



- URA 1652 -

Année 2006

N° d'ordre : 2006-31

Département Génie Civil
et Bâtiment

École doctorale MEGA
Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

CONTRÔLE PASSIF DE VIBRATIONS PAR POMPAGE ÉNERGÉTIQUE

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 8 Novembre 2006

pour l'obtention du

Doctorat de l'École Centrale Lyon

(spécialité Génie Mécanique)

par

Emmanuel GOURDON

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	M. Bruno Cochelin M. Alain Berlioz	Professeur, LMA, Centrale Marseille Professeur, Université Paul Sabatier Toulouse III
<i>Examineurs :</i>	M. Louis Jézéquel M. Sergio Bellizzi	Professeur, LTDS, Ecole Centrale Lyon Chargé de Recherches HDR, LMA Centrale Marseille
<i>Directeurs de Thèse :</i>	M. Claude-Henri Lamarque M. Stéphane Pernot	Enseignant-Chercheur HDR, ENTPE Enseignant-Chercheur, ENTPE

Laboratoire Géomatériaux, École Nationale des Travaux Publics de l'État, FRANCE





ECOLE CENTRALE DE LYON

DIRECTION DE LA RECHERCHE

Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon.

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
AURIOL Philippe	professeur	CEGELY	ECL
BEROUAL Abderrahmane	professeur	CEGELY	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	CEGELY	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS/ECL
MARTELET Claude	professeur	CEGELY	ECL
NICOLAS Alain	professeur	CEGELY	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS/ECL
SIMONET Pascal	chargé de recherche	CEGELY	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	professeur	CEGELY	ECL
VOLLAIRE Christian	maître de conférences	CEGELY	ECL

Nbre Cégély 10

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	professeur	DER EEA	ECL

Nbre DER EEA 2

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

Nbre STMS 2

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ROUY MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

Nbre ICJ 7

DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
----------------	------------	------	-----

Nbre ICTT 1

CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	LEOM	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	LEOM	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	LEOM	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
JOSEPH Jacques	professeur	LEOM	ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	professeur émérite	LEOM	ECL

O'CONNOR Ian	maître de conférences	LEOM	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	LEOM	ECL
ROBACH Yves	professeur	LEOM	ECL
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL

Nbre LEOM 16

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
-------------	------------	-------	-----

NBRE LIRIS 1

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC6BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE6BELLOT Geneviève	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	maître de conférences	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAUT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

Nbre LMFA 20

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	maître de conférences	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SAL VIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL
SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	professeur	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	professeur	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	professeur	LTDS	ECL
VANNES André-Bernard	professeur émérite	LTDS	ECL

Nbre LTDS 24

Total Hdr ECL

Contrôle passif de vibrations par pompage énergétique

Dans le domaine du Génie Civil et du Génie Mécanique, les vibrations des structures constituent un des nombreux risques d'endommagement d'une structure et peuvent entraîner de graves conséquences, parfois sans commune mesure avec la mise en oeuvre des moyens de prévention appropriés. Ainsi, l'étude dynamique des structures est une étape incontournable de la phase d'élaboration d'un projet. Le contrôle passif des vibrations, c'est-à-dire le contrôle sans la nécessité de fournir une énergie extérieure, est devenu un véritable enjeu.

Le contrôle passif de vibrations peut être réalisé par phénomène de pompage énergétique. Le pompage énergétique est le transfert irréversible de l'énergie vibratoire d'une structure principale, que l'on désire protéger des perturbations extérieures, vers une structure auxiliaire couplée à comportement essentiellement non linéaire, et de faible masse. Le principe qui rentre en jeu est un phénomène de localisation de modes non linéaires permettant de grandes vibrations dans la structure ajoutée, et de très faibles vibrations dans la structure primaire. Le phénomène est étudié en régime instationnaire puis en régime stationnaire. Une optimisation du pompage énergétique et des paramètres est effectuée en vue d'une application réelle. Des vérifications expérimentales sont réalisées à l'aide de modèles réduits de bâtiments.

Mots-clés : Contrôle passif, pompage énergétique, absorbeur non linéaire de vibrations, modes normaux non linéaires, modèle réduit de bâtiment, séismes, paramètres incertains, échelles multiples, complexification.

Passive control of vibrations through energy pumping

In Civil and Mechanical Engineering, vibrations of structures are one of the risks of damage of a structure and can involve serious consequences, sometimes without comparison with the implementation of the suitable means of prevention. Thus, the dynamic study of structures is a stage impossible to circumvent in the development phase of a project. Passive control of vibrations, i.e. control without the need for providing an external energy, became a true stake.

Passive control of vibrations can be performed through the energy pumping phenomenon. Energy pumping is the irreversible transfer of vibrational energy from a main structure, which must be protected against external disturbances, to a coupled, essentially nonlinear, auxiliary structure, which is very light. The principle which is involved is the localization of nonlinear normal modes allowing strong vibrations of the added structure and very small vibrations of the primary structure. The phenomenon is first studied during non-stationary regime, and then during stationary regime. An optimisation of both energy pumping and parameters of the system is performed in order to apply it to real structures. Experimental verifications are carried out on reduced-scale building models.

Keywords : Passive control, energy pumping, nonlinear energy sink, nonlinear normal modes, reduced-scale building model, earthquakes, uncertain parameters, multiple scales, complexification.

Remerciements

Ce doctorat a été réalisé au laboratoire Géomatériaux du Département Génie Civil et Bâtiment de l'Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat. Je voudrais remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je souhaite en premier lieu remercier Alain Berlioz et Bruno Cochelin pour avoir accepté d'être rapporteurs pour cette thèse, ainsi que Louis Jézéquel pour l'honneur qu'il m'a fait de bien vouloir présider mon jury de thèse. Je remercie également Sergio Bellizzi pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury.

Je tiens à remercier tout particulièrement Claude-Henri Lamarque pour m'avoir encouragé à réaliser cette étude. Son énergie, sa passion pour la recherche, son enthousiasme, son implication ont été des ressources inestimables pour mener à bien ce travail. Je le remercie sincèrement pour son soutien et pour la valorisation de mon travail. Je le remercie également pour sa disponibilité, ses conseils et pour m'avoir encadré durant toute la période de cette thèse. Son investissement a été une grande source de motivation.

J'adresse mes sincères remerciements à Stéphane Pernot pour m'avoir aidé, encadré et conseillé durant ces trois années de doctorat. Je le remercie en particulier pour son aide précieuse en expérimental notamment pour m'avoir permis d'effectuer une partie de ma thèse à l'Université de Bristol. Ses orientations, conseils, remarques, encouragements ont toujours été bénéfiques.

Je remercie chaleureusement Jean-Michel pour sa gentillesse, son aide précieuse, son temps consacré à la résolution de divers problèmes. Sa grande culture scientifique, son savoir, ses conseils avisés (notamment en informatique) ont été d'une grande utilité et très précieux. Les discussions animées dans le bureau ont été bénéfiques. Merci à lui de m'avoir guidé par son expérience de recherche. Son amitié et sa bonne humeur ont été très appréciables. Un grand merci également à Stéphanie et Baptiste pour leur inestimable gentillesse. Leur amitié a été très appréciée.

