i)} C_2 + B^{(i)} C_3 \quad (\text{E.15})$$

$$\overline{\theta}_b = A^{(i)} \lambda_1 C_1 + B^{(i)} \lambda_2 C_4 \quad (\text{E.16})$$

Les équations E.5 et E.6 s'écrivent alors :

$$A^{(i)} (C_2(k^4 - k_b^4) - \phi \lambda_1^3 C_1 + \phi(2 - \nu)k^2 \lambda_1 C_1) + B^{(i)} (C_3(k^4 - k_b^4) + \phi \lambda_2^3 C_4 + \phi(2 - \nu)k^2 \lambda_2 C_4) = 0 \quad (\text{E.17})$$

$$A^{(i)} (\lambda_1 C_1(k^2 - k_T^2) + \tau \lambda_1^2 C_2 - \tau \nu k^2 C_2) + B^{(i)} (\lambda_2 C_4(k^2 - k_T^2) - \tau \lambda_2^2 C_3 - \tau \nu k^2 C_3) = 0 \quad (\text{E.18})$$

L'équation de dispersion dans le cas antisymétrique est donné par :

$$\begin{aligned} & \lambda_1 C_1 C_3 ((k^4 - k_b^4)(k^2 - k_T^2) + \phi \tau (-\lambda_1^2 \lambda_2^2 + (2 - \nu)\nu k^4 + 2\lambda_2^2 k^2 - 2\nu k_p^2 k^2)) + \\ & \lambda_2 C_2 C_4 (-(k^4 - k_b^4)(k^2 - k_T^2) + \phi \tau (\lambda_1^2 \lambda_2^2 - (2 - \nu)\nu k^4 + 2\lambda_1^2 k^2 - 2\nu k_p^2 k^2)) + \\ & 2k_p^2 (\tau C_2 C_3 (k^4 - k_b^4) + \phi \lambda_1 \lambda_2 C_1 C_4 (k^2 - k_T^2)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

On peut remarquer que les équations E.13 et E.19 sont des polynômes d'ordre 1 en ϕ et τ .

- les termes constants représentent la flexion de la plaque
- les termes en ϕ représentent le couplage entre la flexion de la plaque et celle de la poutre
- les termes en τ représentent le couplage entre la flexion de la plaque et la torsion de la poutre
- les termes en $\phi\tau$ représentent le couplage résiduel entre la flexion et la torsion de la poutre

E.1 Application au banc évolutif du chapitre IV.4

Calcul des paramètres du modèle analytique

On applique ces calculs dans le cas des parois raidies vues au chapitre IV.4. Les caractéristiques des ces plaques sont rappelées dans le tableau suivant E.a :

<i>Voile</i>				
ρ	E	ν	G	h
2800 kgm ⁻³	75 GPa	0,33	28 GPa	1,25 mm

<i>Raidisseurs</i>					
ρ	E	ν	G	a	b
2800 kgm ⁻³	75 GPa	0,33	28 GPa	10 mm	5 mm

<i>Périodicité</i>		
Etape 1	Etape 2	Etape 3
$p = 40$ cm	$p = 20$ cm	$p = 10$ cm

TAB. E.a: *Caractéristiques de la plaque et des raidisseurs pour le banc évolutif*

Les paramètres des équations E.13 et E.19 sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 13,7 \text{ Nm} \\
 S &= a(b+h) = 6,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \\
 I &= \frac{a(b+h)^3}{12} = 2,03 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4 \\
 J &= I + \frac{a^3(b+h)}{12} = 7,24 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

Les paramètres “avancés” deviennent alors :

$$\begin{aligned}
 k_p &= \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}} \sqrt{\omega} = 0,711 \sqrt{\omega} \\
 k_b &= \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}} \sqrt{\omega} = 0,327 \sqrt{\omega} \\
 k_T &= \sqrt{\frac{\rho}{G}} \omega = 3,15 \cdot 10^{-4} \omega \\
 \phi &= \frac{D}{EI} = 0,898 \text{ m}^{-1} \\
 \tau &= \frac{D}{GJ} = 0,671 \text{ m}^{-1}
 \end{aligned}$$

Dans l'article de Fahy [69], le paramètre L est défini comme la distance séparant l'axe de symétrie du système et la fibre neutre de la poutre. Cependant, la continuité des déplacements des équations E.9 et E.10 est vraie à l'interface entre la plaque et la poutre. Il semble donc plus judicieux d'utiliser pour le paramètre L la distance séparant l'axe de symétrie et le *bord* de la poutre (figure E.2).

