

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR

Spécialité : Acoustique

par

Emeline REBOUL

Ingénieur ECL

VIBROACOUSTIQUE DES MÉCANISMES À HAUTES FRÉQUENCES

Application aux transmissions par engrenages

Soutenue publiquement le 21 octobre 2005 devant la commission d'examen composée de

MM.	P. BOUVET	Examineur	Docteur-Ingénieur	Vibratec, Ecully
	J.-L. GUYADER	Président du jury	Professeur	LVA, INSA de Lyon
	A. LE BOT	Directeur de thèse	Chargé de Recherche	LTDS, ECLyon
	D. LE HOUEDÉC	Rapporteur	Professeur	Institut GeM, ECNantes
	J.-C. PASCAL	Rapporteur	Professeur	LAUM, Université du Maine
	J. PERRET-LIAUDET	Directeur de thèse	Maître de Conférences	LTDS, ECLyon

École Centrale de Lyon

Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

A	ALLARD Bruno	Maître de Conférences	CEGELY	INSA
	AIT-EL-HADJ Smail	Enseignant	GRESTI	ECL
	AURIOL Philippe	Professeur	CEGELY	ECL
B	BAILLY Christophe	Professeur	LMFA	ECL
	BATAILLE Jean	Professeur	LMFA	UCBL
	BAYADA Guy	Professeur	MAPLY	INSA
	BENHADID Hamda	Professeur	LMFA	UCBL
	BERGHEAU Jean-Michel	Professeur	LTDS	ENISE
	BEROUAL Abderrahmane	Professeur	CEGELY	ECL
	BERTOGLIO Jean-Pierre	Directeur de Recherche	LMFA	CNRS
	BLANC-BENON Philippe	Directeur de Recherche	LMFA	CNRS
	BUFFAT Marc	Professeur	LMFA	UCBL
	BURAIIS Noël	Maître de Conférences	CEGELY	ECL
	BUREAU Jean-Claude	Professeur	CEGELY	INSA
C	CAMBON Claude	Directeur de Recherche	LMFA	CNRS
	CAMBOU Bernard	Professeur	LTDS	ECL
	CARRIERE Philippe	Chargé de Recherche	LMFA	CNRS
	CHAMBAT Michèle	Professeur	MAPLY	UCBL
	CHAMPAGNE Jean-Yves	Maître de Conférences	LMFA	INSA
	CHAMPOUSSIN Jean-Claude	Professeur	LMFA	ECL
	CHANTE Jean-Pierre	Professeur	CEGELY	INSA
	CHEN Liming	Professeur	ICTT	ECL
	CLERC Guy	Professeur	CEGELY	UCBL
	CLOAREC Jean-Pierre			

	COQUILLET Bernard	Maître de Conférences	LTDS	ECL
	CREPEL Pierre	Chargé de Recherche	MAPLY	CNRS
D	DAVID Bertrand	Professeur	ICTT	ECL
E	ESCUDIE Dany	Directeur de Recherche	LMFA	CNRS
F	FERRAND Pascal	Directeur de Recherche	LMFA	CNRS
	FOUVRY Siegfried	Chargé de Recherche	LTDS	CNRS
G	GAFFIOT Frédéric	Professeur	LEOM	ECL
	GAGNAIRE Alain	Maître de Conférences	LEOM	ECL
	GALLAND Marie-Annick	Maître de Conférences	LMFA	ECL
	GARRIGUES Michel	Directeur de Recherche	LEOM	CNRS
	GAY Bernard	Professeur	LMFA	UCBL
	GENCE Jean-Noël	Professeur	LMFA	UCBL
	GRENET Geneviève	Directeur de Recherche	LEOM	CNRS
	GUIRALDENQ Pierre	Professeur émérite	IFOS	ECL
H	HAMADICHE Mahmoud	Maître de Conférences	LMFA	UCBL
	HEIBIG Arnaud	Professeur	MAPLY	INSA
	HELLOUIN Yves	Maître de Conférences		ECL
	HENRY Daniel	Chargé de Recherche	LMFA	CNRS
	HERTZ Dominique	PAST	LTDS	ECL
	HOLLINGER Guy	Directeur de Recherche	LEOM	CNRS
I	ICHCHOU Mohamed	Maître de Conférences	LTDS	ECL
J	JAFFREZIC-RENAULT Nicole	Directeur de Recherche	CEGELY	CNRS
	JEANDEL Denis	Professeur	LMFA	ECL
	JEZEQUEL Louis	Professeur	LTDS	ECL
	JOSEPH Jacques	Professeur	LEOM	ECL
	JUVE Daniel	Professeur	LMFA	CNRS
	JUVE Denyse	Ingénieur de Recherche	LMFA	ECL
K	KAPSA Philippe	Directeur de Recherche	LTDS	CNRS
	KRÄENBÜHL Laurent	Directeur de Recherche	CEGELY	ECL
	KRAWCZYK Stanislas	Directeur de Recherche	LEOM	CNRS
L	LACHAL Aimé	PRAG	MAPLY	INSA

	LANCE Michel	Professeur	LMFA	UCBL
	LANGLADE-BOMBA Cécile	Maître de Conférences	LTDS	ECL
	LE BOT Alain	Chargé de Recherche	LTDS	ECL
	LE HELLEY Michel	Professeur		ECL
	LE RIBAUT Catherine	Chargé de Recherche	LMFA	CNRS
	LEBOEUF Francis	Professeur	LMFA	ECL
	LOHEAC Jean-Pierre	Maître de Conférences	MAPLY	ECL
	LOUBET Jean-Luc	Directeur de Recherche	LTDS	ECL
	LYONNET Patrick	Professeur	LTDS	ENISE
M	MAITRE Jean-François	Professeur émérite	MAPLY	ECL
	MARION Martine	Professeur	MAPLY	ECL
	MARTELET Claude	Professeur	CEGELY	ECL
	MARTIN Jean-Michel	Professeur	LTDS	ECL
	MARTIN Jean-René	Professeur émérite	LEOM	ECL
	MASSON Jean-Pierre	Professeur	CEGELY	UCBL
	MATHIA Thomas	Directeur de Recherche	LTDS	CNRS
	MOREL Robert	Professeur	LMFA	INSA
	MOUSSAOUI Mohand	Professeur	MAPLY	ECL
	MUSY François	Maître de Conférences	MAPLY	ECL
N	NICOLAS Alain	Professeur	CEGELY	ECL
	NICOLAS Laurent	Directeur de Recherche	CEGELY	CNRS
P	PERKINS Richard	Professeur	LMFA	ECL
	PERRET-LIAUDET Joël	Maître de Conférences	ECL	
	PHANER-GOUTORBE Magali	Maître de Conférences	LEOM	ECL
	POUSIN Jérôme	Professeur	MAPLY	INSA
	PONSONNET Laurence	Maître de Conférences	CEGELY	ECL
	PREVOT Patrick	Professeur	ICTT	INSA
R	REBOUX Jean-Luc	Professeur	LTDS	ENISE
	RETIF Jean-Marie	Maître de Conférences	CEGELY	INSA
	ROBACH Yves	Professeur	LEOM	ECL
	ROGER Michel	Professeur	LMFA	ECL
	ROJAT Gérard	Professeur	CEGELY	UCBL
	ROUSSEAU Jacques	Professeur émérite	LTDS	ENISE
	ROUY Elisabeth	Professeur	MAPLY	ECL
S	SALVIA Michelle	Maître de Conférences	LTDS	ECL

	SANDRI Dominique	Maître de Conférences	MAPLY	UCBL
	SCHATZMAN Michelle	Directeur de Recherche	MAPLY	CNRS
	SCOTT Julian	Professeur	LMFA	ECL
	SIDOROFF François	Professeur	LTDS	ECL
	SIMOENS Serge	Chargé de Recherche	LMFA	CNRS
	SOUTEYRAND Eliane	Directeur de Recherche	LEOM	CNRS
	STREMSDOERFER Guy	Professeur	LTDS	ECL
	SUNYACH Michel	Professeur	LMFA	UCBL
T	TARDY Jacques	Directeur de Recherche	LEOM	CNRS
	THOMAS Gérard	Professeur	AGEP UCBL	ECL
	THOUVEREZ Fabrice	Maître de Conférences	LTDS	ECL
	TREBINJAC Isabelle	Maître de Conférences	LMFA	ECL
	TREHEUX Daniel	Professeur	LTDS	ECL
V	VANNES André-Bernard	Professeur émérite	LTDS	ECL
	VIKTOROVITCH Pierre	Directeur de Recherche	LEOM	CNRS
	VINCENT Léo	Professeur	LTDS	ECL
	VOLPERT Vitaly	Directeur de Recherche	MAPLY	CNRS
Z	ZAHOUANI Hassan	Professeur	LTDS	ENISE

*Ce qui embellit le désert c'est qu'il cache un puits quelque part ...
Le Petit Prince, Antoine de Saint Exupéry*



Ce travail de thèse a été réalisé au sein de l'équipe Mécanismes du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS, UMR CNRS ECL/ENISE 5513) de l'École Centrale de Lyon. Je tiens à remercier Messieurs Philippe Kapsa et Denis Mazuyer, directeur et futur directeur de ce laboratoire, pour leur accueil, pour leur soutien tout au long de ces trois années, et pour leur présence et leurs conseils à des étapes importantes de ce travail.

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à Joël Perret-Liaudet et Alain Le Bot qui ont assuré l'encadrement scientifique et la direction de cette thèse : merci pour l'enrichissement scientifique que vous m'avez apporté et pour la confiance que vous m'avez accordée.

Je remercie le Professeur Jean-Louis Guyader de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je suis très reconnaissante envers les Professeurs Donatien Le Houédec de l'École Centrale de Nantes et Jean-Claude Pascal de l'Université du Maine pour l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mon travail en acceptant de rapporter ce manuscrit. Enfin, je remercie également très sincèrement Mr Pascal Bouvet de l'entreprise Vibratec pour sa collaboration et son apport au cours de ces trois années, et pour avoir accepté d'être membre du jury.

J'adresse toute ma reconnaissance au Professeur Haruo Houshoh du Tokyo Institute of Technology (Tokyo) et à son équipe qui m'ont accueillie au sein de leur laboratoire dans le cadre de ma thèse. Je les remercie pour m'avoir aidée et pour m'avoir permis de découvrir leur magnifique pays.

Je remercie vivement les membres de l'équipe Mécanismes et de l'équipe d'enseignement Technologie Mécanique qui m'a accueillie dans le cadre de mon monitorat. Merci à Emmanuel Rigaud pour sa vraie gentillesse, pour sa grande disponibilité et pour son aide précieuse aussi bien dans la préparation de mes enseignements que dans la réalisation de calculs de thèse. Merci à Bertrand Houx et Christophe Janolin pour leur accompagnement lors de fabuleuses séances de TP à 8h lorsque ce n'était pas un vendredi de vacances, merci pour m'avoir fait profiter de

vosre expérience d'enseignant et pour nos réconfortantes discussions de coin de porte.

Au cours de ces trois années passées au sein du laboratoire, j'ai eu la chance de côtoyer de nombreux enseignants, chercheurs, thésards, et administratifs dont la compagnie m'a enrichie aussi bien professionnellement que personnellement. Beaucoup, consciemment ou inconsciemment, m'ont souvent permis au cours de discussions anodines de retrouver la motivation pour poursuivre et mener ce projet jusqu'au bout. J'ai aimé les repas, les pique-niques, fêtes de Noël et autres évènements que nous avons partagés ensemble. Certaines de ces personnes resteront plus que de simples compagnons d'une route de trois années mais de véritables amis. Je crains de ne pouvoir les citer toutes ici, ou pire d'en oublier, mais je voudrais malgré tout témoigner toute mon amitié à certaines d'entre elles :

- Suzanne, mon ange gardien, tu m'as soutenue pendant trois ans comme jamais je n'aurais pu l'espérer. Merci de tout coeur,
- Marie-Maud (ma meilleure ennemie !) et Ronan, je suis heureuse d'avoir fait tout ce chemin avec vous,
- Clotilde, Marlène, Viviane, Christelle, Julia, Delphine et Elodie, votre amitié est un cadeau. Merci Elodie et Delphine pour m'avoir permis de partager votre maternité, meilleurs voeux pour la petite Clémence et pour ce bout de chou qui ne devrait plus tarder maintenant. Clotilde, je sais que tu es une enseignante magnifique, donne-toi juste les moyens d'y croire. Bonne route pour la suite ...
- Merci Isa pour tous ces moments partagés,
- Jean-Marie, je pense sincèrement que je n'en serais pas là si tu n'avais pas été là, présent à chacun de mes appels, attentif à chacune de mes histoires. Le fauteuil noir de mon bureau te restera à jamais associé et sera pour moi le souvenir d'échanges précieux. Tâche de ne pas t'envoler trop loin, trop longtemps ...

J'adresse une pensée toute particulière à tous les thésards passés ou présents avec qui j'ai partagé cette aventure : Alexandra, Anne-Laure, Cédric, Christophe et Sandrine, Cyril, Etienne, Hugues, Josselin, Karim, Louis, Lucile, Marion, Mélanie, Nicolas, Pierre, Pierre-Henry, Soline, Wallerand.

Ces remerciements sont également l'occasion pour moi de témoigner tout mon amour à ma famille qui m'a conduite jusque là, et sur qui je sais que je pourrai toujours compter. Merci à mes parents pour leur patience, sans doute redoublée ces trois dernières années, pour leur confiance et leur soutien constant. Merci à ma petite soeur Nadège pour sa présence de chaque instant, tu as choisi d'emprunter la même route et tu sais que je serai là pour toi. Merci à Véronique, Jean-Louis, Matthieu, Raphaëlle et Julien, Alice et Gauthier, Pauline qui ont subi par alliance les effets de ce travail et m'ont soutenue malgré tout. Enfin, tout au long de ces trois années, dans les moments de joie comme dans les instants de doute, une personne a toujours été à mes côtés et je ne saurai clore ce chapitre sans la citer : merci Vianney.

Résumé

Nous proposons une méthode afin de prédire le bruit rayonné en hautes fréquences par une structure qui vibre en basses fréquences. Cette méthode est qualifiée d'*hybride* car elle couple deux méthodes valables dans des domaines fréquentiels distincts. Le cas d'application traité est celui d'une boîte de vitesses au sein d'un compartiment moteur. Le comportement vibratoire du carter est induit par une excitation interne générée par le processus d'engrènement, l'erreur statique de transmission. Il est prédit par la méthode spectrale itérative qui repose sur une technique originale de résolution des équations à coefficients périodiques. Des sources équivalentes sont introduites afin de reproduire le bruit rayonné par le carter en champ libre. Chaque source est la somme des contributions d'une source de pression, d'une source de vitesse et d'une source d'intensité. Des formulations analytiques pour l'amplitude et la directivité de ces sources sont proposées. Elles sont ensuite utilisées dans la méthode du transfert radiatif qui s'inspire de l'écriture des échanges radiatifs en thermique et conduit au champ acoustique au sein du compartiment moteur. Cette méthode a été étendue dans ce travail par l'introduction de la diffraction acoustique. La méthode hybride a été validée pour une plaque simple bafflée et pour une plaque raidie dont les champs de vitesse et de pression pariétaux sont évalués expérimentalement, par comparaison avec la méthode des éléments finis de frontière. Enfin, l'application à une boîte de vitesses intégrée à un groupe motopropulseur placé au sein d'un encapsulage moteur de véhicule poids lourd a été résolue. L'intérêt de la méthode hybride est de permettre le couplage d'une méthode vibratoire dédiée aux basses fréquences à une méthode acoustique dédiée aux hautes fréquences qui conduit à des temps de calcul réduits par rapport aux méthodes d'éléments finis de frontière.

Mots clés : Vibroacoustique, Système paramétrique, Méthode hybride, Diffraction, Engrenages, Boîte de vitesses.

Abstract

A new method is proposed to predict the noise radiated in the high frequency range by a structure vibrating in the low frequency range. This method is called *hybrid* as it couples two methods valid on different frequency ranges. The application we propose is concerned with the noise radiated by the casing of a gearbox inside an engine compartment. The vibratory behaviour of the casing is induced by the excitation produced by meshing process, the static transmission error. It is computed with an original method allowing the solving of parametrically excited systems. Equivalent energy sources are introduced to reproduce the noise radiated in the free field by the casing of the gearbox. Each source is the sum of three contributions due to a pressure source, a velocity source and an intensity source. Analytical formulations for the amplitudes and directivity diagrams of these sources are proposed. They are then used in the radiative transfer method based on the radiative transfer exchanges in thermics which estimates the acoustical field inside the engine compartment. This method is generalized in this work to account for acoustical diffraction. The hybrid method has been applied to a baffled plate, and to a ribbed plate whose surface vibratory and pressure fields are previously measured, and results have been compared to those given by the boundary element methods. Finally, the case of a gearbox inside the engine compartment of a truck is solved. The main interest of the hybrid method is to couple a low frequency vibratory method to a high frequency acoustical method which leads to reduced computational times compared to the boundary element methods.

Keywords : Vibroacoustics, Parametric system, Hybrid method, Diffraction, Gears.

Sommaire

Liste des personnes de l'ECLyon habilitées à diriger des recherches	i
Remerciements	vii
Résumé	ix
Abstract	xi
Liste des figures	xix
Liste des tableaux	xxiii
Nomenclature	xxv
Introduction	1
I Généralités sur la vibroacoustique des transmissions par engrenages	5
1 Sources d'excitation	8
1.1 Les principales sources d'excitation	8
1.2 L'erreur statique de transmission sous charge	9
1.2.1 L'erreur de transmission : définitions	9
1.2.2 Les origines de l' erreur statique de transmission sous charge . .	10
1.2.3 Illustrations graphiques	14
1.2.4 Le spectre de l'erreur statique de transmission sous charge . . .	16
2 Comportement dynamique des transmissions par engrenages	17
2.1 Réponse multi-fréquentielle	17
2.2 Résonances et instabilités paramétriques	17
2.3 Phénomènes non linéaires	18
2.4 Phénomènes d'amplification vibratoire pour certains régimes critiques . .	18
2.5 Sources d'amortissement	19
3 Comportement acoustique des transmissions	20
3.1 Principaux phénomènes mis en jeu	20
3.2 Description du comportement acoustique d'une transmission	21

4	Conclusion	23
	Bibliographie	25
II	Modèle dynamique de la transmission et méthode spectrale itérative	29
1	Etude bibliographique	31
1.1	Modèles dynamiques	31
1.1.1	Modélisation de l'interface d'engrènement	31
1.1.2	Modélisation des composants de la transmission	32
1.1.3	Prise en compte de l'amortissement	36
1.2	Méthodes de calcul	36
1.2.1	Décomposition modale	36
1.2.2	Résolution des équations	37
2	Modèle dynamique	38
2.1	Justification du modèle	38
2.2	Equations du mouvement	39
2.3	Equations modales	41
3	Méthode spectrale itérative	41
3.1	Réponses modales dans le domaine fréquentiel	41
3.2	Equation régissant l'erreur dynamique de transmission σ	42
3.3	Equation régissant la surcharge dynamique de denture $\tilde{f}_d(\omega)$	42
3.4	Equation régissant la réponse vibratoire de la transmission $\tilde{x}(\omega)$	43
3.5	Résolution	43
4	Modes de denture	44
5	Conclusion	46
	Bibliographie	49
III	Méthode du transfert radiatif	51
1	Méthodes de prédiction en acoustique des salles	53
1.1	Méthodes d'acoustique géométrique	53
1.1.1	Méthode des sources-images	53
1.1.2	Méthode de tirs de rayons	54
1.2	Théorie de Sabine	55
1.3	Analyse statistique de l'énergie	56
1.4	Equation de diffusion	56
1.4.1	Méthode de diffusion de l'énergie	57
1.4.2	Méthode du potentiel d'intensité (Intensity Potential Approach)	58
2	Méthode du transfert radiatif	59
2.1	Terminologies	59
2.1.1	Luminance et Intensité spécifique	60
2.1.2	Emittance énergétique et flux de puissance	61
2.1.3	Facteurs d'angle	61

2.1.4	Relations entre les caractéristiques radiatives	62
2.2	Hypothèses de la méthode du transfert radiatif	64
2.3	Description de la méthode	65
2.3.1	Représentation des champs d'énergie	65
2.3.2	Equation de Fredholm sur les inconnues σ	67
2.3.3	Résolution du problème général	70
2.4	Schéma numérique	70
2.5	Comparaison avec les autres méthodes énergétiques	71
2.5.1	Comparaison avec la méthode des rayons	71
2.5.2	Comparaison avec la méthode du potentiel d'intensité	72
3	Conclusion	74
	Bibliographie	76
IV Diffraction dans la méthode du transfert radiatif		79
1	Théorie Géométrique de la Diffraction	81
1.1	Les principes de la TGD	81
1.1.1	Les lois de l'acoustique géométrique	81
1.1.2	Le principe de localité	82
1.1.3	Le principe de Fermat généralisé	83
1.2	Mise en œuvre	88
1.3	Limites d'application	88
2	Introduction de la diffraction	89
2.1	Introduction de sources fictives	89
2.2	Calcul du coefficient de diffraction énergétique	91
3	Diffraction simple	93
3.1	Résolution par la méthode du transfert radiatif	93
3.2	Résultats	94
3.2.1	Etude bidimensionnelle	94
3.2.2	Etude tridimensionnelle	96
4	Diffraction multiple	97
4.1	Résolution par la méthode du transfert radiatif : équivalence avec la TGD	98
4.2	Diffraction par une barrière rectangulaire	102
4.2.1	Résultats	104
5	Discussions	106
6	Conclusion	108
	Bibliographie	110
V Méthode hybride		111
1	Approche bibliographique	113
1.1	Exposé du problème	113
1.1.1	Equation de Helmholtz et conditions aux limites	113

1.1.2	Forme intégrale indirecte de la pression acoustique	114
1.1.3	Forme intégrale directe de la pression acoustique	114
1.2	Méthode des sources équivalentes	115
1.3	Méthode des éléments finis (FEM) - Méthode des éléments finis de frontière (BEM)	115
1.4	Limites des méthodes déterministes	116
1.5	Méthodes intégrales énergétiques	117
1.6	Méthode des sources équivalentes énergétiques	118
1.7	Méthodes hybrides	119
2	Equations de la méthode hybride proposée	120
2.1	Décomposition en trois étapes	120
2.2	Calcul des sources équivalentes	121
2.2.1	Amplitudes	121
2.2.2	Approximation de type rayon	125
2.2.3	Interprétation physique	127
2.2.4	Implémentation numérique	128
2.2.5	Evaluation des champs pariétaux	128
2.2.6	Cas d'une structure bafflée	129
2.3	Calcul des sources fictives	130
2.4	Calcul du champ acoustique	131
3	Cas d'une plaque simple	131
3.1	Etude d'un critère de maillage	132
3.2	Etude de la relation entre l'intensité normale et les sources équivalentes	133
4	Cas d'une plaque raidie	134
4.1	Etude expérimentale	135
4.1.1	Etude modale	135
4.1.2	Mesures par la technique des deux microphones	136
4.1.3	Champ de vitesse pariétal	140
4.1.4	Champ de pression pariétal	141
4.2	Validation de l'approche hybride pour l'étude du rayonnement en champ libre : calcul des sources équivalentes	143
4.2.1	Localisation des zones de rayonnement	143
4.3	Validation de l'approche hybride pour l'étude du rayonnement au sein d'un environnement acoustique quelconque : calcul des sources fictives et du champ acoustique	148
5	Conclusion	150
	Bibliographie	153
VI Application aux boîtes de vitesses dans leur encapsulage moteur		157
1	Caractéristiques de la boîte de vitesses	159

1.1	Description de la boîte de vitesses	159
1.2	Modélisation de la boîte de vitesses par éléments finis	160
1.3	Analyse modale de la boîte de vitesses	162
1.3.1	Fréquences propres et déformées modales	162
1.3.2	Modes de denture	163
2	Réponse vibratoire du carter de la boîte de vitesses	163
2.1	Fonction de transfert vibratoire	164
2.2	Réponse vibratoire induite par l'erreur statique de transmission et les fluctuations de la raideur d'engrènement	165
2.2.1	Fluctuations de la raideur d'engrènement et de l'erreur statique de transmission	166
2.2.2	Surcharge dynamique de denture	166
2.2.3	Réponse vibratoire	168
3	Encapsulage du groupe motopropulseur	170
3.1	Description du groupe motopropulseur et de l'encapsulage	171
3.2	Réponse acoustique du carter de la boîte de vitesses	172
3.3	Résultats	175
3.3.1	Réponse acoustique liée à la fonction de transfert vibratoire	175
3.3.2	Réponse acoustique du carter de la boîte de vitesses liée aux vibrations induites par l'erreur statique de transmission et les fluctuations de la raideur d'engrènement	179
4	Conclusion	180
	Bibliographie	183
	Conclusion et perspectives	185
	A Méthode du transfert radiatif : réflexion spéculaire et transmission	189
1	Etude de la réflexion spéculaire	189
2	Etude de la transmission	190
	B Existence et unicité de la solution dans la méthode du transfert radiatif	193
	C Etude du rayonnement acoustique d'une structure en terme de diffraction	195
1	Diffraction de l'onde de flexion en rayon d'espace	195
2	Diffraction de l'onde de flexion par une arête ou par un coin de la plaque	196
	D Intégrale de Rayleigh : formule asymptotique	199
1	Forme asymptotique de l'intégrale de Rayleigh en champ lointain	199
2	Source équivalente déduite de la forme asymptotique	200

Liste des figures

I.1	Exemple de boîte de vitesses automobile.	6
I.2	Origine principale du bruit de transmission.	6
I.3	Phénomène de fluid-pumping.	8
I.4	Caractéristiques géométriques des engrenages et définition de l'EST.	11
I.5	Variation de la rigidité de la dent d'engrenage au cours de l'engrènement.	13
I.6	Modèle linéaire et paramétrique de la raideur d'engrènement.	14
I.7	Raideur d'engrènement typique d'un engrenage droit.	15
I.8	EST induite par la raideur d'engrènement pour un engrenage droit parfait.	15
I.9	EST en fonction de la charge pour un engrenage droit avec correction de profil.	15
I.10	Principales composantes du spectre de l'EST et leurs origines.	16
I.11	Instabilités paramétriques.	18
I.12	Résonance paramétrique.	19
I.13	Contribution du bruit d'engrènement au bruit extérieur à une transmission.	20
I.14	Intérêt de l'intensimétrie acoustique pour la mesure de puissance acoustique.	21
I.15	Mesures d'intensité acoustique par intensimétrie.	22
II.1	Modèle de torsion pure à 4 DDL pour une transmission.	33
II.2	Repère local pour définir la matrice de couplage entre dents en prise.	40
II.3	Prédiction du comportement dynamique d'une transmission.	45
III.1	Méthode de tirs de rayons et méthode des sources-images.	54
III.2	Caractéristiques géométriques d'un flux de puissance.	60
III.3	Définition du facteur d'angle entre deux surfaces.	62
III.4	Contributions énergétiques dans la méthode du transfert radiatif.	66
III.5	Bilan de puissance sur la frontière Γ du domaine Ω	68
III.6	Méthode du transfert radiatif et méthode des rayons.	73
III.7	Méthode du transfert radiatif et méthode du potentiel d'intensité.	73
IV.1	Tube de rayons acoustiques.	81
IV.2	Application du principe de localité à un problème de diffraction.	83
IV.3	Le principe de Fermat généralisé.	84
IV.4	Loi de réflexion de Snell-Descartes.	86

IV.5	Loi de diffraction de Keller.	86
IV.6	Diffraction par une pointe.	87
IV.7	Rayons rampants émis par un cylindre.	88
IV.8	Diffraction d'une onde plane incidente par un dièdre.	92
IV.9	Diffraction par une arête : évaluation du coefficient de diffraction énergétique.	94
IV.10	Diffraction par un dièdre (2D).	96
IV.11	Diffraction d'une onde plane par un dièdre d'angle au sommet $\pi/4$ (2D).	97
IV.12	Densité d'énergie acoustique le long d'un contour entourant le dièdre (2D).	97
IV.13	Diffraction d'une onde plane par un dièdre (3D).	98
IV.14	Diffraction multiple.	99
IV.15	Diffraction d'une onde plane par un écran épais.	100
IV.16	Diffraction d'une onde cylindrique par une barrière rectangulaire.	102
IV.17	Diffraction par une barrière rectangulaire.	105
IV.18	Diffraction d'une source cylindrique par une barrière rectangulaire (250 Hz).	106
IV.19	Densité d'énergie acoustique le long d'un contour entourant la barrière (250 Hz).	106
IV.20	Diffraction d'une source cylindrique par une barrière rectangulaire (5000 Hz).	107
IV.21	Densité d'énergie acoustique le long d'un contour entourant la barrière (5000 Hz).	107
V.1	Problème général de rayonnement d'une structure vibrante.	113
V.2	Différence de chemin acoustique en champ lointain.	125
V.3	Différence de chemin acoustique en champ lointain (ondes planes).	126
V.4	Calcul de la puissance infinitésimale autour d'une source équivalente.	127
V.5	Bilan de puissance entre les sources équivalentes et les sources fictives.	130
V.6	Etude d'une plaque simple bafflée appuyée sur tout son pourtour.	132
V.7	Etude d'un critère de maillage des sources équivalentes.	133
V.8	L_p en champ lointain d'une plaque bafflée sur appuis simples.	134
V.9	Interprétation physique de l'amplitude des sources équivalentes.	135
V.10	Photographie de la plaque raidie.	136
V.11	Etude modale de la plaque raidie.	137
V.12	Nombre de modes vibratoires par octave pour la plaque raidie.	137
V.13	Montage expérimental pour la mesure par la méthode des deux microphones.	138
V.14	Schéma du dispositif expérimental de mesures pour la plaque raidie.	138
V.15	L_p près de la plaque raidie - excitation en bruit blanc et harmonique (2500 Hz).	139
V.16	L_p près de la plaque raidie - excitation en bruit blanc et harmonique (2825 Hz).	140
V.17	Vitesse sur la plaque raidie par la méthode des deux microphones (2500 Hz).	141
V.18	Pression sur la plaque raidie par la méthode des deux microphones (2500 Hz).	142
V.19	Champ de vitesse à 2500 Hz importé pour une étude DBEM (SYSNOISE).	142
V.20	Champ de pression sur la plaque raidie évalué par DBEM (2500 Hz).	143
V.21	Puissance des sources équivalentes pour deux octaves et dans trois directions.	144
V.22	Puissance des sources équivalentes dans trois directions : moyenne sur 4 octaves.	145

V.23	L_p le long d'une ligne perpendiculaire à la plaque raidie.	146
V.24	L_p sur une demi-sphère autour de la plaque raidie.	147
V.25	L_p en un point au-dessus de la plaque raidie.	147
V.26	Contributions des sources de vitesse, de pression et d'intensité au champ total.	148
V.27	Maillage IBEM de la plaque raidie placée entre deux panneaux absorbants. .	149
V.28	L_p en quatre points pour la plaque raidie entre deux panneaux absorbants. .	151
VI.1	Schéma de la boîte de vitesses.	159
VI.2	Maillage du carter de la boîte de vitesse et des boîtiers de roulements.	162
VI.3	Répartition fréquentielle des modes propres de la boîte de vitesses.	162
VI.4	Taux d'énergie de déformation associée à la raideur d'engrènement.	163
VI.5	Etude d'une face de la boîte de vitesses.	164
VI.6	Calcul de la fonction de transfert vibratoire du carter de la boîte de vitesses.	165
VI.7	$\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_S$ sur la face S (effort unitaire).	166
VI.8	Raideur d'engrènement.	167
VI.9	Erreur statique de transmission.	167
VI.10	Evolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture.	168
VI.11	Spectre et évolution temporelle de la surcharge dynamique de denture.	169
VI.12	Contributions des raies à $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_S$ sur la face S.	170
VI.13	$\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_S$ sur la face S.	171
VI.14	Schéma du groupe motopropulseur incluant la boîte de vitesses.	171
VI.15	Ecrans absorbants.	172
VI.16	Evolution des coefficients d'absorption en fonction de la fréquence.	172
VI.17	Maillage IBEM de l'encapsulage.	173
VI.18	Champ de vitesse importé sur la face supérieure de la boîte pour le calcul IBEM.	173
VI.19	Zone de rayonnement d'une source équivalente.	174
VI.20	Amplitude des sources équivalentes sur la face supérieure de la boîte de vitesse.	175
VI.21	Plans de calcul acoustique du bruit rayonné par la transmission.	176
VI.22	L_p sur le plan perpendiculaire (étude en champ libre).	176
VI.23	L_p sur le plan double (étude en champ libre).	177
VI.24	L_p sur le plan perpendiculaire (étude avec l'encapsulage moteur).	177
VI.25	L_p sur le plan double (étude avec l'encapsulage moteur).	178
VI.26	Zone de diffraction acoustique au-dessus de l'encapsulage moteur.	178
VI.27	Positions des points de calcul acoustique.	179
VI.28	Réponse acoustique du carter dans son environnement en deux points.	181
A.1	Bilan de puissance à l'interface entre deux milieux.	190
C.1	Etude du rayonnement acoustique d'une structure en terme de diffraction. . .	196
D.1	Rayonnement acoustique d'une structure plane en champ lointain.	200

Liste des tableaux

III.1	Constante γ en fonction de la dimension du milieu.	69
V.1	Fréquences limites d'étude des maillages utilisés.	133
V.2	Coefficients d'absorption des absorbants utilisés.	149
VI.1	Caractéristiques de l'engrenage 35/49 dents.	160
VI.2	Caractéristiques de l'engrenage 29/56 dents.	160
VI.3	Modes de denture	164

Nomenclature

Conventions

j	nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$
θ, ϕ	angle d'élévation et angle azimuthal (Fig. Coordonnées sphériques)
$\Re(x)$	partie réelle de x
x^*	conjugué de x
${}^t x$	transposé de x
$\tilde{x}(\omega)$	transformée de Fourier de x définie comme : $\tilde{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} x(t) dt$
$g \otimes x(\omega)$	produit de convolution de g et x défini comme : $g \otimes x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) x(\omega - t) dt$
$\langle x \rangle$	moyenne d'ensemble de x considéré comme aléatoire
$\text{div } \mathbf{x}$	divergence de \mathbf{x}
$\mathbf{grad } x$	gradient de x
Δx	laplacien de x
L_p	niveau de pression en dB défini comme : $L_p = 20 \log \frac{p_{\text{eff}}}{p_0} \text{ avec } p_0 = 2.10^{-5} \text{ Pa}$

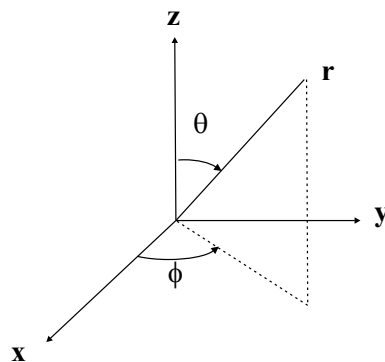


Fig. Coordonnées sphériques.

Notations

Caractéristiques d'une structure

Géométrie

h	épaisseur
l_x	longueur d'une plaque
l_y	largeur d'une plaque
L	longueur d'une poutre
S	surface d'une plaque

Matériau

c_L	célérité des ondes longitudinales
E	module d'Young
ν	coefficient de Poisson
ρ	masse volumique

Caractéristiques des ondes acoustiques et du milieu fluide

c	célérité des ondes acoustiques
\mathbf{k}, k	vecteur d'onde, nombre d'onde
m	coefficient d'absorption atmosphérique
n	dimension du milieu
$n(f)$	densité modale
γ_0	angle solide $\gamma_0 = 2$ si $n = 1$, $\gamma_0 = 2\pi$ si $n = 2$ et $\gamma_0 = 4\pi$ si $n = 3$
λ	longueur d'onde
ω, f	pulsation, fréquence
ρ_0	masse volumique du fluide

La méthode spectrale itérative

$\{q(t)\}$	vecteur des coordonnées modales
m_i, ζ_i	masse modale et facteur d'amortissement du mode i à la pulsation ω_i
ω_i, f_i	pulsation propre et fréquence propre du mode de rang i
$[C], [c] = \text{diag}[2 m_i \omega_i \zeta_i]$	matrice d'amortissement et son équivalent dans l'espace modal
$\{E(t)\}, \{s(t)\}$	vecteur nodal des efforts excitateurs internes et son équivalent dans l'espace modal
$[\bar{K}], [k] = \text{diag}[k_i]$	matrice de raideur moyennée en temps et son équivalent dans l'espace modal
$[M], [m] = \text{diag}[m_i]$	matrice de masse et son équivalent dans l'espace modal
$[V]$	matrice des vecteurs propres $\{V^{(i)}\}$
$\{X(t)\}$	vecteur des déplacements nodaux

La méthode du transfert radiatif

\mathbf{n}	normale extérieure au milieu fluide
\mathbf{p}, \mathbf{p}'	position des sources surfaciques sur la frontière Γ
\mathbf{r}	position du point récepteur
\mathbf{s}	position des sources volumiques dans Ω
\mathbf{u}	vecteur unitaire dans la direction d'émission
$\mathbf{u}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$	vecteur unitaire dirigé du point \mathbf{p} vers le point \mathbf{q}
\mathbf{v}	vecteur unitaire dans la direction d'incidence
$D(\mathbf{v}, \mathbf{u})$	diffRACTIVITÉ - coefficient de diffraction énergétique
$G(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{e^{-m s}}{\gamma_0 c s^{n-1}}$	noyaux énergétiques
$H(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = c G(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \mathbf{u}$	
$\mathbf{I}(\mathbf{p})$	vecteur densité de flux ou vecteur intensité acoustique au point \mathbf{p} ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$)
$L(\mathbf{p}, \mathbf{u}), I(\mathbf{p}, \mathbf{u})$	luminance thermique et intensité acoustique spécifique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$)
$M, \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}$	émittance énergétique et densité de flux d'énergie acoustique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$)
$R(\mathbf{v}, \mathbf{u})$	réflectivité bidirectionnelle
$R(\mathbf{u})$	réflectivité bidirectionnelle hémisphérique
$W(\mathbf{p})$	densité d'énergie acoustique au point \mathbf{p} ($\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$)
α	coefficient d'absorption d'une paroi
Δ_0	ensemble des sommets diffractants
Δ_1	ensemble des lignes diffractantes
Γ	frontière du domaine acoustique
ρ	densité de puissance acoustique (W/m^3) des sources volumiques situées à l'intérieur du domaine Ω
σ	densité de puissance acoustique (W/m^2) des sources surfaciques situées à la frontière Γ
θ	angle d'émission défini par rapport à la normale
Ω	domaine acoustique

La méthode hybride

g	fonction de Green
\mathbf{n}	normale extérieure à la surface vibrante
p	champ de pression
\mathbf{q}, \mathbf{q}'	position des sources équivalentes sur la surface S
S	surface vibrante
γ_n	champ d'accélération normale à la surface de la structure vibrante
σ_e	densité de puissance acoustique (W/m^2) des sources équivalentes situées sur la surface S
$\sigma_{pp}, \sigma_{\gamma\gamma}, \sigma_{\gamma p}$	densité de puissance acoustique (W/m^2) des sources de pression, de vitesse et d'intensité

Introduction

Le bruit est aujourd'hui reconnu comme une source de pollution et la réduction de celle-ci s'inscrit dans les nouveaux enjeux européens. Du bruissement des feuilles au bruit d'un moteur à réaction, les bruits quotidiens ont des origines multiples. En comparaison avec l'ensemble de ces bruits, celui lié à la circulation routière ne semble pas jouer le rôle principal, mais c'est la durée associée à ce bruit qui le classe au rang de premier facteur de pollution sonore. Les réglementations environnementales sur les émissions sonores des véhicules ont conduit à une réduction de l'ordre de 1 à 2 dB(A), essentiellement sur les voitures particulières. Pour les poids lourds, la valeur limite fixée en novembre 1992 par la directive 92/97/CEE du 10 novembre 1992 s'élève à 80 dB(A). À partir de 1995-1996, dans des conditions de trafic urbain, le bruit de 25 camions n'équivaut plus qu'à celui d'un seul poids lourd du début des années quatre-vingts. Mais cette réduction s'accompagne de l'expansion du réseau routier et d'un accroissement du nombre de véhicules motorisés. En France, on prévoit entre 1990 et 2010 une augmentation du trafic routier de 34 à 54 %, plus marquée pour le transport de marchandises par véhicules lourds (30 à 130 %). Aussi, les constructeurs de poids lourds s'attendent-ils à des normes européennes de plus en plus sévères.

Les principales sources de bruit d'un véhicule sont :

- le bruit du moteur qui dépend du régime moteur, de la charge,
- les bruits d'échappement,
- le bruit des transmissions mécaniques,
- les bruits de roulement liés au contact pneumatique-chaussée,
- les bruits aérodynamiques liés à la turbulence de l'air, mais qui restent faibles aux vitesses usuellement pratiquées par les véhicules.

Dans le cas d'une voiture, les bruits d'échappement mis à part, le bruit de roulement couvre celui du groupe motopropulseur (GMP) dès que la voiture roule à plus de 50 km/h. Dans le cas d'un véhicule poids lourd, ce seuil critique se situe entre 70 km/h et 80 km/h si bien que le bruit lié au groupe motopropulseur constitue la source dominante en trafic urbain.

Dans ce travail de thèse, nous avons choisi de nous intéresser à la contribution des transmissions par engrenages parmi les bruits du groupe motopropulseur, et en particulier au bruit lié à la boîte de vitesses dans le cas d'un véhicule poids lourd. Lorsque les transmissions

sont enfermées dans un carter, comme dans le cas d'une boîte de vitesses, le bruit rayonné résulte essentiellement des vibrations de celui-ci. Ces vibrations sont générées par le processus d'engrènement et ont pour origine principale l'erreur statique de transmission liée aux défauts géométriques des dentures et aux déformations de la transmission. Les fréquences excitatrices se situent à quelques kilohertz ce qui, au regard des caractéristiques élastodynamiques d'une transmission, correspond au domaine modal ou domaine des basses fréquences du point de vue vibratoire. La prédiction du comportement vibratoire du carter d'une transmission peut donc se faire à l'aide d'une approche modale qui n'est pas pour autant classique en raison de la complexité des mécanismes mis en jeu. En revanche, au regard de la taille du compartiment moteur où se propage le bruit rayonné, et de la géométrie complexe de celui-ci, ces mêmes fréquences sont élevées du point de vue acoustique au sens où le nombre de modes acoustiques excités est plus important pour le compartiment clos que le nombre de modes vibratoires du carter. Dès lors, deux méthodes doivent être mises en œuvre afin de prédire le bruit rayonné : une première méthode dédiée au domaine des basses fréquences afin de prédire le comportement vibratoire de la transmission, et une seconde méthode dédiée au domaine des hautes fréquences afin de prédire le rayonnement acoustique du carter dans le compartiment moteur et à l'extérieur du véhicule. Cette dualité conduit à la mise en œuvre d'une approche qualifiée d'*hybride* au sens où les deux méthodes qu'elle permet de coupler sont valables sur des domaines fréquentiels distincts. Ce problème, qui se rencontre dans le cas des transmissions qui nous intéresse, se rencontre plus généralement dès lors qu'une structure vibrante est placée dans l'enceinte d'une cavité ou dans un environnement acoustique complexe favorable à l'émergence d'un grand nombre de modes acoustiques.

Peu d'approches vibroacoustiques hybrides existent à l'heure actuelle. Une approche classique consiste à prédire le champ vibratoire au sein d'une structure à l'aide de la méthode des éléments finis, puis à évaluer le champ acoustique rayonné à l'aide de la méthode des éléments finis ou des éléments finis de frontière. Cette approche est implémentée dans les codes de calcul vibroacoustique qui permettent de résoudre des problèmes de rayonnement acoustique externe et des problèmes couplés interne/externe. Toutefois, les méthodes des éléments finis et des éléments finis de frontière s'appuient sur une approche déterministe qui permet d'évaluer précisément le champ de vitesse ou de pression. Or, la réponse vibratoire comme acoustique d'un système dans le domaine des hautes fréquences est particulièrement sensible aux incertitudes sur la géométrie, les excitations, les matériaux, et il semble alors illusoire de vouloir prédire aussi finement cette réponse. Par ailleurs, ces méthodes nécessitent de mailler la structure ou le domaine acoustique en éléments finis ou en éléments finis de frontière. Le critère de maillage impose un nombre d'éléments par longueur d'onde d'étude. Lorsque la fréquence augmente, la taille des modèles devient vite considérable et les calculs sont alors limités par les capacités des calculateurs. Ainsi, les deux méthodes alors mises en œuvre sont des méthodes valables dans le domaine des basses fréquences et on ne peut pas parler d'approche hybride. De nouvelles méthodes basées sur des quantités énergétiques et sur une approche statistique ont émergé

dans le domaine des hautes fréquences. Un nouvel enjeu scientifique se présente alors afin de coupler ces méthodes aux méthodes basses fréquences. La difficulté qui se présente pour coupler deux approches adaptées à des domaines fréquentiels distincts est liée aux variables utilisées qui diffèrent entre les approches. Une méthode vibratoire dédiée aux basses fréquences permet d'accéder au champ de vitesse en module et en phase alors qu'un calcul à l'aide d'une méthode acoustique dédiée aux hautes fréquences nécessite de connaître les sources d'excitation en termes énergétiques. Par ailleurs, la méthode basses fréquences conduit au champ de pression calculé à fréquence pure alors que la méthode hautes fréquences permet d'évaluer le champ d'énergie acoustique par bande de fréquences. Aussi se trouve-t-on confronté dans le développement d'une méthode hybride à un problème de compatibilité entre les données d'entrée et de sortie des méthodes à coupler.

Les deux méthodes retenues dans le cadre de ce travail sont la méthode spectrale itérative pour prédire le comportement vibratoire de la transmission (carter inclus) à partir de la connaissance de l'erreur statique de transmission sous charge, et la méthode du transfert radiatif pour prédire le champ acoustique rayonné. La méthode spectrale itérative repose sur une technique originale de résolution dans le domaine spectral des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. Elle permet d'accéder au champ vibratoire complexe, à fréquence pure, à la surface du carter de la transmission. La méthode du transfert radiatif, basée sur l'écriture des échanges radiatifs en thermique, repose sur une description énergétique du champ acoustique en termes de rayons et conduit à la résolution d'équations énergétiques intégrales de frontière. Elle permet de prendre en compte les phénomènes de réflexion diffuse ou spéculaire et de transmission. Chacune de ces deux méthodes a déjà fait l'objet de développements précédents qui ont permis de montrer leur efficacité pour chacune de leurs applications respectives. Aussi, ces méthodes seront mises en œuvre telles quelles dans le travail de thèse, les grandes lignes de leurs développements seront présentées dans une démarche bibliographique.

L'enjeu principal de ce travail de thèse a été de développer une méthode hybride permettant d'évaluer le champ acoustique rayonné par une transmission par engrenages telle qu'une boîte de vitesses au sein d'un compartiment moteur. Il s'agissait donc de coupler la méthode spectrale itérative et la méthode du transfert radiatif, et plus largement il s'agissait de coupler une méthode modale à une méthode énergétique de type rayon. La problématique a été de déterminer les données d'entrée de la méthode du transfert radiatif à partir de la connaissance des données de sortie de la méthode spectrale itérative, ou encore de déterminer les données d'entrée de la méthode du transfert radiatif à partir de la connaissance du champ vibratoire à la surface d'une structure vibrante. La méthode devait permettre de prendre en compte l'ensemble des phénomènes acoustiques se produisant dans l'environnement acoustique de la transmission. En particulier, la diffraction est un phénomène non négligeable au sein d'un compartiment moteur en raison de la présence de nombreux obstacles et d'ouvertures vers l'extérieur. Aussi, une description précise du champ acoustique au sein d'un compartiment et à l'extérieur d'un

véhicule supposait de pouvoir prendre en compte ce phénomène.

L'organisation des différents chapitres du mémoire traduit la démarche que nous avons suivie :

- Le premier chapitre est dédié au comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages : il rappelle les principaux phénomènes propres à ce comportement et permet de situer plus précisément le contexte général du travail.
- Le deuxième chapitre présente la méthode spectrale itérative, et situe cette méthode par rapport aux autres méthodes permettant de prédire le comportement vibratoire d'une transmission.
- Le troisième chapitre constitue le pendant du deuxième chapitre : il présente la méthode du transfert radiatif et situe cette méthode par rapport aux méthodes permettant d'évaluer le champ acoustique au sein d'une cavité dans le domaine des hautes fréquences.
- Le quatrième chapitre concerne l'introduction de la diffraction acoustique dans la méthode du transfert radiatif. Le formalisme de la théorie géométrique de la diffraction est utilisé pour cette étude, et conduit à la définition d'un coefficient de diffraction énergétique. Des applications de diffraction par un dièdre, un cas de diffraction simple, et par une barrière rectangulaire, un cas de diffraction multiple, sont traitées.
- Le cinquième chapitre est consacré à la méthode hybride. La méthode proposée repose sur trois étapes incluant la mise en œuvre de la méthode du transfert radiatif dans un contexte spécifique. Elle repose sur l'introduction de sources dites équivalentes permettant de reproduire le champ acoustique rayonné par une structure vibrante en champ libre. L'évaluation de ces sources constitue le point fondamental de la méthode, et les développements théoriques sur lesquels cette évaluation repose sont détaillés dans ce chapitre.
- Enfin, le sixième chapitre s'intéresse à la mise en œuvre de la méthode hybride pour étudier le bruit rayonné par le carter d'une boîte de vitesses de type poids lourd intégrée à un groupe motopropulseur placé au sein d'un encapsulage moteur. Les résultats sont comparés aux résultats obtenus à l'aide de la méthode des éléments finis de frontière.

Nous concluons sur les possibilités offertes par la méthode hybride, sur ses intérêts et sur ses limites, et nous évoquerons quelques perspectives envisageables à ce travail de thèse.

Chapitre I

Généralités sur la vibroacoustique des transmissions par engrenages

Introduction

La famille des transmissions par engrenages peut être divisée en deux grandes catégories : la première englobe les transmissions dites ouvertes pour lesquelles les engrenages ne sont pas enfermés dans un carter, et la seconde regroupe par opposition les transmissions fermées pour lesquelles les engrenages sont entourés d'un carter. Ces deux familles ont des comportements acoustiques distincts : concernant le bruit rayonné par chaque type de transmission on utilisera le terme de *bruit d'engrènement* pour les transmissions ouvertes, et le terme de *bruit de transmission* pour les transmissions fermées. Notons toutefois que le bruit d'engrènement participe au bruit de transmission dans le cas d'une transmission fermée et les deux notions ne sont pas véritablement complètement dissociables. La grande majorité des transmissions utilisées à l'heure actuelle comme les boîtes de vitesses ou les réducteurs appartient à la classe des transmissions fermées de sorte que nous limiterons l'étude à ce type de transmission. Les engrenages constituent les organes centraux de ces mécanismes : ils permettent la transmission d'un couple moteur et d'une vitesse de rotation. Les paliers de type roulements ont pour fonction principale le guidage en rotation des arbres et le maintien de la chaîne cinématique dans le carter : l'ensemble des roulements et du carter permet donc de gérer les appuis et génère les efforts de réaction nécessaires à la transmission du couple moteur. Enfin, le carter constitue l'enveloppe à l'intérieur de laquelle est placée l'ensemble de la transmission et doit donc satisfaire certains critères notamment d'étanchéité, de rigidité, d'évacuation de la chaleur et d'isolation phonique. Le bruit rayonné par ces transmissions fermées est essentiellement généré par les vibrations du carter induites par des sources d'excitation internes et/ou externes. L'engrènement est la source principale d'excitation interne qui se propage au sein de la transmission par deux voies distinctes. La première voie de propagation est solidienne : les vibrations sont transmises au carter par l'intermédiaire de tous les composants de la transmission : roues dentées, arbres, paliers de type roulements (Fig. I.1). La figure I.2 illustre le mécanisme de génération du bruit

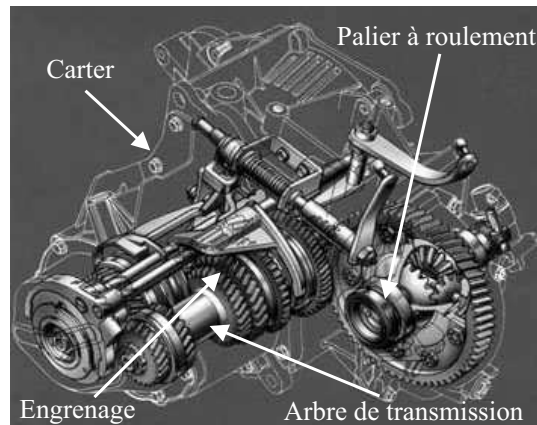


Fig. I.1 – Exemple de boîte de vitesses automobile

d'après <http://www.histomobile.com/histomob/tech/1/21.htm>

de transmission associé à l'engrènement. La seconde voie de propagation est aérienne. Les deux principales sources acoustiques internes sont le rayonnement acoustique des roues dentées et une source de bruit d'origine aérodynamique associée aux écoulements instationnaires induits par les phénomènes cycliques d'aspiration et de refoulement entre les dents en prise. Seule une partie de ce bruit, dépendant des propriétés de transparence acoustique du carter, contribue au bruit global rayonné. Dans le cas d'une transmission fermée, le bruit d'origine solidienne est la composante majoritaire.

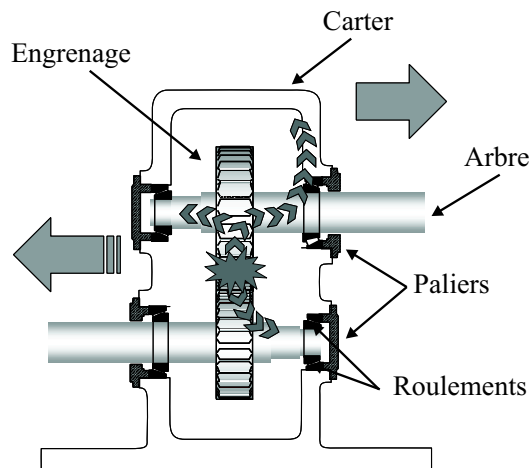


Fig. I.2 – Origine principale du bruit de transmission : les vibrations liées au processus d'engrènement sont transmises au carter via tous les composants de la transmission, et notamment les roues dentées, les arbres, les paliers de type roulements.

La prédiction du bruit rayonné par une transmission fermée nécessite donc de connaître l'état vibratoire du carter, et par conséquent les sources excitatrices qui en sont l'origine, ainsi que les mécanismes de ce transfert solidien. Dans le cas où la transmission est utilisée dans un milieu

léger comme l'air, hypothèse que nous avons retenue pour notre travail, la connaissance de cet état vibratoire hors charge fluide est suffisante pour prédire le champ acoustique rayonné.

Dans ce contexte, ce chapitre a pour objet de rendre compte des connaissances actuelles sur le comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages, et situer le cadre de notre étude. Une première partie est consacrée à la description des principales sources d'excitation dynamiques : une attention particulière est accordée à la définition de l'erreur statique de transmission sous charge qui constitue la source d'excitation dominante. Dans une deuxième partie, nous nous intéressons au comportement dynamique d'une transmission. Enfin, la troisième et dernière partie de ce chapitre présente les travaux concernant le rayonnement acoustique proprement dit des transmissions.

Sommaire

1	Sources d'excitation	8
1.1	Les principales sources d'excitation	8
1.2	L'erreur statique de transmission sous charge	9
1.2.1	L'erreur de transmission : définitions	9
1.2.2	Les origines de l' erreur statique de transmission sous charge .	10
1.2.3	Illustrations graphiques	14
1.2.4	Le spectre de l'erreur statique de transmission sous charge . .	16
2	Comportement dynamique des transmissions par engrenages	17
2.1	Réponse multi-fréquentielle	17
2.2	Résonances et instabilités paramétriques	17
2.3	Phénomènes non linéaires	18
2.4	Phénomènes d'amplification vibratoire pour certains régimes critiques .	18
2.5	Sources d'amortissement	19
3	Comportement acoustique des transmissions	20
3.1	Principaux phénomènes mis en jeu	20
3.2	Description du comportement acoustique d'une transmission	21
4	Conclusion	23
	Bibliographie	25

1 Les sources d'excitation

1.1 Les principales sources d'excitation

Les sources d'excitation vibratoire ou acoustique d'une transmission sont multiples [Harris, 1958, Opitz, 1969, Welbourn, 1979, Houser, 1988, Remond et al., 1993]. On distingue les sources internes, propres au fonctionnement de la transmission, des sources externes.

Les sources d'excitation internes

Les sources internes peuvent être liées à des interactions de type fluide-solide ou à des interactions de type solide-solide.

Parmi les excitations résultant d'interactions fluide-solide, on recense notamment :

- l'excitation du carter par des écoulements et des projections de lubrifiant,
- l'excitation du carter par des émissions acoustiques internes : parmi ces émissions internes, les deux contributions majoritaires sont liées au phénomène de fluid-pumping (Fig. I.3) désignant le processus cyclique d'aspiration et de refoulement d'air entre la tête et le pied des dents en prise [Houjoh et Umezawa, 1981, Houjoh, 1991, Sibe, 1997, Sibe, 1999] et au rayonnement des corps d'engrenage qui vibrent sous l'effet des surcharges dynamiques s'exerçant sur les dents.

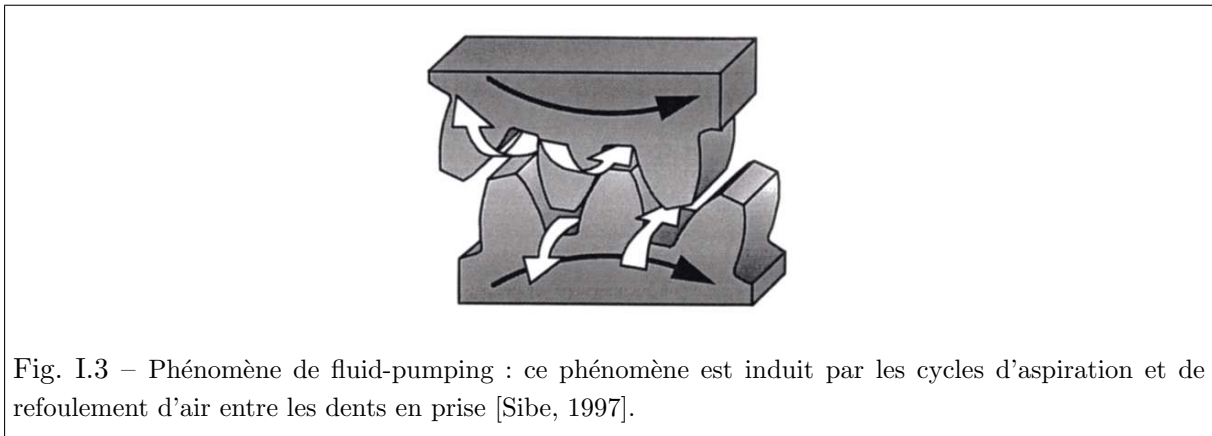


Fig. I.3 – Phénomène de fluid-pumping : ce phénomène est induit par les cycles d'aspiration et de refoulement d'air entre les dents en prise [Sibe, 1997].

Concernant les excitations résultant d'interactions solide-solide, il s'agit essentiellement :

- des fluctuations des forces normales de contact au niveau des dentures qui résultent de l'erreur statique de transmission, et qui sont transmises aux paliers ou roulements puis au carter,
- des fluctuations des forces de contact au niveau des roulements engendrées par leurs défauts propres,
- des fluctuations des forces de frottement au niveau des dentures,
- des forces de contact engendrées par des chocs liés à la présence de jeux fonctionnels dont les pignons fous, par exemple, sont le siège sous certaines conditions.

Les sources d'excitation externes

Les sources d'excitation externes sont associées aux fluctuations du couple moteur, aux fluctuations du couple de charge, aux variations de l'inertie de charge, et aux vibrations transmises via les points de fixation sur la structure d'accueil.

Toutes les sources d'excitation énoncées précédemment n'ont pas la même importance : par exemple, en régime de lubrification élastodynamique, les composantes tangentielles des efforts sont très petites devant les composantes normales, les effets excitateurs des frottements sont limités par la présence du lubrifiant.

Ainsi, il est bien établi que l'erreur statique de transmission sous charge constitue la source d'excitation vibratoire interne dominante [Welbourn, 1979, Remond et al., 1993].

1.2 L'erreur statique de transmission sous charge

Dans le cas d'une transmission par engrenages, la transmission du mouvement de rotation s'obtient par l'intermédiaire d'obstacles que sont les dentures, et dont les profils sont dans la très grande majorité des cas en développante de cercle. D'un point de vue théorique, le rapport de transmission est constant si l'engrenage est indéformable et géométriquement parfait. Toutefois, un engrenage réel ne vérifie pas ces conditions : il présente un certain nombre de défauts de géométrie ou de corrections de forme qui induisent par exemple un écart entre le profil réel des dents et leur profil théorique, et il se déforme sous l'effet de la transmission d'un couple moteur. L'erreur de transmission est une grandeur qui permet de décrire ces phénomènes.

1.2.1 L'erreur de transmission : définitions

L'erreur de transmission est définie comme l'écart entre la position réelle de la roue menée et la position qu'elle devrait occuper si l'engrenage était géométriquement parfait et infiniment rigide [Harris, 1958, Welbourn, 1979] (Fig. I.4). Cette erreur s'exprime généralement soit par un écart de position angulaire de la roue menée par rapport à la roue menante, soit par un déplacement équivalent exprimé en micromètre le long de la ligne d'action. Elle est de l'ordre de quelques dizaines de micromètres pour des engrenages de véhicule léger.

En fonction du régime de fonctionnement, on distingue l'erreur statique de transmission hors charge, l'erreur statique de transmission sous charge et l'erreur dynamique de transmission.

L'erreur statique de transmission hors charge ou erreur cinématique

L'erreur cinématique ou erreur statique de transmission hors charge prend en compte les défauts de géométrie des dentures (non-conformité entre le profil en développante de cercle et le profil réel) comme de l'ensemble des composants de la transmission. Ces défauts résultent de la fabrication des engrenages proprement dit (défauts de profil, de pas, d'excentricité, ...), de la

fabrication des autres composants, et de l'assemblage de la transmission (défauts de parallélisme, d'excentricité, ...). Ajoutons que les corrections intentionnelles de la microgéométrie (corrections de profil et bombé d'hélice) contribuent à cette erreur de transmission. Cette erreur est donc d'origine purement géométrique. Elle est observée en régime quasi-statique (vitesses très faibles voire nulles), lorsque le couple statique appliqué est quasi-nul de sorte que les dents restent en contact sans déformation.

L'erreur statique de transmission sous charge

L'erreur statique de transmission sous charge résulte, en plus des origines associées à l'erreur cinématique, des déformations élastiques liées à la transmission du couple moteur par la denture. Elle suppose encore que la transmission est en régime quasi-statique. Elle prend en compte les déformations de denture, ainsi que les déformations de l'ensemble de la transmission (arbres, paliers, roulements,...). Les deux contributions sont du même ordre de grandeur. Cette erreur modifie la situation des roues en prise.

L'erreur dynamique de transmission

L'erreur dynamique de transmission prend en compte les phénomènes dynamiques qui ne sont plus négligeables lorsque les vitesses de rotation sont plus élevées (phénomène d'amplification dynamique tel que résonance linéaire ou non linéaire). Dans ces conditions, les caractéristiques inertielles de la transmission ne peuvent plus être négligées. L'erreur dynamique de transmission constitue la réponse dynamique de la transmission à l'excitation induite par l'erreur statique de transmission en l'absence de sources d'excitation externes. Elle donne lieu à des surcharges dynamiques sur les dentures, et donc sur le carter via les paliers de type roulements.

L'erreur statique de transmission sous charge est la source d'excitation interne dominante du comportement vibratoire d'une transmission. On se propose donc de la décrire plus en détails ci-après.

1.2.2 Les origines de l'erreur statique de transmission sous charge

Les défauts de géométrie

Les défauts de géométrie constituent l'une des principales origines physiques de l'erreur statique de transmission sous charge. Ces défauts induisent un écart entre les flancs théoriques et les flancs réels des dentures qui conduit à une erreur de position par rapport à un engrenage parfait. La norme AFNOR NF-E-23-006 [NF-E-23-006, 1967] relative à la précision des engrenages parallèles à denture en développante fournit la définition exacte de chaque défaut ainsi que les tolérances d'usinage et de montage des engrenages selon leur taille et leur classe de précision. Ces tolérances vont généralement de quelques micromètres à quelques dizaines de micromètres pour des applications telles que véhicules routiers. Les principaux défauts sont :

- les défauts de profil et de distorsion : ces défauts résultent du taillage des dentures et se caractérisent, dans le premier cas par des écarts de forme entre le profil réel des dents et

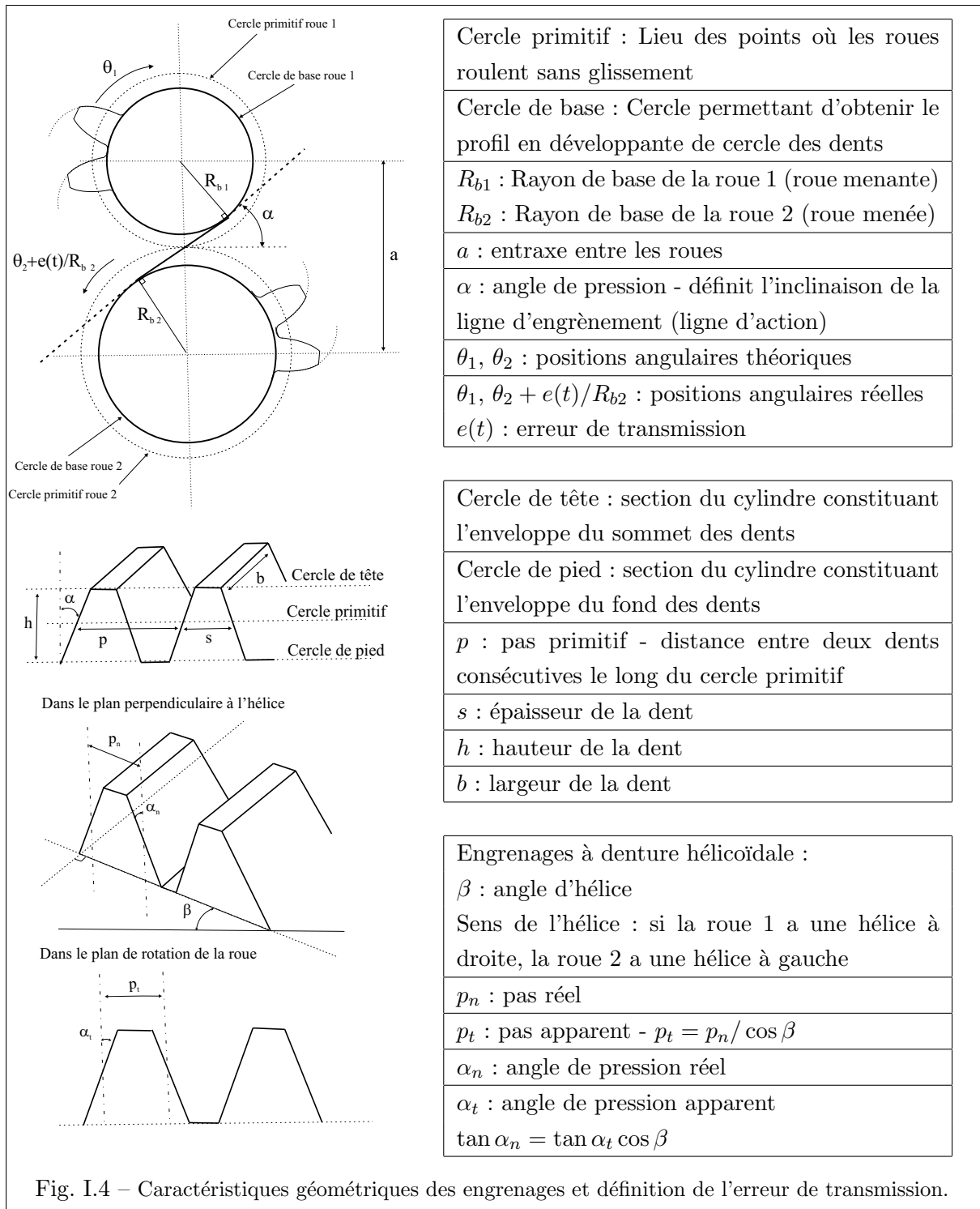


Fig. I.4 – Caractéristiques géométriques des engrenages et définition de l'erreur de transmission.

le profil théorique, et dans le second cas par des écarts de forme entre l'hélice réelle et l'hélice théorique,

- les erreurs de division : ces erreurs, résultent du taillage des dentures et se traduisent par un pas non rigoureusement constant d'une dent à l'autre,

- les défauts d'excentricité : ces défauts résultent de la fabrication de la roue ou de l'assemblage de la roue sur l'arbre, et se caractérisent par le fait que le centre de rotation de la roue ne coïncide pas avec le centre du cercle de base,
- les défauts de parallélisme : ces défauts, qui englobent l'inclinaison et la déviation, résultent du montage des roues, des arbres et des paliers, ils entraînent une modification de l'aire de contact entre les dents, donc une modification de la répartition de la charge,
- les corrections de denture : ce ne sont pas à proprement parlé des défauts mais des modifications intentionnelles de la géométrie des dents visant à permettre une prise en charge progressive de chaque dent, à compenser la déformation des dents en prise afin d'éviter tout impact lors de l'entrée d'une nouvelle dent dans la zone de contact, et enfin à minimiser les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge pour la transmission d'un couple nominal donné.

Les fluctuations de la raideur d'engrènement

Lors de la transmission d'un couple moteur, il s'exerce sur la denture des efforts normaux au profil (en négligeant les frottements), et l'engrenage (denture et corps de roue) se déforme. On distingue les déformations élastiques associées à la flexion des dents et des corps de roue, et les déformations locales associées aux contacts hertziens entre les dents. Ces déformations se caractérisent par un rapprochement entre les dents le long de la ligne d'engrènement (ligne d'action), lieu des points de contact théoriques. Ce rapprochement n'est pas constant au cours de l'engrènement, il dépend non seulement de la charge transmise mais aussi de la position angulaire des deux roues (Fig. I.5). Il participe à l'erreur de transmission sous charge. Pour chaque position angulaire, on peut relier ce rapprochement à l'effort ou au couple transmis par l'intermédiaire d'une raideur de liaison définie le long de la ligne d'action et appelée *raideur d'engrènement*. La raideur d'engrènement évolue au cours de l'engrènement et fluctue autour d'une valeur moyenne.

Caractère non linéaire et paramétrique de la raideur d'engrènement :

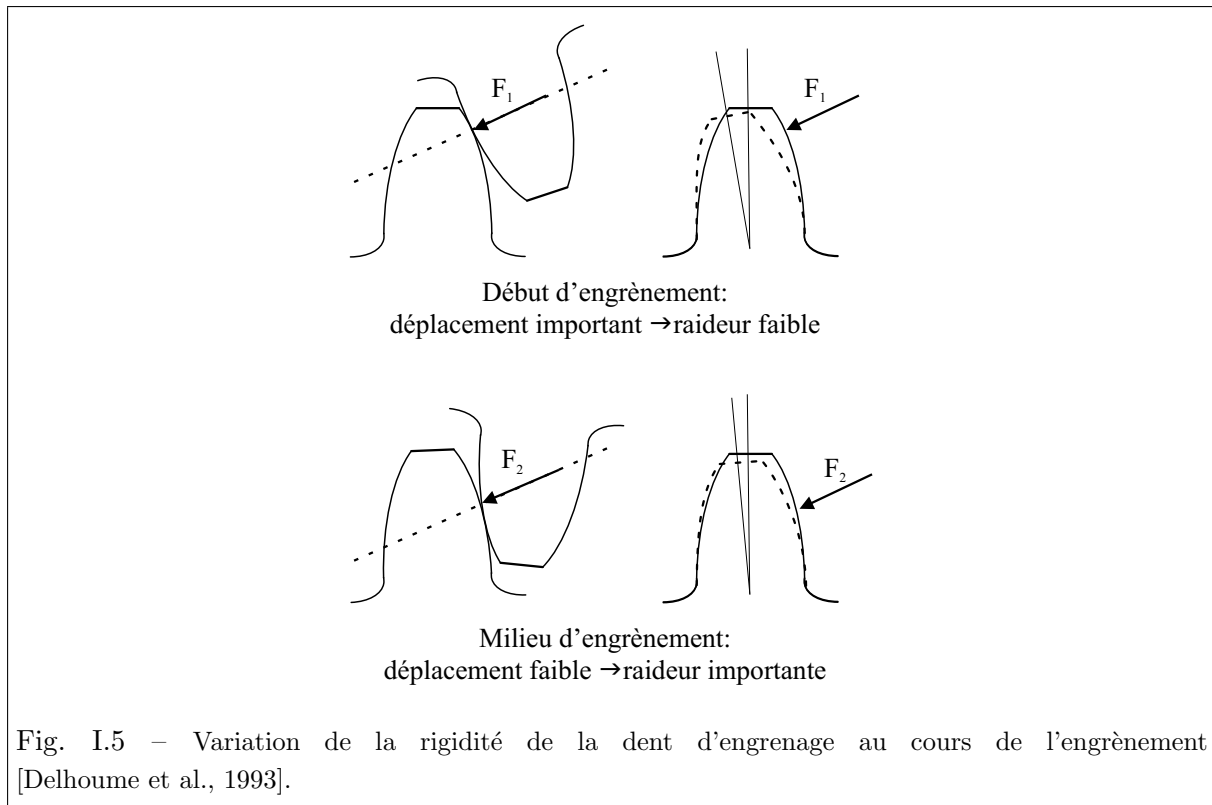
La raideur d'engrènement permet de relier le rapprochement entre les dents en prise à la charge transmise. Elle est conditionnée par :

- l'évolution du nombre de couples de dents en prise au cours de l'engrènement, typiquement de 1 à 2 pour un couple d'engrenages droits, et 2 à 3 pour un couple d'engrenages hélicoïdaux,
- l'évolution du point d'application des efforts sur chaque dent : une dent se déforme d'autant plus que le point d'application est proche de la tête.

Ces évolutions confèrent un caractère paramétrique à la raideur d'engrènement.

Modélisation classique de la raideur d'engrènement :

- Modèle linéaire à paramètre constant
Le modèle le plus simple consiste à introduire une raideur constante, indépendante

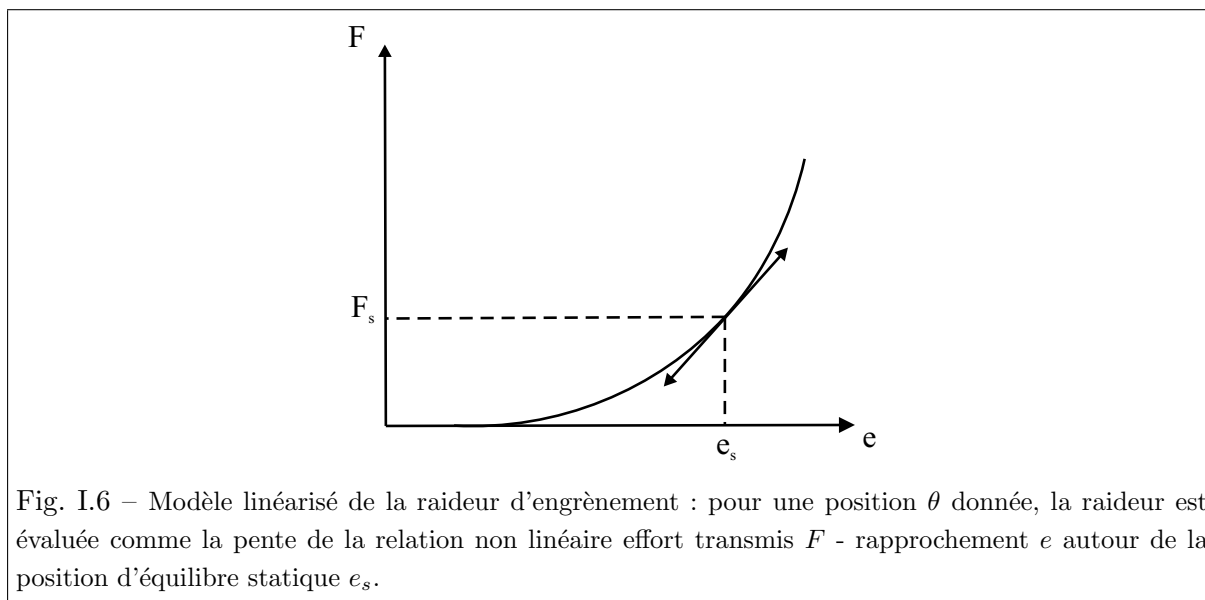


de la charge transmise. Ce modèle ne tient pas compte du caractère non linéaire ni paramétrique de la raideur d'engrènement. Il s'appuie sur l'hypothèse que les variations de la raideur d'engrènement sont négligeables ce qui revient à supposer que l'aire de contact demeure constante. Typiquement, la raideur d'un couple de dents en prise pour un engrenage en acier à denture droite normale est égale à $14 \cdot 10^9$ N/m par unité de largeur de denture [Welbourn, 1979].

– Modèle linéaire et paramétrique

La première amélioration que l'on peut apporter au modèle précédent consiste à prendre en compte le nombre de dents en prise. Prenons le cas d'un engrenage droit où il y a alternativement un puis deux couples de dents en prise. Lorsque le contact n'est assuré que par une paire de dents, la raideur d'engrènement est égale à la raideur d'un couple de dents en prise tel qu'introduite dans le modèle linéaire à paramètre constant. Dans le cas où le contact est assuré par deux couples de dents, la raideur d'engrènement est alors équivalente à celle de deux raideurs en parallèle. Ainsi, la raideur d'engrènement varie dans ce cas du simple au double. En pratique, les paramètres de conception ou les corrections de denture peuvent modifier sensiblement l'allure de cette variation. La seconde amélioration consiste à prendre en compte l'influence de la charge transmise. Pour une position angulaire θ_1 donnée, la raideur d'engrènement est alors évaluée comme la pente de la relation non linéaire effort transmis - rapprochement autour de la position

d'équilibre statique (Fig. I.6). Il s'agit donc d'une raideur linéarisée qui rend compte du couplage élastique entre les dents qui engrènent.



Dans tous les cas, en régime de fonctionnement stationnaire, la fluctuation de la raideur est périodique et induit ainsi une excitation paramétrique à la fréquence d'engrènement, produit du nombre de dents d'une des deux roues par sa fréquence de rotation, et ses premiers harmoniques. Ainsi, ce modèle rend compte du caractère périodique de la raideur mais pas de son caractère non linéaire.

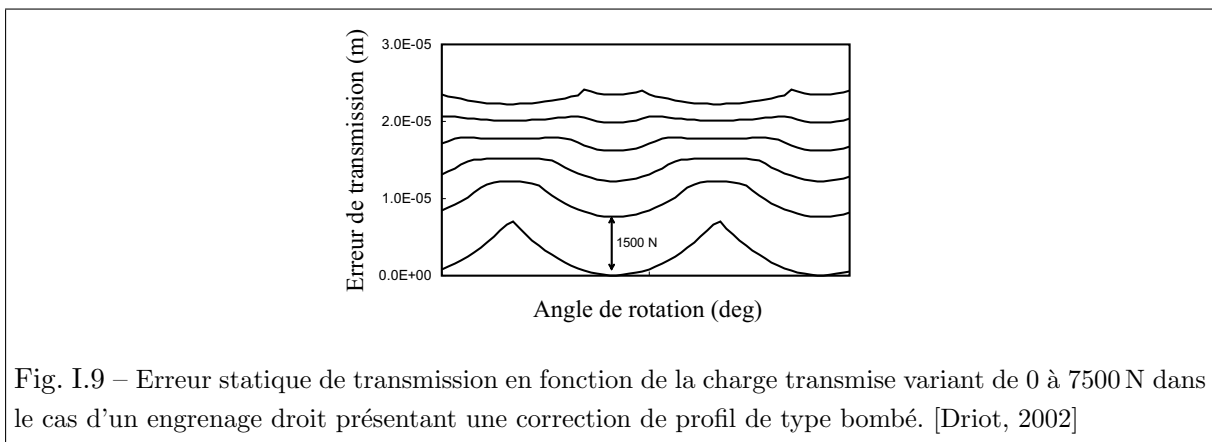
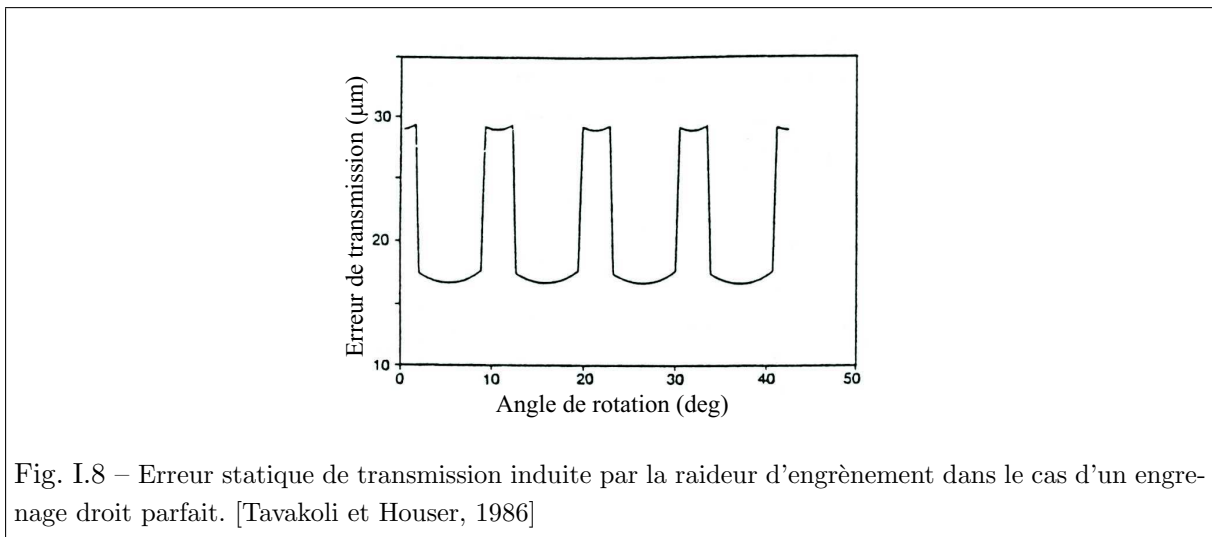
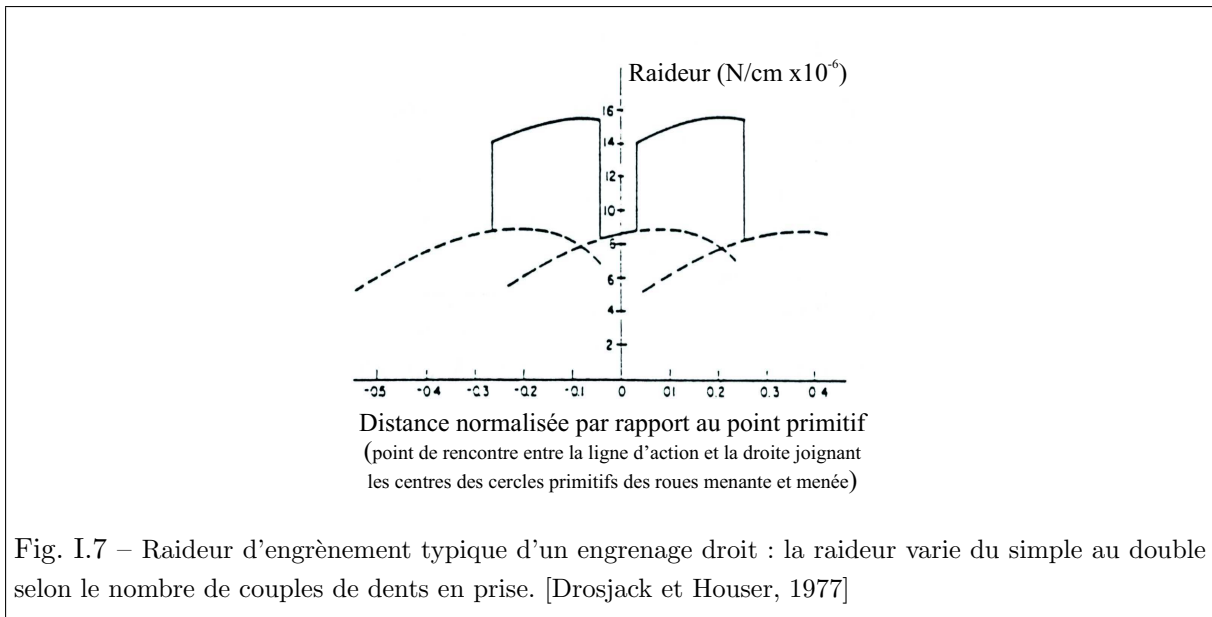
– Modèle non linéaire et paramétrique

Le modèle le plus complet reproduit le caractère non linéaire et périodique de la raideur qui tient compte de la relation non linéaire entre le rapprochement entre les dents en prise et la charge transmise, ainsi que du nombre de dents en prise.

1.2.3 Illustrations graphiques

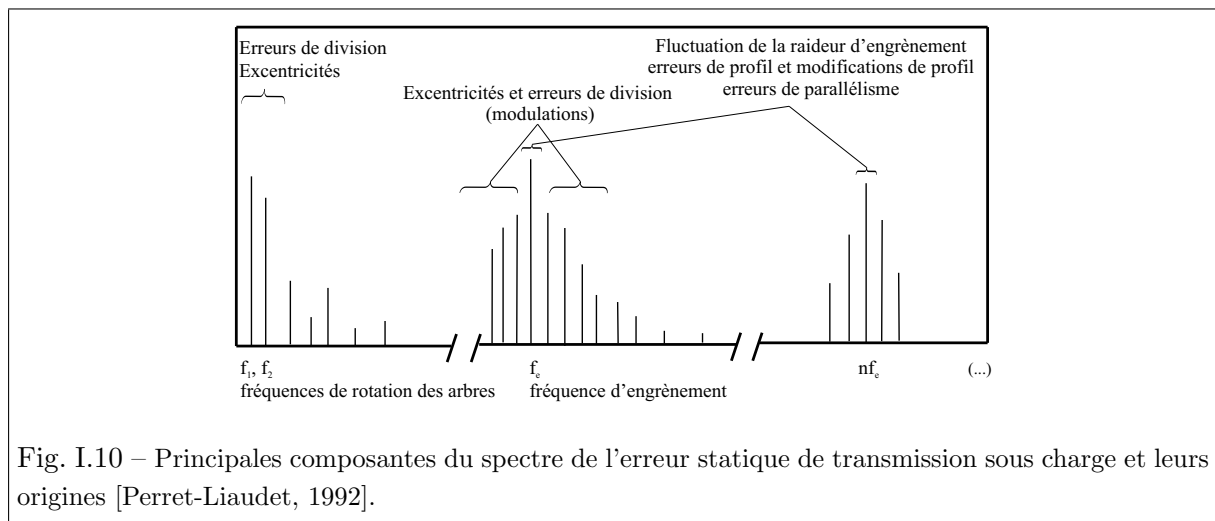
Les figures I.7 et I.8 présentent la variation temporelle pour un modèle linéaire et paramétrique de la raideur d'engrènement pour un engrenage droit ainsi que l'erreur statique de transmission associée à ce type de raideur d'engrènement.

La figure I.9 présente l'évolution temporelle sur deux périodes d'engrènement de l'erreur statique de transmission sous charge pour une charge transmise variant de 1500 N à 7500 N. L'engrenage est un engrenage droit en acier possédant 37/71 dents (37 dents sur la roue menante, 71 sur la roue menée). Le profil des dents est modifié par l'introduction d'une correction longitudinale de type bombé (parabolique). Cette correction de profil permet de minimiser les fluctuations de l'erreur statique de transmission pour une charge transmise donnée, ici égale à 6000 N.