Merci également à Simon (merci pour ses conseils sur les ondelettes). Son amitié, ses discussions animées, son aide précieuse, son enthousiasme ont été très appréciés. Sa culture informatique m'a beaucoup aidé. Je remercie Marie (merci pour ses conseils électroniques) et Stéphane pour leur aide précieuse, leur sincère amitié. Merci pour les discussions et conseils judicieux. Leur bonne humeur et leur gentillesse ont été très appréciées. Merci également à Brice pour son aide, son amitié et sa gentillesse. Sa disponibilité, sa bonne humeur, ses connaissances scientifiques, ses nombreux services ont été très appréciés. Merci également à Solenne.

J'adresse mes sincères remerciements à Xavier pour sa disponibilité, sa gentillesse. Son expérience de recherche, ses nombreux conseils informatiques ont été très appréciés. Les réflexions

sur le pompage énergétique ont été très enrichissantes. Ses questions pertinentes ont été très bénéfiques. Je le remercie chaleureusement pour son amitié inestimable. Les nombreuses discussions ont été très sympathiques. Son intérêt, son savoir et son aide ont été précieux. Merci également à Sonia.

Je remercie également tous les techniciens qui m'ont aidé pendant cette thèse notamment Dave, Sébastien, Van et Thomas. Merci également à Corinne et à Sébastien.

Enfin, je suis très reconnaissant envers mes collègues thésards pour leur soutien, leur bonne humeur, leur aide spécialement à Hocine, Alan, Hieu, Bao, Minh, Lan, Delphine, Frédéric, Franziska, Driss, Adrien, Anne-Sophie.

Je voudrais également remercier Elise qui provoque la résonance des vibrations de mon cœur. Sa présence à mes côtés, son aide précieuse, son soutien de tous les jours sont inestimables.

Pour leur soutien constant, leur aide, je remercie ma famille et mes proches, leur présence à mes côtés a été un élément important dans la réussite de mon parcours. Je remercie mon papa pour son soutien et ses encouragements pendant mes études scientifiques. Son intérêt, son savoir et son aide ont été, sont et seront toujours aussi précieux. Je profite également de ce moment particulier pour avoir une énorme pensée pour ma maman sans qui je n'en serais pas là. Je pense très fort à elle et reprends ses convictions profondes qui ont participé à la réussite de mon parcours : "en chacun de nous se trouve des talents qu'il faut faire fructifier".

Table des matières

Introduction	1
1 Vibrations/Absorbeurs de Vibrations	7
1.1 Modélisation physique	8
1.1.1 Les modèles analytiques	8
1.1.2 Les modèles discrets (les systèmes masses-ressorts)	9
1.1.3 Les méthodes continues (la méthode éléments finis)	9
1.2 Vibrations	10
1.2.1 Comportement dynamique des structures	11
1.2.2 Systèmes linéaires / Non linéaires	12
1.2.3 Dynamique non linéaire	18
1.2.4 Modes de vibrations	24
1.3 Absorbeurs de vibrations	35
1.3.1 Systèmes actifs	35
1.3.2 Systèmes passifs	37
1.3.3 Systèmes semi-actifs	43
2 Principe et Premiers Exemples du Pompage Energétique	47
2.1 Principe	48
2.1.1 Objectifs	48
2.1.2 Travaux existants	50
2.1.3 Problèmes ouverts	63
2.2 Evidences Numériques	65
2.2.1 Equations du modèle	66
2.2.2 Nonlinéarité régulière	67
2.2.3 Nonlinéarité irrégulière : système linéaire par morceaux	68
2.2.4 Système non linéaire chaotique avec raideur négative	72
2.2.5 Application à un bâtiment	76
3 Pompage Energétique en Régime Instationnaire	91
3.1 Etudes théoriques	92
3.1.1 Système annexe non linéaire avec couplage linéaire	92
3.1.1.1 Modes non linéaires et stabilités	93
3.1.1.2 Robustesse du pompage énergétique	100
3.1.2 Couplage non linéaire	115
3.2 Vérifications expérimentales	127
3.2.1 Systèmes considérés	127

3.2.1.1	Modèle réduit à un étage	127
3.2.1.2	Modèle réduit à quatre étages	130
3.2.2	Résultats expérimentaux	135
3.2.2.1	Modèle réduit à un étage	135
3.2.2.1	Modèle réduit à quatre étages	141
4	Pompage Energétique en Régime Stationnaire	149
4.1	Etudes théoriques	150
4.1.1	Etudes numériques	150
4.1.2	Etudes analytiques	153
4.1.2.1	Approche asymptotique	153
4.1.2.2	Approche échelles multiples	165
4.1.2.3	Approche équation variationnelle	173
4.2	Vérifications expérimentales	180
4.2.1	Modèle à un étage	180
4.2.2	Modèle à quatre étages	184
5	Optimisation	189
5.1	Optimisation des paramètres	190
5.1.1	Etudes théoriques	191
5.1.1.1	Expression analytique	191
5.1.1.2	Etude des modes normaux non linéaires	200
5.1.2	Vérifications expérimentales	207
5.1.2.1	Modèle réduit à un étage	207
5.1.2.2	Modèle réduit à quatre étages	210
5.2	Modes normaux non linéaires multiples	214
5.2.1	Etudes théoriques	216
5.2.2	Vérifications expérimentales	222
	Conclusions et Perspectives	233
	Annexes	237
	Table des figures	267
	Bibliographie	277

Introduction

Ces travaux portent à la fois sur des aspects analytiques, numériques et expérimentaux. Ils concernent la dynamique des structures, les vibrations et les matériaux (doctorat au sein du laboratoire Géomatériaux de l'ENTPE ainsi qu'à l'Université de Bristol, UK). Ce travail comprend des modélisations (échelles multiples, homogénéisation), des simulations numériques pour les problèmes directs, des résolutions de solutions quasi-analytiques permettant d'expliquer les différents phénomènes et de valider des codes de calcul, des méthodes numériques spécifiques pour résoudre les problèmes inverses et le design, des expérimentations de réponses vibratoires (via accéléromètres et capteurs) en employant différentes sollicitations (ondes fournies par pot vibrant, par moteur linéaire ou vérin hydraulique), sous forme de chocs ou vibratoires.