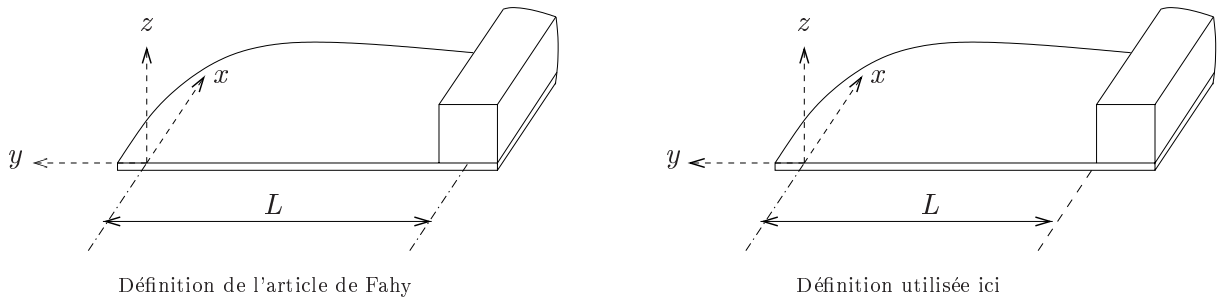


FIG. E.2: Zoom sur la définition du paramètre L

Cette définition de L donne la relation :

$$L = \frac{p-a}{2} \quad (\text{E.20})$$

soit, pour les trois étapes du banc évolutif :

Etape 1	Etape 2	Etape 3
$L = 0,195 \text{ m}$	$L = 0,095 \text{ m}$	$L = 0,045 \text{ m}$

Comparaison des résultats

La comparaison entre les résultats de la méthode EF-propagative et de la méthode analytique sont présentés sur la figure E.3. Les courbes noires représentent les résultats de l'équation de Fahy (modes symétriques et antisymétriques). Les pointillés représentent les équations de dispersion "pures" : à faible nombre d'onde, la torsion de la poutre (droite $k_T \propto \omega$), à nombre d'onde moyen, la flexion de la poutre (parabole $k_b \propto \sqrt{\omega}$), et à nombre d'onde fort, la flexion de la plaque seule (parabole $k_p \propto \sqrt{\omega}$).