1.2.4 Le spectre de l'erreur statique de transmission sous charge

La figure I.10 présente le contenu spectral de l'erreur statique de transmission sous charge. Ce spectre se caractérise par des raies autour des fréquences de rotation des arbres et ses harmoniques qui sont attribuées aux défauts d'excentricité [Welbourn, 1979] ou aux erreurs de division [Welbourn, 1979, Munro, 1990, Remond et al., 1993], et par des raies à la fréquence d'engrènement et ses harmoniques qui sont attribuées aux défauts de profil [Randall, 1982], aux défauts de parallélisme, et aux fluctuations de la raideur d'engrènement. Par ailleurs, la combinaison d'un défaut d'excentricité avec la fluctuation de la raideur d'engrènement induit la présence de raies latérales autour de la fréquence d'engrènement et de ses harmoniques [Kohler et al., 1970]. Ces raies traduisent un phénomène de modulation d'amplitude des raies à la fréquence d'engrènement ou ses harmoniques par les fréquences de rotation des arbres caractéristique des transmissions par engrenages. Identifiées dans le spectre de l'erreur dynamique, il est admis que ces raies sont également présentes dans le spectre de l'erreur statique. Notons enfin que le spectre peut s'avérer plus riche en basses fréquences en fonction du nombre de dents [Brière, 1991].



Finalement, le spectre d'excitation est marqué par de nombreuses composantes harmoniques, et ces composantes s'étalent sur une large gamme fréquentielle, depuis les fréquences de rotation des roues jusqu'aux harmoniques supérieurs de la fréquence d'engrènement. A titre d'exemple, prenons le cas d'un réducteur 49/49 dents en régime de fonctionnement à 1200 tr/min. La fréquence de rotation sur l'arbre d'entrée est donc égale à 20 Hz et la fréquence d'engrènement à 980 Hz. Le cinquième harmonique de cette fréquence se situe à 5880 Hz. L'étude du comportement vibratoire de cette transmission en prenant en compte les cinq premiers harmoniques de la fréquence d'engrènement nécessitera donc de travailler sur la bande [0-5880 Hz], c'est-à-dire assez haut en fréquences.

2 Comportement dynamique des transmissions par engrenages

L'étude du processus d'engrènement a permis de caractériser la source principale d'excitation interne d'une transmission, à savoir l'erreur statique de transmission sous charge qui résulte d'une part de l'erreur cinématique de transmission induite par les défauts de géométrie, et d'autre part des déformations élastiques induites par les fluctuations de la raideur d'engrènement et des déformations de l'ensemble des composants de la transmission. Mais si les caractéristiques de l'excitation sont aujourd'hui relativement bien connues, il est encore difficile de prédire le comportement dynamique global d'une transmission. En effet, certains phénomènes confèrent une grande complexité à ce comportement. On se propose ci-après d'en dégager les particularités essentielles.

2.1 Réponse multi-fréquentielle

L'erreur statique de transmission sous charge constitue une source d'excitation de type déplacement, mais aussi paramétrique. En effet, les fluctuations de la raideur d'engrènement qui évoluent de manière périodique à la fréquence d'engrènement en régime stationnaire lui sont associées. Ce sont ces dernières qui constituent à proprement parlé la source d'excitation paramétrique qui induit des phénomènes typiques de fonctionnement des transmissions par engrenages. Ainsi, la réponse de la transmission à une excitation purement harmonique est périodique et présente donc des raies absentes du spectre de l'excitation [Perret-Liaudet et Sabot, 1994, Perret-Liaudet, 1996]. Or, l'étude du spectre de l'erreur statique a permis de montrer que l'excitation couvre une large bande fréquentielle. Lorsque l'ensemble des raies de l'excitation est pris en compte, la réponse dynamique de la transmission est donc multi-fréquentielle et présente un spectre enrichi par rapport à celui de l'excitation. Au regard des caractéristiques élastodynamiques des composants de la transmission, le comportement vibratoire se situe généralement dans le domaine des basses fréquences au sens où la densité modale des modes vibratoires reste relativement faible et où les modes sont espacés. Ainsi, la prédiction du comportement dynamique d'une transmission peut s'appuyer sur une approche de type modal, valable en basses fréquences.

2.2 Résonances et instabilités paramétriques

Par ailleurs, la transmission peut être le siège de phénomènes de résonances et d'instabilités paramétriques. Ces phénomènes se traduisent par une augmentation de l'amplitude des vibrations. Les instabilités paramétriques sont associées à la réponse libre de la transmission, et les résonances paramétriques à la réponse vibratoire forcée. Les principales caractéristiques de ces phénomènes sont les suivantes [Bolotin, 1964, Nayfeh et Mook, 1979] :

- Les instabilités paramétriques apparaissent lorsque la pulsation d'engrènement ω_e est égale à $\frac{\Omega_i + \Omega_j}{n}$, $\Omega_{i,j}$ étant les pulsations propres de deux modes i et j de la transmission, et n un entier. La figure I.11 présente l'allure des zones instables en fonction de l'amplitude des fluctuations de la raideur d'engrènement μ et de la fréquence propre Ω dans le cas

d'un réducteur simple étage et pour deux valeurs de l'amortissement : on peut noter l'influence bénéfique de l'amortissement qui rejette les domaines d'instabilités vers des valeurs plus élevées de l'amplitude des fluctuations. Soulignons qu'un mouvement instable est physiquement limité par un cycle de pertes de contact suivi de chocs en reprise qui peuvent être dangereux pour la bonne tenue du mécanisme et qui peuvent être une source de nuisances sonores.

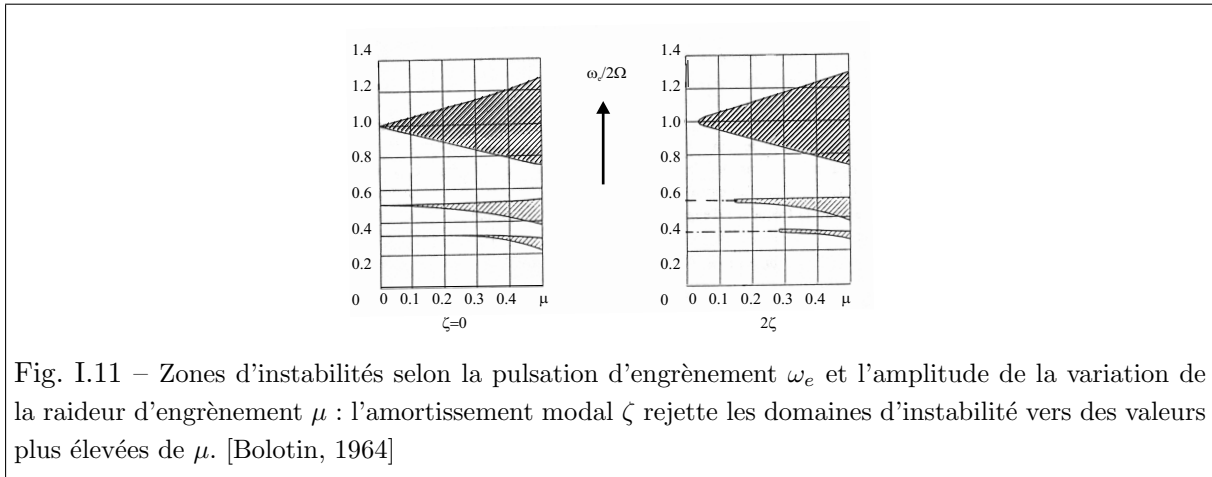


Fig. I.11 – Zones d'instabilités selon la pulsation d'engrènement ω_e et l'amplitude de la variation de la raideur d'engrènement μ : l'amortissement modal ζ rejette les domaines d'instabilité vers des valeurs plus élevées de μ . [Bolotin, 1964]

- Les résonances paramétriques apparaissent lorsque la pulsation d'engrènement ω_e est égale à $\frac{\Omega_i \pm \omega}{n}$, où n est un entier et $\omega = 2\pi f$ est la pulsation associée à l'excitation extérieure. Lorsque l'erreur de transmission est nulle et que seul subsiste un couple moyen statique ($\omega = 0$), il y a résonance paramétrique lors de la coïncidence entre la fréquence d'engrènement ou l'un de ses harmoniques et une fréquence propre de la transmission (Fig. I.12).

2.3 Phénomènes non linéaires

L'étude de la raideur d'engrènement au paragraphe 1.2.2 a permis de montrer que celle-ci est une source de non-linéarités. Les conditions d'appui aux paliers, les roulements, les jeux entre les dentures constituent également autant de sources de non-linéarités. Ces non-linéarités sont d'autant moins négligeables que les niveaux d'excitation sont importants.

2.4 Phénomènes d'amplification vibratoire pour certains régimes critiques

Parmi les modes propres de l'ensemble de la transmission, certains modes dits modes critiques jouent un rôle particulier car ils sont excités de manière privilégiée en résonance à certaines vitesses de fonctionnement dites vitesses critiques. Ces modes présentent une énergie de déformation importante localisée au niveau de la denture (modes de denture). L'excitation par l'erreur statique de transmission sous charge des modes de denture induit l'apparition aux vitesses de fonctionnement correspondantes de fortes surcharges dynamiques sur la denture. Les

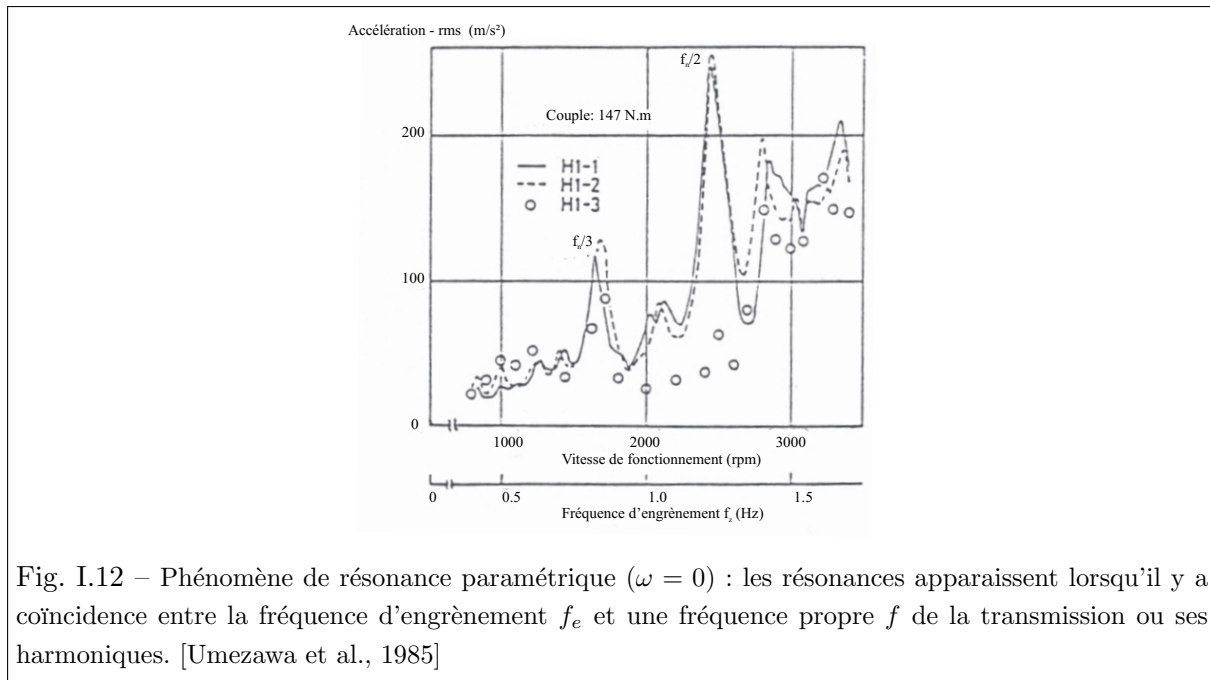


Fig. I.12 – Phénomène de résonance paramétrique ($\omega = 0$) : les résonances apparaissent lorsqu'il y a coïncidence entre la fréquence d'engrènement f_e et une fréquence propre f de la transmission ou ses harmoniques. [Umezawa et al., 1985]

amplifications de la surcharge dynamique engendrent des amplifications des efforts et moments dynamiques transmis au carter par les roulements si les modes de denture sont également des modes de roulement. Notons que les caractéristiques élastodynamiques du carter ont une influence sensible sur ces vitesses critiques. Ceci traduit l'existence de couplages forts entre la denture et le carter. Pour étudier la réponse dynamique de l'ensemble de la transmission, une des difficultés est d'intégrer simultanément une modélisation globale incluant les différents composants de la transmission et une modélisation locale décrivant plus finement l'engrènement, mais cela est nécessaire.

2.5 Sources d'amortissement

Les origines de l'amortissement sont nombreuses et difficiles à prendre en compte. Les propriétés de l'amortissement sont par ailleurs mal connues. A titre d'exemple et de manière non exhaustive on peut citer :

- l'amortissement visqueux induit par la lubrification, qui correspond à une dissipation d'énergie par écoulement laminaire d'un fluide dans un amortisseur, et qui donne lieu à une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse,
- l'amortissement hystérétique structurel présent dans toute structure mécanique, qui correspond à une dissipation d'énergie par frottement interne entre les matériaux, et qui donne lieu, en régime harmonique, à une force de dissipation proportionnelle et en quadrature avec les déplacements relatifs,
- l'amortissement de Coulomb, qui correspond à une dissipation d'énergie par frottement sec entre deux surfaces, et qui donne lieu à une force de dissipation non linéaire.
- la dissipation d'énergie au niveau des contacts hertziens entre les dentures et dans les

roulements (phénomène de fluid-pumping),

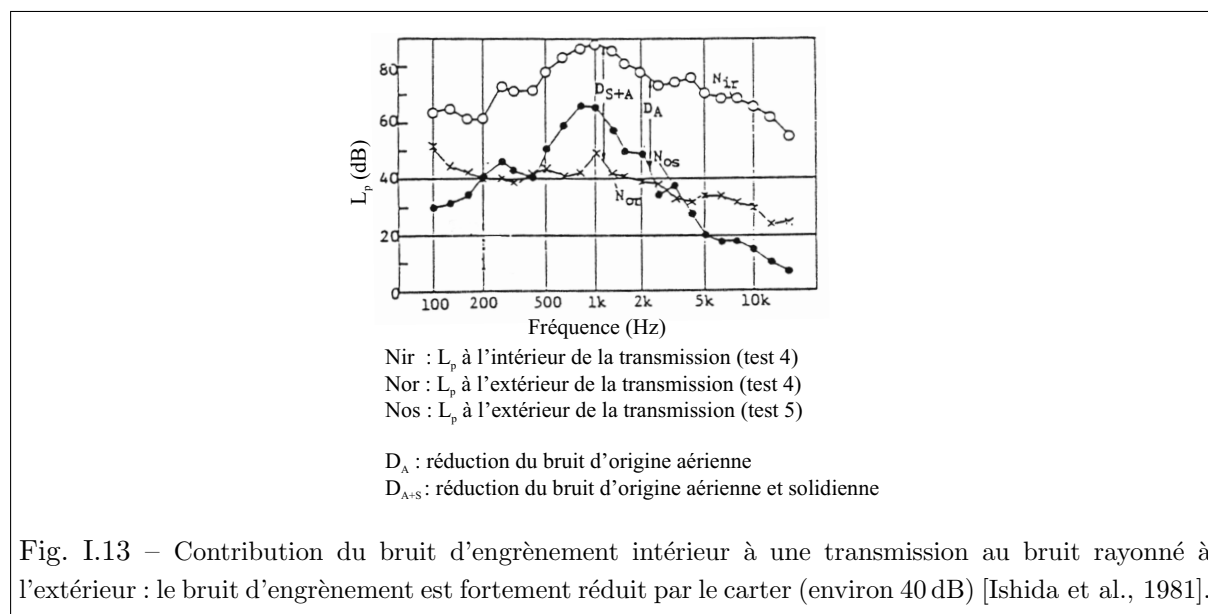
- la dissipation d'énergie liée au rayonnement acoustique.

Les données en terme de taux d'amortissement visqueux équivalent trouvées dans la littérature varient de 0,5% [Kasuba et Evans, 1981] à 17% [Ishimaru et Hirano, 1974], ce qui traduit la difficulté à quantifier de manière rigoureuse et précise cet amortissement.

3 Comportement acoustique des transmissions par engrenages

3.1 Principaux phénomènes mis en jeu

L'étude du comportement acoustique des transmissions est limitée ici au cas des transmissions fermées, et on s'intéresse donc au bruit de transmission associé au comportement vibratoire du carter constituant l'enveloppe de la transmission. Dans ce cas, seule la voie de propagation solidienne des vibrations est prise en compte et la contribution liée à la propagation aérienne est supposée négligeable : en effet, l'étude de Ishida et al. [Ishida et al., 1981] pour évaluer la contribution du bruit d'engrènement par rapport au bruit rayonné par le carter d'une boîte de vitesse automobile a permis de montrer que 95 % du bruit de transmission est d'origine solidienne (Fig. I.13), résultat néanmoins nuancé par Sibe [Sibe, 1997].

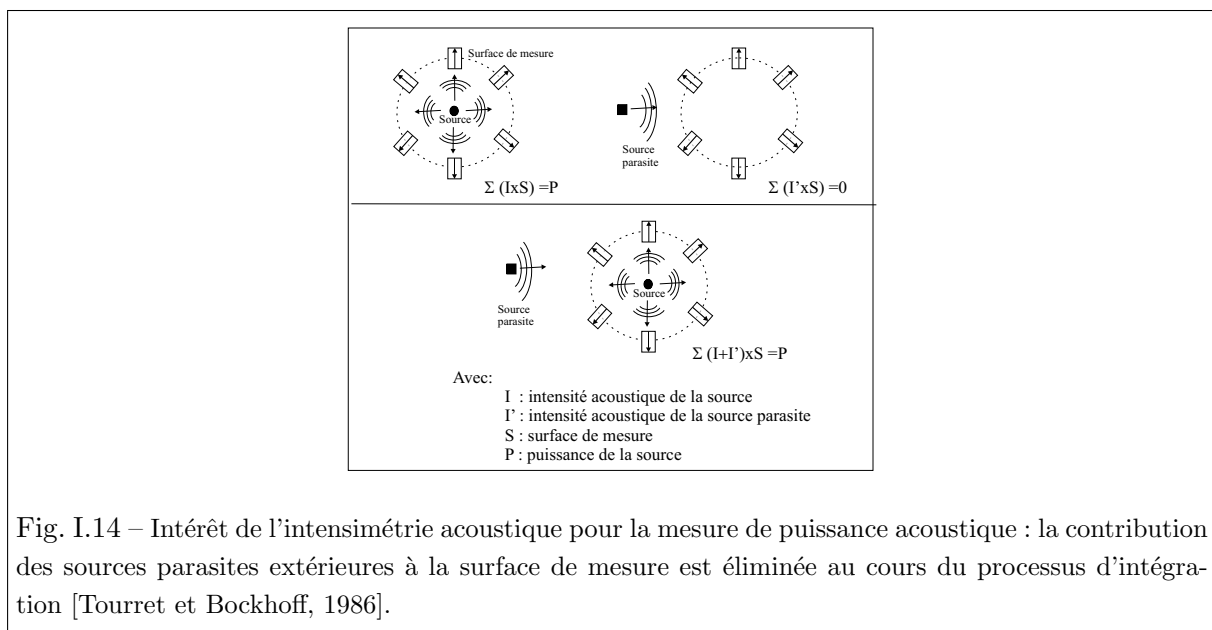


La prédiction du bruit de transmission reste toutefois complexe, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, il convient de décrire fidèlement les sources d'excitation interne, et le paragraphe 1 a montré que celles-ci ne sont pas facilement modélisables. Par ailleurs, l'élaboration d'un modèle dynamique global intégrant tous les composants de la transmission suppose de connaître précisément la géométrie de la transmission, ses caractéristiques mécaniques (inerties, raideurs, amortissements) et ses spécificités dynamiques (raideurs périodiques, non-linéarités, instabilités). Enfin, le calcul du rayonnement acoustique est complexifié notamment par le caractère multi-

fréquentiel du spectre de l'excitation (erreur statique de transmission).

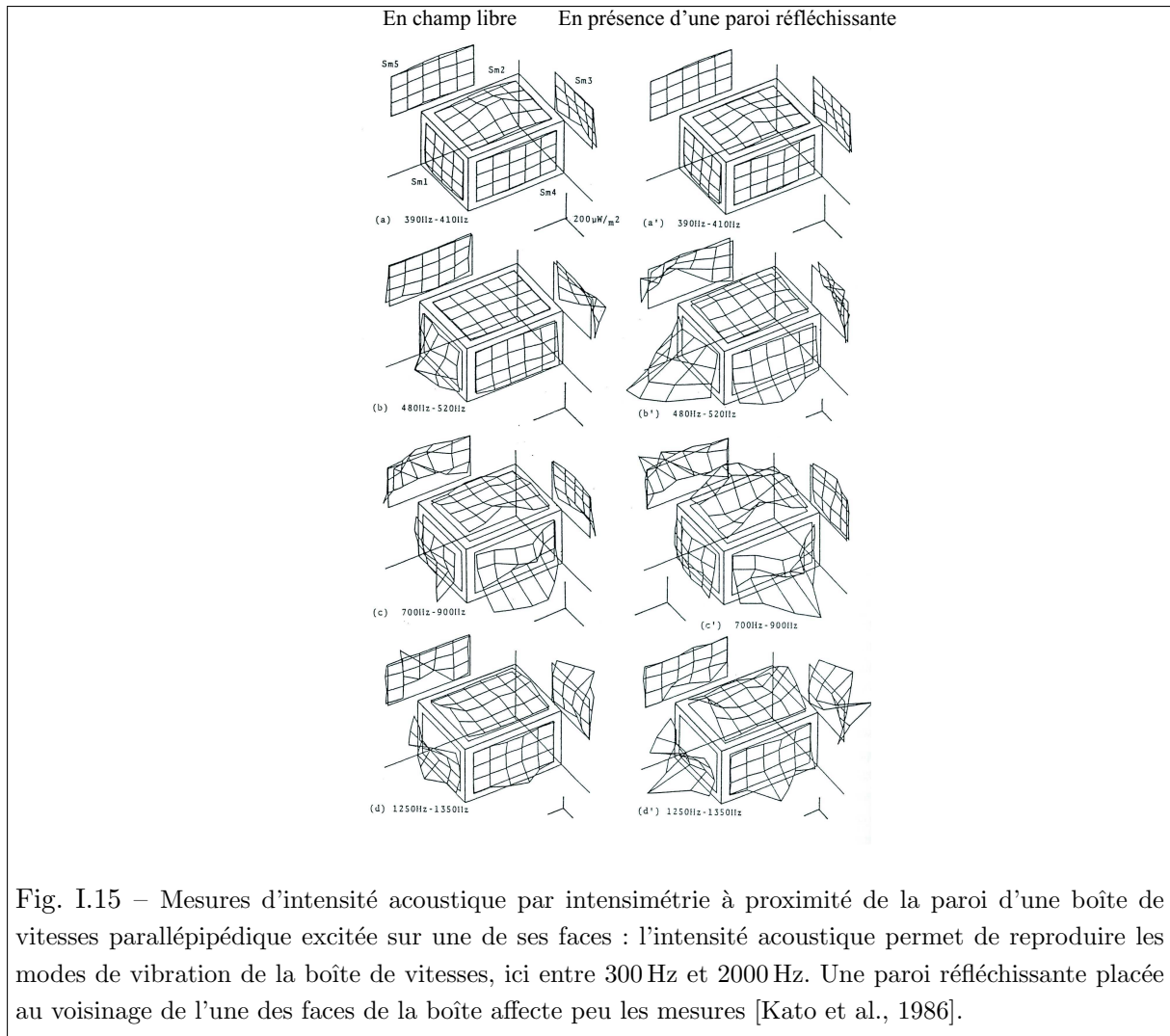
3.2 Description du comportement acoustique d'une transmission

Les premières publications relatives au comportement acoustique des transmissions par engrenages se présentent sous la forme de conseils à l'attention des concepteurs afin de réduire le bruit des transmissions. Ces conseils découlent la plupart du temps d'observations expérimentales réalisées sur un grand nombre de transmissions. Parmi ces publications, on peut citer notamment les travaux de synthèse de Opitz [Opitz, 1969] et de Welbourn [Welbourn, 1979] qui apparaissent comme des articles de référence.



Parmi les différentes techniques expérimentales couramment mises en œuvre, l'intensimétrie acoustique occupe une place importante [Singh et al., 1984, Jansen et De Wachter, 1986, Kato et al., 1986, Tourret et Bockhoff, 1986, Oswald et al., 1992] et est particulièrement adaptée à la détermination de la puissance acoustique rayonnée par un réducteur en éliminant l'influence des sources parasites et de la réverbération (Fig. I.14 et Fig. I.15).

Le développement des outils numériques dans le domaine de la vibroacoustique a accru les possibilités en terme de prédiction du bruit rayonné par les carters des transmissions par engrenages. Le problème du rayonnement acoustique d'une structure dont le comportement vibratoire est connu est un problème couramment résolu par la méthode des éléments finis de frontière, et c'est donc assez naturellement que cette méthode a été appliquée à la prédiction du bruit rayonné par les transmissions fermées [Seybert et al., 1991, Sabot et Perret-Liaudet, 1994, Ducret et Remond, 1996, Ducret, 1997, Rigaud, 1999]. Cette méthode permet d'étudier la transmission dans son intégralité et de prendre en compte la géométrie complexe du carter. En particulier, des irrégularités de surface ou de contour peuvent induire des phénomènes de diffraction acoustique qui peuvent être résolus par cette méthode.



Toutefois, les méthodes de calcul du rayonnement acoustique d'une structure dépendent du domaine fréquentiel d'étude. La méthode des éléments finis de frontière est adaptée pour des régimes de fonctionnement situés en basses fréquences. Or, la prédiction du bruit rayonné par une transmission par engrenages nécessite non seulement de prendre en compte les vibrations du carter de la transmission lorsque celle-ci est fermée mais également l'environnement au sein duquel est implantée la transmission. Le calcul est mené sur la même gamme de fréquences que celle évoquée pour la description de la réponse vibratoire, à savoir une gamme relativement étendue de 0 à environ 10 kHz. Aussi, d'un point de vue acoustique, le domaine fréquentiel d'analyse dépendra de la taille de la cavité où se propage le son, comme par exemple celle d'un compartiment moteur. Pour une cavité parallélépipédique, la densité modale est proportionnelle au volume de la cavité et au carré de la fréquence d'étude, de sorte que le nombre de modes acoustiques excités par les vibrations de la transmission croît rapidement. Il apparaît alors certains cas où le domaine des hautes fréquences s'impose pour le calcul acoustique. A notre connaissance, il n'existe pas de travaux permettant de résoudre ce problème et étudier le bruit rayonné par une

transmission pour les hauts régimes de fonctionnement.

4 Conclusion

L'étude du comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages est un problème difficile en raison de la complexité des phénomènes mis en jeu.

Les vibrations du carter sont induites par des sources d'excitation internes et/ou externes. Les sources internes sont associées majoritairement au processus d'engrènement et sont transmises au carter via tous les composants de la transmission : roues, arbres, paliers. Les sources externes sont associées d'une part aux actionneurs et aux récepteurs, tels que les moteurs et les trains roulants, et d'autre part aux vibrations de la structure d'accueil communiquées à la transmission par ses points d'attache. Parmi les sources d'excitation internes, l'erreur statique de transmission sous charge constitue la source dominante. Cette erreur est liée aux défauts de géométrie, aux déformations élastiques des dentures lors de l'application du couple moteur, et aux déformations de l'ensemble des composants de la transmission. Au cours de l'engrènement, on constate une fluctuation périodique du nombre de dents en prise telle que lors de la transmission d'un couple moteur, le rapprochement entre les dentures induit par les déformations élastiques de l'engrenage évolue dans le temps. Ce rapprochement constitue l'une des origines à l'erreur statique de transmission sous charge et donne lieu à la définition de la raideur d'engrènement. En régime de fonctionnement stationnaire, la raideur d'engrènement évolue de façon périodique à la fréquence d'engrènement et constitue une source d'excitation paramétrique. L'erreur statique de transmission sous charge induit des surcharges dynamiques sur les dentures.

Sous l'effet de l'excitation paramétrique, la réponse dynamique de la transmission est multi-fréquentielle et présente un spectre enrichi par rapport à celui de l'excitation. Par ailleurs, des phénomènes de résonances et d'instabilités paramétriques peuvent se produire. Au regard des caractéristiques élastodynamiques des composants de la transmission, le comportement vibratoire se situe généralement dans le domaine des basses fréquences. Ainsi, la prédiction du comportement dynamique d'une transmission peut s'appuyer sur une approche de type modal, valable en basses fréquences. En raison de l'existence de transferts entre les dentures d'engrenages et le carter, le calcul de la réponse dynamique nécessite de mettre en œuvre un modèle global incluant le carter.

L'état vibratoire du carter donne lieu au bruit rayonné désigné sous le terme de *bruit de transmission*. Le comportement acoustique d'une transmission fermée est conditionné par la géométrie du carter rayonnant, par la nature des fluides interne et externe et par la réponse vibratoire forcée de la transmission complète. Lorsque le fluide extérieur est léger (cas de l'air), les couplages fluide-structure peuvent être négligés. Diverses approches d'ordre empirique,

semi-empirique et numérique ont émergées pour résoudre le problème acoustique. Parmi ces approches, la méthode des éléments finis de frontière semble la plus adaptée à l'étude du rayonnement d'une structure vibrante et s'applique à des géométries de carter complexes. Elle permet d'étudier le bruit rayonné par une transmission dans le domaine des basses fréquences. Il faut noter cependant que lorsque la transmission rayonne à l'intérieur d'une cavité acoustique, le domaine fréquentiel d'analyse dépend de la taille de la cavité où se propage le son. Compte tenu de la gamme fréquentielle de la réponse vibratoire du carter classiquement comprise entre 0 et 5 à 10 kHz, l'étude du rayonnement acoustique d'une transmission se prête alors davantage à une approche de type hautes fréquences.

De ces constats nous sommes donc conduits à utiliser deux méthodes : une première méthode dédiée au domaine des basses fréquences pour calculer la réponse dynamique de la transmission à partir d'un modèle global de celle-ci incluant le carter, une seconde méthode dédiée au domaine des hautes fréquences pour évaluer le champ acoustique rayonné au sein de la cavité entourant la transmission. L'objet des deux chapitres suivants est de présenter les deux méthodes retenues.

Bibliographie

- [Bolotin, 1964] Bolotin, V. V. (1964). *The dynamic stability of elastic systems*. Holden-Day Inc., San Francisco. Traduit du russe.
- [Brière, 1991] Brière, P. (1991). *Contribution à l'étude du comportement dynamique des réducteurs harmoniques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. 203 pages.
- [Delhoume et al., 1993] Delhoume, P., Vercaemmen, M., Heringa, P., Lovat, G., Thome, J., et Arbey, H. (1993). L'analyse des mécanismes de génération de bruit : un outil pour la réduction du bruit à la source. cas des engrenages. *INRS - Cahier de notes documentaires*, 151 :279–292.
- [Driot, 2002] Driot, N. (2002). *Etude de la dispersion vibroacoustique des transmissions par engrenages*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. 166 pages.
- [Drosjack et Houser, 1977] Drosjack, M. et Houser, D. (1977). An experimental and theoretical study of the effects of simulated pitch line pitting on the vibration of a geared system - asme paper 77-det-123. Dans *DET Conferences*, pages 1–11, Chicago (USA).
- [Ducret, 1997] Ducret, P. (1997). *Prédiction du bruit rayonné par les carters des transmissions à engrenages*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. 150 pages.
- [Ducret et Remond, 1996] Ducret, P. et Remond, Y. (1996). Prédiction du comportement vibroacoustique d'une boîte de vitesses simplifiée. *Bulletin de l'Institut de l'Engrenage et des Transmission*, 112 :01–125.
- [Harris, 1958] Harris, S. (1958). Dynamic loads on the teeth of spur gears. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineering*, 172 :87–112.
- [Houjoh, 1991] Houjoh, H. (1991). An investigation of air flow induced by tooth meshing with regard to an aerodynamic sound generation. Dans *Proceedings of the JSME International Conference on Motion and Power Transmission*, pages 57–62, Hiroshima (Japon).
- [Houjoh et Umezawa, 1981] Houjoh, H. et Umezawa, K. (1981). Aerodynamic generation of meshing frequency sound by spur gears. Dans *Proceedings of the International Symposium on Gearing and Power Transmissions*, volume 2, pages 1–6, Tokyo (Japon).
- [Houser, 1988] Houser, D. (1988). Gear noise state of the art. Dans *Proceedings of Inter-Noise*, volume 2, pages 601–606, Avignon (France).
- [Ishida et al., 1981] Ishida, K., Matsuda, T., et Fukui, M. (1981). Effect of gearbox on noise reduction of geared device. Dans *Proceedings of the International Symposium on Gearing and Power Transmissions*, volume 2, pages 13–18, Tokyo (Japon).
- [Ishimaru et Hirano, 1974] Ishimaru, K. et Hirano, F. (1974). Dynamic behaviour of heavily-loaded spur gears. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 96 :373–381.
- [Jansen et De Wachter, 1986] Jansen, L. et De Wachter, L. (1986). Acoustic intensity measurements in aid of the design of gear casings for minimal noise radiation. Dans *Proceedings du 2ème Congrès Mondial des Engrenages*, volume 2, pages 599–604, Paris (France).

- [Kasuba et Evans, 1981] Kasuba, R. et Evans, J. (1981). An extended model for determining dynamic loads in spur gearing. *Journal of Mechanical Design*, 103 :853–864.
- [Kato et al., 1986] Kato, M., Takatsu, N., et Tobe, T. (1986). Sound power measurement of gearbox by intensity method. Dans *Proceedings of the 2nd World Congress on Gearing*, volume 1, pages 653–662, Paris (France).
- [Kohler et al., 1970] Kohler, H., Pratt, A., et Thompson, A. (1970). Dynamic and noise of parallel axis gearing. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineering*, 184 :111–121.
- [Munro, 1990] Munro, R. (1990). A review of the theory and measurement of gear transmission error. Dans *1st International Conference on Gearbox Noise and Vibration*, pages 3–10, Cambridge (UK).
- [Nayfeh et Mook, 1979] Nayfeh, A. et Mook, D. (1979). *Non-linear oscillations*. Wiley-Interscience, New-York.
- [NF-E-23-006, 1967] NF-E-23-006, N. A. (Juillet 1967). Précision des engrenages parallèles à denture en développante.
- [Opitz, 1969] Opitz, H. (1969). Noise of gears. *Phil. Trans. of Royal Society*, 263 :369–380.
- [Oswald et al., 1992] Oswald, F., Zakrajsek, J., Townsend, D., Atherton, W., et Lin, H. (1992). Effect of operating conditions on gearbox noise. Dans *The 1992 ASME design technical conferences - Proceedings of the 6th International Power Transmission and Gearing Conference*, pages 669–674, Scottsdale (Arizona).
- [Perret-Liaudet, 1992] Perret-Liaudet, J. (1992). *Etude des mécanismes de transfert entre l'erreur de transmission et la réponse dynamique des boîtes de vitesses d'automobile*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. 197 pages.
- [Perret-Liaudet, 1996] Perret-Liaudet, J. (1996). An original method for computing the response of a parametrically excited forced system. *Journal of Sound and Vibration*, 196(2) :165–177.
- [Perret-Liaudet et Sabot, 1994] Perret-Liaudet, J. et Sabot, J. (1994). Résolution des grands systèmes d'équations différentielles à coefficients périodiques : application aux transmissions par engrenages. Technical report, GDR 1138 Vibroacoustique, Colloque des 14 et 15 décembre 1994.
- [Randall, 1982] Randall, B. (1982). A new method of modelling gear default. *Journal of Mechanical Design*, 104 :259–267.
- [Remond et al., 1993] Remond, Y., Vexel, P., et Sabot, J. (1993). Comportement dynamique et acoustique des engrenages - synthèse bibliographique. *Publication du CETIM*. 192 pages.
- [Rigaud, 1999] Rigaud, E. (1999). Effect of gearbox design parameters on the vibratory response of its housing. Dans *Proceedings of the 4th World Congress on Gearing and Power Transmission*, pages 2143–2148, Paris (France).
- [Sabot et Perret-Liaudet, 1994] Sabot, J. et Perret-Liaudet, J. (1994). Computation of the noise radiated by a simplified gearbox. Dans *Proceedings of the 1994 International Conference*, pages 63–68, University of Newcastle upon Tyne (UK).

- [Seybert et al., 1991] Seybert, A., Wu, T., et Wu, X. (1991). Acoustical analysis of gear housing vibration. Technical report, NASA Technical Memorandum 103691.
- [Sibe, 1997] Sibe, A. (1997). *Etude de la transparence acoustique des carters des transmissions à engrenages*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. 183 pages.
- [Sibe, 1999] Sibe, A. (1999). Gearbox noise : description and modelling of the two main internal acoustic sources. *Acustica united with Acta Acustica*, 85 :850–858.
- [Singh et al., 1984] Singh, R., Zaremsky, G., et Houser, D. (1984). Modal analysis of a gear housing plate using acoustic intensity measurements. Dans *Proceedings of the International Modal Analysis Conference*, pages 265–271, Orlando (USA).
- [Tavakoli et Houser, 1986] Tavakoli, M. et Houser, D. (1986). Optimum profile modifications for the minimization of static transmission errors of spur gears. *ASME Journal of Mechanisms Transmissions, and Automation in Design*, 108 :86–95.
- [Tourret et Bockhoff, 1986] Tourret, J. et Bockhoff, M. (1986). Caractérisation du bruit aérien et solide émis par les réducteurs à engrenages : méthodes classiques et intensimétrie. Dans *Proceedings of the 2nd World Congress on Gearing*, volume 1, pages 635–643, Paris (France).
- [Umezawa et al., 1985] Umezawa, K., Suzuki, T., Houjoh, H., et Sato, T. (1985). Vibration of power transmission helical gears. *Bulletin of JSME*, 28(238) :694–700.
- [Welbourn, 1979] Welbourn, D. (1979). Fundamental knowledge of gear noise - a survey. Dans *Proceedings of IMechE Conference on Noise and Vibrations of Engines and Transmissions Conference*, pages 09–29, Cranfield (UK). Paper C117/79.

Chapitre II

Modèle dynamique de la transmission et méthode spectrale itérative

Introduction

Ce chapitre recense dans un premier temps les différents modèles dynamiques existants permettant de simuler le comportement vibratoire d'une transmission par engrenages induit par l'erreur statique de transmission. Il présente également les méthodes exploitées pour résoudre les équations du mouvement associées à ces modèles. Dans un deuxième temps, le modèle de transmission adopté dans le cadre de cette étude est détaillé. Les équations du mouvement pour ce modèle sont établies : la méthode spectrale itérative est la méthode retenue afin d'évaluer la réponse vibratoire de la transmission à l'erreur statique de transmission qui constitue la source d'excitation dominante.

Sommaire

1	Etude bibliographique	31
1.1	Modèles dynamiques	31
1.1.1	Modélisation de l'interface d'engrènement	31
1.1.2	Modélisation des composants de la transmission	32
1.1.3	Prise en compte de l'amortissement	36
1.2	Méthodes de calcul	36
1.2.1	Décomposition modale	36
1.2.2	Résolution des équations	37
2	Modèle dynamique	38
2.1	Justification du modèle	38
2.2	Equations du mouvement	39
2.3	Equations modales	41

3	Méthode spectrale itérative	41
3.1	Réponses modales dans le domaine fréquentiel	41
3.2	Equation régissant l'erreur dynamique de transmission σ	42
3.3	Equation régissant la surcharge dynamique de denture $\tilde{f}_d(\omega)$	42
3.4	Equation régissant la réponse vibratoire de la transmission $\tilde{x}(\omega)$	43
3.5	Résolution	43
4	Modes de denture	44
5	Conclusion	46
	Bibliographie	49

1 Etude bibliographique

1.1 Modèles dynamiques

De très nombreux auteurs ont développé des modèles diversifiés de transmissions par engrenages afin de calculer leur réponse dynamique. Plusieurs études bibliographiques [Ozguven et Houser, 1988, Remond et al., 1993] font l'inventaire des travaux dans le domaine, qu'il convient de compléter par des travaux plus récents. Ces modèles se différencient notamment par le choix des composants de la transmission pris en compte et la finesse de modélisation des conditions de contact. La mise en place de ces modèles s'appuie sur de nombreux travaux concernant la modélisation de l'interface d'engrènement, l'introduction des composants de la transmission (paliers de type roulements, carter), la prise en compte de l'amortissement.

1.1.1 Modélisation de l'interface d'engrènement

La prise en compte des conditions d'engrènement dépend du modèle de raideur adopté tel que présenté au paragraphe I.1.2.2. Afin de simplifier l'exposé, le modèle de transmission utilisé pour la modélisation de l'interface d'engrènement est un modèle à 1 degré de liberté.

Modèle linéaire à coefficient constant

Lorsque la raideur d'engrènement introduite est constante, égale à la raideur moyenne temporelle d'engrènement \bar{k} , l'équation qui gouverne la réponse non amortie $x(t)$ de la transmission en l'absence de sources externes s'écrit :

$$m \ddot{x}(t) + \bar{k} x(t) = \bar{k} x_s(t). \quad (\text{II.1})$$

Les termes excitateurs sont introduits via l'erreur statique de transmission sous charge $x_s(t)$ qui constitue une excitation de type déplacement. Les caractéristiques de cette excitation sont évaluées à partir d'un calcul statique préalable ou éventuellement mesurées. Cette équation est généralisable à un système ayant un grand nombre de degrés de liberté. Dans ce cas, la résolution de cette équation matricielle est basique et s'appuie sur l'analyse modale de la transmission. En revanche, ce modèle ne permet pas de prendre en compte l'excitation paramétrique liée aux fluctuations de la raideur d'engrènement ni les phénomènes non linéaires. Ainsi, ce modèle s'applique à des engrenages chargés, présentant de faibles fluctuations de raideur d'engrènement et soumis à des niveaux d'excitation modérés.

Modèle linéaire à coefficient paramétrique

Ce modèle vise essentiellement à introduire les fluctuations périodiques de la raideur d'engrènement $k(t)$, source d'excitation paramétrique, tout en restant dans le domaine linéaire. De manière générale, en l'absence de sources d'excitation externes, l'équation qui gouverne la réponse non amortie $x(t)$ de la transmission s'écrit :

$$m \ddot{x}(t) + k(t) x(t) = k(t) x_s(t). \quad (\text{II.2})$$

Cette équation est une équation de type Mathieu-Hill. Les paramètres $k(t)$ et $x_s(t)$ sont calculés préalablement pour la transmission fonctionnant en régime quasi-statique. La valeur moyenne et les fluctuations de la raideur d'engrènement ainsi que l'erreur statique de transmission sous charge dépendent alors du couple moyen transmis. Cette équation permet de reproduire les phénomènes paramétriques associés au fonctionnement des transmissions évoqués au paragraphe I.2 tels que les instabilités paramétriques, les résonances paramétriques, la réponse multifréquentielle. A nouveau, cette équation est généralisable à un système ayant un grand nombre de degrés de liberté : toutefois la résolution n'est pas standard et s'appuie sur des méthodes spécifiques qui seront détaillées ultérieurement. Ce modèle s'applique à des engrenages chargés et soumis à des niveaux d'excitation modérés, c'est-à-dire en l'absence de pertes de contact entre les dents en prise, et si le système s'écarte peu de la position d'équilibre statique.

Modèle non linéaire

Lorsque les niveaux d'excitation augmentent et/ou que les charges transmises sont faibles, des pertes de contact entre les dentures d'engrenages peuvent se produire. Aux fluctuations de la raideur d'engrènement associées au processus d'engrènement viennent alors s'ajouter les fluctuations des efforts dynamiques sur les dentures : le cas limite correspond à la perte de contact suivi d'une reprise de contact avec chocs. En l'absence de sources d'excitation externes, l'équation non linéaire qui gouverne la réponse non amortie $x(t)$ de la transmission s'écrit :

$$m \ddot{x}(t) + F_d(x(t), \dot{x}(t), t) = F. \quad (\text{II.3})$$

Cette équation permet d'étudier les phénomènes de chocs induits par des pertes de contact entre dentures [Singh et al., 1989, Kahraman et Singh, 1990, Pfeiffer, 1991, Pfeiffer, 1996]. Dans ce cas, l'effort F_d est associé à une raideur non linéaire entre les dents en prise qui devient nulle lorsqu'il y a perte de contact. En raison des variations des paramètres avec la réponse dynamique de la transmission, seule une méthode basée sur une intégration temporelle pour laquelle les paramètres sont actualisés à chaque pas de temps permet de résoudre cette équation. Dès lors, les modèles non linéaires ne sont pas adaptés aux systèmes ayant un grand nombre de degrés de liberté car ils conduisent à des temps de calcul prohibitifs.

1.1.2 Modélisation des composants de la transmission

Deux classes de modèles peuvent être répertoriées :

- les modèles simplifiés à faible nombre de degrés de liberté, généralement des modèles de torsion pure, dont la simplicité de mise en oeuvre constitue l'intérêt principal : ces modèles permettent d'effectuer des analyses qualitatives et d'introduire une modélisation raffinée des conditions de contact,
- les modèles à plus grand nombre de degrés de liberté permettant d'intégrer de manière plus précise l'environnement de la transmission comme par exemple les propriétés élasto-dynamiques du carter.

Modèles de torsion pure

Les premiers travaux de modélisation se sont orientés vers des modèles linéaires paramétriques de torsion pure pour lesquels le système est décomposé en inerties concentrées reliées par des raideurs de torsion représentatives des contributions de l'ensemble des parties déformables [Tuplin, 1950, Tuplin, 1953]. Ces modèles négligent les mouvements de flexion, en particulier les couplages "flexion - torsion". Ils se limitent à des études dans le plan d'action de l'engrenage. Le modèle le plus simple est un modèle de torsion pure à 2 degrés de liberté où les deux roues sont représentées par deux inerties en rotation reliées par une raideur en torsion. Un modèle un peu plus sophistiqué est un modèle à 4 degrés de liberté pour lequel les inconnues sont les positions angulaires du moteur, du pignon, de la roue et de la charge (Fig. II.1). On note θ_j ($j = 1,2,3,4$) les rotations associées au moteur, au pignon, à la roue et à la charge. En l'absence d'efforts excitateurs externes et de sources d'amortissement, les paramètres de ce modèle sont :

- les inerties des roues de l'engrenage (I_2 et I_3), l'inertie du moteur (I_1) et l'inertie de la charge (I_4),
- les raideurs en torsion des accouplements k_1 et k_2 (N.m/rad) respectivement entre le moteur et le pignon et entre la roue et la charge, la raideur d'engrènement $k(t)$ (N/m) qui couple la rotation du pignon θ_2 à la rotation de la roue θ_3 .

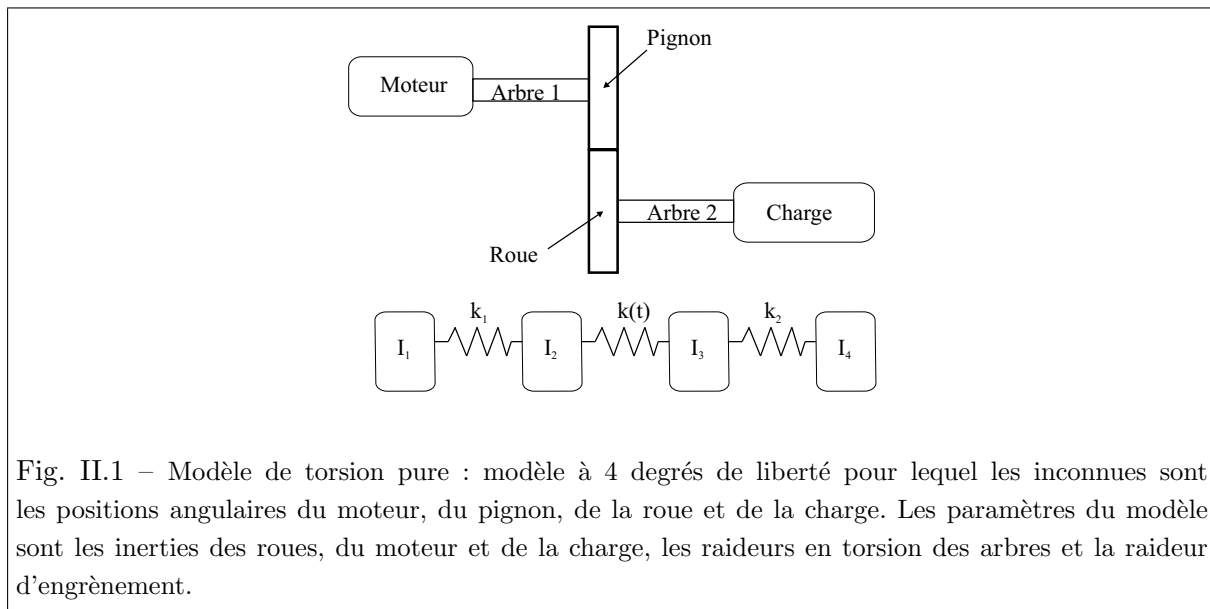


Fig. II.1 – Modèle de torsion pure : modèle à 4 degrés de liberté pour lequel les inconnues sont les positions angulaires du moteur, du pignon, de la roue et de la charge. Les paramètres du modèle sont les inerties des roues, du moteur et de la charge, les raideurs en torsion des arbres et la raideur d'engrènement.

On s'intéresse à la réponse dynamique forcée de cette transmission à l'erreur statique de transmission. Celle-ci est prise en compte en introduisant une erreur angulaire θ_3^* sur la roue de sortie de la transmission : cette erreur, comptée négativement, traduit un enlèvement de matière sur la denture.

Les équations du mouvement non amorties de la transmission s'écrivent :

$$\begin{aligned}
I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 (\theta_1 - \theta_2) &= 0 \\
I_2 \ddot{\theta}_2 + k_1 (\theta_2 - \theta_1) + k(t) R_{b1} (R_{b1} \theta_2 + R_{b2} \theta_3 - R_{b2} \theta_3^*) &= 0 \\
I_3 \ddot{\theta}_3 + k_2 (\theta_3 - \theta_4) + k(t) R_{b2} (R_{b1} \theta_2 + R_{b2} \theta_3 - R_{b2} \theta_3^*) &= 0 \\
I_4 \ddot{\theta}_2 + k_1 (\theta_2 - \theta_1) &= 0,
\end{aligned} \tag{II.4}$$

où R_{b1} et R_{b2} désignent les rayons de base du pignon et de la roue. Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[I] \{\ddot{\theta}(t)\} + [K] \{\theta(t)\} + k(t) [U] \{\theta(t)\} = k(t) e(t) \{R\} \tag{II.5}$$

avec

$$[I] = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 \end{pmatrix}, \quad [K] = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 \end{pmatrix}, \quad [U] = \{R\}^t \{R\}, \quad \{R\} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{b1} \\ R_{b2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e(t) = R_{b2} \theta_3^*(t)$$

ou encore :

$$[I] \{\ddot{\theta}(t)\} + [\bar{K}] \{\theta(t)\} + g(t) [U] \{\theta(t)\} = k(t) e(t) \{R\} \tag{II.6}$$

avec $[\bar{K}] = [K] + \bar{k}(t) [U]$ et $g(t) = k(t) - \bar{k}(t)$. Cette équation est une équation de type Mathieu-Hill analogue à l'équation (II.2).

Les modèles de torsion pure ne permettent bien évidemment de reproduire que les modes de torsion de la transmission, et ne permettent pas de prendre en compte les modes couplés de torsion/flexion. L'intérêt principal de ces modèles est leur relative simplicité de mise en oeuvre, et le faible nombre d'équations sur lesquelles ils reposent permet d'effectuer des analyses qualitatives préliminaires et de tester des méthodes de résolution avant de recourir à des modèles à plus grand nombre de degrés de liberté. Ils peuvent également être suffisants pour évaluer l'erreur dynamique de transmission exprimée sous la forme d'un écart angulaire ainsi que les surcharges dynamiques s'exerçant sur les dentures. Enfin, ces modèles permettent de prendre en compte les non-linéarités de l'engrènement (raideurs et jeux), l'excitation paramétrique liée aux fluctuations de la raideur d'engrènement, et la géométrie fine des dentures (profil, corrections, bombés). Bien sûr, ces modèles ne permettent pas de prédire l'état vibratoire du carter.

Modèles de torsion-flexion-compression

Souvent basés sur une description par éléments finis, ces modèles permettent de palier aux carences des modèles de torsion pure présentés précédemment en prenant en compte l'ensemble des degrés de liberté de la transmission et donc les couplages entre les vibrations en flexion et en torsion des arbres et de leurs supports, et les déformations en traction-compression. Par ailleurs,

ces modèles permettent d'introduire l'ensemble des éléments de la transmission tels que les lignes d'arbres et les paliers et de reproduire plus finement les déformations ainsi que les interactions entre les roulements, les arbres et les roues dentées. On peut citer par exemple les modèles utilisés par Neriya [Neriya et al., 1985, Neriya et al., 1988], Kahraman [Kahraman et al., 1989], Ozgüven [Ozguven et Kesan, 1992], Perret-Liaudet [Perret-Liaudet, 1992] et Rigaud [Rigaud, 1998]. En général, les roues dentées sont modélisées par des solides indéformables et leur mouvement est décrit par 6 degrés de liberté. La raideur d'engrènement est introduite sous la forme d'une matrice 12×12 qui couple les degrés de liberté des roues dentées et qui intègre les déformations des dents. Les lignes d'arbre sont modélisées par des éléments poutre à 2 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud. Les roulements peuvent être introduits à partir de leur représentation dans les modèles de torsion pure sous la forme de matrices de couplage entre les lignes d'arbre et le carter de la transmission.

Pour éviter des temps de calcul prohibitifs, les contacts sont le plus souvent linéarisés et ces modèles ne permettent pas d'introduire les non-linéarités de l'engrènement. A nouveau, le carter n'est pas pris en compte de sorte que l'état vibratoire de celui-ci ne peut être prédit à l'aide de ces modèles. Leur principal intérêt est le bon compromis entre la précision des résultats et les temps de calcul qu'ils permettent pour des transmissions à carter très rigide.

Modèles dynamiques globaux

Les modèles dynamiques élaborés d'une transmission décrits précédemment prennent en compte l'élasticité des arbres en torsion et en flexion, ainsi que celle des paliers, mais peu de ces modèles incluent les propriétés élastodynamiques des carters. Dans la plupart des cas, la raideur du carter est supposée très grande au regard de celles des autres éléments de la transmission, et le carter est considéré comme étant infiniment rigide [Valex, 1988]. Pourtant Perret-Liaudet [Perret-Liaudet, 1992] et Rigaud [Rigaud, 1998] ont montré qu'il existe des phénomènes de couplage entre les réponses dynamiques observées sur le carter et celles observées à la denture.

Les premiers modèles incluant le carter sont apparus dans les années 1990 afin de prédire le rayonnement acoustique des transmissions fermées (Storm [Storm, 1991], Takatsu [Takatsu et al., 1991], Maruyama [Maruyama et al., 1992], Perret-Liaudet [Perret-Liaudet, 1992], Inoue [Inoue et al., 1993], Kato [Kato et al., 1994], Rigaud [Rigaud, 1998], Ducret [Ducret, 1997]). Ces modèles sont basés sur une discrétisation de type éléments finis du carter en éléments plaques et/ou volumiques. Inoue [Inoue et al., 1993] discrétise un carter parallélépipédique rectangle à l'aide d'éléments plaques et optimise l'épaisseur de chaque élément pour minimiser le transfert vibratoire entre un effort normal harmonique unitaire appliqué sur les noeuds correspondant aux roulements et la réponse vibratoire du carter nu. Les efforts normaux appliqués correspondent aux efforts axiaux transmis par les roulements au carter. Maruyama [Maruyama et al., 1992] s'intéresse à la réponse vibratoire et acoustique de carters nus de différentes formes. Storm [Storm, 1991] assimile chaque face du carter à une plaque homogène rectangulaire simplement appuyée et bafflée. Chaque plaque

est soumise à des efforts normaux appliqués sur les noeuds correspondant aux roulements : ces efforts sont déterminés à partir de l'erreur statique de transmission et d'une modélisation dynamique de l'engrenage et des lignes d'arbres. Takatsu [Takatsu et al., 1991] s'intéresse à la réponse vibratoire du carter nu soumis aux efforts radiaux transmis par les roulements calculés préalablement en supposant le carter rigide. Kato [Kato et al., 1994] procède de la même façon pour étudier la réponse vibratoire du carter aux moments transmis par les roulements.

Les hypothèses utilisées dans certains cas sont cependant discutables. Notons par exemple que la prise en compte des seuls efforts axiaux transmis par les roulements est réductrice car les efforts radiaux et les moments influent également sur la réponse vibratoire du carter. Par ailleurs, le carter est considéré la plupart du temps comme étant découplé des lignes d'arbre ce qui conduit à utiliser les modes propres du carter nu et à supposer qu'il n'y a pas d'effet du carter sur la surcharge dynamique à la denture. Or, les modes propres du carter nu sont différents des modes propres du carter couplé aux lignes d'arbre et les propriétés élastiques et géométriques du carter peuvent modifier le transfert entre l'erreur de transmission et les efforts transmis par les roulements au carter. Un modèle plus rigoureux se doit donc d'intégrer le couplage entre les lignes d'arbres et le carter.

1.1.3 Prise en compte de l'amortissement

La méconnaissance profonde de l'amortissement (paragraphe I.2.5) conduit généralement à introduire celui-ci sous la forme d'un taux d'amortissement visqueux équivalent qui se traduit par l'ajout d'une matrice d'amortissement $[C]$ dans les équations régissant le comportement de la transmission. Cette matrice est inconnue, mais la résolution des équations par les méthodes basées sur le principe de superposition modale permet de remplacer la matrice $[C]$ par son équivalent dans l'espace modal ${}^t[V][C][V] = \text{diag}[2 m_i \omega_i \zeta_i]$, où $[V]$ est la matrice des vecteurs propres de la transmission non amortie, m_i la masse modale et ζ_i le facteur d'amortissement du mode i à la pulsation ω_i . Les facteurs d'amortissement modaux peuvent être évalués expérimentalement par les méthodes d'identification modale classiques. Toutefois, l'utilisation de ces facteurs ne permet pas d'isoler les contributions respectives de chacune des sources d'amortissement.

1.2 Méthodes de calcul

1.2.1 Décomposition modale

La résolution des équations du mouvement s'appuie généralement sur une décomposition du vecteur déplacement $\{X(t)\}$ dans la base des modes propres de la transmission. En toute rigueur, puisque la matrice de raideur varie au cours du temps, la notion de modes propres n'existe pas. De nombreux auteurs [Perret-Liaudet, 1992, Bard, 1995] définissent alors la base modale de la transmission à partir de la matrice globale de raideur moyennée en temps $[\bar{K}]$. Les modes propres ainsi calculés correspondent aux modes propres qu'aurait la transmission complète si les termes fluctuants de raideur étaient nuls. On désignera par la suite cette base sous le terme de base modale de la transmission. Notons à nouveau $[V]$ la base modale constituée

des n vecteurs propres $\{V^{(i)}\}$ pour une transmission discrétisée en n degrés de liberté. Le vecteur des déplacements nodaux $\{X(t)\}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\{X(t)\} = [V] \{q(t)\}, \quad (\text{II.7})$$

où $\{q(t)\}$ constitue le vecteur des coordonnées modales. Notons que l'utilisation communément admise par de nombreux auteurs du principe de superposition modale nous conforte sur le caractère basses fréquences du comportement vibratoire d'une transmission.

1.2.2 Résolution des équations

Les méthodes d'intégration temporelle

Les méthodes d'intégration temporelle telles que la méthode de Runge-Kutta ou la méthode de Newmark consistent à intégrer pas à pas les équations du mouvement. Les équations sont satisfaites pour des temps t_i discrets, et il est nécessaire de prendre en compte les variations de $\{X(t)\}$, $\{\dot{X}(t)\}$, et $\{\ddot{X}(t)\}$ entre chaque itération.

L'intérêt de ces méthodes est de permettre de résoudre aussi bien le problème à coefficients périodiques qu'à coefficients constants. Elles permettent également de prendre en compte l'ensemble du contenu fréquentiel de la source excitatrice. Notons enfin qu'elles s'appliquent également à l'étude des modèles non linéaires.

Toutefois, ces méthodes présentent l'inconvénient de conduire à des temps de calcul longs lorsque les excitations sont large bande et lorsque le modèle de la transmission est un modèle à grand nombre de degrés de liberté. La prise en compte des excitations à basse fréquence (fréquences de rotation des arbres) nécessite une discrétisation temporelle sur une période longue et la prise en compte des excitations à haute fréquence (fréquence d'engrènement et ses harmoniques) nécessite un pas de temps fin. Le nombre de pas nécessaires à la discrétisation temporelle des signaux devient donc très grand.

Les méthodes de perturbation

Basées sur l'hypothèse que les variations de la raideur d'engrènement sont faibles, les méthodes de perturbation consistent à rechercher la solution sous la forme d'une somme constituée d'une partie principale et de termes de poids décroissants. Dans le cas des systèmes linéaires à coefficients périodiques, le poids s'exprime comme une puissance croissante du rapport entre la raideur d'engrènement et sa valeur moyenne. En identifiant les termes du même ordre, il vient une série de systèmes différentiels à coefficients constants dont les solutions sont connues.

Ces méthodes permettent un gain en temps de calcul intéressant par rapport aux méthodes d'intégration temporelle, par contre elles sont difficiles à mettre en oeuvre lorsque le spectre des sources d'excitation est riche et complexe.

La méthode spectrale itérative

Perret-Liaudet [Perret-Liaudet, 1992, Perret-Liaudet et Sabot, 1994, Perret-Liaudet, 1996] a développé une méthode baptisée méthode spectrale itérative qui permet de résoudre les systèmes d'équations à coefficients périodiques en minimisant les temps de calcul. Cette méthode ne s'appuie pas sur une description temporelle des grandeurs très coûteuse en temps de calcul, mais sur une description spectrale de l'erreur statique de transmission et de la raideur d'engrènement. Cette méthode, qui est mise en oeuvre dans le cadre de cette étude, est détaillée au paragraphe 3.

2 Modèle dynamique

2.1 Justification du modèle

Compte tenu des modèles décrits précédemment pour l'interface d'engrènement, pour les composants de la transmission et pour les sources d'amortissement, la question qui se pose à présent est d'adopter un modèle de transmission par engrenages adapté à l'étude réalisée dans le cadre de cette thèse.

Celle-ci porte sur la prédiction du bruit rayonné par une transmission par engrenages. Il apparaît au regard de l'étude bibliographique que l'intégration du carter au sein du modèle de la transmission est indispensable à la prédiction du bruit rayonné par celle-ci. Plus précisément, en raison de l'existence de transferts entre les dentures d'engrenages et le carter, le calcul de la réponse dynamique d'une transmission nécessite de mettre en oeuvre un modèle intégrant l'ensemble des composants de la transmission, lignes d'arbres, paliers et carter inclus. Ce calcul nécessite par ailleurs d'introduire les matrices de couplage élastique des dentures ainsi que les matrices de raideur des roulements. Les modèles dynamiques globaux présentés au paragraphe 1.1.2 apparaissent alors comme les plus adaptés pour cette étude. Ces modèles s'appuient sur une discrétisation de la transmission par la méthode des éléments finis et comprennent un grand nombre de degrés de liberté, de l'ordre de 5000 à 10 000 pour un modèle académique, et jusqu'à 100 000 pour un modèle industriel.

Face aux temps de calcul prohibitifs auxquels conduit l'introduction dans les modèles à grand nombre de degrés de liberté des non-linéarités associées à l'engrènement ou aux roulements, ces non-linéarités ne sont pas prises en compte et les conditions de contact sont linéarisées. On suppose donc que le couple moteur est suffisant pour prévenir toute perte de contact entre les dentures de la transmission. Par ailleurs, on considère que la valeur moyenne de la raideur d'engrènement et les raideurs des roulements ne sont pas affectées par les déformations dynamiques de la transmission lorsque les efforts dynamiques restent suffisamment faibles devant les efforts statiques induits par le couple moteur et les précharges des roulements.

On s'intéresse à la réponse dynamique forcée de la transmission à l'erreur statique de transmission. Les termes gyroscopiques centrifuges sont négligés tout comme les fluctuations du couple appliqué à l'entrée. La fluctuation de la raideur d'engrènement est une fonction périodique du

temps de fréquence fondamentale égale à la fréquence d'engrènement.

L'étude est limitée aux transmissions en régime de fonctionnement stationnaire pour lesquels les vitesses moyennes de rotation des arbres demeurent constantes.

2.2 Equations du mouvement

L'erreur de transmission et les fluctuations de raideur d'engrènement constituent les seules sources d'excitation. Les roues dentées sont modélisées par des éléments de masse et d'inertie en rotation rapportés sur les noeuds des lignes d'arbres correspondants. Les déplacements de chaque roue sont définis par les 6 degrés de liberté associés à son centre, trois translations u_i, v_i, w_i suivant les axes respectifs $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ et trois rotations $\varphi_i, \psi_i, \theta_i$ autour de ces mêmes axes (Fig. II.2). Le couplage élastique entre les dents en prise induit par la raideur d'engrènement est introduit sous la forme d'une matrice de raideur qui s'écrit $k(t)[S]$. $k(t)$ est la raideur d'engrènement linéarisée autour de la position d'équilibre statique et d'évolution temporelle périodique en régime stationnaire. La matrice $[S]$ traduit le couplage élastique entre la roue menante de la transmission et la roue menée : ainsi, cette matrice couple les 6 degrés de liberté du noeud central de la roue menante aux 6 degrés de liberté du noeud central de la roue menée. Il s'agit d'une matrice carrée de rang 12 non diagonale calculée à partir des caractéristiques géométriques de l'engrenage et qui s'exprime dans le repère orthonormé direct $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ défini sur la figure II.2 comme le produit d'un vecteur $\{R_s\}$ par son transposé soit [Perret-Liaudet, 1992] :

$$[S] = \{R_s\}^t \{R_s\} \quad (\text{II.8})$$

avec :

$$\{R_s\} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \tan \beta_b, & R_{b1} \tan \alpha_t \tan \beta_b, & -R_{b1} \tan \beta_b, & R_{b1}, \\ 0, & -1, & -\tan \beta_b, & R_{b2} \tan \alpha_t \tan \beta_b, & -R_{b2} \tan \beta_b, & R_{b2} \end{pmatrix}.$$

${}^t\{R_s\}$ désigne la transposée du vecteur $\{R_s\}$. R_{b1}, R_{b2} sont les rayons de base des roues menante et menée, α_t est l'angle de pression apparent de fonctionnement, et β_b est l'angle d'hélice de base.

La transmission complète est discrétisée par la méthode des éléments finis. Les matrices globales de masse $[M]$ et de raideur $[K_e]$ de la transmission sont obtenues de manière classique par assemblage des matrices élémentaires. En tenant compte du couplage induit par la raideur d'engrènement, la matrice de raideur totale peut s'écrire en dissociant les termes fluctuants associés à la raideur d'engrènement des termes moyens :

$$[K(t)] = [K_e] + k(t)[U] = [\bar{K}] + g(t)[U],$$

où $[\bar{K}] = [K_e] + \bar{k}(t)[U]$ constitue la matrice globale de raideur moyennée en temps, $g(t) = k(t) - \bar{k}(t)$ représente les fluctuations de la raideur d'engrènement k autour de sa valeur moyenne. La matrice $[U]$ s'écrit $\{R\}^t \{R\}$ où le vecteur $\{R\}$ est obtenu par assemblage des vecteurs élémentaires $\{R_s\}$. Notons que la matrice de raideur totale inclut les matrices des

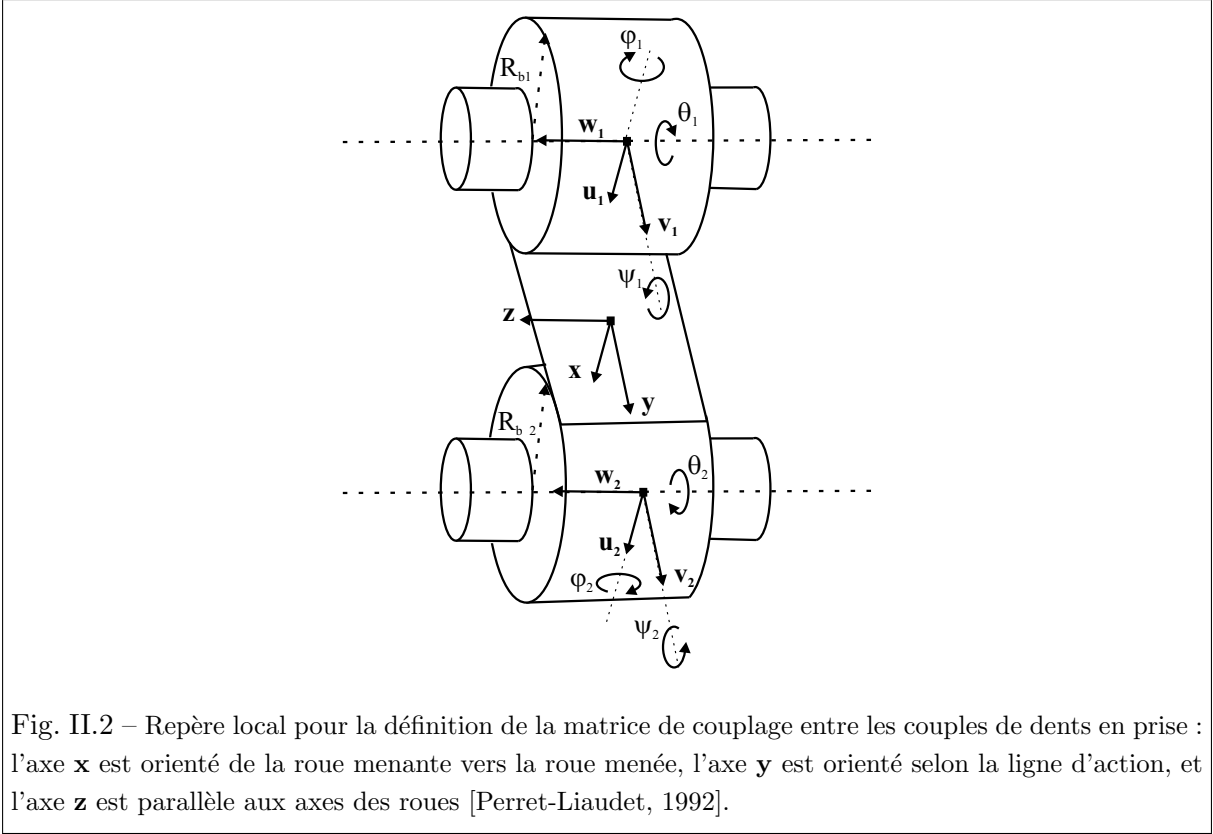


Fig. II.2 – Repère local pour la définition de la matrice de couplage entre les couples de dents en prise : l'axe x est orienté de la roue menante vers la roue menée, l'axe y est orienté selon la ligne d'action, et l'axe z est parallèle aux axes des roues [Perret-Liaudet, 1992].

roulements $[K_r]$. Ces matrices résultent d'un calcul statique préalable. L'équation matricielle régissant les vibrations forcées amorties de la transmission complète s'écrit :

$$[M] \{\ddot{X}(t)\} + [C] \{\dot{X}(t)\} + [\bar{K}] \{X(t)\} + g(t) [U] \{X(t)\} = \{E(t)\}, \quad (\text{II.9})$$

où $\{X(t)\}$ désigne le vecteur des déplacements nodaux, et $\{E(t)\}$ est le vecteur nodal des efforts excitateurs internes qui s'écrit sous la forme :

$$\{E(t)\} = k(t) e(t) \{R\}, \quad (\text{II.10})$$

avec $e(t)$, l'erreur statique de transmission sous charge.

Finalement, l'équation matricielle régissant le comportement dynamique de la transmission peut donc s'écrire en fonction de l'erreur statique de transmission e et des fluctuations de la raideur d'engrènement autour de sa valeur moyenne g sous la forme :

$$[M] \{\ddot{X}(t)\} + [C] \{\dot{X}(t)\} + [\bar{K}] \{X(t)\} + g(t) [U] \{X(t)\} = k(t) e(t) \{R\}. \quad (\text{II.11})$$

Les équations du mouvement de la transmission discrétisée sont des équations linéaires à coefficients périodiques couplées via la matrice $[U]$. Cette équation est en accord avec l'équation (II.6) obtenue avec le modèle simplifié d'une transmission à 4 degrés de liberté.

2.3 Equations modales

Introduisons à présent la base modale de la transmission $[V]$ calculée à partir de la matrice globale de raideur moyennée en temps $[\bar{K}]$ et la décomposition (II.7) du vecteur $\{X(t)\}$ sur cette base. En introduisant les termes dissipatifs sous la forme d'amortissements modaux visqueux équivalents, et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres, les équations du mouvement (II.11) s'écrivent dans la base modale :

$$[m] \{\ddot{q}(t)\} + [c] \{\dot{q}(t)\} + [k] \{q(t)\} + g(t) [d] \{q(t)\} = \{s(t)\}. \quad (\text{II.12})$$

Les matrices $[m] = \text{diag}[m_i]$, $[c] = \text{diag}[2 m_i \omega_i \zeta_i]$, et $[k] = \text{diag}[k_i]$ sont donc respectivement les matrices diagonales de masses modales, d'amortissements modaux et de raideurs modales 'moyennes'. ω_i et ζ_i désignent la pulsation et le taux d'amortissement modal du mode i . Le vecteur $\{s(t)\} = {}^t[V] \{E(t)\}$ constitue le vecteur des forces modales. Enfin, $[d] = {}^t[V] [U] [V]$ est une matrice non diagonale. L'équation (II.12) peut également s'écrire sous forme indicelle :

$$m_i \ddot{q}_i(t) + 2 m_i \omega_i \zeta_i \dot{q}_i(t) + k_i q_i(t) + g(t) \sum_{k=1}^n d_{ik} q_k(t) = s_i(t). \quad (\text{II.13})$$

3 Méthode spectrale itérative

3.1 Réponses modales dans le domaine fréquentiel

La méthode spectrale itérative repose sur une résolution des équations du mouvement dans le domaine fréquentiel [Perret-Liaudet, 1992, Perret-Liaudet et Sabot, 1994, Perret-Liaudet, 1996]. Il s'agit donc dans un premier temps de calculer la transformée de Fourier fréquentielle de l'équation (II.13) en régime stationnaire afin de déterminer le spectre des réponses modales $q_i(t)$. En l'absence d'instabilité, la présence de l'amortissement visqueux permet d'affirmer que la réponse libre est asymptotiquement stable, et seuls les termes stationnaires peuvent être retenus dans le calcul de la transformée de Fourier. Puisque la transformée de Fourier du produit $g(t) q_k(t)$ est égale au produit de convolution des transformées de Fourier de $g(t)$ et de $q_k(t)$, et que l'opérateur 'transformée de Fourier' est linéaire, la transformée de Fourier de l'équation (II.13) s'écrit donc :

$$(-\omega^2 m_i + 2j m_i \omega_i \zeta_i \omega + k_i) \tilde{q}_i(\omega) + \sum_{k=1}^n d_{ik} (\tilde{g} \otimes \tilde{q}_k)(\omega) = \tilde{s}_i(\omega), \quad (\text{II.14})$$

où le signe $\tilde{}$ désigne la transformée de Fourier et l'opérateur \otimes désigne le produit de convolution. En introduisant la fonction complexe de réponse en fréquence H_i du mode i :

$$H_i(\omega) = \frac{1}{k_i} \frac{1}{1 + 2j \zeta_i \frac{\omega}{\omega_i} - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}},$$

et en reportant le terme de couplage par la raideur d'engrènement au second membre, l'équation (II.14) devient :

$$\tilde{q}_i(\omega) = H_i(\omega) \left(\tilde{s}_i(\omega) - \sum_{k=1}^n d_{ik} (\tilde{g} \otimes \tilde{q}_k)(\omega) \right), \quad (\text{II.15})$$

soit, sous forme matricielle :

$$\{\tilde{q}(\omega)\} = [H(\omega)] \left(\{\tilde{s}(\omega)\} - [d](\tilde{g} \otimes \{\tilde{q}\})(\omega) \right). \quad (\text{II.16})$$

$[H]$ est la matrice diagonale constituée des n fonctions de réponse en fréquence des modes. La matrice $[d]$ s'écrit sous la forme :

$$[d] = {}^t[V][U][V] = {}^t[V]\{R\}{}^t\{R\}[V] = {}^t[V]\{R\}{}^t({}^t[V]\{R\}), \quad (\text{II.17})$$

c'est-à-dire comme le produit d'un vecteur $\{r\} = {}^t[V]\{R\}$ par son transposé. L'équation (II.16) s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\{\tilde{q}(\omega)\} = [H(\omega)] \{\tilde{s}(\omega)\} - [H(\omega)] \{r\}{}^t\{r\} (\tilde{g} \otimes \{\tilde{q}\})(\omega). \quad (\text{II.18})$$

Rappelons que $\{\tilde{s}(\omega)\}$ est égal à $(\tilde{k} \otimes \tilde{e})(\omega) \{r\}$ d'après la relation (II.10). Ainsi nous retiendrons donc finalement :

$$\{\tilde{q}(\omega)\} = [H(\omega)] \{r\} \left((\tilde{k} \otimes \tilde{e})(\omega) - (\tilde{g} \otimes {}^t\{r\}\{\tilde{q}\})(\omega) \right) \quad (\text{II.19})$$

comme l'équation matricielle gouvernant, en régime stationnaire, les réponses modales de l'engrenage discrétisé induites par l'erreur statique de transmission.

3.2 Equation régissant l'erreur dynamique de transmission σ

On s'intéresse alors au calcul de $\tilde{\sigma}(\omega) = {}^t\{r\} \{\tilde{q}(\omega)\}$ qui est l'erreur dynamique de transmission. En effet, l'erreur dynamique de transmission est définie comme le produit ${}^t\{R\} \{\tilde{x}(\omega)\}$ qui s'écrit également ${}^t\{r\} \{\tilde{q}(\omega)\}$ en introduisant le vecteur des coordonnées modales. Le calcul de cette seule fonction scalaire est intéressant car il permet de comprendre les transferts entre la réponse dynamique à la denture et la réponse dynamique du carter. Par ailleurs, il simplifie la mise en oeuvre de la méthode et réduit les temps de calcul. D'après l'équation (II.19), l'équation régissant $\tilde{\sigma}(\omega)$ s'écrit :

$$\tilde{\sigma}(\omega) = {}^t\{r\} [H(\omega)] \{r\} \left((\tilde{k} \otimes \tilde{e})(\omega) - (\tilde{g} \otimes {}^t\{r\}\{\tilde{q}\})(\omega) \right). \quad (\text{II.20})$$

En introduisant la fonction complexe $T(\omega) = {}^t\{r\} [H(\omega)] \{r\}$, et en notant $\Delta = \tilde{k} \otimes \tilde{e} - \tilde{g} \otimes \tilde{\sigma}$, l'erreur dynamique de transmission s'écrit simplement :

$$\tilde{\sigma}(\omega) = T(\omega) \Delta(\omega). \quad (\text{II.21})$$

3.3 Equation régissant la surcharge dynamique de denture $\tilde{f}_d(\omega)$

La surcharge dynamique de denture F_d s'écrit dans le domaine temporel sous la forme :

$$F_d(t) = k(t) \left(\sigma(t) - e(t) \right), \quad (\text{II.22})$$

où $\sigma(t)$ constitue l'erreur dynamique de transmission, et e l'erreur statique de transmission. En prenant la transformée de Fourier de la relation (II.22) on peut donc écrire :

$$\tilde{f}_d(\omega) = \left(\tilde{k} \otimes (\tilde{\sigma} - \tilde{e}) \right) (\omega). \quad (\text{II.23})$$

En introduisant l'expression de Δ , la surcharge dynamique de denture \tilde{f}_d s'écrit aussi sous la forme :

$$\tilde{f}_d(\omega) = (\bar{k}(t)T(\omega) - 1)\Delta(\omega). \quad (\text{II.24})$$

Pour déterminer l'effort de denture total, il convient d'ajouter à la surcharge dynamique de denture l'effort normal s'exerçant sur celle-ci.

3.4 Equation régissant la réponse vibratoire de la transmission $\tilde{x}(\omega)$

D'après la relation (II.7), $\{\tilde{x}(\omega)\} = [V] \{\tilde{q}(\omega)\}$. Par conséquent, en reprenant la relation (II.19), la réponse vibratoire de la transmission complète s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\tilde{x}(\omega)\} &= [V] [H(\omega)] \{r\} \left((\tilde{k} \otimes \tilde{e})(\omega) - (\tilde{g} \otimes {}^t\{r\}\{\tilde{q}\})(\omega) \right) \\ &= [V] [H(\omega)] \{r\} \left((\tilde{k} \otimes \tilde{e})(\omega) - (\tilde{g} \otimes \tilde{\sigma})(\omega) \right), \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

soit en considérant la fonction Δ :

$$\{\tilde{x}(\omega)\} = [V] [H(\omega)] \{r\} \Delta(\omega). \quad (\text{II.26})$$

3.5 Résolution

La résolution des équations du mouvement s'appuie sur un schéma par approximations successives. Compte tenu des expressions de l'erreur dynamique de transmission (II.21), de la surcharge dynamique de denture (II.24) et de la réponse vibratoire (II.26), on voit qu'il est intéressant de travailler sur la fonction scalaire Δ . En convoluant l'équation (II.21) avec la fonction g , et en injectant dans la définition de Δ , on aboutit à l'équation suivante sur Δ :

$$\Delta(\omega) = (\tilde{k} \otimes \tilde{e})(\omega) - (\tilde{g} \otimes T\Delta)(\omega). \quad (\text{II.27})$$

Soient :

$$\Delta^0(\omega) = (\tilde{k} \otimes \tilde{e})(\omega), \quad (\text{II.28})$$

et l'opérateur Γ :

$$\Gamma(\bullet) = -(\tilde{g} \otimes T\bullet)(\omega). \quad (\text{II.29})$$

On obtient :

$$\Delta = \Delta^0 + \Gamma(\Delta). \quad (\text{II.30})$$

En substituant cette valeur de Δ dans le second membre de l'équation (II.30) :

$$\Delta = \Delta^0 + \Gamma(\Delta^0 + \Gamma(\Delta)), \quad (\text{II.31})$$

ou encore :

$$\Delta = \Delta^0 + \Gamma(\Delta^0) + \Gamma(\Gamma(\Delta)), \quad (\text{II.32})$$

et ainsi de suite :

$$\Delta = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^k(\Delta^0), \quad (\text{II.33})$$

avec :

$$\Gamma^0(\Delta^0) = \Delta^0, \quad (\text{II.34})$$

et

$$\Gamma^{k+1}(\bullet) = \Gamma(\Gamma^k(\bullet)). \quad (\text{II.35})$$

Une solution approchée peut être obtenue par troncature de la série (II.33). Dans le cas où l'on tronque la base modale, il est indispensable de prendre en compte la matrice de flexibilité résiduelle incluant l'effet des modes d'ordre supérieur non utilisés. Un test de convergence basé sur l'écart relatif entre deux itérations successives et sur le nombre d'itérations permet d'arrêter le processus itératif. Perret-Liaudet [Perret-Liaudet, 1992] a montré que la réduction des temps de calcul apportée par cette méthode est au moins d'un facteur 10 voire 100 par rapport aux méthodes d'intégration temporelles habituellement utilisées pour la résolution des équations différentielles à coefficients périodiques. Notons que cette méthode ne nécessite pas de connaître au préalable le contenu fréquentiel du spectre de la réponse vibratoire puisque celui-ci s'enrichit à chaque itération.

4 Modes de denture

L'étude du comportement dynamique des transmissions par engrenages au chapitre précédent a mis en évidence l'existence de modes particuliers, dits critiques, qui conduisent à de fortes amplifications dynamiques lorsqu'ils sont excités en résonance par l'erreur de transmission. Parmi ces modes, les modes de denture et les modes de roulement correspondent respectivement à une énergie potentielle de déformation localisée dans la zone d'engrènement et au niveau des roulements [Rigaud, 1998]. Ces modes peuvent être identifiés à partir d'un calcul énergétique. Pour chaque mode propre de la transmission, l'énergie de déformation U_e associée à la valeur moyenne des fluctuations de la raideur d'engrènement $\bar{k}(t)$, l'énergie de déformation U_r associée aux roulements, et l'énergie totale de déformation U_t sont définies pour le mode i sous la forme :

$$U_e^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^t \{V^{(i)}\} \bar{k}(t) [U] \{V^{(i)}\} \quad (\text{II.36})$$

$$U_r^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^t \{V^{(i)}\} [K_r] \{V^{(i)}\} \quad (\text{II.37})$$

$$U_t^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^t \{V^{(i)}\} [K(t)] \{V^{(i)}\} \quad (\text{II.38})$$

où $\{V^{(i)}\}$ est le vecteur propre associé au mode i , $[K(t)]$ est la matrice de raideur de la transmission complète, $[K_r]$ est la matrice de raideur associée aux roulements, et $\bar{k}(t) [U]$ est la matrice

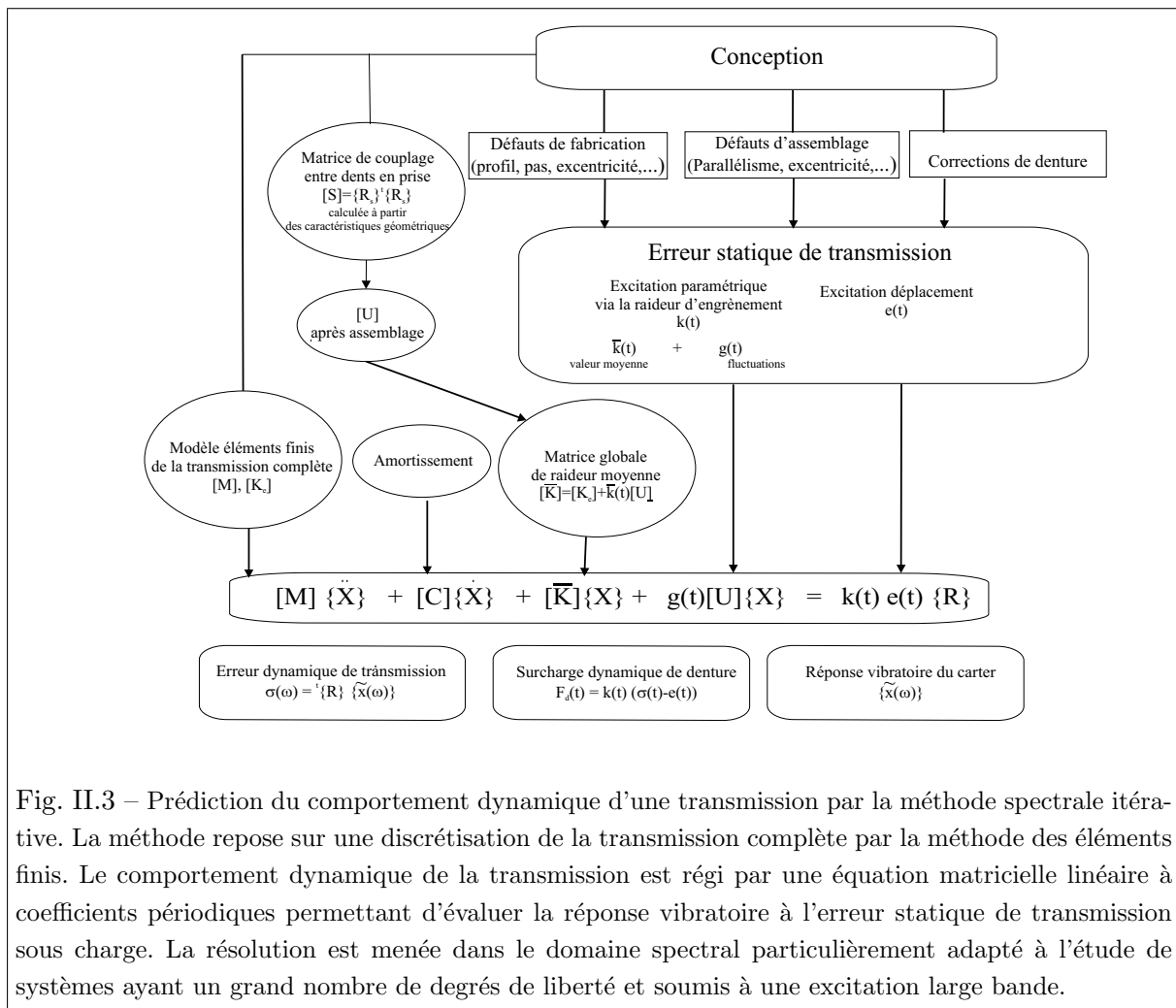


Fig. II.3 – Prédiction du comportement dynamique d’une transmission par la méthode spectrale itérative. La méthode repose sur une discrétisation de la transmission complète par la méthode des éléments finis. Le comportement dynamique de la transmission est régi par une équation matricielle linéaire à coefficients périodiques permettant d’évaluer la réponse vibratoire à l’erreur statique de transmission sous charge. La résolution est menée dans le domaine spectral particulièrement adapté à l’étude de systèmes ayant un grand nombre de degrés de liberté et soumis à une excitation large bande.

de raideur généralisée associée à la raideur d'engrènement, de mêmes dimensions que $[K(t)]$, et dont les termes sont nuls en dehors des 12 lignes et 12 colonnes associées aux degrés de liberté de l'engrenage.