Dans le domaine du Génie Civil et du Génie Mécanique, les vibrations des structures constituent un des nombreux risques d'endommagement d'une structure et peuvent entraîner de graves conséquences parfois sans commune mesure avec la mise en oeuvre des moyens de prévention appropriés. Ainsi, l'étude dynamique des structures est une étape incontournable de la phase d'élaboration d'un projet. L'atténuation passive des vibrations, c'est-à-dire l'atténuation sans la nécessité de fournir d'énergie extérieure, est devenue un véritable enjeu. Pouvoir effectuer le contrôle de bâtiments, de tabliers de ponts lors de séismes notamment ou de systèmes mécaniques est devenu essentiel (surtout que la politique actuelle tend à accentuer l'entretien et le maintien des ouvrages d'art actuels plutôt que la construction d'ouvrages nouveaux car le réseau est bien avancé). Il existe des dispositifs de contrôle nombreux et variés. Par exemple, le contrôle actif est beaucoup employé. J'ai mis en oeuvre ce contrôle actif dans le cas d'un système de dimension deux ou trois pour le contrôle du chaos, lors d'un séjour à Auburn (USA) dans le "Non Linear Systems Research Laboratory" avec une collaboration avec S.C. Sinha [Sinha et al., 2005]. Du fait de l'apport d'énergie nécessaire, et de la technologie complexe que ces dispositifs de contrôle actif demandent, et malgré leur très grande efficacité, il peut être plus intéressant d'utiliser des systèmes de contrôles passifs (sans apport d'énergie ou de variabilité) parce qu'ils sont plus robustes et moins sophistiqués.

Le pompage énergétique, qui est le principal sujet de ce travail, peut ainsi trouver son application dans ces domaines. Le pompage énergétique est le transfert irréversible de l'énergie vibratoire d'une structure principale, que l'on désire protéger des perturbations extérieures, vers une structure auxiliaire couplée que l'on vient rajouter.

Le point important est d'introduire une forte nonlinéarité dans la conception de la structure ajoutée. On peut alors se poser la question de savoir si ce phénomène de pompage énergétique peut permettre une atténuation passive des vibrations, c'est-à-dire une absorption de l'énergie vibratoire. On veut donc savoir s'il est possible, grâce au couplage à une structure fortement non linéaire, de privilégier les vibrations de la faible masse ajoutée dans le but de diminuer les

vibrations de la structure initiale que l'on veut isoler. Actuellement, les thématiques de recherche ont pour objectif d'étudier et de développer les systèmes de protection les plus innovants qui se fondent sur les phénomènes de dissipation. La tendance actuelle est d'analyser également le concept de mécanismes d'amortisseurs-fusibles disséminés à des endroits sensibles des structures, capables d'absorber l'énergie. Le réseau électrique pouvant parfois faire défaut (ce qui est toujours le cas lors d'un séisme), il apparaît nécessaire de donner la priorité à la conception d'absorbeurs passifs (et dont le coût s'avère moindre).

Ce concept de pompage énergétique semble donc un phénomène dynamique innovant qui a été très récemment introduit par la communauté scientifique. Cependant de nombreuses questions théoriques restent à traiter pour mieux comprendre ce phénomène notamment en ce qui concerne la faisabilité avant de pouvoir l'appliquer à des structures réelles. Pour citer quelques-uns de ces problèmes on peut souligner le fait qu'il faut encore régler les points suivants : comprendre et étudier le phénomène en développant les études théoriques, tester la faisabilité de ce pompage, optimiser les différents paramètres et le phénomène...

Si ces problèmes sont traités alors le phénomène de pompage énergétique pourra donner naissance à des absorbeurs dynamiques de nouvelle génération.

Cette thèse concerne cette problématique, et essaie de répondre à la question suivante : est-il possible par ce couplage d'une structure existante (généralement à comportement linéaire), avec une petite structure annexe à comportement non linéaire, et en concevant habilement le couplage et la nonlinéarité :

- de très peu modifier les caractéristiques de la structure existante (en particulier les fréquences et modes propres) ?
- de créer un “mode de vibration non linéaire” tel que, sous la moindre sollicitation (instantanée entre autre) exercée sur la structure linéaire, celle-ci vibre moins qu'en absence de couplage ? Le phénomène de pompage énergétique permettrait de transférer l'énergie de la structure linéaire vers la structure non linéaire qui concentrerait alors l'essentiel des vibrations.

Ce travail permet d'affirmer, comme nous le verrons par la suite que les réponses à ces questions sont positives.

En effet, le concept de “pompage énergétique” a donné naissance à une nouvelle génération d'absorbeurs ([Gourdon et Lamarque, 2006, Gourdon et al., 2006b, Manevitch et al., 2006a] et aussi [Gourdon et al., 2006a, Manevitch et al., 2007, Gourdon et Lamarque, 2005b] ainsi que les travaux des publications [Gourdon et Lamarque, 2005a, Gendelman et al., 2006]). Le phénomène de pompage énergétique provoque une soudaine décroissance et une rapide diminution d'amplitude des vibrations de la structure. Contrairement à ses homologues linéaires, les absorbeurs non linéaires peuvent posséder d'intéressantes caractéristiques : ils peuvent être automatiquement réglés sur la fréquence du système qui doit être atténuée (ils s'adaptent à la fréquence naturelle du système primaire) et ils fonctionnent à la fois sous sollicitation périodique ou transitoire. La gamme fréquentielle où l'absorption est efficace est très large contrairement à un absorbeur linéaire qui est conçu pour atténuer une seule fréquence bien précise [Gourdon et al., 2006a]. Le seul inconvénient est que le système primaire doit vibrer suffisamment pour déclencher le pompage énergétique. Avoir une meilleure connaissance de leur comportement apparaît aussi crucial pour atteindre un compromis optimal entre les avantages et inconvénients pour des applications réelles. Le couplage peut aussi être modélisé par un “type” de ressort à comportement non

linéaire. Dans le cas du Génie Civil, la structure linéaire peut ainsi être un tablier de pont qui vibre et la structure non linéaire un câble que l'on vient coupler à la structure linéaire. A l'aide de ce couplage, on veut donc construire des modes non linéaires de telle manière à privilégier les vibrations de la petite masse ajoutée en diminuant les vibrations de la structure initiale. Compte-tenu de la littérature émergente, ce dernier point paraissait réalisable. Mais il restait à régler les points suivants : utiliser au mieux la notion de modes non linéaires des systèmes réguliers pour accroître la quantité d'énergie transférée ; tester l'apport de différentes nonlinéarités (voir du "chaos transitoire") [Gourdon et Lamarque, 2005b] ; tester (dans le but d'augmenter) l'efficacité de l'amorçage du pompage énergétique ; tester la faisabilité de ce pompage énergétique théorique sur des cas pratiques concrets (structures réelles) [Gourdon et al., 2006b] ; optimiser les différents paramètres ce qui a fait l'objet de publications [Manevitch et al., 2007, Manevitch et al., 2006a] (notamment ajouter une très faible masse ce qui n'est pas le cas dans les principales études théoriques actuelles où la masse ajoutée est du même ordre de grandeur que la masse de la structure principale à isoler). Un des principaux objectifs était alors de pouvoir appliquer cette méthode à des structures concrètes, de pouvoir passer de la théorie à l'expérimentation, notamment dans le domaine du Génie Civil et Génie Mécanique. En effet, on veut pouvoir réaliser, avec cette méthode, l'atténuation des vibrations de tabliers de ponts (ou d'immeubles) en venant ajouter une petite structure non linéaire (câble, "ascenseur") qui serait couplée au tablier par de faibles ressorts afin de pomper l'énergie. Cependant, pour pouvoir réaliser ce passage de la théorie à l'expérimentation, plusieurs aspects importants n'avaient pas encore été pris en compte dans la théorie. C'est ainsi que nous avons déterminé les conditions exactes sur l'efficacité du pompage énergétique (avec une augmentation de cette efficacité). Un pompage optimal a été défini. Le rôle de chaque paramètre (avec une optimisation) et la façon de concevoir le couplage (en pratique) ont été étudiés. Le rôle de l'amortissement a aussi été étudié. La robustesse de la méthode (étude des vibrations aléatoires/stochastiques) a été analysée [Gourdon et Lamarque, 2006]. Le cas des vibrations stationnaires, forcées, ceci dans un cadre déterministe dans un premier temps et stochastique dans un deuxième temps, a été abordé. Nous nous sommes alors intéressés au problème du niveau minimal d'énergie nécessaire (un pompage énergétique à "changement de vitesses" a été défini [Gourdon et Lamarque, 2005a]). La notion de pompage énergétique en présence de nonlinéarités irrégulières (systèmes affines par morceaux, ou autres termes irréguliers) pour accroître l'efficacité a été abordée. Les aspects suivants sont ainsi traités :