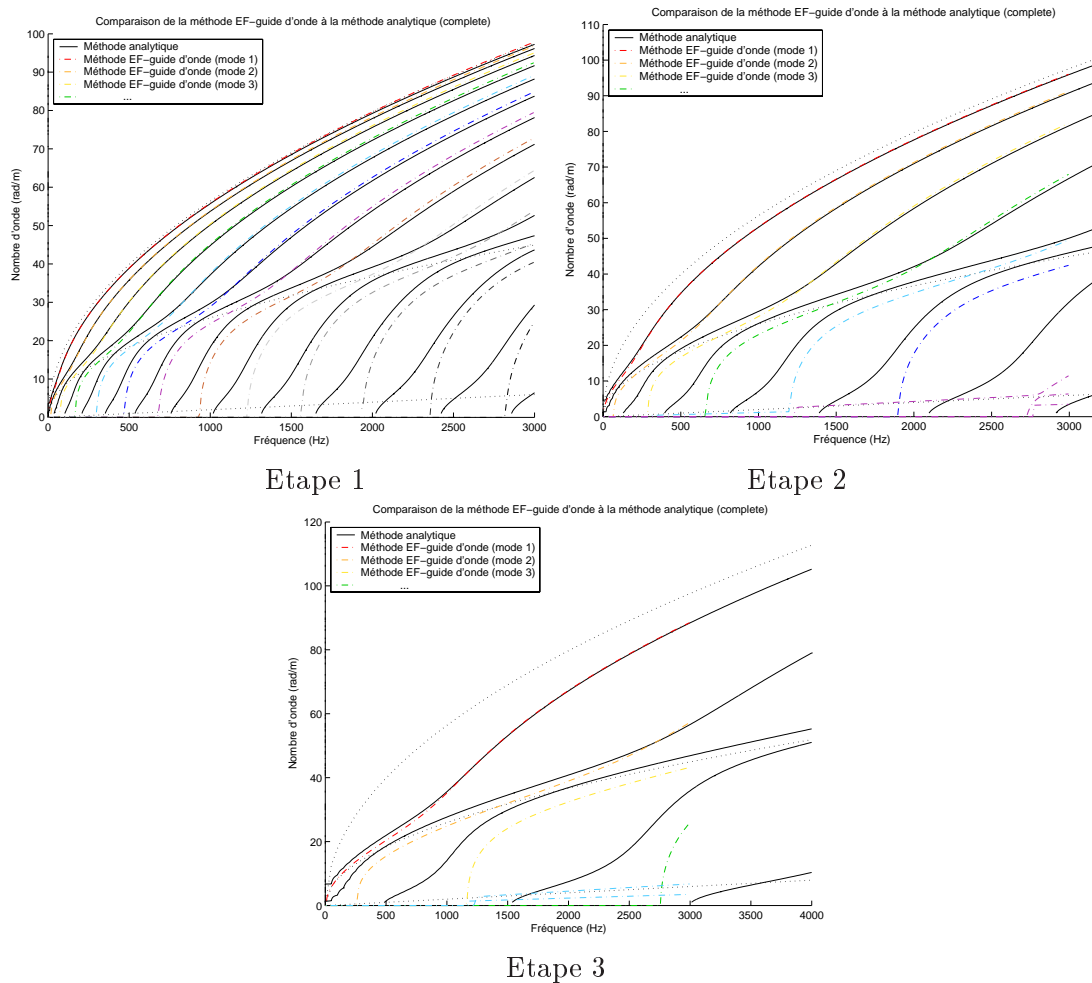
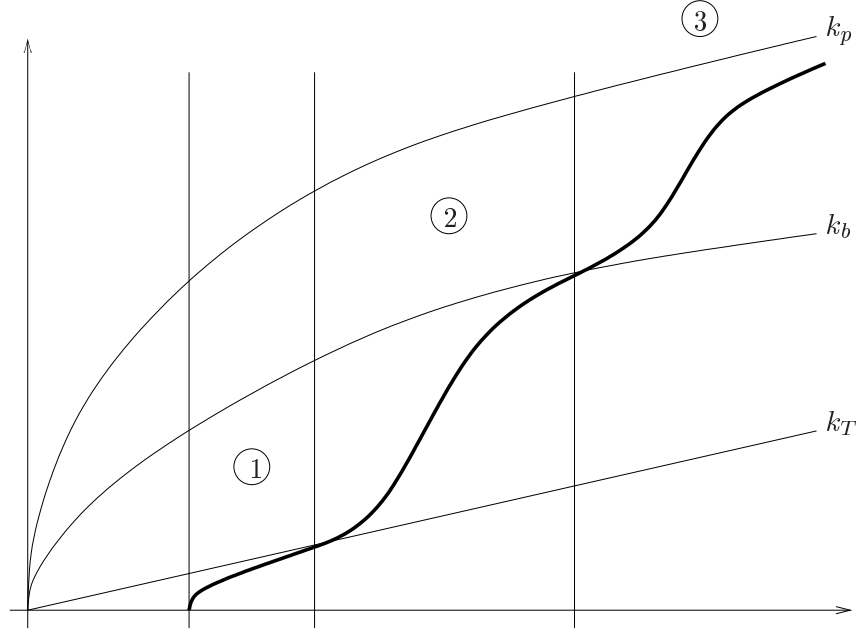


FIG. E.3: *Comparaison méthode analytique (Fahy) méthode Eléments-Finis/guide d'onde*

Les modes analytiques présentent deux paliers qui définissent trois zones. Les paliers arrivent lorsque l'équation de dispersion du mode s'approche d'une équation de dispersion de la poutre (torsion ou flexion). La première zone correspond donc à un mouvement principalement gouverné par la torsion de la poutre. La seconde zone correspond à un mouvement où la flexion de la poutre domine. Enfin, la troisième zone est dominé par le mouvement de flexion de la plaque (les raidisseurs sont quasiment immobiles, comme il a été vu au chapitre IV.3). Ces constatations sont synthétisées sur le schéma de la figure E.4.



- 1 : Mouvement dominé par la **torsion** de la poutre
 2 : Mouvement dominé par la **flexion** de la **poutre**
 3 : Mouvement dominé par la **flexion** de la **plaque** (la poutre est immobile)

FIG. E.4: *Schéma d'explication du comportement des modes dans le modèle analytique*

De leur côté, les modes solution de la méthode EF-propagative n'ont qu'un palier, correspondant à la flexion de la poutre. La correspondance semble assez bonne dans les domaines (2) et (3) (flexion de la poutre, flexion de la plaque).