Le taux d'énergie de déformation ρ_e associée à la raideur d'engrènement est défini comme le rapport :

$$\rho_e^{(i)} = \frac{U_e^{(i)}}{U_t^{(i)}}. \quad (\text{II.39})$$

Le taux d'énergie de déformation ρ_r associée aux roulements est défini comme le rapport :

$$\rho_r^{(i)} = \frac{U_r^{(i)}}{U_t^{(i)}}. \quad (\text{II.40})$$

Ces taux d'énergie sont compris entre 0 et 1. Les modes dont le coefficient $\rho_e^{(i)}$ est non nul sont appelés modes de denture, et les modes dont le coefficient $\rho_r^{(i)}$ est non nul sont appelés modes de roulement. Un mode critique est un mode dont les deux coefficients sont différents de zéro. Plus ces coefficients sont proches de 1, plus les niveaux associés à leur excitation en résonance sont élevés. L'analyse du comportement vibratoire de la transmission nécessite de prendre en compte tous les modes critiques, même si la base modale sur laquelle est développée la réponse forcée est tronquée.

5 Conclusion

La synthèse bibliographique sur les modèles dynamiques des transmissions par engrenages a permis de dégager plusieurs conclusions.

Trois types de modèles pour l'interface d'engrènement sont envisageables selon les caractéristiques des engrenages. L'utilisation d'un modèle de raideur d'engrènement constant est adaptée à l'étude des engrenages fortement chargés présentant de faibles fluctuations de raideur d'engrènement et soumis à des niveaux d'excitation modérés. La prise en compte de l'excitation paramétrique liée aux fluctuations de la raideur d'engrènement conduit à introduire un modèle de raideur évoluant de manière périodique dans le temps. Enfin, lorsque les niveaux d'excitation augmentent et/ou que les charges transmises sont faibles, des pertes de contact entre les dentures d'engrenages peuvent se produire et il convient alors d'introduire un modèle non linéaire de la raideur d'engrènement.

Concernant la modélisation de l'ensemble de la transmission, deux classes de modèles peuvent être répertoriées : les modèles à faible nombre de degrés de liberté, généralement des modèles de torsion pure, et les modèles à grand nombre de degrés de liberté, souvent basés sur une description par éléments finis. Ces modèles éléments finis se présentent alors comme le meilleur moyen pour prendre en compte la complexité structurelle de la transmission en introduisant tous les éléments, arbres, paliers et réaliser une étude globale du comportement

dynamique de la transmission. En particulier, contrairement aux modèles de torsion pure, ces modèles tiennent compte de l'ensemble des degrés de liberté de la transmission et donc des couplages entre les vibrations en flexion et en torsion des arbres et de leurs supports, et des déformations en traction-compression.

L'existence de mécanismes de transfert entre les surcharges dynamiques sur les dentures et la réponse vibratoire du carter nécessite d'intégrer celui-ci au sein du modèle de la transmission. A nouveau, les modèles éléments finis semblent être les plus adaptés pour mener une étude globale et tenir compte des couplages entre les lignes d'arbres et le carter.

La méconnaissance profonde des niveaux d'amortissement conduit à introduire celui-ci sous la forme d'un taux d'amortissement visqueux équivalent.

La résolution des équations du mouvement de la transmission discrétisée dépend des modèles adoptés. Celle-ci s'appuie généralement sur une décomposition de la réponse vibratoire dans la base des modes propres de la transmission, calculée à partir de la matrice globale de raideur moyennée en temps dans le cas où les coefficients des équations varient dans le temps. Ainsi, la prise en compte de l'excitation paramétrique liée aux fluctuations de la raideur d'engrènement conduit à une équation matricielle à coefficients périodiques. Il s'agit d'une équation linéaire si les caractéristiques de raideur moyenne ne sont pas affectées par le comportement dynamique de la transmission. Cette équation est connue sous le nom d'équation de Mathieu-Hill et constitue l'équation la plus générale régissant le comportement dynamique d'une transmission par engrenages. La résolution de cette équation n'est pas standard et dans le cas général il n'existe pas de solution analytique. Les méthodes d'intégration temporelle consistent à intégrer l'équation à chaque pas de temps mais ces méthodes s'avèrent très coûteuses en temps de calcul dans le cas d'un large contenu spectral et pour des modèles à grand nombre de degrés de liberté comme les modèles éléments finis.

Le modèle de transmission adopté pour cette étude est un modèle de type éléments finis intégrant le carter. Les non-linéarités liées à l'engrènement ne sont pas prises en compte. Les fluctuations de la raideur d'engrènement sont introduites sous la forme d'une fonction périodique du temps de fréquence fondamentale égale à la fréquence d'engrènement. Ce modèle permet d'évaluer la réponse dynamique forcée de la transmission à l'erreur statique de transmission. Les équations du mouvement sont des équations linéaires couplées à coefficients périodiques de type Mathieu-Hill.

La méthode de résolution adoptée pour ces équations est la méthode spectrale itérative qui se présente comme une alternative aux méthodes d'intégration temporelle visant à réduire les temps de calcul associés aux modèles dynamiques élaborés obtenus par la méthode des éléments finis. Cette méthode est basée sur les développements effectués dans le domaine des fréquences.

A partir des spectres des différentes sources excitatrices, elle permet de calculer directement les spectres des réponses vibratoires en chaque degré de liberté de la transmission. Sur la base d'un calcul énergétique, elle permet également d'identifier les modes critiques de la transmission à l'origine de fortes amplifications dynamiques lorsqu'ils sont excités en résonance par l'erreur statique de transmission.

Il s'agit dans le cadre de cette thèse de coupler la méthode spectrale itérative à une méthode acoustique permettant de prédire le champ acoustique rayonné à hautes fréquences au sein de l'environnement semi-ouvert ou fermé entourant la transmission. Le chapitre suivant recense différentes méthodes dédiées à l'étude acoustique à hautes fréquences au sein d'une cavité, et s'intéresse plus particulièrement à la méthode du transfert radiatif retenue pour notre travail.

Bibliographie

- [Bard, 1995] Bard, C. (1995). *Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. 296 pages.
- [Ducret, 1997] Ducret, P. (1997). *Prédiction du bruit rayonné par les carters des transmissions à engrenages*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. 150 pages.
- [Inoue et al., 1993] Inoue, K., Townsend, D., et Coy, J. (1993). Optimum design of a gearbox for low vibration. *Journal of Mechanical Design*, 115 :1002–1006.
- [Kahraman et al., 1989] Kahraman, A., Ozguven, M., Houser, D., et Zakrajsek, J. (1989). Dynamic analysis of geared rotors by finite elements. *Proceedings of the 5th International Conference on Gearing and Power Transmission*, 1 :375–382.
- [Kahraman et Singh, 1990] Kahraman, A. et Singh, R. (1990). Nonlinear dynamics of a spur gear pair. *Journal of Sound and Vibration*, 146(1) :49–75.
- [Kato et al., 1994] Kato, M., Inoue, K., et Shibata, K. (1994). Evaluation of sound power radiated by gearbox. Dans *Proceedings of the 1994 International Gearing Conference*, pages 69–74, University of Newcastle upon Tyne (UK).
- [Maruyama et al., 1992] Maruyama, N., Morikawa, K., et Hitomi, N. (1992). Gear case shape and rib distribution for reducing automobile transmission gear noise. Dans *The 1992 ASME design technical conferences - Proceedings of the 6th International Power Transmission and Gearing Conference*, pages 583–588, Scottsdale (Arizona).
- [Neriya et al., 1985] Neriya, S., Bhat, R., et Sankar, T. (1985). Coupled torsional-flexural vibration of a geared shaft system using finite element analysis. *The shock and vibration bulletin*, 55 :13–25.
- [Neriya et al., 1988] Neriya, S., Bhat, R., et Sankar, T. (1988). On the dynamic response of a helical geared system subjected to a static transmission error in the form of a determinist and filtered white noise input. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 110 :501–506.
- [Ozguven et Houser, 1988] Ozguven, H. et Houser, D. (1988). Mathematical models used in gear dynamics - a review. *Journal of Sound and Vibration*, 121(3) :383–411.
- [Ozguven et Kesan, 1992] Ozguven, H. et Kesan, M. (1992). Dynamic response of geared rotors to internal excitation by using a finite element model. Dans *Proceedings du 3ème Congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions*, pages 921–930, Paris (France).
- [Perret-Liaudet, 1992] Perret-Liaudet, J. (1992). *Etude des mécanismes de transfert entre l'erreur de transmission et la réponse dynamique des boîtes de vitesses d'automobile*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. 197 pages.
- [Perret-Liaudet, 1996] Perret-Liaudet, J. (1996). An original method for computing the response of a parametrically excited forced system. *Journal of Sound and Vibration*, 196(2) :165–177.

- [Perret-Liaudet et Sabot, 1994] Perret-Liaudet, J. et Sabot, J. (1994). Résolution des grands systèmes d'équations différentielles à coefficients périodiques : application aux transmissions par engrenages. Technical report, GDR 1138 Vibroacoustique, Colloque des 14 et 15 décembre 1994.
- [Pfeiffer, 1991] Pfeiffer, F. (1991). Modelling problems of rattling in gearboxes. Dans *Proceedings of the International Conference on Motion and Power Transmissions*, pages 43–48, Hiroshima (Japon).
- [Pfeiffer, 1996] Pfeiffer, F. (1996). Rattling in gears - a review. *VDI BERICHTE NR. 1230*, pages 719–737.
- [Remond et al., 1993] Remond, Y., Velex, P., et Sabot, J. (1993). Comportement dynamique et acoustique des engrenages - synthèse bibliographique. *Publication du CETIM*. 192 pages.
- [Rigaud, 1998] Rigaud, E. (1998). *Interactions dynamiques entre denture, lignes d'arbres, roulements et carter dans les transmissions par engrenages*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon.
- [Singh et al., 1989] Singh, R., Xie, H., et Comparin, R. (1989). Analysis of automotive neutral gear rattle. *Journal of Sound and Vibration*, 131(2) :177–196.
- [Storm, 1991] Storm, M. (1991). Prédiction de l'émission acoustique pour des structures simples. *Congrès sur la prévision du bruit rayonné par les structures vibrantes (Senlis), Revue Française de Mécanique - numéro spécial*, pages 336–352.
- [Takatsu et al., 1991] Takatsu, N., Kato, M., Inoue, K., et Ishikawa, M. (1991). Analysis and experiment on the vibration transmission in a single stage gearbox. Dans *Proceedings of the International Conference on Motion and Power Transmissions*, pages 104–109, Hiroshima (Japon).
- [Tuplin, 1950] Tuplin, W. (1950). Gear tooth stresses at high speed. *Proceedings of the I. Mech. E.*, 16 :162–167.
- [Tuplin, 1953] Tuplin, W. (1953). Dynamic loads on gear teeth. *Machin design*, 25 :203–211.
- [Velex, 1988] Velex, P. (1988). *Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. 188 pages.

Chapitre III

Méthode du transfert radiatif

Introduction

L'application qui nous intéresse concerne l'acoustique au sein de milieux fermés ou semi-ouverts. Ce chapitre propose dans une première partie un bilan de différentes méthodes appliquées en acoustique des salles. Les phénomènes de propagation au sein d'une cavité sont nombreux et complexes, ce qui conduit souvent à privilégier des modèles simplifiés reposant sur des lois analogues à celles de l'optique géométrique ou sur des lois statistiques, à des modèles ondulatoires. En effet, les modèles ondulatoires présentent l'intérêt de pouvoir modéliser de manière précise tous les phénomènes de propagation, mais ces modèles deviennent impraticables pour des géométries complexes ou lorsque les calculs ne sont pas réalisés en régime établi. Les modèles géométriques se présentent alors comme une alternative pour l'étude à hautes fréquences. Enfin, le modèle statistique introduit par Sabine en 1895 est toujours l'un des plus utilisés en acoustique des salles. Depuis les années 1950, de nouvelles approches géométriques fondées sur l'écriture de bilans d'énergie entre surfaces en vis-à-vis ont émergé. La méthode du transfert radiatif adoptée dans le cadre de cette étude s'inscrit parmi ces nouvelles approches. Elle est détaillée dans la deuxième partie de ce chapitre et des comparaisons avec d'autres méthodes d'acoustique des salles hautes fréquences sont proposées.

Sommaire

1	Méthodes de prédiction en acoustique des salles	53
1.1	Méthodes d'acoustique géométrique	53
1.1.1	Méthode des sources-images	53
1.1.2	Méthode de tirs de rayons	54
1.2	Théorie de Sabine	55
1.3	Analyse statistique de l'énergie	56
1.4	Equation de diffusion	56
1.4.1	Méthode de diffusion de l'énergie	57
1.4.2	Méthode du potentiel d'intensité (Intensity Potential Approach)	58

2	Méthode du transfert radiatif	59
2.1	Terminologies	59
2.1.1	Luminance et Intensité spécifique	60
2.1.2	Emittance énergétique et flux de puissance	61
2.1.3	Facteurs d'angle	61
2.1.4	Relations entre les caractéristiques radiatives	62
2.2	Hypothèses de la méthode du transfert radiatif	64
2.3	Description de la méthode	65
2.3.1	Représentation des champs d'énergie	65
2.3.2	Equation de Fredholm sur les inconnues σ	67
2.3.3	Résolution du problème général	70
2.4	Schéma numérique	70
2.5	Comparaison avec les autres méthodes énergétiques	71
2.5.1	Comparaison avec la méthode des rayons	71
2.5.2	Comparaison avec la méthode du potentiel d'intensité	72
3	Conclusion	74
	Bibliographie	76

1 Méthodes de prédiction en acoustique des salles

En basses fréquences, les premières fréquences propres d'une cavité sont espacées et, pour une excitation donnée, seuls quelques modes ont une réponse significative : le champ acoustique est donc très hétérogène, et compte tenu de l'existence de noeuds et de ventres de pression, la pression acoustique dépend fortement du point de mesure. A mesure que la fréquence augmente, le nombre de modes excités croît et le champ est de plus en plus homogène. A partir de la fréquence limite de Schroeder dont il est question au paragraphe 1.2, le champ acoustique au sein de la cavité est diffus, autrement dit l'énergie et la pression sont indépendantes du point d'écoute. La théorie des ondes n'est alors plus adaptée. Deux approches sont possibles : raisonner en terme géométrique ou encore appliquer la théorie de Sabine valable en champ diffus.

1.1 Méthodes d'acoustique géométrique

Les méthodes d'acoustique géométrique reposent sur la théorie des rayons sonores qui postule notamment l'équivalence entre le comportement des ondes sonores et celui des rayons lumineux : ce mode de représentation est appelé méthode des rayons. Cette hypothèse est justifiée lorsque le gradient de célérité du milieu de propagation est négligeable, lorsque la longueur d'onde des ondes sonores est petite devant les longueurs caractéristiques du domaine acoustique considéré et grande devant les rugosités des surfaces du domaine. Les méthodes les plus couramment utilisées sont la méthode de tirs de rayons [Krokstad et al., 1968, Benedetto et Spagnolo, 1984] et la méthode des sources-images [Gibbs et Jones, 1972, Gensanne et Santon, 1979], et la plupart des méthodes des rayons existantes découlent de ces deux méthodes. La principale différence entre ces méthodes porte sur la représentation des ondes sonores. La méthode des sources-images ne nécessite pas de discrétiser les ondes : c'est une méthode considérée de type rayons non pour la représentation des ondes qui ne sont pas assimilées à des rayons, mais pour sa mise en œuvre. La figure III.1 illustre le calcul du champ acoustique créé par une source placée face à un plan réfléchissant en mettant en œuvre les deux méthodes.

1.1.1 Méthode des sources-images

La méthode des sources-images consiste à supposer qu'après réflexion, les ondes sonores réfléchies peuvent être considérées comme émises par des sources acoustiques fictives qui sont les images des sources réelles. Ainsi, l'ensemble des sources images, symétriques des sources acoustiques réelles par rapport aux frontières du domaine acoustique, doit être préalablement déterminé. Le champ acoustique en un point de l'espace est alors exprimé comme la somme des contributions énergétiques de toutes ces sources. Notons que la position de ces sources images ne dépend pas de la position du point de réception, en revanche un facteur de visibilité doit être introduit égal à 1 lorsque le point de réception se situe dans le cône de visibilité de la source image. Un test de visibilité est également nécessaire dans le cas où des obstacles sont présents. Le nombre de sources images à introduire est en principe infini, dans la pratique le nombre de symétries est arbitrairement limité à une valeur appelée ordre de la méthode qui correspond

au nombre de réflexions prises en compte. Le nombre de sources croît de manière exponentielle avec l'ordre de réflexion. Par ailleurs, cette méthode nécessite que la géométrie de la salle soit constituée de surfaces planes.

1.1.2 Méthode de tirs de rayons

Dans la méthode de tir de rayons, chaque source acoustique émet des rayons dans des directions prédéfinies ou tirées aléatoirement. Le plus souvent, une source ponctuelle est modélisée sous la forme d'un grand nombre de rayons issus d'un même point et répartis de manière homogène dans tout l'angle d'émission de la source. Chaque rayon porte une énergie qui dépend notamment de la directivité de la source. Le rayon se propage donc en ligne droite jusqu'à sa rencontre avec un obstacle qui l'amène à emprunter un nouveau trajet. A chaque réflexion, l'énergie du rayon est multipliée par le coefficient de réflexion du matériau rencontré, et l'influence de l'absorption atmosphérique sur la décroissance en énergie des rayons est prise en compte. Comme il est peu probable qu'un rayon rencontre un point de l'espace donné, des cellules de réception sont définies autour des points de réception. Les contributions énergétiques de tous les rayons traversant ces cellules sont sommées. Le trajet du rayon est considéré comme terminé lorsque son énergie est inférieure à une énergie résiduelle généralement exprimée en pourcentage de son énergie initiale, ou lorsque le nombre de trajets parcourus est égal au nombre de trajets définis par l'utilisateur.

Cette méthode prend en compte les réflexions spéculaires et diffuses. Elle est équivalente dans le principe à la méthode des sources-images, mais elle permet de calculer le champ en un point de réception à partir des seules sources-images contribuant à ce champ en évitant la construction de l'ensemble des sources. De ce point de vue, le gain numérique est indéniable. Malgré tout, le nombre de rayons, et donc le nombre de sources prises en compte, est limité. Par ailleurs, il n'existe aucune garantie sur le fait que tous les chemins ont bien été pris en compte dans le calcul.

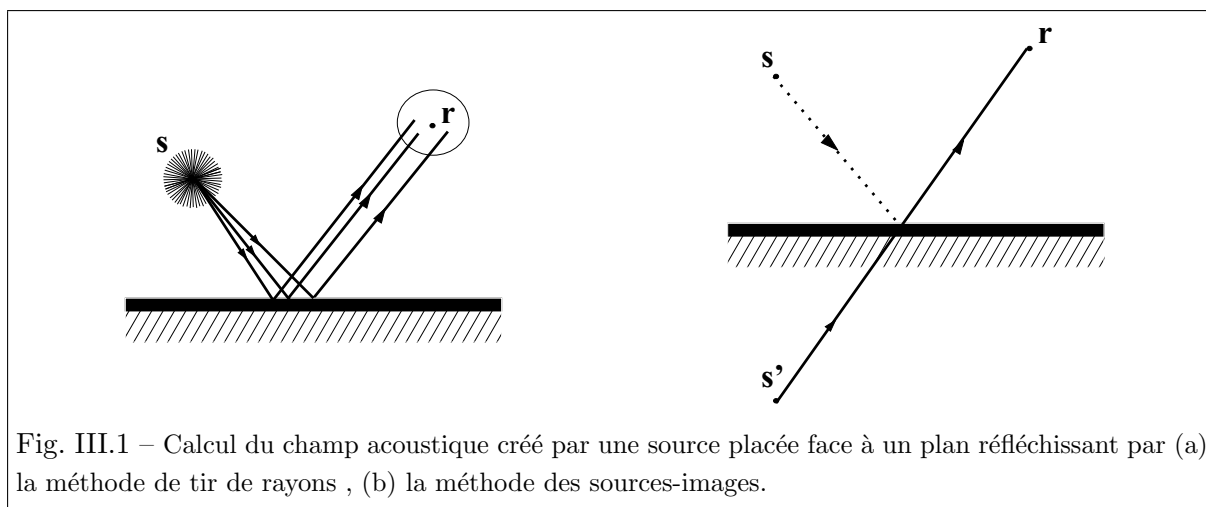


Fig. III.1 – Calcul du champ acoustique créé par une source placée face à un plan réfléchissant par (a) la méthode de tir de rayons , (b) la méthode des sources-images.

Les méthodes d'acoustique géométrique sont valables dans le cas des hautes fréquences acoustiques contrairement aux modèles ondulatoires qui sont valables pour toutes les fréquences. Elles présentent l'intérêt d'être facilement implémentables d'un point de vue numérique. En revanche, les modèles mis en œuvre deviennent rapidement coûteux en termes de temps de calcul à mesure que le nombre de réflexions augmente, et la validité de leur utilisation pour de grands ordres de réflexion est discutable, notamment dans le cadre d'environnements très réverbérants [Kuttruff, 1991].

1.2 La théorie de Sabine

Face aux difficultés pour prédire finement le champ acoustique au sein d'une cavité, la recherche d'une description globale du champ a donné lieu au développement d'approches statistiques. Parmi ces approches, la théorie de Sabine [Morse et Ungard, 1968, Joyce, 1975] s'appuie sur la notion de champ diffus au sein d'une cavité. Ce champ est construit comme la superposition d'une infinité d'ondes planes issues des diverses parois, de sorte qu'après réflexion, n'importe quel type d'onde émise est supposée devenir plane. Ces ondes sont décorrélées, de même intensité et d'incidences aléatoires et équiprobables. Contrairement au champ direct qui est caractérisé par les deux composantes, pression et vitesse particulaire, le champ diffus est caractérisé en termes énergétiques par sa densité d'énergie. La théorie de Sabine suppose que ce champ est uniformément réparti dans la cavité. Cette hypothèse permet de déterminer le champ acoustique en tout point de la cavité en sommant le champ direct provenant de la source, et le champ réverbéré lié aux réflexions sur les parois et supposé diffus. La théorie de Sabine permet d'étudier l'extinction du champ sonore établi au sein d'une cavité. La densité d'énergie réverbérée décroît de manière exponentielle et la constante de temps de Sabine $\tau = \frac{4V}{Ac}$ dépend du volume V de la cavité et de l'aire d'absorption équivalente A égale à $\sum_i \alpha_i S_i$ pour des matériaux de coefficients d'absorption α_i et de surface S_i . La grandeur la plus utilisée est le temps de réverbération T_R défini comme le temps nécessaire pour que l'intensité I_R décroisse de 60 dB :

$$T_R = \frac{0.16 V}{A}. \quad (\text{III.1})$$

Cette formule est la formule de Sabine. D'autres formules ont été proposées par Eyring et Millington [Jouhaneau, 1995].

La théorie de Sabine est basée sur l'hypothèse de champ diffus valable au-delà d'une fréquence limite donnée d'après Schroeder [Schroeder, 1954] par la formule :

$$f_c = 2000 \sqrt{\frac{T_R}{V}}. \quad (\text{III.2})$$

Cette fréquence sépare le domaine des basses fréquences où le comportement acoustique de la cavité est modal, du domaine des hautes fréquences où ce comportement est plus diffus. Cette formule permet d'apprécier l'importance des dimensions de la cavité et de l'absorption dans la validité de la théorie de Sabine. Ainsi, celle-ci sera d'autant plus valable que les dimensions de la salle seront grandes, que l'absorption ne sera pas trop importante, que l'on se situera en hautes

fréquences et que le point d'observation ne sera pas trop près de la source de façon à pouvoir négliger le champ direct par rapport au champ réverbéré.

Finalement, la théorie de Sabine permet d'évaluer la répartition considérée comme uniforme de l'énergie au sein d'une cavité, mais elle s'appuie sur l'hypothèse de champ diffus qui doit donc être vérifiée.

1.3 L'analyse statistique de l'énergie (Statistical Energy Analysis)

L'analyse statistique de l'énergie (SEA - Statistical Energy Analysis), née dans les années 1960 des travaux de Lyon et Maidanik [Lyon et Maidanik, 1962, Lyon, 1975], Smith [Smith, 1962], Ungar [Ungar, 1967], Sharton [Sharton et Lyon, 1968], est une méthode particulièrement adaptée à l'étude en hautes fréquences des énergies et des échanges d'énergie entre des systèmes mécaniques et acoustiques de même nature ou de natures différentes. Elle s'appuie sur la résolution d'un système d'équations reliant les énergies internes de ces systèmes aux puissances échangées. Il s'agit d'une méthode énergétique, basée sur une approche statistique au sens où les modes d'un système ne sont pas considérés de manière individuelle mais comme une population dotée de caractéristiques statistiques dans une bande de fréquences donnée. Enfin, sous le terme 'analyse' il faut entendre que l'approche adoptée est davantage qualitative que prévisionnelle bien que la SEA soit utilisée à l'heure actuelle également pour des études prédictives.

La modélisation en SEA consiste à représenter le système par un ensemble de sous-systèmes couplés entre eux, et à résoudre les équations reliant les énergies de ces sous-systèmes aux puissances échangées. Chaque sous-système comprend un ensemble dénombrable de modes ayant des propriétés énergétiques similaires. Ainsi, la notion de sous-système n'est pas associée au découpage structurel d'une structure puisqu'un composant issu de ce découpage peut comprendre plusieurs types de modes et donc plusieurs sous-systèmes. L'étude d'une cavité acoustique simple ne nécessite par exemple qu'un sous-système constitué de l'ensemble des ondes longitudinales. L'application de la SEA à une cavité acoustique composée d'un unique sous-système conduit alors au même résultat que la théorie de Sabine en définissant le facteur de perte interne à la cavité par la relation :

$$\eta = \frac{Ac}{4V\omega}. \quad (\text{III.3})$$

La SEA ne trouve alors pas tout son intérêt. Elle se prête davantage à l'étude de couplages en présence de plusieurs sous-systèmes, couplages mécanique-acoustique notamment.

1.4 Equation de diffusion

Les limites de la SEA, et en particulier l'impossibilité de décrire l'évolution spatiale de l'énergie au sein des sous-systèmes ont conduit au cours de ces trente dernières années au développement de nouvelles approches énergétiques. Ces méthodes se placent dans la continuité de la méthode SEA, qui décrit la propagation et la répartition de l'énergie à la manière de flux de chaleur, en se basant sur des analogies thermiques. Deux méthodes basées sur l'équation de

diffusion de la chaleur sont proposées : la méthode de diffusion de l'énergie et la méthode du potentiel d'intensité.

1.4.1 Méthode de diffusion de l'énergie

Initialement née des travaux de Rybak et Belov [Belov et Rybak, 1975, Belov et al., 1977] dans les années 1970, la méthode de diffusion de l'énergie a été développée par Nefske et Sung [Nefske et Sung, 1987, Nefske et Sung, 1989], Bernhard et al. [Wohlever et Bernhard, 1992, Bouthier et Bernhard, 1995, Cho et Bernhard, 1998], Zhao et Vlahopoulos [Zhao et Vlahopoulos, 2000, Zhao et Vlahopoulos, 2004]. Elle repose sur le bilan local de puissance en régime stationnaire :

$$\operatorname{div} \mathbf{I} + \Pi_{\text{diss}} = \Pi_{\text{inj}} \quad (\text{III.4})$$

où Π_{diss} et Π_{inj} sont respectivement les densités de puissance dissipée et injectée. Le modèle de dissipation relie la densité de puissance dissipée Π_{diss} à la densité d'énergie W au sein du système par l'intermédiaire du coefficient d'amortissement η et de la pulsation ω :

$$\Pi_{\text{diss}} = \eta \omega W. \quad (\text{III.5})$$

L'hypothèse fondamentale de la méthode de diffusion est que l'intensité locale \mathbf{I} est reliée au gradient de densité d'énergie par une loi analogue à la loi de Fourier :

$$\mathbf{I} = -D \mathbf{grad} W, \quad (\text{III.6})$$

où D est un coefficient de diffusion qui dépend des caractéristiques du milieu de propagation et des ondes. En injectant cette relation ainsi que le modèle de dissipation (Eq. (III.5)) dans le bilan local de puissance (Eq. (III.4)), on aboutit à une équation sur la densité d'énergie W :

$$-D\Delta W + \eta \omega W = \Pi_{\text{inj}} \quad (\text{III.7})$$

C'est l'équation de diffusion de l'énergie analogue à l'équation de conduction de la chaleur en présence d'un terme convectif. Il reste à établir les conditions aux limites pour W , la plus simple étant que le flux de puissance sortant est nul sur une frontière non dissipative.

L'intérêt de cette équation est qu'elle peut être résolue à l'aide des solveurs thermiques existants. Toutefois, Langley [Langley, 1995] montre pour le cas d'une plaque infinie excitée ponctuellement que l'équation de diffusion prédit une évolution de la densité d'énergie en $1/\sqrt{r}$ à l'infini alors que la solution analytique exacte prévoit une évolution en $1/r$. La méthode de diffusion est ainsi mise en défaut pour certaines applications. Par ailleurs, la détermination du coefficient de diffusion est l'une des difficultés de mise en œuvre de la méthode.

Picaut [Picaut, 1998] s'intéresse à l'application de l'équation de diffusion en acoustique urbaine et pour des couloirs tels qu'une dimension est grande devant les deux autres. En régime transitoire, l'équation de diffusion proposée est la suivante :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D\Delta W - \sigma W, \quad (\text{III.8})$$

où $D = \lambda c/3$ est lié au libre parcours moyen λ , et σ est un coefficient global d'absorption. Sous l'hypothèse de champ diffus, $\Delta W = 0$ et on retrouve la décroissance exponentielle de l'énergie prédite par la théorie de Sabine .

1.4.2 Méthode du potentiel d'intensité (Intensity Potential Approach)

La méthode du potentiel d'intensité (IPA - Intensity Potential Approach) [Thivant et Guyader, 2000a, Thivant et Guyader, 2000b, Thivant, 2003] a été développée par Thivant et Guyader pour prédire le champ acoustique au sein de cavités acoustiques ouvertes. Cette méthode repose sur l'équation de diffusion écrite sur le potentiel d'intensité acoustique. D'après le théorème de Helmholtz, tout champ de vecteur peut s'écrire comme la somme du gradient d'un potentiel scalaire ϕ et du rotationnel d'un potentiel vecteur C . Ainsi, l'intensité acoustique active peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_\phi + \mathbf{I}_C \quad (\text{III.9})$$

où $\mathbf{I}_\phi = -\mathbf{grad} \phi$ est la partie irrotationnelle de l'intensité, et $\mathbf{I}_C = -\mathbf{rot} C$ la partie rotationnelle de l'intensité. Une première hypothèse consiste alors à négliger la dissipation atmosphérique notamment devant la dissipation au sein des absorbants acoustiques, hypothèse valable pour la plupart des applications industrielles. Dès lors, en régime stationnaire, le bilan de puissance local se réduit à :

$$\text{div} \mathbf{I} = \Pi_{\text{inj}} \quad (\text{III.10})$$

et donc, en introduisant la décomposition de l'intensité acoustique en ses composantes rotationnelle et irrotationnelle (III.9) :

$$\text{div} \mathbf{I}_\phi + \text{div} \mathbf{I}_C = \Pi_{\text{inj}} \quad (\text{III.11})$$

En tenant compte du fait que d'une part $\text{div} \mathbf{grad} \phi = \Delta \phi$ et d'autre part $\text{div} \mathbf{rot} C = 0$, le bilan de puissance local (III.10) conduit à l'équation de Laplace pour le potentiel d'intensité :

$$-\Delta \phi = \Pi_{\text{inj}} \quad (\text{III.12})$$

Cette équation est identique à l'équation de conduction thermique. Contrairement à la méthode de diffusion de l'énergie, cette méthode ne nécessite pas de déterminer le coefficient de diffusion D . Comme précédemment, la similitude avec les problèmes thermiques permet de recourir aux logiciels éléments finis thermiques pour résoudre le problème acoustique (III.12). Jusqu'à présent, aucune hypothèse n'est faite sur la structure du champ acoustique de sorte que la résolution de l'équation (III.12) permet de déterminer de manière exacte le potentiel d'intensité acoustique ϕ ainsi que l'intensité irrotationnelle \mathbf{I}_ϕ . L'IPA propose alors de négliger la composante rotationnelle de l'intensité active : cette composante participe aux variations locales de l'énergie alors que les transferts d'énergie entre deux points de l'espace peuvent être décrits par le seul potentiel ϕ . Par ailleurs, les lignes de flux associées au champ de rotationnel \mathbf{I}_C sont des lignes fermées de sorte que l'énergie est piégée entre ces lignes de flux et ne peut être transmise en champ lointain. L'intensité rotationnelle apparaît lorsque les ondes interfèrent, et s'annule

en champ lointain. La seule connaissance de la composante irrotationnelle de l'intensité active semble alors suffisante pour évaluer le champ acoustique sous ces conditions.

La méthode a été testée dans le cas d'une cavité partiellement ouverte en l'absence de matériau absorbant : les résultats obtenus ont mis en évidence les limites de la méthode en champ proche. En négligeant la partie rotationnelle de l'intensité active, cette méthode ne permet pas de visualiser la directivité du champ acoustique et une des principales difficultés d'implémentation est liée à la difficulté d'évaluer les conditions de frontière en termes de puissance des sources. C'est une méthode intéressante pour optimiser les structures lors de l'introduction d'absorbants notamment en raison des faibles temps de calcul qu'elle nécessite : elle s'applique particulièrement à l'étude des transferts d'énergie acoustique.

2 Méthode du transfert radiatif

La méthode du transfert radiatif est née de l'étude critique de la méthode de diffusion de l'énergie vibratoire (paragraphe 1.4.1) [Le Bot, 1998a, Le Bot, 1998b, Le Bot, 2005]. Il s'agit d'une méthode de prédiction du comportement vibratoire et acoustique de structures dans le domaine des moyennes et hautes fréquences. Tout comme la méthode de diffusion, la méthode du transfert radiatif repose sur des quantités énergétiques qu'elle considère de manière locale et non globale comme en SEA. Les grandeurs mises en jeu dans la formulation de la méthode sont la densité d'énergie acoustique W et le vecteur intensité acoustique \mathbf{I} qui représente le flux d'énergie au sein d'un système. Ces champs se présentent comme des variables quadratiques qui s'expriment à partir de moyennes quadratiques de grandeurs cinématiques. S'il faut noter une perte d'information liée à la disparition du terme de phase, ces variables quadratiques présentent l'avantage d'être additives, fait particulièrement intéressant dans le domaine des hautes fréquences en vertu de l'hypothèse de décorrélation des ondes.

Plusieurs approches énergétiques simplifiées ont été développées au cours des dernières années. Ces approches diffèrent par la décomposition du champ en ondes planes ou en rayons ou par le modèle de réflexion utilisé, spéculaire ou diffus. La méthode du transfert radiatif s'inscrit parmi ces approches énergétiques simplifiées. Elle considère un champ de rayons et s'appuie sur un modèle de réflexion diffus : elle se présente donc comme une méthode de rayons, point qui sera détaillé plus loin dans la thèse, et elle s'apparente ainsi à la méthode de radiosité développée par Kuttruff [Kuttruff, 1991, Kuttruff, 1997], Miles [Miles, 1984] et Kang [Kang, 2002]. Des développements ont été proposés pour étendre l'application de la méthode à la réflexion spéculaire [Le Bot, 2002b] et à la transmission [Le Bot, 2002a, Cotoni et al., 2002] (Annexe A).

2.1 Terminologies

La méthode du transfert radiatif s'appuie sur une analogie avec les méthodes développées pour la simulation des échanges radiatifs en thermique [Eyglunet, 1997]. Ce premier paragraphe

revient donc sur quelques notions de rayonnement thermique et sur leur analogue acoustique tel qu'employé dans la méthode du transfert radiatif.

2.1.1 Luminance et Intensité spécifique

La luminance (ou brillance) L en thermique est le flux d'énergie émis (ou reçu) en un point \mathbf{p} par unité d'angle solide du autour de la direction \mathbf{u} et par unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation (unité de surface $d\Gamma$ projetée) (Fig. III.2) :

$$L(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \frac{d^2P}{d\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} du}. \quad (\text{III.13})$$

$L(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ est la luminance de la surface Γ au point \mathbf{p} dans la direction \mathbf{u} . Elle s'exprime en "watts par mètre carré de surface normale et par stéradian".

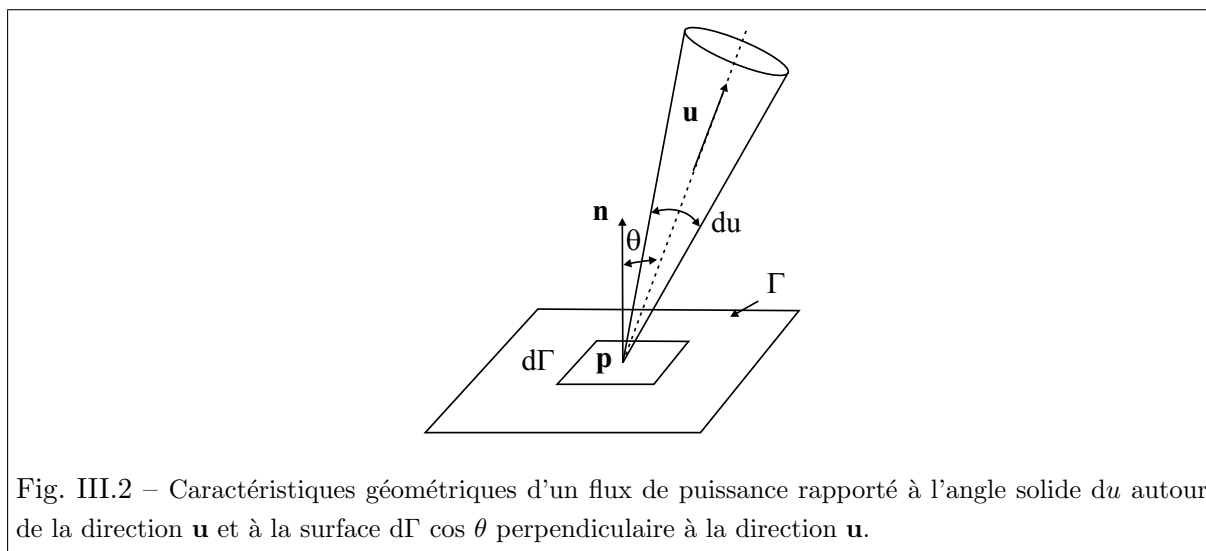


Fig. III.2 – Caractéristiques géométriques d'un flux de puissance rapporté à l'angle solide du autour de la direction \mathbf{u} et à la surface $d\Gamma \cos \theta$ perpendiculaire à la direction \mathbf{u} .

On parlera de luminance incidente L_{inc} concernant le flux incident sur Γ , de luminance émise L_{emit} concernant le flux émis par Γ , et de luminance réfléchi L_{ref} concernant le flux réfléchi par Γ . L'analogie acoustique de la luminance est l'intensité spécifique $I(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$)¹ :

$$I(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \frac{d^2P}{d\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} du} = \frac{d^2P}{d\Gamma \cos \theta du} \quad (\text{III.14})$$

$d\Gamma \cos \theta$ est la projection de l'élément de surface $d\Gamma$ selon la normale à la direction de propagation \mathbf{u} .

¹Certains expriment parfois l'intensité spécifique en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$ en travaillant par bande de fréquence. Cette notion n'est pas utile dans le cas de l'acoustique qui nous intéresse et où il n'existe pas d'échange d'énergie entre bandes spectrales comme en rayonnement thermique.

2.1.2 Emittance énergétique et flux de puissance

L'émittance énergétique (ou radiance) M est définie en thermique comme la densité de flux émis par l'élément de surface $d\Gamma$ dans toutes les directions :

$$M = \frac{dP}{d\Gamma}. \quad (\text{III.15})$$

M s'exprime en W.m^{-2} . Le flux dP se déduit de l'intégration de d^2P sur le demi-espace au dessus de $d\Gamma$ et l'émittance M s'écrit alors :

$$M(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{U}} L(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} du = \int_{\mathcal{U}} L(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \cos \theta du \quad (\text{III.16})$$

où \mathcal{U} est l'ensemble des directions \mathbf{u} dans l'hémisphère supérieur au point \mathbf{p} . On parlera davantage d'émittance pour la densité de flux émise par Γ et d'éclairement pour la densité de flux incident. L'analogie acoustique de l'émittance est la densité de flux d'énergie acoustique associée au vecteur densité de flux ou vecteur intensité acoustique \mathbf{I} . Ce vecteur est l'analogie du vecteur de Poynting en électromagnétisme. Ainsi, le flux d'énergie acoustique s'écrit comme :

$$dP = \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (\text{III.17})$$

L'intensité acoustique totale au point \mathbf{p} est obtenue en intégrant l'intensité spécifique sur l'ensemble des directions d'émission :

$$\mathbf{I}(\mathbf{p}) = \int_{\mathcal{U}} I(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \mathbf{u} du, \quad (\text{III.18})$$

et on retrouve la même relation entre la densité de flux d'énergie et l'intensité spécifique qu'entre l'émittance et la luminance à savoir :

$$\mathbf{I}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = \int_{\mathcal{U}} I(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} du, \quad (\text{III.19})$$

2.1.3 Facteurs d'angle

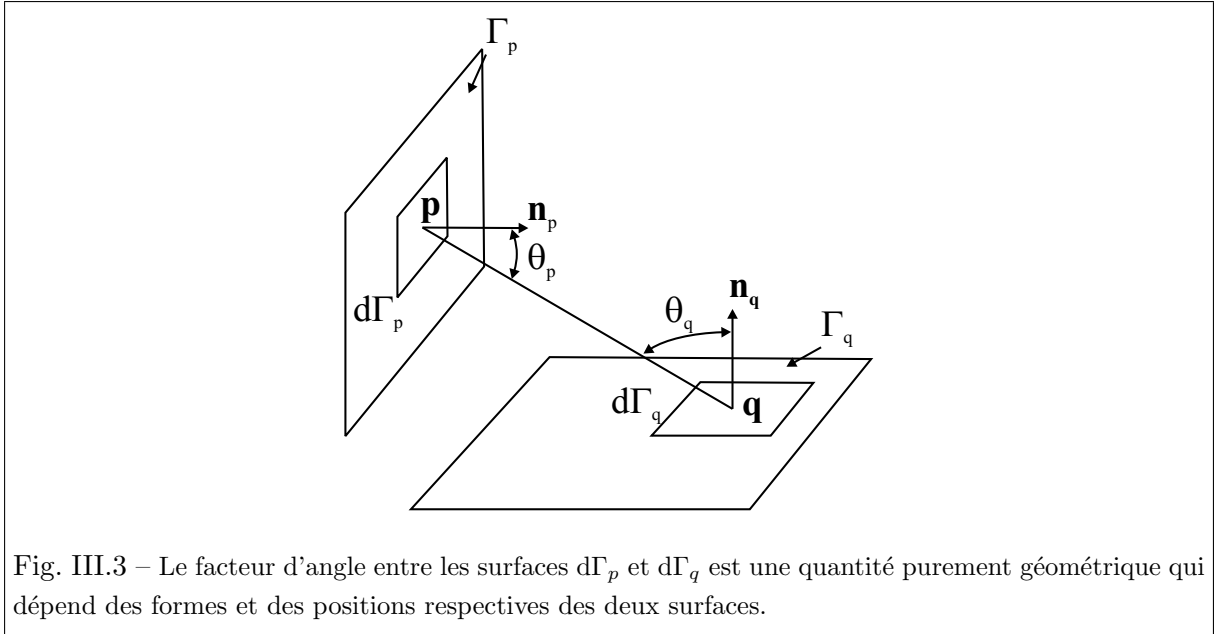
Considérons deux surfaces Γ_p et Γ_q (Fig. III.3). Le facteur d'angle entre les deux surfaces, également appelé facteur de vue ou facteur de forme, représente la proportion d'énergie émise par une surface et reçue par l'autre. C'est une quantité purement géométrique qui ne dépend que des formes et des positions respectives des deux surfaces. Analytiquement le facteur d'angle F_{qp} sous lequel Γ_q 'voit' Γ_p s'écrit :

$$F_{qp} \Gamma_q = \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_q} K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\Gamma_p d\Gamma_q \quad (\text{III.20})$$

avec :

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\cos \theta_p \cos \theta_q}{\pi |\mathbf{q} - \mathbf{p}|^2}. \quad (\text{III.21})$$

θ_p et θ_q sont les angles d'incidence, $|\mathbf{q} - \mathbf{p}|$ la distance entre les surfaces.



Si les deux surfaces sont élémentaires (notées à présent $d\Gamma_p$ et $d\Gamma_q$), le facteur de forme se réduit à :

$$dF_{qp} = K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\Gamma_p = \frac{\cos \theta_p \cos \theta_q d\Gamma_p}{\pi |\mathbf{q} - \mathbf{p}|^2} \quad (\text{III.22})$$

Il vérifie la règle de réciprocité :

$$dF_{qp} d\Gamma_q = dF_{pq} d\Gamma_p \quad (\text{III.23})$$

et la règle de complémentarité qui garantit la conservation de l'énergie à condition que la surface Γ_p soit fermée :

$$\int_{\Gamma_p} dF_{qp} = 1 \quad (\text{III.24})$$

2.1.4 Relations entre les caractéristiques radiatives

Réflexivité

Le flux incident, qui arrive sur une surface élémentaire $d\Gamma$, est en partie absorbé, en partie réfléchi, et en partie transmis. Si le flux incident, de luminance L_{inc} , se propage suivant la direction \mathbf{v} dans l'angle solide dv , ce flux par unité de surface incidente s'écrit au point \mathbf{p} : $L_{inc}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \cos \theta_i dv$. Une fraction de ce flux dL_{ref} est réfléchie dans la direction \mathbf{u} dans l'angle solide du . La réflectivité bidirectionnelle est définie comme le rapport :

$$R(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{dL_{ref}(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{L_{inc}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \cos \theta_i dv}. \quad (\text{III.25})$$

Ce facteur est homogène à l'inverse d'un angle solide. La réflectivité directionnelle hémisphérique se déduit de la réflectivité bidirectionnelle par la relation :

$$R(\mathbf{u}) = \frac{\int_{\mathcal{U}} dL_{ref}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \cos \theta_r du}{L_{inc} \cos \theta_i dv} \quad (\text{III.26})$$

Cette réflectivité représente le rapport entre le flux d'énergie réfléchi dans toutes les directions de l'espace et le flux incident. Des équations (III.25) et (III.26), on déduit :

$$R(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{U}} R(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \cos \theta_r \, dv. \quad (\text{III.27})$$

Emissivité

Pour caractériser l'émission d'un corps réel, on fait appel à une grandeur physique appelée émissivité. L'émissivité directionnelle ϵ d'un corps est le rapport de la luminance de ce corps L à la luminance L^0 du corps noir à la même température :

$$\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \frac{L(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{L^0(\mathbf{p}, \mathbf{u})} \quad (\text{III.28})$$

Relation d'équilibre thermique

Lorsqu'on s'intéresse à l'équilibre d'un système en thermique, tout corps doit être considéré d'un double point de vue :

- comme émetteur, car il émet un rayonnement lié à sa température,
- comme récepteur, car il reçoit des rayonnements émis ou réfléchis par les corps qui l'entourent : une fraction du rayonnement reçu est réfléchi sans pénétrer, une fraction est absorbée et transformée en énergie interne, et une fraction est transmise (traverse le corps).

Pour un corps opaque, il n'y a pas de transmission. Dans ces conditions, la luminance quittant un élément de surface $d\Gamma$ au point \mathbf{p} dans la direction \mathbf{u} est donc la somme de la luminance émise en \mathbf{p} dans la direction \mathbf{u} provenant de l'émission de $d\Gamma$, et de la réflexion par $d\Gamma$ de l'ensemble des luminances incidentes dans la direction \mathbf{v} autour de l'angle solide dv :

$$L(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = L_{\text{emit}}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) + \int_{\mathcal{U}} R(\mathbf{v}, \mathbf{u}) L_{\text{inc}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \cos \theta_i \, dv. \quad (\text{III.29})$$

où :

$L_{\text{emit}}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{u})L^0(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ est la luminance émise liée à l'émission propre : elle dépend de l'émissivité ϵ de la surface,

$R(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ est la réflectivité bidirectionnelle caractérisant les propriétés de réflexion de la surface au point \mathbf{p} ,

$L_{\text{inc}}(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ est la luminance incidente en \mathbf{p} depuis la direction \mathbf{v} , θ_i est l'angle entre la direction d'incidence \mathbf{v} et la normale à la surface \mathbf{n} tel que $\cos \theta_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.

L'émission propre de la surface est nulle en acoustique ce qui revient à considérer que les corps sont de température nulle (0 K) et le premier terme du second membre de l'équation (III.29) est donc nul. L'équivalent de la luminance $L(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ est l'intensité spécifique I_{emit} émise dans la direction \mathbf{u} , et l'équivalent de la luminance $L_{\text{inc}}(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ est l'intensité spécifique incidente I_{inc} dans la direction \mathbf{v} . Le bilan de puissance acoustique (III.29) au point \mathbf{p} s'écrit donc :

$$I_{\text{emit}}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{U}} R(\mathbf{v}, \mathbf{u}) I_{\text{inc}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_p \, dv \quad (\text{III.30})$$

où l'intégration est menée sur l'ensemble des directions d'incidence.

2.2 Hypothèses de la méthode du transfert radiatif

La méthode du transfert radiatif permet d'étudier le champ stationnaire ou le champ transitoire, application intéressante pour évaluer le temps de réverbération d'une pièce en acoustique des salles. Si l'on s'intéresse au régime stationnaire, le champ est décomposé en ondes propagatives. En particulier, les ondes dites de champ proche, et notamment les ondes évanescentes qui restent cantonnées au niveau des discontinuités et dont l'étendue spatiale diminue avec la fréquence, sont négligées. Nous nous plaçons donc en hypothèse de champ lointain, hypothèse peu contraignante en hautes fréquences où la longueur d'onde est petite et la zone de champ proche qui s'étend sur quelques longueurs d'onde reste confinée. Les ondes propagatives sont caractérisées par leur célérité, leur front d'onde et leur coefficient d'atténuation, données qu'il est nécessaire de connaître pour mettre en œuvre la méthode. Il est donc préférable de travailler dans un milieu linéaire, homogène et isotrope. Si l'on s'intéresse au régime transitoire, le champ est décomposé en paquets d'ondes. Pour les ondes propagatives et les paquets d'ondes, la relation fondamentale qui permet de relier la densité d'énergie et l'intensité est :

$$\mathbf{I} = c W \mathbf{u}, \quad (\text{III.31})$$

où c est la vitesse de groupe, et \mathbf{u} le vecteur unitaire dans la direction de propagation.

La méthode du transfert radiatif s'appuie sur trois principes valables dans le domaine des hautes fréquences.

(P1) La représentation intégrale des champs

Ce mode de représentation est mis en œuvre en acoustique dans la théorie de Fresnel-Kirchhoff qui dérive d'une formulation intégrale de l'équation d'onde. Cette théorie, développée en optique, est fondée sur une combinaison du principe de Huyghens et de la théorie des interférences apportée par Fresnel. Le champ s'écrit en superposant le champ direct, contribution des sources primaires réelles volumiques situées à l'intérieur du domaine Ω , et le champ réfléchi, contribution de sources secondaires fictives de surface situées sur la frontière du domaine Γ . Ces sources secondaires permettent de vérifier les conditions aux limites sur les frontières du domaine.

(P2) La décorrélation des sources

La méthode du transfert radiatif repose sur l'hypothèse de décorrélation des ondes. Toutes les sources introduites, réelles ou fictives, sont supposées décorrélées. Dans le cas des sources réelles ou primaires, la décorrélation des sources relève d'une hypothèse dont il faut s'assurer au préalable. Dans le cas des sources fictives ou secondaires, ce principe relève davantage d'une simplification délibérément introduite. En l'absence de termes interférentiels, les quantités énergétiques peuvent être sommées et les champs d'énergie peuvent être construits par

superposition linéaire. L'hypothèse de décorrélation des ondes revient à négliger les termes de phase, responsables du comportement modal d'un système. Dès lors, la méthode du transfert radiatif ne pourra fournir d'information modale, et cette perte d'information est associée à un gain numérique en temps de calcul. Enfin, cette hypothèse de décorrélation des sources est légitime dans le domaine des hautes fréquences où négliger la phase dans la description du système est équivalent à moyenniser sa réponse sur les incertitudes géométriques, fréquentielles ou des matériaux. Ainsi, les calculs énergétiques menés par la méthode du transfert radiatif sont comparés dans le cadre de ce travail aux moyennes des résultats de référence sur des bandes de fréquence, typiquement des octaves ou tiers d'octave.

(P3) Le principe de localité

Le principe de localité, valable dans le domaine des hautes fréquences, précise que les processus d'interaction entre ondes en un point donné ne dépendent que des propriétés locales du système (dont notamment la géométrie) et des fronts d'onde. Il permet de décomposer un problème complexe en un ensemble de problèmes plus simples, dits canoniques, traités localement.

2.3 Description de la méthode

2.3.1 Représentation des champs d'énergie

La mise en œuvre de la méthode nécessite tout d'abord de connaître le champ direct associé à un point source émettant dans un milieu infini. La densité d'énergie de ce champ direct est notée $G(\mathbf{s}, \tau; \mathbf{r}, t)$ où \mathbf{s} désigne le point source où une impulsion est émise à l'instant τ et \mathbf{r} désigne le point récepteur où l'impulsion arrive à l'instant t . $\mathbf{H}(\mathbf{s}, \tau; \mathbf{r}, t)$ est l'intensité associée à la densité d'énergie G par la relation fondamentale (III.31). Des expressions de G et de \mathbf{H} peuvent être établies à partir d'un bilan local de puissance. Ce bilan s'écrit :

$$\operatorname{div} \mathbf{I} + \Pi_{\text{diss}} + \frac{\partial W}{\partial t} = \Pi_{\text{inj}}, \quad (\text{III.32})$$

où Π_{inj} et Π_{diss} désignent respectivement la densité de puissance injectée et dissipée (W/m^3). Dans le cas de l'impulsion considérée, $\Pi_{\text{inj}} = \delta_{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) \delta_{\tau}(\mathbf{t})$. Les origines de l'amortissement et donc de la puissance dissipée sont multiples. L'un des intérêts de la méthode du transfert radiatif par rapport à l'analyse statistique de l'énergie est de permettre la description de la dissipation d'énergie au sein d'un système, et donc d'évaluer la répartition spatiale de l'énergie. Le modèle d'amortissement retenu est similaire à celui introduit dans la méthode de diffusion de l'énergie ou dans la SEA (Eq. (III.5)). Dans le cas de l'acoustique, cette relation s'écrit plus habituellement :

$$\Pi_{\text{diss}} = m c W, \quad (\text{III.33})$$

où $m = \frac{\eta \omega}{c}$ désigne le coefficient d'absorption atmosphérique (m^{-1}). Les champs G et H vérifient donc l'équation :

$$\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{s}, \tau; \mathbf{r}, t) + m c G(\mathbf{s}, \tau; \mathbf{r}, t) + \frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{s}, \tau; \mathbf{r}, t) = \delta_{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) \delta_{\tau}(\mathbf{t}), \quad (\text{III.34})$$

avec pour solutions [Le Bot, 1998a, Le Bot, 2002a] :

$$G(\mathbf{s}, \tau; \mathbf{r}, t) = G(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \delta(t - \tau - s/c) \quad (\text{III.35})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}, \tau; \mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \delta(t - \tau - s/c), \quad (\text{III.36})$$

où $s = |\mathbf{s} - \mathbf{r}|$. Les solutions stationnaires $G(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ et $H(\mathbf{s}, \mathbf{r})$, également désignées sous le terme de noyaux énergétiques, s'écrivent :

$$G(s) = G(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{e^{-ms}}{\gamma_0 c s^{n-1}} \quad (\text{III.37})$$

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = cG(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \mathbf{u}, \quad (\text{III.38})$$

γ_0 est l'angle solide de l'espace et n la dimension du milieu ($\gamma_0 = 2$ si $n = 1$, $\gamma_0 = 2\pi$ si $n = 2$ et $\gamma_0 = 4\pi$ si $n = 3$). Il faut noter que ces formulations sont obtenues en supposant que m et c sont constants, c'est-à-dire que le milieu est homogène et isotrope. D'après le principe de Huyghens, les champs complets W et I sont alors obtenus par superposition linéaire des composantes de champ direct provenant des sources volumiques de densité de puissance ρ (W/m^3) situées à l'intérieur du domaine Ω , et des composantes réverbérées issues des sources de surface de densité de puissance σ (W/m^2) situées à la frontière du domaine Γ :

$$W(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{s}, t - s/c) G(\mathbf{s}, \mathbf{r}) d\Omega_s + \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t - r/c) G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\Gamma_p \quad (\text{III.39})$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{s}, t - s/c) \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) d\Omega_s + \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t - r/c) \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\Gamma_p \quad (\text{III.40})$$

où $r = |\mathbf{r} - \mathbf{p}|$. \mathbf{u} est le vecteur unitaire du point source \mathbf{p} vers le point récepteur \mathbf{r} et r/c (ou s/c) est le retard de propagation de l'énergie entre le point source et le point récepteur (Fig. III.4).

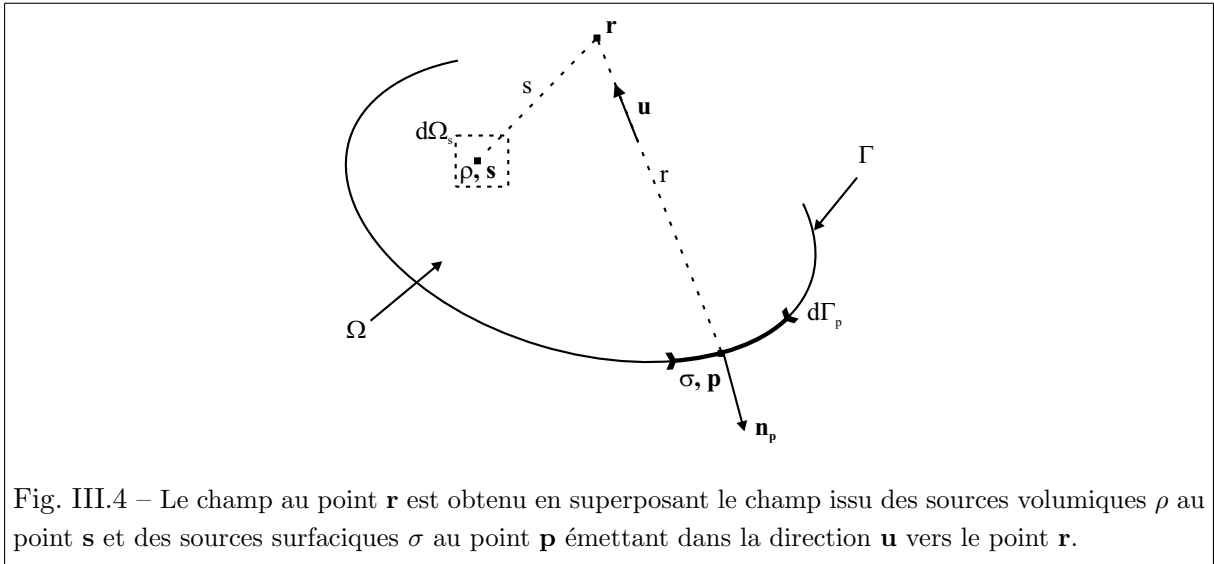


Fig. III.4 – Le champ au point \mathbf{r} est obtenu en superposant le champ issu des sources volumiques ρ au point \mathbf{s} et des sources surfaciques σ au point \mathbf{p} émettant dans la direction \mathbf{u} vers le point \mathbf{r} .

Les champs W et I vérifient le bilan de puissance (III.32) qui s'écrit ici :

$$\text{div } \mathbf{I} + m c W + \frac{\partial W}{\partial t} = \rho. \quad (\text{III.41})$$

Les sources surfaciques σ constituent les inconnues du problème à résoudre. Signalons également que dans le cas où la frontière Γ est concave, des obstacles peuvent se situer entre un point source \mathbf{s} ou \mathbf{p} et un point récepteur \mathbf{r} . Dans ces conditions, il convient d'introduire un coefficient de visibilité de façon à ce que seules les sources visibles du point \mathbf{r} soient prises en compte. Ce coefficient V est défini de façon binaire égal à 0 lorsqu'un obstacle est situé entre la source et le point récepteur, 1 sinon. En introduisant ce coefficient dans les fonctions G et H , les noyaux énergétiques s'écrivent alors :

$$G(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{e^{-m s}}{\gamma_0 c s^{n-1}} V(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \quad (\text{III.42})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = c G(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \mathbf{u}. \quad (\text{III.43})$$

Afin de ne pas alourdir les notations, ces formulations seront implicitement utilisées dans les développements à suivre. Par ailleurs, on s'intéressera à la méthode du transfert radiatif stationnaire et la dépendance temporelle sera donc omise.

2.3.2 Equation de Fredholm sur les inconnues σ

L'équation sur l'inconnue σ est obtenue en appliquant le bilan de puissance en tout point \mathbf{p} de la frontière Γ . On s'intéresse donc au flux d'énergie émis dP_{emit} et reçu dP_{inc} dans un angle solide élémentaire par un élément de surface $d\Gamma_p$ entourant \mathbf{p} (Fig. III.5).

Considérons tout d'abord le flux d'énergie émis au point \mathbf{p} et introduisons une sphère de rayon ε entourant le point source. Le flux émis dans l'angle solide élémentaire du autour de la direction \mathbf{u} est calculé en intégrant l'intensité créée par la source de frontière $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t) d\Gamma_p$ sur l'élément de surface $dS_\varepsilon = \varepsilon^{n-1} du$ de la sphère :

$$d^2 P_{\text{emit}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}) d\Gamma_p H(\varepsilon) \varepsilon^{n-1} du \quad (\text{III.44})$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}) d\Gamma_p \frac{e^{-m\varepsilon}}{\gamma_0 \varepsilon^{n-1}} \varepsilon^{n-1} du \\ &= \frac{1}{\gamma_0} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}) d\Gamma_p du. \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

L'intensité spécifique associée à $d^2 P_{\text{emit}}$ s'écrit d'après la relation (III.14) :

$$I_{\text{emit}}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \frac{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{\gamma_0 \cos \theta_p} \quad (\text{III.46})$$

où θ_p désigne l'angle d'émission au point \mathbf{p} par rapport à la normale à la frontière \mathbf{n}_p .

L'intensité spécifique incidente dans l'angle solide élémentaire dv prend en compte deux contributions, la contribution de type champ direct issue des sources primaires, et la contribution de type champ réverbéré issue des sources secondaires. La contribution directe est créée par les sources primaires $\rho(\mathbf{s})$ situées dans le cône d'incidence (\mathbf{p}, dv) de sommet \mathbf{p} et d'angle au sommet dv , et reçue par le point \mathbf{p} :

$$I_{\text{dir}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) dv = \int_{(\mathbf{p}, dv)} \rho(\mathbf{s}) H(\mathbf{s}, \mathbf{p}) d\Omega_s. \quad (\text{III.47})$$

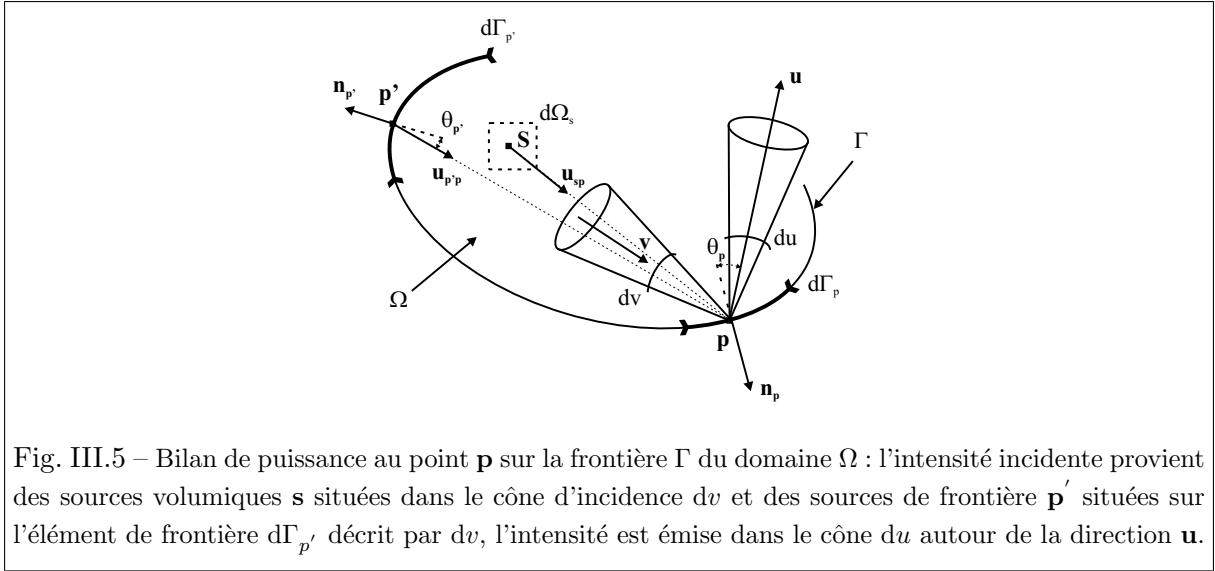


Fig. III.5 – Bilan de puissance au point \mathbf{p} sur la frontière Γ du domaine Ω : l'intensité incidente provient des sources volumiques \mathbf{s} situées dans le cône d'incidence dv et des sources de frontière \mathbf{p}' situées sur l'élément de frontière $d\Gamma_{p'}$ décrit par dv , l'intensité est émise dans le cône du autour de la direction \mathbf{u} .

Le point \mathbf{p}' désigne à présent le point de la frontière Γ_p situé en regard du point \mathbf{p} selon la direction $\mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$. La contribution réverbérée est créée par la source de frontière $\sigma(\mathbf{p}', \mathbf{v}, t)$:

$$I_{\text{rev}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) dv = \int_{(\mathbf{p}, dv)} \sigma(\mathbf{p}', \mathbf{v}) H(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\Gamma_{p'} \quad (\text{III.48})$$

où $p' = |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|$, $d\Gamma_{p'}$ est l'élément de surface sur la frontière Γ_p décrit par l'angle solide dv , $\mathbf{v} = \mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$. L'intensité spécifique incidente dans l'angle solide élémentaire dv s'écrit donc finalement :

$$I_{\text{inc}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) dv = \int_{(\mathbf{p}, dv)} \rho(\mathbf{s}) H(\mathbf{s}, \mathbf{p}) d\Omega_s + \sigma(\mathbf{p}', \mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) H(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\Gamma_{p'}. \quad (\text{III.49})$$

Notons qu'en intégrant sur l'ensemble des directions d'incidence au point \mathbf{p} de sorte que le point \mathbf{p}' décrit l'intégralité de la frontière Γ et le point \mathbf{s} décrit l'ensemble du domaine Ω , l'intensité acoustique incidente totale au point \mathbf{p} s'écrit d'après l'équation (III.18) :

$$I_{\text{inc}}(\mathbf{p}) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{s}) H(\mathbf{s}, \mathbf{p}) d\Omega_s + \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{p}', \mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) H(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\Gamma_{p'}, \quad (\text{III.50})$$

de façon similaire à l'équation (III.40) en stationnaire.

Etude de la réflexion

En introduisant la réflectivité bidirectionnelle de la frontière $R(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, les intensités spécifiques incidente et émise au point \mathbf{p} de la frontière vérifient l'équation (III.30) empruntée à la thermique. L'intensité émise $I_{\text{emit}}(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ est donnée par l'équation (III.46). L'intensité incidente $I_{\text{inc}}(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ est donnée par l'équation (III.49). Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{\gamma_0 \cos \theta_p} &= \left[\int_{\mathcal{U}} \int_{(\mathbf{p}, dv)} R(\mathbf{u}_{\mathbf{sp}}, \mathbf{u}) \rho(\mathbf{s}) \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p}} d\Omega_s dv \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{U}} \int_{(\mathbf{p}, dv)} R(\mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}, \mathbf{u}) \sigma(\mathbf{p}', \mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) \mathbf{H}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p}} d\Gamma_{p'} dv \right]. \quad (\text{III.51}) \end{aligned}$$

En intégrant sur l'ensemble des directions d'incidence \mathcal{U} , l'équation (III.51) sur σ se ramène à une équation sur Ω et sur Γ :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{\gamma_0 \cos \theta_p} &= \int_{\Omega} R(\mathbf{u}_{\mathbf{s}\mathbf{p}}, \mathbf{u}) \rho(\mathbf{s}) \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p}} d\Omega_s \\ &+ \int_{\Gamma} R(\mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}, \mathbf{u}) \sigma(\mathbf{p}', \mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) \mathbf{H}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p}} d\Gamma_{p'}. \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

Cette équation relie la luminance dans la direction \mathbf{u} (terme de gauche) au flux incident des sources primaires (première intégrale du membre de droite) et secondaires (seconde intégrale du membre de droite). Par analogie avec la thermique (Eq. (III.26)), on définit la réflectivité hémisphérique ou l'efficacité de réflexion $R(\mathbf{v})$ comme le flux total quittant la frontière $d\Gamma_p$ dans toutes les directions \mathbf{u} pour un flux incident $I(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t) \cos \theta_p$:

$$R(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{U}} R(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \cos \theta_p du, \quad (\text{III.53})$$

où l'intégrale est menée sur l'ensemble des directions d'émission.

Réflexion diffuse

Dans le cas d'une réflexion diffuse, la réflectivité hémisphérique ne dépend pas de la direction d'émission \mathbf{u} .

$$R(\mathbf{v}) = \gamma R(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0), \quad (\text{III.54})$$

où \mathbf{u}_0 est une direction quelconque d'émission, et $\gamma = \int \cos \theta_p du$. Les valeurs de γ sont énumérées dans le tableau III.1.

n	1	2	3
γ	1	2	π

Tab. III.1 – Valeurs de la constante γ en fonction de la dimension n du milieu

Les sources secondaires émettent l'énergie suivant la loi de Lambert :

$$\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{p}) \cos \theta_p \quad (\text{III.55})$$

où θ_p est l'angle d'émission au point \mathbf{p} dans la direction \mathbf{u} . L'équation (III.52) se simplifie en multipliant par γ pour aboutir à :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma_0} \sigma(\mathbf{p}) &= \int_{\Omega} R(\mathbf{u}_{\mathbf{s}\mathbf{p}}) \rho(\mathbf{s}) \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p}} d\Omega_s \\ &+ \int_{\Gamma} R(\mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) \sigma(\mathbf{p}') \cos \theta_{p'} \mathbf{H}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p}} d\Gamma_{p'}. \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

En introduisant les valeurs de γ et γ_0 en 3 D ($n = 3$) et en développant le noyau H de façon à faire apparaître le facteur d'angle K défini par l'équation (III.21), l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{p}) &= \int_{\Omega} R(\mathbf{u}_{\mathbf{s}\mathbf{p}}) \rho(\mathbf{s}) \frac{e^{-ms} \cos \theta_p}{\pi s^2} d\Omega_s \\ &+ \int_{\Gamma} R(\mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) \sigma(\mathbf{p}') e^{-mr'} K(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\Gamma_{p'}. \end{aligned} \quad (\text{III.57})$$

Il s'agit d'une équation de Fredholm de seconde espèce qui peut être résolue par les méthodes classiques de collocation ou de Galerkin. Dans le cas particulier où la frontière du milieu est caractérisée par un coefficient d'absorption énergétique α , l'efficacité de réflexion $R(\mathbf{v})$ est égale à $1 - \alpha$ et on retrouve le bilan de puissance : $I_{\text{emit}}(\mathbf{p}) = (1 - \alpha) I_{\text{inc}}(\mathbf{p})$. L'équation (III.56) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{p}) &= (1 - \alpha) \left[\int_{\Omega} \rho(\mathbf{s}) \frac{e^{-ms} \cos \theta_p}{\pi s^2} d\Omega_s \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{p}') e^{-mr'} K(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\Gamma_{p'} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

Introduisons l'opérateur intégral :

$$T : \sigma \rightarrow \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{q}) \mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Gamma_p \quad (\text{III.59})$$

où \mathcal{K} est le noyau défini par :

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (1 - \alpha) e^{-mq} K(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (\text{III.60})$$

L'équation (III.58) peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$(Id - T) \sigma = g \quad (\text{III.61})$$

où g correspond à l'éclairement provenant des sources primaires.

$$g : \mathbf{p} \rightarrow (1 - \alpha) \int_{\Omega} \rho(\mathbf{s}) \frac{e^{-ms} \cos \theta_p}{\pi s^2} d\Omega_s. \quad (\text{III.62})$$

L'équation (III.61) correspond au cas le plus général qui nous intéressera dans le cadre de l'étude. La résolution du problème pour la réflexion spéculaire ou la transmission, généralisation du problème de la réflexion, est présentée en annexe A.

2.3.3 Résolution du problème général

Le Bot [Le Bot et Bocquillet, 2000] a montré que le problème (III.61) admet une solution. Par ailleurs, cette solution est unique et peut s'écrire :

$$\sigma = (Id - T)^{-1} g. \quad (\text{III.63})$$

Le lecteur intéressé trouvera en annexe B les détails de la démonstration.

2.4 Schéma numérique

Les inconnues σ vérifient l'équation de Fredholm (III.56) de seconde espèce. Cette équation est résolue par la méthode de collocation. Pour cela, la frontière de chaque système est divisée en éléments notés Γ_k , repérés par leur indice k , et un point de collocation \mathbf{p}_k est introduit au centre ou au barycentre de chaque élément. Les inconnues $\sigma(\mathbf{p})$ sont supposées constantes sur

chaque élément et on note σ_k leur valeur au point de collocation. L'équation (III.56) à résoudre devient alors :

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} \sigma_k = \sum_s R \rho_s H(\mathbf{s}, \mathbf{p}_k) \cos \phi_k + \sum_l \sigma_l \int_{\Gamma_l} R \cos \theta_{p'} H(\mathbf{p}', \mathbf{p}_k) \cos \phi_k d\Gamma_{p'}. \quad (\text{III.64})$$

où $\theta_{p'}$ est l'angle d'émission en \mathbf{p}' , ϕ_k l'angle d'incidence en \mathbf{p}_k du rayon venant de \mathbf{s} (premier terme du membre de droite) et de \mathbf{p}' (deuxième terme du membre de droite). L'efficacité de réflexion R est évaluée pour la direction d'incidence $\mathbf{u}_{\mathbf{s}\mathbf{p}}$ ou $\mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$. Cette équation s'écrit sous forme matricielle :

$$(Id - T) \sigma = g \quad (\text{III.65})$$

$$T_{kl} = \frac{\gamma_0}{\gamma} \int_{\Gamma_l} R \cos \theta_{p'} H(\mathbf{p}', \mathbf{p}_k) \cos \phi_k d\Gamma_{p'} \quad (\text{III.66})$$

$$g_k = \frac{\gamma_0}{\gamma} \int_{\Omega} R \rho_s H(\mathbf{s}, \mathbf{p}_k) \cos \phi_k d\Omega_s. \quad (\text{III.67})$$

Les intégrales sont évaluées par un algorithme d'intégration de Gauss en introduisant des points pondérés de Gauss sur chaque élément. Ce système peut être résolu par n'importe quelle méthode de résolution de système standard. La construction de la matrice T constitue l'une des principales difficultés de la méthode, d'autant plus qu'elle nécessite de calculer les coefficients de visibilité pour chaque point de collocation, ce qui conduit à de nombreux tests géométriques et accroît les temps de calcul. Notons que cette matrice est réelle et pleine, et qu'elle n'est pas symétrique. L'inversion de la matrice $Id - T$ est l'opération la plus coûteuse en place mémoire et en temps de calcul numérique. Lorsque les sources σ_k sont connues, les champs W et \mathbf{H} sont construits sur la base des formes discrétisées des équations (III.39) et (III.40) :

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}) &= \sum_s \rho_s G(\mathbf{s}, \mathbf{r}) + \sum_k \sigma_k \int_{\Gamma_k} G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \cos \theta_p d\Gamma_p \\ \mathbf{I}(\mathbf{r}) &= \sum_s \rho_s \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) + \sum_k \sigma_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \cos \theta_p d\Gamma_p. \end{aligned} \quad (\text{III.68})$$

A nouveau, les intégrales sont évaluées par un algorithme d'intégration de Gauss.

2.5 Comparaison avec les autres méthodes énergétiques

2.5.1 Comparaison avec la méthode des rayons

Pour montrer l'équivalence entre la méthode du transfert radiatif et la méthode des rayons au travers de la méthode du tir de rayons, reprenons l'expression de l'opérateur T défini par l'équation (III.59). L'étude de la résolution du problème intégral au paragraphe 2.3.3 et en annexe B a permis de montrer que la norme de cet opérateur est inférieure à 1 de façon à déduire l'existence et l'unicité de la solution. Par ailleurs, puisque $\|T\| \leq 1$, l'opérateur $(Id - T)^{-1}$ peut donc faire l'objet d'un développement en série de Neumann :

$$(Id - T)^{-1} = Id + T + T^2 + \dots + T^n + \dots \quad (\text{III.69})$$

Et donc,

$$\sigma = g + Tg + T^2g + \dots + T^n g + \dots \quad (\text{III.70})$$

Finalement, le champ de densité d'énergie acoustique W en tout point \mathbf{r} du domaine s'écrit d'après l'équation (III.39) :

$$W(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{s}, t - s/c) G(\mathbf{s}, \mathbf{r}) d\Omega_s + \int_{\Gamma} g \cos \theta_p G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\Gamma_p \quad (\text{III.71})$$

$$+ \int_{\Gamma} Tg \cos \theta_p G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\Gamma_p + \dots \quad (\text{III.72})$$

$$+ \int_{\Gamma} T^n g \cos \theta_p G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\Gamma_p + \dots, \quad (\text{III.73})$$

c'est-à-dire comme la somme du champ direct et des champs réfléchis, une fois, deux fois, etc aux frontières. Il apparaît ainsi que les deux méthodes reposent sur les mêmes hypothèses physiques mais sur des techniques de résolution différentes, puisque la méthode des rayons repose sur une formulation discrète alors que la méthode du transfert radiatif repose sur une formulation intégrale. A titre d'exemple, la figure III.6 extraite de [Le Bot et Bocquillet, 2000] présente une comparaison entre les deux méthodes dans le cas d'une cavité acoustique. Cette cavité représente une usine encombrée d'obstacles où trois sources ponctuelles d'égale puissance participent à l'excitation acoustique. La grande similitude entre les résultats conforte l'équivalence entre les deux méthodes.

2.5.2 Comparaison avec la méthode du potentiel d'intensité

Une application est proposée ici pour montrer que la méthode du transfert radiatif conduit à un résultat similaire à la méthode du potentiel d'intensité. Considérons pour cela le cas d'un monopôle de puissance unitaire émettant au point \mathbf{s} face à une paroi réfléchissante. On cherche à évaluer l'intensité acoustique en un point \mathbf{r} au-dessus de la paroi (Fig. III.7).

La méthode du potentiel d'intensité consiste à calculer le potentiel scalaire ϕ solution de l'équation de Poisson :

$$-\Delta\phi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}'), \quad (\text{III.74})$$

où δ est la distribution de Dirac, et \mathbf{s}' est la position du monopôle image, symétrique du monopôle source par rapport à la paroi réfléchissante. Ce problème admet une solution analytique de la forme :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r} + \frac{1}{4\pi r'}, \quad (\text{III.75})$$

$r = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$, $r' = |\mathbf{r} - \mathbf{s}'|$. L'intensité irrotationnelle s'obtient en calculant le gradient du potentiel scalaire φ :

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^2} \mathbf{u} + \frac{1}{4\pi r'^2} \mathbf{u}', \quad (\text{III.76})$$

où \mathbf{u} et \mathbf{u}' sont les vecteurs unitaires des points sources \mathbf{s} et \mathbf{s}' vers le point \mathbf{r} . En négligeant la partie rotationnelle de l'intensité, le champ obtenu par la méthode du potentiel d'intensité est donc identique à celui obtenu par la méthode du transfert radiatif. De ce point de vue, la

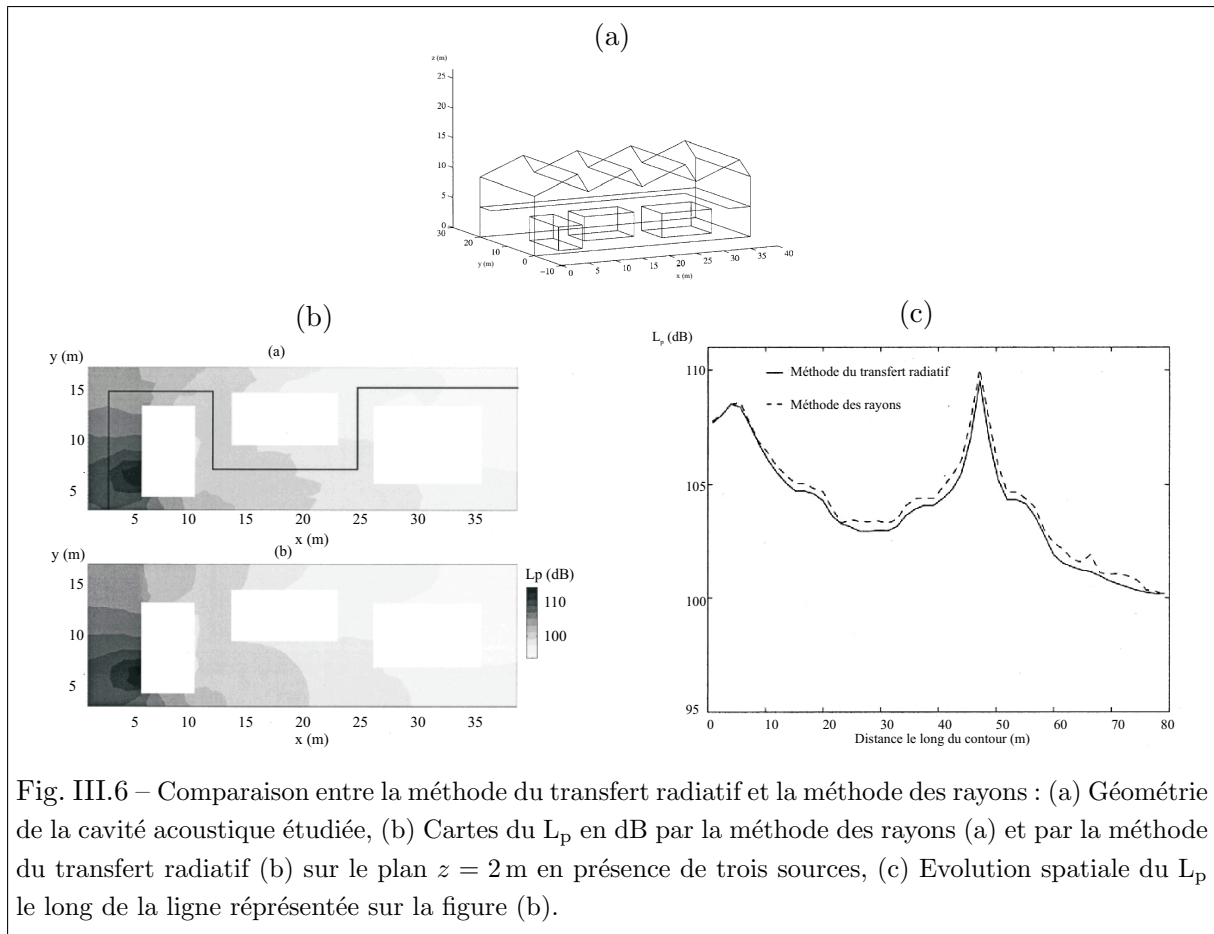


Fig. III.6 – Comparaison entre la méthode du transfert radiatif et la méthode des rayons : (a) Géométrie de la cavité acoustique étudiée, (b) Cartes du L_p en dB par la méthode des rayons (a) et par la méthode du transfert radiatif (b) sur le plan $z = 2$ m en présence de trois sources, (c) Evolution spatiale du L_p le long de la ligne représentée sur la figure (b).

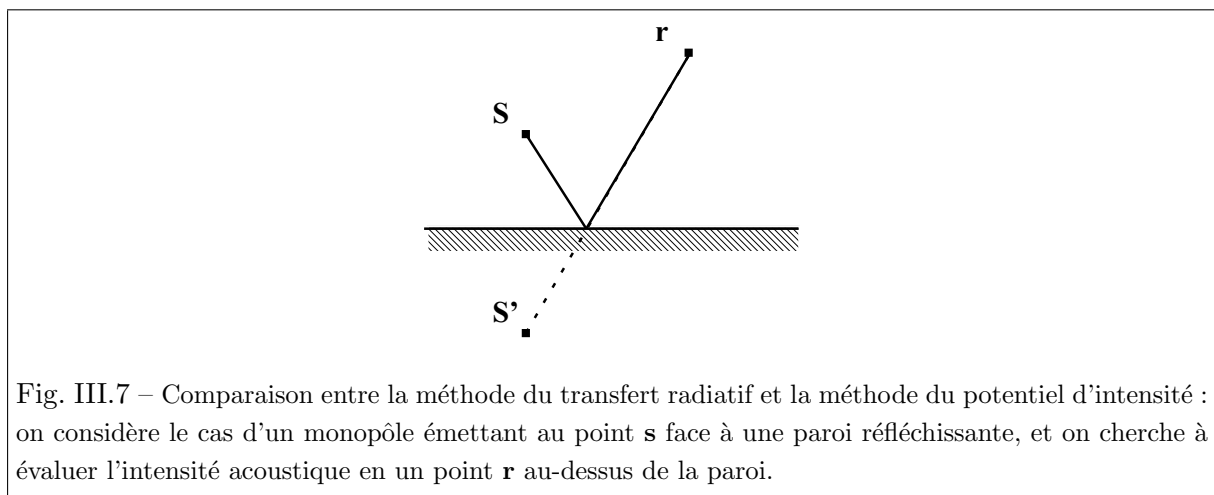


Fig. III.7 – Comparaison entre la méthode du transfert radiatif et la méthode du potentiel d'intensité : on considère le cas d'un monopôle émettant au point s face à une paroi réfléchissante, et on cherche à évaluer l'intensité acoustique en un point r au-dessus de la paroi.

méthode du potentiel d'intensité est donc en accord avec l'acoustique géométrique. Pour autant, la méthode ne conduit pas à un champ nul dans la zone d'ombre d'un obstacle, et se distingue de l'acoustique géométrique par ce fait.