- réduction du problème à une équation intégrale dans le cas d'une nonlinéarité régulière cubique, puis étude des phénomènes de transferts par des méthodes variées : analytiques, numériques ou analytico-numériques (le pompage énergétique a ainsi été expliqué) ;
- robustesse de la méthode (introduction de paramètres incertains dans les structures et étude du phénomène de pompage énergétique qui se produit bien avec pour exemple les circuits électroniques dont les composants, par exemple les résistances, sont incertains) ;
- quantification de l'efficacité du pompage ;
- un traitement analytique et numérique du système a été effectué en choisissant une famille générale de modèles à deux degrés de liberté dans un premier temps pour essayer de répondre aux problèmes soulevés précédemment ;
- des vérifications expérimentales des résultats analytiques/numériques ont été réalisées ce qui a fait l'objet de publications [Gourdon et al., 2006b, Gourdon et al., 2006a].

Les applications traitées sont nombreuses et variées.

- Application du pompage énergétique pour l'isolation sismique de bâtiments ainsi que l'ont montré nos travaux [Gourdon et Lamarque, 2005b] et [Gourdon et al., 2006b]. Cette thématique a notamment fait l'objet d'un projet Région Emergence ("Pompage Energétique : Théorie, Faisabilité, Expérience") et d'un projet Européen (Marie Curie) avec l'Université de Bristol

(Earthquake Laboratory UK) où j'ai mené une expérimentation avec une table vibrante six axes permettant d'effectuer diverses simulations). Une expérimentation améliorée, en prenant en compte plus de modes linéaires, a ensuite été menée au LGM (ENTPE).

-Ce travail intéresse aussi un constructeur automobile, avec un contrat en cours de montage.

Les travaux concernant le pompage énergétique ont ainsi permis de nombreuses collaborations dans cette thématique de recherche, collaborations nationales mais aussi internationales. C'est ainsi que des travaux ont pu être réalisés en partenariat avec des chercheurs internationaux du domaine comme S.C. Sinha (Nonlinear Systems Research Laboratory, Auburn, AL, USA), C. Taylor (Earthquake Laboratory, UK), O.V. Gendelman (Technion - Israel Institute of Technology, Technion City, Haifa, Israel), L.I. Manevitch (N.N. Semenov Institute for Chemical Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia) se traduisant par des publications.

Cette thèse est organisée de la manière suivante : dans un premier temps, le contexte des absorbeurs de vibrations est présenté. L'introduction des différents outils nécessaires à l'étude des vibrations est réalisée notamment les modes de vibrations linéaires ou non linéaires. Les différents types d'absorbeurs existants sont présentés. Tout ceci est l'objet du premier chapitre.

Dans un deuxième temps, le principe et des premiers exemples du pompage énergétique sont traités afin de mieux comprendre le phénomène dans le deuxième chapitre. En effet, après un développement du principe du phénomène de pompage énergétique en régime instationnaire, une analyse des travaux existants sur le sujet permet d'énoncer des problèmes ouverts qui restaient à résoudre. C'est ainsi que des évidences numériques sont apportées afin de comprendre ce principe de pompage énergétique. L'application à plusieurs modèles de bâtiments est également envisagée.

On tente de répondre à ces problèmes sur la faisabilité et l'efficacité dans les chapitres suivants. En particulier, dans le troisième chapitre, on s'intéresse au pompage énergétique en régime instationnaire, c'est-à-dire pendant le temps transitoire. L'objectif du pompage énergétique est d'être en mesure de concevoir un absorbeur non linéaire d'énergie efficace pour atténuer les vibrations transitoires. Le troisième chapitre est ainsi consacré à ce transfert d'énergie qui peut être décrit et expliqué par l'étude des modes normaux non linéaires. Des méthodes numériques, analytiques et des vérifications expérimentales permettent ainsi de mieux comprendre le phénomène pour l'absorption passive des vibrations pendant le régime instationnaire. La robustesse du phénomène est notamment étudiée pour pouvoir envisager des applications réelles.

La structure annexe étant conçue pour atténuer les vibrations de façon optimale pendant le temps transitoire, on s'intéresse alors à ce phénomène pendant le temps stationnaire (régime établi à long terme) pour voir si l'atténuation est toujours efficace; ceci dans le quatrième chapitre. Cela permet de pouvoir effectuer des comparaisons avec les absorbeurs de vibrations classiques linéaires déjà utilisés dans l'industrie mais qui ont de nombreux inconvénients. Le quatrième chapitre s'intéresse ainsi au phénomène de pompage énergétique pendant le régime stationnaire, à savoir à long terme sous excitation périodique. Les informations obtenues permettent d'obtenir les caractéristiques sur l'absorbeur de vibrations ainsi construit. En particulier, des comparaisons avec des absorbeurs passifs de vibrations linéaires classiques peuvent être réalisées. Des vérifications expérimentales permettent également de pouvoir envisager des applications pratiques.

Après avoir étudié le phénomène du pompage énergétique dans les précédents chapitres, l'objectif du cinquième chapitre est alors l'optimisation afin de pouvoir appliquer le principe du pompage énergétique sur des structures réelles. Cette optimisation passe par l'optimisation des paramètres dans un premier temps et le choix optimal de ces paramètres en vue d'une application pratique. Dans un deuxième temps l'optimisation du phénomène en lui-même est envisagée : l'objectif est une meilleure amorce du pompage et un intervalle d'amplitudes plus grand où le phénomène de pompage est activé avec l'utilisation de multiples modes normaux non linéaires.

Enfin, des conclusions sur l'atténuation passive des vibrations par pompage énergétique sont apportées ainsi que différentes perspectives dans ce domaine.

Vibrations/Absorbeurs de Vibrations

Dans le domaine du Génie Civil et du Génie Mécanique, les vibrations des structures constituent un des nombreux risques d'endommagement d'une structure et peuvent entraîner de graves conséquences parfois sans commune mesure avec la mise en oeuvre des moyens de prévention appropriés. L'étude dynamique des structures est donc une étape incontournable de la phase d'élaboration d'un projet. C'est ainsi que le contrôle des vibrations de structures est devenu un enjeu majeur. Ce chapitre est donc consacré au contexte des absorbeurs de vibrations et en particulier à l'introduction des différents outils nécessaires pour l'étude des vibrations. Les différents types d'absorbeurs sont présentés.