E.2 Neutralisation du couplage avec la torsion

Comme le propose d'ailleurs Houillon [19], on va supprimer le couplage avec la torsion de la poutre. Il suffit pour cela de poser :

$$\tau = 0 \quad (\text{E.21})$$

Les équation E.13 et E.19 se simplifient alors respectivement en :

$$\left(\frac{C_4}{C_3 \lambda_2} + \frac{C_1}{C_2 \lambda_1} \right) (k^4 - k_b^4) - 2k_p^2 \phi = 0 \quad (\text{E.22})$$

$$\left(\frac{C_3}{C_4 \lambda_2} - \frac{C_2}{C_1 \lambda_1} \right) (k^4 - k_b^4) + 2k_p^2 \phi = 0 \quad (\text{E.23})$$

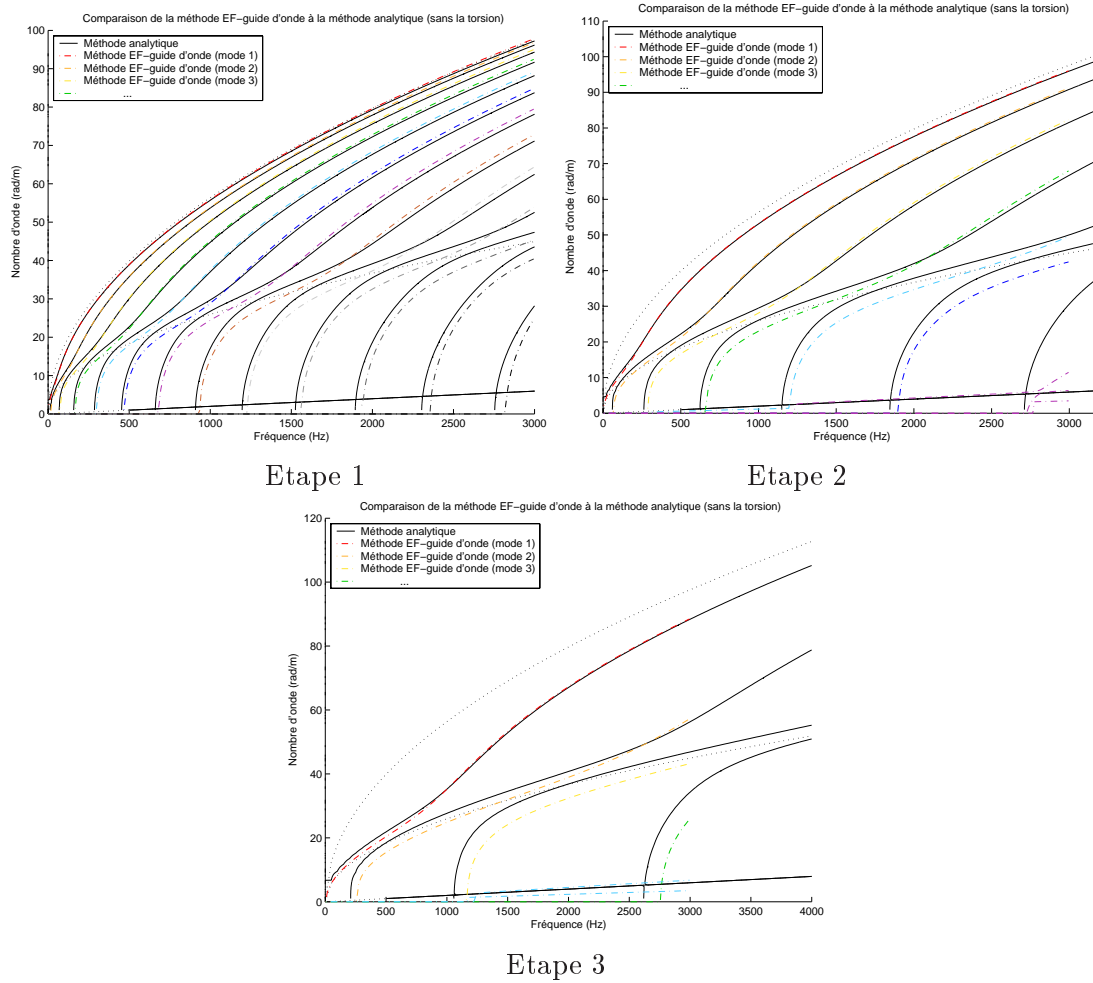


FIG. E.5: *Comparaison méthode analytique (Fahy) méthode Eléments-Finis/guide d'onde*

Les résultats sont alors plus convaincants (figure E.5). Les écarts sont faibles et concentrés dans la zone de dominance de la poutre. Ces écarts concernent la fréquence d'apparition d'un mode, et il semble que la méthode analytique surestime légèrement les nombres d'ondes dans cette partie de l'équation de dispersion. Mais il est nécessaire de rappeler que ce guide d'onde a été calculé pour appréhender le comportement moyenne fréquences des *plaques raidies*. Or, on a vu que dans ce cas, les faibles nombres d'onde sont masqués par l'orthotropie structurale. Dans le plan d'onde associé à une telle plaque, les modes propagatifs apparaissent comme des segments de droite, uniquement s'ils émergent de l'orthotropie structurale. En dessous de cette limite, les différences entre les modèles analytique et EF propagatifs n'ont donc aucune importance.