3 Conclusion

Compte tenu de la complexité et de la diversité des phénomènes de propagation, de réflexion ou de diffraction des ondes en présence d'obstacles, il est difficile de prédire de manière exacte le champ acoustique à l'intérieur d'une cavité. Le comportement acoustique d'une cavité peut être divisé en deux domaines, le domaine des basses fréquences où le champ acoustique est caractérisé par l'existence de modes bien espacés, et le domaine des hautes fréquences où le champ est diffus. La fréquence limite séparant les deux domaines dépend notamment des dimensions de la cavité et de l'absorption au sein de celle-ci. La densité modale d'une cavité parallélépipédique croît avec le carré de la fréquence d'étude si bien que le nombre de modes excités devient très important, et donc on se situe assez rapidement dans le domaine des hautes fréquences.

Les méthodes de prédiction du champ acoustique au sein d'une cavité dans le domaine des hautes fréquences se présentent toutes comme des méthodes énergétiques où les grandeurs utilisées sont la densité d'énergie acoustique et l'intensité. La théorie de Sabine apparaît comme l'une des premières méthodes d'acoustique des salles reposant sur ces variables énergétiques. Cette méthode s'appuie sur l'hypothèse d'une répartition parfaitement homogène du champ acoustique au sein d'une cavité. Elle permet de caractériser la décroissance exponentielle du champ à partir de la notion de temps de réverbération. Dans le cas d'une unique cavité, la théorie de Sabine et l'analyse statistique de l'énergie (SEA), très utilisée pour les études vibroacoustiques en hautes fréquences, conduisent au même résultat à savoir la valeur globale de l'énergie au sein de la cavité. Toutefois, cette théorie est mise en défaut dès lors que l'absorption augmente et que la géométrie de la cavité est disproportionnée, comme dans un couloir. Par ailleurs, son principal inconvénient est qu'elle ne permet pas de prédire la répartition spatiale de l'énergie au sein de la cavité.

Il est intéressant alors de mettre en œuvre une méthode de rayons telle que la méthode des sources-images ou la méthode de tirs de rayons. Cette approche géométrique de l'acoustique repose sur le postulat d'équivalence de la loi de réflexion des ondes sonores avec celle des rayons lumineux. Elle s'applique à toute géométrie de cavité et quelles que soient les propriétés d'absorption. Les difficultés de mise en œuvre de cette méthode sont d'ordre numérique car la prise en compte de tous les ordres de réflexion conduit à des temps de calcul prohibitifs.

De nouvelles approches énergétiques basées sur l'équation de diffusion ou conduction thermique ont émergé. La méthode de diffusion de l'énergie applique l'équation de diffusion à la densité d'énergie et la méthode du potentiel d'intensité applique l'équation de diffusion au potentiel d'intensité associé à la partie irrotationnelle de l'intensité acoustique et néglige la partie rotationnelle en champ lointain. Cette méthode est une méthode intéressante pour l'étude des transferts acoustiques au sein d'environnements complexes.

La méthode du transfert radiatif, mise en œuvre dans le cadre de ce travail de thèse, s'inscrit dans la lignée des méthodes de prédiction vibroacoustique comme la SEA, la méthode de diffusion de l'énergie ou la méthode du potentiel d'intensité, basées sur des analogies avec le rayonnement thermique. Cette méthode est née de l'étude critique de la méthode de diffusion de l'énergie. Elle s'appuie sur des hypothèses valables dans le domaine des hautes fréquences dont notamment l'hypothèse de décorrélation des ondes acoustiques. La densité d'énergie acoustique est écrite en superposant la contribution issue de sources primaires réelles connues situées dans le domaine et la contribution de sources secondaires fictives à évaluer situées sur la frontière du domaine. Les amplitudes des sources secondaires dépendent de la position de la source et de la direction d'émission. Le bilan de puissance sur la frontière pour chaque direction conduit à une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce dont la résolution permet de déterminer les sources secondaires. Le champ acoustique en tout point du domaine est ensuite calculé en sommant les contributions de toutes les sources introduites.

La méthode du transfert permet de modéliser le phénomène de réflexion diffuse sur la frontière, et a été étendue à l'étude de la réflexion spéculaire ou de la transmission. L'introduction de la diffraction acoustique dans la méthode a fait l'objet d'une étude dans le cadre de la thèse dont les développements sont présentés au chapitre suivant.

Bibliographie

- [Belov et Rybak, 1975] Belov, V. et Rybak, S. (1975). Applicability of the transport equation in one-dimensional wave-propagation problem. *Journal of Soviet Physical Acoustics*, 21 :110–114.
- [Belov et al., 1977] Belov, V., Rybak, S., et Tartakovskii, B. (1977). Propagation of vibrational energy in absorbing structures. *Journal of Soviet Physical Acoustics*, 23 :115–119.
- [Benedetto et Spagnolo, 1984] Benedetto, G. et Spagnolo, R. (1984). A study of barriers in enclosures by a ray-tracing computer model. *Applied Acoustics*, 17 :183–199.
- [Bouthier et Bernhard, 1995] Bouthier, O. et Bernhard, R. (1995). Simple models of energy flow in vibrating membranes. *Journal of Sound and Vibration*, 182 :129–147.
- [Cho et Bernhard, 1998] Cho, P. et Bernhard, R. (1998). Energy flow analysis of coupled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4) :593–605.
- [Cotoni et al., 2002] Cotoni, V., Le Bot, A., et Jezequel, L. (2002). Sound transmission through a plate by an energy flow approach. *Acustica united with Acta Acustica*, 88 :827–836.
- [Eyglunent, 1997] Eyglunent, B. (1997). *Manuel de thermique, théorie et pratique - 2ème édition revue et augmentée*. Editions Hermès.
- [Gensanne et Santon, 1979] Gensanne, M. et Santon, F. (1979). Prediction of sound field in rooms of arbitrary shape : validity of the image sources method. *Journal of Sound and Vibration*, 63 :97–108.
- [Gibbs et Jones, 1972] Gibbs, B. et Jones, D. (1972). A simple image method for calculating the distribution of sound pressure levels within an enclosure. *Acustica*, 26 :24–32.
- [Jouhaneau, 1995] Jouhaneau, J. (1995). Acoustique des salles. *Techniques de l'ingénieur - article C3360*. 27 pages.
- [Joyce, 1975] Joyce, W. (1975). Sabine's reverberation times and ergodic auditoriums. *J. Acoust. Soc. Am.*, 58 :643–655.
- [Kang, 2002] Kang, J. (2002). Numerical modelling of the sound fields in urban streets with diffusely reflecting boundaries. *Journal of Sound and Vibration*, 258(5) :793–813.
- [Krokstad et al., 1968] Krokstad, A., Strom, S., et Sorsdal, S. (1968). Calculating the acoustical room response by the use of a ray tracing technique. *Journal of Sound and Vibration*, 8(1) :118–125.
- [Kuttruff, 1991] Kuttruff, H. (1991). *Room acoustics - 3rd edition*. Elsevier Applied Science.
- [Kuttruff, 1997] Kuttruff, H. (1997). Energetic sound propagation in rooms. *Acustica united with Acta Acustica*, 83 :622–628.
- [Langley, 1995] Langley, R. (1995). On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components. *Journal of Sound and Vibration*, 182(4) :637–657.
- [Le Bot, 1998a] Le Bot, A. (1998a). Geometric diffusion of vibrational energy and comparison with the vibrational conductivity approach. *Journal of Sound and Vibration*, 212(4) :637–647.

- [Le Bot, 1998b] Le Bot, A. (1998b). A vibroacoustic model for high frequency analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4) :537–554.
- [Le Bot, 2002a] Le Bot, A. (2002a). Energy transfer for high frequencies in built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*.
- [Le Bot, 2002b] Le Bot, A. (2002b). A functional equation for the specular reflection of rays. *J.Acoust.Soc.Am*, 112(4) :1276–1287.
- [Le Bot, 2005] Le Bot, A. (2005). Comparison of vibrational conductivity and radiative energy transfer methods. *Journal of Sound and Vibration*, 283 :135–151.
- [Le Bot et Bocquillet, 2000] Le Bot, A. et Bocquillet, A. (2000). Comparison of an integral equation on energy and the ray-tracing technique in room acoustics. *J.Acoust.Soc.Am*, 108(4) :1732–1740.
- [Lyon, 1975] Lyon, R. (1975). *Statistical Energy Analysis of dynamic systems*. THE M.I.T. Press.
- [Lyon et Maidanik, 1962] Lyon, R. et Maidanik, G. (1962). Power flow between linearly coupled oscillators. *J.Acoust.Soc.Am*, 34(5) :623–639.
- [Miles, 1984] Miles, R. (1984). Sound field in a rectangular enclosure with diffusely reflecting boundaries. *Journal of Sound and Vibration*, 92(2) :203–226.
- [Morse et Ungard, 1968] Morse, P. et Ungard, K. (1968). *Theoretical Acoustics*. McGraw Hill.
- [Nefske et Sung, 1987] Nefske, D. et Sung, S. (1987). Power flow finite element analysis of dynamic systems : basic theory and application to beams. *ASME publication NCA*, 3 :47–54.
- [Nefske et Sung, 1989] Nefske, D. et Sung, S. (1989). Power flow finite element analysis of dynamic systems : basic theory and application to beams. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in design*, 111 :94–100.
- [Picaut, 1998] Picaut, J. (1998). *Modélisation des champs diffus par une équation de diffusion*. Thèse de doctorat, Université du Maine. 125 pages.
- [Schroeder, 1954] Schroeder, M. (1954). The statistical parameters of frequency curves of large rooms. *Acustica*, 4 :594–600.
- [Sharton et Lyon, 1968] Sharton, T. et Lyon, R. (1968). Power flow and energy sharing in random vibrations. *J.Acoust.Soc.Am*, 43(6) :1332–1343.
- [Smith, 1962] Smith, P. (1962). Response and radiation of structural modes excited by sound. *J.Acoust.Soc.Am*, 34(5) :640–647.
- [Thivant, 2003] Thivant, M. (2003). *Modélisation de la propagation acoustique par la méthode du potentiel d'intensité*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. 128 pages.
- [Thivant et Guyader, 2000a] Thivant, M. et Guyader, J.-L. (2000a). The intensity potential approach to predict sound propagation through partial enclosures. Dans *Proceeding of Inter-Noise - CD ROM*, Nice (France).

- [Thivant et Guyader, 2000b] Thivant, M. et Guyader, J.-L. (2000b). Prediction of sound propagation using the intensity potential approach : comparison with experiments. Dans *Proceedings of NOVEM 2000 - CD ROM (8 pages)*, Lyon (France).
- [Ungar, 1967] Ungar, E. (1967). Statistical energy analysis of vibrating systems. *Trans. A.S.M.E., J. Eng. Ind.*, pages 626–632.
- [Wohlever et Bernhard, 1992] Wohlever, J. et Bernhard, R. (1992). Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, 153 :1–19.
- [Zhao et Vlahopoulos, 2000] Zhao, X. et Vlahopoulos, N. (2000). A hybrid finite element formulation for mid-frequency analysis of systems with excitation applied on short members. *Journal of Sound and Vibration*, 237(2) :181–202.
- [Zhao et Vlahopoulos, 2004] Zhao, X. et Vlahopoulos, N. (2004). A basic hybrid finite element formulation for mid-frequency analysis of beams connected at an arbitrary angle. *Journal of Sound and Vibration*, 269 :135–164.

Chapitre IV

Diffraction dans la méthode du transfert radiatif

Introduction

La diffraction acoustique est un phénomène qui se produit dès lors qu'une onde est amenée à contourner un obstacle. La représentation du champ diffracté ne peut être obtenue de façon exacte que dans des cas très simples où, par exemple, la géométrie de l'obstacle est elle-même simple. En revanche, lorsque la géométrie du problème devient plus complexe, des méthodes spécifiques doivent être mises en œuvre. Les méthodes de type éléments finis de frontière permettent d'évaluer précisément le champ acoustique autour d'un obstacle, et ceci quelle que soit la fréquence considérée. La Théorie Géométrique de la Diffraction quant à elle fournit une approximation analytique du champ de pression valable dans les hautes fréquences.

La méthode du transfert radiatif se présente comme une méthode d'acoustique géométrique et ne permet donc pas de prédire le champ diffracté par un objet. Néanmoins, même si ce phénomène tend à diminuer lorsque la fréquence augmente, il reste le seul à prendre en compte dans la zone d'ombre d'un obstacle. Dans le cas du bruit rayonné à l'extérieur d'un véhicule, la diffraction se localise essentiellement au niveau des écrans acoustiques entourant le groupe motopropulseur et l'introduction de ce phénomène n'est pas anodine. La prise en compte de la diffraction dans la méthode du transfert radiatif a fait l'objet d'un premier travail de Cotoni [Cotoni, 2001] qui suggère d'utiliser le formalisme de la Théorie Géométrique de la Diffraction (TGD) : en effet, la décomposition en champ de rayons est propice à l'adaptation de la méthode énergétique. C'est dans la continuité de ce travail que se situe notre étude.

Nous reviendrons donc dans un premier temps sur le formalisme de la TGD en détaillant les principes sur lesquels cette théorie repose ainsi que ses limites d'application. Nous verrons ensuite comment ce formalisme peut être utilisé pour introduire la diffraction dans la méthode du transfert radiatif. La méthode proposée sera mise en œuvre dans un cas de diffraction

simple, la diffraction par un dièdre, et les résultats obtenus seront comparés aux résultats issus de la TGD. Enfin, la méthode sera mise en œuvre dans un cas plus complexe de diffraction multiple au travers de l'étude de la diffraction par une barrière rectangulaire, et cet exemple sera l'occasion de comparer les résultats obtenus à ceux issus de la méthode des éléments finis de frontière (BEM).

Sommaire

1	Théorie Géométrique de la Diffraction	81
1.1	Les principes de la TGD	81
1.1.1	Les lois de l'acoustique géométrique	81
1.1.2	Le principe de localité	82
1.1.3	Le principe de Fermat généralisé	83
1.2	Mise en œuvre	88
1.3	Limites d'application	88
2	Introduction de la diffraction	89
2.1	Introduction de sources fictives	89
2.2	Calcul du coefficient de diffraction énergétique	91
3	Diffraction simple	93
3.1	Résolution par la méthode du transfert radiatif	93
3.2	Résultats	94
3.2.1	Etude bidimensionnelle	94
3.2.2	Etude tridimensionnelle	96
4	Diffraction multiple	97
4.1	Résolution par la méthode du transfert radiatif : équivalence avec la TGD	98
4.2	Diffraction par une barrière rectangulaire	102
4.2.1	Résultats	104
5	Discussions	106
6	Conclusion	108
	Bibliographie	110

1 La Théorie Géométrique de la Diffraction

La Théorie Géométrique de la Diffraction (TGD) a été introduite dans les années 1950 par Keller [Keller, 1962] afin de dépasser les limites inhérentes à l'acoustique géométrique, et notamment prédire le champ acoustique dans les zones d'ombre.

1.1 Les principes de la TGD

1.1.1 Les lois de l'acoustique géométrique

La TGD se présente comme une méthode de type rayon et vérifie donc à ce titre les lois de l'acoustique géométrique. Ces lois traduisent la variation linéaire de la phase le long d'un rayon et la conservation du flux d'énergie dans un tube de rayons. La loi de propagation de la phase permet d'évaluer la variation de phase entre deux points d'un rayon comme étant le chemin optique entre ces deux points. Cette loi, mise en application pour l'acoustique géométrique, reste valable pour les rayons introduits par la TGD. L'amplitude d'un rayon est ensuite déterminée en appliquant le principe de conservation de l'énergie. Considérons un front d'onde S_0 défini par deux rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 respectivement dans les plans (x,y) et (x,z) (Fig. IV.1). Sur le front d'onde situé à la distance r (resp. $r + dr$) de S_0 , les rayons de courbure s'écrivent à présent $\rho_1 + r$ et $\rho_2 + r$ (resp. $\rho_1 + r + dr$ et $\rho_2 + r + dr$). Un tube infinitésimal de rayons découpe sur la surface des fronts d'onde situés à r et $r + dr$ un rectangle curviligne infinitésimal et le flux de puissance entre les deux rectangles décrits se conserve.

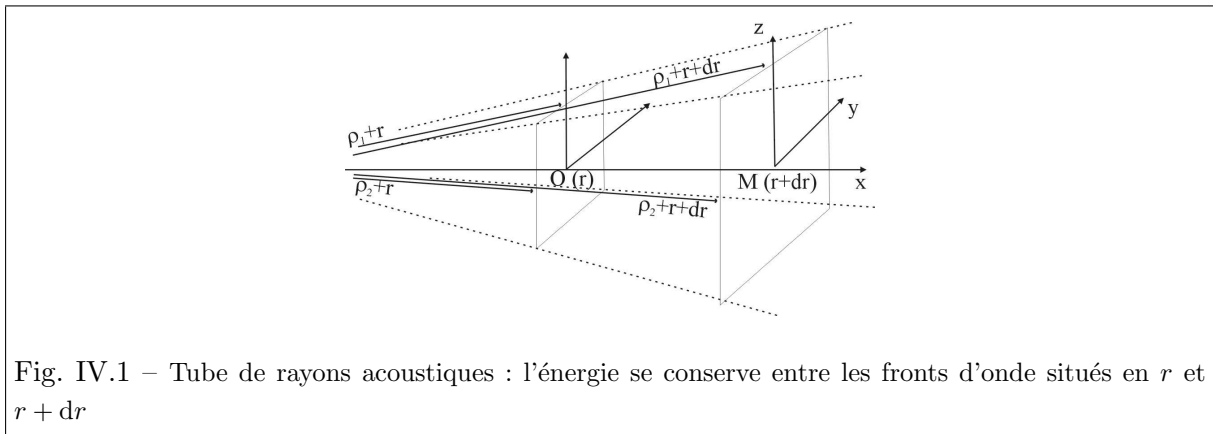


Fig. IV.1 – Tube de rayons acoustiques : l'énergie se conserve entre les fronts d'onde situés en r et $r + dr$

La puissance entrante traversant le premier front d'onde à la distance r s'écrit sous la forme :

$$P_{\text{in}} = I(r)dS(r),$$

où I est l'intensité à la distance r et $dS(r) = (\rho_1 + r)(\rho_2 + r) \sin \theta d\theta d\phi$ est la surface du rectangle infinitésimal découpé par le tube de rayons sur le front d'onde. De la même façon, la puissance sortante traversant le second front d'onde à la distance $r + dr$ s'écrit sous la forme :

$$P_{\text{out}} = I(r + dr)dS(r + dr),$$

avec : $dS(r + dr) = (\rho_1 + r + dr)(\rho_2 + r + dr) \sin \theta d\theta d\phi$. La perte d'énergie liée à l'absorption atmosphérique entre r et $r + dr$ est prise en compte en introduisant un terme dissipatif proportionnel à la puissance entrante via un coefficient d'absorption m caractérisant la perte d'énergie par unité de longueur. La puissance sortante s'écrit alors à présent sous la forme :

$$P_{\text{out}} = I(r + dr)(\rho_1 + r + dr)(\rho_2 + r + dr) \sin \theta d\theta d\phi + mI(r)(\rho_1 + r)(\rho_2 + r)dr \sin \theta d\theta d\phi.$$

La conservation du flux d'intensité dans le tube de rayons s'écrit $P_{\text{in}} = P_{\text{out}}$ ce qui, en ne retenant que les termes du premier ordre, conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dI}{dr} + \left(\frac{1}{\rho_1 + r} + \frac{1}{\rho_2 + r} \right) I(r) + mI(r) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Cette équation admet une solution en champ d'intensité de la forme :

$$I(r) = I(0) \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + r)(\rho_2 + r)} e^{-mr}, \quad (\text{IV.2})$$

et le champ de pression associé à ce champ d'intensité s'écrit :

$$p(r) = p(0) \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + r)(\rho_2 + r)}} e^{-jkr}, \quad (\text{IV.3})$$

où $k = k_0 - jm/2$ est le nombre d'onde complexe, $k_0 = \omega/c$. Dans le cas des ondes planes, les deux rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 sont infinis, dans le cas des ondes cylindriques, l'un des rayons est infini et l'autre est égal à la distance à la source, et enfin dans le cas des ondes sphériques les deux rayons sont égaux à la distance à la source. Ainsi, d'après le principe de conservation de l'énergie, le champ acoustique en tout point d'un rayon peut être déterminé dès lors que le champ est connu en un point du rayon. La difficulté réside dans la détermination des rayons de courbure des fronts d'onde, notamment lorsque le rayon rencontre un obstacle. On peut remarquer que l'application de la conservation de l'énergie dans un tube de rayons permet d'établir l'allure d'un champ d'intensité satisfaisant à une approche de type rayon (Eq. (IV.2)).

1.1.2 Le principe de localité

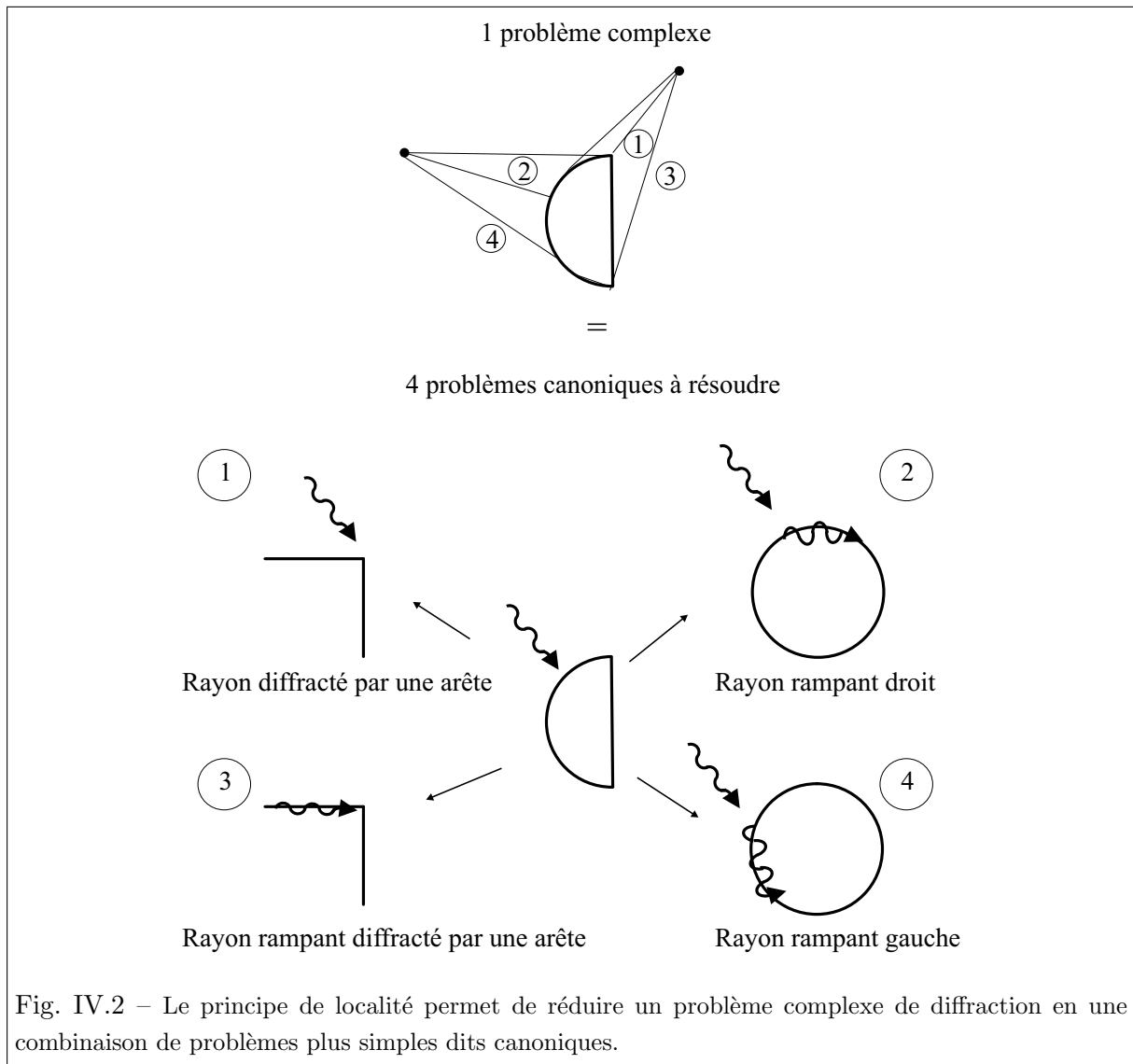
Le principe de localité stipule qu'à hautes fréquences le champ diffracté par un obstacle ne dépend que du champ au voisinage des points d'intersection entre le champ incident et l'obstacle. Ces points sont les points de diffraction. Seules les propriétés locales du champ incident au niveau des points de diffraction sont à prendre en compte, ce qui permet de réduire un problème complexe en une combinaison de problèmes plus simples dits canoniques (Fig. IV.2). Chaque problème canonique met en jeu un obstacle simple qui est localement équivalent à l'obstacle réel et pour lequel le problème de diffraction admet une solution connue. Le principe de localité permet de relier le champ diffracté $p(0)$ au point de diffraction 0 au champ incident $p_{\text{inc}}(0)$ par un coefficient de diffraction d :

$$p(0) = p_{\text{inc}}(0)d, \quad (\text{IV.4})$$

de sorte que finalement le champ à la distance r est donné par :

$$p(r) = p_{\text{inc}}(0)d\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+r)(\rho_2+r)}}e^{-jkr}, \quad (\text{IV.5})$$

Le coefficient de diffraction dépend de plusieurs paramètres dont notamment la direction d'incidence, la direction de diffraction et la fréquence. C'est un coefficient connu pour un ensemble de problèmes canoniques.



1.1.3 Le principe de Fermat généralisé

La TGD s'appuie sur un développement du principe de Fermat qu'il est donc intéressant de rappeler ici. Ce principe permet de généraliser à tout milieu le fait qu'un rayon lumineux et donc, par analogie, un rayon acoustique se propage en ligne droite dans un milieu homogène. Il

permet également de retrouver les relations de la réfraction ainsi que les lois de Snell-Descartes pour la réflexion. Ainsi, le principe de Fermat permet de justifier l'existence des rayons utilisés en acoustique géométrique, à savoir l'existence d'un rayon direct entre un point source et un point récepteur, l'existence d'un rayon réfléchi ou l'existence d'un rayon réfracté à l'interface entre deux milieux d'indices différents. Le développement proposé par Keller sous le nom de principe de Fermat généralisé permet de justifier l'existence de nouveaux rayons acoustiques que le principe de Fermat ne permet pas d'expliquer. Le principe de Fermat généralisé peut être formalisé de la façon suivante. Considérons un chemin T reliant deux points M_0 et M_{N+1} et constitué de $N+1$ segments $[M_i M_{i+1}]$ (Fig. IV.3). Les points M_i sont des points de discontinuité du chemin T où la courbure du chemin change. On note \mathbf{t}_i^+ la tangente au tronçon $[M_i M_{i+1}]$ au point M_i , et \mathbf{t}_i^- la tangente au tronçon $[M_{i-1} M_i]$ au point M_i .

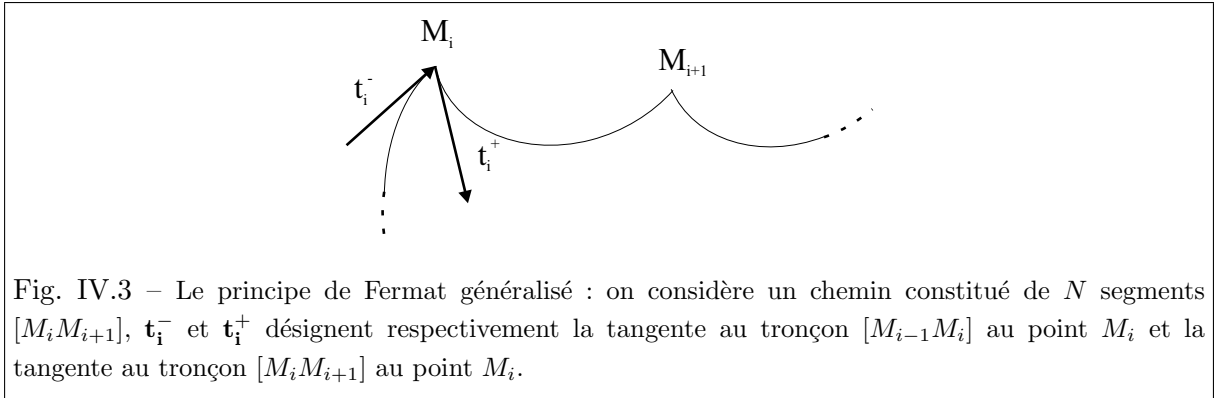


Fig. IV.3 – Le principe de Fermat généralisé : on considère un chemin constitué de N segments $[M_i M_{i+1}]$, \mathbf{t}_i^- et \mathbf{t}_i^+ désignent respectivement la tangente au tronçon $[M_{i-1} M_i]$ au point M_i et la tangente au tronçon $[M_i M_{i+1}]$ au point M_i .

Le chemin acoustique L est défini comme l'intégrale :

$$L(T) = \int_T n(s) ds, \quad (\text{IV.6})$$

où s désigne l'abscisse curviligne le long du chemin acoustique, ds est un intervalle infinitésimal de longueur, et n est l'indice du milieu. Pour la suite de l'étude, on s'intéressera à un milieu homogène pour lequel l'indice n est constant, égal à 1. Le principe de Fermat généralisé s'énonce : " T est un rayon si et seulement si T est de longueur stationnaire parmi les chemins C^1 par morceaux respectant les connexions sur la surface". Le respect des connexions signifie que les points M_i et de la même façon les segments $[M_i M_{i+1}]$ sont contraints de rester fixes où ils sont, à savoir sur la surface d'un objet, sur une arête ou sur une pointe. Cet énoncé se traduit de manière équivalente sous forme variationnelle par $\delta(L(T)) = 0$ où δ désigne la variation infinitésimale du chemin acoustique L lorsque chacun de ses points subit une variation infinitésimale $\delta\mathbf{M}$ respectant les connexions. En écrivant le chemin acoustique L sous la forme :

$$L(T) = \int_T ds = \sum_{i=0}^N \int_{M_i}^{M_{i+1}} ds = \sum_{i=0}^N \int_{M_i}^{M_{i+1}} \mathbf{t} \cdot d\mathbf{M}, \quad (\text{IV.7})$$

la variation $\delta(L(T))$ s'écrit donc :

$$\delta L(T) = \sum_{i=0}^N \int_{M_i}^{M_{i+1}} \mathbf{t} \cdot d(\delta\mathbf{M}). \quad (\text{IV.8})$$

En intégrant par parties l'équation (IV.8), le principe de Fermat généralisé conduit donc à la relation suivante :

$$\begin{aligned} \delta L(T) &= \sum_{i=0}^N [\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{M}]_{M_i}^{M_{i+1}} - \int_{M_i}^{M_{i+1}} d\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{M} = 0 \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{t}_i^- - \mathbf{t}_i^+) \cdot \delta \mathbf{M}_i - \int_{M_i}^{M_{i+1}} d\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{M} = 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

avec $\mathbf{t}_0^+ \cdot \delta \mathbf{M}_0 = 0$ et $\mathbf{t}_{N+1}^- \cdot \delta \mathbf{M}_{N+1} = 0$ puisque les points de départ et d'arrivée sont préalablement fixés ($\delta \mathbf{M}_0 = 0$ et $\delta \mathbf{M}_{N+1} = 0$). L'équation (IV.9) est valable quel que soit la variation $\delta \mathbf{M}$ compatible avec les connexions, on aboutit donc aux deux types de conditions suivantes :

$$\int_{M_i}^{M_{i+1}} d\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{M} = 0 \quad (\text{IV.10})$$

$$(\mathbf{t}_i^- - \mathbf{t}_i^+) \cdot \delta \mathbf{M}_i = 0. \quad (\text{IV.11})$$

Les conditions (IV.10) et (IV.11) permettent de déterminer tous les rayons, qu'ils soient justifiés par l'acoustique géométrique ou qu'ils soient diffractés. Le paragraphe suivant propose de détailler l'ensemble des rayons gouvernés par ces conditions.

Les rayons de l'acoustique géométrique

Le rayon en espace libre :

La condition (IV.10) est valable quelle que soit la variation $\delta \mathbf{M}$ respectant les connexions. Par conséquent $d\mathbf{t} = \mathbf{0}$ et on retrouve que les rayons se propagent en ligne droite en l'absence d'interaction.

Le rayon réfléchi :

Dans le cas de la réflexion sur une surface régulière, les rayons incident et réfléchi sont des droites. \mathbf{t}_i^- est le vecteur unitaire sur le rayon incident, et \mathbf{t}_i^+ est le vecteur unitaire sur le rayon réfléchi. Le point de réflexion M est contraint de rester sur la surface de réflexion donc $\delta \mathbf{M}$ est un vecteur quelconque du plan tangent au point de réflexion. La condition (IV.11) impose donc à $\mathbf{t}_i^- - \mathbf{t}_i^+$ d'être orthogonal à la surface de réflexion, en d'autres termes, $\mathbf{t}_i^- - \mathbf{t}_i^+ = c \mathbf{n}$ où c est un scalaire, et \mathbf{n} est le vecteur normal extérieur à la surface de réflexion au point M . Ainsi, en notant θ l'angle d'incidence, $\mathbf{t}_i^+ = \mathbf{t}_i^- + 2 \cos \theta \mathbf{n}$. On retrouve ainsi la loi de la réflexion de Snell-Descartes :

- le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence défini par le vecteur normal extérieur à la surface de réflexion et le rayon incident,
- l'angle incident est égal à l'angle de réflexion.

Les rayons diffractés

Le rayon diffracté par une arête :

Dans le cas de la diffraction par une arête, les rayons incident et diffracté sont des droites. \mathbf{t}_i^-

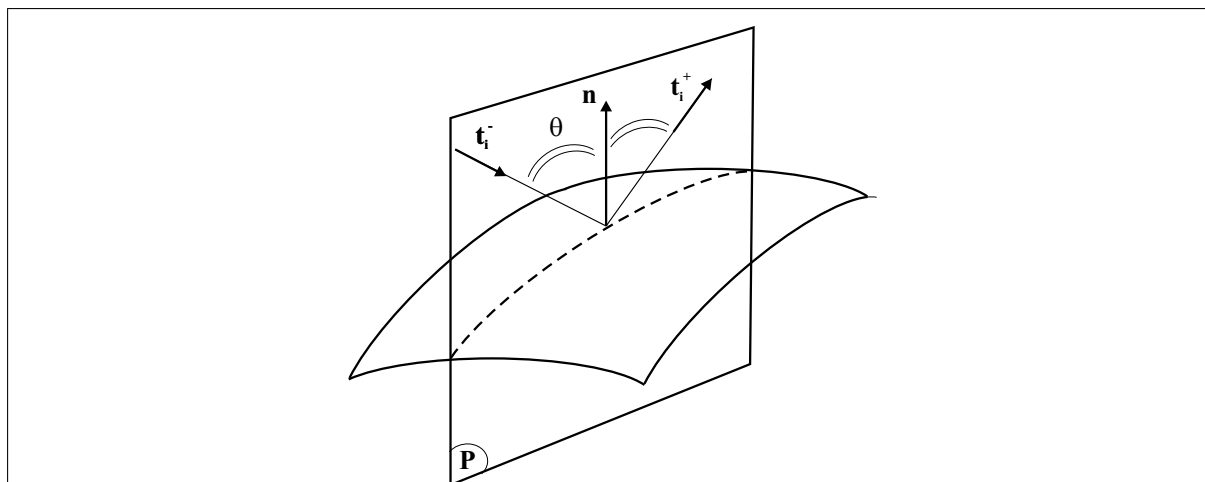


Fig. IV.4 – Loi de réflexion de Snell-Descartes : le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence défini par le vecteur normal extérieur à la surface de réflexion et le rayon incident, et l'angle incident est égal à l'angle de réflexion.

est le vecteur unitaire sur le rayon incident, et \mathbf{t}_i^+ est le vecteur unitaire sur le rayon diffracté. Le respect des connexions impose à $\delta\mathbf{M}$ d'être suivant la tangente \mathbf{s} à l'arête diffractante. La condition (IV.11) s'écrit donc $(\mathbf{t}_i^- - \mathbf{t}_i^+) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{0}$. En notant β l'angle d'incidence par rapport à l'arête, et α l'angle de diffraction par rapport à l'arête, cette condition s'écrit également $\beta = \alpha$. Ainsi, les rayons diffractés se situent sur un cône dont l'axe principal est la tangente à l'arête de diffraction et dont le demi angle au sommet est β . Ce cône est appelé cône de Keller.

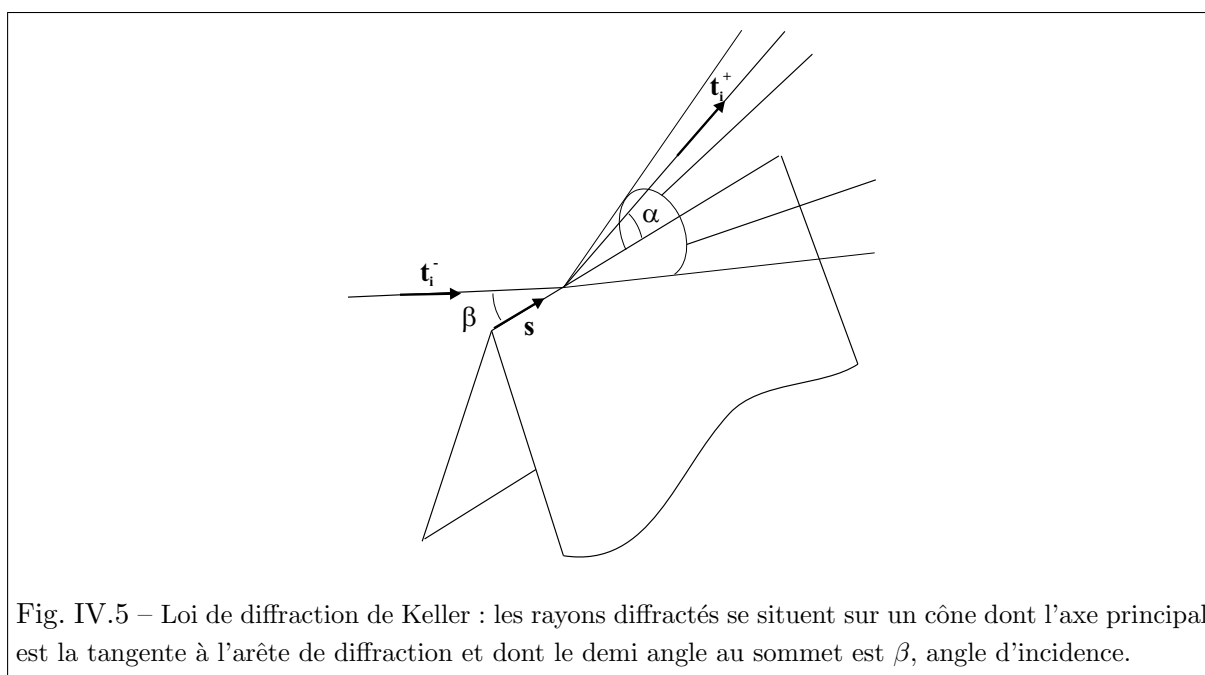


Fig. IV.5 – Loi de diffraction de Keller : les rayons diffractés se situent sur un cône dont l'axe principal est la tangente à l'arête de diffraction et dont le demi angle au sommet est β , angle d'incidence.

Le rayon diffracté par une pointe :

Dans le cas de la diffraction par une pointe, $\delta\mathbf{M} = \mathbf{0}$ donc la condition (IV.11) est valable quelle que soit la direction du rayon diffracté. Ainsi la pointe diffracte dans toutes les directions.

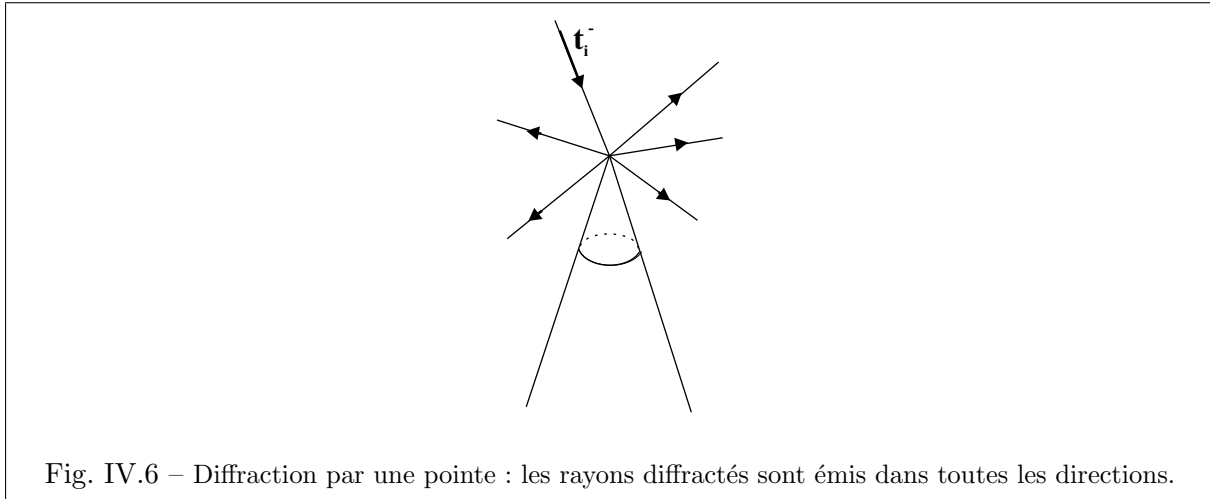


Fig. IV.6 – Diffraction par une pointe : les rayons diffractés sont émis dans toutes les directions.

Le rayon rampant :**Propagation d'un rayon rampant :**

Dans le cas d'un rayon rampant, $\delta\mathbf{M}$ est contraint de rester dans le plan tangent à la surface. Ainsi, $\delta\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ où \mathbf{n} est le vecteur normal extérieur à la surface et par conséquent $d\mathbf{t} = c\mathbf{n}$, c étant un scalaire. La normale extérieure à la surface coïncide donc avec la normale au rayon de surface. Les rayons rampants suivent les géodésiques de la surface qui sont en quelque sorte les droites de cette surface (par exemple des hélices sur un cylindre ou des cercles sur une sphère).

Attachement d'un rayon rampant :

Un rayon rampant est initié par un rayon interceptant une surface régulière dont un exemple est la diffraction par un cylindre. \mathbf{t}_i^- est le vecteur unitaire sur le rayon incident, et \mathbf{t}_i^+ est le vecteur unitaire sur le rayon rampant. La condition (IV.11) impose comme dans le cas de la réflexion que $\mathbf{t}_i^- - \mathbf{t}_i^+ = c\mathbf{n}$, or le rayon étant rampant $\mathbf{t}_i^+ \cdot \mathbf{n} = 0$ et finalement, $\mathbf{t}_i^- \cdot \mathbf{n} = 0$. Ainsi, un rayon rampant est généré sous incidence rasante aux frontières ombre-lumière et la tangente à ce rayon est suivant le rayon incident.

Détachement d'un rayon rampant :

Notons également qu'un rayon rampant génère en permanence des rayons d'espace émis suivant la tangente au rayon. Un rayon rampant perd de l'énergie et s'atténue très rapidement.

Par ailleurs :

- un rayon incident sur une arête constituée de surfaces courbes génère des rayons rampants dans la direction du cône de Keller
- réciproquement, un rayon rampant diffracté par une arête génère des rayons d'espace dans la direction du cône de Keller défini par la tangente à l'arête diffractante et la tangente au rayon rampant incident
- un rayon incident sur une pointe génère des rayons rampants suivant chaque génératrice

du cône tangent à la pointe

- réciproquement, un rayon rampant diffracté par une pointe génère des rayons d'espace dans toutes les directions.

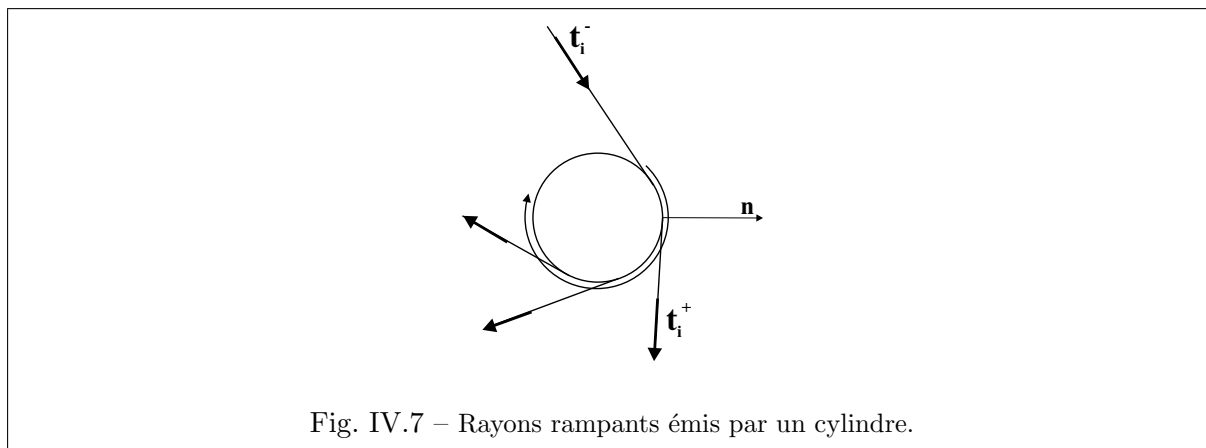


Fig. IV.7 – Rayons rampants émis par un cylindre.

Ainsi, la diffraction fait intervenir différents types de rayons : les rayons réfléchis, les rayons diffractés, les rayons rampants, ainsi que toute combinaison de ces trois types de rayons. Le problème des rayons rampants nécessite une étude spécifique modélisant les phénomènes d'attachement et de détachement de ces rayons. Dans cette étude, nous nous limiterons donc aux rayons diffractés 'classiques' à savoir la diffraction par une arête ou par une pointe.

1.2 Mise en œuvre

La résolution d'un problème de diffraction à l'aide de la TGD passe par plusieurs étapes :

- il s'agit dans un premier temps de faire l'inventaire des rayons existants suivant le principe de Fermat généralisé (paragraphe 1.1.3) : le problème est décomposé en un ensemble de problèmes canoniques conduisant à des résultats connus notamment en termes de coefficient de diffraction,
- dans un deuxième temps, le champ le long de chaque rayon est donné par la relation (IV.5) respectant le principe de localisation (paragraphe 1.1.2) et le principe de conservation de l'énergie (paragraphe 1.1.1),
- enfin, dans un troisième temps, le champ total diffracté par l'obstacle est calculé en sommant toutes les contributions introduites. Plus le nombre de phénomènes pris en compte est important, plus le résultat est précis, mais il est parfois judicieux de simplifier le problème en se limitant aux rayons les plus significatifs.

1.3 Limites d'application

La TGD prédit des résultats infinis au niveau des frontières ombre-lumière de l'acoustique géométrique et des caustiques. Les frontières ombre-lumière sont les zones de transition séparant les régions où passe un rayon des régions où aucun rayon ne passe. La raison pour laquelle la

TGD ne peut s'appliquer sur ces frontières est que le champ au voisinage n'est pas un champ de rayons. Des théories dites uniformes ont été développées pour palier à cette déficience : citons par exemple l'UTD (Uniform Theory of Diffraction) [Kouyoumjian et Pathak, 1974] ou l'UAT (Uniform Asymptotic Theory) [Ludwig, 1966], mais ces méthodes ne permettent pas d'interpréter le résultat en termes de rayons. Un problème similaire se présente au niveau des caustiques. Les caustiques sont les enveloppes des rayons, c'est-à-dire un ensemble de courbes telles que chaque courbe est tangente en au moins un point à l'enveloppe, et qu'en chaque point de l'enveloppe il existe au moins une courbe tangente. Le terme caustique provient du grec *kaustikos* provenant de *katein* = brûler au sens où l'énergie acoustique est concentrée dans ces zones. Au voisinage des caustiques, le champ acoustique ne peut à nouveau pas être décrit en termes de rayons et la TGD conduit à des résultats infinis. Des méthodes basées sur des développements asymptotiques permettent de s'affranchir de ce problème.

2 Introduction de la diffraction acoustique dans la méthode du transfert radiatif

L'objectif de cette étude est d'introduire la diffraction acoustique dans la méthode du transfert radiatif. La prise en compte de ce phénomène permet d'affiner le calcul du champ acoustique autour d'un obstacle. La méthode du transfert radiatif (Chapitre III) se présente comme une méthode de rayons tout comme la TGD. Le formalisme mis en œuvre dans la TGD va donc se prêter particulièrement bien à l'introduction de la diffraction acoustique dans la méthode du transfert radiatif, et va nous permettre de définir des sources de diffraction adéquates.

2.1 Introduction de sources fictives

Considérons le champ acoustique dans un domaine Ω induit par des sources de puissance ρ , et tâchons d'évaluer la densité d'énergie acoustique et l'intensité acoustique en un point \mathbf{r} du domaine. Le champ direct s'écrit comme la superposition des champs émis par toutes les sources, à savoir $\int \rho G d\Omega$ où $d\Omega$ désigne la mesure au sens de Lebesgue sur Ω . Par ailleurs, ce champ direct est susceptible d'être réfléchi par la surface Γ du domaine, ou diffracté par les arêtes, sommets ou autres singularités de la frontière. L'ensemble des lignes diffractantes est noté Δ_1 et l'ensemble des sommets diffractants est noté Δ_0 . Des sources fictives sont introduites en chaque point sur Γ , Δ_1 et Δ_0 . L'amplitude de chaque source est notée σ et dépend de la position de la source, mais aussi de la direction d'émission et du temps dans le cas non stationnaire. Le champ acoustique réfléchi s'écrit alors $\int \sigma G d\Gamma$ où $d\Gamma$ désigne la mesure de surface sur Γ , le champ diffracté par les lignes diffractantes s'écrit $\int \sigma G d\Delta$ où $d\Delta$ désigne la mesure de longueur sur Δ_1 et enfin le champ diffracté par les sommets diffractants s'écrit $\sum \sigma G$ où la somme prend en compte l'ensemble des éléments de Δ_0 . Par conséquent, selon l'hypothèse de décorrélation des sources, la densité d'énergie acoustique au point \mathbf{r} et à l'instant t s'exprime comme la somme de

toutes ces contributions :

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}, t) = & \int_{\Omega} \rho(\mathbf{s}, t - s/c) G(\mathbf{s}, \mathbf{r}) d\Omega_s + \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t - r/c) G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\Gamma_p \\ & + \int_{\Delta_1} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t - r/c) G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\Delta_p + \sum_{\mathbf{p} \in \Delta_0} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t - r/c) G(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

et l'intensité acoustique associée s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\mathbf{r}, t) = & \int_{\Omega} \rho(\mathbf{s}, t - s/c) \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) d\Omega_s + \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t - r/c) \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\Gamma_p \\ & + \int_{\Delta_1} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t - r/c) \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\Delta_p + \sum_{\mathbf{p} \in \Delta_0} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t - r/c) \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

où $s = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$ et $r = |\mathbf{r} - \mathbf{p}|$. \mathbf{u} est le vecteur unitaire du point source \mathbf{s} ou \mathbf{p} vers le point récepteur \mathbf{r} et r/c (ou s/c) est le retard de propagation de l'énergie entre le point source et le point récepteur.

Le calcul des sources σ définies sur Γ et liées au champ acoustique réfléchi a fait l'objet d'une étude au paragraphe III.2 qui a conduit à l'équation (III.52). Il s'agit de déterminer à présent une équation sur les sources σ définies sur Δ_0 et Δ_1 .

Un coefficient de diffraction énergétique noté $D_{\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ est introduit. Il dépend de la direction d'incidence via le vecteur \mathbf{v} et de la direction d'émission via le vecteur \mathbf{u} .

Considérons tout d'abord le cas de la diffraction par un sommet où chaque source secondaire d'amplitude σ est située sur un élément de Δ_0 , ensemble des sommets diffractants. Le coefficient $D_{\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ est défini comme le rapport entre la puissance émise par unité d'angle solide du dans la direction \mathbf{u} et l'intensité spécifique incidente I_{inc} dans la direction \mathbf{v} [Reboul et al., 2004a] :

$$D_{\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{1}{I_{\text{inc}}} \times \frac{dP_{\text{emit}}}{du}. \quad (\text{IV.14})$$

D s'exprime en m^2 .

Dans le cas de la diffraction par une arête où les sources σ sont situées sur un élément de Δ_1 , ensemble des arêtes diffractantes, $D_{\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ est défini comme le rapport entre la puissance émise d^2P_{emit} par unité d'angle solide dans la direction \mathbf{u} et par unité de longueur $d\nu$ de l'arête, et l'intensité spécifique incidente I_{inc} dans la direction \mathbf{v} [Reboul et al., 2005] :

$$D_{\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{1}{I_{\text{inc}}} \times \frac{d^2P_{\text{emit}}}{d\nu du}. \quad (\text{IV.15})$$

D s'exprime en m .

Lorsque l'énergie incidente provient de toutes les directions, la puissance émise dans la direction \mathbf{u} s'écrit en prenant en compte toutes les contributions incidentes de sorte que le bilan d'énergie se présente de la façon suivante :

$$\frac{dP_{\text{emit}}}{du} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2P_{\text{emit}}}{d\nu du} = \int_{\mathcal{U}} D_{\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) I_{\text{inc}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t) d\nu, \quad (\text{IV.16})$$

où l'intégration est menée sur l'ensemble des directions d'incidence \mathcal{U} . I_{inc} est l'intensité spécifique dans la direction d'incidence \mathbf{v} au point de diffraction \mathbf{p} et à l'instant t prenant en compte le champ direct, le champ réfléchi et le champ diffracté par les points de diffraction autres que le point \mathbf{p} . Par analogie avec l'équation (III.49), I_{inc} s'écrit :

$$I_{\text{inc}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t) d\nu = \int_{(\mathbf{p}, d\nu)} \rho(\mathbf{s}, t - s/c) H(\mathbf{s}, \mathbf{p}) d\Omega_s + \int_{(\mathbf{p}, d\nu)} \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t - r/c) H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Gamma_p \\ + \int_{(\mathbf{p}, d\nu)} \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t - r/c) H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Delta_p + \sum_{(\mathbf{p}, d\nu)} \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t - r/c) H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (\text{IV.17})$$

l'intégration étant menée sur le cône $(\mathbf{p}, d\nu)$ d'incidence de sommet \mathbf{p} et d'angle au sommet $d\nu$.

Le flux de puissance émis dans l'angle solide élémentaire du autour de la direction \mathbf{u} est calculé en intégrant l'intensité créée par la source de frontière $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t)$ ou $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t) d\nu$ sur l'élément de surface $dS_\varepsilon = \varepsilon^{n-1} du$ de la sphère, et en prenant la limite lorsque ε tend vers 0 :

$$dP_{\text{emit}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t) H(\varepsilon) \varepsilon^{n-1} du = \frac{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t) du}{\gamma_0} \quad (\text{IV.18})$$

$$\text{ou } d^2P_{\text{emit}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t) d\nu H(\varepsilon) \varepsilon^{n-1} du = \frac{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t) d\nu du}{\gamma_0} \quad (\text{IV.19})$$

Finalement, en appliquant l'équation (IV.16) et en intégrant sur l'ensemble des directions d'incidence de sorte que le point \mathbf{q} décrit l'intégralité de la frontière Γ , l'intégralité de Δ_0 et l'intégralité de Δ_1 , l'équation sur σ s'écrit :

$$\frac{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}, t)}{\gamma_0} = \int_{\Omega} D_\omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \rho(\mathbf{s}, t - s/c) H(\mathbf{s}, \mathbf{p}) d\Omega_s + \int_{\Gamma} D_\omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t - r/c) H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Gamma_q \\ + \int_{\Delta_1} D_\omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t - r/c) H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Delta_q + \sum_{\mathbf{q} \in \Delta_0} D_\omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t - r/c) H(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (\text{IV.20})$$

Il s'agit d'une relation fonctionnelle prenant en compte les inconnues σ à la fois sur Δ_0 et sur Δ_1 . Elle permet de résoudre le problème complet prenant en compte à la fois les phénomènes de réflexion et de diffraction et de calculer toutes les inconnues de surface. Une fois le potentiel σ déterminé, le champ acoustique en tout point de l'espace \mathbf{r} est déterminé à l'aide des équations (IV.12) et (IV.13). Il nous reste donc à évaluer le coefficient de diffraction énergétique $D_\omega(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ introduit dans ces équations.

2.2 Calcul du coefficient de diffraction énergétique

Afin de déterminer le coefficient de diffraction énergétique, nous nous ramenons au problème canonique qui est celui de la diffraction d'une onde par un dièdre. Considérons donc le cas d'un rayon incident dans la direction $\mathbf{v} = (\varphi, \beta)$ arrivant au point \mathbf{q} de l'arête du dièdre où il est

diffraqué. Le champ diffracté en un point \mathbf{r} situé dans la direction $\mathbf{u} = (\theta, \alpha)$ est donné par la relation (IV.21), obtenue en appliquant la TGD :

$$p_{\text{dif}}(\mathbf{r}) = p_{\text{inc}}(\mathbf{q}) d_{\alpha}(\varphi, \theta) \frac{e^{-jkR}}{\sqrt{R}}, \quad (\text{IV.21})$$

où k est le nombre d'onde, $p_{\text{inc}}(\mathbf{q})$ est le champ de pression incident au point de diffraction \mathbf{q} et $R = |\mathbf{q} - \mathbf{r}|$ est la distance mesurée le long du rayon diffracté. Le coefficient de diffraction d_{α} donné par la TGD dépend de φ et de θ qui sont les directions d'incidence et d'émission définies par rapport au bord droit du dièdre (Fig. IV.8), et également de l'angle extérieur au dièdre via l'indice d'angle $\nu = \pi/\phi$. D'après la loi de diffraction de Keller [Keller, 1962], l'angle de diffraction α est égal à l'angle d'incidence β de sorte que les rayons diffractés issus du point \mathbf{q} sont situés sur un cône dont l'axe principal est l'arête diffractante du dièdre.

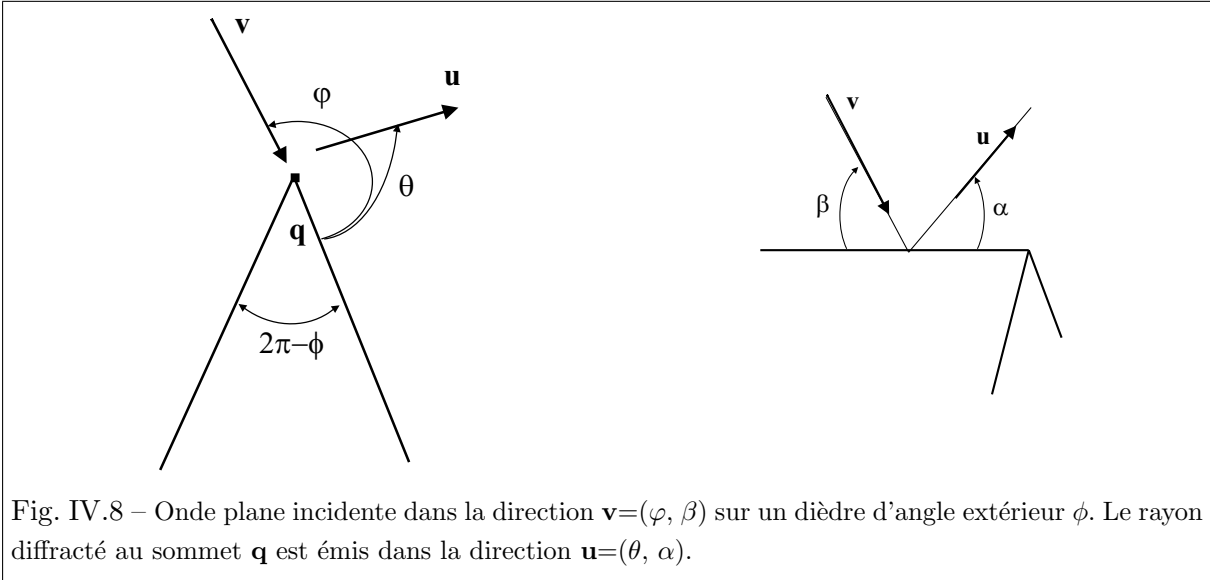


Fig. IV.8 – Onde plane incidente dans la direction $\mathbf{v}=(\varphi, \beta)$ sur un dièdre d'angle extérieur ϕ . Le rayon diffracté au sommet \mathbf{q} est émis dans la direction $\mathbf{u}=(\theta, \alpha)$.

Une expression de d_{α} peut être obtenue à l'aide de la méthode de la plus grande descente [Pierce, 1991] :

$$d_{\alpha}(\varphi, \theta) = \frac{e^{-\frac{j\pi}{4}} \nu \sin(\nu\pi)}{\sqrt{2\pi k} \sin \alpha} \left[\frac{1}{\cos(\nu\pi) - \cos[\nu(\theta + \varphi)]} + \frac{1}{\cos(\nu\pi) - \cos[\nu(\theta - \varphi)]} \right]. \quad (\text{IV.22})$$

Cette expression est valable en champ lointain et loin des caustiques. L'intensité diffractée $I_{\text{dif}}(\mathbf{r}) = |p_{\text{dif}}(\mathbf{r})|^2/2\rho_0 c$ où c est la vitesse du son, ρ_0 est la masse volumique du milieu fluide, s'écrit d'après l'équation (IV.21) :

$$I_{\text{dif}}(\mathbf{r}) = \frac{I_{\text{inc}}(\mathbf{q})}{R} |d_{\alpha}(\varphi, \theta)|^2, \quad (\text{IV.23})$$

où $I_{\text{inc}}(\mathbf{q}) = |p_{\text{inc}}(\mathbf{q})|^2/2\rho_0 c$ est l'intensité incidente. En notant $r = R \sin \alpha$ la distance entre l'arête diffractante et le point récepteur, l'équation (IV.23) s'écrit en fonction du coefficient de diffraction $d(\varphi, \theta)$ sous incidence normale $\alpha = \pi/2$:

$$I_{\text{dif}}(\mathbf{r}) = \frac{I_{\text{inc}}(\mathbf{q})}{r} |d(\varphi, \theta)|^2. \quad (\text{IV.24})$$

La puissance dP_{dif} diffractée dans la direction $\mathbf{u} = (\theta, \alpha)$ par une longueur infinitésimale $d\nu$ de l'arête est $dP_{\text{dif}} = I_{\text{dif}} dl r d\theta \delta(\alpha - \beta) d\alpha$ où $dl = d\nu \sin \alpha$ est la longueur infinitésimale normale au rayon. $dl r d\theta$ correspond à la surface infinitésimale perpendiculaire à la direction de diffraction, et le terme $\delta(\alpha - \beta) d\alpha$ est lié à la loi de Keller qui précise que la directivité est définie par l'angle d'incidence β . Ainsi, en appliquant l'équation (IV.15) avec l'angle solide infinitésimal $du = \sin \alpha d\alpha d\theta$, il apparaît que le coefficient de diffraction énergétique sous incidence oblique est relié au coefficient sous incidence normale par une relation de la forme :

$$D_\omega(\varphi, \beta; \theta, \alpha) = D_\omega(\varphi; \theta) \delta(\alpha - \beta) \quad (\text{IV.25})$$

où $D_\omega(\varphi, \theta) = |d(\varphi, \theta)|^2$ est le coefficient de diffraction énergétique sous incidence normale, c'est-à-dire lorsque $\alpha = \beta = \pi/2$. Ce coefficient a été repris dans [Law et al., 2004] pour l'étude de l'efficacité acoustique d'une barrière rigide. D'après le principe de réciprocité, ce coefficient reste inchangé lorsque les directions d'incidence et d'émission sont échangées :

$$D_\omega(\varphi, \theta) = D_\omega(\theta, \varphi). \quad (\text{IV.26})$$

Par ailleurs, la symétrie par rapport au plan médian du dièdre implique que ce coefficient est invariant par la transformation $\zeta \rightarrow \phi - \zeta$:

$$D_\omega(\varphi, \theta) = D_\omega(\phi - \varphi, \phi - \theta), \quad (\text{IV.27})$$

3 Diffraction simple : diffraction par un dièdre

3.1 Résolution par la méthode du transfert radiatif

Ce paragraphe s'intéresse à la résolution du problème de la diffraction d'une onde plane stationnaire par un dièdre à l'aide de la méthode du transfert radiatif. Il s'agit de montrer ici que la solution obtenue avec cette méthode est en accord avec les résultats obtenus avec la TGD. Considérons donc une onde plane d'intensité I éclairant un dièdre sous l'incidence $\mathbf{v} = (\varphi, \beta)$ (Fig. IV.8). L'arête du dièdre est selon l'axe ν . L'angle extérieur au dièdre est noté ϕ . Dans cet exemple, aucune onde n'est réfléchiée en direction de l'arête diffractante. Par conséquent, l'intensité incidente sur l'arête diffractante n'est due qu'au champ direct dans la direction d'incidence. L'amplitude σ de la source de diffraction située sur l'arête du dièdre et diffractant dans la direction $\mathbf{u} = (\theta, \alpha)$ est calculée à l'aide de l'équation (IV.20) où le membre de droite ne comprend que la première intégrale :

$$\frac{\sigma(\nu, \theta, \alpha)}{\gamma_0} = D_\omega(\varphi, \beta; \theta, \alpha) I. \quad (\text{IV.28})$$

En introduisant à présent les équations (IV.25) et (IV.28) dans la troisième intégrale de l'équation (IV.12), la densité d'énergie diffractée au point $\mathbf{r} = (r, \theta, z)$ défini par ses coordonnées cylindriques centrées sur l'axe ν s'écrit :

$$W_{\text{dif}} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\nu, \theta, \alpha_\nu) G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\nu = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} D_\omega(\varphi, \theta) \delta(\alpha_\nu - \beta) \frac{d\nu}{R_\nu^2}, \quad (\text{IV.29})$$

où θ , α_ν sont les angles d'émission du point \mathbf{p} de coordonnée ν sur l'arête vers le point \mathbf{r} , et R_ν est la distance entre \mathbf{p} et \mathbf{r} . Pour évaluer cette intégrale, le résultat suivant issu de la théorie des distributions est utilisé :

$$\int g(x)\delta[f(x)]dx = \sum_i \frac{g(x_i)}{|f'(x_i)|} \quad (\text{IV.30})$$

où la somme porte sur tous les zéros de la fonction f compris dans le domaine d'intégration. Il apparaît que la fonction $f(\nu) = \alpha_\nu - \beta = \arctan[r/(z - \nu)] - \beta$ n'admet qu'un seul zéro $\nu_0 = z - r/\tan\beta$ qui correspond à l'unique point pour lequel l'angle d'émission α_0 vers le point \mathbf{r} , supposé fixe, est égal à l'angle d'incidence β (Fig. IV.9).

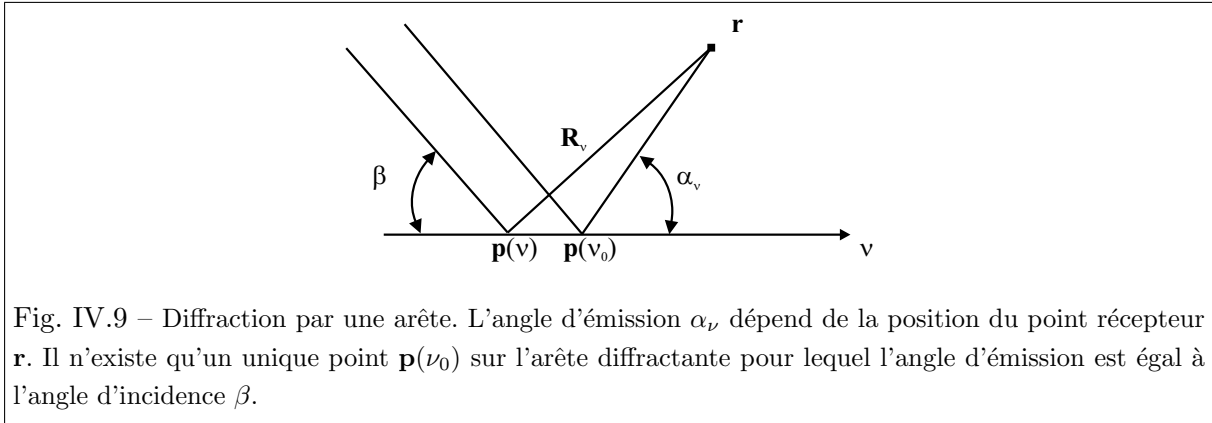


Fig. IV.9 – Diffraction par une arête. L'angle d'émission α_ν dépend de la position du point récepteur \mathbf{r} . Il n'existe qu'un unique point $\mathbf{p}(\nu_0)$ sur l'arête diffractante pour lequel l'angle d'émission est égal à l'angle d'incidence β .

Ainsi,

$$f'(\nu_0) = \frac{d\alpha_\nu}{d\nu} = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{(z-\nu)^2}} \times \frac{d}{d\nu} \left(\frac{r}{z-\nu} \right) = \frac{r}{R_\nu^2}. \quad (\text{IV.31})$$

Finalement, la densité d'énergie diffractée s'écrit :

$$W_{\text{dif}} = \frac{I}{c} D_\omega(\varphi, \theta) \times \frac{1}{r}, \quad (\text{IV.32})$$

et est donc inversement proportionnelle à la distance r entre l'arête et le point récepteur. La décroissance de l'énergie en $1/r$ est en accord avec la décroissance du champ de pression acoustique en $1/\sqrt{r}$ prédite par la TGD [Pierce, 1991].

3.2 Résultats

3.2.1 Etude bidimensionnelle

L'étude est menée dans un premier temps dans une configuration bidimensionnelle à savoir $\alpha = \beta = \pi/2$. On s'intéresse donc à la diffraction par un coin rigide d'angle extérieur $\phi = 2\pi - \pi/4$ [Reboul et al., 2003]. Une onde plane dans la direction $\varphi = 267,5^\circ$ éclaire le côté gauche du coin. L'absorption atmosphérique est négligée ($m = 0$), l'amplitude de l'onde plane incidente est $p_0 = 1$ Pa, et la fréquence est $f = 2500$ Hz. Dans cet exemple, le seul point de diffraction est le sommet \mathbf{q} du coin. L'intensité directe associée au champ d'ondes planes s'écrit au point \mathbf{r} sous la forme :

$$I_{\text{dir}} = \mathbf{I}_{\text{dir}} \cdot \mathbf{v} = \rho e^{-m\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}} = \rho, \quad (\text{IV.33})$$

où \mathbf{v} est la direction d'incidence et $\rho = \frac{|p_0|^2}{2\rho_0 c}$. L'onde incidente se réfléchit sur la face gauche du coin selon la loi de Snell-Descartes : la méthode des sources images est utilisée pour évaluer l'intensité réfléchie. De cette façon, celle-ci s'écrit sous la forme :

$$I_{\text{refl}} = \mathbf{I}_{\text{refl}} \cdot \mathbf{v}' = \rho, \quad (\text{IV.34})$$

où \mathbf{v}' est la direction de l'onde plane réfléchie, symétrique de la direction d'incidence par rapport à la normale au plan de réflexion. Enfin, le champ d'ondes planes est diffracté au niveau du sommet sous la forme de rayons d'espace et de rayons de surface le long du coin d'après le principe de Fermat généralisé. Nous considérerons que les contributions des rayons de surface peuvent être négligées. L'intensité diffractée en un point \mathbf{r} dans la direction \mathbf{u} est donnée par la relation :

$$I_{\text{dif}} = \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{u}) H(\mathbf{q}, \mathbf{r}). \quad (\text{IV.35})$$

σ est la puissance de la source fictive de diffraction introduite au point \mathbf{q} et calculée par la relation (IV.28).

Lors du calcul du champ acoustique en un point \mathbf{r} , seules certaines contributions sont prises en compte selon la position du point, et il convient donc de définir les zones d'illumination pour chaque contribution. Le champ direct n'existe que si $|\theta - \varphi| < \pi$. Le champ est réfléchi par la face droite du coin ($\theta = 0$) si $\theta < \pi - \varphi$, et est réfléchi par la face gauche du coin ($\theta = \phi$) si $\theta > 2\phi - \pi - \varphi$. θ et φ sont compris entre 0 et ϕ . Dans le cas qui nous intéresse, ϕ et φ sont supérieurs à π . L'espace autour du coin peut donc être divisé en trois zones (Fig. IV.10) :

- la zone I, définie par $\theta > 2\phi - \pi - \varphi = 182,5^\circ$, où coexistent le champ direct, le champ réfléchi et le champ diffracté,
- la zone II, définie par $\theta < 2\phi - \pi - \varphi = 182,5^\circ$ et $\theta > \varphi - \pi = 87,5^\circ$, où coexistent le champ direct et le champ diffracté,
- la zone III définie par $\theta < \varphi - \pi = 87,5^\circ$ où seul le champ diffracté existe.

Les frontières délimitant les zones sont les frontières ombre-lumière : l'angle $\theta = 2\phi - \pi - \varphi = 182,5^\circ$ correspond à la frontière ombre-lumière du champ réfléchi, et l'angle $\theta = \varphi - \pi = 87,5^\circ$ correspond à la frontière ombre-lumière du champ direct. La méthode du transfert radiatif est mise en œuvre pour prédire le champ acoustique autour du coin. Afin d'établir une comparaison, le même calcul est mené à l'aide de la TGD. Les figures IV.11(a) et IV.11(b) présentent respectivement le niveau de bruit L_p autour du coin calculé à l'aide de la TGD et à l'aide de la méthode du transfert radiatif. La figure IV.12 présente un tracé linéaire de la densité d'énergie le long d'une ligne de contour autour du coin : ce tracé est issu des deux précédents calculs. La grande différence entre les deux cartes de niveau de bruit est liée à l'absence de franges d'interférences dans les zones I et II avec la méthode du transfert radiatif. En effet, l'hypothèse de décorrélation des ondes qui nous permet de sommer les contributions énergétiques ne permet pas de reproduire ce phénomène. Le tracé linéaire de la densité d'énergie nous montre que la méthode du transfert radiatif permet finalement de reproduire le comportement moyen du champ acoustique autour de l'objet diffractant. La TGD comme la méthode du transfert radiatif

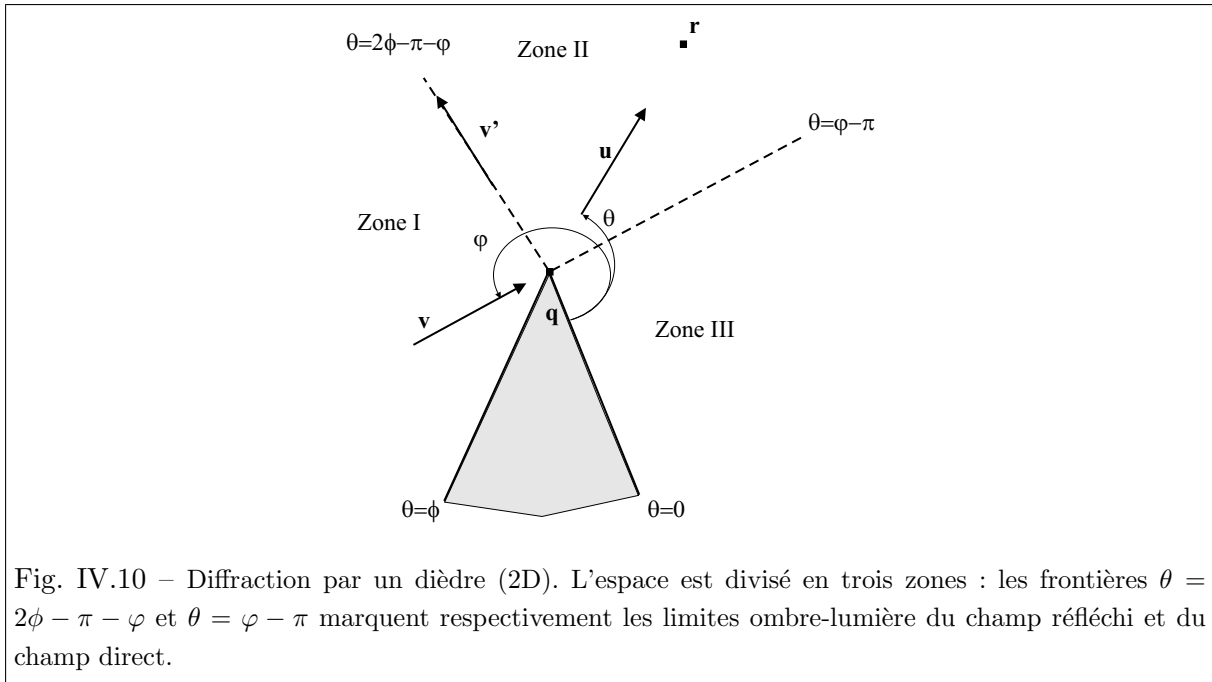


Fig. IV.10 – Diffraction par un dièdre (2D). L'espace est divisé en trois zones : les frontières $\theta = 2\phi - \pi - \varphi$ et $\theta = \varphi - \pi$ marquent respectivement les limites ombre-lumière du champ réfléchi et du champ direct.

conduisent à des résultats infinis au niveau des frontières ombre-lumière, ce qui se traduit par des bandes foncées sur les cartes de niveau de bruit et par des divergences dans le tracé linéaire de la densité d'énergie. En effet, nous avons vu précédemment que le champ acoustique ne pouvait être décrit en termes de rayons au niveau de ces zones, ce qui explique les déficiences des deux méthodes.

3.2.2 Etude tridimensionnelle

Une étude similaire a été réalisée dans un deuxième temps dans une configuration tridimensionnelle. Le paragraphe 3.1 nous a permis de montrer que la solution obtenue avec la méthode du transfert radiatif est en accord avec celle issue de la TGD. On s'intéresse donc à la diffraction par un dièdre d'une onde plane incidente. L'angle extérieur au dièdre est toujours $\phi = 2\pi - \pi/4$. Deux figures (Fig. IV.13(a) et (b)) sont présentées pour illustrer d'une part le comportement du champ acoustique dans un plan perpendiculaire au dièdre, et d'autre part le comportement du champ acoustique en un point fixe en fonction de la fréquence. Pour la première application, la direction d'incidence est $\varphi = 217,5^\circ$, $\beta = 40^\circ$ et la fréquence est $f = 1500$ Hz. On s'intéresse à l'évolution du niveau de bruit L_p dans un plan perpendiculaire à l'arête du dièdre et à une distance constante $r = 1,5$ m de l'arête. Pour ce cas de figure, seul un point de diffraction est à prendre en compte et il s'agit du sommet du cône de Keller tel que défini par la TGD. Le résultat obtenu à l'aide de la méthode du transfert radiatif est comparé au résultat issu de la TGD. Les conclusions sont similaires à celles établies pour le cas bidimensionnel. Les deux approches conduisent à des solutions non physiques au niveau des frontières ombre-lumière qui correspondent ici aux angles $\theta = 2\phi - \pi - \varphi = 232,5^\circ$ pour le champ réfléchi et $\theta = \varphi - \pi = 37,5^\circ$ pour le champ direct, ce qui explique la divergence des deux courbes pour ces angles particuliers.

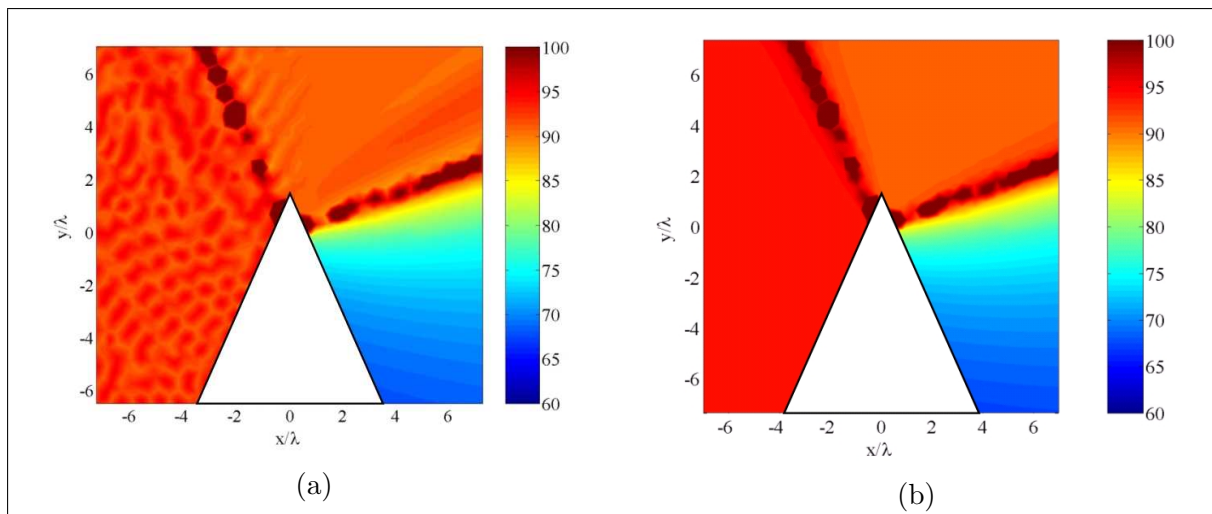


Fig. IV.11 – Diffraction d’une onde plane par un dièdre d’angle au sommet $\pi/4$ (2D). L_p (dB - ref : 2.10^{-5} Pa) autour du dièdre calculé par (a) la TGD et (b) la méthode du transfert radiatif. L’étude est menée sur le tiers d’octave centré sur 2500 Hz.

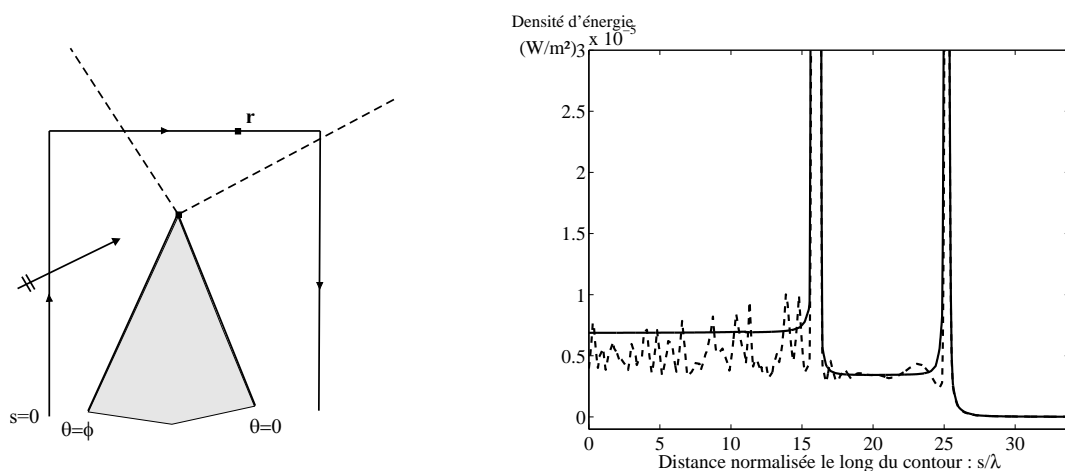


Fig. IV.12 – Densité d’énergie acoustique le long d’un contour entourant le dièdre calculée par la BEM (---) et la méthode du transfert radiatif (—).

Pour la deuxième application, le point récepteur est fixe à la position $r = 1,5$ m, $\theta = 27,5^\circ$ située dans la zone d’ombre du dièdre, et on s’intéresse à l’évolution du niveau de bruit L_p en fonction de la fréquence. La direction d’incidence est $\varphi = 257,5^\circ$, $\beta = 40^\circ$. Le résultat obtenu avec la méthode du transfert radiatif est identique à celui fourni par la TGD et on retrouve par les deux approches la décroissance en amplitude du champ diffracté lorsque la fréquence augmente.