Sommaire

1.1	Modélisation physique	8
1.1.1	Les modèles analytiques	8
1.1.2	Les modèles discrets (les systèmes masses-ressorts)	9
1.1.3	Les méthodes continues (la méthode éléments finis)	9
1.2	Vibrations	10
1.2.1	Comportement dynamique des structures	11
1.2.2	Systèmes linéaires / Non linéaires	12
1.2.3	Dynamique non linéaire	18
1.2.4	Modes de vibrations	24
1.3	Absorbeurs de vibrations	35
1.3.1	Systèmes actifs	35
1.3.2	Systèmes passifs	37
1.3.3	Systèmes semi-actifs	43

1.1 Modélisation physique

Dans le cadre de la présente étude, différents modèles sont utilisés. Ces modèles sont appelés modèles physiques parce qu'ils permettent de simuler à la fois la forme géométrique des objets (forme et position) et les lois de comportements des structures modélisées. Selon la précision des modèles, ces lois sont plus ou moins fidèles à ce qui se passe dans la réalité. Plusieurs modèles peuvent être mis en oeuvre : les modèles analytiques, les modèles discrets (les systèmes masses-ressorts) et les modèles continus (la méthode éléments finis).

1.1.1 Les modèles analytiques

Une première approche de la simulation de phénomènes physiques est la modélisation analytique. Il s'agit de l'approche qui requiert le moins de ressources informatiques puisqu'elle cherche à approcher la structure et/ou le phénomène étudiés de façon à avoir le modèle le plus simple possible. Pour cela, les modèles analytiques s'appuient sur les équations de base de la théorie régissant un phénomène et les étudient sur une représentation abstraite du système réel, prenant en compte tout ou partie de la géométrie de la structure analysée.

Avant de se lancer dans un modèle analytique, il faut donc définir les variables intéressantes et pertinentes que l'on veut modéliser et au contraire celles qui ne le sont pas et que l'on néglige. Mais il faut aussi remarquer que le choix des variables se fait en référence à une théorie : si l'on cherche à caractériser les forces, c'est que l'on a les équations de la mécanique classique en vue. Lorsque le cadre théorique est connu et le modèle défini, on cherche à résoudre les équations du problème étudié. Deux façons sont alors possibles : résoudre les équations à l'aide de schémas numériques, par exemple pour pouvoir les programmer sur un ordinateur (se pose alors la question de la précision numérique de l'algorithme utilisé), ou faire des approximations sur les équations pour chercher une solution analytique simple (se pose alors la question du domaine de validité des approximations). Il est d'ailleurs possible d'utiliser les deux méthodes simultanément. Il faut toutefois veiller à ne pas confondre l'introduction d'approximations sur la résolution des équations avec l'élaboration de la modélisation initiale. La phase de modélisation est non seulement indispensable mais essentielle.

Il est parfois nécessaire d'ajuster les équations théoriques pour les faire coller au mieux aux phénomènes réels. Le modèle gagne ainsi en précision sans être pénalisé par l'ajout de nouvelles équations alourdissant sa résolution. Ces calages de modèle sont effectués à partir d'expériences réelles sur la structure ou le phénomène étudiés dans les conditions où le modèle est censé fonctionner. Les données enregistrées pendant ces expériences permettent de pondérer le modèle analytique et de l'adapter à la situation précise dans laquelle il sera utilisé.

Malgré son manque relatif de précision, dépendant du nombre de facteurs pris en compte, la modélisation analytique est souvent la première approche à mettre en place dans toutes les études. En effet, celle-ci permet de disposer d'un outil de simulation rapide, puisqu'elle est basée sur des équations d'applications relativement simples, et d'une première étude simplifiée de la structure ou du phénomène analysés. Un modèle analytique peut ainsi permettre de donner un premier point de vue sur le comportement de ce phénomène et donc d'en sortir des premiers résultats assez rapidement pour permettre de décider dans quelles directions poursuivre ses recherches et comment développer le modèle au cours de son étude. Les études analytiques sont très utiles pour la compréhension du comportement et le dimensionnement.

1.1.2 Les modèles discrets (les systèmes masses-ressorts)

Dans la modélisation discrète, on suppose que la matière constituant une structure peut être représentée par un ensemble de sous-structures, ou éléments discrets, ayant chacune un comportement propre. Le modèle discret le plus utilisé est le modèle masses-ressorts. Son nom est dû au fait que chaque élément a une masse propre et est relié aux autres éléments par un système complexe de ressorts symbolisant les interactions entre eux (Figure 1.1). Ces relations sont souvent caractérisées par un système dynamique du second ordre.

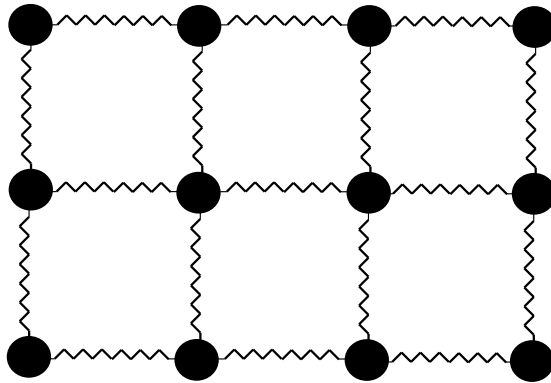


FIG. 1.1 – Un objet peut être représenté par un ensemble de particules (masses ponctuelles) liées entre elles par des ressorts (voire des ressorts/amortisseurs). C'est un modèle masses-ressorts.

Cette approche a été développée initialement dans le domaine de la mécanique. Elle essaie de simuler la réalité physique de la matière, en la décomposant en un grand nombre de particules (les masses) liées entre elles (par des ressorts) de façon à pouvoir interagir. La résolution de ce système consiste à appliquer la deuxième loi de Newton (caractérisant le mouvement d'une masse ponctuelle) sur chaque particule, en prenant en compte les forces dues à ses interactions avec les particules voisines et celles dues à ses interactions avec le milieu extérieur. Les solutions de ces équations résultant de ce système dépendent des valeurs des forces (elles augmentent avec la rigidité des ressorts) et de leur nature (elles deviennent infinies si les forces sont discontinues, ce qui est le cas pour une collision).

Le système masses-ressorts a intéressé de nombreux travaux de recherche grâce à :

- sa facilité de mise en oeuvre : il suffit de définir les différentes particules à modéliser et de leur donner une masse pour obtenir un “maillage” correspondant à la structure étudiée. Il faut ensuite attribuer les caractéristiques des raideurs des ressorts, ce qui est moins aisé ;
- sa capacité à refléter la réalité physique des matériaux, ce qui lui permet de simuler une large variété de comportements mécaniques, tels que la traction, la flexion, le mouvement, les déformations élastiques...
- sa complexité de résolution qui peut être assez faible si on se limite à une méthode de modélisation et de résolution linéaire par exemple.