4 Diffraction multiple

La diffraction est dite multiple lorsque les rayons sont diffractés plusieurs fois. Ce phénomène se produit dès lors que plusieurs points de diffraction sont présents (Fig. IV.14). Prenons le cas de la diffraction par une barrière rectangulaire comme celle présentée figure IV.16. Chaque

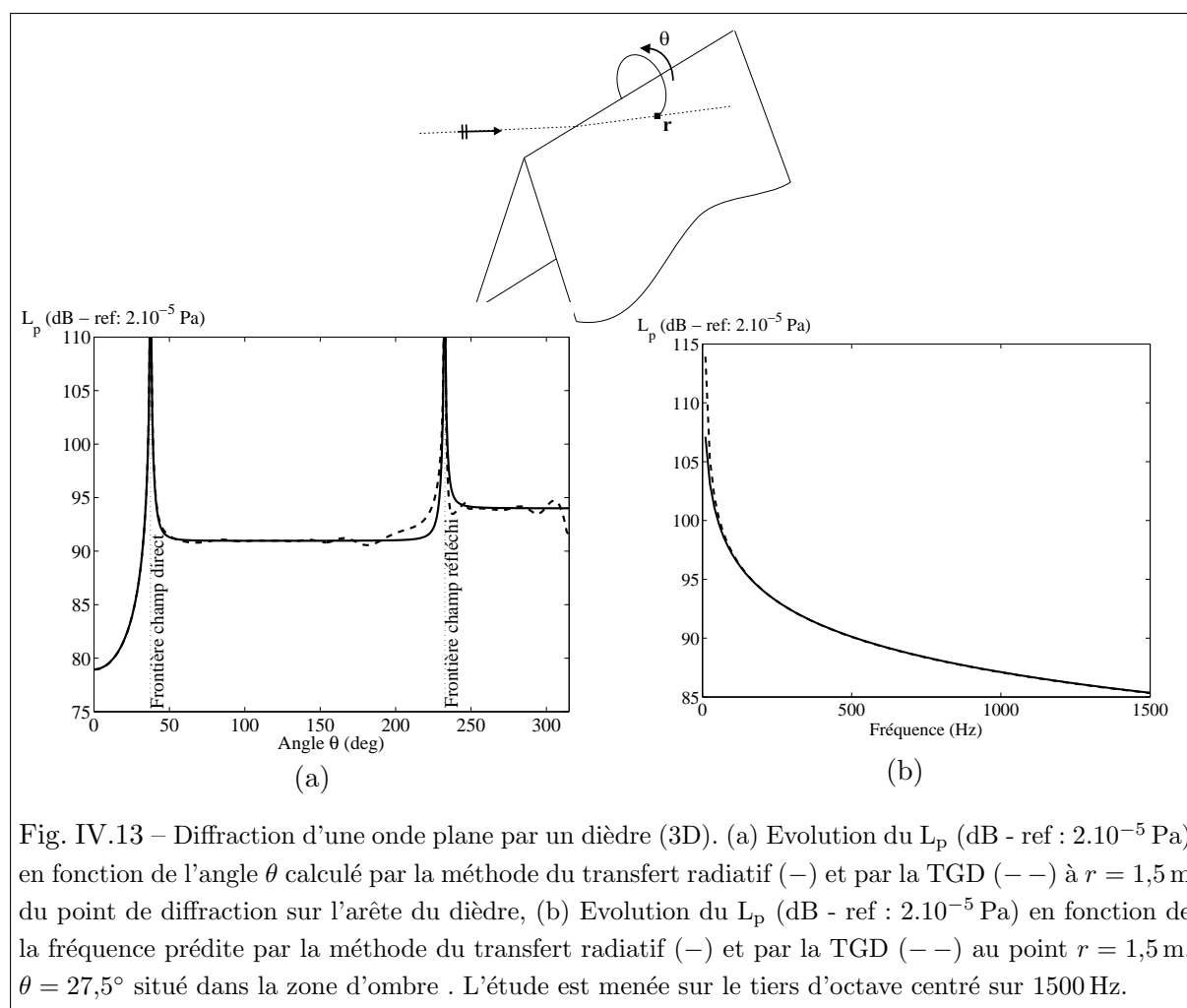
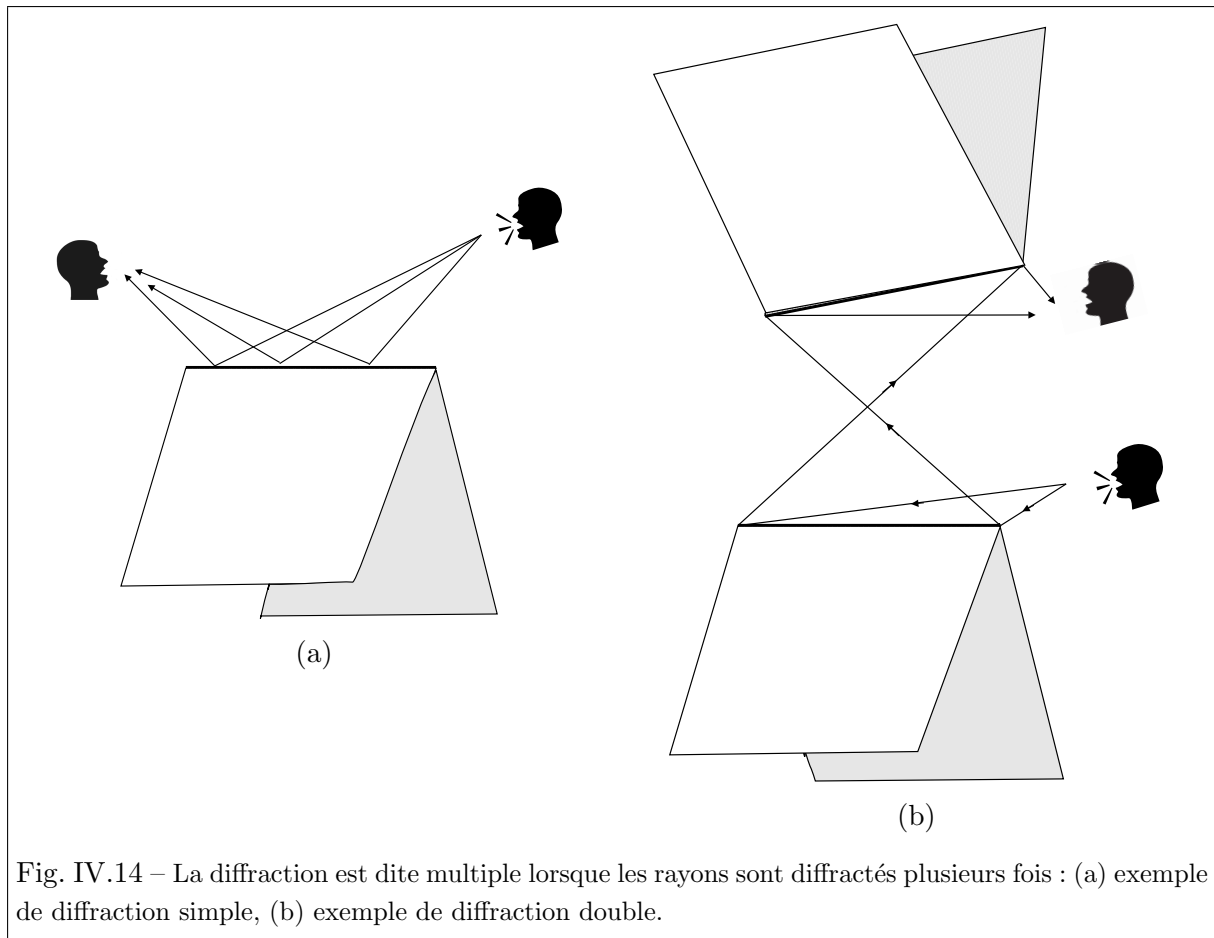


Fig. IV.13 – Diffraction d’une onde plane par un dièdre (3D). (a) Evolution du L_p (dB - ref : 2.10^{-5} Pa) en fonction de l’angle θ calculé par la méthode du transfert radiatif (—) et par la TGD (---) à $r = 1,5$ m du point de diffraction sur l’arête du dièdre, (b) Evolution du L_p (dB - ref : 2.10^{-5} Pa) en fonction de la fréquence prédite par la méthode du transfert radiatif (—) et par la TGD (---) au point $r = 1,5$ m, $\theta = 27,5^\circ$ situé dans la zone d’ombre . L’étude est menée sur le tiers d’octave centré sur 1500 Hz.

sommet de la barrière est un point de diffraction. Considérons une source émettant face à cette barrière. Un rayon issu de cette source peut être diffracté à un sommet (diffraction simple), mais peut aussi se propager le long de la barrière pour être diffracté au sommet suivant (diffraction double), ou encore peut parcourir plusieurs fois le chemin le long de la barrière avant d’être diffracté (diffraction multiple). Finalement, de multiples trajets doivent être pris en compte pour tenir compte de toutes les contributions. La mise en œuvre de la TGD pour l’étude de la diffraction multiple n’est pas aisée car elle conduit à travailler avec des sommes infinies, que l’on peut être amené à tronquer. Dès lors, le calcul perd en précision. L’objectif de cette partie est de montrer l’intérêt de la méthode du transfert radiatif pour l’étude de la diffraction multiple. En effet, les sources introduites dans la méthode permettent de prendre en compte tous les ordres de diffraction simultanément [Reboul et al., 2004b].

4.1 Résolution par la méthode du transfert radiatif : équivalence avec la TGD

Le paragraphe précédent nous a permis de montrer comment un problème de diffraction acoustique simple peut être traité à l’aide de la méthode du transfert radiatif. La méthode mise



en œuvre s'applique de la même façon à l'étude d'un problème de diffraction multiple. Il s'agit pour cela de dresser l'inventaire des lignes et sommets diffractants et d'introduire les sources fictives de diffraction adéquates. De cette façon, la méthode du transfert radiatif se distingue de la TGD et s'apparente à la BEM au sens où les sources introduites permettent de prendre en compte simultanément tous les ordres de diffraction, c'est-à-dire tous les chemins parcourus par les rayons diffractés.

On s'intéresse dans un premier temps aux similitudes et aux différences entre la solution à un problème de diffraction multiple obtenue avec la méthode du transfert radiatif, et celle obtenue avec la TGD. Considérons pour cela la diffraction d'une onde plane stationnaire par un écran bidimensionnel épais de forme trapézoïdale (Fig. IV.15). Une onde plane d'intensité I éclaire la face gauche de l'écran, et on cherche à évaluer la densité d'énergie en un point situé dans la zone d'ombre de l'autre côté de l'écran à l'aide de la méthode du transfert radiatif et à l'aide de la TGD.

Etude d'un écran bidimensionnel épais : Solution obtenue avec la méthode du transfert radiatif

Afin de mettre en œuvre la méthode du transfert radiatif, deux sources fictives de diffraction de puissance σ_1 et σ_2 sont respectivement introduites aux deux sommets \mathbf{p}_1 and \mathbf{p}_2 . L'angle d'incidence φ et l'angle d'émission θ sont définis sur la figure IV.15.

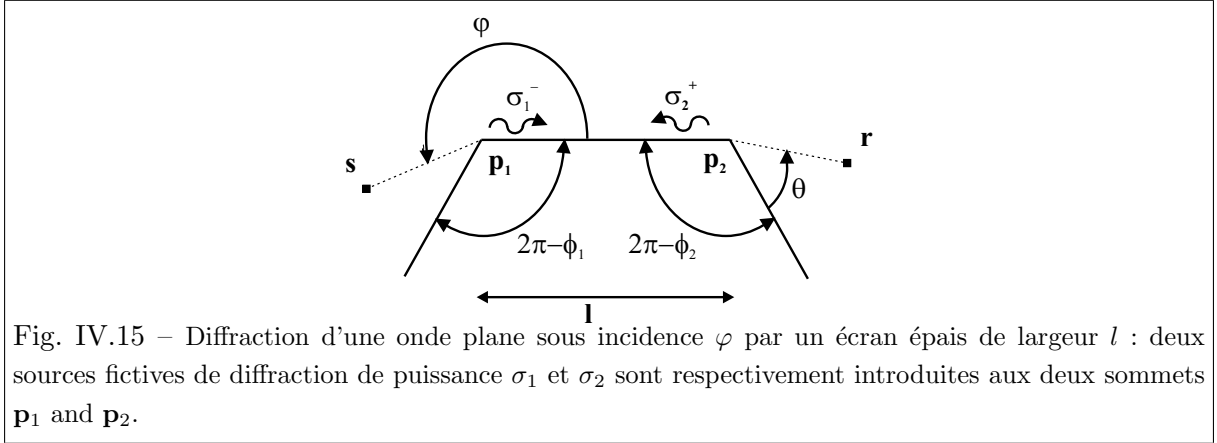


Fig. IV.15 – Diffraction d'une onde plane sous incidence φ par un écran épais de largeur l : deux sources fictives de diffraction de puissance σ_1 et σ_2 sont respectivement introduites aux deux sommets \mathbf{p}_1 and \mathbf{p}_2 .

Afin d'alléger les notations, $\sigma_1(0)$, amplitude de la source 1 dans la direction $\varphi = 0$, et $\sigma_2(\phi_2)$, amplitude de la source 2 dans la direction $\theta = \phi_2$, sont notées σ_1^- and σ_2^+ . Les amplitudes σ_1^- and σ_2^+ sont déterminées en appliquant l'équation (IV.20). Deux contributions sont à prendre en compte au point \mathbf{p}_1 , la contribution associée au champ direct ainsi que la contribution associée à la source de diffraction au point \mathbf{p}_2 émettant dans la direction du point \mathbf{p}_1 . Une seule contribution est à prendre en compte au point \mathbf{p}_2 associée à la source de diffraction au point \mathbf{p}_1 émettant dans la direction du point \mathbf{p}_2 . En effet, l'angle d'incidence φ est supposé supérieur à π , sans quoi une contribution supplémentaire associée au champ direct doit être également introduite en ce point. Finalement, les équations régissant σ_1^- et σ_2^+ s'écrivent :

$$\frac{\sigma_1^-}{2\pi} = ID_\omega(\varphi, 0) + \sigma_2^+ H(l) D_\omega(0, 0), \quad (\text{IV.36})$$

$$\frac{\sigma_2^+}{2\pi} = \sigma_1^- H(l) D_\omega(\phi_2, \phi_2), \quad (\text{IV.37})$$

où l est la largeur de l'écran, ϕ_i est l'angle extérieur au coin au point \mathbf{p}_i . En appliquant à nouveau l'équation (IV.20) pour une direction d'émission θ quelconque, σ_2 s'écrit sous la forme :

$$\frac{\sigma_2(\theta)}{2\pi} = \sigma_1^- H(l) D_\omega(\phi_2, \theta). \quad (\text{IV.38})$$

D'après la relation de symétrie (IV.27), $D_\omega(\phi_2, \phi_2) = D_\omega(0, 0)$, et la solution au système d'équations (IV.36) et (IV.37) est,

$$\sigma_1^- = I \frac{2\pi D_\omega(\varphi, 0)}{1 - 4\pi^2 H^2(l) D_\omega^2(0, 0)}. \quad (\text{IV.39})$$

puis

$$\sigma_2(\theta) = I \frac{4\pi^2 D_\omega(\varphi, 0) H(l) D_\omega(\phi_2, \theta)}{1 - 4\pi^2 H^2(l) D_\omega^2(0, 0)}. \quad (\text{IV.40})$$

La densité d'énergie en tout point \mathbf{r} situé à droite et en dessous du plan supérieur de l'écran c'est-à-dire vérifiant $\theta < \phi_2 - \pi$ s'écrit alors en ne considérant que la seule contribution de la source de diffraction située en \mathbf{p}_2 :

$$W(\mathbf{r}) = \sigma_2(\theta)G(r), \quad (\text{IV.41})$$

où $r = |\mathbf{p}_2 - \mathbf{r}|$. Finalement,

$$W(\mathbf{r}) = \frac{I D_\omega(\varphi,0)D_\omega(\phi_2,\theta)}{c \frac{1 - \frac{D_\omega^2(0,0)}{l^2}}{l^2}} \times \frac{1}{lr}, \quad (\text{IV.42})$$

en négligeant l'absorption atmosphérique de sorte que $H(l) = 1/2\pi l$ et $G(r) = 1/2\pi cr$. Cette formulation est valable à condition que $D_\omega(0,0)/l < 1$.

Etude d'un écran bidimensionnel épais : solution obtenue avec la TGD

Résolvons à présent le même problème que précédemment à l'aide de la TGD. La pression au point \mathbf{p}_2 est déterminée en sommant les contributions de tous les rayons arrivant en ce point et peut s'écrire :

$$p_2 = p_0 d(\varphi,0) \frac{e^{-jkl}}{\sqrt{l}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[d(0,0) \frac{e^{-jkl}}{\sqrt{l}} \right]^{2n}, \quad (\text{IV.43})$$

où p_0 est l'amplitude de l'onde plane incident au point \mathbf{p}_1 . Le premier terme de la somme infinie ($n = 0$) correspond à un rayon diffracté une seule fois, ou encore au rayon incident arrivant au point \mathbf{p}_2 après avoir été diffracté une fois au point \mathbf{p}_1 . Le second terme correspond à un rayon diffracté trois fois, ou encore au rayon diffracté tout d'abord au point \mathbf{p}_1 , puis diffracté au point \mathbf{p}_2 , et à nouveau diffracté au point \mathbf{p}_1 avant d'arriver au point \mathbf{p}_2 . Les termes suivants correspondent à un nombre supérieur d'allers-retours entre \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 . La pression diffractée au point \mathbf{r} s'écrit :

$$p(\mathbf{r}) = p_2 d(\phi_2,\theta) \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}, \quad (\text{IV.44})$$

$$= p_0 d(\varphi,0) d(\phi_2,\theta) \frac{e^{-jkl}}{\sqrt{l}} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(d(0,0) \frac{e^{-jkl}}{\sqrt{l}} \right)^2 \right]^n, \quad (\text{IV.45})$$

où $d(\phi_2,\theta)e^{-jkr}/\sqrt{r}$ est une onde acoustique cylindrique émise au point \mathbf{p}_2 vers le point récepteur \mathbf{r} . Tâchons d'évaluer à présent la densité d'énergie acoustique $W(\mathbf{r}) = |p(\mathbf{r})|^2/2\rho c^2$ associée à ce champ de pression. En élevant au carré l'équation (IV.45) et en négligeant les produits croisés, la densité d'énergie s'écrit :

$$W(\mathbf{r}) = \frac{|p_0|^2}{2\rho_0 c^2} |d(\varphi,0)|^2 |d(\phi_2,\theta)|^2 \frac{1}{lr} \sum_{n=0}^{\infty} \left[|d(0,0)|^2 \frac{1}{l} \right]^{2n}, \quad (\text{IV.46})$$

$$= \frac{I D_\omega(\varphi,0)D_\omega(\phi_2,\theta)}{c \frac{1 - \frac{D_\omega^2(0,0)}{l^2}}{l^2}} \times \frac{1}{lr}, \quad (\text{IV.47})$$

où $I = |p_0|^2/2\rho_0 c$ et $D_\omega = |d|^2$. La série converge si $D_\omega(0,0)/l < 1$.

Etude d'un écran bidimensionnel épais : conclusion

Il apparaît que la TGD conduit au même champ de densité d'énergie (Eq. (IV.47)) que la méthode du transfert radiatif (Eq. (IV.42)) lorsque les interférences entre les rayons sont négligées. Les équations (IV.12), (IV.13) et (IV.20) peuvent donc être finalement considérées comme une extension de l'acoustique géométrique au sens strict, à savoir sans tenir compte de la phase des rayons, permettant d'inclure les effets de la diffraction tout comme la TGD.

4.2 Diffraction par une barrière rectangulaire

La méthode du transfert radiatif est mise en œuvre pour étudier la diffraction en 2D d'une source cylindrique stationnaire S de puissance ρ par une barrière rigide rectangulaire de dimensions $a \times b$ présentée figure IV.16. Le champ direct est réfléchi par la face avant de la barrière et diffracté aux quatre sommets de la barrière notés \mathbf{p}_i pour $i = 1 \dots 4$.

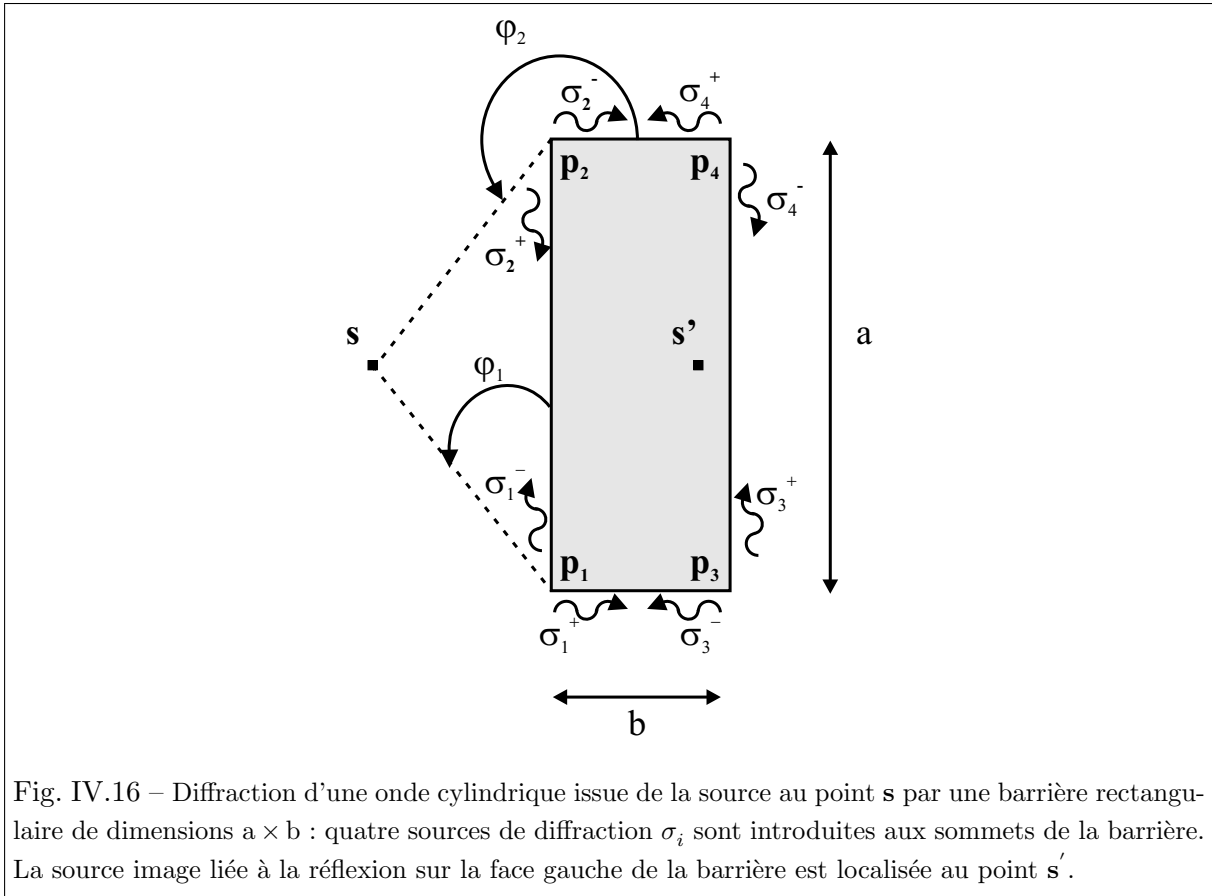


Fig. IV.16 – Diffraction d'une onde cylindrique issue de la source au point \mathbf{s} par une barrière rectangulaire de dimensions $a \times b$: quatre sources de diffraction σ_i sont introduites aux sommets de la barrière. La source image liée à la réflexion sur la face gauche de la barrière est localisée au point \mathbf{s}' .

L'intensité directe en un point \mathbf{r} associée à la source cylindrique située au point \mathbf{s} est :

$$\mathbf{I}_{\text{dir}} = \rho \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \rho \mathbf{H}(s), \quad (\text{IV.48})$$

où \mathbf{H} est le noyau énergétique associé aux ondes cylindriques, et $s = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$. La méthode des sources images est utilisée pour évaluer l'intensité réfléchie. Une source image cylindrique de

même amplitude ρ que la source S est introduite au point \mathbf{s}' , symétrique du point \mathbf{s} par rapport à la face avant de la barrière où se produit la réflexion. L'intensité réfléchie en un point \mathbf{r} associée à la source image s'écrit donc :

$$\mathbf{I}_{\text{refl}} = \rho \mathbf{H}(\mathbf{s}'), \quad (\text{IV.49})$$

avec $\mathbf{s}' = |\mathbf{r} - \mathbf{s}'|$. Une source fictive de diffraction de puissance $\sigma_i(\theta)$ est introduite en chaque sommet diffractant \mathbf{p}_i . L'intensité diffractée en un point \mathbf{r} s'écrit :

$$\mathbf{I}_{\text{dif}} = \sum_{i=1}^4 \sigma_i(\theta_i) \mathbf{H}(\mathbf{p}_i) \quad (\text{IV.50})$$

où $p_i = |\mathbf{r} - \mathbf{p}_i|$ et θ_i est la direction d'émission du point \mathbf{p}_i vers le point \mathbf{r} . σ_i^- and σ_i^+ désignent respectivement la puissance de la source i dans les directions $\theta = 0$ et $\theta = 3\pi/2$. Le système d'équations sur σ_i^\pm est déterminé en appliquant l'équation (IV.20). Aucune onde n'est réfléchie en direction des points de diffraction, par conséquent la deuxième intégrale dans le membre de droite de l'équation (IV.20) disparaît. Finalement, σ_i^\pm ne dépend que de la puissance des sources σ_j^\pm autres que la source i et de l'intensité directe $\rho H(s)$ pour les deux seuls points 1 and 2 :

$$\frac{\sigma_1^+}{2\pi} = \sigma_2^+ D_\omega(0, \frac{3\pi}{2}) H(a) + \sigma_3^- D_\omega(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) H(b) + \rho D_\omega(\varphi_1, \frac{3\pi}{2}) H(s_1), \quad (\text{IV.51})$$

$$\frac{\sigma_1^-}{2\pi} = \sigma_2^+ D_\omega(0, 0) H(a) + \sigma_3^- D_\omega(\frac{3\pi}{2}, 0) H(b) + \rho D_\omega(\varphi_1, 0) H(s_1), \quad (\text{IV.52})$$

$$\frac{\sigma_2^+}{2\pi} = \sigma_1^- D_\omega(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) H(a) + \sigma_4^+ D_\omega(0, \frac{3\pi}{2}) H(b) + \rho D_\omega(\varphi_2, \frac{3\pi}{2}) H(s_2), \quad (\text{IV.53})$$

$$\frac{\sigma_2^-}{2\pi} = \sigma_1^- D_\omega(\frac{3\pi}{2}, 0) H(a) + \sigma_4^+ D_\omega(0, 0) H(b) + \rho D_\omega(\varphi_2, 0) H(s_2), \quad (\text{IV.54})$$

$$\frac{\sigma_3^+}{2\pi} = \sigma_1^+ D_\omega(0, \frac{3\pi}{2}) H(b) + \sigma_4^- D_\omega(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) H(a), \quad (\text{IV.55})$$

$$\frac{\sigma_3^-}{2\pi} = \sigma_1^+ D_\omega(0, 0) H(b) + \sigma_4^- D_\omega(\frac{3\pi}{2}, 0) H(a), \quad (\text{IV.56})$$

$$\frac{\sigma_4^+}{2\pi} = \sigma_2^- D_\omega(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) H(b) + \sigma_3^+ D_\omega(0, \frac{3\pi}{2}) H(a), \quad (\text{IV.57})$$

$$\frac{\sigma_4^-}{2\pi} = \sigma_3^+ D_\omega(0, 0) H(a) + \sigma_2^- D_\omega(\frac{3\pi}{2}, 0) H(b), \quad (\text{IV.58})$$

où s_1, s_2, φ_1 et φ_2 sont définis figure IV.16. Il s'agit d'un système d'équations linéaires où les inconnues sont les σ_i^\pm . Par ailleurs, la puissance σ_i dans une direction θ quelconque est également donnée par l'équation (IV.20) de sorte que :

$$\frac{\sigma_1(\theta)}{2\pi} = \sigma_2^+ D_\omega(0, \theta) H(a) + \sigma_3^- D_\omega(\frac{3\pi}{2}, \theta) H(b) + \rho D_\omega(\varphi_1, \theta) H(s_1), \quad (\text{IV.59})$$

$$\frac{\sigma_2(\theta)}{2\pi} = \sigma_1^- D_\omega(\frac{3\pi}{2}, \theta) H(a) + \sigma_4^+ D_\omega(0, \theta) H(b) + \rho D_\omega(\varphi_2, \theta) H(s_2), \quad (\text{IV.60})$$

$$\frac{\sigma_3(\theta)}{2\pi} = \sigma_1^+ D_\omega(0, \theta) H(b) + \sigma_4^- D_\omega(\frac{3\pi}{2}, \theta) H(a), \quad (\text{IV.61})$$

$$\frac{\sigma_4(\theta)}{2\pi} = \sigma_2^- D_\omega(\frac{3\pi}{2}, \theta) H(b) + \sigma_3^+ D_\omega(0, \theta) H(a). \quad (\text{IV.62})$$

Ainsi, la puissance des sources $\sigma_i(\theta)$ dans une direction quelconque est entièrement déterminée par la connaissance des valeurs particulières σ_i^\pm . Finalement, le champ d'intensité en un point \mathbf{r} est calculé en sommant les contributions du champ direct, du champ réfléchi et du champ diffracté par chaque point de diffraction :

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \rho\mathbf{H}(\mathbf{s},\mathbf{r}) + \rho\mathbf{H}(\mathbf{s}',\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^4 \sigma_i(\theta_i)\mathbf{H}(\mathbf{p}_i,\mathbf{r}), \quad (\text{IV.63})$$

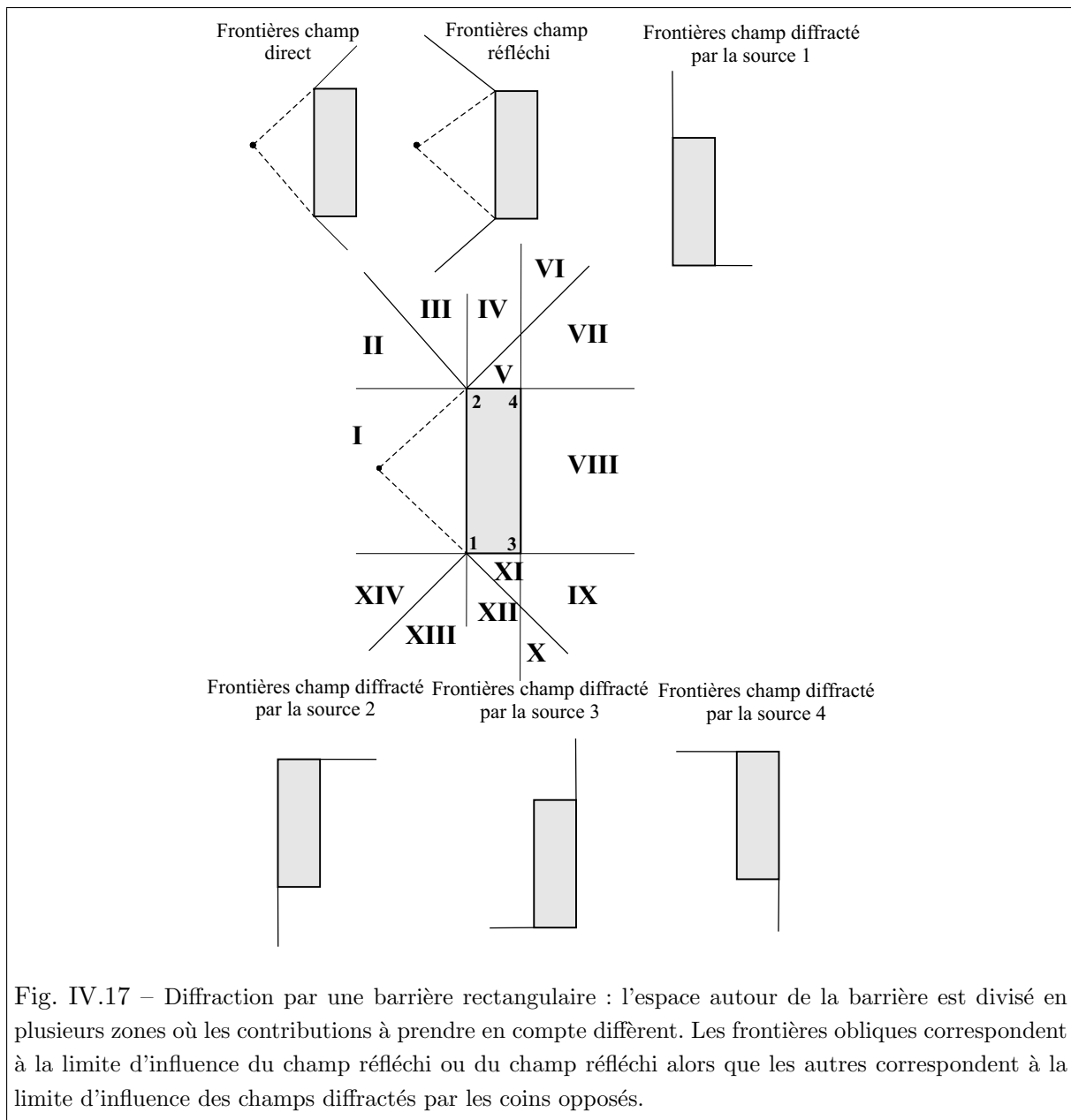
d'où l'on déduit la densité d'énergie acoustique :

$$W(\mathbf{r}) = \rho G(\mathbf{s},\mathbf{r}) + \rho G(\mathbf{s}',\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^4 \sigma_i(\theta_i)G(\mathbf{p}_i,\mathbf{r}). \quad (\text{IV.64})$$

Il faut noter que seules certaines contributions sont prises en compte selon la position du point récepteur, les autres étant masquées par l'obstacle. La figure IV.17 illustre les différentes zones du plan entourant la barrière où les contributions à prendre en compte diffèrent. Les frontières obliques correspondent à la limite d'influence du champ direct ou du champ réfléchi alors que les autres correspondent à la limite d'influence des champs diffractés par les coins opposés. Par exemple, le calcul du champ en un point de la zone I nécessite de prendre en compte le champ direct, le champ réfléchi et les champs diffractés par les sommets \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 , le calcul en un point de la zone III nécessite de prendre en compte le champ direct et les champs diffractés par les sommets \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 et \mathbf{p}_4, \dots .

4.2.1 Résultats

Les résultats obtenus numériquement sont présentés sur les figures IV.18 à IV.21. La barrière a pour dimension 10 m \times 2 m. La source est située à 4 m de la face avant de la barrière et sur l'axe médian. Dans le premier cas (Fig. IV.18 et Fig. IV.19), la source émet sur le tiers d'octave centré sur 250 Hz : la longueur d'onde est 1,4 m ce qui est du même ordre de grandeur que la plus petite dimension de la barrière. Dans le second cas (Fig. IV.20 et Fig. IV.21), la source émet sur le tiers d'octave centré sur 5000 Hz : la longueur d'onde est 0,07 m ce qui est très petit devant les dimensions de la barrière. Pour les deux cas deux calculs sont réalisés, d'un côté l'équation (IV.59) est résolue à la fréquence centrale de la bande, et de l'autre côté un calcul BEM est réalisé. L'approche BEM consiste à calculer les potentiels de simple et double couche sur un maillage du contour de la barrière, et le champ acoustique reconstruit est continu au niveau des frontières ombre-lumière, donc différent de la solution issue de l'acoustique géométrique. Le calcul BEM est réalisé à l'aide du logiciel commercial SYSNOISE. La barrière est maillée selon un critère en $\lambda/12$. Les calculs BEM sont réalisés tous les 5 Hz pour l'étude sur le tiers d'octave centré sur 250 Hz, et tous les 25 Hz pour le tiers d'octave centré sur 5000 Hz. Le résultat final est la moyenne quadratique ou encore la valeur RMS des résultats obtenus à fréquence pure. Les figures IV.18 et IV.20 présentent les cartes de niveau de bruit L_p obtenues par les deux méthodes autour de la barrière. Les figures IV.19 et IV.21 présentent une comparaison du tracé linéaire de



la densité d'énergie calculée par les deux méthodes le long d'un contour entourant la barrière. Dans les deux cas, la méthode du transfert radiatif conduit à des résultats infinis au niveau des frontières géométriques. Ces frontières sont particulièrement visibles sur les cartes de niveau de bruit L_p (Fig. IV.18(b) et IV.20(b)) où elles se traduisent par des bandes foncées.

La principale différence entre les résultats est liée à l'observation des interférences qui apparaissent sur les cartes BEM (Fig. IV.18(a) et IV.20(a)) alors qu'elles n'apparaissent pas sur les cartes issues de la méthode du transfert radiatif (Fig. IV.18(b) et IV.20(b)) dans la mesure où les sources sont supposées décorréliées et où, par conséquent, les termes de phase ne sont pas pris en compte. Ces interférences sont d'autant plus marquées que la longueur d'onde est proche des dimensions de l'objet diffractant (Fig. IV.18(a)), et dans ce cas le résultat obtenu par la méthode

du transfert radiatif traduit le comportement acoustique moyen du champ acoustique autour de la barrière (Fig. IV.19). Lorsque la fréquence augmente, ou de manière plus générale, lorsque le rapport entre la longueur d'onde et la taille de l'objet diffractant diminue, les effets des interférences s'amenuisent et les deux approches conduisent à des résultats équivalents (Fig. IV.20 et Fig. IV.21)

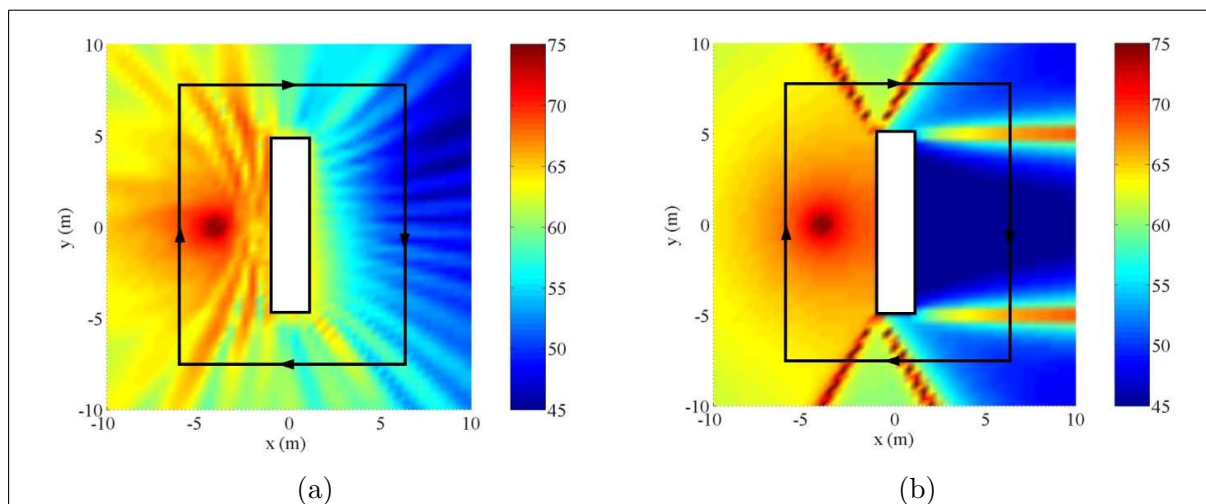


Fig. IV.18 – Diffraction d'une source cylindrique par une barrière rectangulaire de dimensions $10\text{ m} \times 2\text{ m}$. L_p (dB - ref : 2.10^{-5} Pa) autour de la barrière calculé par (a) la BEM et (b) la méthode du transfert radiatif. L'étude est menée sur le tiers d'octave centré sur 250 Hz.

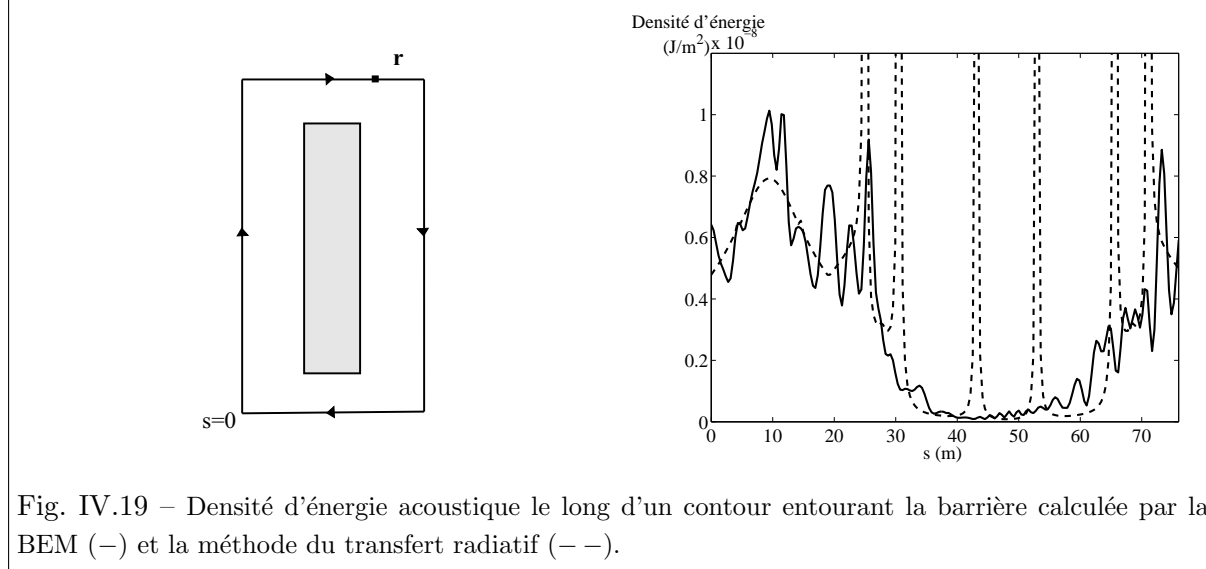


Fig. IV.19 – Densité d'énergie acoustique le long d'un contour entourant la barrière calculée par la BEM (—) et la méthode du transfert radiatif (---).

5 Discussions

La méthode du transfert radiatif est intéressante pour une application hautes fréquences car les temps de calcul sont considérablement réduits par rapport aux méthodes classiques telles que la BEM. Les calculs ne dépendent pas de la fréquence si les propriétés d'absorption des

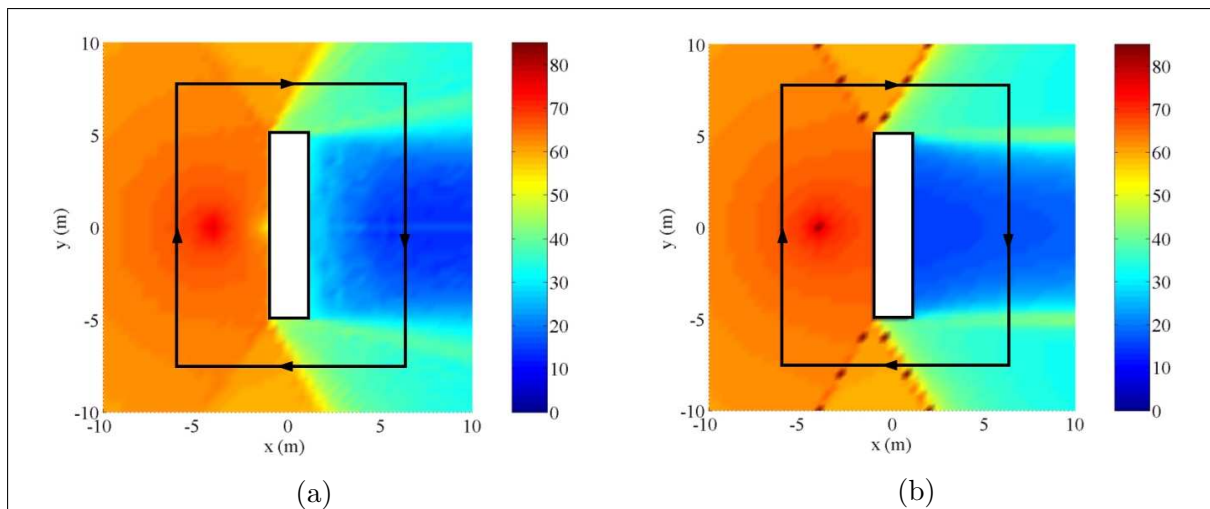


Fig. IV.20 – Diffraction d’une source cylindrique par une barrière rectangulaire de dimensions 10 m \times 2 m. L_p (dB - ref : 2.10^{-5} Pa) autour de la barrière calculé par (a) la BEM et (b) la méthode du transfert radiatif. L’étude est menée sur le tiers d’octave centré sur 5000 Hz.

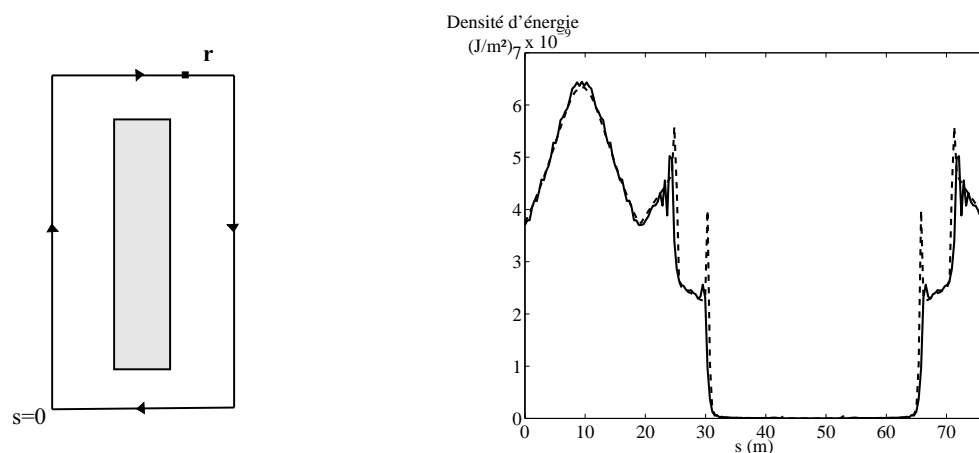


Fig. IV.21 – Densité d’énergie acoustique le long d’un contour entourant la barrière calculée par la BEM (—) et la méthode du transfert radiatif (---).

matériaux et du milieu ne dépendent pas de la fréquence. Dans le cas contraire, les variations de ces paramètres définissent le pas fréquentiel à utiliser pour mener l’étude. Dans le cas de la diffraction, le coefficient de diffraction énergétique dépend de la fréquence : il varie comme l’inverse du nombre d’onde puisque le coefficient de diffraction introduit dans la TGD varie comme l’inverse de la racine du nombre d’onde acoustique. Ainsi, la définition des bandes fréquentielles d’étude pour la méthode du transfert radiatif dépend des variations du coefficient de diffraction énergétique : le pas fréquentiel est choisi de façon à ce que ce coefficient varie peu entre les fréquences minimale et maximale de la bande d’étude.

La méthode du transfert radiatif ne se prête pas à des études basses fréquences où des approches ondulatoires doivent être utilisées, en particulier lorsque la longueur d’onde est du même ordre de grandeur que la dimension de l’objet diffractant. Dans le cas de la diffraction par un di-

èdre (paragraphe 3), les longueurs caractéristiques sont les distances entre la source et l'arête diffractante et entre l'arête et le point récepteur. Ces distances doivent être supérieures à la longueur d'onde pour que la méthode soit valable. Dans le cas de la diffraction par un écran épais (paragraphe 4.2), la distance entre les lignes diffractantes, en d'autres termes la largeur de l'écran, doit être supérieure à la longueur d'onde et finalement, dans le cas de la diffraction par une barrière rectangulaire, la longueur et la largeur de la barrière doivent également respecter ce même critère.

6 Conclusion

Une méthode est proposée pour introduire la diffraction acoustique dans la méthode du transfert radiatif.

L'approche repose sur l'introduction d'un coefficient de diffraction énergétique $D_\omega(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ qui dépend de la direction d'incidence via le vecteur \mathbf{v} et de la direction d'émission via le vecteur \mathbf{u} . Dans le cas de la diffraction par un sommet, ce coefficient est défini comme le rapport entre la puissance émise par unité d'angle solide dans la direction \mathbf{u} et l'intensité incidente I_{inc} dans la direction \mathbf{v} . Dans le cas de la diffraction par une arête, $D_\omega(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ est défini comme le rapport entre la puissance émise par unité d'angle solide dans la direction \mathbf{u} et par unité de longueur de l'arête, et l'intensité incidente I_{inc} dans la direction \mathbf{v} . Il s'écrit comme le carré du module du coefficient de diffraction sous incidence normale introduit par la TGD.

Le problème de la diffraction par un dièdre a permis de montrer que la solution en énergie obtenue à l'aide de la méthode du transfert radiatif est en accord avec la solution en champ de pression établie par la TGD. En outre, l'étude bidimensionnelle de la diffraction par une barrière rectangulaire permet d'affirmer que les solutions obtenues par les deux approches sont identiques lorsque les interférences entre les ondes sont négligées.

La méthode du transfert radiatif ne permet pas de reproduire les phénomènes d'interférences entre les ondes en raison de l'hypothèse de décorrélation des sources sur laquelle elle repose. Ainsi, le résultat obtenu avec cette méthode se présente davantage comme une valeur moyenne sur une bande de fréquences, d'autant plus proche du résultat obtenu avec la BEM que la fréquence augmente, ou encore, que le rapport entre la longueur d'onde et la taille de l'objet diffractant diminue. Par ailleurs, la méthode ne permet pas de prédire le champ acoustique sur les caustiques et sur les frontières ombre-lumière, limitation analogue à la TGD. En effet, dans ces zones particulières, le champ acoustique ne peut être décrit en termes de rayons et la méthode ne s'applique donc pas. En dehors de ces zones les résultats sont en accord avec ceux issus de la TGD ou de la BEM.

L'intérêt de la méthode du transfert radiatif par rapport à la TGD se situe au niveau de

la prise en compte de la diffraction multiple. Ce phénomène se produit lorsqu'un même rayon est diffracté plusieurs fois. Dans ce cas, la TGD nécessite de travailler avec des sommes infinies qui sont tronquées, diminuant ainsi la précision du résultat obtenu. La méthode du transfert radiatif permet de son côté de prendre en compte simultanément tous les ordres de diffraction.

Les études réalisées ici sur des cas académiques doivent à présent être étendues à des cas plus complexes. Il est envisageable de recourir aux mêmes processus que la TGD (UTD, ...) pour mettre en œuvre la méthode au niveau des caustiques et des frontières ombre-lumière. Notons que la prise en compte de la diffraction est intéressante pour un problème purement acoustique, mais peut également faire l'objet d'applications en vibroacoustique. En effet, le rayonnement de bord ou de coin d'une structure vibrante apparaît comme un phénomène de diffraction de l'onde structurale dans le milieu acoustique, qu'il est envisageable d'étudier par des approches similaires à celles développées ici (Annexe C). Par ailleurs, les rayons rampants introduits par la TGD à la surface des obstacles et diffractants dans l'espace nécessitent une approche spécifique qu'il serait intéressant de développer.

Les deux méthodes retenues dans le cadre de cette thèse ont été présentées et la méthode du transfert radiatif a été étendue à l'étude de la diffraction acoustique. La méthode hybride proposée afin de coupler ces deux approches est présentée dans le chapitre suivant.

Bibliographie

- [Cotoni, 2001] Cotoni, V. (2001). *Modélisation de phénomènes vibroacoustiques en moyennes et hautes fréquences par méthode énergétique locale*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. 175 pages.
- [Keller, 1962] Keller, J. (1962). Geometrical theory of diffraction. *J. Opt. Soc. Am.*, 52 :116–130.
- [Kouyoumjian et Pathak, 1974] Kouyoumjian, R. et Pathak, P. (1974). A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface. *Proceedings of the IEEE*, 62(11).
- [Law et al., 2004] Law, M. K., Li, K. M., et Frommer, G. (2004). A study of the barrier insertion loss in urban street by the radiosity method. Dans *Proceedings of the International Congress on Acoustics*, pages 2489–2492, Kyoto (Japon).
- [Ludwig, 1966] Ludwig, D. (1966). Uniform asymptotic expansions at caustics. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 19 :215–250.
- [Pierce, 1991] Pierce, A. (1991). *Acoustics - an introduction to its physical principles and applications - 2nd ed.* Acoustical Society of America.
- [Reboul et al., 2003] Reboul, E., Le Bot, A., et Perret-Liaudet, J. (2003). Application of the radiosity method to acoustical diffraction study at a high frequency range. Dans *Proceedings of Inter-Noise (CD ROM - 8 pages)*, Jeju, Seogwipo city (Korea).
- [Reboul et al., 2004a] Reboul, E., Le Bot, A., et Perret-Liaudet, J. (2004a). Introduction of acoustical diffraction in the radiative transfer method. *C. R. Mécanique*, 332 :505–511.
- [Reboul et al., 2005] Reboul, E., Le Bot, A., et Perret-Liaudet, J. (2005). Radiative transfer equation for multiple diffraction. *J. Acoust. Soc. Am.*, (acceptée).
- [Reboul et al., 2004b] Reboul, E., Perret-Liaudet, J., et Le Bot, A. (2004b). Acoustical energy diffracted around a building. Dans *Proceedings of CFA/DAGA'04 (CD ROM - 2 pages)*, Strasbourg (France).

Chapitre V

Méthode hybride

Introduction

Le chapitre I sur le comportement vibroacoustique d'une transmission par engrenages placée dans l'enceinte d'une cavité acoustique a permis de montrer qu'au regard des caractéristiques élastodynamiques de la transmission, le comportement vibratoire se situe généralement dans le domaine des basses fréquences et peut donc être étudié par une approche de type modal, mais qu'au regard de la taille de la cavité où se propage le son, le bruit rayonné par la même transmission se situe davantage dans le domaine des hautes fréquences. Afin de prédire le bruit d'une transmission en tenant compte de son environnement, il s'agit alors de coupler deux méthodes, une première dédiée aux basses fréquences pour prédire la réponse vibratoire de la transmission, et une seconde dédiée aux hautes fréquences pour évaluer le champ acoustique rayonné. Le couplage entre ces deux méthodes est réalisé à l'aide d'une méthode qualifiée d'*hybride* au sens où elle couple deux approches adaptées à des domaines fréquentiels distincts. La question est de déterminer les données d'entrée de la méthode du transfert radiatif, en d'autres termes la puissance des sources à introduire dans la méthode, à partir des données de sortie de la méthode spectrale itérative, à savoir le champ vibratoire à la surface du corps vibrant. D'un point de vue plus général, la méthode hybride se présente donc comme l'application de la méthode du transfert radiatif à l'étude du rayonnement acoustique d'une structure vibrante dont le comportement vibratoire est connu. Il apparaît d'emblée que le travail avec des sources surfaciques semble le plus approprié.

Afin de situer la méthode par rapport à l'existant, ce chapitre présente tout d'abord une étude bibliographique sur les méthodes permettant de prédire le bruit rayonné par une structure vibrante à partir de la connaissance de son champ vibratoire. La mise en œuvre de la méthode hybride est détaillée dans la deuxième partie du chapitre. Enfin, les troisième et quatrième parties proposent deux cas d'application : le cas d'une plaque simple appuyée sur tous ses bords et bafflée, et le cas d'une plaque raidie.

Sommaire

1	Approche bibliographique	113
1.1	Exposé du problème	113
1.1.1	Equation de Helmholtz et conditions aux limites	113
1.1.2	Forme intégrale indirecte de la pression acoustique	114
1.1.3	Forme intégrale directe de la pression acoustique	114
1.2	Méthode des sources équivalentes	115
1.3	Méthode des éléments finis (FEM) - Méthode des éléments finis de frontière (BEM)	115
1.4	Limites des méthodes déterministes	116
1.5	Méthodes intégrales énergétiques	117
1.6	Méthode des sources équivalentes énergétiques	118
1.7	Méthodes hybrides	119
2	Equations de la méthode hybride proposée	120
2.1	Décomposition en trois étapes	120
2.2	Calcul des sources équivalentes	121
2.2.1	Amplitudes	121
2.2.2	Approximation de type rayon	125
2.2.3	Interprétation physique	127
2.2.4	Implémentation numérique	128
2.2.5	Evaluation des champs pariétaux	128
2.2.6	Cas d'une structure bafflée	129
2.3	Calcul des sources fictives	130
2.4	Calcul du champ acoustique	131
3	Cas d'une plaque simple	131
3.1	Etude d'un critère de maillage	132
3.2	Etude de la relation entre l'intensité normale et les sources équivalentes	133
4	Cas d'une plaque raidie	134
4.1	Etude expérimentale	135
4.1.1	Etude modale	135
4.1.2	Mesures par la technique des deux microphones	136
4.1.3	Champ de vitesse pariétal	140
4.1.4	Champ de pression pariétal	141
4.2	Validation de l'approche hybride pour l'étude du rayonnement en champ libre : calcul des sources équivalentes	143
4.2.1	Localisation des zones de rayonnement	143
4.3	Validation de l'approche hybride pour l'étude du rayonnement au sein d'un environnement acoustique quelconque : calcul des sources fictives et du champ acoustique	148
5	Conclusion	150
	Bibliographie	153

1 Approche bibliographique sur les méthodes d'étude du comportement vibroacoustique des structures

1.1 Exposé du problème

1.1.1 Equation de Helmholtz et conditions aux limites

On considère un domaine Ω constitué d'un fluide parfait, homogène, compressible et infini et une paroi S caractérisée par une impédance Z et animée d'une accélération normale γ_n : les vibrations de la paroi induisent un rayonnement dans le milieu environnant. Le domaine Ω est l'union de deux domaines, un domaine Ω_i intérieur et un domaine Ω_e extérieur à la paroi (Fig. V.1). Le milieu fluide qui nous intéresse dans le cadre de notre étude est l'air.

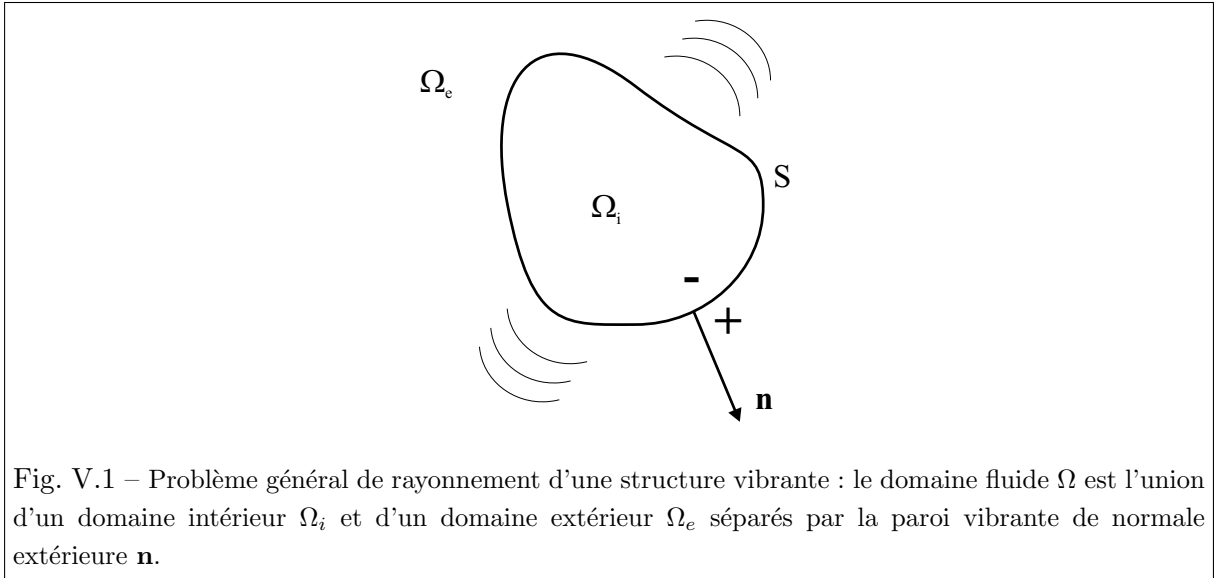


Fig. V.1 – Problème général de rayonnement d'une structure vibrante : le domaine fluide Ω est l'union d'un domaine intérieur Ω_i et d'un domaine extérieur Ω_e séparés par la paroi vibrante de normale extérieure \mathbf{n} .

On se place dans le cadre de l'approximation de l'acoustique linéaire qui permet d'exprimer les équations sur les variations des quantités par rapport aux quantités initiales au repos. On s'intéresse ainsi aux fluctuations de la pression acoustique $p(\mathbf{r}, t)$ par rapport à la pression initiale qui s'écrivent en régime harmonique de pulsation ω : $p(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r})e^{j\omega t}$. En l'absence de sources dans le milieu, la pression acoustique rayonnée est solution d'un système formé de l'équation de Helmholtz à laquelle on ajoute les conditions aux limites définies sur la frontière entourant le milieu et à l'infini en cas de problème extérieur :

$$\begin{cases} \Delta p(\mathbf{r}) + k_0^2 p(\mathbf{r}) = 0 & \text{dans le domaine } \Omega \\ Z \frac{\partial p}{\partial n} + j\omega \rho_0 p = 0 & \text{sur la paroi } S \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} + jk \right) p(\mathbf{r}) = 0 & \text{condition de rayonnement de Sommerfeld} \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

où $k_0 = \omega/c$, c est la vitesse de propagation du son, $\partial/\partial n$ désigne la dérivée partielle dans la direction du vecteur unitaire normal \mathbf{n} , extérieur à la paroi vibrante, ρ_0 désigne la masse volumique de l'air. Nous introduisons la notion d'amortissement en ajoutant une partie imaginaire au nombre d'onde : celui-ci s'écrit à présent $k = k_0 - jm/2$ où m est le coefficient d'absorption

atmosphérique.

Une solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz en champ libre et en présence d'une source unitaire au point \mathbf{q} est la fonction de Green g . Dans le cas tridimensionnel, cette fonction s'écrit sous la forme $g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = e^{-jk r} / 4\pi r$ où $r = |\mathbf{r} - \mathbf{q}|$ est la distance entre les points source et récepteur. Si on cherche $p(\mathbf{r})$ lorsque \mathbf{r} est dans Ω_i , le problème est dit *intérieur*. Si on cherche $p(\mathbf{r})$ lorsque \mathbf{r} est dans Ω_e , le problème est dit *extérieur*.

1.1.2 Forme intégrale indirecte de la pression acoustique

L'écriture d'une représentation intégrale de la pression acoustique valable à l'intérieur et à l'extérieur de la surface S conduit à introduire le saut de pression et sa dérivée normale à la traversée de S [Lesueur, 1988, Filippi, 1994] :

$$\mu = (p^+(\mathbf{r}) - p^-(\mathbf{r}))|_S \quad (\text{V.2})$$

$$\sigma = \left(\frac{\partial p^+(\mathbf{r})}{\partial n} - \frac{\partial p^-(\mathbf{r})}{\partial n} \right) |_S. \quad (\text{V.3})$$

σ et μ sont les potentiels de simple et double couche. En considérant la solution élémentaire g de l'équation d'Helmholtz qui vérifie la condition de rayonnement de Sommerfeld, et le théorème de Green, la représentation intégrale de la pression acoustique s'écrit sous la forme [Lesueur, 1988, Filippi, 1994] :

$$p(\mathbf{r}) = \int_S \mu(\mathbf{q}) \frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial n} - \sigma(\mathbf{q}) g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) dS. \quad (\text{V.4})$$

Lorsque \mathbf{r} est sur la surface S il est nécessaire de prendre l'intégrale associée à la dérivée première de g au sens de la valeur principale de Cauchy. Le calcul de la dérivée normale de p sur la surface fait intervenir la dérivée seconde de g qui doit donc être considérée au sens de la partie finie de Hadamard. La pression acoustique est liée aux densités de simple couche et de double couche : l'accès à la pression acoustique est alors indirect, d'où le nom donné à cette représentation intégrale.

1.1.3 Forme intégrale directe de la pression acoustique

Si on cherche à présent à trouver séparément les solutions du problème intérieur et extérieur, on a alors par exemple $p^- = 0$ et les inconnues du problème sont directement la pression et sa dérivée normale à la surface, d'où le nom de méthode directe. La représentation intégrale de la pression acoustique s'écrit sous la forme :

$$p(\mathbf{r}) = \int_S p(\mathbf{q}) \frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial n} - \frac{\partial p(\mathbf{q})}{\partial n} g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) dS. \quad (\text{V.5})$$

A nouveau, lorsque \mathbf{r} est sur la surface S il est nécessaire de prendre l'intégrale associée à la dérivée première de g au sens de la valeur principale de Cauchy. L'équation (V.5) est connue sous le nom d'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz.

1.2 Méthode des sources équivalentes

La méthode des sources équivalentes consiste à modéliser le champ acoustique rayonné par une structure vibrante par la superposition des champs générés par des sources élémentaires connues telles que des monopôles ou des dipôles, judicieusement positionnées à l'intérieur de la structure. Les contributions de ces sources sont déterminées en minimisant l'écart entre les conditions aux limites imposées à la surface de la structure portant sur des champs (pression ou vitesse), généralement issus de mesures, et le même champ généré par l'ensemble des sources. La méthode des sources équivalentes [Bouchet et al., 2000] est également connue sous le nom de méthode de superposition [Koopmann et al., 1989], de méthode de simulation des sources [Ochmann, 1995] ou de méthode des sources auxiliaires [Bobrovitzkii et Tomilina, 1990]. Un des principaux avantages de cette méthode est que le nombre d'inconnues du problème est lié au nombre de sources introduites, et donc cette méthode est intéressante lorsque le rayonnement acoustique de la structure peut être approché avec un nombre de sources relativement faible. Toutefois, la détermination d'une configuration optimale en terme de nombre et de position des sources n'est pas aujourd'hui un problème résolu [Jeans et Mathews, 1992]. En particulier, les intégrales deviennent singulières lorsque les sources sont placées à la surface de la structure vibrante, et la précision des résultats obtenus varie avec la configuration des sources choisie.

1.3 Méthode des éléments finis (FEM) - Méthode des éléments finis de frontière (BEM)

La méthode des éléments finis (FEM - Finite Element Method) est une technique de résolution numérique de l'équation d'Helmholtz. Généralement utilisée en régime stationnaire où la dimension temporelle est omise, cette méthode repose sur une subdivision spatiale du milieu fluide en éléments sur lesquels l'équation différentielle est écrite de manière discrète. La résolution du système différentiel se ramène alors à la résolution d'un système d'équations linéaires qui présente l'avantage d'être creux et symétrique. La nécessité de mailler le milieu fluide limite l'application de cette méthode aux domaines bornés. En effet, la condition sur l'étendue infinie du fluide environnant est difficilement traduisible.

La méthode des éléments finis de frontière (BEM - Boundary Element Method) repose sur la formulation intégrale de l'équation d'Helmholtz. L'équation est une équation de surface qui ne nécessite donc de discrétiser que la frontière du milieu fluide, la condition d'étendue infinie de ce milieu étant automatiquement vérifiée par la formulation. Les éléments de discrétisation sont alors appelés éléments finis de frontière par opposition aux éléments finis classiques volumiques. La méthode des éléments finis de frontière directe (DBEM - Direct Boundary Element Method) repose sur la représentation intégrale directe de l'équation d'Helmholtz (Eq. (V.5)), et permet donc de résoudre des problèmes exclusivement extérieurs ou intérieurs.

La méthode des éléments finis indirecte (IBEM - Indirect Boundary Element Method) repose

sur la représentation intégrale indirecte de l'équation d'Helmholz (Eq. (V.4)), et permet donc de résoudre des problèmes intérieurs et extérieurs.

La méthode de collocation, qui s'appuie sur une discrétisation de la frontière du domaine acoustique en un nombre fini d'éléments, consiste à vérifier le système d'équations intégrales aux points de collocation qui ne sont pas nécessairement les noeuds du maillage. La discrétisation du système résultant des méthodes directe ou indirecte se fait de la même façon : seules les inconnues diffèrent. En revanche, la différence essentielle porte sur la singularité des opérateurs : la méthode directe nécessite le calcul d'intégrales singulières au sens de la valeur principale de Cauchy, alors que la méthode indirecte nécessite également le calcul d'intégrales singulières au sens de la partie finie de Hadamard. La méthode de collocation conduit à la résolution d'un système matriciel carré plein et non symétrique dont la dimension est liée au nombre de points de collocation introduits. Dans le cas de la méthode indirecte, une formulation variationnelle peut être associée au système d'équations intégrales ce qui permet d'éviter le problème de la singularité des intégrales et conduit après discrétisation en éléments finis de frontière à un système algébrique symétrique.

Les méthodes éléments finis sont des méthodes de référence pour la résolution de problèmes de propagation d'ondes acoustiques car elles permettent de modéliser de manière précise tous les phénomènes de propagation. Les logiciels actuels axés sur le rayonnement acoustique de structures reposent pour la plupart sur ces méthodes. Les applications qui nous intéressent dans le cadre de cette thèse concernent des problèmes extérieurs ou simultanément intérieurs et extérieurs pour lesquels les méthodes des éléments finis de frontière sont les plus adaptées. Pour cette raison, les résultats issus de ces méthodes serviront de résultats de référence. En particulier, les calculs seront réalisés à l'aide du logiciel commercial SYSNOISE [LMS International, 2003] sous lequel seront mises en œuvre la méthode DBEM pour l'étude des problèmes extérieurs, en champ libre, et la méthode IBEM pour l'étude des problèmes intérieurs et extérieurs.

1.4 Limites des méthodes déterministes

La méthode des sources équivalentes et les méthodes des éléments finis et éléments finis de frontière s'inscrivent dans des approches déterministes visant à résoudre directement l'équation d'Helmholtz pour estimer de manière exacte le champ de pression acoustique, en module et en phase. Les méthodes des éléments finis et éléments finis de frontière nécessitent de mailler le milieu fluide en éléments finis ou la frontière de ce milieu en éléments de frontière et la taille du maillage utilisé conditionne la taille des systèmes à résoudre et donc le temps de calcul. Le critère de maillage généralement retenu est tel que la taille des éléments est inférieure au sixième de la longueur d'onde. En hautes fréquences, cela conduit à des modèles de très grande taille et des temps de calcul prohibitifs.

Par ailleurs, la réponse d'un système est particulièrement sensible aux incertitudes sur les propriétés de géométrie, de matériaux du système, d'autant plus que la fréquence augmente. Par conséquent, la détermination exacte de cette réponse en module et en phase est contestable.

En pratique, ces méthodes sont utilisables dans le cas d'un compartiment moteur de véhicule jusqu'à environ 1000 Hz [Thivant, 2003].

1.5 Méthodes intégrales énergétiques

Les limites d'application des méthodes déterministes ont conduit au développement de nouvelles approches. L'approche proposée par Guyader [Guyader et Loyau, 1996, Guyader et Loyau, 2000, Guyader, 2004a, Guyader, 2004b] sous le nom de méthode FAQP (FAQP - Frequency Averaged Quadratic Pressure - method) vise à prédire le comportement vibroacoustique à partir d'une quantité moins sensible que la pression rayonnée à fréquence pure. Elle repose sur le calcul de la pression quadratique moyennée par bande de fréquence (FAQP). Les premières formulations dans le cas d'une structure bafflée ont permis d'établir une équation intégrale sur la FAQP [Guyader et Loyau, 1996]. Cette approche a été étendue plus récemment à l'étude de toute structure vibrante sans condition de baffle [Guyader et Loyau, 2000, Guyader, 2004a, Guyader, 2004b] : l'équation intégrale sur la FAQP proposée dans ce cas repose sur l'hypothèse d'indépendance statistique entre le noyau de Green et les champs de pression et de vitesse en surface. Cette hypothèse, qui est discutée dans [Guyader, 2004b], est en général vérifiée dans le domaine des moyennes et hautes fréquences. Trois types de sources sont introduits :

- les sources FACV (Frequency Averaged Cross Velocity) $S_{uu}(Q, Q') = \langle U(Q)U^*(Q') \rangle$, fonction du champ de vitesse U à la surface
- les sources FACP (Frequency Averaged Cross Pressure) $S_{pp}(Q, Q') = \langle p(Q)p^*(Q') \rangle$, fonction du champ de pression p à la surface
- les sources FACI (Frequency Averaged Cross Intensity) $S_{up}(Q, Q') = \langle p(Q)U^*(Q') \rangle$.

L'approche FAQP suppose que les sources FACV sont connues. Les sources FACP et FACI sont exprimées en fonction des sources FACV de la même façon que le champ de pression pariétal doit être préalablement calculé dans le cas de la BEM. Toutefois, les relations de frontière à introduire sont différentes : les sources FACI sont calculées à partir des sources FACV, puis les sources FACP sont calculées à partir des sources FACI. L'application de la méthode au cas d'une sphère pulsante montre que le problème des fréquences irrégulières subsiste et les méthodes de régularisation classiques doivent être utilisées de façon à s'affranchir de ces instabilités.

Une approche similaire est utilisée par Kim et Ih [Kim et Ih, 2001, Kim et Ih, 2002, Kim et Ih, 2003] pour mettre en œuvre une méthode d'éléments finis de frontière simplifiée (Simplified Boundary Element Method) : l'objectif de cette méthode est d'étendre le domaine d'application fréquentiel de la BEM. Les formulations utilisées, semblables à celles utilisées par Guyader, sont simplifiées en considérant que les produits des champs de pression ou d'accélération entre deux points de la surface rayonnante sont négligeables devant ceux calculés au même point (i.e. $S_{uu}(Q, Q')$, $Q \neq Q'$ est négligeable devant $S_{uu}(Q, Q)$). Cette hypothèse nécessite d'ajuster la taille des éléments du maillage de la structure à la longueur de corrélation du champ vibratoire, dans la mesure où cette hypothèse n'est plus vérifiée

lorsque les éléments choisis sont trop petits devant la longueur de corrélation. Il est montré que cette méthode ne présente plus de difficulté liée à l'existence de fréquences irrégulières au travers de l'étude d'une sphère partiellement vibrante [Kim et Ih, 2001, Kim et Ih, 2002] et d'un silencieux [Kim et Ih, 2003]. Les temps de calcul sont réduits, notamment grâce à l'utilisation d'un maillage plus grossier. Néanmoins, les écarts par rapport à des méthodes de référence telles que la BEM peuvent atteindre 20 à 30 % de sorte que cette approche permet d'estimer rapidement le bruit rayonné, mais l'erreur commise nécessite d'être réduite notamment en quantifiant les erreurs induites par la suppression des produits de champs entre deux positions.

Franzoni et al. [Franzoni et al., 2001, Rouse et Franzoni, 2004] puis Wang et al. [Wang et Vlahopoulos, 2002, Wang et al., 2004] ont également développé de nouvelles méthodes intégrales d'éléments de frontière basées sur des grandeurs énergétiques. Des sources infinitésimales, large-bande et décorrélées sont introduites à la frontière de la surface et l'amplitude de ces sources est calculée en résolvant un système d'équations sur les conditions d'intensité imposées aux frontières. L'hypothèse de décorrélation place ces méthodes à nouveau au rang de méthodes dédiées hautes fréquences.

L'approche développée par Franzoni et al. [Franzoni et al., 2001, Rouse et Franzoni, 2004] (Broadband Energy-Intensity Boundary Element Method) est la même que dans la méthode du transfert radiatif à la différence près que les quantités additionnées sont les pressions quadratiques au lieu des densités d'énergie. Les sources introduites sont supposées directives de façon à modéliser les effets de corrélation locaux (typiquement sur une distance inférieure à la longueur d'onde) ainsi que les phénomènes de réflexion spéculaire et/ou diffus. L'hypothèse de champ diffus, et de faible absorption n'est pas nécessaire. Les développements théoriques de la méthode sont présentés dans [Franzoni et al., 2001] ainsi qu'un exemple de mise en œuvre bidimensionnel. L'intérêt de la méthode par rapport à la méthode du transfert radiatif réside notamment dans la procédure de calcul des termes de directivité.

L'approche développée par Wang et al. [Wang et Vlahopoulos, 2002, Wang et al., 2004] est appelée Energy Boundary Element Analysis (EBEA). La démarche est similaire à celle mise en œuvre dans la méthode du transfert radiatif. Les moyennes d'ensemble de la densité d'énergie acoustique et de l'intensité acoustique sont écrites en fonction des moyennes d'ensemble des produits de vitesse et de pression en surface qui s'apparentent aux sources FACV, FACP et FACI précédemment introduites par Guyader, et Kim et Ih. Comme dans le cadre de la BEM simplifiée, les termes croisés sont négligés, traduisant l'hypothèse de décorrélation des sources. L'existence et l'unicité de la solution sont démontrées et par conséquent, le problème des fréquences irrégulières ne se présente pas dans le cadre de cette méthode.

1.6 Méthode des sources équivalentes énergétiques

La méthode des sources équivalentes énergétiques (Energy Source Simulation Method - ESSM) développée par Herrin et al. [Herrin et al., 2004] est une méthode pour prédire la densité d'énergie acoustique en introduisant des sources énergétiques équivalentes. La méthode est simi-

laire à la méthode des sources équivalentes basée sur le champ vibratoire mais elle est adaptée ici à des grandeurs énergétiques. L'intensité acoustique sur la frontière du domaine est approximée en superposant le champ émis par des sources connues placées à des positions arbitraires mais en dehors de la frontière en raison de la singularité des noyaux énergétiques. La contribution de chaque source est déterminée en minimisant l'écart entre les conditions d'intensité normale imposées à la surface de la structure et le champ émis par ces sources. Les résultats obtenus avec l'ESSM dans des cas bidimensionnels sont particulièrement prometteurs pour des problèmes d'acoustique intérieure, mais les erreurs sont plus importantes dans des problèmes d'acoustique extérieure. Les temps de calcul sont réduits par rapport à la BEM car le calcul est mené à la fréquence centrale d'un tiers d'octave et en introduisant un nombre réduit de sources. Une des critiques à apporter est que la directivité du champ acoustique ne peut être reproduite par cette méthode.

1.7 Méthodes hybrides

Les premières approches hybrides recensées sont très récentes. Langley et Bremner [Langley et Bremner, 1999] proposent une méthode hybride afin de coupler la méthode des éléments finis (FEM) et l'analyse statistique de l'énergie (SEA). Cette technique est au carrefour de plusieurs approches : la SEA, la théorie des structures floues, et l'approche de Belyaev. La réponse du système est décrite en termes de composantes de grandes et courtes longueurs d'onde. Les composantes grandes longueurs d'onde (composantes globales) sont décrites de manière déterministe, alors que les composantes courtes longueurs d'onde (composantes locales) sont décrites de manière statistique. La réponse associée aux composantes locales est déterminée à l'aide de la SEA. Des analogies avec les approches évoquées précédemment apparaissent : les composantes de grandes longueurs d'onde s'apparentent à la structure maître intervenant dans la théorie des structures floues, ou encore à la réponse lisse ('smooth response') de l'approche de Belyaev. Les composantes locales jouent le rôle de la structure floue. Cette méthode a été appliquée pour l'analyse vibratoire de systèmes complexes, mais il n'existe pas encore à notre connaissance d'application vibroacoustique. Lee et al. [Lee et al., 2001] s'intéressent à une méthode hybride permettant de coupler la méthode de diffusion de l'énergie appliquée à l'étude vibratoire d'une structure à la méthode des éléments finis de frontière (BEM). Le champ vibratoire pariétal est déterminé à partir de la densité d'énergie vibratoire. Toutefois, une question subsiste sur l'origine de la phase du champ de vitesse introduit. Enfin, Jayachandra et Bonilha [Jayachandran et Bonhila, 2002] proposent une méthode hybride couplant l'analyse statique de l'énergie (SEA) pour des prédictions de comportement vibratoire en hautes fréquences, et une technique de sommation modale acoustique pour prédire le champ acoustique rayonné en basses fréquences à l'intérieur d'un giravion. Les vibrations de l'armature et des panneaux constituant le châssis sont évaluées à partir d'un modèle SEA. La répartition spatiale de ces vibrations au sein de chaque panneau et les coefficients de couplage fluide/structure sont déterminés à l'aide d'approches stochastiques. La technique proposée s'applique dans des milieux clos dont les modes sont connus.

La méthode hybride que nous proposons se situe dans la continuité des méthodes des éléments finis de frontière énergétique et de la méthode des sources équivalentes énergétiques. Le premier point commun est que les variables de travail sont des grandeurs énergétiques, moyennées par bande de fréquence ou sur un ensemble. Le deuxième point commun est que ces méthodes introduisent des sources permettant de modéliser le rayonnement acoustique de la structure vibrante. La méthode hybride se propose de prédire ce rayonnement dans le domaine des hautes fréquences à partir de la connaissance du champ vibratoire : les équations de la méthode sont détaillées dans le paragraphe suivant.

2 Equations de la méthode hybride proposée

2.1 Décomposition en trois étapes

En l'absence de sources volumiques à l'intérieur du domaine acoustique Ω , le champ de densité d'énergie acoustique s'écrit dans la méthode du transfert radiatif en superposant les contributions issues de sources surfaciques de densité de puissance σ (W/m^2) situées à la frontière du domaine Γ (Eq. (III.39)) :

$$W(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}) G(\mathbf{q}, \mathbf{r}) d\Gamma, \quad (\text{V.6})$$

et l'intensité acoustique associée s'écrit :

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) d\Gamma, \quad (\text{V.7})$$

où \mathbf{u} est le vecteur unitaire d'émission du point source \mathbf{p} vers le point récepteur \mathbf{r} . On s'intéresse au régime stationnaire du champ acoustique, aussi la dépendance temporelle sera omise pour les relations de ce chapitre. On rappelle les formulations pour les noyaux énergétiques G et H en 3D :

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{e^{-mr}}{4\pi c r^2}, \quad (\text{V.8})$$

avec $r = |\mathbf{r} - \mathbf{p}|$ et,

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = c G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \mathbf{u}. \quad (\text{V.9})$$

Le principe de la méthode hybride consiste à écrire la contribution des sources surfaciques comme la somme de deux contributions issues d'une part de sources qui seront qualifiées d'*équivalentes* (σ_e), et d'autre part de sources qui seront dites *fictives* (σ_f) [Reboul et al., 2005] :

$$\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}) + \sigma_f(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \quad (\text{V.10})$$

Les sources équivalentes sont des sources réelles introduites pour reproduire le rayonnement acoustique de la structure vibrante en champ libre. Ce sont des propriétés intrinsèques de la structure. Les sources fictives n'ont en revanche pas d'existence physique, mais permettent de modéliser les phénomènes de diffusion des ondes (réflexion, absorption, diffraction) se

produisant sur les frontières du domaine acoustique.

La méthode hybride que nous proposons se divise en trois étapes :

- la structure vibrante est tout d’abord étudiée comme si celle-ci rayonnait en champ libre et les sources équivalentes sont déterminées,
- l’environnement acoustique de la structure, source de réflexions, absorptions, diffractions, est ensuite introduit avec les sources fictives adéquates,
- enfin, le champ acoustique en tout point du domaine est évalué en sommant les contributions de toutes les sources introduites.

Ces trois étapes sont détaillées dans les paragraphes suivants.

2.2 Calcul des sources équivalentes

La première étape de la méthode hybride consiste à introduire des sources équivalentes à la frontière du corps vibrant afin de reproduire le rayonnement acoustique lié aux vibrations de celui-ci. Pour cela, la structure est étudiée comme si celle-ci rayonnait en champ libre. Il s’agit d’évaluer le diagramme d’amplitude et de directivité de ces sources à partir de la connaissance du champ vibratoire pariétal. L’idée développée au cours de ce paragraphe est d’établir une analogie entre le calcul de la densité d’énergie à l’aide de formulations analytiques classiques telles que l’équation de Kirchhoff-Helmholtz, et l’équation pour la densité d’énergie (Eq. (V.6)) introduite dans la méthode du transfert radiatif.

2.2.1 Amplitudes

Densité d’énergie acoustique rayonnée en champ libre

D’après l’équation d’Euler :

$$\frac{\partial p(\mathbf{q})}{\partial n} = -\rho_0 \gamma_n(\mathbf{q}), \quad (\text{V.11})$$

et l’équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz (Eq. (V.5)) permet donc de relier le champ d’accélération normale γ_n en un point \mathbf{q} de la surface S du corps vibrant au champ de pression acoustique p en un point \mathbf{r} du fluide environnant,

$$p(\mathbf{r}) = \int_S \rho_0 \gamma_n(\mathbf{q}) g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) + p(\mathbf{q}) \frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial n} dS. \quad (\text{V.12})$$

On rappelle que $g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = e^{-jkr}/4\pi r$ est la fonction de Green en champ libre où $r = |\mathbf{r} - \mathbf{q}|$ est la distance entre les points source et récepteur, et $\partial/\partial n$ désigne la dérivée partielle dans la direction du vecteur unitaire normal \mathbf{n} , extérieur à la paroi vibrante. La densité d’énergie acoustique W peut être approximée en fonction du carré du champ de pression de la façon suivante :

$$W(\mathbf{r}) = \frac{|p(\mathbf{r})|^2}{2\rho_0 c^2}. \quad (\text{V.13})$$

Ainsi, en combinant les équations (V.12) et (V.13), la densité d'énergie acoustique s'écrit en sommant trois contributions,

$$\begin{aligned}
W(\mathbf{r}) &= \int_S \int_S \frac{1}{2\rho_0 c^2} p(\mathbf{q}) p^*(\mathbf{q}') \frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial n} \frac{\partial g^*(\mathbf{q}', \mathbf{r})}{\partial n} dS' dS \\
&+ \int_S \int_S \frac{\rho_0}{2c^2} \gamma_n(\mathbf{q}) \gamma_n^*(\mathbf{q}') g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) g^*(\mathbf{q}', \mathbf{r}) dS' dS \\
&+ \Re \left(\int_S \int_S \frac{1}{c^2} \gamma_n(\mathbf{q}) p^*(\mathbf{q}') g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \frac{\partial g^*(\mathbf{q}', \mathbf{r})}{\partial n} dS' dS \right),
\end{aligned} \tag{V.14}$$

où le symbole $*$ désigne la quantité conjuguée, et \Re la partie réelle.

Moyenne d'ensemble de la densité d'énergie

Il est alors pertinent de travailler avec la moyenne d'ensemble de la densité d'énergie acoustique (notée $\langle . \rangle$). L'opération de moyenne est appliquée dans la plupart des méthodes dédiées hautes fréquences qui reposent sur des moyennes fréquentielles, spatiales ou d'ensemble. L'utilisation de ces moyennes est liée à l'existence d'incertitudes sur les propriétés physiques et géométriques, les conditions aux limites, et parfois même sur les équations du mouvement du système considéré. Le comportement du système est particulièrement sensible à ces incertitudes, si bien qu'une prédiction déterministe exacte de ce comportement est contestable. La question qui se pose alors est de savoir quelles sont les variables aléatoires à introduire. Keane et Manohar [Keane et Manohar, 1993] introduisent l'aléa sur la masse volumique d'une structure. Mace [Mace, 1996, Wester et Mace, 1996, Mace, 1997] introduit l'aléa sur la phase des systèmes. Langley [Langley et Brown, 2004b, Langley et Brown, 2004a] introduit l'aléa sur les propriétés modales et s'intéresse aux propriétés statistiques des fréquences propres et déformées modales. Enfin, Viktorovitch [Viktorovitch et al., 1998, Viktorovitch et al., 1999, Viktorovitch et al., 2001] introduit l'aléa dans les paramètres géométriques du système que sont la position des frontières et le point d'application des efforts.

La moyenne d'ensemble et la moyenne fréquentielle sur une bande large, typiquement tiers d'octave ou octave, sont généralement considérées comme équivalentes [Mace, 1997]. Cette propriété est utilisée pour de nombreuses méthodes hautes fréquences [Wang et Vlahopoulos, 2002, Wang et al., 2004] car elle permet d'estimer la moyenne d'ensemble à partir d'un unique échantillon du système. On suppose ainsi que les effets des incertitudes sur plusieurs systèmes à une seule fréquence sont équivalents aux effets induits par une variation de fréquence sur un seul système.

Moyenne d'ensemble dans la méthode hybride

Dans la méthode hybride, les champs d'accélération et de pression pariétaux sont supposés aléatoires, et l'aléa est introduit dans la phase de ces grandeurs. Sous cette hypothèse, les fonctions de Green sont des fonctions déterministes. La moyenne d'ensemble de l'équation (V.14)

s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\langle W(\mathbf{r}) \rangle &= \int_S \int_S \frac{1}{2\rho_0 c^2} \langle p(\mathbf{q}) p^*(\mathbf{q}') \rangle \frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial n} \frac{\partial g^*(\mathbf{q}', \mathbf{r})}{\partial n} dS' dS \quad (\text{V.15}) \\
&+ \int_S \int_S \frac{\rho_0}{2c^2} \langle \gamma_n(\mathbf{q}) \gamma_n^*(\mathbf{q}') \rangle g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) g^*(\mathbf{q}', \mathbf{r}) dS' dS \\
&+ \Re \left(\int_S \int_S \frac{1}{c^2} \langle \gamma_n(\mathbf{q}) p^*(\mathbf{q}') \rangle g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \frac{\partial g^*(\mathbf{q}', \mathbf{r})}{\partial n} dS' dS \right).
\end{aligned}$$

L'hypothèse de champ lointain permet ensuite d'écrire que $kr \gg 1$ et $r \simeq r'$ où $r' = |\mathbf{r} - \mathbf{q}'|$, pour en déduire que $\frac{m}{2}(r + r') \simeq mr$. Il s'ensuit que les termes croisés de l'équation (V.15) impliquant la fonction de Green peuvent être évalués à partir de l'expression de la fonction :

$$g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

et de sa dérivée normale :

$$\frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial n} = -\left(jk + \frac{1}{r}\right) \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}$$

et :

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}}$$

pour s'écrire,

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) g^*(\mathbf{q}', \mathbf{r}) &= \frac{e^{-j(kr - k^* r')}}{16\pi^2 r r'} \\
&= \frac{e^{-jk_0(r-r')} e^{-\frac{m}{2}(r+r')}}{16\pi^2 r r'} \\
\frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial n} \frac{\partial g^*(\mathbf{q}', \mathbf{r})}{\partial n} &= \left(jk + \frac{1}{r}\right) \left(-jk^* + \frac{1}{r'}\right) \frac{e^{-j(kr - k^* r')}}{16\pi^2 r r'} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}'\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}'}) (\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}}) \\
&= \left(jk + \frac{1}{r}\right) \left(-jk^* + \frac{1}{r'}\right) \frac{e^{-jk_0(r-r')} e^{-\frac{m}{2}(r+r')}}{16\pi^2 r r'} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}'\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}'}) (\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}}) \\
g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \frac{\partial g^*(\mathbf{q}', \mathbf{r})}{\partial n} &= \left(-jk^* + \frac{1}{r'}\right) \frac{e^{-j(kr - k^* r')}}{16\pi^2 r r'} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}'\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}'}) \\
&= \left(-jk^* + \frac{1}{r'}\right) \frac{e^{-jk_0(r-r')} e^{-\frac{m}{2}(r+r')}}{16\pi^2 r r'} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}'\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}'})
\end{aligned}$$

pour se simplifier, sous l'hypothèse de champ lointain, en :

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) g^*(\mathbf{q}, \mathbf{r}) &\simeq \frac{e^{-jk_0(r-r')} e^{-mr}}{16\pi^2 r r'} \\
\frac{\partial g(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial n} \frac{\partial g^*(\mathbf{q}', \mathbf{r})}{\partial n} &\simeq k^2 \frac{e^{-jk_0(r-r')} e^{-mr}}{16\pi^2 r r'} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}'\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}'}) (\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}}) \\
g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \frac{\partial g^*(\mathbf{q}', \mathbf{r})}{\partial n} &\simeq -jk^* \frac{e^{-jk_0(r-r')} e^{-mr}}{16\pi^2 r r'} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}'\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}'})
\end{aligned}$$

L'idée consiste tout d'abord à réécrire l'équation (V.15) en isolant le noyau énergétique G :

$$\begin{aligned}
\langle W(\mathbf{r}) \rangle &= \int_S \frac{e^{-mr}}{4\pi cr^2} \left(\frac{k^2}{8\pi\rho_0 c} r e^{-jk_0 r} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}}) \int_S \langle p(\mathbf{q}) p^*(\mathbf{q}') \rangle \frac{e^{jk_0 r'}}{r'} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}'\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}'}) dS' \right) dS \\
&+ \int_S \frac{e^{-mr}}{4\pi cr^2} \left(\frac{\rho_0}{8\pi c} r e^{-jk_0 r} \int_S \langle \gamma_n(\mathbf{q}) \gamma_n^*(\mathbf{q}') \rangle \frac{e^{jk_0 r'}}{r'} dS' \right) dS \\
&+ \int_S \frac{e^{-mr}}{4\pi cr^2} \left(\Re \left(\frac{-jk^*}{4\pi c} r e^{-jk_0 r} \int_S \langle \gamma_n(\mathbf{q}) p^*(\mathbf{q}') \rangle \frac{e^{jk_0 r'}}{r'} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}'\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}'}) dS' \right) \right) dS
\end{aligned} \tag{V.16}$$

$\mathbf{n}_{\mathbf{q}}$ (resp : $\mathbf{n}_{\mathbf{q}'}$) est la normale extérieure à la surface vibrante au point \mathbf{q} (resp : \mathbf{q}'). $\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}$ (resp : $\mathbf{u}_{\mathbf{q}'\mathbf{r}}$) est le vecteur unitaire depuis le point source \mathbf{q} (resp : \mathbf{q}') vers le point récepteur \mathbf{r} .