1.1.3 Les méthodes continues (la méthode éléments finis)

Les approches continues sont parfois préférées aux approches discrètes. En effet, même si elles sont beaucoup plus complexes, que ce soit pour la phase de définition du maillage ou pour la phase de calcul, elles peuvent être plus précises.

La modélisation continue est basée sur les équations de la mécanique des milieux continus, qui décrivent mathématiquement, pour une structure donnée, les relations entre les contraintes qu'elle subit et les déformations qui en découlent. Selon les déformations de la structure, une modélisation en “petites déformations” (généralement pour les déformations inférieures à dix pour cent de la taille de la structure) ou en “grandes déformations” peuvent être choisies. Il est ensuite nécessaire de définir la loi de comportement qui modélisera le phénomène étudié. Cette loi détermine la relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Elle est définie à partir de mesures.

Pour approcher au mieux la mécanique des milieux continus, une décomposition de la structure étudiée en un nombre infini (ou fini pour des problèmes plus complexes) d'éléments est nécessaire pour résoudre les équations impliquées. Pour pouvoir résoudre les problèmes complexes rencontrés, des techniques de résolution impliquant une discrétisation, c'est-à-dire une approximation du problème continu, ont été développées. La discrétisation consiste à estimer les déformations en fonction des contraintes externes en un nombre fini de points situés à la fois sur la surface de la structure étudiée et à l'intérieur de celle-ci. Contrairement aux modèles discrets pour lesquels la solution n'est qu'approchée, dans les modèles continus, la discrétisation permet de calculer une solution approchée sur un nombre fini de points mais celle-ci peut ensuite être interpolée de façon continue sur n'importe quel point de la structure modélisée. Il faut aussi souligner qu'il existe non seulement des approches avec des lois de comportements explicites (un schéma en temps normal est alors utilisé), mais aussi des approches “incrémentales” (loi de comportement qui n'est pas explicite); dans ce dernier cas des schémas en temps sont utilisés afin de réaliser un équilibrage dynamique.

Différentes approches pour la discrétisation des problèmes continus ont été proposées, comme les approximations par différences finies, les méthodes de résidus pondérés, ou l'introduction d'une approximation des éléments réels discrets par des éléments finis d'un milieu continu. C'est cette dernière approche, connue sous le nom de “méthode des éléments finis”, qui est aujourd'hui la plus utilisée. C'est ainsi que l'on utilise cette dernière méthode dans nos travaux. D'autres méthodes existent mais ne sont pas listées ici. On retient principalement la méthode des éléments finis que l'on utilise pour obtenir les différences fréquences de modèles de bâtiments expérimentaux dans le troisième chapitre.

1.2 Vibrations

Dans le domaine du Génie Civil et du Génie Mécanique, **les vibrations des structures** constituent un des nombreux risques d'endommagement d'un ouvrage et peuvent entraîner de graves conséquences parfois sans commune mesure avec la mise en oeuvre des moyens de prévention appropriés. L'étude dynamique des structures est ainsi une étape incontournable de la phase d'élaboration d'un projet.

C'est ainsi que le contrôle des vibrations de structures est devenu un véritable enjeu. Pouvoir effectuer le contrôle de bâtiments, de tabliers de ponts, notamment lors de séismes, ou de systèmes mécaniques est devenu essentiel (surtout que la politique actuelle tend à accentuer l'entretien et le maintien des ouvrages d'art actuels plutôt que la construction d'ouvrages nouveaux car le réseau est bien avancé).

De plus, l'Europe est loin d'échapper aux risques sismiques, non seulement dans les régions traditionnellement exposées (Italie, Grèce, Balkans, Turquie...), mais également dans des pays

à “sismicité dormante” (Portugal...). Quant au reste du monde, la liste des régions aux risques sismiques serait trop longue à énumérer.

Le pompage énergétique (dont nous décrirons le principe plus loin) peut ainsi trouver son application dans ces domaines.

Actuellement, les thématiques de recherche ont pour objectif d’étudier et de développer les systèmes de protection les plus innovants qui se fondent sur les phénomènes de dissipation. La tendance actuelle est d’analyser également le concept de mécanismes d’amortisseurs-fusibles disséminés à des endroits sensibles des structures et capables d’absorber l’énergie. Le réseau électrique pouvant parfois faire défaut (ce qui est toujours le cas lors d’un séisme), il apparaît nécessaire de donner la priorité à la conception d’absorbeurs passifs.

L’avantage porté dans le principe même du pompage énergétique est de pouvoir proposer une action sur des structures ou des systèmes existants comme nous le verrons par la suite. Le pompage énergétique, qui peut être défini comme un transfert irréversible d’énergie d’une structure initiale à isoler vers une structure annexe ajoutée, n’est pas une méthode utilisable seulement à la conception, mais justement une méthode utilisable pour des structures déjà construites. Il ne s’agit pas d’opérer un contrôle optimal de la structure pour supprimer toute vibration, moyennant un apport d’énergie parfois trop important pour permettre un contrôle efficace [Roberti, 1994]. En effet, la méthode est passive (pas d’ajout d’énergie extérieure) ce qui est totalement différent du contrôle actif qui nécessite l’apport d’énergie extérieure. Il ne s’agit même pas vraiment de contrôle au départ, même si a posteriori, la structure initiale verra son comportement contrôlé d’une certaine manière. En effet, l’énergie présente dans cette structure est peu à peu transférée dans une structure annexe conçue pour en récupérer le maximum.

On peut ainsi envisager plusieurs applications :

- l’amélioration de l’isolation vibratoire de systèmes embarqués ;
- l’amélioration de la durée de vie des structures, ouvrages et bâtiments par réduction des effets des sollicitations dynamiques sur les matériaux ;
- l’amélioration du confort des usagers en terme vibratoire (véhicules et plus largement moyens de transports terrestres, passerelles pour piétons, bâtiments de grandes hauteurs-la méthode venant alors éventuellement en appoint des systèmes de contrôle) voire acoustique.

1.2.1 Comportement dynamique des structures

De nombreux systèmes mécaniques et structures existantes ont un comportement vibratoire linéaire (nous définirons plus précisément ce terme dans cette partie) sous (faible) sollicitation dynamique (au moins).

En effet, généralement les systèmes étudiés sont des systèmes généraux “continus”.

La réponse dynamique de ces objets a souvent une influence sur des questions de confort des usagers (vibrations désagréables d’un ouvrage d’art en service, vibrations parasites dans une machine, un véhicule...), ou bien sur la durée de vie de la structure (action de la dynamique sur le vieillissement) ; voire sur l’intégrité de la structure (création d’efforts dynamiques destructeurs). Les origines des désordres vibratoires sont nombreuses et variées. Elles sont liées :

- d’une part aux structures elles-mêmes :
 - les ouvrages sont de plus en plus hauts, légers et de grandes longueurs (les passerelles par exemple ont des portées de plus en plus grandes). Par exemple la travée centrale

- (longueur entre deux pylônes) du Pont de Normandie (pont à haubans) est de 856m ;
- les structures modulaires sont de plus en plus allégées, les façades plus minces ;
 - d'autre part à leur environnement :
 - des machines de forte puissance à proximité des ouvrages ou bâtiments ;
 - des sollicitations vibratoires transmises par le sol telles que le trafic routier et ferroviaire, les chantiers, les séismes ;
 - les sollicitations dues au vent...

De plus, les sollicitations vibratoires rencontrées sont de plusieurs types :

- sinusoïdales ;
- transitoires ou de types chocs : séismes, explosions, machines générant des chocs ;
- aléatoires : écoulements de fluides, circulations ferroviaires et routières...

Il faut souligner qu'une sollicitation d'allure quelconque peut toujours, selon l'analyse de Fourier, se décomposer en un certain nombre de sollicitations élémentaires harmoniques en traitant les signaux aléatoires.

Des protections contre les excitations dynamiques des systèmes comme les ponts, les bâtiments, les véhicules et leurs passagers, les machines tournantes, les navires, les appareils ménagers ou industriels, sont généralement requises pour préserver leur intégrité. Pour cela, les concepteurs utilisent souvent des dispositifs spécifiques appelés "absorbeurs dynamiques" pour atténuer les vibrations du système.

Considérons, sous hypothèse de petits déplacements, petites déformations et avec un comportement linéaire isotrope, les équations d'équilibre dynamique générales des systèmes continus du type (si u représente le déplacement, t le temps et ρ la masse volumique de la structure) :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \underbrace{Au}_{\text{Linéaire en espace}} + \underbrace{c \frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{Dissipation}} = \underbrace{F(x, t)}_{\text{Forces externes}} . \quad (1.1)$$

Une modélisation linéaire des systèmes "continus" avec l'équation (1.1) permet de discrétiser les structures générales.

En effet, on peut appliquer à l'équation (1.1) les méthodes classiques de Mécanique des Vibrations comme la méthode énergétique de Rayleigh-Ritz [Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959] pour effectuer la discrétisation de cette équation. On obtient ainsi N degrés de liberté linéaires. On peut choisir $N=1$ par exemple pour débiter. On aboutit alors au modèle discret d'une structure générale.

- Il faut souligner le fait que c'est une simplification : il peut y avoir des termes non linéaires :
- s'ils sont petits, on les néglige,
 - s'ils sont grands, on doit les garder mais pour des amplitudes très petites, on peut linéariser le problème, pour des lois de comportement assez régulières.

Quel que soit le modèle utilisé, il existe des techniques de réduction (par exemple réduction modale) qui permettent de condenser la structure, de la discrétiser...

1.2.2 Systèmes linéaires / Non linéaires

Les structures, systèmes rencontrés, peuvent être classifiés en deux grandes catégories : les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires.

D'un point de vue "statique", un phénomène est dit linéaire lorsque un changement de l'intensité de la cause produit un changement de l'effet dans les mêmes proportions. Un exemple est le ressort simple linéaire qui est décrit par la Figure 1.2.

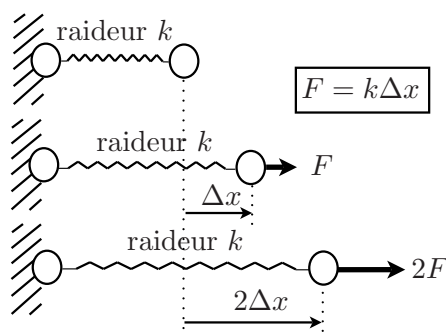


FIG. 1.2 – Ressort simple linéaire.

D'un point de vue "dynamique", si un système est linéaire, alors, pour un signal d'entrée sinusoïdal pur, le signal de sortie est sinusoïdal pur, de même fréquence. Ce point est illustré sur la Figure 1.3. Un exemple est le système masse-ressort-amortisseur décrit par la Figure 1.4.

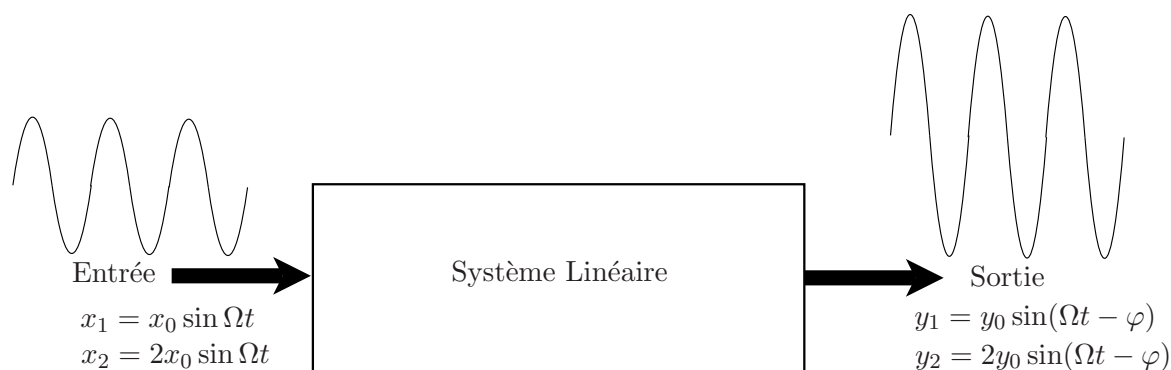


FIG. 1.3 – Système linéaire en dynamique.

Un système non linéaire est alors un système qui n'est pas linéaire.

Un système déterministe peut généralement être décrit par un opérateur H qui associe l'entrée $x(t)$ fonction de t à la sortie $y(t)$. Les systèmes linéaires vérifient le principe de superposition : soit deux entrées valides $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et les sorties correspondantes :

$$y_1(t) = H(x_1(t)), \quad (1.2)$$

$$y_2(t) = H(x_2(t)). \quad (1.3)$$

Alors un système linéaire doit vérifier :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad H(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha H(x_1(t)) + \beta H(x_2(t)) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t). \quad (1.4)$$

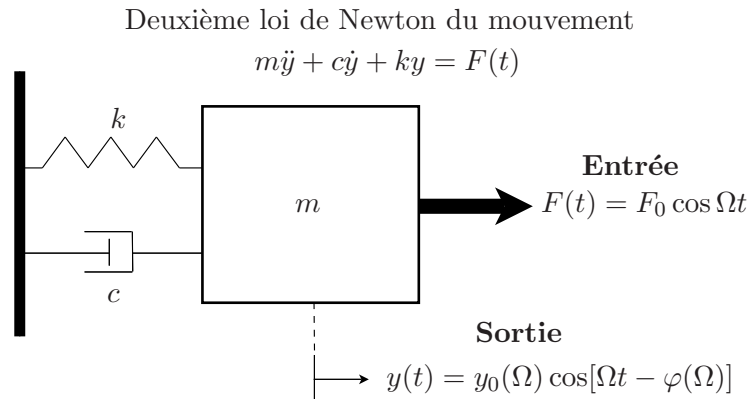


FIG. 1.4 – Système masse-ressort-amortisseur.