Puis on écrit que la densité d'énergie est un nombre réel qui est donc égal à sa partie réelle :

$$\langle W(\mathbf{r}) \rangle = \Re(\langle W(\mathbf{r}) \rangle) \tag{V.17}$$

Cette dernière évidence mathématique est utile pour s'assurer que les amplitudes des sources introduites sont également des nombres réels.

Introduisons les fonctions de corrélation spatiale des champs de pression et d'accélération, $R_{pp}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \langle p(\mathbf{q}) p^*(\mathbf{q}') \rangle$, $R_{\gamma\gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \langle \gamma_n(\mathbf{q}) \gamma_n^*(\mathbf{q}') \rangle$ et $R_{\gamma p}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \langle \gamma_n(\mathbf{q}) p^*(\mathbf{q}') \rangle$. En comparant la densité d'énergie donnée par l'équation (V.16) à la densité d'énergie introduite dans la méthode du transfert radiatif (Eq. (V.6)), chaque source équivalente s'écrit en sommant les contributions de trois types de sources :

une source de pression d'amplitude σ_{pp}

$$\sigma_{pp}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \Re \left(\frac{k^2}{8\pi\rho_0 c} r e^{-jk_0 r} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}}) \int_S R_{pp}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \frac{e^{jk_0 r'}}{r'} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}'\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}'}) dS' \right) \tag{V.18}$$

une source de vitesse (ou accélération) d'amplitude $\sigma_{\gamma\gamma}$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \Re \left(\frac{\rho_0}{8\pi c} r e^{-jk_0 r} \int_S R_{\gamma\gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \frac{e^{jk_0 r'}}{r'} dS' \right) \tag{V.19}$$

une source d'intensité d'amplitude $\sigma_{\gamma p}$

$$\sigma_{\gamma p}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \Re \left(\frac{-jk^*}{4\pi c} r e^{-jk_0 r} \int_S R_{\gamma p}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \frac{e^{jk_0 r'}}{r'} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}'\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}'}) dS' \right) \tag{V.20}$$

La densité d'énergie acoustique s'écrit en sommant les contributions de toutes ces sources :

$$\langle W(\mathbf{r}) \rangle = \int_S (\sigma_{pp}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) + \sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) + \sigma_{\gamma p}(\mathbf{q}, \mathbf{r})) G(\mathbf{q}, \mathbf{r}) dS, \tag{V.21}$$

La démarche d'obtention de ces sources s'apparente à celle mise en œuvre dans la méthode FAQP [Guyader et Loyau, 1996, Guyader et Loyau, 2000, Guyader, 2004a, Guyader, 2004b] qui repose toutefois sur le calcul de la moyenne fréquentielle et non d'ensemble. Malgré tout, la

moyenne fréquentielle est souvent considérée comme équivalente à la moyenne d'ensemble, de sorte que les sources équivalentes telles que présentées jusqu'ici sont alors équivalentes aux sources introduites dans la FAQP. Par rapport à la BEM simplifiée [Kim et Ih, 2001, Kim et Ih, 2002, Kim et Ih, 2003], et à l'EBEA [Wang et Vlahopoulos, 2002, Wang et al., 2004], les produits croisés entre les champs pariétaux évalués en deux points \mathbf{q} et \mathbf{q}' ne sont pas négligés : ces termes traduisent des effets d'interactions entre les sources surfaciques à l'origine des phénomènes de court-circuit acoustique et des modes de bord, de coin et de surface [Maidanik, 1974].

2.2.2 Approximation de type rayon

A ce niveau, les amplitudes des sources équivalentes introduites (Eqs. (V.18)-(V.20)) dépendent non seulement de la position du point source \mathbf{q} à la surface, mais aussi de la position du point récepteur \mathbf{r} . Ces sources ne peuvent donc être introduites telles quelles dans la méthode du transfert radiatif. En effet, le paragraphe III.2.5.1 a permis de montrer que celle-ci s'apparente à une méthode d'acoustique géométrique de type rayon. Dès lors, d'après le principe de conservation de l'énergie dans un tube de rayons, l'amplitude des sources introduites dans la méthode doit être constante le long d'un rayon et ne peut alors dépendre, en dehors de la position de la source, que de la direction d'émission (paragraphe IV.1.1.1). Il s'avère donc nécessaire de modifier les équations proposées de façon à respecter cette condition. Pour cela, la différence de chemin acoustique $r - r'$ est évaluée en champ lointain. La distance du point source \mathbf{q} au point récepteur \mathbf{r} s'écrit comme (Fig. V.2) :

$$r'^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \Theta, \quad (\text{V.22})$$

où $d = |\mathbf{q}' - \mathbf{q}|$ est la distance entre les points sources \mathbf{q} et \mathbf{q}' et Θ est l'angle d'émission au point \mathbf{q} .

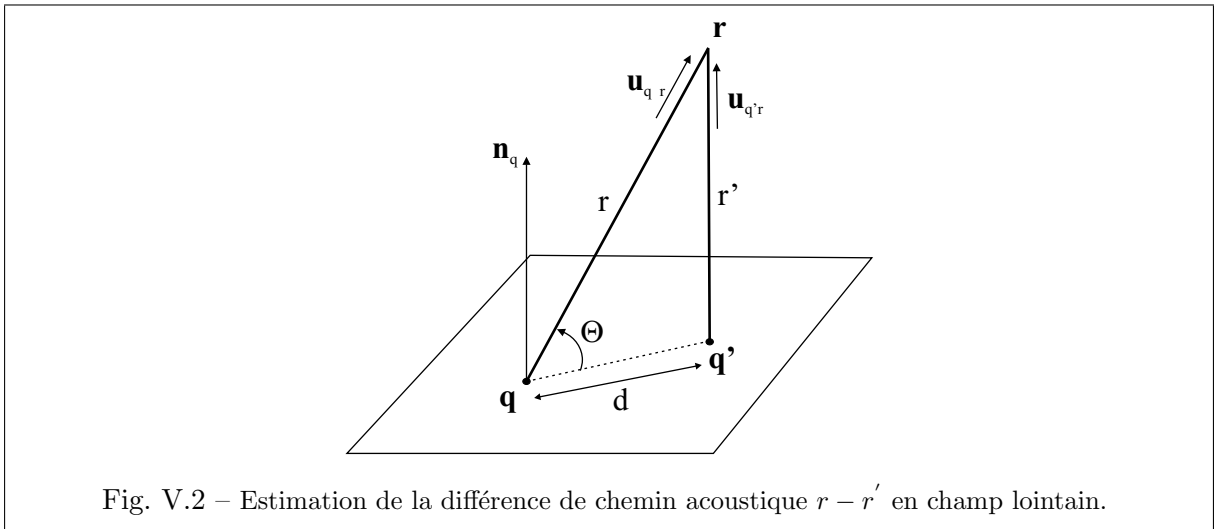


Fig. V.2 – Estimation de la différence de chemin acoustique $r - r'$ en champ lointain.

En champ lointain, $r \gg d$, de sorte que la relation précédente se simplifie :

$$r'^2 \simeq r^2 - 2rd \cos \Theta \simeq r^2 \left(1 - 2 \frac{d}{r} \cos \Theta\right). \quad (\text{V.23})$$

En considérant le terme $1 - 2\frac{d}{r}\cos\Theta$ comme le développement limité au premier ordre de $(1 - \frac{d}{r}\cos\Theta)^2$, la différence de chemin acoustique s'écrit :

$$r' \simeq r - d \cos \Theta. \quad (\text{V.24})$$

Cette relation est strictement équivalente à la relation obtenue en supposant que des ondes planes sont émises aux points \mathbf{q} et \mathbf{q}' (Fig. V.3).

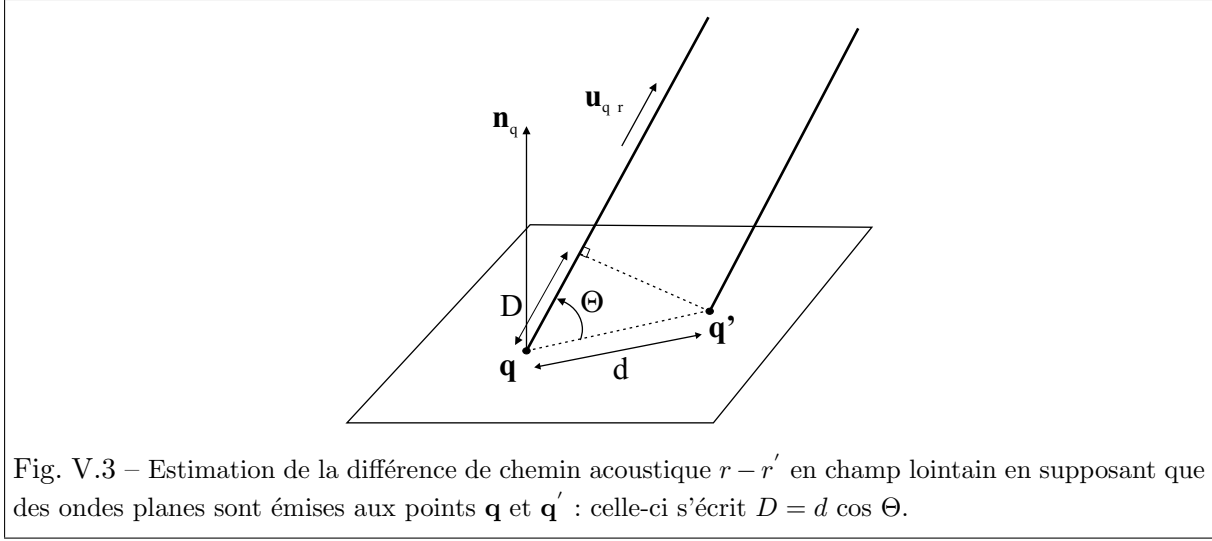


Fig. V.3 – Estimation de la différence de chemin acoustique $r - r'$ en champ lointain en supposant que des ondes planes sont émises aux points \mathbf{q} et \mathbf{q}' : celle-ci s'écrit $D = d \cos \Theta$.

Finalement, en champ lointain, $r \simeq r'$ et en évoquant l'hypothèse des ondes planes $\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}} = \mathbf{u}_{\mathbf{q}'\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}'}$. Les amplitudes σ_{pp} , $\sigma_{\gamma\gamma}$ et $\sigma_{p\gamma}$ s'écrivent alors :

$$\sigma_{pp}(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) = \Re \left(\frac{k^2}{8\pi\rho_0 c} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}})^2 \int_S R_{pp}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') e^{-jk_0 d \cos \Theta} dS' \right) \quad (\text{V.25})$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) = \Re \left(\frac{\rho_0}{8\pi c} \int_S R_{\gamma\gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') e^{-jk_0 d \cos \Theta} dS' \right) \quad (\text{V.26})$$

$$\sigma_{\gamma p}(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) = \Re \left(\frac{-jk^*}{4\pi c} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}}) \int_S R_{\gamma p}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') e^{-jk_0 d \cos \Theta} dS' \right) \quad (\text{V.27})$$

Les amplitudes de ces sources ne dépendent effectivement que de la position de la source \mathbf{q} et de la direction d'émission en ce point $\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}$, et sont donc adaptées à la mise en œuvre de la méthode du transfert radiatif. La densité d'énergie acoustique s'écrit en sommant les contributions de toutes ces sources :

$$W_e(\mathbf{r}) = \int_S \sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) G(\mathbf{q}, \mathbf{r}) dS, \quad (\text{V.28})$$

où :

$$\sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) = \sigma_{pp}(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) + \sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) + \sigma_{\gamma p}(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}), \quad (\text{V.29})$$

et l'intensité acoustique associée :

$$\mathbf{I}_e(\mathbf{r}) = \int_S \sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) dS. \quad (\text{V.30})$$

2.2.3 Interprétation physique

Les amplitudes des sources équivalentes peuvent être reliées à l'intensité normale à la surface du corps vibrant. En effet, considérons une sphère S_ε de rayon ε entourant le point source \mathbf{q} (Fig. V.4). La puissance infinitésimale dP_{emit} émise par la surface élémentaire dS autour du point \mathbf{q} dans l'angle solide $d\alpha$ est le flux d'intensité émis par la source $\sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) dS$ et traversant la portion de la sphère décrite par l'angle solide $dS_\varepsilon = \varepsilon^2 d\alpha$:

$$\begin{aligned} dP_{\text{emit}} &= \int_{S_\varepsilon} d\mathbf{I}(\mathbf{q}) \cdot d\mathbf{S}_\varepsilon \\ &= \int_{S_\varepsilon} \sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) dS \frac{e^{-m\varepsilon}}{4\pi\varepsilon^2} dS_\varepsilon \\ &= \frac{e^{-m\varepsilon}}{4\pi} dS \int_{\mathcal{U}} \sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) d\alpha. \end{aligned} \quad (\text{V.31})$$

\mathcal{U} désigne l'ensemble des directions $\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}$ dans l'hémisphère supérieur au point \mathbf{q} .

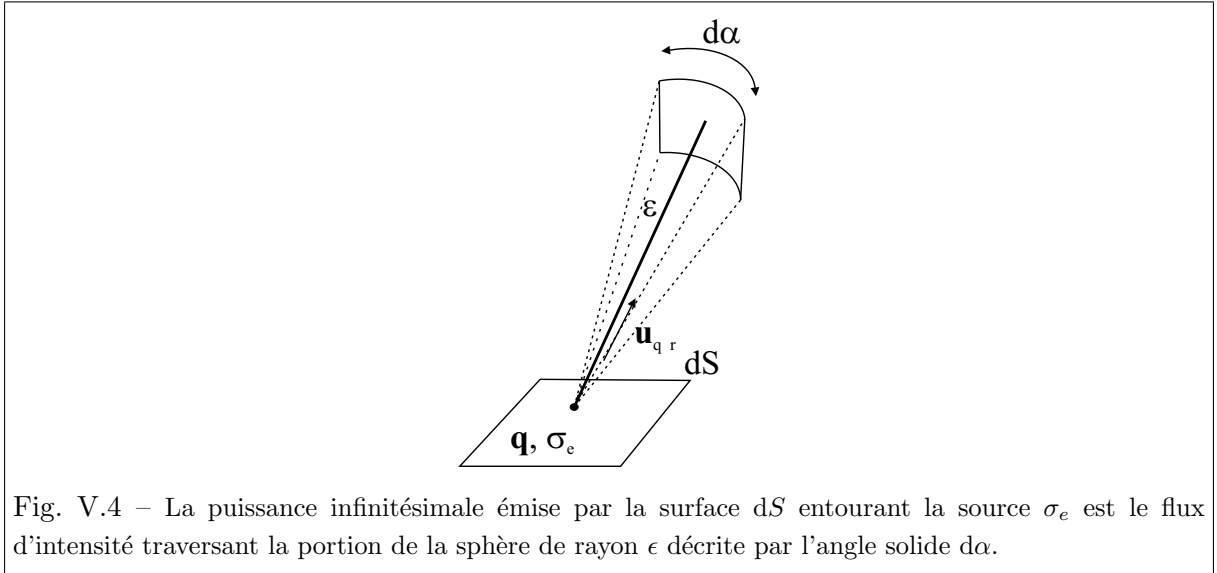


Fig. V.4 – La puissance infinitésimale émise par la surface dS entourant la source σ_e est le flux d'intensité traversant la portion de la sphère de rayon ε décrite par l'angle solide $d\alpha$.

En prenant la limite lorsque ε tend vers 0,

$$dP_{\text{emit}} = \frac{1}{4\pi} dS \int_{\mathcal{U}} \sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) d\alpha. \quad (\text{V.32})$$

Or, la puissance infinitésimale émise lorsque ε tend vers 0 s'écrit également en fonction de l'intensité normale I_n au point \mathbf{q} comme :

$$dP_{\text{emit}} = \langle I_n(\mathbf{q}) \rangle dS. \quad (\text{V.33})$$

Finalement, la relation suivante peut être établie entre les amplitudes des sources équivalentes et l'intensité normale à la surface du corps vibrant :

$$\langle I_n(\mathbf{q}) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{U}} \sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) d\alpha. \quad (\text{V.34})$$

2.2.4 Implémentation numérique

La surface S du corps vibrant est divisée en n éléments triangulaires ou quadrilatères. Une source équivalente est introduite au barycentre \mathbf{q}_k de chaque élément k . L'amplitude de chaque source sur un élément est supposée constante et est notée $\sigma_{e,k}$, mais dépend de la direction d'émission Θ_k du point \mathbf{q}_k vers le point récepteur \mathbf{r} . Le calcul des sources de pression, de vitesse et d'intensité repose sur le calcul d'une intégrale surfacique. Cette intégrale est évaluée par une méthode de quadrature s'appuyant sur des points de Gauss choisis sur chaque élément. Prenons le cas des sources de vitesse $\sigma_{\gamma\gamma}$, leur contribution à la source $\sigma_{e,k}$ s'écrit :

$$\sigma_{\gamma\gamma,k}(\Theta_k) = \Re \left(\frac{\rho}{8\pi c} \sum_{k'=1}^n \sum_{l=1}^{n_{k',x}} \sum_{m=1}^{n_{k',y}} |J_{l,m}| W_l W_m R_{\gamma\gamma}(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{l,m}) e^{-j k_0 d_{l,m} \cos \Theta_k} \right). \quad (\text{V.35})$$

$|J_{l,m}|$ et (W_l, W_m) sont respectivement le Jacobien et le poids au point d'intégration $\mathbf{q}_{l,m}$ sur l'élément k' . $d_{l,m} = |\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{l,m}|$ est la distance entre \mathbf{q}_k et $\mathbf{q}_{l,m}$. $n_{k',x}$ et $n_{k',y}$ désignent le nombre de points de Gauss selon chaque dimension de l'élément k' (surface d'intégration). Notons qu'il est nécessaire de connaître les champs pariétaux aux points d'intégration $\mathbf{q}_{l,m}$. On appelle *maillage structure* le maillage sur lequel les champs de vitesse et de pression sont connus, et *maillage acoustique* le maillage associé aux sources équivalentes. Les champs de vitesse et de pression en un noeud du maillage acoustique sont tout d'abord calculés en moyennant les champs sur les noeuds du maillage structure situés à proximité. Les champs au point d'intégration $\mathbf{q}_{l,m}$ sont ensuite évalués en utilisant les fonctions de forme connues sur chaque élément. Il reste à définir un critère de maillage acoustique pour la mise en œuvre de la méthode : cette question est abordée d'un point de vue numérique dans la première application concernant l'étude d'une plaque simple (paragraphe 3.1).

2.2.5 Evaluation des champs pariétaux

Le calcul des sources équivalentes nécessite non seulement de connaître le champ vibratoire pariétal mais également le champ de pression pariétal. Ce problème est similaire à celui rencontré dans la méthode des éléments finis de frontière qui nécessite donc de résoudre dans un premier temps l'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz sur la frontière du domaine pour déterminer le champ de pression pariétal à partir de la connaissance du champ vibratoire, puis de calculer le champ de pression en tout point du domaine à partir des données de surface. Une des étapes du calcul consiste donc à écrire des équations intégrales de surface. Cette étape existe également dans la méthode FAQP [Guyader et Loyau, 1996, Guyader et Loyau, 2000, Guyader, 2004a, Guyader, 2004b] et dans la BEM simplifiée [Kim et Ih, 2001, Kim et Ih, 2002, Kim et Ih, 2003]. Dans ce cas, deux équations intégrales de surface sont nécessaires car seule la source FACV liée au champ de vitesse est connue, et il s'agit de relier la source FACP liée au champ de pression, et la source FACI liée au champ d'intensité, à la source FACV (paragraphe 1.5).

Dans le cadre de la méthode hybride, la stratégie adoptée est différente. Cette stratégie dépend de l'origine du champ vibratoire de surface qui constitue, dans tous les cas, la donnée de départ.

Si le champ vibratoire est issu de mesures, il s'agit alors d'opter pour une technique expérimentale permettant de mesurer simultanément le champ de pression et le champ de vitesse pariétaux. Le principe de la mesure de l'intensité acoustique par la méthode des deux microphones permet ces mesures simultanées.

Si le champ vibratoire est issu de calculs ou de mesures vélocimétriques, il reste à évaluer le champ de pression pariétal. Pour cela, la stratégie mise en œuvre repose sur la résolution de l'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz sur la frontière du domaine. On rappelle que pour l'évaluation des sources équivalentes, seule la structure vibrante est prise en compte comme si celle-ci rayonnait en champ libre. Par conséquent, la résolution numérique de l'équation de surface nécessite de ne mailler que la structure vibrante, et donc le maillage comprend bien moins d'éléments que le maillage à introduire pour résoudre le problème acoustique complet par la méthode des éléments finis de frontière.

En guise d'illustration, ces deux méthodes sont mises en œuvre dans le cadre de cette thèse pour évaluer les champs à la surface d'une plaque raidie (paragraphes 4.1.3 et 4.1.4).

2.2.6 Cas d'une structure bafflée

Dans le cas où la structure est bafflée, la démarche présentée aux paragraphes 2.2.1 et 2.2.2 s'applique à l'équation intégrale de Rayleigh au lieu de l'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz [Reboul et al., 2004]. L'équation intégrale de Rayleigh relie le champ de pression acoustique p en un point \mathbf{r} du fluide environnant au seul champ d'accélération normale γ_n en un point \mathbf{q} de la surface S du corps vibrant :

$$p(\mathbf{r}) = \int_S \rho_0 \gamma_n(\mathbf{q}) g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) dS, \quad (\text{V.36})$$

où la fonction de Green s'écrit à présent $g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = e^{-jk_r r} / 2\pi r$. Les seules sources équivalentes à introduire sont alors les sources de vitesse $\sigma_{\gamma\gamma}$ et leur amplitude est donnée par :

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) = \Re \left(\frac{\rho_0}{2\pi c} \int_S R_{\gamma\gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') e^{-jk_0 d \cos \Theta} dS' \right). \quad (\text{V.37})$$

La densité d'énergie acoustique s'écrit :

$$W(\mathbf{r}) = \int_S \sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) G(\mathbf{q}, \mathbf{r}) dS, \quad (\text{V.38})$$

et l'intensité acoustique associée :

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \int_S \sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{r}}) \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) dS. \quad (\text{V.39})$$

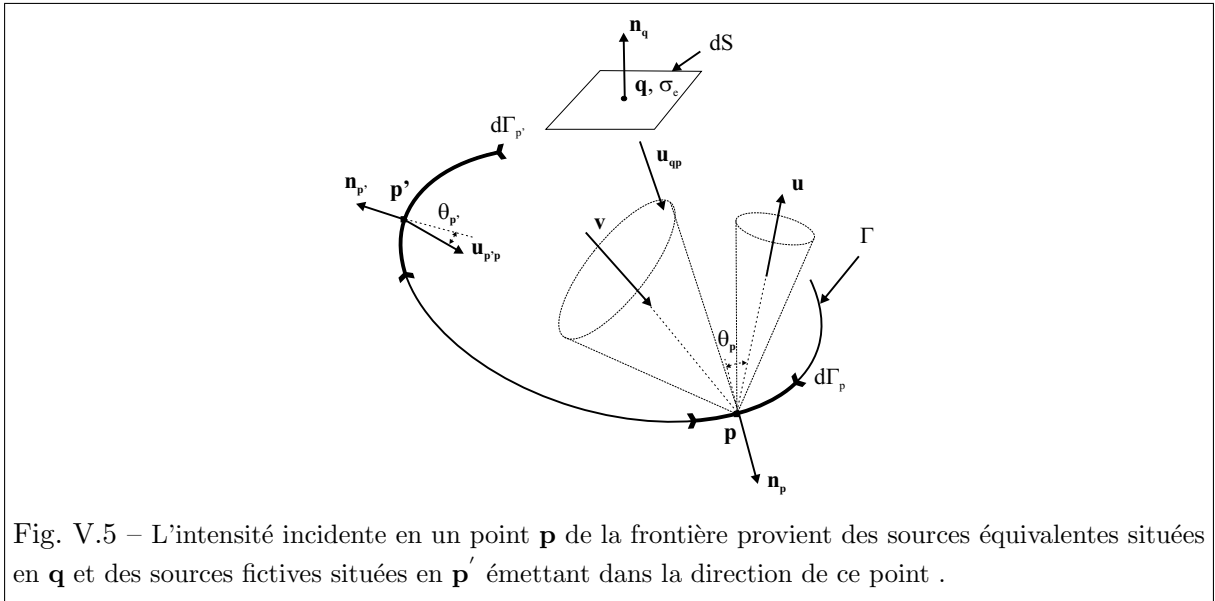
2.3 Calcul des sources fictives

Une fois les sources équivalentes déterminées, l'environnement acoustique du corps vibrant est maintenant pris en compte et les sources fictives sont introduites pour modéliser les phénomènes acoustiques se produisant sur les frontières du domaine. D'après le paragraphe III.2 dédié à la méthode du transfert radiatif et l'annexe A, les phénomènes de réflexion diffuse ou spéculaire et de transmission peuvent être pris en compte, et le travail présenté au chapitre IV permet à présent de prendre également en compte les phénomènes de diffraction. Afin de rester dans la logique du mémoire, nous nous intéressons à l'introduction de sources fictives pour modéliser les phénomènes de réflexion diffuse.

Les sources fictives émettent l'énergie selon la loi de Lambert de sorte que leurs amplitudes σ_f s'écrivent :

$$\sigma_f(\mathbf{p}, \mathbf{u}_{\mathbf{p}\mathbf{r}}) = \sigma_f(\mathbf{p}) \cos \theta_p, \quad (\text{V.40})$$

où θ_p est l'angle entre la direction d'émission $\mathbf{u}_{\mathbf{p}\mathbf{r}}$ et la normale au point \mathbf{p} . Il reste maintenant à établir une équation sur les inconnues σ_f , et appliquer pour cela la méthode du transfert radiatif. Cette équation est obtenue en réalisant un bilan de puissance sur la frontière Γ du domaine. La démarche est similaire à la démarche mise en œuvre au paragraphe III.2.



L'intensité incidente en un point \mathbf{p} de la frontière provient des sources équivalentes σ_e situées au point \mathbf{q} sur le corps vibrant S et émettant dans la direction $\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}$ vers \mathbf{p} , et des sources fictives σ_f situées au point \mathbf{p}' sur la frontière Γ et émettant dans la direction $\mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$ vers \mathbf{p} :

$$I_{\text{inc}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) dv = \int_{(\mathbf{p}, dv)} \sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}) H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) dS + \int_{(\mathbf{p}, dv)} \sigma_f(\mathbf{p}') \cos \theta_{p'} H(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\Gamma \quad (\text{V.41})$$

où l'intégration est menée sur le cône d'incidence $(\mathbf{p}, d\nu)$ de sommet \mathbf{p} et d'angle au sommet $d\nu$. D'après l'équation (III.46), l'intensité émise dans la direction \mathbf{u} s'écrit :

$$I_{\text{emit}}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \frac{\sigma_f(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{\gamma_0 \cos \theta_p} = \frac{\sigma_f(\mathbf{p})}{\gamma_0}. \quad (\text{V.42})$$

En appliquant l'équation (III.30) reliant les intensités incidente et émise par le coefficient de réflectivité dans le cas de la réflexion diffuse, l'équation suivante sur les inconnues σ_f est établie :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_f(\mathbf{p})}{4} &= \int_S R(\mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}) \sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}) \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p}} dS \\ &+ \int_{\Gamma} R(\mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) \sigma_f(\mathbf{p}') \cos \theta_{p'} \mathbf{H}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p}} d\Gamma_{p'}. \end{aligned} \quad (\text{V.43})$$

Il s'agit d'une équation de Fredholm de seconde espèce sur σ_f similaire à l'équation (III.56) : cette équation est résolue à l'aide d'une méthode de collocation.

2.4 Calcul du champ acoustique

D'après l'hypothèse de décorrélation des sources appliquée dans la méthode du transfert radiatif, la densité d'énergie acoustique en un point \mathbf{r} s'écrit finalement en sommant les contributions énergétiques issues des sources équivalentes σ_e et des sources fictives σ_f :

$$W(\mathbf{r}) = \int_S \sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}) G(\mathbf{q}, \mathbf{r}) dS + \int_{\Gamma} \sigma_f(\mathbf{p}) \cos \theta_p G(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\Gamma_p \quad (\text{V.44})$$

et l'intensité acoustique associée s'écrit :

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \int_S \sigma_e(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) dS + \int_{\Gamma} \sigma_f(\mathbf{p}) \cos \theta_p \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\Gamma_p. \quad (\text{V.45})$$

3 Application au cas d'une plaque simple

L'application au cas d'une plaque simple a pour objectif d'évaluer le nombre de sources équivalentes à introduire pour reproduire le champ acoustique rayonné en champ libre. Ce cas d'étude académique est également l'occasion de vérifier l'équation (V.34) reliant l'intensité normale et l'amplitude des sources équivalentes.

La plaque est carrée de côté 400 mm, simplement appuyée sur ses bords, et insérée dans un baffle rigide (Fig. V.6). La plaque est en aluminium ($E = 0,72 \cdot 10^{11}$ Pa, $\rho = 2700$ kg.m³, $\nu = 0,3$). Une force d'amplitude unitaire est appliquée au centre de la plaque. En choisissant un nombre impair d'éléments de maillage suivant les deux dimensions de la plaque, cette force sera toujours localisée au centre d'un pavé et les tests numériques seront peu affectés par la position de l'excitation.

La plaque étant bafflée, les seules sources à introduire sont donc les sources de vitesse $\sigma_{\gamma\gamma}$ et leur amplitude est calculée en appliquant l'équation (V.37). Leur calcul nécessite de connaître le champ d'accélération pariétal. Celui-ci est évalué numériquement en utilisant les déformées

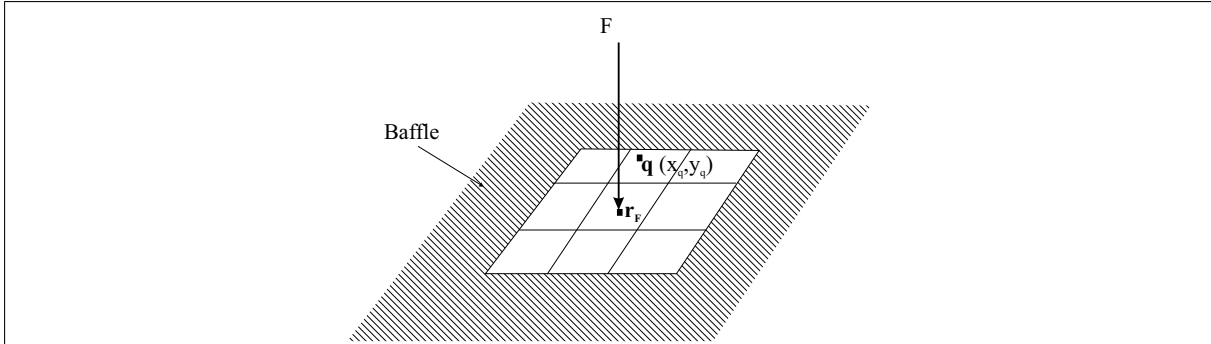


Fig. V.6 – Etude d’une plaque simple bafflée appuyée sur tout son pourtour : une force unitaire est appliquée au centre de la plaque de sorte qu’en choisissant un nombre impair d’éléments de maillage, les tests numériques seront peu affectés par la position de l’excitation.

modales et les pulsations propres connues analytiquement dans le cas d’une plaque rectangulaire appuyée sur ses bords. Le champ d’accélération au point de coordonnées $\mathbf{q} = (x_q, y_q)$ s’écrit alors par superposition modale sous la forme :

$$\gamma_n(\mathbf{q}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{mn} \varphi_{mn}(\mathbf{q}). \quad (\text{V.46})$$

$\gamma_{mn} = \frac{4F}{M} \frac{-\omega^2 \varphi_{mn}(\mathbf{r}_F)}{\omega_{mn}^2 - \omega^2 + j\eta_{mn}\omega\omega_{mn}}$ est l’amplitude complexe du mode (m, n) qui dépend de l’amplitude F , de la position \mathbf{r}_F , et de la fréquence ω de la force excitatrice. M est la masse de la plaque. ω_{mn} et η_{mn} sont respectivement la pulsation propre et l’amortissement du mode (m, n) . $\varphi_{mn}(\mathbf{q}) = \sin(\frac{m\pi x_q}{l_x}) \sin(\frac{n\pi y_q}{l_y})$ est la déformée modale associée, l_x est la longueur de la plaque, l_y sa largeur. Le champ acoustique émis par la plaque simple en champ libre est calculé à l’aide des sources équivalentes à partir de l’équation (V.38).

3.1 Etude d’un critère de maillage

On rappelle que l’implémentation numérique de la méthode hybride nécessite de diviser la surface du corps vibrant en n éléments. Une source équivalente est introduite au barycentre de chaque élément. Nous nous proposons ici d’évaluer l’influence de la taille du maillage utilisé. Six tailles de maillage sont testées comprenant 9×9 , 13×13 , 17×17 , 21×21 , 25×25 , 29×29 éléments. Pour des critères en $\lambda/2$, $\lambda/4$ et $\lambda/6$, ces six maillages conduisent aux fréquences limites d’étude énoncées dans la table V.1.

L’étude est menée par tiers d’octave centré entre 630 Hz et 5 000 Hz. L’indicateur retenu est le niveau de bruit L_p calculé au point (1 m; 1,5 m; 1,7 m) dans le repère dont l’origine est en un coin de la plaque. Le résultat obtenu est comparé au résultat BEM de référence réalisé avec SYSNOISE et correspondant à la moyenne par tiers d’octave de calculs effectués tous les 10 Hz (Fig. V.7). Il apparaît que le nombre de sources, et donc d’éléments, à utiliser augmente avec la fréquence. D’après les fréquences limites données dans la table V.1, un critère en $\lambda/4$ semble satisfaisant. Ce critère sera retenu pour les études suivantes.

Maillage	Taille d'un élément	$\lambda/2$	$\lambda/4$	$\lambda/6$
9×9 éléments	0,044 mm	3830 Hz	1915 Hz	1276 Hz
13×13 éléments	0,031 mm	5520 Hz	2760 Hz	1840 Hz
17×17 éléments	0,024 mm	7234 Hz	3617 Hz	2411 Hz
21×21 éléments	0,019 mm	8947 Hz	4474 Hz	2982 Hz
25×25 éléments	0,016 mm	10 625 Hz	5312 Hz	3542 Hz
29×29 éléments	0,014 mm	12 320 Hz	6160 Hz	4106 Hz

Tab. V.1 – Fréquences limites d'étude en Hz selon des critères en $\lambda/2$, $\lambda/4$, $\lambda/6$ pour les 6 maillages utilisés.

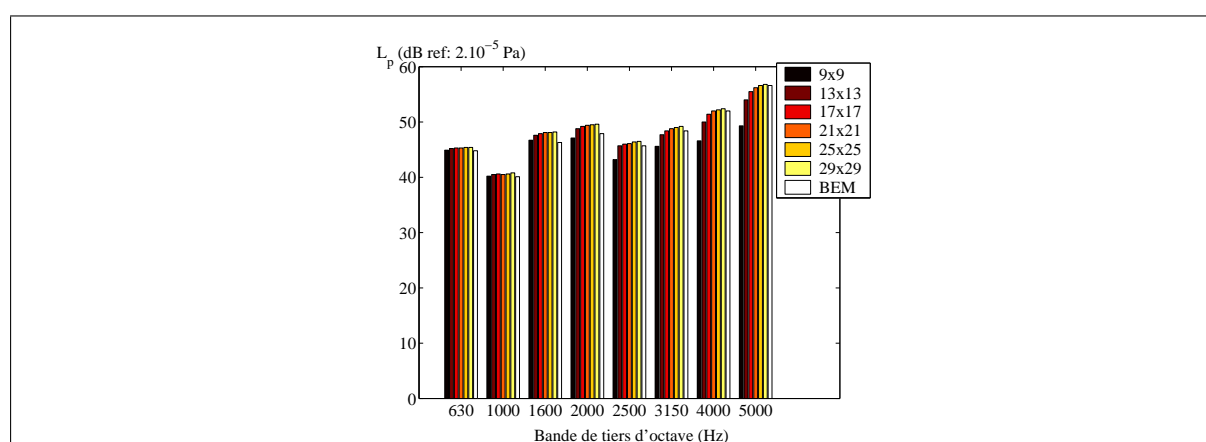
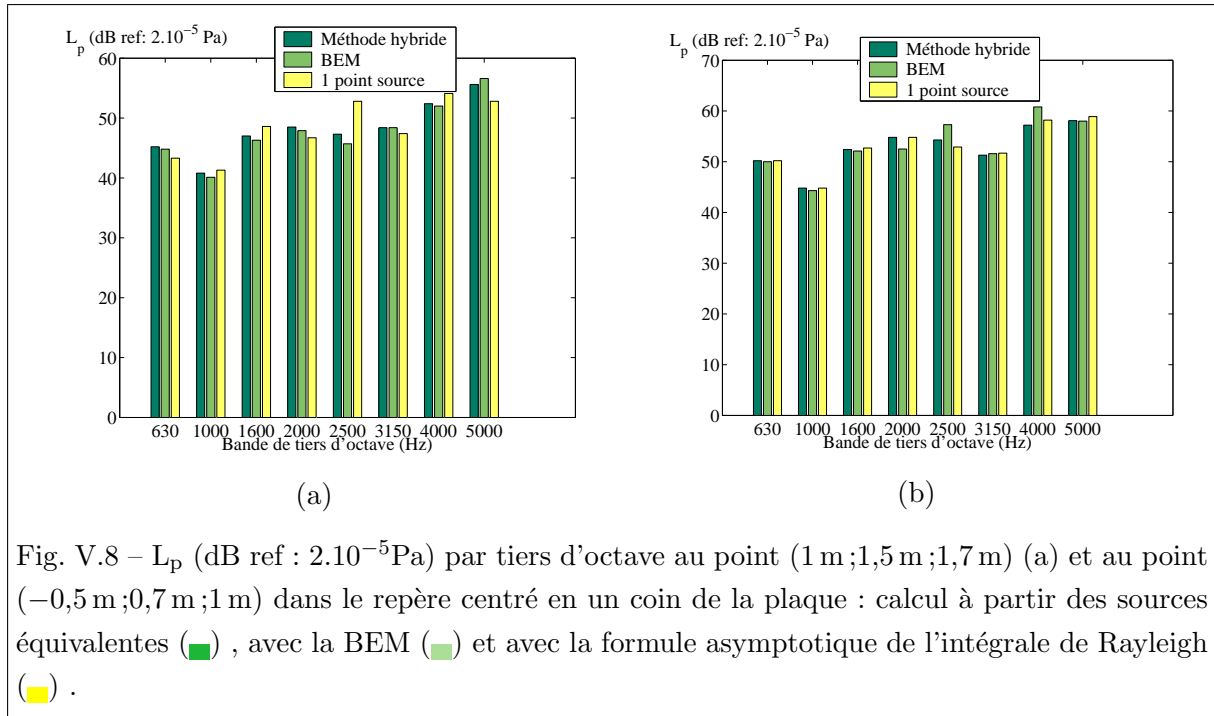


Fig. V.7 – L_p (dB ref : 2.10^{-5} Pa) par tiers d'octave au point (1 m ;1,5 m ;1,7 m) dans le repère centré en un coin de la plaque : calcul pour 6 tailles de maillage comprenant 9×9 , 13×13 , 17×17 , 21×21 , 25×25 , 29×29 éléments et comparaison avec le résultat de référence BEM.

Les figures V.8(a) et V.8(b) comparent le L_p aux points (1 m ;1,5 m ;1,7 m) et (-0,5 m ;0,7 m ;1 m) calculé à partir des sources équivalentes respectant le critère en $\lambda/4$, calculé avec la BEM, et calculé à l'aide de l'approximation en champ lointain consistant à assimiler le corps vibrant à un unique point source (Annexe D). Les sources équivalentes permettent d'estimer le bruit rayonné par la plaque de manière plus exacte que l'approximation en champ lointain à un unique point source.

3.2 Etude de la relation entre l'intensité normale et les sources équivalentes

La validité de l'équation (V.34) reliant l'intensité normale et l'amplitude des sources équivalentes est vérifiée sur le tiers d'octave centré sur 2000 Hz. L'intensité normale à la surface de la plaque est issue de calculs réalisés avec SYSNOISE tous les 10 Hz sur le tiers d'octave et moyennés. Les sources équivalentes sont introduites sur un maillage respectant le critère en $\lambda/4$. Pour chaque point source, l'intégrale du membre de droite de l'équation (V.34) est calculée en moyennant l'intégrande sur une demi-sphère discrétisée en 36 points selon l'angle azimuthal ϕ compris



entre 0 et 2π et 9 points selon l’angle d’élévation θ compris entre 0 et $\pi/2$. Les figures V.9(a) et V.9(b) représentent les cartes respectivement obtenues à partir de l’intensité normale et à partir de l’intégration des sources équivalentes sur toutes les directions d’émission. La figure V.9(c) présente une comparaison linéaire des deux calculs selon une diagonale de la plaque. Le bon accord entre tous ces résultats permet de valider l’équation (V.34).

4 Application au cas d’une plaque raidie

La méthode est testée ici dans le cas d’une structure non bafflée. La structure choisie est une plaque munie de raidisseurs semblables à ceux que l’on peut rencontrer sur les carters de boîte de vitesses. Une photo de la plaque est présentée figure V.10. Il s’agit d’une plaque en aluminium ($E = 0,72.10^{11}$ Pa, $\rho = 2700$ kg.m³, $\nu = 0,3$). Elle est rectangulaire de longueur $l_x = 400$ mm, de largeur $l_y = 230$ mm, et d’épaisseur $h = 10$ mm au niveau des raidisseurs et 5 mm partout ailleurs. La fréquence critique dans l’air de la plaque parallélépipédique équivalente mais d’épaisseur constante égale à 5 mm se situe autour de 2350 Hz.

La mise en œuvre de la méthode hybride nécessite de connaître les champs de pression et d’accélération pariétaux afin de calculer les sources équivalentes. Le champ de vitesse pariétal est issu de mesures par la technique des deux microphones. Afin d’évaluer le champ de pression pariétal, les deux stratégies évoquées au paragraphe 2.2.5 à savoir, de manière expérimentale en exploitant les mesures par la technique des deux microphones, et de manière numérique à l’aide de la méthode des éléments finis directe, sont mises en œuvre. Les mesures ont été réalisées au sein de l’équipe du professeur H. Houjoh, au Precision and Intelligence Laboratory du Tokyo

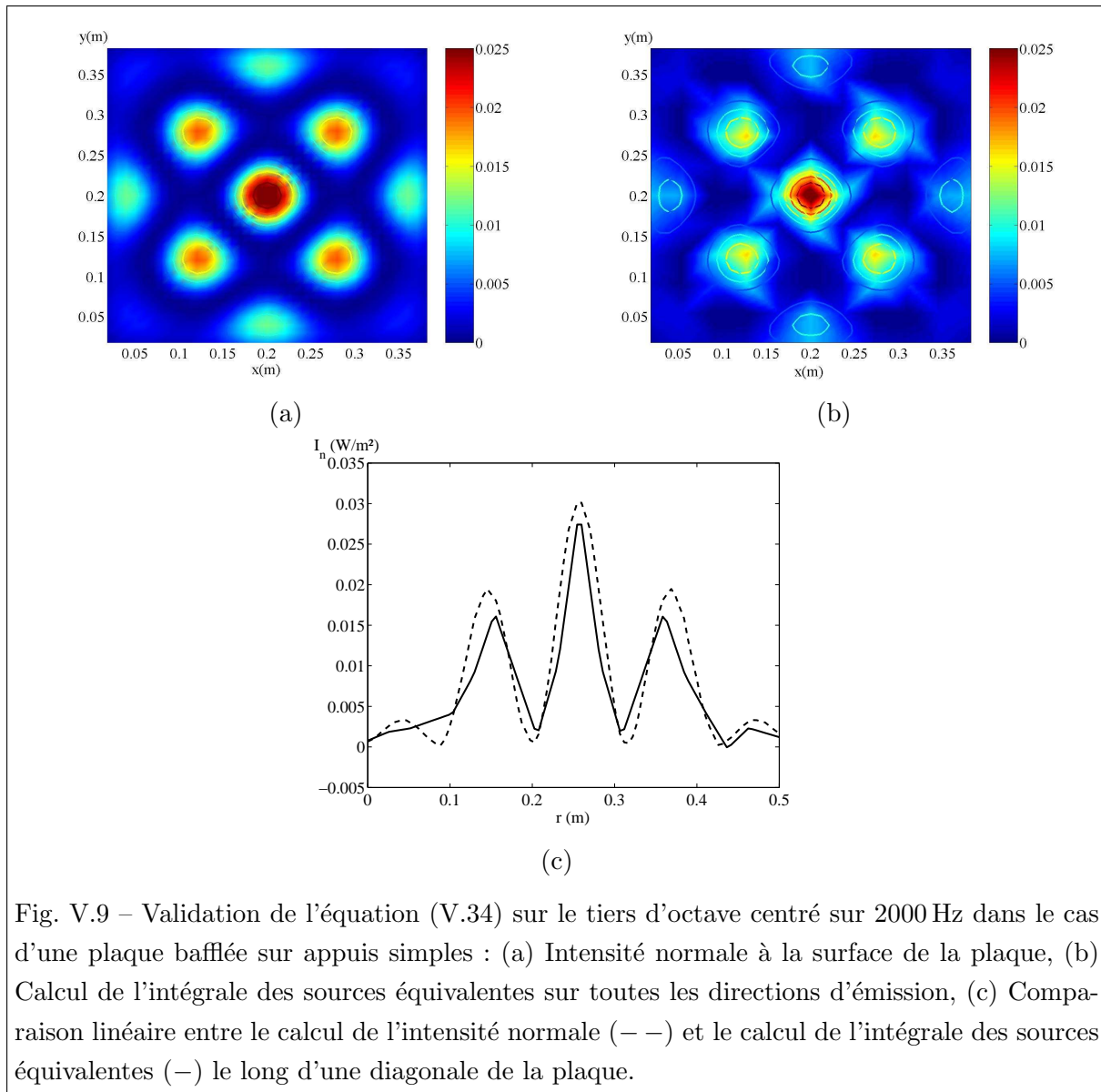


Fig. V.9 – Validation de l'équation (V.34) sur le tiers d'octave centré sur 2000 Hz dans le cas d'une plaque bafflée sur appuis simples : (a) Intensité normale à la surface de la plaque, (b) Calcul de l'intégrale des sources équivalentes sur toutes les directions d'émission, (c) Comparaison linéaire entre le calcul de l'intensité normale (---) et le calcul de l'intégrale des sources équivalentes (—) le long d'une diagonale de la plaque.

Institute of Technology (Japon).

4.1 Etude expérimentale

4.1.1 Etude modale

Avant de procéder aux mesures acoustiques, une étude modale de la plaque est réalisée afin de caractériser son comportement vibratoire. Pour cela, la plaque est excitée en bruit blanc entre 25 Hz et 5000 Hz et le signal mesuré par un accéléromètre en 5 positions sur la plaque est utilisé afin d'identifier les pics de résonance correspondant aux modes. La figure V.11(a) présente la répartition fréquentielle des modes mesurés. La figure V.11(b) présente la comparaison de la densité modale déduite du comptage des fréquences propres mesurées :



Fig. V.10 – Photographie de la plaque raidie (vue de derrière).

- avec la densité modale asymptotique pour une plaque en aluminium de mêmes longueur et largeur que la plaque étudiée et d'épaisseur h constante égale à 5 mm [Lesueur, 1988] :

$$n(f) = \frac{2\pi S}{3,6 c_L h} \quad (\text{V.47})$$

où $c_L = \sqrt{(E/\rho(1 - \nu^2))}$ désigne la célérité des ondes longitudinales dans la plaque et S est la surface de la plaque,

- et avec la densité modale asymptotique obtenue en sommant celle de cette même plaque et celles de poutres correspondant aux raidisseurs d'épaisseur $h_p = 5$ mm [Maidanik, 1962, Lesueur, 1988] :

$$n(f) = \frac{2\pi S}{3,6 c_L h} + \frac{L}{3,4 \sqrt{c_{Lp} h_p \omega}} \quad (\text{V.48})$$

où $c_{Lp} = \sqrt{(E/\rho)}$ désigne la célérité des ondes longitudinales dans les raidisseurs et L est la longueur des raidisseurs.

Conformément au cas d'une plaque, la densité modale obtenue ne dépend pas de la fréquence. La figure V.12 présente enfin le nombre de modes vibratoires de la plaque par bande d'octave. La densité modale est faible et le cadre d'étude est donc bien celui d'une structure dont le comportement vibratoire se situe dans le domaine des basses fréquences.

4.1.2 Mesures par la technique des deux microphones

Dispositif expérimental

Le principe de mesure repose sur la technique des deux microphones. La plaque est suspendue à un portique de façon à s'approcher de conditions aux limites de type champ libre (Fig. V.13). L'ensemble est positionné face à un système de mesures automatisé qui permet de déplacer un microphone selon les trois directions de l'espace. Ce système est particulièrement adapté à la réalisation de mesures holographiques. Il est utilisé ici pour réaliser des mesures de pression sur des plans proches de la plaque et parallèles à celle-ci.

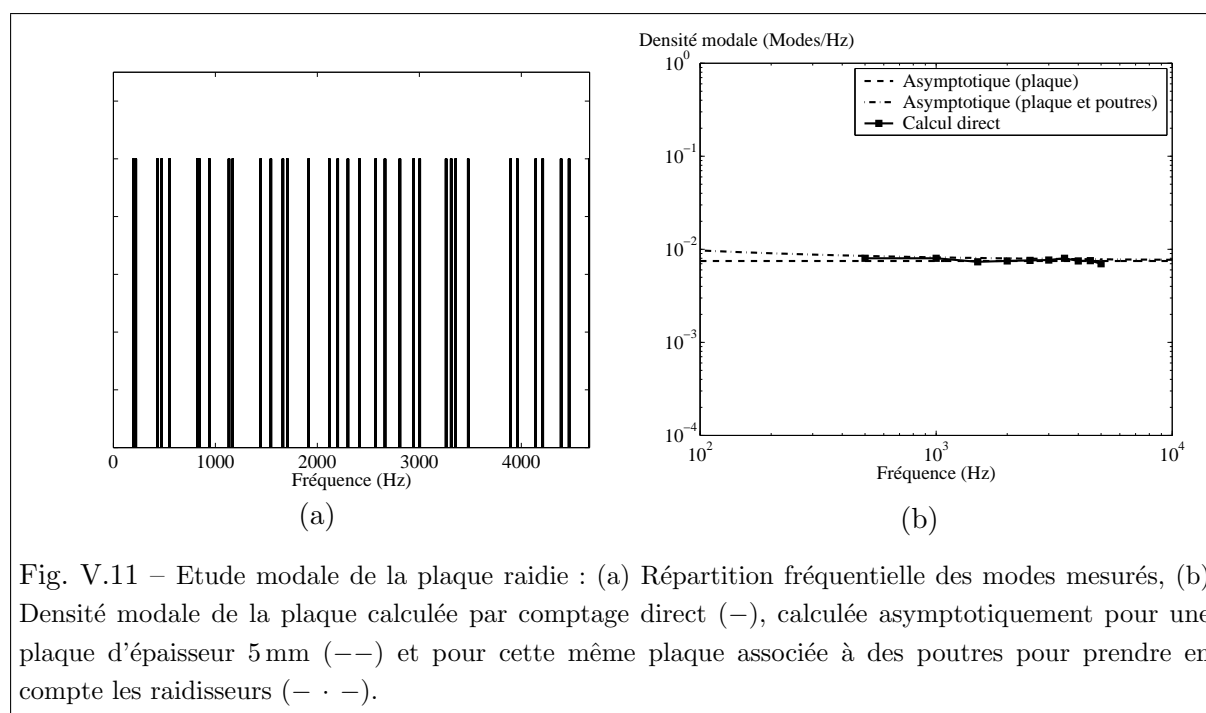


Fig. V.11 – Etude modale de la plaque raidie : (a) Répartition fréquentielle des modes mesurés, (b) Densité modale de la plaque calculée par comptage direct (—), calculée asymptotiquement pour une plaque d'épaisseur 5 mm (---) et pour cette même plaque associée à des poutres pour prendre en compte les raidisseurs (- · -).

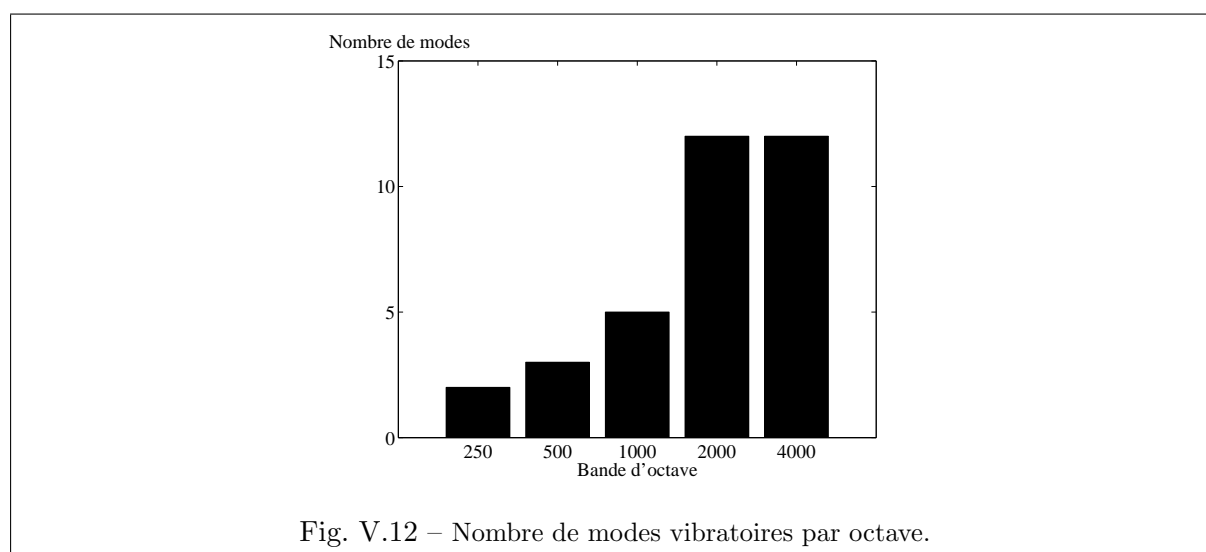


Fig. V.12 – Nombre de modes vibratoires par octave.

Le schéma du dispositif expérimental est présenté figure V.14. La chaîne d'excitation est constituée d'un pot vibrant. La chaîne d'acquisition est constituée d'un microphone quart de pouce monté sur le système automatisé de mesures, et d'un accéléromètre placé sur la plaque et servant de référence pour les mesures de phase. Ces derniers sont reliés à un analyseur de spectre et l'ensemble des acquisitions est collecté au niveau d'un PC : les données enregistrées sont les autospectres du champ de pression et du champ d'accélération, ainsi que les parties réelle et imaginaire de la fonction de transfert entre les champs de pression et d'accélération. La bande fréquentielle d'analyse est fixée à 25 – 5000 Hz avec 201 lignes soit un pas en fréquence de 25 Hz. Une acquisition complète dure environ 21 h.

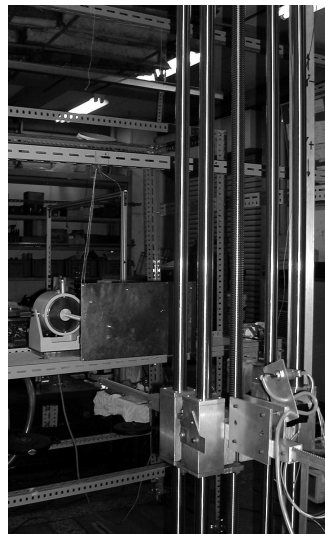


Fig. V.13 – Photographie du montage expérimental pour la mesure par la méthode des deux microphones.

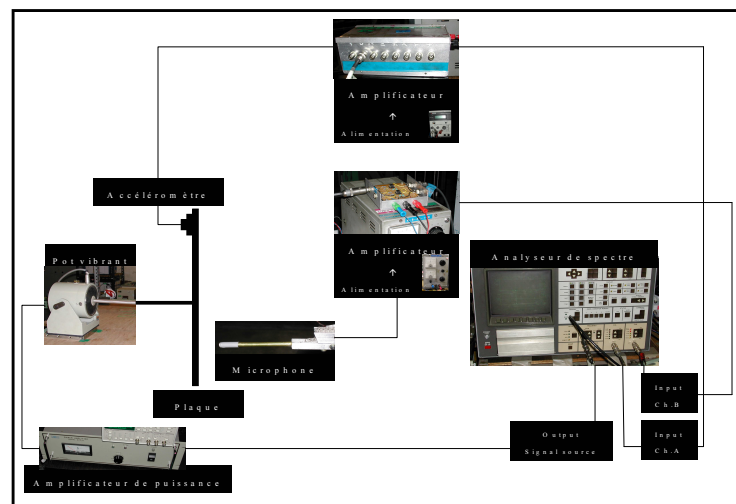


Fig. V.14 – Schéma du dispositif expérimental.

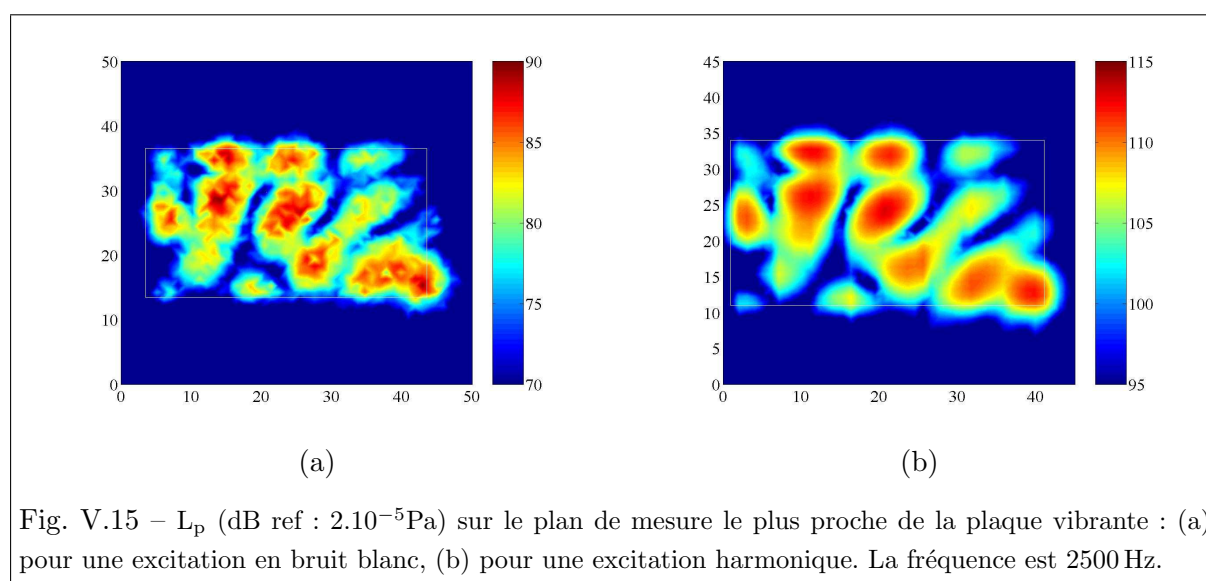
Description des mesures réalisées

La plaque est excitée par un signal de type bruit blanc. Afin de vérifier les cartes obtenues sous excitation en bruit blanc, des mesures sous excitation harmonique sont également réalisées : la comparaison est menée sur le tiers d'octave centré sur 2500 Hz pour 6 fréquences égales à 2240 Hz, 2370 Hz, 2500 Hz, 2610 Hz, 2720 Hz, et 2825 Hz. Les mesures sont réalisées sur deux plans parallèles proches de la plaque : le premier plan est situé à 10 mm de la plaque et le deuxième

plan est situé à $\Delta z = 10$ mm du premier. Les deux plans sont carrés, de côté 500 mm (resp. 450 mm dans le cas d'une excitation harmonique) et centrés sur la plaque. Ils sont discrétisés en 50 points (resp. 45 points) selon chaque dimension, ce qui conduit à un espace entre deux points adjacents de 10 mm et respecte un critère de maillage en $\lambda/6$.

Comparaison entre les résultats sous excitation en bruit blanc et sous excitation harmonique

Les figures V.15 et V.16 présentent le niveau de bruit mesuré sur le plan le plus proche de la plaque respectivement à 2500 Hz et 2825 Hz lorsque l'excitation est de type bruit blanc (a) et lorsque l'excitation est harmonique (b). Les cartes obtenues avec les deux types d'excitation sont semblables, la mesure sous excitation harmonique permet néanmoins d'obtenir une carte plus lisse et identifier clairement les zones de rayonnement. Le niveau de bruit entre les cartes (a) et (b) est différent, plus précisément, le niveau de bruit obtenu sous excitation harmonique est supérieur à celui obtenu sous excitation en bruit blanc, ce qui s'explique par le fait que la puissance injectée à la plaque est plus importante lorsque l'excitation est harmonique. Ce qu'il est important de constater, c'est que la dynamique des mesures, à savoir la différence de niveau entre les zones de plus faible et de plus fort rayonnement, est la même pour les deux types d'excitation (20 dB à 2500 Hz et 25 dB à 2825 Hz). L'excitation en bruit blanc est particulièrement intéressante dans le cas de notre étude car elle nous permet de couvrir une large gamme fréquentielle au cours d'une seule acquisition. C'est pourquoi les résultats présentés par la suite ne portent que sur ce type d'excitation.



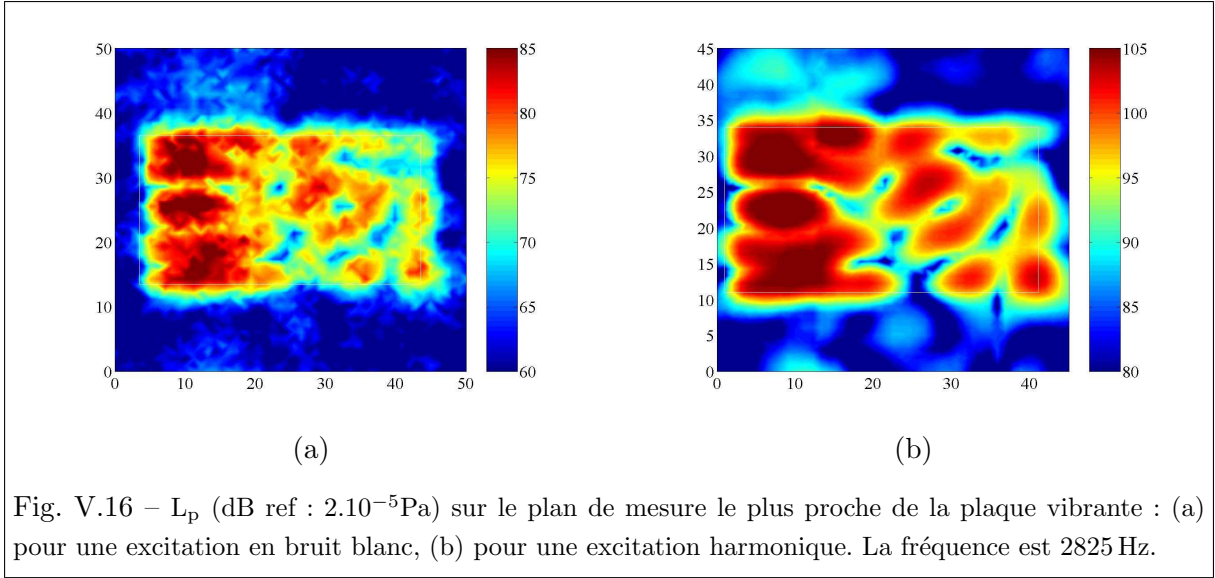


Fig. V.16 – L_p (dB ref : 2.10^{-5} Pa) sur le plan de mesure le plus proche de la plaque vibrante : (a) pour une excitation en bruit blanc, (b) pour une excitation harmonique. La fréquence est 2825 Hz.

4.1.3 Champ de vitesse pariétal

D'après les mesures par la méthode des deux microphones

Le principe de la mesure du champ de vitesse particulaire par la méthode des deux microphones est basé sur la relation d'Euler qui relie la vitesse particulaire et le gradient de pression :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{grad} p(t). \quad (\text{V.49})$$

La composante de la vitesse particulaire dans la direction z normale à la plaque peut donc s'exprimer par :

$$u_z(t) = -\frac{1}{\rho_0} \int_{-\infty}^t \frac{\partial p}{\partial z}(\tau) d\tau \quad (\text{V.50})$$

L'approximation du gradient de pression est obtenue par la méthode des différences finies en utilisant la différence entre les signaux de pression mesurés selon la normale à la plaque sur les deux plans parallèles séparés de la distance Δz . Cette approximation n'est valable que si la distance Δz entre les plans de mesure est petite devant la longueur d'onde, ce qui est vérifié ici puisque la longueur d'onde à 5000 Hz est de 68 mm \gg 10 mm. Sous cette approximation, la vitesse particulaire sur le plan intermédiaire entre les deux plans de mesure s'exprime par :

$$u_z(t) = -\frac{1}{\rho_0 \Delta z} \int_{-\infty}^t p_2(\tau) - p_1(\tau) d\tau, \quad (\text{V.51})$$

où p_1 et p_2 sont respectivement les signaux de pression mesurés sur le premier plan, plan le plus proche de la plaque et sur le second plan. En écrivant ces signaux sous la forme :

$$p_1(t) = p_1 e^{j(\omega t + \phi_1)} \quad (\text{V.52})$$

$$p_2(t) = p_2 e^{j(\omega t + \phi_2)} \quad (\text{V.53})$$

où p_i et ϕ_i sont l'amplitude et la phase du champ de pression sur les plans $i = 1, 2$, la vitesse particulière s'écrit :

$$u_z(t) = u_z e^{j(\omega t + \phi_u)}, \quad (\text{V.54})$$

avec :

$$u_z = \frac{1}{\rho \Delta z \omega} \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \quad (\text{V.55})$$

$$\phi_z = \arg((p_1 \sin \phi_1 - p_2 \sin \phi_2) + j(p_2 \cos \phi_2 - p_1 \cos \phi_1)). \quad (\text{V.56})$$

La figure V.17 présente le résultat obtenu à 2500 Hz.

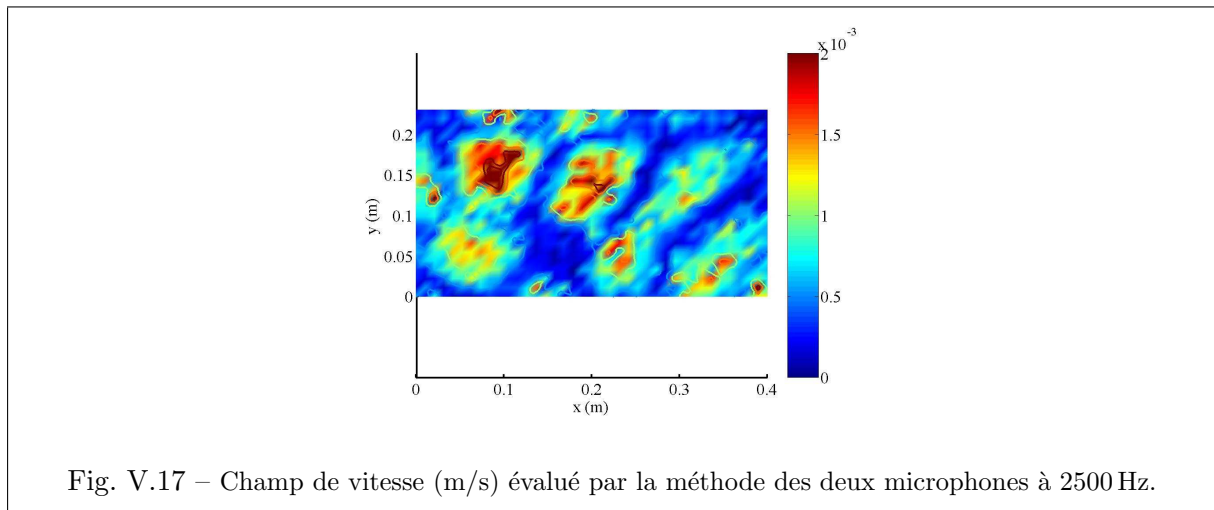


Fig. V.17 – Champ de vitesse (m/s) évalué par la méthode des deux microphones à 2500 Hz.

La distance entre le plan intermédiaire de calcul de la vitesse particulière et la plaque est de 15 mm ce que l'on suppose suffisamment faible pour assimiler cette vitesse particulière dans la direction normale à la plaque à la vitesse pariétale normale.

4.1.4 Champ de pression pariétal

D'après les mesures par la méthode des deux microphones

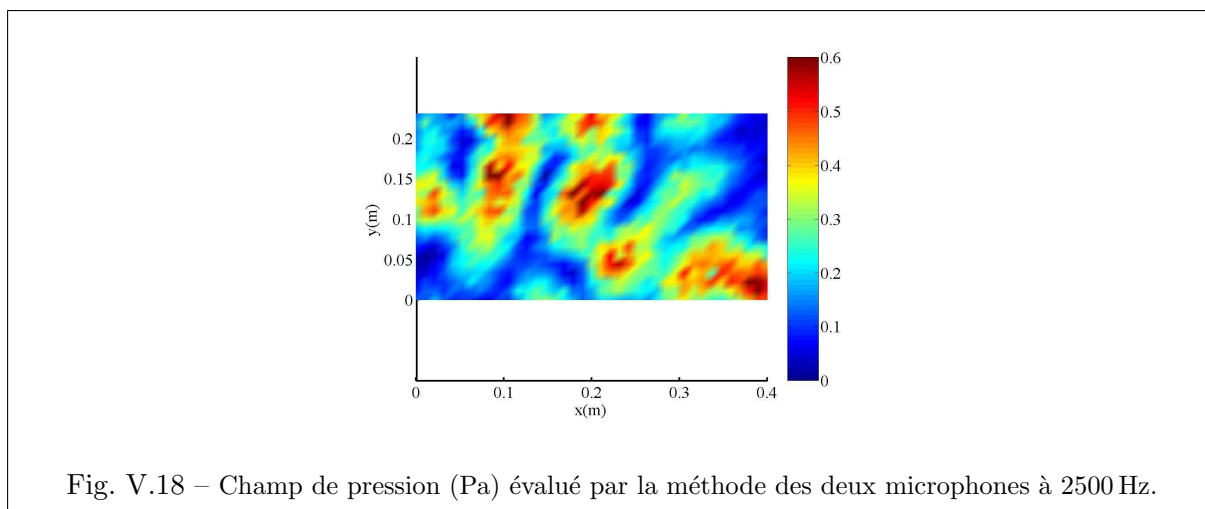
Une interpolation linéaire entre les signaux de pression mesurés sur les deux plans parallèles nous permet d'estimer le champ de pression sur le plan intermédiaire sous la forme :

$$p(t) = \frac{p_1(t) + p_2(t)}{2}. \quad (\text{V.57})$$

La figure V.18 présente le résultat obtenu à 2500 Hz.

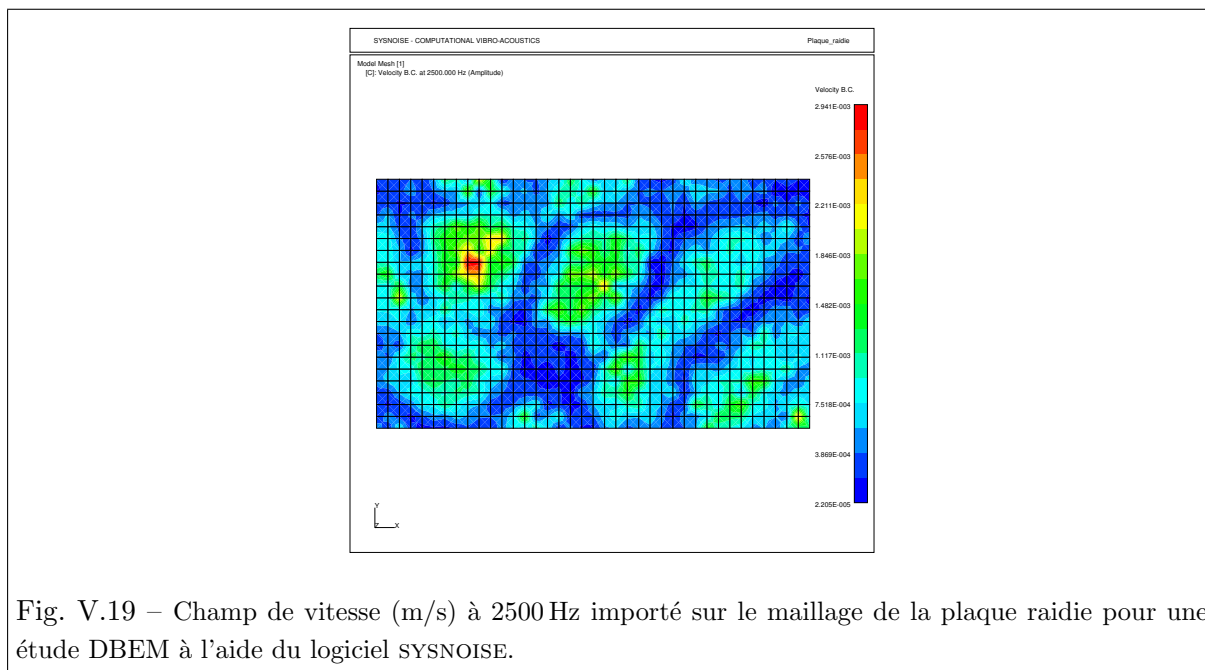
D'après le calcul par la méthode des éléments finis de frontière directe (DBEM)

Une autre possibilité pour évaluer le champ de pression pariétal consiste à utiliser la méthode des éléments finis directe (DBEM). Cette méthode est adaptée aux cas où seul le champ vibratoire pariétal est connu par le biais de calculs ou de mesures par vélocimétrie laser



notamment. Seule la structure vibrante sortie de son environnement acoustique est à modéliser. Dans le cas de notre étude, ce calcul va nous permettre de valider la concordance entre les champs de pression et de vitesse mesurés par la méthode des deux microphones.

La simulation DBEM est réalisée à l'aide du logiciel SYSNOISE. La plaque est maillée en 38 éléments selon sa longueur, et 21 éléments selon sa largeur, ce qui conduit à un maillage de 798 éléments de frontière valable pour une étude jusqu'à 5175 Hz selon le critère en $\lambda/6$. Le champ de vitesse issu de la mesure par les deux microphones (paragraphe 4.1.3) est importé sur le maillage comme illustré sur la figure V.19. Le problème est alors résolu en champ libre afin d'évaluer la pression pariétale associée au champ de vitesse importé. Le résultat à 2500 Hz est présenté figure V.20. On constate que le champ de pression ainsi obtenu est en accord avec les résultats obtenus par la méthode des deux microphones (Fig. V.18).



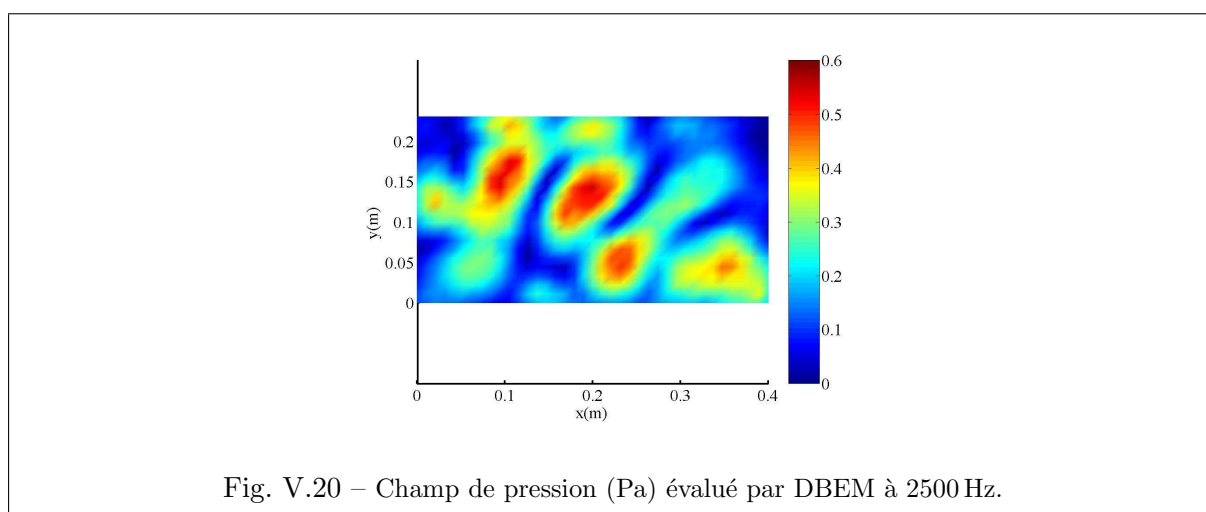


Fig. V.20 – Champ de pression (Pa) évalué par DBEM à 2500 Hz.

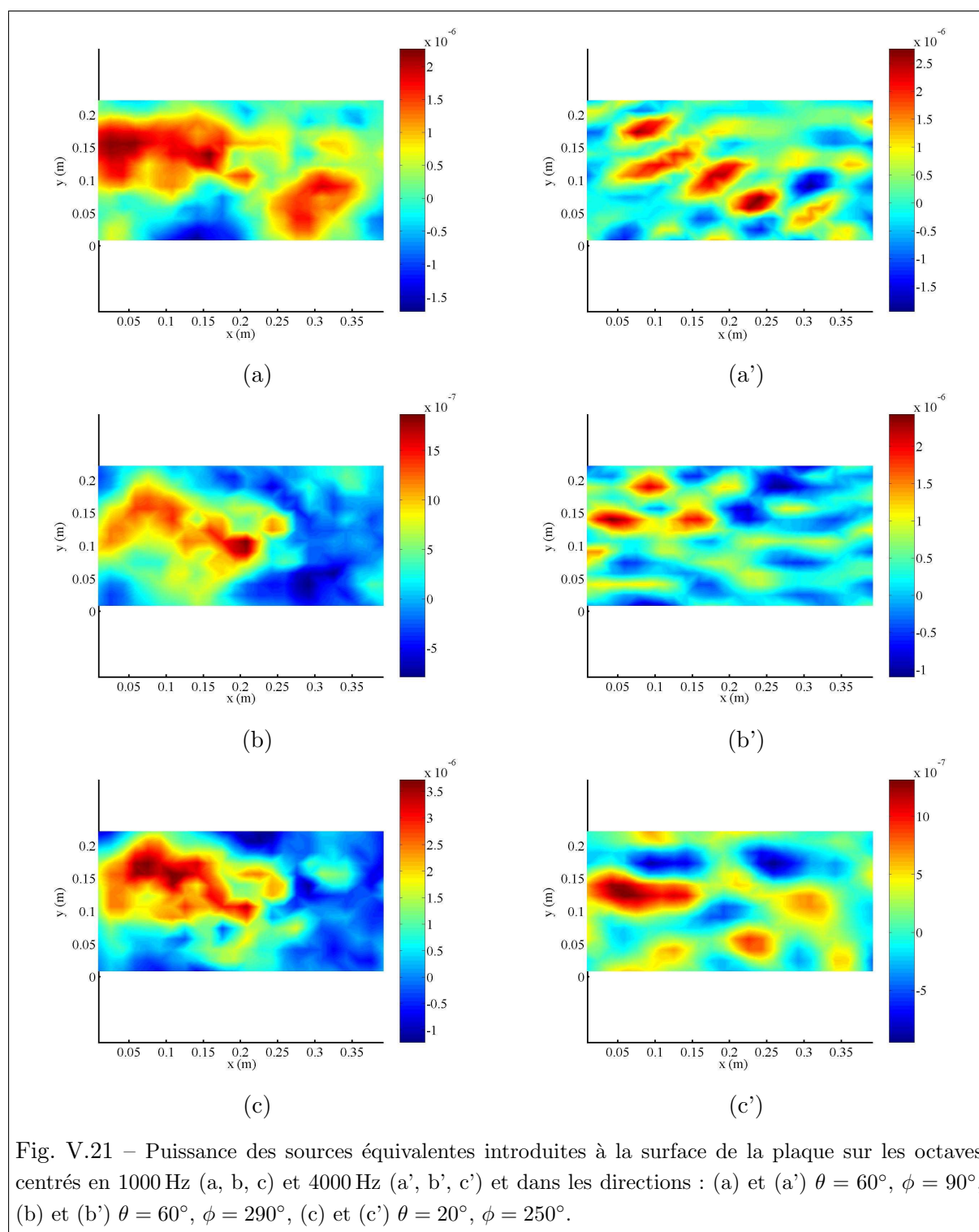
4.2 Validation de l'approche hybride pour l'étude du rayonnement en champ libre : calcul des sources équivalentes

La première partie de l'approche consiste à introduire des sources équivalentes sur la surface de la plaque vibrante. Chaque source équivalente est la somme des contributions d'une source de pression, d'une source de vitesse et d'une source d'intensité. L'amplitude et la directivité de ces sources sont évaluées en appliquant les équations (V.25) à (V.27) à partir des fonctions de corrélation spatiale des champs pariétaux mesurés.

4.2.1 Localisation des zones de rayonnement

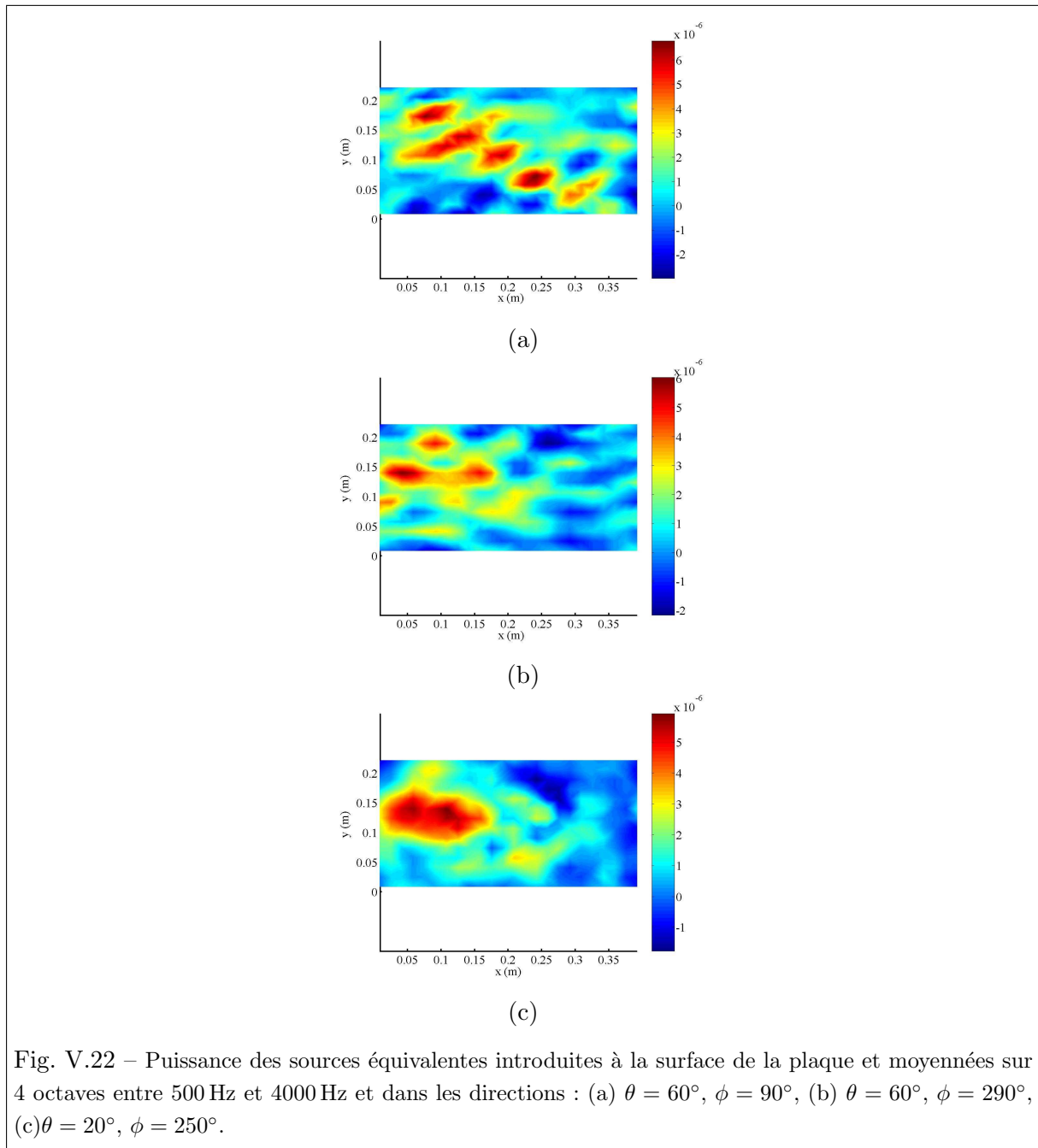
La contribution de chaque source équivalente dépend à la fois de la position de celle-ci et de la direction d'émission vers le point récepteur. Il est donc possible de tracer des cartes représentant le rayonnement de la plaque dans une direction donnée. Ces cartes permettent notamment d'identifier les zones de la structure vibrante responsable du bruit rayonné dans cette direction, et, à terme, de localiser les zones à traiter afin de diminuer les nuisances sonores liées au rayonnement de la plaque. La figure V.21 présente les cartes obtenues sur les octaves centrés sur 1000 Hz et 4000 Hz et dans les directions $(\theta = 60^\circ, \phi = 90^\circ)$, $(\theta = 60^\circ, \phi = 290^\circ)$ et $(\theta = 20^\circ, \phi = 250^\circ)$. On retrouve le fait que les zones de la plaque responsables du rayonnement acoustique dépendent de la direction d'émission, et ce phénomène est d'autant plus marqué que la fréquence augmente dans la mesure où la plaque est de plus en plus directive. Par ailleurs, on constate que les puissances des sources introduites sont négatives sur certaines parties de la plaque ce qui signifie que ces zones contribuent de manière destructive au bruit rayonné. Ces zones matérialisent des puits d'intensité acoustique.

Afin d'envisager un traitement par ajout d'absorbant localisé sur la plaque, il peut être inté-



ressant de quantifier les contributions moyennes des sources sur plusieurs bandes de fréquences. La figure V.22 présente les cartes de puissance des sources équivalentes moyennées sur 4 bandes d'octave entre 500 Hz et 4000 Hz dans les directions ($\theta = 60^\circ$, $\phi = 90^\circ$), ($\theta = 60^\circ$, $\phi = 290^\circ$) et ($\theta = 20^\circ$, $\phi = 250^\circ$). On constate que la zone majoritairement responsable du rayonnement

coïncide avec la partie de la plaque dépourvue de nervures.

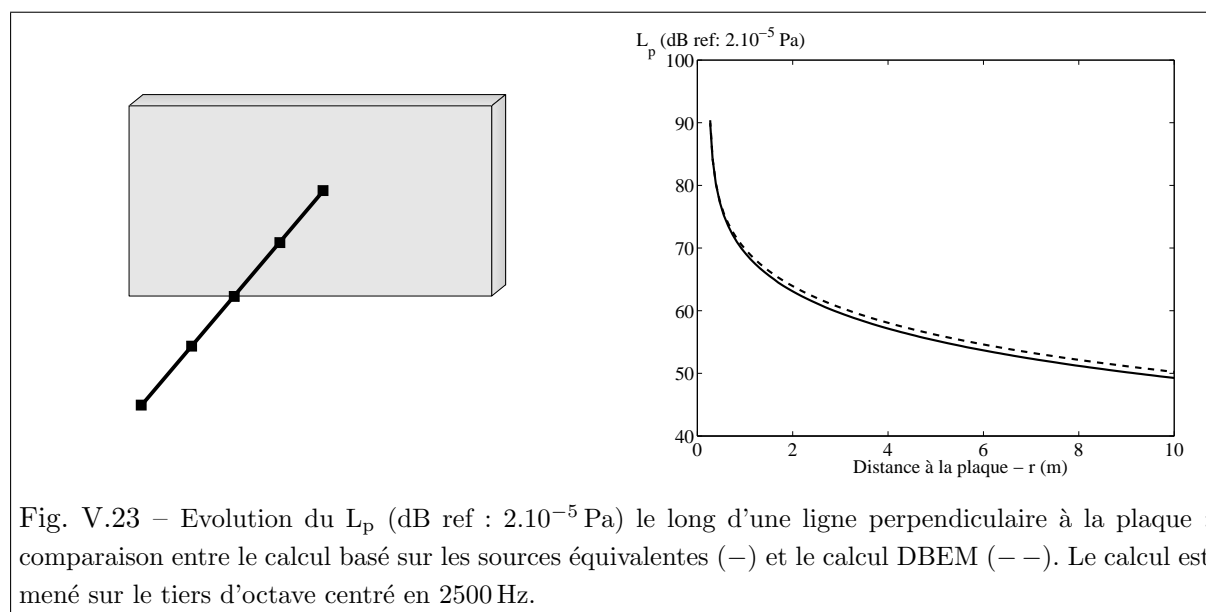


Etude du rayonnement en champ libre

Afin de vérifier la validité des sources équivalentes calculées, le champ acoustique émis en champ libre par la plaque est comparé dans plusieurs configurations au champ calculé à l'aide de la DBEM qui permet de résoudre un problème de rayonnement purement extérieur. Pour toutes les applications, les calculs sont menés par tiers d'octave. Le calcul basé sur les sources équivalentes est réalisé à la fréquence centrale de chaque tiers d'octave étudié. Les résultats DBEM présentent la moyenne par tiers d'octave de calculs réalisés tous les 10 Hz.

Champ acoustique le long d'une ligne

La première comparaison proposée concerne la décroissance du champ acoustique le long d'une ligne perpendiculaire à la plaque. La figure V.23 présente l'évolution du niveau de bruit L_p le long de cette ligne calculé en sommant les contributions énergétiques des sources équivalentes et à l'aide de la DBEM. Le tiers d'octave étudié est centré sur 2500 Hz. Les sources équivalentes permettent de reproduire la décroissance du champ acoustique lorsque l'on s'éloigne de la plaque.



Champ acoustique sur une sphère

La figure V.24 présente le niveau de bruit L_p calculé sur une demi-sphère de rayon 3 m située au dessus de la plaque. Le tiers d'octave étudié est centré sur 2500 Hz. La comparaison entre les résultats obtenus à partir des sources équivalentes (a) et à partir de la DBEM (b) montre que l'approche par sources équivalentes permet non seulement de reproduire le niveau de bruit, mais également la directivité du champ acoustique émis.

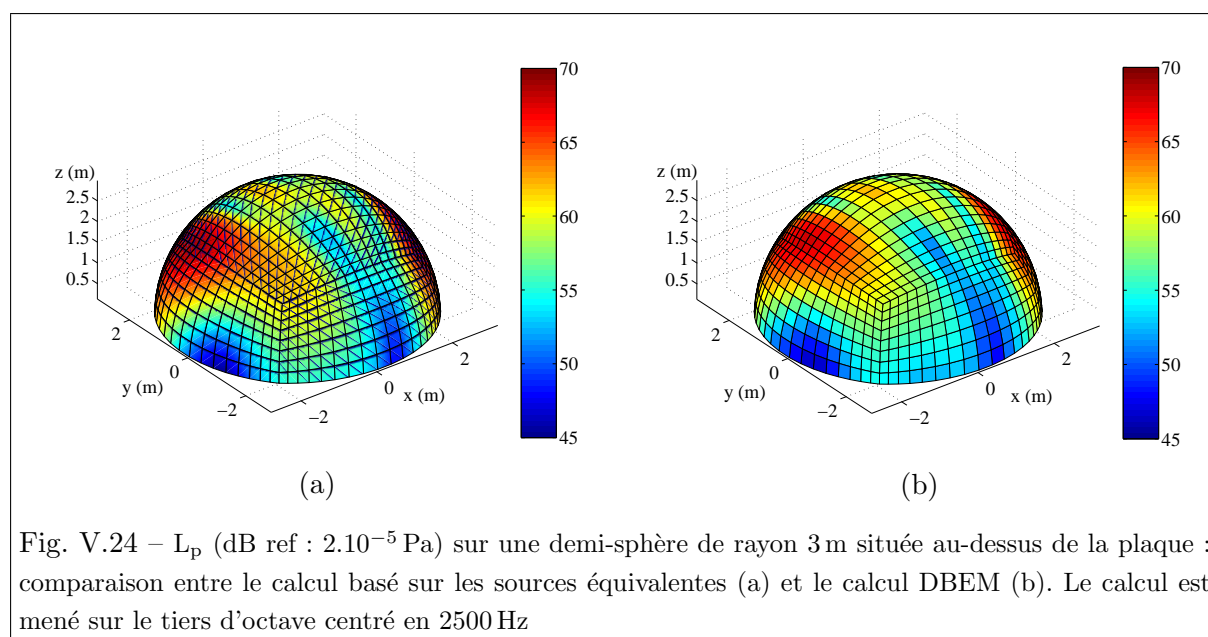


Fig. V.24 – L_p (dB ref : 2.10^{-5} Pa) sur une demi-sphère de rayon 3 m située au-dessus de la plaque : comparaison entre le calcul basé sur les sources équivalentes (a) et le calcul DBEM (b). Le calcul est mené sur le tiers d'octave centré en 2500 Hz

Champ acoustique en un point

La figure V.25 permet de comparer le niveau de bruit L_p calculé au point de coordonnées (1;0,1;7,5) dans le repère de la plaque à l'aide des deux approches. Le calcul est mené sur 20 tiers d'octave situés entre 25 Hz et 4000 Hz. On peut noter que la différence entre les méthodes sur l'ensemble des fréquences est relativement faible, de l'ordre de 1 à 2 dB.

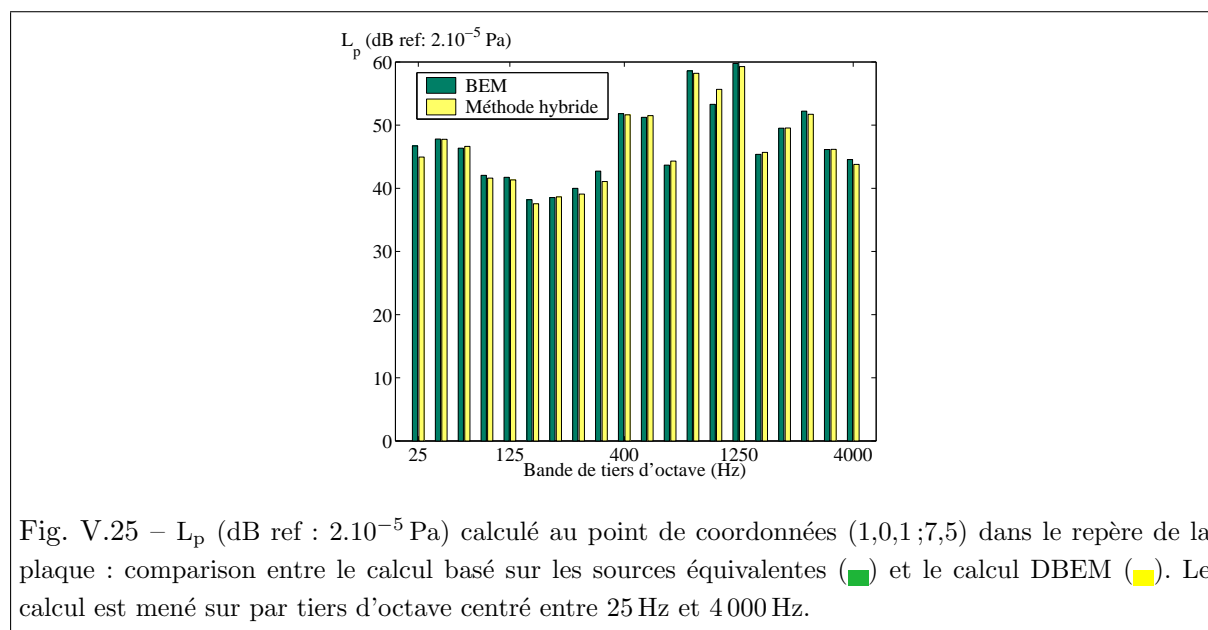


Fig. V.25 – L_p (dB ref : 2.10^{-5} Pa) calculé au point de coordonnées (1,0,1;7,5) dans le repère de la plaque : comparaison entre le calcul basé sur les sources équivalentes (■) et le calcul DBEM (■). Le calcul est mené sur par tiers d'octave centré entre 25 Hz et 4000 Hz.

La figure V.26 présente les contributions des sources de pression, de vitesse, et d'intensité au champ total. On observe qu'en basses fréquences, la contribution majoritaire est liée à la source de vitesse de la même façon qu'en basses fréquences les effets de rayonnement sont essentiellement

due aux effets monopolaires du terme $\rho_0 \gamma_n(\mathbf{q}) g(\mathbf{q}, \mathbf{r})$. Toutefois, à mesure que la fréquence augmente, les autres contributions ne sont plus négligeables, voire même dominantes, de sorte qu'elles doivent être prises en compte dans le calcul.

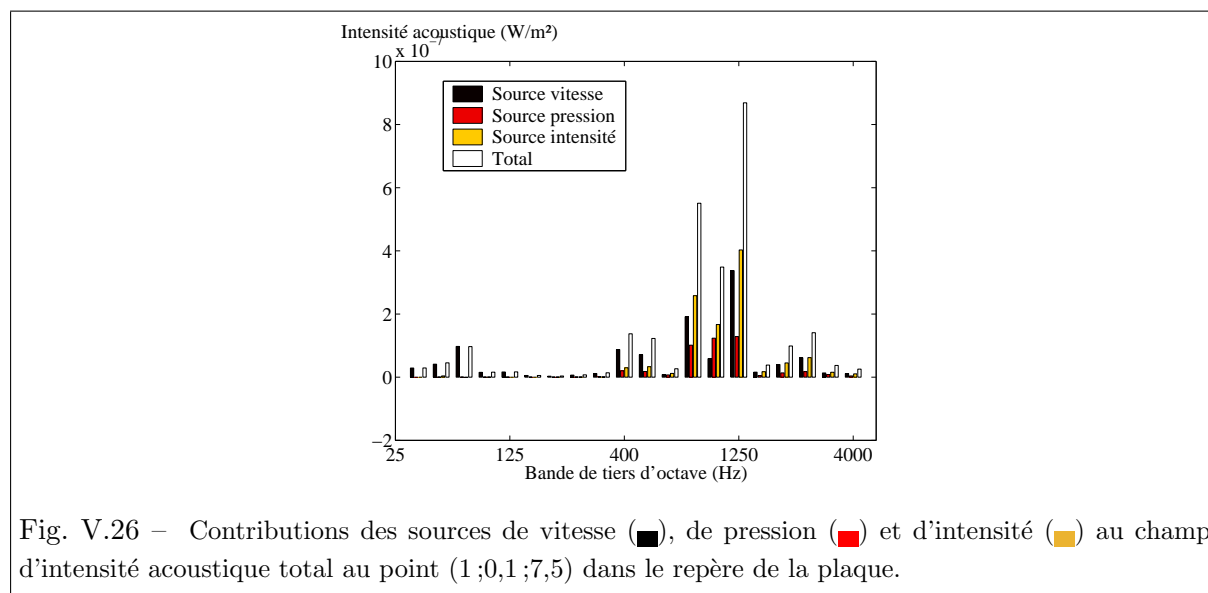


Fig. V.26 – Contributions des sources de vitesse (■), de pression (■) et d'intensité (■) au champ d'intensité acoustique total au point (1 ; 0,1 ; 7,5) dans le repère de la plaque.

4.3 Validation de l'approche hybride pour l'étude du rayonnement au sein d'un environnement acoustique quelconque : calcul des sources fictives et du champ acoustique

Les sources équivalentes permettant de reproduire le rayonnement acoustique de la plaque en champ libre peuvent maintenant être utilisées pour calculer le champ acoustique autour de celle-ci en présence d'un environnement quelconque. Ce calcul est réalisé à l'aide de la méthode du transfert radiatif implémentée dans le logiciel CERES développé en interne. Afin d'illustrer la mise en œuvre de la méthode, le cas d'étude proposé est celui où la plaque raidie est placée entre deux panneaux absorbants. Le panneau inférieur est couvert sur sa face supérieure d'une mousse en polyuréthane d'épaisseur 25 mm dont le coefficient d'absorption par bande d'octave est donné table V.2 ; il est situé à 300 mm au-dessus de la plaque et a pour dimensions 600 mm × 400 mm. Le panneau supérieur est couvert sur sa face inférieure d'une mousse en polyuréthane d'épaisseur 50 mm dont le coefficient d'absorption par bande d'octave est donné table V.2 ; il est situé à 150 mm en-dessous de la plaque et a pour dimensions 500 mm × 350 mm. Ce cas d'étude peut également être résolu avec la méthode des éléments finis indirecte (IBEM) dont les résultats serviront de référence. Le calcul est mené sur quatre bandes d'octave centrées sur 500 Hz, 1000 Hz, 2000 Hz et 4000 Hz. Les résultats IBEM sont obtenus à l'aide du logiciel SYSNOISE : ils représentent la moyenne de calculs réalisés tous les 50 Hz entre 350 Hz et 5650 Hz afin de couvrir les quatre octaves étudiés.

Le maillage IBEM utilisé (Fig. V.27) comprend 4500 éléments et permet de vérifier le critère en $\lambda/6$ à 5000 Hz. Le maillage utilisé pour la méthode du transfert radiatif comprend 182 éléments :

Bande d'octave	Coefficient d'absorption	Bande d'octave	Coefficient d'absorption
125	0.14	125	0.35
250	0.30	250	0.51
500	0.63	500	0.82
1000	0.91	1000	0.98
2000	0.98	2000	0.97
4000	0.91	4000	0.95

Tab. V.2 – Evolution du coefficient d'absorption de la mousse en polyuréthane d'épaisseur 25 mm (a) et d'épaisseur 50 mm (b) par bande d'octave [Norton, 1989].

chaque face d'un panneau ou de la plaque est maillée et un coefficient d'absorption différent est introduit sur les faces supérieures et inférieures des panneaux absorbants de façon à ce que la face située du côté de la plaque soit absorbante et l'autre réfléchissante. Les deux faces de la plaque sont supposées totalement réfléchissantes. Le calcul du niveau de bruit L_p est réalisé en quatre points situés aux coordonnées $(-1,6;0;0,1)$, $(-1,6;0,2;0,1)$, $(2,0;0;0,1)$ et $(2,0;0,2;0,1)$ dans le repère de la plaque.

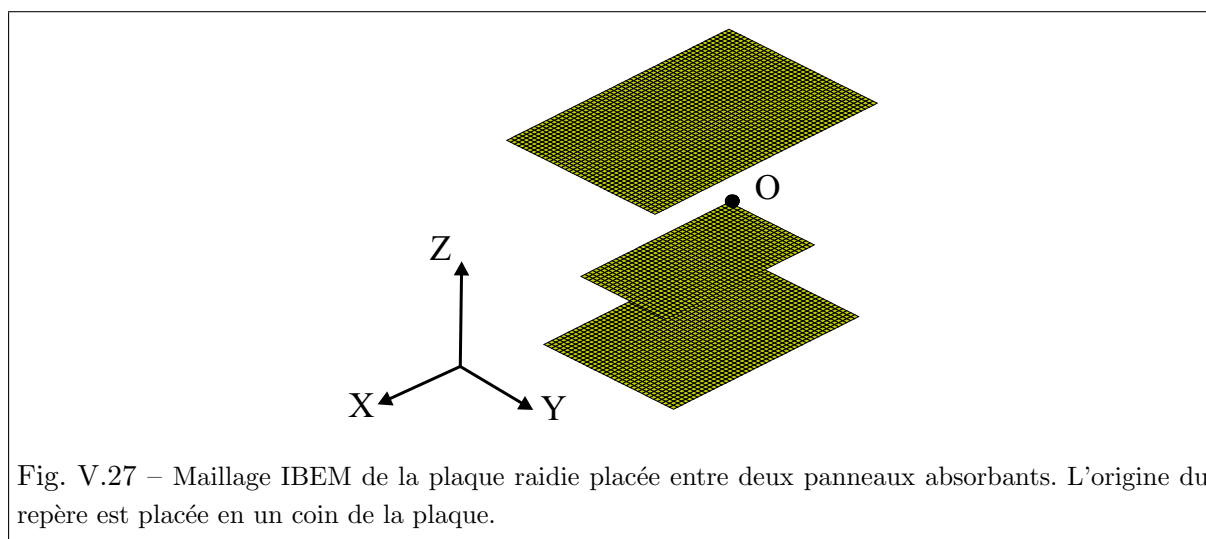


Fig. V.27 – Maillage IBEM de la plaque raidie placée entre deux panneaux absorbants. L'origine du repère est placée en un coin de la plaque.

A titre de référence, le temps de calcul des sources fictives et du champ acoustique par le logiciel CERES pour les quatre points et par octave dure 6 s (ordinateur Intel Pentium 4 avec un processeur à 2,53 GHz et 512 Mo de mémoire vive). Le temps de calcul IBEM pour les quatre points et par fréquence dure environ 20 min (ordinateur Intel Pentium 4 avec un processeur à 2,4 GHz et 512 Mo de mémoire vive).

Les deux méthodes conduisent à des résultats similaires sur les trois octaves supérieurs avec un écart raisonnable sur l'octave centré sur 1000 Hz de l'ordre de 3 dB et un écart de l'ordre de 1 à 2 dB sur les octaves suivants. L'écart est nettement plus important sur l'octave centré sur

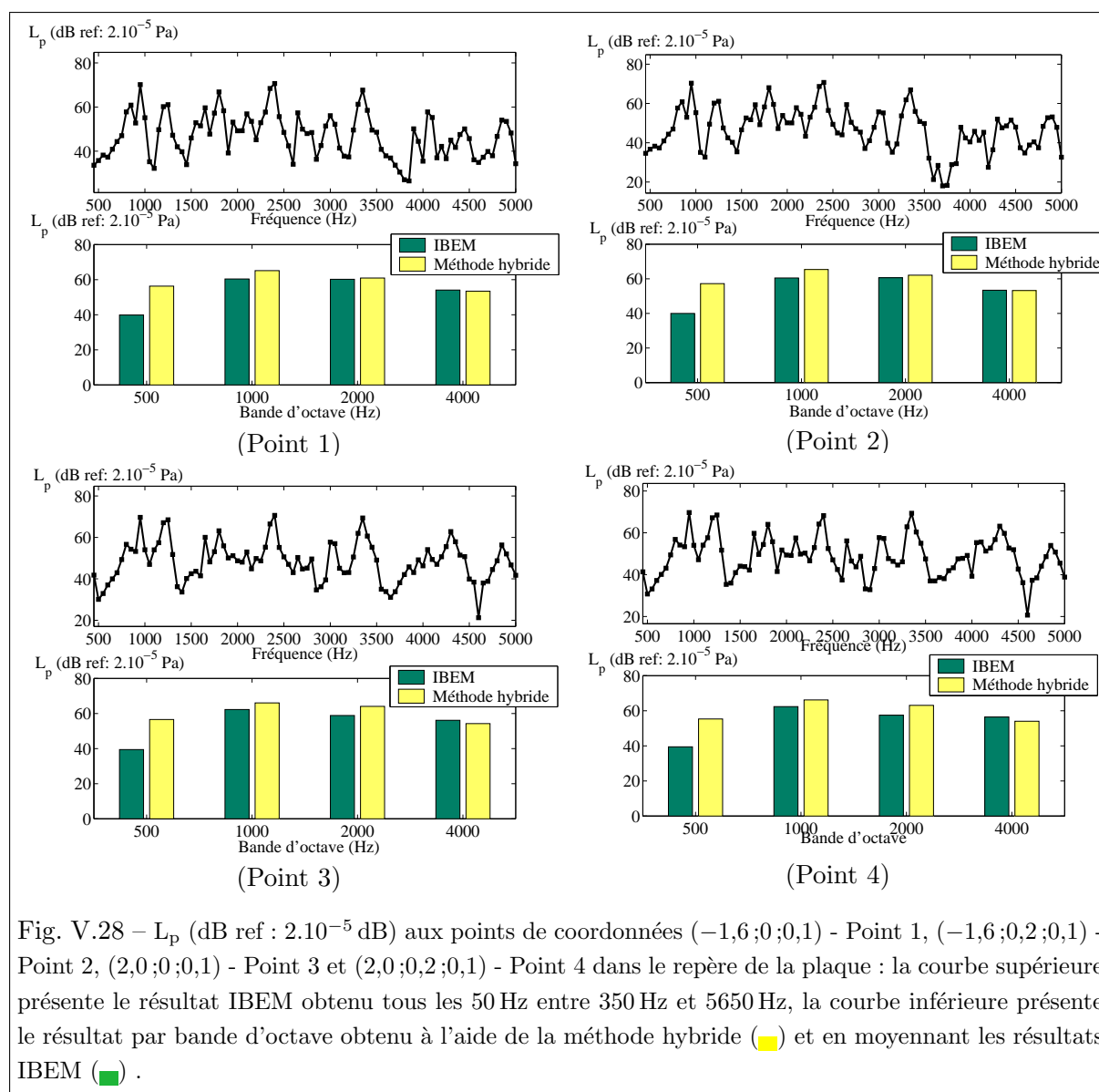
500 Hz où il est de l'ordre de 15 dB. Cet écart n'est pas vraiment surprenant dans la mesure où la méthode du transfert radiatif est une méthode dédiée aux hautes fréquences. Ainsi, l'hypothèse 'hautes fréquences' nécessite que l'étude soit réalisée sur une bande fréquentielle où la structure étudiée présente plusieurs modes, en pratique le critère retenu est environ 4 – 5 modes. Dans le cas d'étude proposé où deux systèmes, vibratoire et acoustique, coexistent, la mise en œuvre de la méthode nécessite donc que chacun des systèmes comprenne environ 4 – 5 modes sur la bande fréquentielle d'analyse. D'après la figure V.12, la plaque ne présente que 3 modes sur l'octave centré en 500 Hz ce qui est inférieur au critère énoncé. Par ailleurs, le tracé des résultats IBEM entre 350 Hz et 5650 Hz sur la figure V.28 montre que peu de modes acoustiques sont présents sur cette même bande d'octave. Par conséquent, les hypothèses d'application de la méthode du transfert radiatif ne sont pas vérifiées, ce qui permet d'expliquer l'écart constaté. Sur les octaves de rang supérieur, le critère est vérifié pour les systèmes acoustique comme vibratoire et les résultats obtenus par les deux méthodes sont en bon accord.

5 Conclusion

La méthode hybride développée dans ce chapitre permet de mettre en œuvre la méthode du transfert radiatif pour résoudre un problème vibroacoustique en hautes fréquences à partir de la connaissance des champs de pression et d'accélération pariétaux.

La méthode comprend trois étapes. Dans un premier temps, la structure est étudiée comme si celle-ci rayonnait en champ libre. Le champ acoustique rayonné est modélisé par la superposition de sources équivalentes placées à la surface du corps vibrant. Chaque source équivalente est la combinaison d'une source de pression, d'une source de vitesse et d'une source d'intensité. Des formulations analytiques sont proposées pour évaluer leurs contributions respectives à partir des fonctions de corrélation spatiale des champs de pression et d'accélération. L'hypothèse de champ lointain permet d'obtenir des formulations telles que l'amplitude de chaque source ne dépend que de la position de celle-ci et de la direction d'émission, et d'être ainsi en adéquation avec les lois de l'acoustique géométrique mises en œuvre dans la méthode du transfert radiatif. Une relation est établie entre l'amplitude des sources équivalentes et l'intensité normale à la surface du corps vibrant. Une fois les sources équivalentes déterminées, l'environnement acoustique de la structure est pris en compte dans un deuxième temps, et des sources fictives sont introduites pour modéliser les phénomènes acoustiques se produisant sur la frontière du domaine. La méthode du transfert radiatif est alors mise en œuvre pour évaluer les contributions de ces sources qui vérifient une équation de Fredholm de seconde espèce résolue par une méthode de collocation. Enfin, le champ acoustique en tout point du domaine est calculé en sommant les contributions des sources équivalentes et des sources fictives.

Le calcul des sources équivalentes constitue le point central de la méthode hybride. Ce calcul suppose que les champs de pression et d'accélération pariétaux sont connus. Deux stratégies



sont proposées pour évaluer ces champs : la première stratégie, entièrement expérimentale, repose sur la technique des deux microphones qui permet de mesurer simultanément les deux champs ; la seconde, qui s'applique lorsque seul le champ vibratoire est connu à partir de calculs ou de mesures vélocimétriques, consiste à appliquer l'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz sur la surface du corps vibrant pour évaluer le champ de pression pariétal. Ce calcul peut être mené à l'aide de la méthode des éléments finis de frontière dont la mise en œuvre en terme de temps de calcul n'est pas pénalisante ici car la structure est étudiée en champ libre pour ce qui concerne l'évaluation des sources équivalentes : seule la structure vibrante sans son environnement doit être maillée, ce qui conduit à un nombre d'éléments réduit.

L'évaluation des sources équivalentes dans le cas d'une plaque simple simplement appuyée

sur tous ses bords a permis de s'orienter vers un critère de maillage en $\lambda/4$. L'application complète de la méthode hybride dans le cas d'une plaque raidie a permis de comparer les résultats de la méthode hybride aux résultats de référence donnés par la méthode des éléments finis de frontière. Les deux stratégies suggérées précédemment ont été mises en œuvre pour estimer les champs pariétaux : ces champs sont utilisés pour évaluer les sources équivalentes permettant de reproduire le champ acoustique rayonné par la plaque en champ libre. La plaque est ensuite placée entre deux panneaux absorbants : des sources fictives sont introduites sur ces panneaux pour prendre en compte le phénomène d'absorption, et sur la plaque pour prendre en compte la réflexion. Les calculs sont menés par bande d'octave. La comparaison du niveau de bruit L_p en quatre points de l'espace a permis de montrer que la méthode conduit à de bons résultats lorsque le nombre de modes vibratoires et acoustiques sur la bande d'octave est suffisant. En pratique le critère retenu est de l'ordre de 4 à 5 modes.

L'intérêt de la méthode hybride est de permettre la mise en œuvre d'une méthode hautes fréquences à partir de données vibratoires, qui sont les données généralement disponibles pour tout problème vibroacoustique. Le rayonnement acoustique de la structure vibrante peut être approché avec un nombre de sources plus faible que dans la méthode des éléments finis de frontière puisque le critère de maillage est plus grossier. Le maillage introduit dans la méthode du transfert radiatif est également plus grossier et ne dépend pas de la fréquence. Par ailleurs, les calculs sont menés par bande de fréquence et non à fréquence pure pour reproduire le comportement acoustique moyen de la structure. Tout ceci conduit à des gains en temps de calcul non négligeables.

La mise en œuvre de la méthode hybride et en particulier le calcul des sources équivalentes suppose que le comportement vibratoire de la structure n'est pas modifié par la présence du fluide environnant. Cette hypothèse, justifiée quand le fluide est un fluide léger comme l'air, est mise en défaut lorsque le fluide devient plus lourd comme l'eau. Il peut alors être envisageable de prendre en compte ce couplage fluide/structure en introduisant des sources fictives : il reste alors à écrire les équations permettant d'évaluer leurs contributions. Ceci reste toutefois une suggestion de perspective puisque ce travail n'a pas été effectué dans le cadre de la thèse.

La méthode hybride est appliquée dans le chapitre suivant pour étudier le bruit rayonné par une boîte de vitesse intégrée à un groupe moto-propulseur placé au sein d'un encapsulage moteur.

Bibliographie

- [Bobrovnikii et Tomilina, 1990] Bobrovnikii, Y. et Tomilina, T. (1990). Calculation of radiation from finite elastic bodies by the method of auxiliary sources. *Sov. Phys. Acoust.*, 36(4) :334–338.
- [Bouchet et al., 2000] Bouchet, L., Loyau, T., Hamzaoui, N., et Boisson, C. (2000). Calculation of acoustic radiation using equivalent-sphere methods. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(5) :2387–2397.
- [Filippi, 1994] Filippi, P. (1994). *Acoustique générale*. Les Editions de Physique, SFA collection d'acoustique.
- [Franzoni et al., 2001] Franzoni, L., Bliss, D., et Rouse, J. (2001). An acoustic boundary element method based on energy and intensity variables for prediction of high-frequency broadband sound field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(6) :3071–3080.
- [Guyader, 2004a] Guyader, J.-L. (2004a). Integral equation for frequency averaged quadratic pressure. *Acta Acustica united with Acustica*, 90 :232–245.
- [Guyader, 2004b] Guyader, J.-L. (2004b). Integral equation to predict frequency averaged quadratic pressure radiated from structures. Dans *Proceedings of the International Congress on Acoustics*, pages 2805–2808, Kyoto (Japon).
- [Guyader et Loyau, 1996] Guyader, J.-L. et Loyau, T. (1996). Sound radiation from structures : the frequency averaged quadratic pressure approach. Dans *Proceedings of Inter-Noise*, pages 1267–1272, Liverpool (U.K.).
- [Guyader et Loyau, 2000] Guyader, J.-L. et Loyau, T. (2000). The frequency averaged quadratic pressure : A method for calculating the noise emitted by structures and for localising the acoustic sources. *Acustica united with Acta Acustica*, 86 :1021–1027.
- [Herrin et al., 2004] Herrin, D., Wu, T., et Seybert, A. (2004). The energy source simulation method. *Journal of Sound and Vibration*, 278(1-2) :135–153.
- [Jayachandran et Bonhila, 2002] Jayachandran, V. et Bonhila, M. (2002). A hybrid sea/modal technique for modeling structural-acoustic interior noise in rotorcraft. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(3) :1448–1454.
- [Jeans et Mathews, 1992] Jeans, R. et Mathews, C. (1992). The wave superposition method as a robust technique for computing acoustic fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(2) :1156–1166.
- [Keane et Manohar, 1993] Keane, A. et Manohar, C. (1993). Energy flow variability in a pair of coupled rods. *Journal of Sound and Vibration*, 168 :253–284.
- [Kim et Ih, 2001] Kim, J.-K. et Ih, J.-G. (2001). A simplified acoustic boundary element method for the prediction of the acoustic field at high-frequency bands. Dans *The 8th International Congress on Sound and Vibration*, pages 1421–1426, Hong Kong (Chine).
- [Kim et Ih, 2002] Kim, J.-K. et Ih, J.-G. (2002). Prediction of sound level at high-frequency bands by means of a simplified boundary element method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(6) :2645–2655.

- [Kim et Ih, 2003] Kim, J.-K. et Ih, J.-G. (2003). Prediction of high-frequency sound radiation from muffler jacket using a simplified bem. Dans *Proceedings of Inter-Noise*, pages 1611–1616, Seogwipo (Corée).
- [Koopmann et al., 1989] Koopmann, G., Song, L., et Fahline, J. (1989). A method for computing acoustic field based on the principle of wave superposition. *J.Acoust.Soc.Am*, 86(6) :2433–2438.
- [Langley et Bremner, 1999] Langley, R. et Bremner, P. (1999). A hybrid method for the vibration analysis of complex structural-acoustic systems. *J.Acoust.Soc.Am*, 105(3) :1657–1671.
- [Langley et Brown, 2004a] Langley, R. et Brown, A. (2004a). The ensemble statistics of the band-averaged energy of a random system. *Journal of Sound and Vibration*, 275 :847–857.
- [Langley et Brown, 2004b] Langley, R. et Brown, A. (2004b). The ensemble statistics of the energy of a random system subjected to harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 275 :823–846.
- [Lee et al., 2001] Lee, H.-W., Hong, S.-Y., et Park, Y.-H. (2001). Radiation noise analysis using the results of power flow finite element method. Dans *Proceedings of Inter-Noise (4pages)*, La Hague (Pays-Bas).
- [Lesueur, 1988] Lesueur, C. (1988). *Rayonnement acoustique des structures*. EYROLLES, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France. 591 pages.
- [LMS International, 2003] LMS International (2003). *Sysnoise 5.6 documentation - version 1.0*. Leuven.
- [Mace, 1996] Mace, B. (1996). Finite frequency band averaging effects in the statistical energy analysis of two continuous one-dimensional subsystems. *Journal of Sound and Vibration*, 189(4) :443–476.
- [Mace, 1997] Mace, B. (1997). Wave coherence, coupling power and statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 199(3) :369–380.
- [Maidanik, 1962] Maidanik, G. (1962). Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields. *J.Acoust.Soc.Am*, 34(6) :809–826.
- [Maidanik, 1974] Maidanik, G. (1974). Vibrational and radiative classifications of modes of a baffled finite panel. *Journal of Sound and Vibration*, 34(4) :447–455.
- [Norton, 1989] Norton, M. (1989). *Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers*. Cambridge University Press.
- [Ochmann, 1995] Ochmann, M. (1995). The source simulation technique for acoustic radiation problems. *Acustica united with Acta Acustica*, 81 :512–527.
- [Reboul et al., 2004] Reboul, E., Perret-Liaudet, J., et Le Bot, A. (2004). A hybrid method for the radiated noise prediction in high frequency. Dans *Proceedings of the 18th International Congress on Acoustics*, Kyoto (Japon).

- [Reboul et al., 2005] Reboul, E., Perret-Liaudet, J., et Le Bot, A. (2005). Vibroacoustic prediction of mechanisms using a hybrid method. Dans *Proceedings of NOVEN'05 (CD ROM - 8 pages)*, St Raphaël (France).
- [Rouse et Franzoni, 2004] Rouse, J. et Franzoni, L. (2004). A broadband energy-intensity boundary element method for the prediction of high-frequency sound fields. Dans *Proceedings of Inter-Noise*, pages 141–144, Kyoto (Japon).
- [Thivant, 2003] Thivant, M. (2003). *Modélisation de la propagation acoustique par la méthode du potentiel d'intensité*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. 128 pages.
- [Viktorovitch et al., 1998] Viktorovitch, M., Thouverez, F., et Jezequel, L. (1998). A stochastic reformulation of the power flow equations for membranes and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 211(5) :910–917.
- [Viktorovitch et al., 1999] Viktorovitch, M., Thouverez, F., et Jezequel, L. (1999). A new random boundary element formulation applied to high frequency phenomena. *Journal of Sound and Vibration*, 223(2) :273–296.
- [Viktorovitch et al., 2001] Viktorovitch, M., Thouverez, F., et Jezequel, L. (2001). An integral formulation with random parameters adapted to the study of the vibrational behaviour of structures in the middle- and high- frequency field. *Journal of Sound and Vibration*, 247(3) :431–452.
- [Wang et Vlahopoulos, 2002] Wang, A. et Vlahopoulos, N. (2002). An energy boundary element formulation for sound radiation at high frequency. Dans *Proceedings of Inter-Noise - CD ROM (8 pages)*, Dearborn (MI, USA).
- [Wang et al., 2004] Wang, A., Vlahopoulos, N., et Wu, K. (2004). Development of an energy boundary element formulation for computing high-frequency sound radiation from incoherent intensity boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 278(1-2) :413–436.
- [Wester et Mace, 1996] Wester, E. et Mace, B. (1996). Statistical energy analysis of two edge-coupled rectangular plates : ensemble averages. *Journal of Sound and Vibration*, 1996 :793–822.

Chapitre VI

Application aux boîtes de vitesses dans leur encapsulage moteur

Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous appliquons la méthode hybride développée dans le cadre de cette étude à l'étude du rayonnement acoustique du carter d'une boîte de vitesses placée au sein d'un encapsulage moteur. L'objectif est donc de tester la mise en œuvre de la méthode dans un cas plus complexe, proche d'une application industrielle. Le cas d'étude considéré concerne le bruit rayonné par une boîte de vitesses de type poids lourd dont les caractéristiques sont présentées dans la première partie de ce chapitre. On s'intéresse dans un premier temps à la fonction de transfert vibratoire entre la surcharge de denture et le carter de la boîte de vitesses, et la méthode spectrale itérative permet d'estimer la réponse vibratoire du carter aux fluctuations de la raideur d'engrènement et de l'erreur statique de transmission. Dans un deuxième temps, la boîte de vitesses est intégrée à un groupe motopropulseur placé au sein d'un encapsulage moteur muni d'écrans acoustiques absorbants, et on s'intéresse au bruit rayonné à l'extérieur de l'encapsulage. La méthode hybride est alors mise en œuvre afin d'estimer les sources équivalentes à introduire dans la méthode du transfert radiatif. Enfin, le champ acoustique rayonné en présence de l'environnement de la boîte est calculé à l'aide de la méthode du transfert radiatif, et les résultats obtenus sont comparés aux résultats donnés par la méthode des éléments finis de frontière indirecte (IBEM).

Sommaire

1	Caractéristiques de la boîte de vitesses	159
1.1	Description de la boîte de vitesses	159
1.2	Modélisation de la boîte de vitesses par éléments finis	160
1.3	Analyse modale de la boîte de vitesses	162
1.3.1	Fréquences propres et déformées modales	162
1.3.2	Modes de denture	163

2	Réponse vibratoire du carter de la boîte de vitesses	163
2.1	Fonction de transfert vibratoire	164
2.2	Réponse vibratoire induite par l'erreur statique de transmission et les fluctuations de la raideur d'engrènement	165
2.2.1	Fluctuations de la raideur d'engrènement et de l'erreur statique de transmission	166
2.2.2	Surcharge dynamique de denture	166
2.2.3	Réponse vibratoire	168
3	Encapsulage du groupe motopropulseur	170
3.1	Description du groupe motopropulseur et de l'encapsulage	171
3.2	Réponse acoustique du carter de la boîte de vitesses	172
3.3	Résultats	175
3.3.1	Réponse acoustique liée à la fonction de transfert vibratoire . .	175
3.3.2	Réponse acoustique du carter de la boîte de vitesses liée aux vibrations induites par l'erreur statique de transmission et les fluctuations de la raideur d'engrènement	179
4	Conclusion	180
	Bibliographie	183

1 Caractéristiques de la boîte de vitesses

1.1 Description de la boîte de vitesses

La boîte de vitesses retenue pour cette application est décrite figure VI.1. Bien que simplifiée, la transmission est modélisée de façon à retrouver les principaux éléments d'une boîte de vitesses poids lourds. Elle est constituée d'un train d'engrenages hélicoïdaux à deux étages comprenant un couple 29/56 dents et un couple 35/49 dents. Les principales caractéristiques de fonctionnement de ces engrenages sont fournies dans les tableaux VI.1 et VI.2. Chaque engrenage est constitué de deux roues pleines en acier montées sur des arbres de diamètre égal à 50 mm.

La boîte comprend trois lignes d'arbre, l'arbre menant en entrée et l'arbre mené en sortie sont respectivement reliés au moteur et à la charge (associée à l'ensemble des organes en aval de la boîte de vitesses) par l'intermédiaire d'accouplements flexibles. Le couple d'engrenages 29/56 dents est monté entre l'arbre d'entrée et l'arbre intermédiaire (train de commande), et l'engrenage 35/49 dents est monté entre l'arbre intermédiaire et l'arbre de sortie.

Les arbres sont guidés en rotation par des roulements préchargés à rouleaux coniques, 8 au total, qui sont montés dans des boîtiers de forme cylindrique.

Le carter, de géométrie relativement simple, se présente sous la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions 1000 mm × 500 mm × 400 mm et d'épaisseur 10 mm. Il est en acier avec un module d'Young égal à $210 \cdot 10^9$ Pa, une masse volumique de 7800 kg/m^3 , et un coefficient de Poisson de 0,3. Il est divisé en trois compartiments de même longueur qui sont renforcés par des raidisseurs.

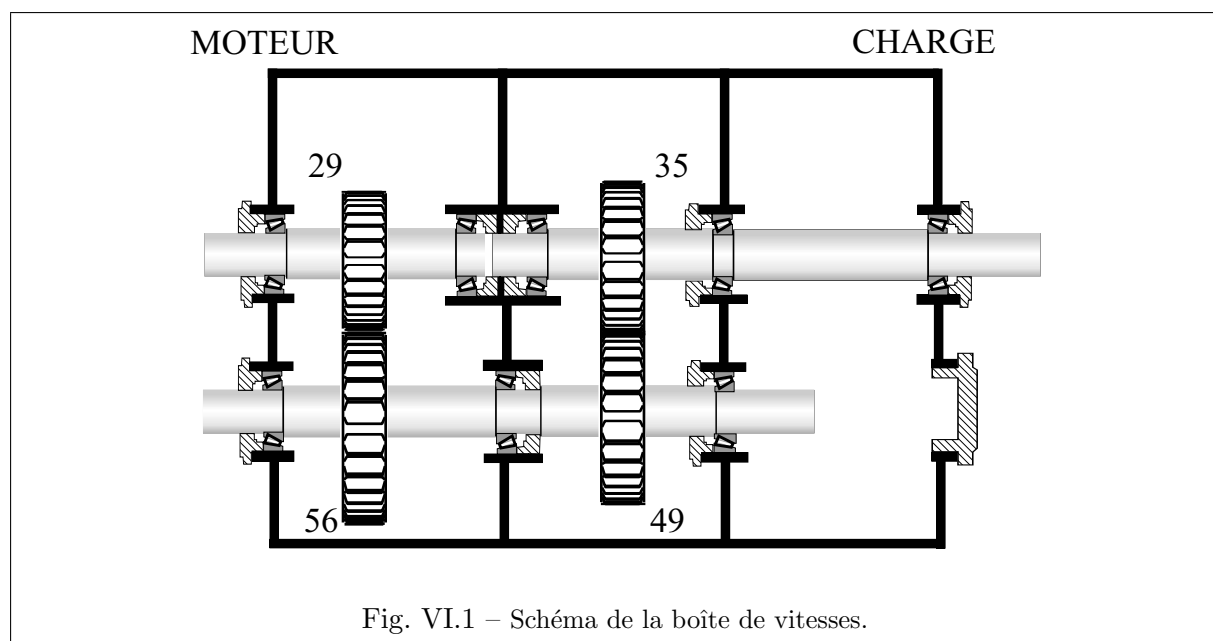


Fig. VI.1 – Schéma de la boîte de vitesses.

	Pignon	Roue
Nombre de dents Z	35	49
Rayon de base R_b (mm)	60,2	84,2
Module normal m_n (mm)	3,5	
Angle de pression apparent de fonctionnement α'_t	28°58'30''	
Angle d'hélice de base β	19°49'37''	
Largeur de denture b (mm)	35	
Entraxe de fonctionnement a' (mm)	158	
Rapport de conduite apparent ϵ_α	1,374	
Rapport de recouvrement ϵ_β	1,185	
Rapport de conduite total ϵ_γ	2,559	

Tab. VI.1 – Caractéristiques de l'engrenage 35/49 dents.

	Pignon	Roue
Nombre de dents Z	29	56
Rayon de base R_b (mm)	49,8	96,2
Module normal m_n (mm)	3,5	
Angle de pression apparent de fonctionnement α'_t	24°	
Angle d'hélice de base β	19°8'27'	
Largeur de denture b (mm)	38	
Entraxe de fonctionnement a' (mm)	158	
Rapport de conduite apparent ϵ_α	1,492	
Rapport de recouvrement ϵ_β	1,269	
Rapport de conduite total ϵ_γ	2,761	

Tab. VI.2 – Caractéristiques de l'engrenage 29/56 dents.

1.2 Modélisation de la boîte de vitesses par éléments finis

L'ensemble de la transmission (engrenages, arbres, roulements, carter) a fait l'objet d'une modélisation par éléments finis à l'aide du logiciel ANSYS. Ce modèle nous permet d'effectuer une analyse modale de la boîte, et les modes sont utilisés pour la mise en œuvre de la méthode spectrale itérative.

- Les lignes d'arbre sont subdivisées en 50 éléments finis de type poutre classique (Bernoulli) à 2 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud permettant de prendre en compte les déformations de torsion, de flexion et les déformations en traction-compression. Chaque

roue dentée est modélisée par des éléments de masse et des inerties en rotation concentrés aux noeuds des lignes d'arbre correspondants.

- La valeur moyenne de la raideur d'engrènement est introduite via une matrice de raideur généralisée de rang 12 : cette matrice couple les 6 d.d.l de la roue menée aux 6 d.d.l. du pignon. Les coefficients de la matrice sont calculés à partir de la valeur moyenne d'engrènement et des caractéristiques géométriques de l'engrenage (Chapitre II). La valeur moyenne d'engrènement pour l'engrenage 29/56 dents est égale à $430 \text{ N}/\mu\text{m}$, et la valeur moyenne d'engrènement pour l'engrenage 35/49 dents est égale à $360 \text{ N}/\mu\text{m}$.
- Le couplage élastique induit par un roulement entre la bague extérieure, fixée au carter, et la bague intérieure, fixée à l'arbre, est modélisé par une matrice de rang 10. Les déplacements de chacune de ces bagues sont définis par les 6 degrés de liberté respectivement associés au noeud attaché à l'arbre et au noeud attaché au carter. La matrice de raideur couple alors 5 degrés de liberté de la bague intérieure à 5 degrés de liberté de la bague extérieure, la rotation de l'arbre autour de son axe étant libre. Les termes extra-diagonaux de la matrice sont supposés nuls, les raideurs radiales introduites sont égales à $1,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}$, la raideur axiale est égale à $3 \cdot 10^8 \text{ N/m}$, et les raideurs en rotation selon les plans de flexion sont égales à $1 \cdot 10^5 \text{ N/m}$.
- Chaque accouplement flexible est modélisé par une raideur en torsion et deux éléments de masse et d'inertie polaire. La raideur en torsion de l'accouplement entre le moteur et la transmission est égale à $40\,000 \text{ N.m/rad}$, et la raideur entre la transmission et la charge est égale à $12\,000 \text{ N.m/rad}$.
- Le moteur et la charge sont modélisés par des éléments d'inertie concentrée en rotation : elles sont respectivement égales à $4,2 \text{ kg.m}^2$ et 1950 kg.m^2 . L'inertie associée à la charge, plus importante, prend en compte l'ensemble des organes en aval de la boîte de vitesses.
- Le carter est discrétisé en 5100 éléments quadrangulaires de plaque en flexion à 4 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud et les boîtiers de roulements sont discrétisés en 256 éléments volumiques quadrilatères à 8 noeuds et 3 degrés de liberté par noeud. Les deux types d'éléments sont couplés localement en superposant un élément de type plaque et un élément volumique de façon à assurer la continuité du modèle entre les boîtiers et le carter. Le carter est encastré sur la face située du côté du moteur.

Le modèle complet comprend 6350 éléments, 5700 noeuds et 27 000 degrés de liberté. Le maillage est présenté figure VI.2. Sa masse totale est de 234 kg. La masse du carter est de 170 kg et représente environ 73 % de la masse totale.

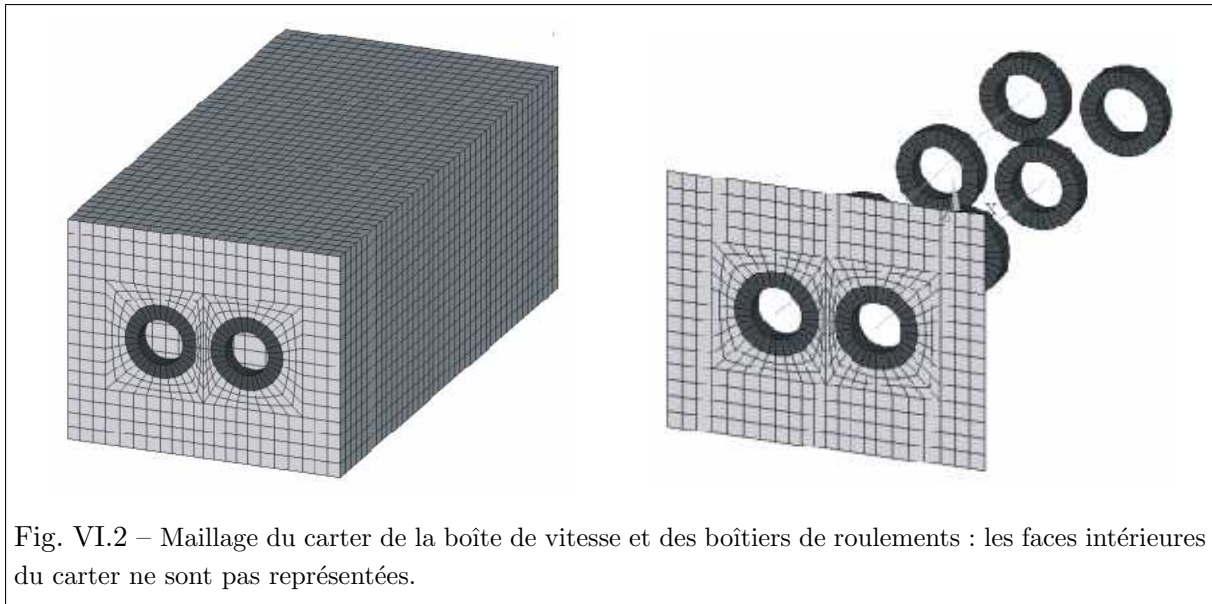


Fig. VI.2 – Maillage du carter de la boîte de vitesse et des boîtiers de roulements : les faces intérieures du carter ne sont pas représentées.

1.3 Analyse modale de la boîte de vitesses

1.3.1 Fréquences propres et déformées modales

La modélisation par éléments finis de la boîte de vitesse permet d'extraire la base modale déduite des caractéristiques moyennes des raideurs d'engrènement. Pour cela, 670 degrés de liberté dynamiques ou d.d.l. maîtres sont conservés par condensation de Guyan : ces d.d.l. maîtres sont imposés sur la denture et les roulements et choisis automatiquement sur le carter. On dénombre 207 modes entre 0 et 5000 Hz. Cela conduit à une densité modale relativement faible de l'ordre de 0,04 mode par Hz, ce qui justifie l'approche basse fréquence utilisée pour l'étude dynamique de la boîte. La répartition fréquentielle de ces modes est présentée figure VI.3.

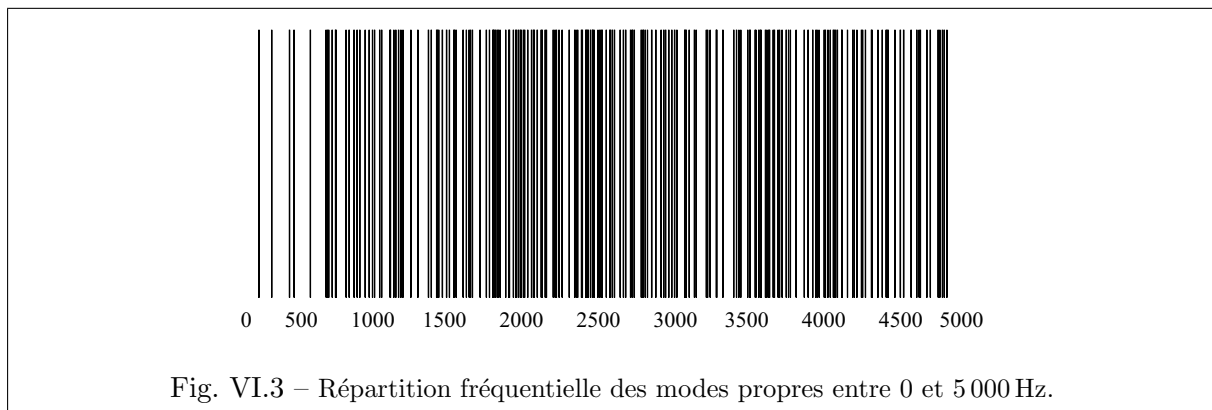
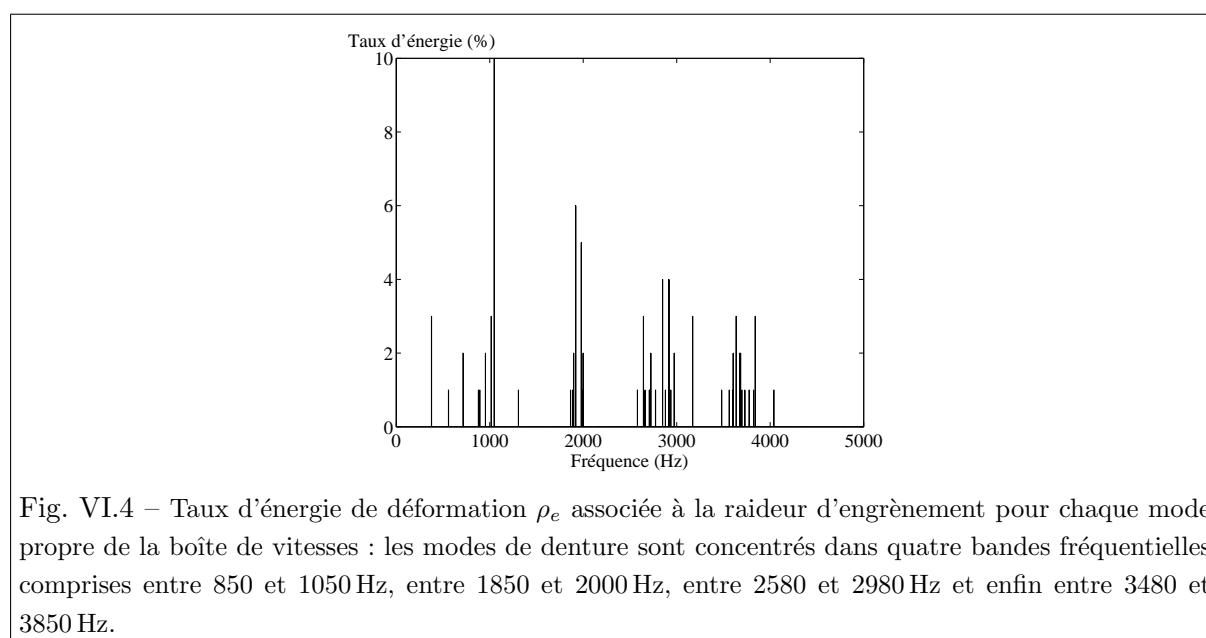


Fig. VI.3 – Répartition fréquentielle des modes propres entre 0 et 5 000 Hz.

1.3.2 Modes de denture

L'interprétation du comportement dynamique de la boîte nécessite l'analyse de ses formes propres et l'identification des modes de denture caractérisés par leur taux d'énergie ρ_e (paragraphe II.4). Les valeurs de ρ_e sont calculées pour l'ensemble des modes entre 0 et 5000 Hz et pour le couple d'engrenages 35/49 dents. Les résultats sont présentés figure VI.4 et dans le tableau VI.3. Les modes présentant les taux de déformation ρ_e les plus élevés permettent d'identifier les modes de denture : on constate que ces modes sont concentrés dans quatre bandes fréquentielles comprises entre 850 et 1050 Hz, entre 1850 et 2000 Hz, entre 2580 et 2980 Hz et enfin entre 3480 et 3850 Hz. Les déformées modales associées à ces modes présentent simultanément des déformations de flexion, de torsion et de traction-compression des arbres et du carter.



2 Réponse vibratoire du carter de la boîte de vitesses

Sans nuire à la généralité, on s'attache à retenir la contribution vibratoire d'une face de la boîte de vitesses, pour un régime de fonctionnement N allant de 0 à 3000 tr/min sur l'arbre d'entrée relié au moteur. La vitesse de rotation sur l'arbre d'entrée de l'engrenage 35/49 dents est alors comprise entre 0 et 1550 tr/min, et la fréquence d'engrènement f_e varie entre 0 et 1270 Hz. La face sélectionnée, désignée par la lettre S (supérieure), est présentée figure VI.5. Elle a pour dimensions 1000 mm \times 500 mm. On rappelle que l'épaisseur est de 10 mm.

Les calculs vibratoires sont conduits en introduisant un amortissement modal visqueux équivalent égal à 3 % sur chaque mode.

Par ailleurs, on ne cherche à évaluer dans cette étude que la contribution des excitations internes associées au couple d'engrenages 35/49 dents.

Fréquence (Hz)	Taux d'énergie (%)
377	3
716	2
954	2
1016	3
1048	10
1898	2
1920	6
1979	5
1999	2
2644	3
2723	2
2849	4
2917	4
3171	3
3636	2
3673	2
3684	2
3840	3

Tab. VI.3 – Modes de denture principaux de la boîte de vitesses et leur taux d'énergie associé.

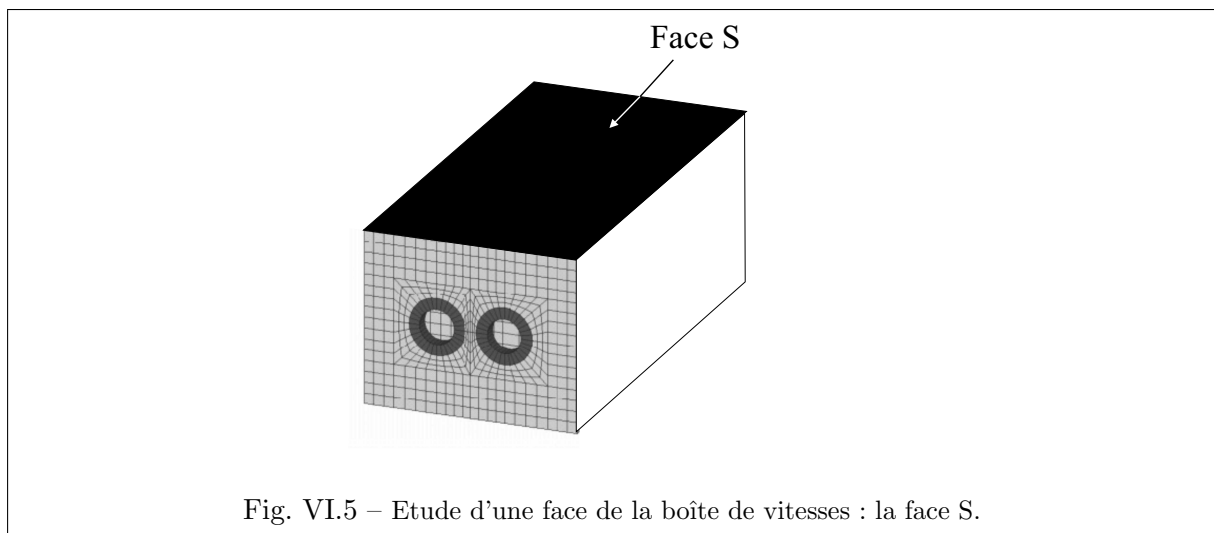


Fig. VI.5 – Etude d'une face de la boîte de vitesses : la face S.

2.1 Fonction de transfert vibratoire

On s'intéresse dans un premier temps à la fonction de transfert vibratoire entre la surcharge de denture et le carter de la boîte de vitesses. Cette étude va nous permettre de mettre en évidence l'influence de l'effort de denture sur la réponse vibratoire et acoustique de la transmission. Pour

cela, une force harmonique unitaire située dans le plan d'action de l'engrènement et normale à la denture de la roue menée (Fig. VI.6) est appliquée au niveau de l'engrenage 35/49 dents.

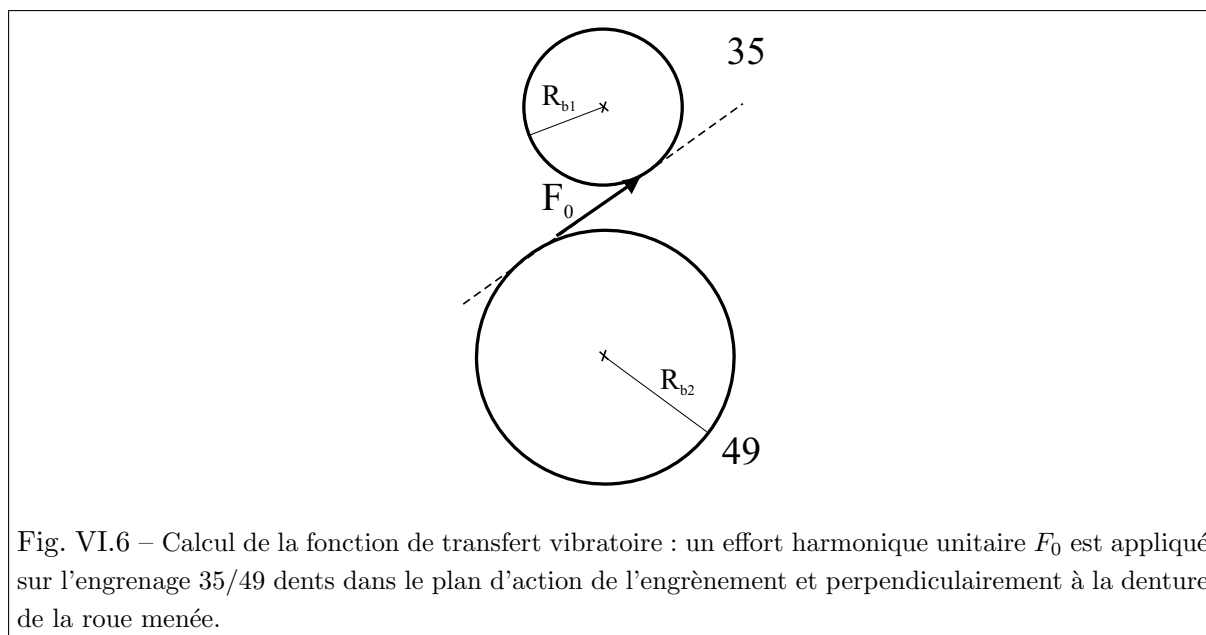


Fig. VI.6 – Calcul de la fonction de transfert vibratoire : un effort harmonique unitaire F_0 est appliqué sur l'engrenage 35/49 dents dans le plan d'action de l'engrènement et perpendiculairement à la denture de la roue menée.

La vitesse normale à la surface du carter est calculée en chaque noeud du maillage éléments finis de la face S. La moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne s'écrit alors comme suit :

$$\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_S = \frac{1}{S} \int_S \overline{v^2(\mathbf{q}, \omega)} dS, \quad (\text{VI.1})$$

où $\overline{v^2(\mathbf{q}, \omega)}$ est la vitesse quadratique moyenne en un point \mathbf{q} du carter égale à :

$$\overline{v^2(\mathbf{q}, \omega)} = \frac{1}{T} \int_T v^2(\mathbf{q}, \omega, t) dt. \quad (\text{VI.2})$$

La figure VI.7 présente l'évolution de $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_S$ en fonction de la fréquence. On retrouve l'existence de pics de résonance aux fréquences des modes de denture identifiés au paragraphe 1.3.2.

2.2 Réponse vibratoire induite par l'erreur statique de transmission et les fluctuations de la raideur d'engrènement

La réponse vibratoire du carter de la transmission est ensuite calculée en tenant compte des fluctuations de la raideur d'engrènement et de l'erreur statique de transmission associée au couple 35/49 dents qui constituent les principales sources d'excitation vibratoire de la transmission (Chapitre I). L'erreur statique de transmission est calculée en prenant en compte les corrections micro-géométriques des dentures mais pas les défauts de fabrication. Le couple extérieur est maintenu constant, égal à 600 N.m sur l'arbre d'entrée, ce qui permet d'avoir un couple moteur égal à 827 N.m sur l'arbre de sortie.

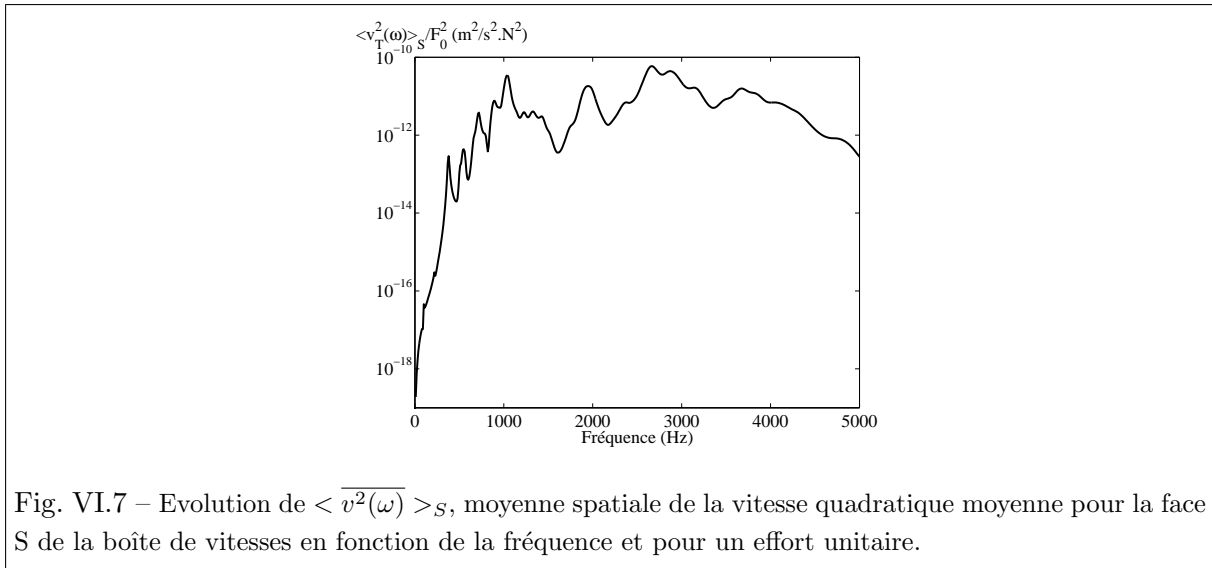


Fig. VI.7 – Evolution de $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_S$, moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne pour la face S de la boîte de vitesses en fonction de la fréquence et pour un effort unitaire.

2.2.1 Fluctuations de la raideur d'engrènement et de l'erreur statique de transmission

La figure VI.8(a) présente le spectre en amplitude des fluctuations de la raideur d'engrènement autour de la valeur moyenne introduites sur l'engrenage 35/49 dents en fonction de la fréquence d'engrènement. Le spectre est dominé par la raie à la fréquence d'engrènement, les amplitudes des raies d'ordre supérieur étant nettement plus faibles. Le tracé temporel de la raideur d'engrènement présenté figure VI.8(b) permet d'observer l'évolution périodique de la raideur, de période égale à la période d'engrènement T_e . La variation de la raideur entre deux et trois couples de dents en prise pour un couple d'engrenages hélicoïdaux est clairement mise en évidence. L'amplitude crête à crête de la fluctuation est d'environ $52 \text{ N}/\mu\text{m}$ soit 15 % de la valeur moyenne.

Les figures VI.9(a) et VI.9(b) présentent respectivement le spectre en amplitude et l'évolution temporelle périodique de l'erreur statique de transmission introduite pour le calcul de la réponse vibratoire de la transmission. A nouveau, le spectre est marqué par l'existence de raies aux harmoniques de la fréquence d'engrènement, les deux premières raies constituent les composantes principales de ce spectre. L'amplitude crête à crête de la fluctuation est d'environ $3 \mu\text{m}$ soit 12 % de la valeur moyenne égale à $25,9 \mu\text{m}$. Notons que ces fluctuations sont très faibles car les corrections de denture introduites sont optimales pour le couple moteur choisi et minimisent donc les fluctuations de l'erreur statique de transmission.

2.2.2 Surcharge dynamique de denture

Pour un régime de fonctionnement variant de 0 à 3000 tr/min, la fréquence d'engrènement du couple 35/49 dents varie de 0 à 1270 Hz, et le quatrième harmonique de cette fréquence varie de 0 à 6350 Hz. La figure VI.10 présente l'évolution en fonction de la fréquence d'engrènement de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture. Tout comme l'erreur statique de

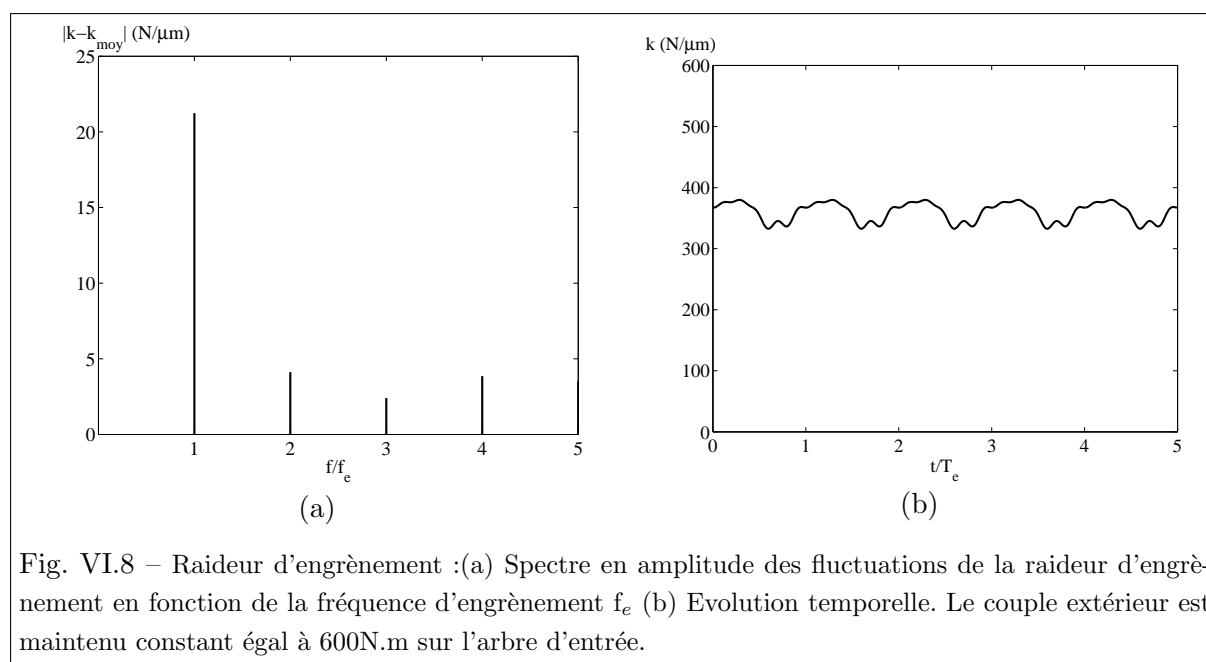


Fig. VI.8 – Raideur d'engrènement : (a) Spectre en amplitude des fluctuations de la raideur d'engrènement en fonction de la fréquence d'engrènement f_e (b) Evolution temporelle. Le couple extérieur est maintenu constant égal à 600N.m sur l'arbre d'entrée.

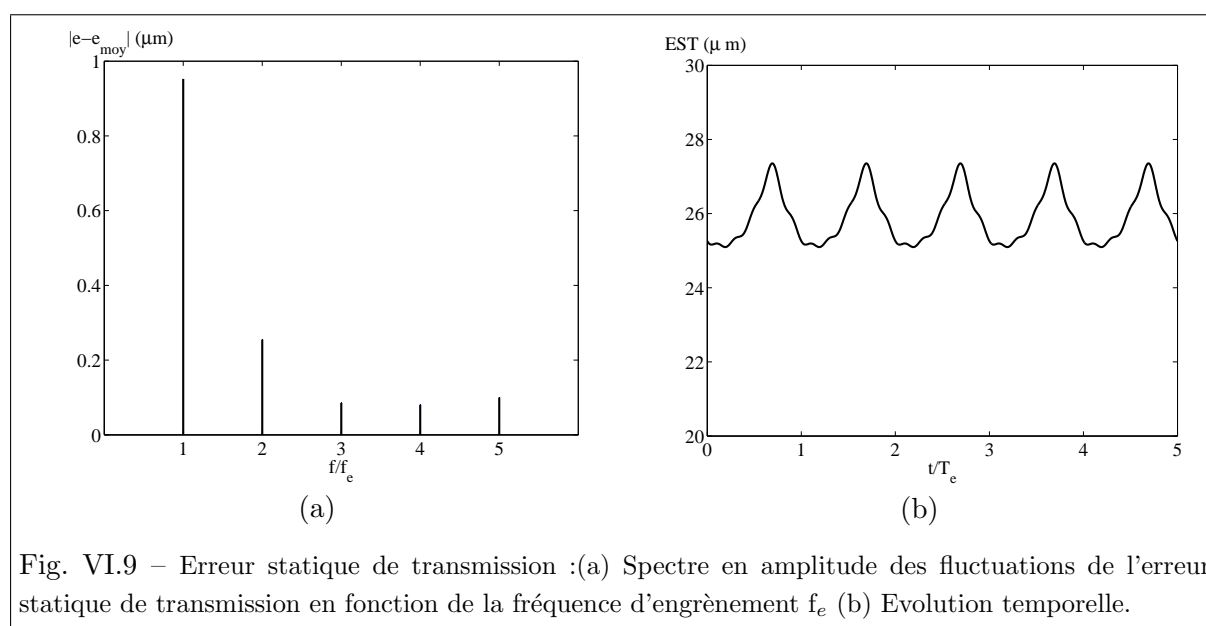


Fig. VI.9 – Erreur statique de transmission : (a) Spectre en amplitude des fluctuations de l'erreur statique de transmission en fonction de la fréquence d'engrènement f_e (b) Evolution temporelle.

transmission ou les fluctuations de la raideur d'engrènement, le spectre de l'effort de denture est constitué pour l'essentiel de 5 raies aux multiples de la fréquence d'engrènement. Pour le calcul de la valeur efficace de cet effort, les contributions de toutes les raies du spectre sont prises en compte. La courbe présente des pics d'amplification liés à l'excitation en résonance de modes de denture. L'amplitude de ces pics est proportionnelle aux taux d'énergie ρ_e des modes de denture correspondants, mais aussi à l'amplitude de la raie associée à l'harmonique incriminé dans la résonance. Par exemple, le pic à 1048 Hz, pic d'amplitude maximale, correspond au mode de denture le plus énergétique et à l'excitation de ce mode par le fondamental de la fréquence

d'engrènement, raie dominante des spectres de l'excitation. Les pics à 377 Hz, 716 Hz, 954 Hz correspondent à l'excitation des modes de denture situés à ces mêmes fréquences par le fondamental de la fréquence d'engrènement. A ces contributions viennent s'ajouter les contributions liées à l'excitation de modes de denture par les harmoniques de la fréquence d'engrènement : ainsi, l'excitation du mode de denture à 1048 Hz par le deuxième harmonique de la fréquence d'engrènement contribue au pic à 377 Hz. Les pics d'amplitude plus faible correspondent à l'excitation de modes de denture par des harmoniques de la fréquence d'engrènement : le pic autour de 525 Hz correspond à l'excitation du mode de denture à 1048 Hz par le premier harmonique de la fréquence d'engrènement. En dehors de ces pics d'amplification, la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture augmente avec la fréquence d'engrènement et donc avec la vitesse de rotation.

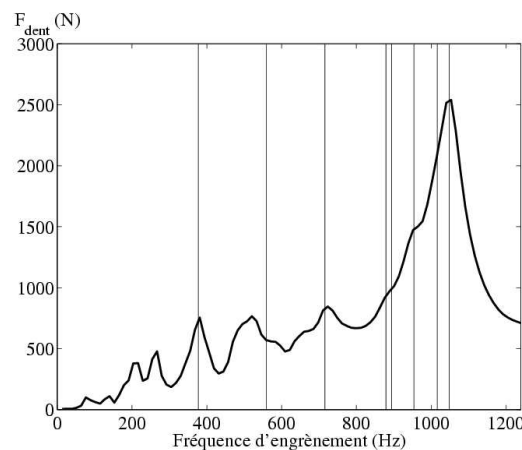


Fig. VI.10 – Evolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture F_{dent} (N) en fonction de la fréquence d'engrènement f_e (Hz) et fréquences propres des modes de denture : l'excitation en résonance des modes de denture génère des pics d'amplification.

La figure VI.11 présente les spectres d'amplitude et les évolutions temporelles de la surcharge dynamique de denture pour différents régimes de fonctionnement correspondant à des fréquences d'engrènement égales à 317 Hz, 634 Hz et 1050 Hz. Le contenu fréquentiel de la surcharge de denture est lié à celui de l'erreur statique de transmission, constitué de raies à la fréquence d'engrènement et à ses harmoniques. L'évolution temporelle observée à 317 Hz et à 634 Hz est marquée par la prédominance simultanée de plusieurs raies. L'évolution temporelle observée à 1050 Hz est proche de l'excitation en résonance du mode de denture à 1048 Hz, ce qui permet d'expliquer l'évolution presque harmonique de la surcharge de denture.

2.2.3 Réponse vibratoire

La surcharge dynamique de denture est transmise au carter par l'intermédiaire de tous les composants de la transmission et est à l'origine de l'état vibratoire de celui-ci. La moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne sur la face S est estimée à partir de la fonction

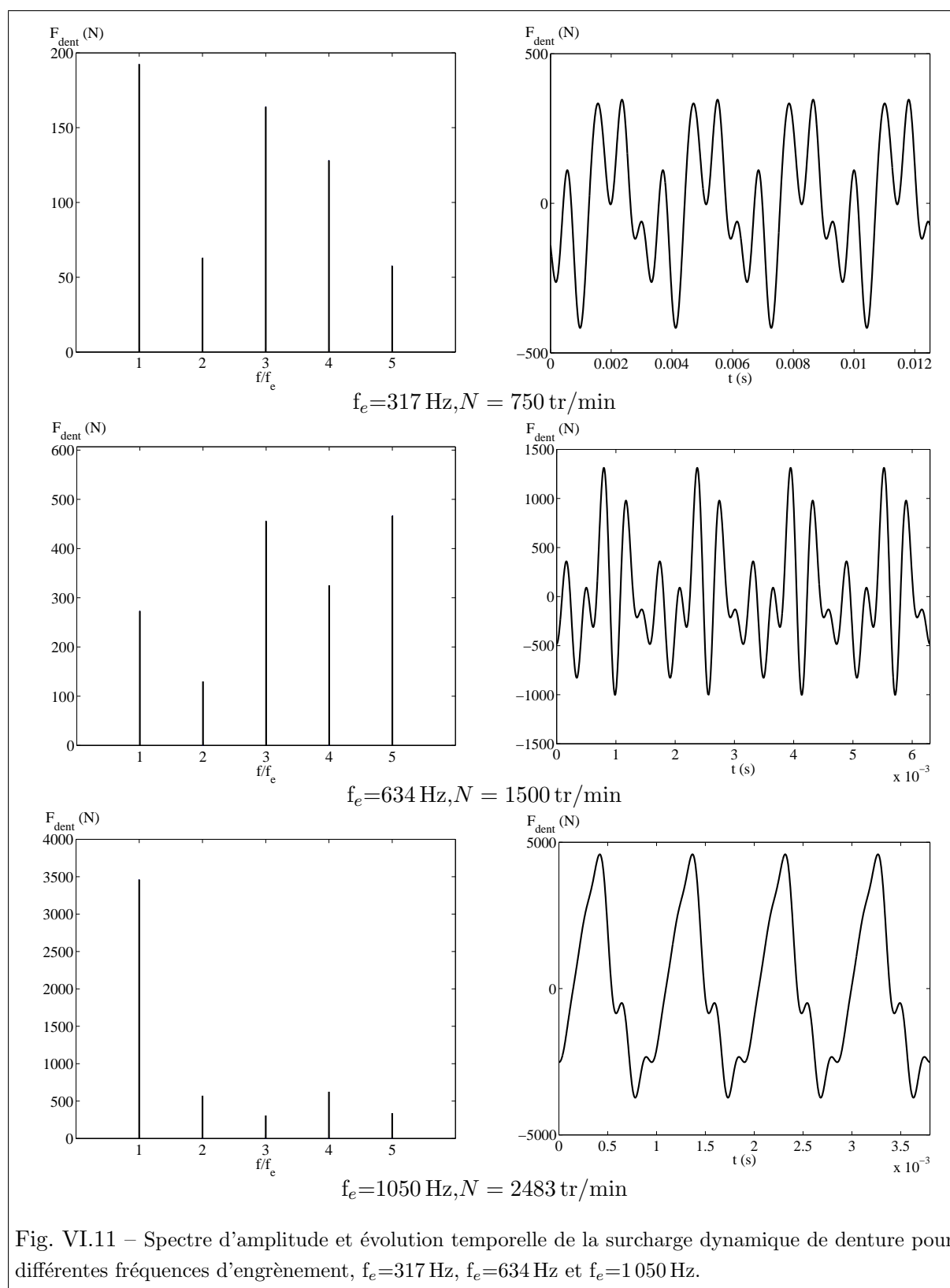
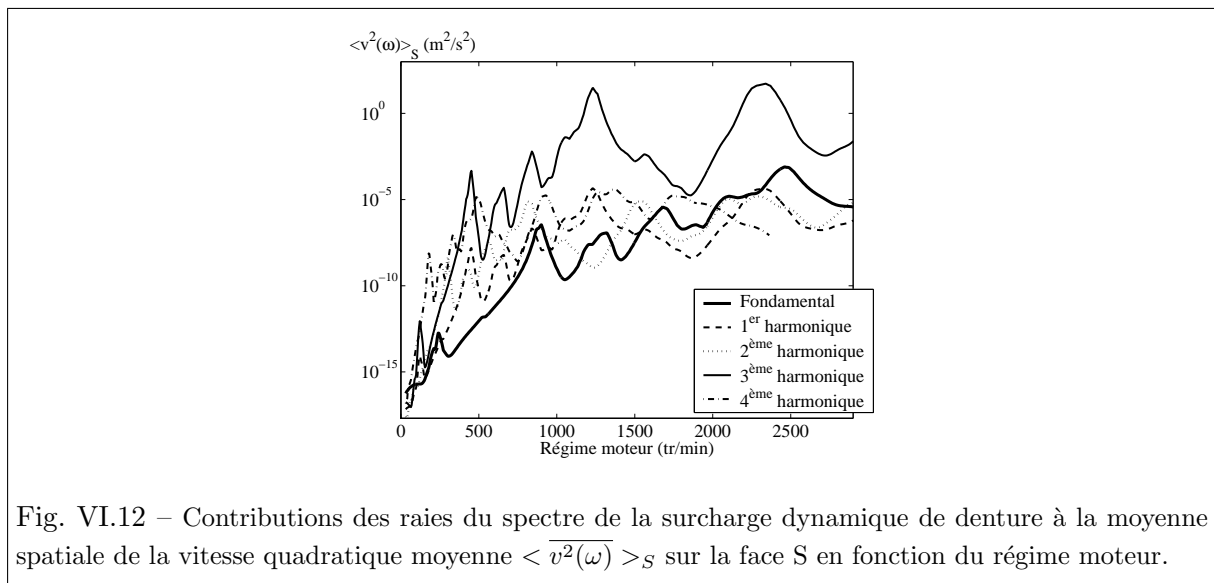


Fig. VI.11 – Spectre d'amplitude et évolution temporelle de la surcharge dynamique de denture pour différentes fréquences d'engrènement, $f_e = 317 \text{ Hz}$, $f_e = 634 \text{ Hz}$ et $f_e = 1050 \text{ Hz}$.

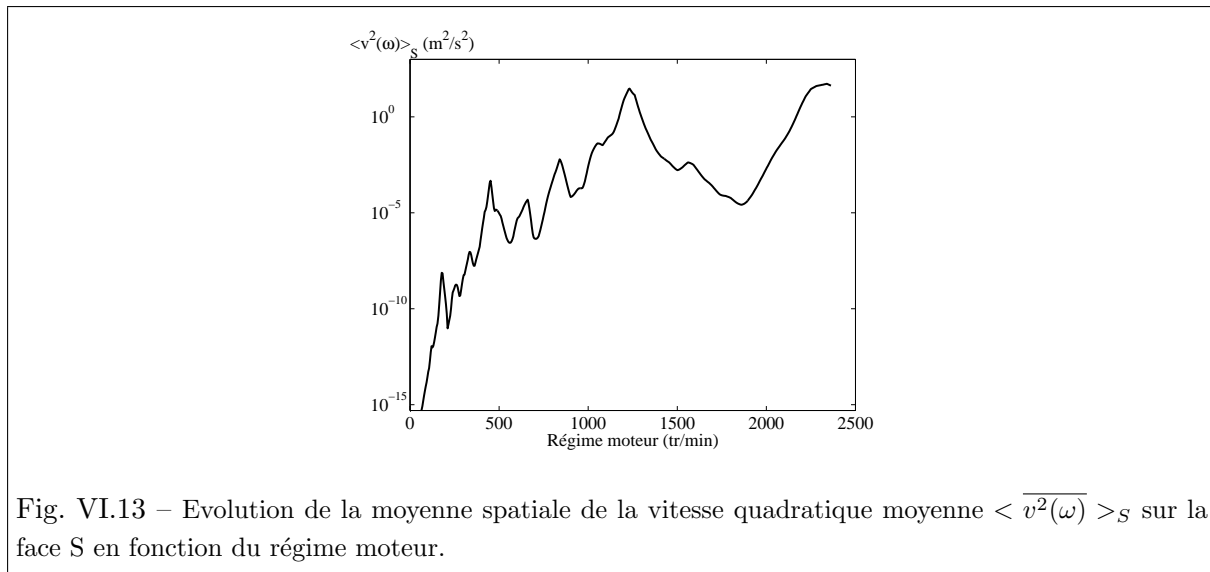
de transfert vibratoire pour un effort unitaire calculée au paragraphe 2.1 et de la surcharge dynamique de denture calculée au paragraphe 2.2.2. Le calcul est conduit dans un premier temps en considérant individuellement les contributions des 5 raies retenues dans le spectre de la surcharge dynamique de denture. La figure VI.12 présente les contributions respectives des raies à la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne sur la face S en fonction du régime moteur. On constate que la contribution prépondérante dépend de la vitesse de rotation, malgré tout le troisième harmonique domine quasiment sur toute la bande d'étude.



Dans un deuxième temps, toutes les contributions sont sommées et la figure VI.13 présente l'évolution de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne sur la face S en fonction du régime moteur. La fonction de transfert vibratoire (Fig. VI.7) étant connue entre 0 et 5000 Hz, l'étude est possible pour les régimes de fonctionnement associés aux variations de la fréquence d'engrènement entre 0 et 1000 Hz de façon à prendre en compte les 5 premières raies du spectre de la surcharge dynamique : ainsi, l'étude est possible pour les régimes de fonctionnement compris entre 0 et 2365 tr/min.

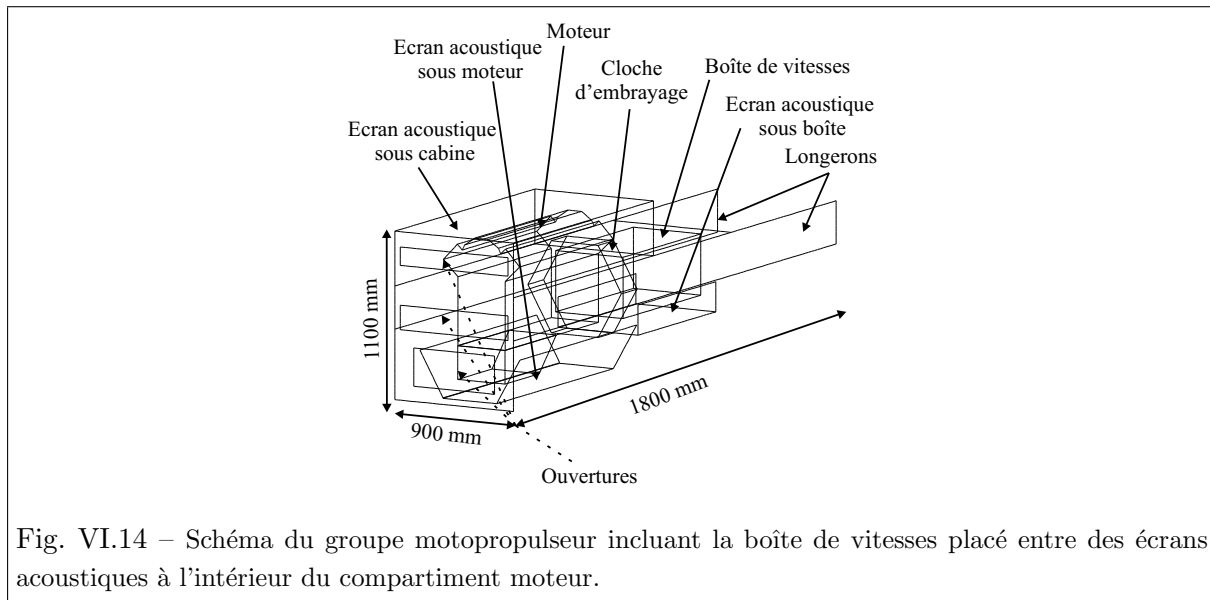
3 Encapsulage du groupe motopropulseur

L'objectif maintenant est de tester la mise en œuvre de la méthode hybride dans le cas où la boîte de vitesses et le groupe motopropulseur dont elle fait partie sont placés à l'intérieur du compartiment moteur d'un véhicule de type poids lourd. Les dimensions et les propriétés des matériaux absorbants sont choisis de façon à s'approcher au mieux de conditions réelles et montrer l'applicabilité de la méthode à un cas industriel plus complexe [Reboul et al., 2004a, Reboul et al., 2004b, Reboul et al., 2005]. L'encapsulage retenu est inspiré de la maquette présentée dans la thèse de M. Thivant [Thivant, 2003].

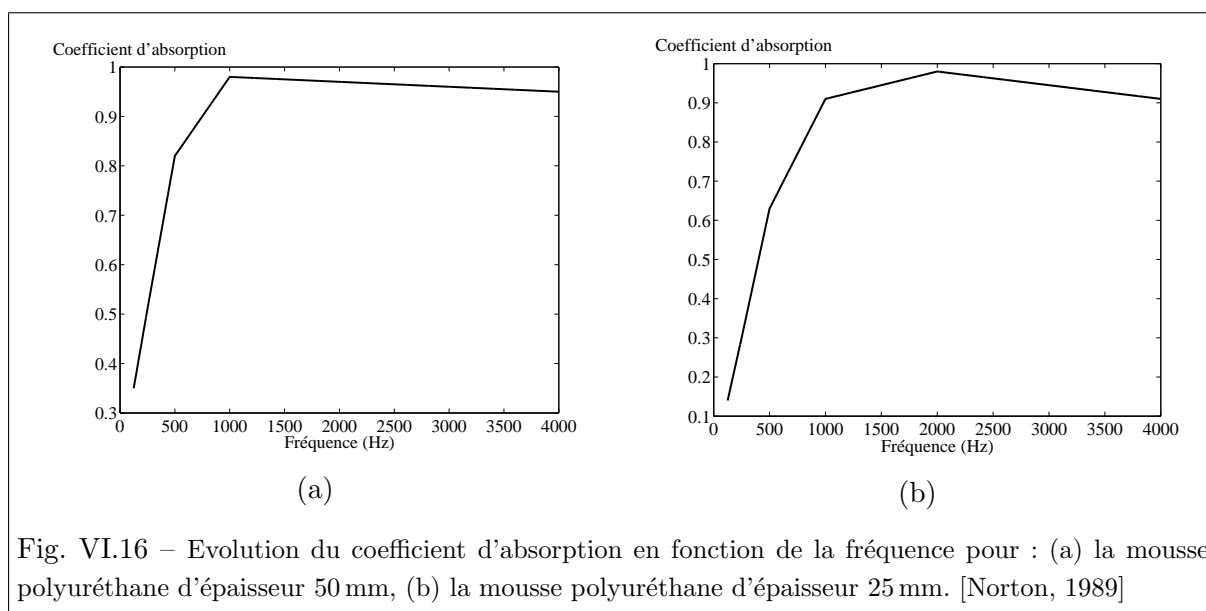
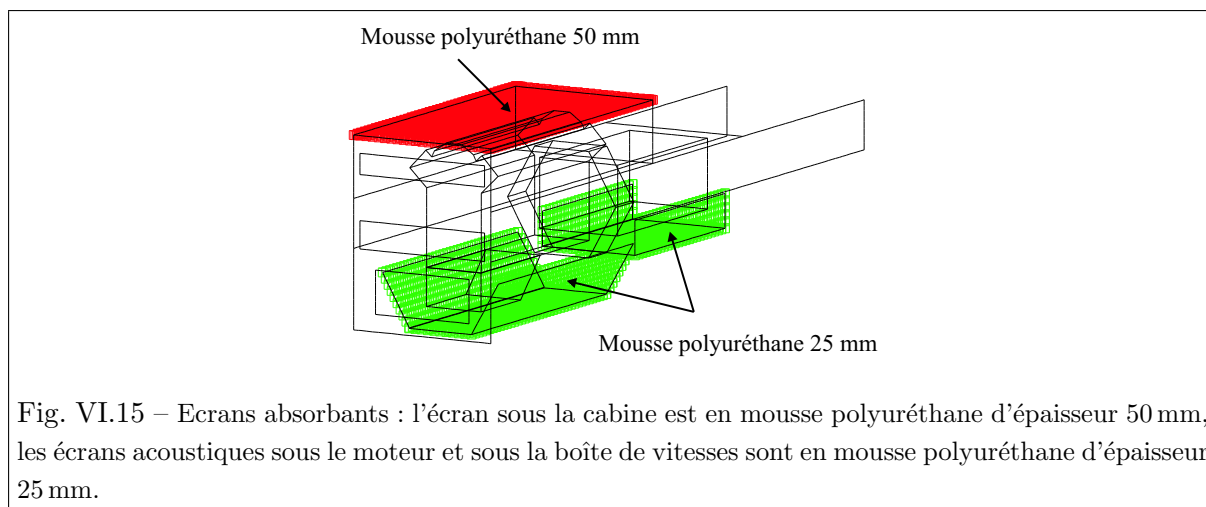


3.1 Description du groupe motopropulseur et de l'encapsulage

Le schéma du groupe motopropulseur étudié est présenté sur la figure VI.14. Il comprend le moteur, la cloche d'embrayage et la boîte de vitesses. Il est encadré des longerons et d'écrans acoustiques absorbants dont le rôle est de réduire le bruit rayonné à l'extérieur du véhicule.



Les écrans sont introduits sous la partie cabine (écran supérieur), sous le moteur et sous la boîte de vitesses (écrans inférieurs) (Fig. VI.15). L'écran supérieur est en mousse polyuréthane d'épaisseur 50 mm et les écrans inférieurs sont en mousse polyuréthane d'épaisseur 25 mm. Les coefficients d'absorption pour ces deux matériaux sont donnés dans le tableau V.2 au chapitre V : les figures VI.16(a) et (b) présentent l'évolution du coefficient d'absorption en fonction de la fréquence pour ces deux absorbants.



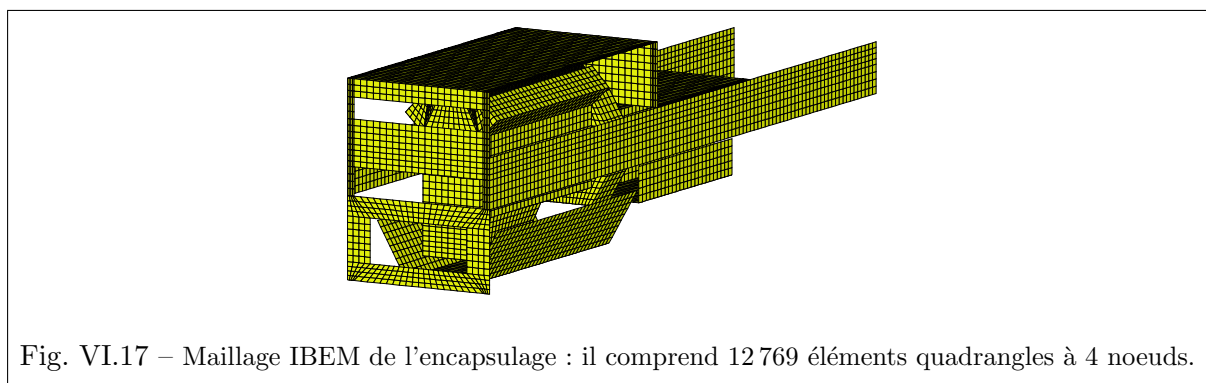
3.2 Réponse acoustique du carter de la boîte de vitesses

On s'intéresse au bruit rayonné à l'extérieur du compartiment moteur lié aux vibrations de la face supérieure (face S) du carter de la boîte de vitesses induites par l'erreur statique de transmission sous charge. La géométrie de ce cas d'étude est complexe avec la présence d'absorbants et d'ouvertures, et le spectre des vibrations est large bande. Ainsi, la configuration est propice à la mise en œuvre d'une méthode énergétique hautes fréquences délivrant une information globale et nécessitant des temps de calcul réduits. En effet, la mise en œuvre de la méthode des éléments finis de frontière à ce type d'application conduit à des modèles ayant un très grand nombre de degrés de liberté de par le critère de maillage en $\lambda/6$ couramment utilisé.

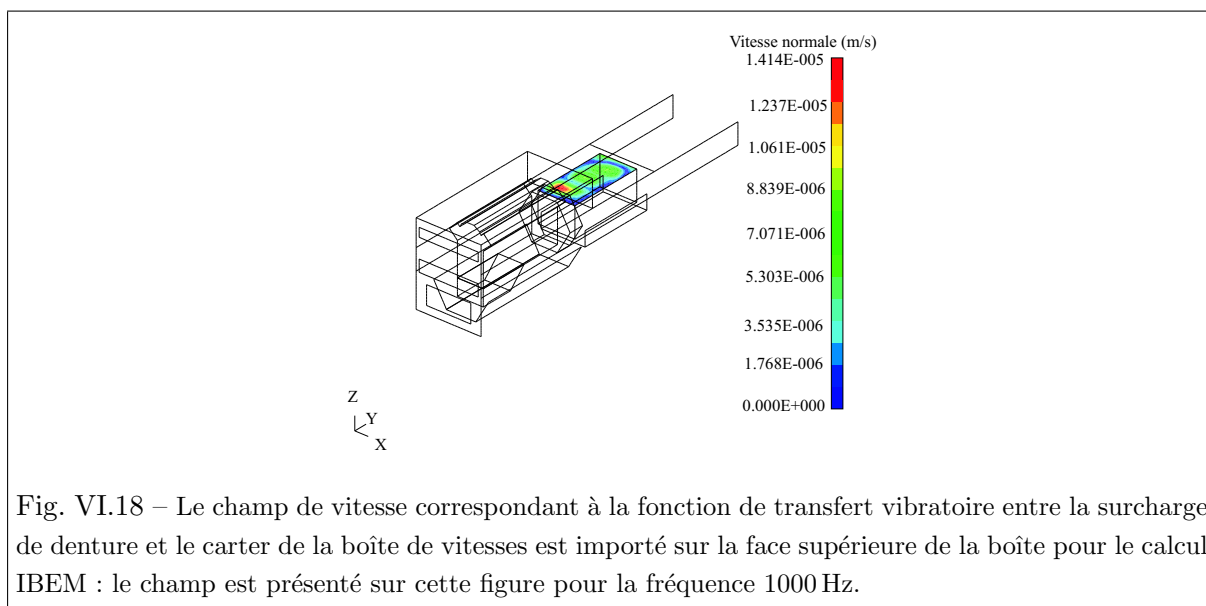
Réponse acoustique liée à la fonction de transfert vibratoire

Les calculs acoustiques sont tout d'abord réalisés à partir de la fonction de transfert vibratoire entre la surcharge dynamique de denture et le carter (paragraphe 2.1) de façon à exploiter ces calculs pour un effort quelconque. Les résultats obtenus sont comparés dans ce cas à ceux obtenus par la méthode des éléments finis de frontière indirecte - IBEM (paragraphe V.1.3) qui s'applique en présence d'un environnement semi-ouvert.

Les calculs IBEM sont réalisés à l'aide du logiciel SYSNOISE. Les moyens informatiques dont nous avons disposé ont limité la taille du maillage utilisé, et donc le domaine fréquentiel d'étude. Le maillage IBEM de l'encapsulage est présenté figure VI.17. Il comprend 12 769 éléments quadrangles à 4 noeuds et permet une étude jusqu'à environ 1420 Hz selon le critère en $\lambda/6$.



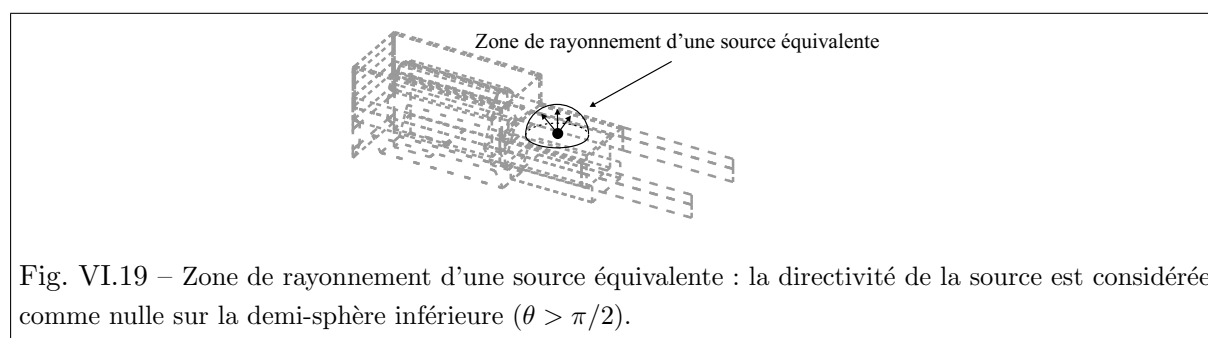
Le champ vibratoire est importé sur le maillage de la face supérieure du carter de la boîte de vitesses. Pour illustrer cette étape, la figure VI.18 présente le champ de vitesse importé à la fréquence 1000 Hz.



Les calculs sont conduits à fréquence pure tous les 50 Hz entre 700 et 1400 Hz. Le temps

de calcul associé est environ 6 h pour chaque fréquence (ordinateur Intel Pentium 4 avec un processeur à 2,53 GHz et 512 Mo de mémoire vive).

Les calculs par la méthode hybride sont réalisés à l'aide du programme C++ que nous avons développé pour le calcul des sources équivalentes et à l'aide du logiciel CERES développé en interne pour le calcul des sources fictives par la méthode du transfert radiatif. Le maillage de l'encapsulage pour la méthode du transfert radiatif comprend 367 éléments triangulaires. Les sources équivalentes introduites prennent en compte les contributions des sources de pression, de vitesse et d'intensité dont les amplitudes sont données par les équations (V.25) à (V.27). A l'issue du calcul par la méthode spectrale itérative, seul le champ vibratoire pariétal est connu. Afin d'évaluer l'ensemble des sources, il est nécessaire de déterminer également le champ de pression pariétal. Comme suggéré au paragraphe 2.2.5, la méthode retenue ici est basée sur la méthode des éléments finis directe (DBEM). Un calcul DBEM est donc mené sur la face supérieure du carter seule afin de calculer le champ de pression pariétal à partir de la connaissance du champ vibratoire pariétal. Par ailleurs, à cause de la singularité des noyaux énergétiques, les sources équivalentes ne peuvent être introduites à la surface même du carter. Elles sont donc placées à la distance $h = 1$ mm selon la normale extérieure à la face supérieure du carter. Afin que ces sources n'émettent pas en direction de cette même face ce qui conduirait à prendre en compte un champ réfléchi qui n'a pas lieu d'être, leur directivité est arbitrairement considérée comme nulle sur la demi-sphère inférieure (Fig. VI.19). La figure VI.20 présente la carte des sources équivalentes sur la face supérieure de la boîte sur l'octave centré en 1000 Hz et dans la direction ($\theta = 30^\circ$, $\phi = 60^\circ$).



Les calculs sont menés par bande d'octave, à savoir sur l'octave centré 1000 Hz par rapport à la bande d'étude IBEM. Le temps de calcul est environ 1 h (ordinateur Intel Pentium 4 avec un processeur à 2,4 GHz et 512 Mo de mémoire vive).

Les résultats des deux méthodes font l'objet d'une comparaison sur l'octave considéré.

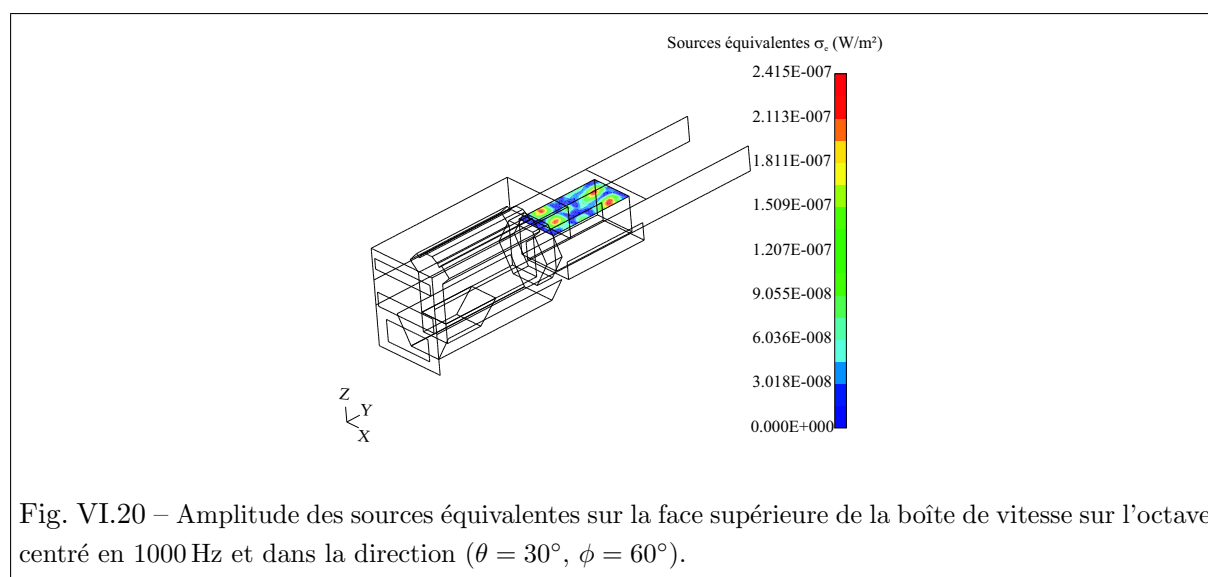


Fig. VI.20 – Amplitude des sources équivalentes sur la face supérieure de la boîte de vitesse sur l’octave centré en 1000 Hz et dans la direction ($\theta = 30^\circ$, $\phi = 60^\circ$).

Réponse acoustique liée aux vibrations induites par l’erreur statique de transmission et les fluctuations de la raideur d’engrènement

La méthode hybride est ensuite mise en œuvre pour évaluer la réponse acoustique du carter de la boîte de vitesses liée aux vibrations induites par l’erreur statique de transmission et les fluctuations de la raideur d’engrènement.

3.3 Résultats

3.3.1 Réponse acoustique liée à la fonction de transfert vibratoire

Plans de calcul

Les calculs sont conduits sur deux plans :

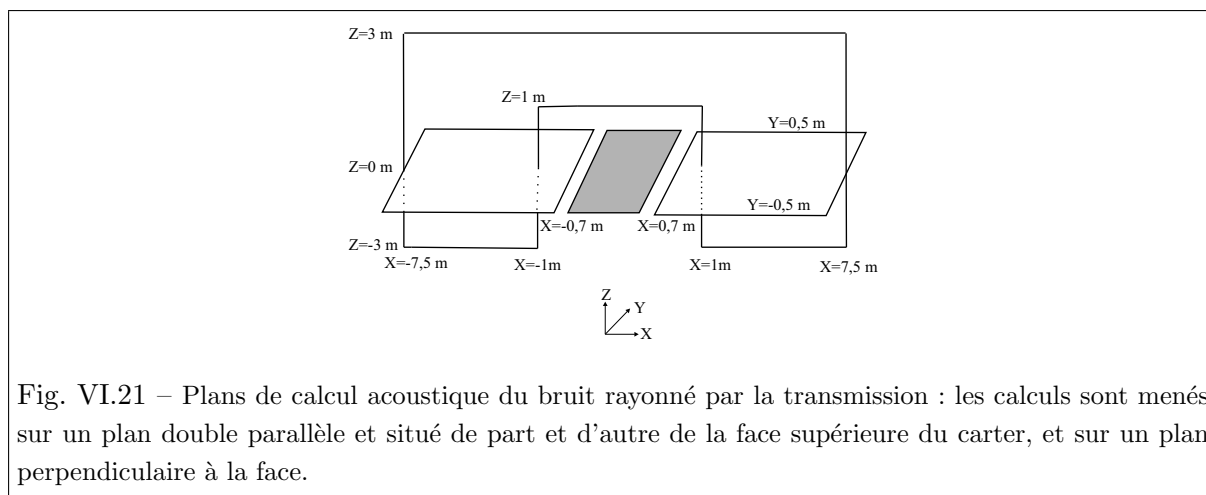
- un plan double parallèle et situé de part et d’autre de la face supérieure du carter,
- un plan perpendiculaire à la face supérieure du carter.

Les caractéristiques géométriques et les dimensions des deux plans sont présentées sur la figure VI.21.

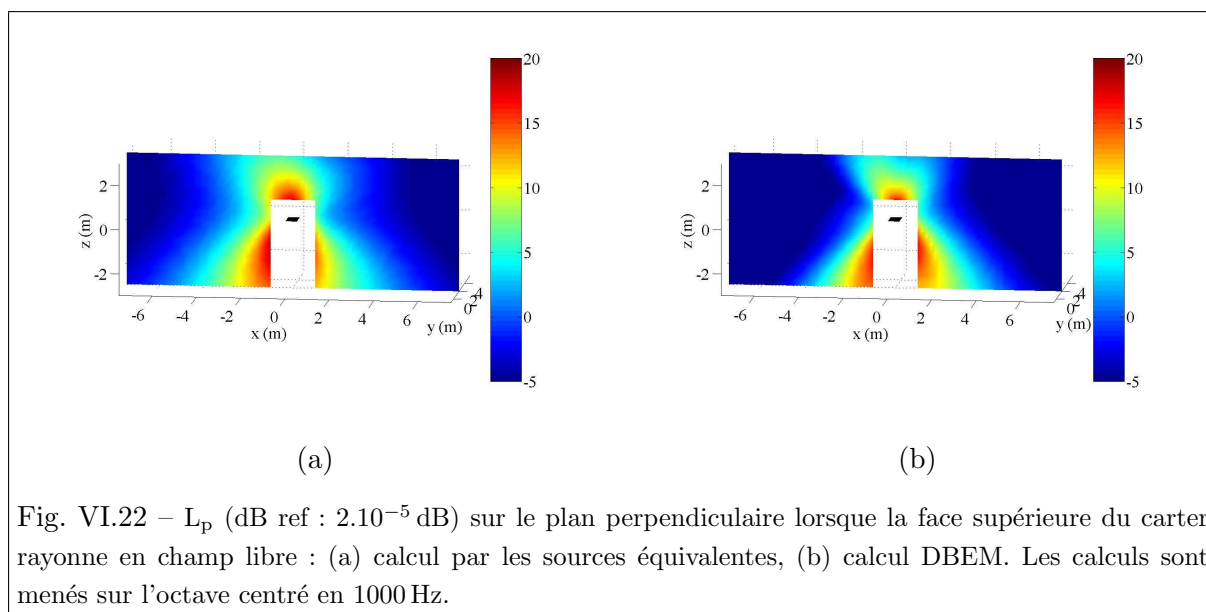
Rayonnement de la face supérieure du carter de la boîte de vitesses en champ libre

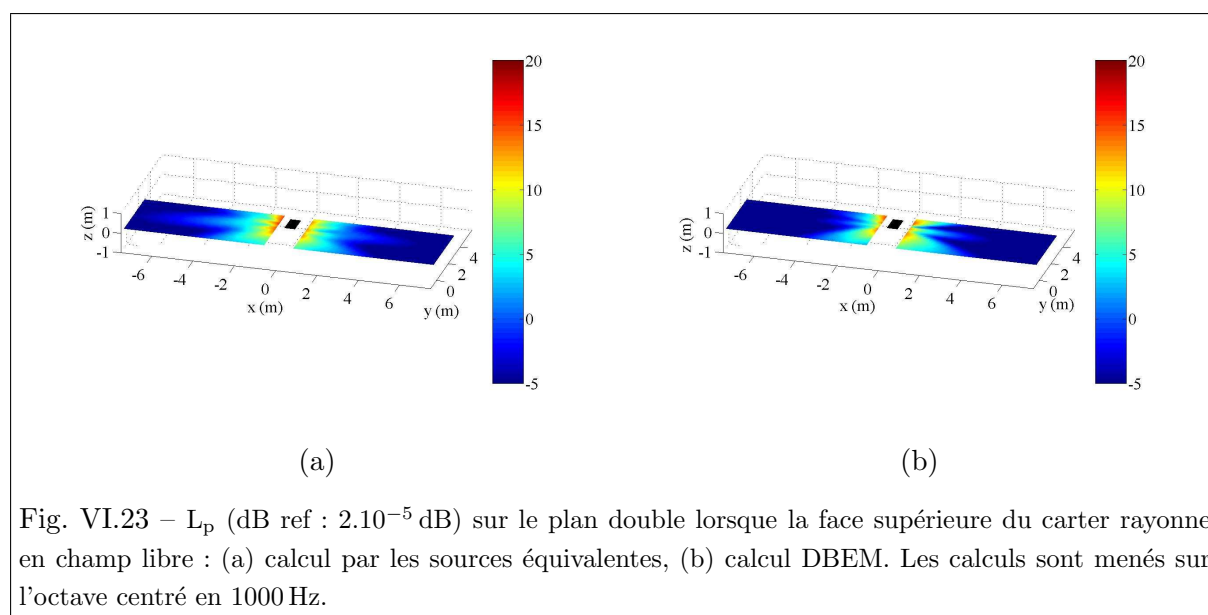
Afin de vérifier que les sources équivalentes introduites permettent effectivement de reproduire le rayonnement acoustique de la face supérieure du carter de la boîte de vitesses en champ libre, les calculs sont conduits dans un premier temps en supprimant tous les éléments autres que la face.

Les résultats obtenus à partir des sources équivalentes sont comparés dans ce cas à ceux obtenus à l’aide de la méthode DBEM puisque l’on s’intéresse au rayonnement en champ libre de la face supérieure du carter. Les calculs DBEM sont conduits à fréquence pure tous les 50 Hz entre 700 et 1400 Hz puis moyennés sur la bande d’octave. Le maillage des sources équivalentes introduit



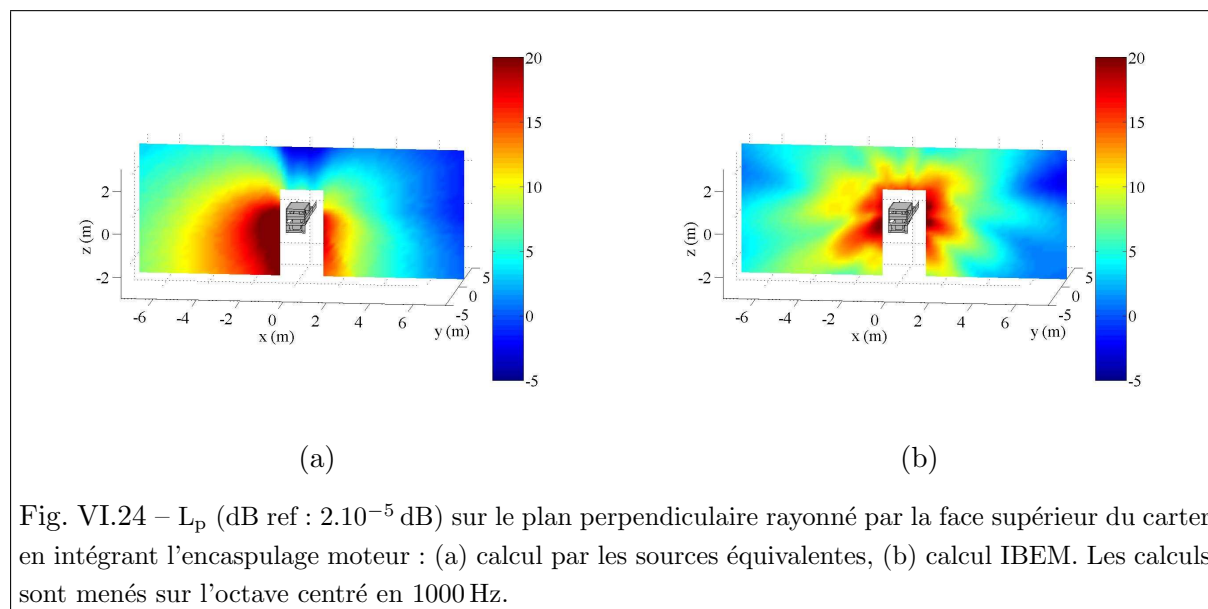
respecte le critère en $\lambda/4$ retenu au chapitre V : pour l'octave considéré, ce critère conduit donc à introduire 72 sources équivalentes. Les figures VI.22 et VI.23 présentent les résultats en terme de niveau de bruit L_p sur l'octave centré en 1000 Hz et pour les deux plans de calcul acoustique. On observe que les cartes obtenues à partir des sources équivalentes sont en bon accord en amplitude et en directivité avec celles obtenues par la méthode DBEM, ce qui nous permet de valider les sources équivalentes introduites pour la mise en œuvre de la méthode hybride. Ces sources vont à présent pouvoir être utilisées pour mener le calcul plus complet intégrant l'environnement du carter.





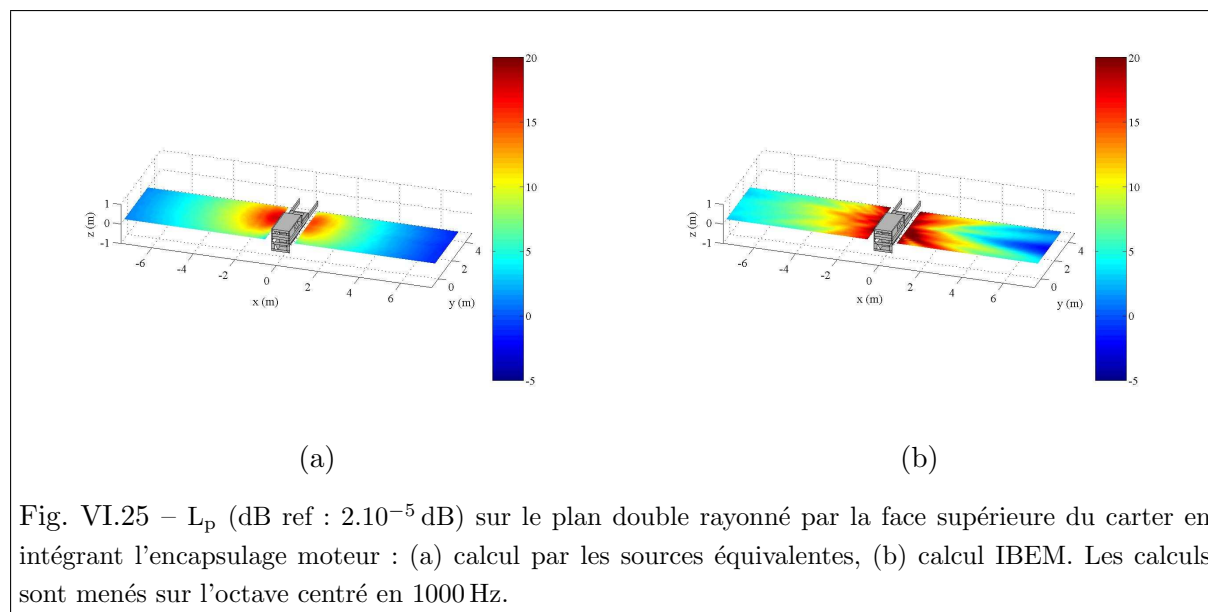
Rayonnement acoustique de la face supérieure du carter dans son environnement (encapsulation)

Les figures VI.24 et VI.25 présentent les résultats en termes de niveau de bruit L_p sur l'octave centré en 1000 Hz et pour les deux plans de calcul acoustique, obtenus en intégrant l'encapsulation moteur autour du groupe motopropulseur incluant la boîte de vitesses.



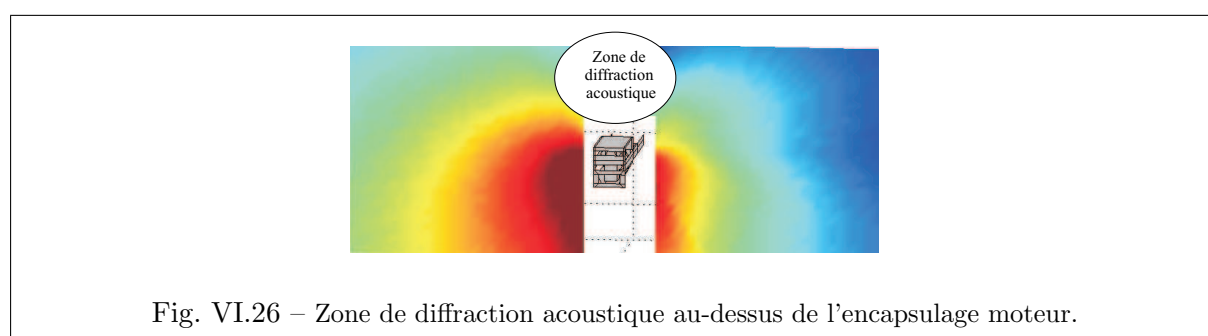
Plusieurs remarques peuvent être dégagées :

- La méthode hybride et la méthode IBEM sont en accord en terme de niveau de bruit attendu. Les deux approches prédisent des tendances similaires avec notamment un rayon-



nement plus marqué sur la partie gauche de l'encapsulage que sur la partie droite.

- La méthode hybride ne permet pas de retrouver les phénomènes d'interférences qui expliquent vraisemblablement les lobes de directivité sur les cartes IBEM.
- La méthode hybride repose sur l'hypothèse de réflexion diffuse alors que la réflexion dans la méthode IBEM est spéculaire. Cette différence peut permettre également d'expliquer les écarts observés entre les deux approches.
- L'étude du rayonnement sur le plan perpendiculaire à l'encapsulage (Fig. VI.24) permet de constater que, contrairement à la méthode IBEM, la méthode hybride ne prévoit aucun rayonnement dans la direction verticale au-dessus de l'écran acoustique supérieur placé sous la cabine et sur le carter de la boîte de vitesses. Il est probable que le rayonnement prédit par la méthode IBEM dans cette zone de l'espace soit essentiellement lié au phénomène de diffraction acoustique (Fig. VI.26).



Or, même si l'intégration de ce phénomène acoustique dans la méthode du transfert radiatif a fait l'objet d'une étude dans le cadre de cette thèse (Chapitre IV), l'implémentation numérique dans le logiciel CERES n'a pas été réalisée et la diffraction n'est donc pas prise en compte dans les résultats obtenus ici. Il apparaît au travers de cet exemple que

la diffraction acoustique est un phénomène qui permet d'expliquer le rayonnement dans les zones d'ombre autour d'un encapsulage moteur, et il convient donc de le prendre en compte pour décrire précisément le bruit rayonné par l'encapsulage.

Notons enfin que les limites d'ordre numérique rencontrées pour appliquer la méthode IBEM n'ont pas permis de mener le calcul véritablement en hautes fréquences, et il serait intéressant de poursuivre le travail dans ce sens afin de disposer d'une comparaison plus propice à la méthode hybride.

3.3.2 Réponse acoustique du carter de la boîte de vitesses liée aux vibrations induites par l'erreur statique de transmission et les fluctuations de la raideur d'engrènement

Nous proposons dans ce dernier paragraphe de calculer la réponse acoustique du carter de la boîte de vitesses liée aux vibrations induites par l'erreur statique de transmission et les fluctuations de la raideur d'engrènement. La boîte de vitesses est intégrée au groupe motopropulseur placé au sein de l'encapsulage moteur. On s'intéresse au niveau de bruit en deux points situés aux coordonnées P_1 (7,5 ; 4,65 ; 0), et P_2 (-7,5 ; 4,65 ; 0) dans le repère de l'encapsulage (Fig. VI.27).

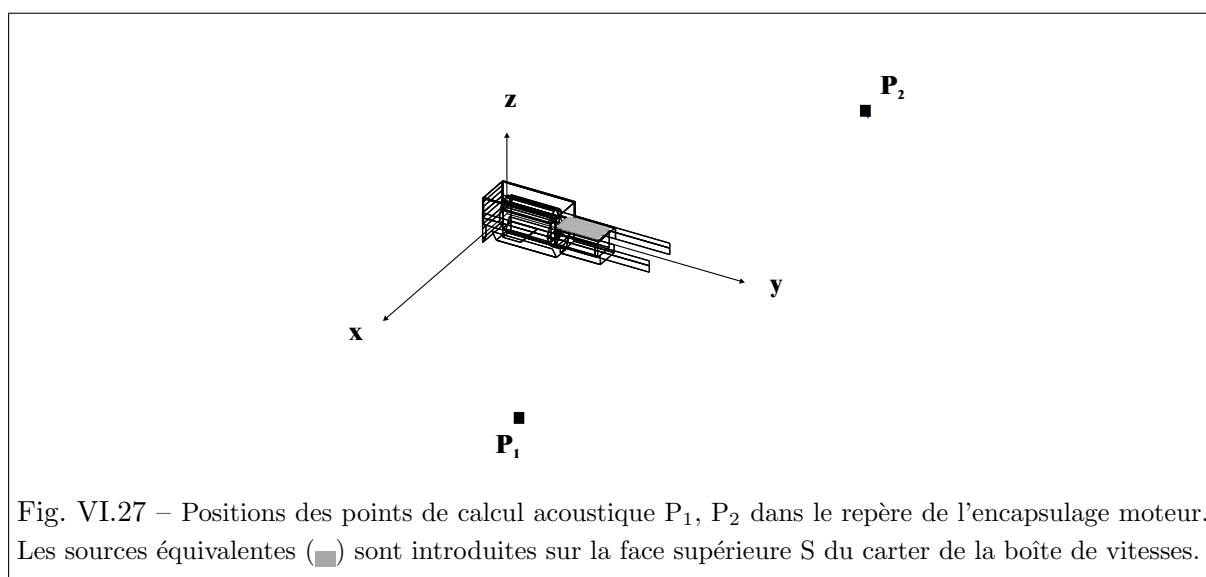


Fig. VI.27 – Positions des points de calcul acoustique P_1 , P_2 dans le repère de l'encapsulage moteur. Les sources équivalentes (■) sont introduites sur la face supérieure S du carter de la boîte de vitesses.

La démarche adoptée pour réaliser ce calcul consiste à exploiter la surcharge dynamique à l'origine de ces vibrations déterminée au paragraphe 2.2.2 ainsi que la réponse acoustique associée à la fonction de transfert vibratoire pour un effort unitaire évaluée au paragraphe 2.1. La fonction de transfert vibratoire est connue entre 0 et 5000 Hz, et on s'intéresse aux régimes de fonctionnement allant de 0 à 3000 tr/min sur l'arbre d'entrée relié au moteur. Ces régimes correspondent à une fréquence d'engrènement variant de 0 et 1270 Hz sur l'engrenage 35/49 dents. Par conséquent, la plage de fréquence (0 – 5000 Hz) correspond à celle intégralement balayée par le fondamental (0 – 1270 Hz) et les deux premiers harmoniques (0 – 2540 Hz et 0 – 3810 Hz). Seules les trois premières raies du spectre de la surcharge dynamique de denture sont donc prises en compte.

On s'intéresse à deux bandes d'octave décrites par la fréquence d'engrènement : la bande (353 – 707 Hz) centrée en 500 Hz et la bande (707 – 1414 Hz) centrée en 1000 Hz. On considère donc deux bandes de régime de fonctionnement moteur respectivement centrées sur les vitesses de rotation $N = 1182$ tr/min et $N = 2364$ tr/min.

- Lorsque la fréquence d'engrènement parcourt l'octave centré en 500 Hz, le fondamental parcourt le même octave, le premier harmonique parcourt l'octave centré en 1000 Hz. Le deuxième harmonique est à cheval entre l'octave centré en 1000 Hz et l'octave centré en 2000 Hz.
- Lorsque la fréquence d'engrènement parcourt l'octave centré en 1000 Hz, le fondamental parcourt le même octave, le premier harmonique parcourt l'octave centré en 2000 Hz. Le deuxième harmonique est à cheval entre l'octave centré en 2000 Hz et l'octave centré en 4000 Hz.

Compte tenu des contributions des raies, la méthode hybride est utilisée pour calculer la réponse acoustique associée à la fonction de transfert vibratoire sur 4 octaves centrés en 500, 1000, 2000 et 4000 Hz. En toute rigueur, le calcul ne peut pas être conduit sur l'octave centré en 4000 Hz puisque celui-ci s'étend jusqu'à 5650 Hz et que la fonction de transfert vibratoire n'est connue que jusqu'à 5000 Hz. Toutefois, notre intention est de montrer la mise en œuvre de la méthode pour une étude complète et nous ne tiendrons pas compte de cette limitation.

Le niveau de bruit aux deux points est calculé en sommant les contributions des trois raies retenues. Par exemple, pour l'octave centré en 500 Hz, le résultat est la somme de la contribution du fondamental calculée sur cet octave, de la contribution du premier harmonique calculée sur l'octave centré en 1000 Hz et de la moyenne pondérée des contributions du deuxième harmonique sur les octaves centrés en 1000 Hz et en 2000 Hz. La figure VI.28 présente les résultats du calcul aux deux points ainsi que les contributions respectives de chacune des raies de la surcharge dynamique au niveau de bruit. Le résultat est en adéquation avec les contributions respectives des raies retenues à la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne (Fig. VI.12). Ainsi, la courbe associée au fondamental devient dominante par rapport à celles associées au premier et au deuxième harmonique dans la deuxième partie de la bande de vitesses considérée, ce que l'on retrouve en terme de contribution au niveau de bruit.

Cette étude témoigne du fait que la prise en compte de l'ensemble des raies du spectre de la surcharge dynamique de denture nécessite de travailler sur des plages fréquentielles élevées d'un point de vue acoustique. Le calcul à l'aide de la méthode hybride qui couple ici la méthode spectrale itérative et la méthode du transfert radiatif permet d'estimer le niveau de bruit rayonné par la transmission pour des bandes de vitesse de rotation.

4 Conclusion

Ce chapitre a permis de montrer l'applicabilité de la méthode hybride à l'étude d'un cas complexe, proche d'un cas industriel. L'application concerne le bruit rayonné par le carter d'une boîte de vitesses poids lourd intégrée à un encapsulage moteur. Plus précisé-

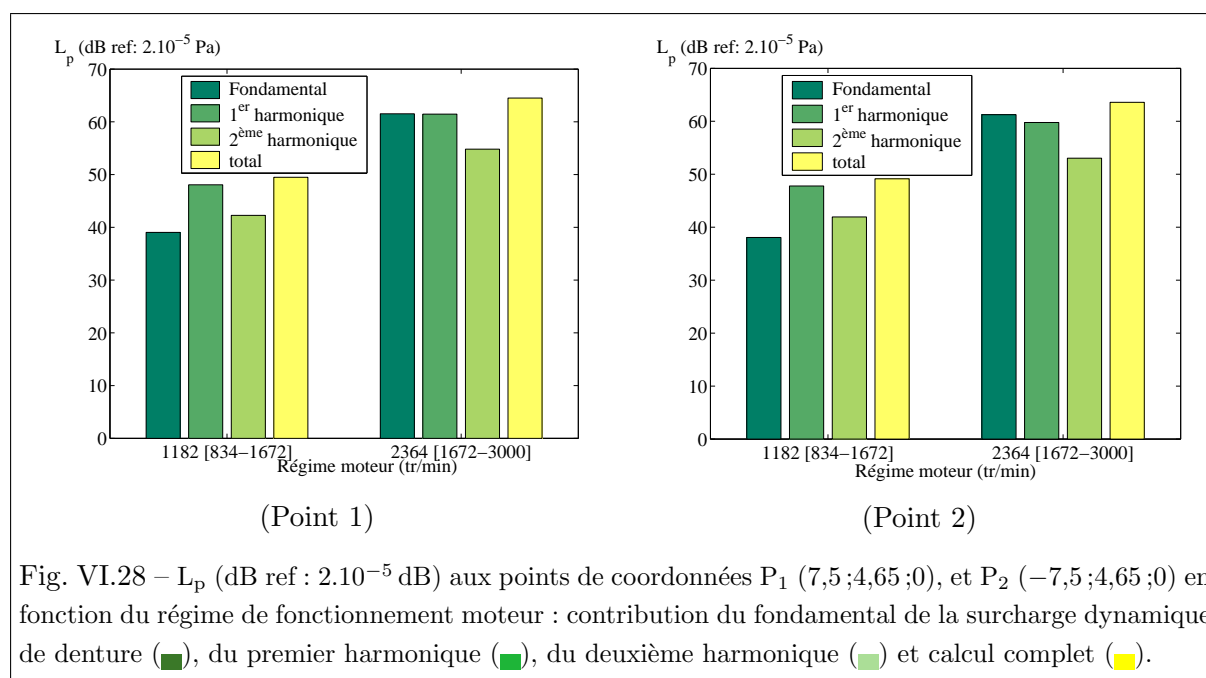


Fig. VI.28 – L_p (dB ref : 2.10^{-5} dB) aux points de coordonnées $P_1 (7,5;4,65;0)$, et $P_2 (-7,5;4,65;0)$ en fonction du régime de fonctionnement moteur : contribution du fondamental de la surcharge dynamique de denture (■), du premier harmonique (■), du deuxième harmonique (■) et calcul complet (■).

ment, on s'intéresse à la contribution de la face supérieure du carter au bruit rayonné par celui-ci.

Le champ vibratoire à la surface du carter est évalué à partir de la méthode spectrale itérative. la méthode hybride est ensuite mise en œuvre afin d'évaluer les sources équivalentes permettant de reproduire le bruit rayonné par le carter en champ libre. Chaque source équivalente est la somme des contributions d'une source de pression, d'une source de vitesse et d'une source d'intensité. Le calcul des contributions des sources de pression et d'intensité nécessite de connaître le champ de pression pariétal qui est évalué pour cette application à l'aide de la méthode des éléments finis directe : pour ce calcul, seule la face supérieure du carter de la boîte de vitesses est prise en compte comme si celle-ci rayonnait en champ libre.

Une fois les sources équivalentes calculées, celles-ci sont introduites dans la méthode du transfert radiatif qui permet d'évaluer le champ en tout point de l'espace en tenant compte de l'environnement acoustique du carter. Cette méthode est implémentée dans le logiciel développé en interne CERES qui repose sur un modèle de réflexion diffuse.

Les sources équivalentes introduites sont vérifiées en comparant le champ acoustique rayonné en champ libre par la face supérieure du carter calculé à partir des sources équivalentes et déduit d'un calcul par la méthode des éléments finis directe : le bon accord entre les cartes de niveaux de bruit en amplitude et en directivité permet de valider les sources équivalentes.

L'intérêt de la méthode hybride réside dans les temps de calcul que cette méthode nécessite dans le domaine des hautes fréquences, où les méthodes classiques telles que la méthode des

éléments finis de frontière trouvent leurs limites. Les calculs sont menés par bande de fréquence, généralement tiers ou bande d'octave, où la structure étudiée contient un grand nombre de modes. Notons que le maillage introduit dans la méthode du transfert radiatif est également plus grossier que dans les méthodes classiques, ce qui contribue à réduire les temps de calcul. Toutefois, il n'a pas été établi de critère de maillage pour cette méthode, qu'il serait bon de définir. Ce critère est à relier à l'hypothèse de champ diffus au sein du système mais il reste à quantifier.

Bibliographie

- [Norton, 1989] Norton, M. (1989). *Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers*. Cambridge University Press.
- [Reboul et al., 2005] Reboul, E., Le Bot, A., et Perret-Liaudet, J. (2005). Approche hybride pour la maîtrise vibroacoustique des mécanismes. Dans *17ème Congrès Français de Mécanique*, Troyes (France).
- [Reboul et al., 2004a] Reboul, E., Perret-Liaudet, J., et Le Bot, A. (2004a). Vers une méthode hybride en vibroacoustique : application à la prédiction du bruit de boîte de vitesses. Dans *Colloque de la Recherche de l'Intergroupe des Ecoles Centrale*, Lyon (France).
- [Reboul et al., 2004b] Reboul, E., Perret-Liaudet, J., et Le Bot, A. (2004b). Vers une méthode hybride en vibroacoustique : application à la prédiction du bruit de boîte de vitesses. Dans *2ème Colloque GDR 2493 Bruit des Transports*, Marseille (France).
- [Thivant, 2003] Thivant, M. (2003). *Modélisation de la propagation acoustique par la méthode du potentiel d'intensité*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. 128 pages.

Conclusion et perspectives

L'objectif de ce travail de thèse était de développer une méthode hybride pour la prédiction du bruit rayonné par les mécanismes tels que les transmissions par engrenages afin de disposer d'outils numériques au stade d'avant-projet permettant de connaître les nuisances acoustiques générées par ceux-ci et de les réduire. L'apport de ce travail se situe dans l'intégration de la diffraction acoustique dans la méthode du transfert radiatif, dans le développement de la méthode hybride permettant de mettre en oeuvre la méthode du transfert radiatif à partir de la connaissance du champ vibratoire à la surface d'une structure vibrante, et dans la mise en oeuvre de la méthode jusqu'au cas d'application final.

L'étude du comportement vibroacoustique d'une transmission dans le chapitre 1 a permis de montrer que le bruit rayonné par une transmission a pour origine principale l'état vibroacoustique du carter de celle-ci. Cet état résulte des efforts dynamiques transmis par les paliers et induits par une excitation interne générée par le processus d'engrènement, l'erreur statique de transmission. La prédiction de ce rayonnement acoustique est un problème complexe. En premier lieu, cette complexité est liée à l'existence d'interactions entre la source excitatrice interne et l'état vibratoire du carter. Ces couplages nécessitent la mise en oeuvre d'approches globales en vue de prédire l'état vibratoire du carter. En second lieu, les fréquences excitatrices se situent à quelques kilohertz. Au regard des caractéristiques élastodynamiques des engrenages, arbres, paliers et carter, ces fréquences correspondent au domaine modal. En revanche, étant donnée la taille de la cavité où se propage le son, ces mêmes fréquences sont élevées du point de vue de l'acoustique. Cette dualité impose que des méthodes différentes soient mises en oeuvre de manière simultanée, ce qui justifie le caractère « hybride » de la méthode. La première, dédiée au domaine des basses fréquences, doit permettre de prédire le comportement vibratoire de l'ensemble de la transmission, carter inclus. La seconde, adaptée au domaine des hautes fréquences, doit permettre de prédire le comportement acoustique du carter dans la cavité et à l'extérieur.

Un modèle global de transmission, intégrant tous les composants de celle-ci, est proposé au chapitre 2. Ce modèle repose sur une discrétisation par éléments finis de la transmission. Le comportement dynamique induit par l'erreur statique de transmission est alors régi par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. La résolution de

ces équations n'est pas standard, et les méthodes basées sur des techniques d'intégration temporelle conduisent à des temps de calcul prohibitifs pour les modèles comportant un grand nombre de degrés de liberté. La méthode de résolution adoptée dans ce travail est la méthode spectrale itérative. Basée sur des développements dans le domaine des fréquences et sur une décomposition modale du champ vibratoire, cette méthode permet de calculer à moindre coût la réponse de la transmission en régime stationnaire.

La méthode acoustique retenue est la méthode du transfert radiatif qui est présentée au chapitre 3. Il s'agit d'une méthode de rayons basée sur une analogie avec l'écriture des échanges radiatifs en thermique. Elle s'inscrit dans la continuité des méthodes énergétiques hautes fréquences où les méthodes éléments finis sont mises en défaut. Par rapport à la théorie de Sabine et à l'analyse statistique de l'énergie qui permettent d'accéder à l'énergie globale au sein du système acoustique, elle présente l'avantage de pouvoir décrire la répartition spatiale de l'énergie. Par rapport aux méthodes basées sur l'acoustique géométrique, elle se présente davantage comme une technique de résolution différente qui s'appuie sur une formulation intégrale et non discrète des équations. L'hypothèse fondamentale est l'hypothèse de décorrélation des ondes qui permet de construire les champs d'énergie en sommant les contributions énergétiques issues de sources distinctes : des sources réelles situées à l'intérieur du domaine acoustique, et des sources fictives introduites sur la frontière du domaine et permettant de modéliser les différents phénomènes tels que la réflexion ou l'absorption.

Nous avons étendu la méthode par l'introduction de la diffraction acoustique et le travail correspondant est présenté au chapitre 4. La prise en compte de ce phénomène est nécessaire pour une description précise de la répartition d'énergie autour d'un obstacle, dans les zones d'ombre en particulier. Ce travail s'appuie sur le formalisme de la théorie géométrique de la diffraction (TGD), particulièrement adapté ici puisqu'il repose sur une décomposition des champs acoustiques en rayons comme dans la méthode du transfert radiatif. Des sources fictives de diffraction sont introduites aux points de diffraction, et un coefficient de diffraction énergétique est défini comme le carré du module du coefficient de diffraction sous incidence normale introduit par la TGD. Ce coefficient intervient dans l'écriture des échanges d'énergie entre les sources fictives. L'application à l'étude de la diffraction par un dièdre a permis de montrer que la solution obtenue par la méthode du transfert radiatif est en accord avec la solution de la TGD lorsque les interférences sont négligées. La méthode permet de reproduire le comportement acoustique moyen du champ autour de l'obstacle, et s'approche d'autant plus du champ réel que la fréquence augmente, ou de manière plus générale, que le rapport entre la longueur d'onde et la taille de l'objet diffractant diminue. Elle est particulièrement intéressante pour l'étude de la diffraction multiple comme illustré au travers de l'étude de la diffraction par une barrière rectangulaire. Elle permet en effet de prendre en compte simultanément tous les ordres de diffraction sans avoir à expliciter les chemins suivis par les rayons acoustiques. En revanche, elle ne permet pas de reproduire les phénomènes d'interférences entre les ondes

en raison de l'hypothèse de décorrélation des sources, et conduit à un résultat infini sur les caustiques et sur les frontières ombre-lumière, limitation analogue à la TGD.

L'objectif de nos travaux était par ailleurs de coupler les deux approches présentées précédemment, à savoir la méthode spectrale itérative afin de prédire le comportement vibratoire de la transmission dans le domaine des basses fréquences, et la méthode du transfert radiatif afin de prédire le champ acoustique rayonné dans le domaine des hautes fréquences. Plus précisément, il s'agissait de déterminer les sources adéquates à introduire dans la méthode du transfert radiatif à partir de la connaissance du champ vibratoire à la surface du carter. La méthode hybride proposée au chapitre 5 de ce travail consiste à introduire des sources équivalentes qui permettent de reproduire le champ acoustique rayonné par la structure vibrante, en l'occurrence le carter de la transmission, en champ libre. Chaque source équivalente est la somme des contributions d'une source de vitesse, qui dépend de la fonction de corrélation spatiale du champ vibratoire, d'une source de pression, qui dépend de la fonction de corrélation spatiale du champ de pression, et d'une source d'intensité, qui dépend de la fonction de corrélation spatiale entre ces deux champs. Des formulations analytiques sont proposées pour les amplitudes de ces sources de façon à ce que, conformément au modèle de rayons utilisé, celles-ci ne dépendent que de la position de la source et de la direction d'émission. Le calcul de ces amplitudes nécessite de connaître non seulement le champ vibratoire mais également le champ de pression pariétal. La stratégie suggérée consiste à acquérir ces deux champs expérimentalement par le biais de mesures simultanées à l'aide de la technique des deux microphones par exemple, ou alors à évaluer le champ de pression à partir du champ vibratoire sur la base d'un calcul par la méthode des éléments finis de frontière. Seule la structure vibrante rayonnant en champ libre est modélisée de sorte que les temps de calcul ne sont pas pénalisants. Lorsque ces sources sont connues, l'environnement acoustique de la structure vibrante peut alors être introduit, ainsi que les sources fictives de la méthode du transfert radiatif permettant de modéliser les phénomènes de réflexion, de diffraction, ... La méthode du transfert radiatif est ensuite mise en oeuvre pour évaluer le champ acoustique en tout point de l'espace, et les contributions énergétiques de toutes les sources introduites, équivalentes comme fictives, sont sommées. La méthode hybride a été testée dans le cas d'une plaque simple bafflée sur appuis simples et dans le cas d'une plaque raidie pour laquelle les champs pariétaux ont été évalués expérimentalement. La comparaison du champ libre rayonné par ces deux structures calculé à l'aide des sources équivalentes et à l'aide de la méthode des éléments finis de frontière a permis de valider les formulations proposées. L'étude du rayonnement de la plaque raidie entre deux panneaux absorbants a permis de valider la mise en oeuvre de la méthode globale, intégrant la méthode du transfert radiatif.

En dernier lieu, notre travail a consisté à démontrer l'applicabilité de la méthode pour un cas concret, proche d'un cas industriel. L'application proposée dans le chapitre 6 de cette thèse concerne l'étude du rayonnement acoustique d'une boîte de vitesses de type poids lourd. La boîte de vitesses est intégrée à un groupe motopropulseur placé au sein d'un encapsulage

moteur muni d'écrans acoustiques absorbants. Le calcul porte sur le champ acoustique rayonné à l'extérieur de l'encapsulage. La réponse vibratoire du carter à l'erreur statique de transmission est évaluée à l'aide de la méthode spectrale itérative, la méthode hybride est mise en œuvre pour introduire les sources équivalentes permettant de reproduire le champ acoustique rayonné en champ libre par le carter, et enfin, la méthode du transfert radiatif est appliquée pour évaluer le champ acoustique rayonné. L'intérêt de la méthode réside dans les temps de calcul qu'elle nécessite dans le domaine des hautes fréquences, où les méthodes classiques telles que la méthode des éléments finis de frontière trouvent leurs limites. Les calculs sont menés par bande de fréquence et le maillage introduit à la fois pour les sources équivalentes et dans la méthode du transfert radiatif est également plus grossier que dans les méthodes classiques, ce qui contribue à réduire les temps de calcul.

La méthode est directement exploitable pour l'étude du bruit rayonné dans le domaine des hautes fréquences par toute structure vibrante dont le comportement vibratoire est connu. Elle suppose que le champ vibratoire n'est pas modifié par l'environnement de la structure, et en particulier par le milieu fluide où se situe la structure. Cette hypothèse, qui est valable lorsque le milieu environnant est un fluide léger tel que l'air dans notre application, est sérieusement mise en défaut lorsque le fluide est lourd comme l'eau. La difficulté de mise en œuvre de la méthode est liée à la multiplicité des phénomènes à prendre en compte pour résoudre un problème à l'aide de la méthode du transfert radiatif. Par ailleurs, il n'existe pas à l'heure actuelle de critère de maillage pour la méthode du transfert radiatif, et plus généralement pour les méthodes énergétiques hautes fréquences, point qui mériterait un développement.

A la lumière de nos travaux, deux directions de poursuite se dégagent :

- La première est le développement de la méthode du transfert radiatif, et en particulier l'implémentation numérique de la diffraction. En effet, l'introduction de la diffraction a fait l'objet d'un développement théorique présenté dans ce mémoire, mais ce phénomène n'a pas été pris en compte dans l'application concrète concernant le bruit rayonné par une boîte de vitesses. De manière plus générale, il conviendrait d'implémenter l'ensemble des phénomènes acoustiques susceptibles de se produire en environnement réel afin de pouvoir confronter les calculs menés par la méthode du transfert radiatif notamment à des mesures.
- Il serait également intéressant de regarder si les sources équivalentes introduites permettent de quantifier effectivement les zones d'une structure vibrante responsables du rayonnement : il pourrait être judicieux pour cela de comparer les cartes des sources à des mesures par holographie acoustique de champ proche, technique d'identification et de localisation de sources sonores.

Enfin, le développement d'un outil numérique complet, adapté à des applications industrielles complexes et permettant de réduire les temps de calcul en hautes fréquences, apporterait un soutien indéniable aux ingénieurs pour optimiser les solutions de réduction sonore dans le domaine des fréquences audibles.

Annexe A

Application de la méthode du transfert radiatif à l'étude de la réflexion spéculaire et de la transmission

Les équations de la méthode du transfert radiatif ont été présentées au paragraphe III.2 pour l'étude de la réflexion diffuse. La méthode peut être également appliquée à l'étude de la réflexion spéculaire [Le Bot, 2002b] et de la transmission, spéculaire ou diffuse [Le Bot, 2002a, Cotoni et al., 2002].

1 Etude de la réflexion spéculaire

L'équation (III.52) est toujours valable. Dans le cas d'une réflexion spéculaire, la réflectivité hémisphérique s'écrit :

$$R(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = R(\mathbf{u}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{u}') / \cos \theta_p. \quad (\text{A.1})$$

où \mathbf{u}' est la direction incidente de \mathbf{u} telle que $|\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}_p| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_p|$. En introduisant le volume élémentaire en coordonnées sphériques $d\Omega_s = s^{n-1} ds dv$ et la surface élémentaire $d\Gamma'_p = p'^{n-1} dv / \cos \theta'_p$, l'équation (III.52) sur σ devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{\cos \theta_p} &= R(\mathbf{u}') \left[\int_{\Omega} \delta(\mathbf{u}_{\mathbf{sp}} - \mathbf{u}') \rho(\mathbf{s}) e^{-ms} ds dv \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma} \delta(\mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} - \mathbf{u}') \frac{\sigma(\mathbf{p}', \mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}})}{\cos \theta'_p} e^{-mp'} dv \right], \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

soit :

$$\frac{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{\cos \theta_p} = R(\mathbf{u}') \left[\int_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} \rho(\mathbf{s}) e^{-ms} ds + \frac{\sigma(\mathbf{p}', \mathbf{u}')}{\cos \theta'_p} e^{-mp'} \right], \quad (\text{A.3})$$

où $s = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$, $p' = |\mathbf{r} - \mathbf{p}'|$.

2 Etude de la transmission

Le problème de la transmission entre deux milieux de célérités différentes est une généralisation du problème de la réflexion. Considérons des milieux repérés par un indice i, j (Fig. A.1). On définit la transmissibilité bidirectionnelle du milieu j vers le milieu i comme la luminance dans la direction \mathbf{u} du système i induite par un flux unitaire provenant de la direction \mathbf{v} du système j . Lorsque $i = j$, cette transmissibilité est confondue avec la réflectivité bidirectionnelle.

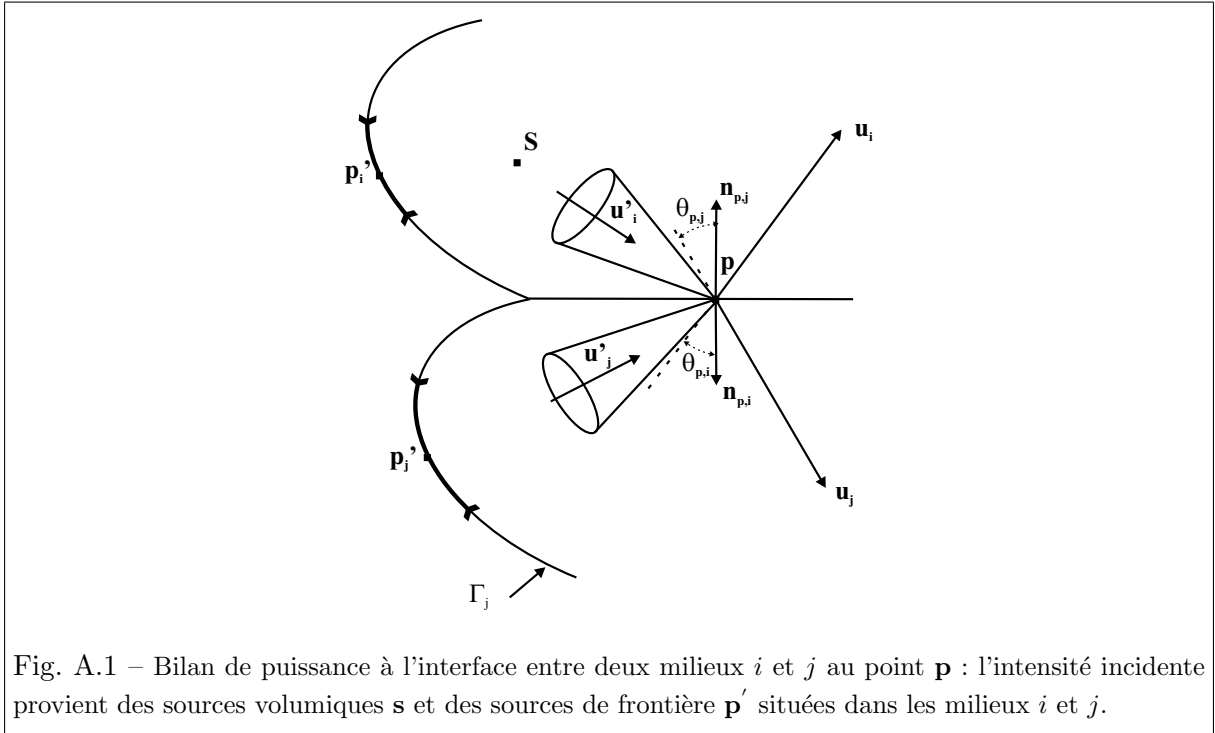


Fig. A.1 – Bilan de puissance à l'interface entre deux milieux i et j au point \mathbf{p} : l'intensité incidente provient des sources volumiques \mathbf{s} et des sources de frontière \mathbf{p}' situées dans les milieux i et j .

L'équation sur les inconnues σ_i s'écrit donc en généralisant l'équation (III.52) :

$$\frac{\sigma_i(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{\gamma_0 \cos \theta_p} = \sum_j \int_{\Omega_j} R_{ji}(\mathbf{u}_{\mathbf{s}\mathbf{p}}, \mathbf{u}) \rho_j(\mathbf{s}) \mathbf{H}_j(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p},j} d\Omega_s + \int_{\Gamma_j} R_{ji}(\mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}, \mathbf{u}) \sigma_j(\mathbf{p}', \mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) \mathbf{H}_j(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p},j} d\Gamma'_p. \quad (\text{A.4})$$

où $\mathbf{n}_{\mathbf{p},j}$ est la normale unitaire extérieure au système j en \mathbf{p} . On définit également la transmissibilité hémisphérique ou efficacité de transmission entre les systèmes j et i par :

$$R_{ji}(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{U}} R_{ji}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \cos \theta_p du, \quad (\text{A.5})$$

où l'intégrale est évaluée sur toutes les directions d'émission. Dans le cas où l'émission de l'énergie est diffuse, chaque source secondaire fictive σ_i suit une loi de Lambert (Eq. (III.55)) et l'équation

(A.4) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma_0} \sigma_i(\mathbf{p}) &= \sum_j \int_{\Omega_j} R_{ji}(\mathbf{u}_{\mathbf{sp}}) \rho_j(\mathbf{s}) \mathbf{H}_j(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p},j} d\Omega_s \\ &+ \int_{\Gamma_j} R_{ji}(\mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) \sigma_j(\mathbf{p}', \mathbf{u}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) \cos \theta_{p'} \mathbf{H}_j(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p},j} d\Gamma'_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Il s'agit d'un système d'équations intégrales de Fredholm de seconde espèce.

Dans le cas d'une transmission spéculaire, la transmissibilité bidirectionnelle s'écrit :

$$R_{ji}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_i) = R_{ji}(\mathbf{u}'_j) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{u}'_j) / \cos \theta_{p,j} \quad (\text{A.7})$$

où \mathbf{u}'_j est la direction d'incidence en provenance du milieu j qui se réfléchit de façon spéculaire selon \mathbf{u}_i . En notant n la dimension du milieu considéré, c_i la vitesse de phase du système i et $\theta_{p,i}$ l'angle au point \mathbf{p} entre la direction d'émission \mathbf{u}_i et la normale à l'interface $\mathbf{n}_{\mathbf{p},i}$, les lois de Snell-Descartes impliquent que [Le Bot, 2002a] :

$$\frac{\cos \theta_{p,j}}{c_j^{n-1}} = \frac{\cos \theta_{p,i}}{c_i^{n-1}}. \quad (\text{A.8})$$

En injectant les relations (A.7) et (A.8) dans le bilan de puissance (A.4), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_i(\mathbf{p}, \mathbf{u}_i)}{\gamma_0 \cos \theta_{p,i}} &= \sum_j R_{ji}(\mathbf{u}'_j) \frac{c_j^{n-1}}{c_i^{n-1}} \left[\int_{\mathbf{p}'_j \mathbf{p}} R_{ji}(\mathbf{u}_{\mathbf{sp}}) \rho_j(\mathbf{s}) e^{-m_j s} ds \right. \\ &+ \left. \frac{\sigma_j(\mathbf{p}', \mathbf{u}'_j)}{\cos \theta_{p',j}} e^{-m_j p'} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Annexe B

Existence et unicité de la solution dans la méthode du transfert radiatif

Cette annexe a pour objectif de montrer que le problème général à résoudre dans la méthode du transfert radiatif admet une solution et que cette solution est unique. Nous détaillons pour cela la démonstration présentée par Le Bot et Bocquillet [Le Bot et Bocquillet, 2000]. Reprenons la formulation générale du problème de réflexion diffuse à savoir :

$$(Id - T) \sigma = g, \quad (\text{B.1})$$

où T et g sont définis par (Eq. (III.59) et Eq. (III.62)) :

$$T : \sigma \rightarrow \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{q}) \mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Gamma_p \quad (\text{B.2})$$

\mathcal{K} est le noyau défini par (Eq. (III.60)) :

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (1 - \alpha) e^{-mq} K(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (\text{B.3})$$

et K est défini par (Eq. (III.21)) :

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\cos \theta_p \cos \theta_q}{\pi |\mathbf{q} - \mathbf{p}|^2}. \quad (\text{B.4})$$

puis :

$$g : \mathbf{p} \rightarrow (1 - \alpha) \int_{\Omega} \rho(\mathbf{s}) \frac{e^{-ms} \cos \theta_p}{\pi s^2} d\Omega_s. \quad (\text{B.5})$$

Pour résoudre ce problème, il s'agit de savoir si l'opérateur $Id - T$ est inversible. Le théorème sur lequel la démonstration s'appuie pour montrer l'existence et l'unicité de la solution est le suivant :

Théorème 1 *Soit X un espace de Banach, $\mathcal{L}(X)$ l'espace des fonctions linéaires continues. $\mathcal{L}(X)$ est une algèbre de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(X)$ et $\|T\| < 1$ alors $Id - T$ est inversible.*

Il s'agit tout d'abord de fixer l'espace fonctionnel de travail. Notons qu'en pratique, les fonctions sources $\rho(\mathbf{s})$ du membre de droite sont des sommes finies de fonctions Dirac représentant des points sources dans le domaine Ω . Il en résulte que g est bornée et $g \in \mathcal{L}^\infty(\Gamma)$. On fixe alors l'espace de départ comme étant $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)$.

On fixe \mathbf{p} sur Γ . $\mathbf{q} \rightarrow \mathcal{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est positive et est majorée par $K(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Un calcul direct de $\int_{\Gamma} K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\Gamma_p$ conduit à la valeur 1 pourvu que Γ soit fermée. Par conséquent, la fonction $\mathbf{q} \rightarrow \mathcal{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est intégrable sur Γ : $\mathbf{q} \rightarrow \mathcal{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$.

$$\int_{\Gamma} |\mathcal{K}\sigma| d\Gamma \leq \|\sigma\|_{\infty} \int_{\Gamma} |\mathcal{K}| d\Gamma \leq \|\sigma\|_{\infty} \quad (\text{B.6})$$

donc $T : \mathbf{q} \rightarrow \mathcal{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \sigma(\mathbf{q})$ est intégrable et l'intégrale a un sens : $T : \mathbf{q} \rightarrow \mathcal{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \sigma(\mathbf{q}) \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$.

$T : \mathbf{q} \rightarrow \mathcal{K}\sigma \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$ et :

$$\left| \int_{\Gamma} \mathcal{K}\sigma d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma} |\mathcal{K}\sigma| d\Gamma \leq \|\sigma\|_{\infty} \quad (\text{B.7})$$

soit $\sup(|\int_{\Gamma} \mathcal{K}\sigma d\Gamma|) \leq \|\sigma\|_{\infty}$ d'où $\int_{\Gamma} \mathcal{K}\sigma d\Gamma \in \mathcal{L}^\infty(\Gamma)$: l'opérateur T est continu.

T est donc un opérateur appartenant à $\mathcal{L}(\mathcal{L}^\infty(\Gamma))$, algèbre de Banach des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)$ dans lui-même et l'inégalité suivante :

$$\left| \int_{\Gamma} \mathcal{K}\sigma d\Gamma \right| \leq |1 - \alpha| \left| \int_{\Gamma} K d\Gamma_p \right| \|\sigma\|_{\infty} \quad (\text{B.8})$$

soit,

$$\|\mathcal{K}\sigma\|_{\infty} \leq \sup(1 - \alpha) \|\sigma\|_{\infty} \quad (\text{B.9})$$

montre que la norme de T est majorée par :

$$\|T\| \leq \sup(|1 - \alpha|) \quad (\text{B.10})$$

Ainsi, si toute la frontière est absorbante ($\sup(|1 - \alpha|) < 1$), la norme de l'opérateur T vérifie $\|T\| < 1$. Ainsi, d'après le théorème 1, l'opérateur $Id - T$ est inversible et l'équation (III.61) admet une solution unique $\sigma = (Id - T)^{-1} g \in \mathcal{L}^\infty(\Gamma)$.

Annexe C

Etude du rayonnement acoustique d'une structure en terme de diffraction

Cette annexe vise à montrer que la théorie géométrique de la diffraction peut s'appliquer à l'étude vibroacoustique du rayonnement d'une plaque finie. Il s'agit de corréler les résultats issus de la TGD basés sur une approche géométrique aux résultats obtenus par Maidanik [Maidanik, 1962, Maidanik, 1974] sur la base d'une analyse modale. Considérons une onde de flexion au sein d'une plaque se propageant selon la direction \mathbf{k}_b où $k_b = |\mathbf{k}_b|$ désigne le nombre d'onde de flexion. Cette onde peut s'interpréter comme un rayon rampant se propageant à la surface de la plaque et on s'intéresse à la diffraction de ces rayons rampants.

1 Diffraction de l'onde de flexion en rayon d'espace

Le principe de Fermat a permis de montrer au chapitre IV qu'un rayon rampant donnait lieu à des rayons d'espace qui se présentent ici sous la forme d'ondes acoustiques se propageant dans la direction \mathbf{k} où $k = |\mathbf{k}|$ désigne le nombre d'onde acoustique. Le point M où l'émission acoustique se produit est astreint à rester sur l'onde de flexion. En notant \mathbf{u}_b le vecteur unitaire associé à \mathbf{k}_b , la condition (IV.11) découlant du principe de Fermat impose donc que :

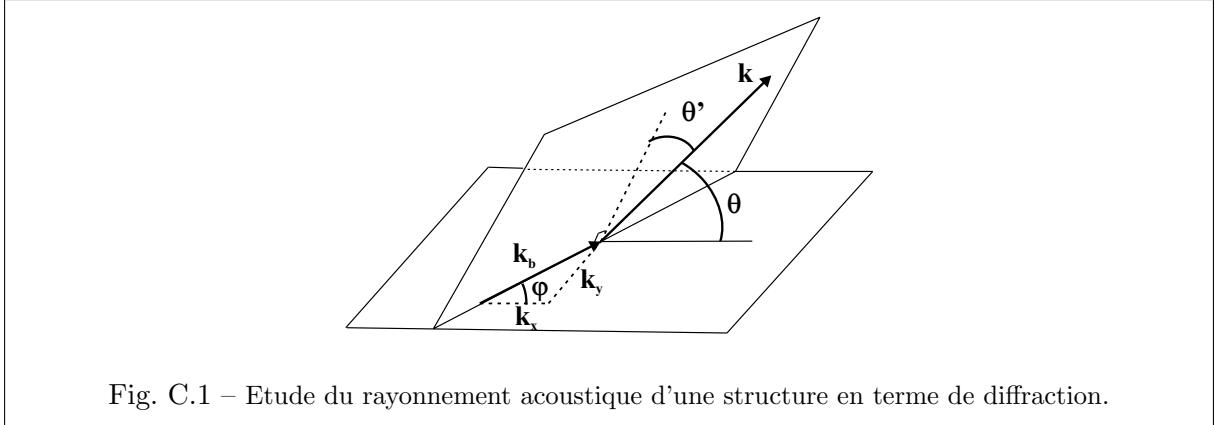
$$(\mathbf{k}_b - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}_b = 0 \quad (\text{C.1})$$

ou encore :

$$\sin \theta' = \frac{k_b}{k}. \quad (\text{C.2})$$

θ' désigne l'angle entre la normale au vecteur d'onde de flexion dans le plan $(\mathbf{k}_b, \mathbf{k})$ et le vecteur d'onde acoustique \mathbf{k} (Fig. C.1).

Notons que la condition de Fermat (IV.11) est écrite ici en termes de nombres d'onde : en effet, l'indice du milieu $n = c_o/v$ défini comme le rapport entre la vitesse de phase des ondes dans



le vide c_o et la vitesse de phase des ondes dans le milieu v n'est plus constant car la vitesse de phase est différente entre les milieux structure et acoustique. Il doit donc être pris en compte dans l'écriture du chemin acoustique (Eq. (IV.6)).

On retrouve ainsi à l'aide de la TGD une des premières propriétés importantes du rayonnement acoustique d'une plaque, à savoir l'existence d'un phénomène limite lorsque $k_b = k$ ce qui correspond à l'égalité des vitesses de phase des milieux acoustique et structure ($c = c_b$). Les rayons d'espace générés par la diffraction des rayons rampants n'existent que lorsque $k_b < k$ ou encore $c_b > c$, c'est-à-dire lorsque l'onde de flexion est supersonique. L'onde acoustique est alors rayonnée dans la direction θ' telle que $\sin \theta' = \frac{k_b}{k}$. L'ensemble de la surface de la plaque rayonne.

2 Diffraction de l'onde de flexion par une arête ou par un coin de la plaque

Intéressons-nous dans un premier temps à la diffraction par une arête de la plaque dirigée suivant l'axe \mathbf{u}_x . La condition (IV.11) s'écrit alors :

$$(\mathbf{k}_b - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}_x = 0 \quad (\text{C.3})$$

ou encore,

$$k_x = k_b \cos \varphi = k \cos \theta, \quad (\text{C.4})$$

où k_x est le nombre d'onde de flexion selon x et θ l'angle d'émission de l'onde diffractée dans le milieu acoustique (Fig. C.1). On observe ainsi au travers de l'équation (C.4) que la diffraction de l'onde de flexion par une arête de la plaque dirigée selon x se produit lorsque $k_x < k$. Les ondes acoustiques sont émises suivant le cône de Keller dont l'axe est l'axe de l'arête et de demi-angle au sommet l'angle d'incidence θ par rapport à l'arête. Si l'on s'intéresse à présent à la diffraction par une arête de la plaque dirigée suivant l'axe \mathbf{u}_y , l'équation (C.4) s'écrit à présent :

$$k_y = k_b \sin \varphi = k \cos \theta, \quad (\text{C.5})$$

et on observe que la diffraction se produit lorsque $k_y < k$. Comme précédemment, les ondes acoustiques sont émises suivant le cône de Keller dont l'axe est l'axe de l'arête et de demi-angle

au sommet l'angle d'incidence par rapport à l'arête.

Si l'on s'intéresse à présent à la diffraction par un coin de la plaque, les conditions (C.4) et (C.5) doivent être simultanément vérifiées, et on observe que la diffraction par un coin se produit lorsque $k_x < k$ et $k_y < k$. Les ondes acoustiques sont émises dans toutes les directions de l'espace.

On retrouve ainsi par une approche de type géométrique les conclusions obtenues par Maidanik à partir d'une analyse modale sur le rayonnement d'une plaque finie :

- lorsque les ondes de flexion sont subsoniques, toute la surface de la plaque participe au rayonnement, les ondes de flexion assimilées à des rayons rampants sont diffractées en rayons d'espace,
- lorsque les ondes de flexion sont supersoniques, plusieurs cas se présentent : lorsque $k_x < k$ (resp : $k_y < k$), les ondes de flexion sont diffractées par les arêtes de la plaque dirigées suivant x (resp : y) donnant lieu au rayonnement en mode de bord selon x (resp : y), lorsque $k_x < k$ et $k_y < k$, les ondes de flexion sont diffractées par les coins de la plaque donnant lieu au rayonnement en mode de coin.

Modèles ondulatoire et géométrique permettent ainsi de rendre compte de situations similaires.

Annexe D

Intégrale de Rayleigh : formule asymptotique

L'objectif de cette annexe est d'illustrer l'application de l'intégrale de Rayleigh à l'étude du rayonnement acoustique en champ lointain de structures planes, et de montrer que cette forme asymptotique permet également d'estimer une source équivalente adaptée à l'étude du rayonnement par la méthode du transfert radiatif.

1 Forme asymptotique de l'intégrale de Rayleigh en champ lointain

Reprenons donc l'équation intégrale de Rayleigh (Eq. (V.36)) :

$$p(\mathbf{r}) = \int_S \rho_0 \gamma_n(\mathbf{q}) g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) dS, \quad (\text{D.1})$$

où la fonction de Green s'écrit $g(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = e^{-jk_r r} / 2\pi r$, $r = |\mathbf{r} - \mathbf{q}|$ (Fig. D.1). La plaque est située à l'altitude $z_q = 0$.

En champ lointain, $R = |\mathbf{r}| = \sqrt{x_r^2 + y_r^2 + z_r^2} \gg |\mathbf{q}| = \sqrt{x_q^2 + y_q^2}$ de sorte que :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{q}| = \sqrt{(x_r - x_q)^2 + (y_r - y_q)^2 + z_r^2} \simeq R \left(1 - \frac{x_r}{R} x_q - \frac{y_r}{R} y_q\right). \quad (\text{D.2})$$

On introduit alors le vecteur $\mathbf{k} = k_x \mathbf{x} + k_y \mathbf{y} + k_z \mathbf{z}$ tel que $\mathbf{k}/k = \mathbf{r}/R$. Alors, $x_r/R = k_x/k$ et $y_r/R = k_y/k$, et

$$\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{q}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} \simeq \frac{e^{-jkR}}{R} e^{j(k_x x_q + k_y y_q)}. \quad (\text{D.3})$$

L'approximation au premier ordre est possible dans le terme d'amplitude de l'exponentielle, mais pas dans le terme de phase qui est une fonction oscillante. Puisque le vecteur \mathbf{k} est dans la même direction que le vecteur \mathbf{r} , ces deux vecteurs sont décrits en coordonnées sphériques par le même système angulaire (θ, ϕ) . Ainsi,

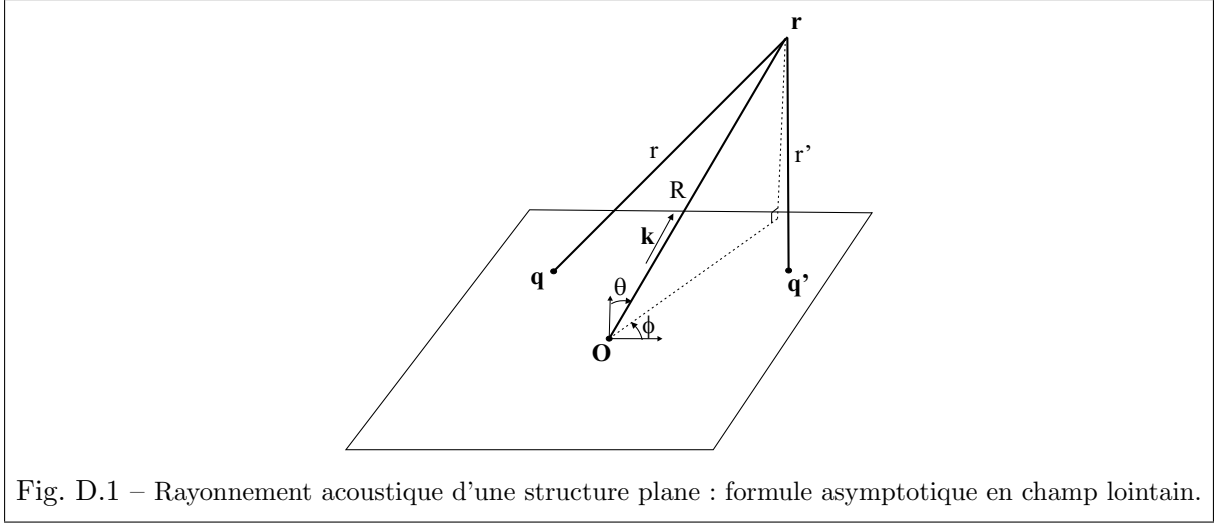


Fig. D.1 – Rayonnement acoustique d'une structure plane : formule asymptotique en champ lointain.

$$\begin{aligned}
 x &= R \sin \theta \cos \phi & k_x &= k \sin \theta \cos \phi \\
 y &= R \sin \theta \sin \phi & k_y &= k \sin \theta \sin \phi \\
 z &= R \cos \theta & k_z &= k \cos \theta
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

et l'équation intégrale de Rayleigh devient :

$$p(\mathbf{r}) = \rho_0 \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} \int_S \gamma_n(x_q, y_q, 0) e^{j(k_x x_q + k_y y_q)} dS. \tag{D.5}$$

Si l'on définit la transformée de Fourier spatiale de la plaque par :

$$\tilde{\gamma}_n(k_x, k_y) = \int_S \gamma_n(x_q, y_q, 0) e^{j(k_x x_q + k_y y_q)} dS = \int_S \gamma_n(\mathbf{q}) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} dS, \tag{D.6}$$

alors :

$$p(\mathbf{r}) = \rho_0 \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} \tilde{\gamma}_n(k_x, k_y). \tag{D.7}$$

La pression en champ lointain dépend donc directement de la transformée de Fourier spatiale de l'accélération normale de la plaque.

2 Source équivalente déduite de la forme asymptotique

En calculant la densité d'énergie acoustique W par la relation $W(\mathbf{r}) = \Re(\frac{\langle |p(\mathbf{r})|^2 \rangle}{2\rho_0 c^2})$, on aboutit à :

$$W(\mathbf{r}) = \Re\left(\frac{\rho_0}{8\pi^2 c^2 R^2} \langle \tilde{\gamma}_n^2(k_x, k_y) \rangle\right). \tag{D.8}$$

Il s'agit de la densité d'énergie acoustique émise dans la méthode du transfert radiatif par une source située au centre de la plaque et d'amplitude :

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{\rho_0}{2\pi c} \int_S \int_S \langle \gamma_n(\mathbf{q}) \gamma_n^*(\mathbf{q}') \rangle e^{j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}')} dS dS'. \tag{D.9}$$

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 avril 2002,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur J. PERRET-LIAUDET

et les rapports de

Monsieur D. LE HOUEDÉC
Professeur - Laboratoire de Mécanique et Matériaux - Ecole Centrale de Nantes - BP 92101 - 44321
NANTES cedex 3

et de

Monsieur J-C. PASCAL
Professeur - Laboratoire d'Acoustique - Université du Maine - Avenue Olivier Messiaen - 72085 LE MANS
cedex 9

Mademoiselle REBOUL Emeline

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE (MEGA)

Fait à Ecully, le 18 octobre 2005



P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur des Etudes

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Joseph', written over a horizontal line.

J. JOSEPH