Ce résultat se généralise alors à un nombre quelconque d’excitations. En d’autres termes, si on sait décomposer une excitation en une somme de fonctions simples, il sera éventuellement possible de calculer la réponse correspondante en additionnant des réponses individuelles calculables explicitement.

De plus, au lieu de calculer explicitement la réponse du système dans le temps, il est souvent plus intéressant de déterminer son contenu en fréquences, le passage d’un domaine à l’autre se faisant à l’aide de la transformation de Fourier par exemple. Il est montré que la transformée d’une convolution est simplement le produit des transformées. En utilisant les lettres majuscules correspondantes pour ces dernières, on obtient l’équation suivante dans laquelle $H(\omega)$ s’appelle fonction de transfert du système :

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega). \quad (1.5)$$

L’énergie d’une sinusoïde est concentrée sur une seule fréquence. En termes de transformée de Fourier, elle est représentée par un delta positionné sur cette fréquence (une analyse plus rigoureuse conduit à considérer deux deltas complexes). La formule précédente transforme le delta d’entrée en un autre delta correspondant à une autre sinusoïde de même fréquence, ce qui donne la signification physique de la fonction de transfert.

Dans le cas d’un système linéaire, d’après la linéarité, celle-ci fait donc correspondre à une somme de sinusoïdes une autre somme de sinusoïdes qui possèdent les mêmes fréquences (au contraire, un système non linéaire crée de nouvelles fréquences). Dans le cas d’un signal périodique, il s’agit de sinusoïdes d’amplitudes finies.

Les nonlinéarités peuvent alors être classées en nonlinéarités régulières et irrégulières. En effet, une nonlinéarité est dite régulière quand la loi entrée-sortie du système est représentée par une courbe régulière (fonction de classe C^1 , C^2 ...). Des exemples de nonlinéarités régulières et non-régulières sont présentés sur la Figure 1.5.

De plus, les nonlinéarités rencontrées peuvent être de plusieurs types (l’objet de cette partie n’est pas de dresser un catalogue exhaustif de l’ensemble des nonlinéarités, mais plutôt de situer les différents résultats (souvent classiques) auxquels il sera fait référence dans cette étude et de situer quel type de nonlinéarité est utilisé dans le phénomène de pompage énergétique) :

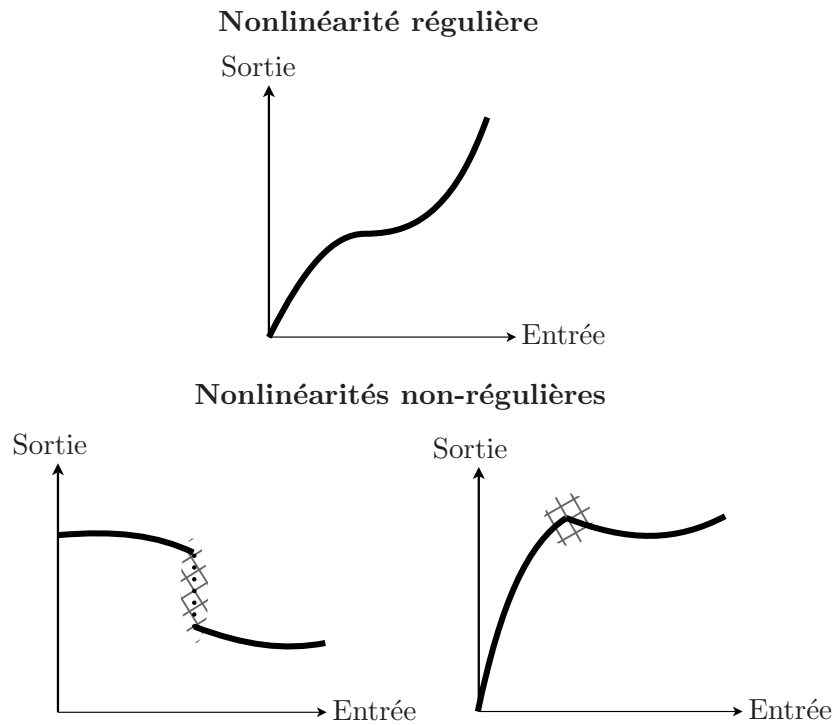


FIG. 1.5 – Nonlinéarités régulières et non-régulières.

- **les nonlinéarités matérielles.**

Les matériaux ont ainsi une loi de comportement non linéaire :

- loi de comportement élasto-plastique comme les matériaux élasto-plastiques illustrés par la Figure 1.6 où la nonlinéarité est non-régulière et où le mécanisme est irréversible (applications en dynamique rapide mais a priori pas d'applications en vibrations) ;

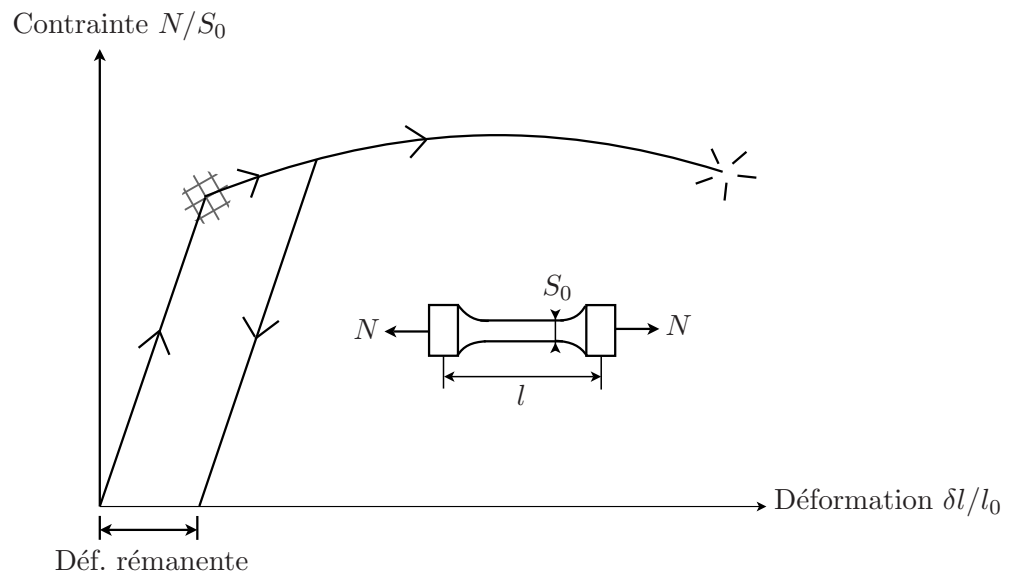


FIG. 1.6 – Matériaux élasto-plastiques.

- loi de comportement élastique non linéaire comme les matériaux élastiques non linéaires illustrés par la Figure 1.7 où la nonlinéarité est régulière et où le mécanisme est réversible ;

- loi de comportement des matériaux à mémoire de forme comme les alliages à mémoire de forme illustrés par la Figure 1.8 où le mécanisme est réversible (utilisables en dynamique) et où le cycle d'Hystérésis permet des dissipations importantes.

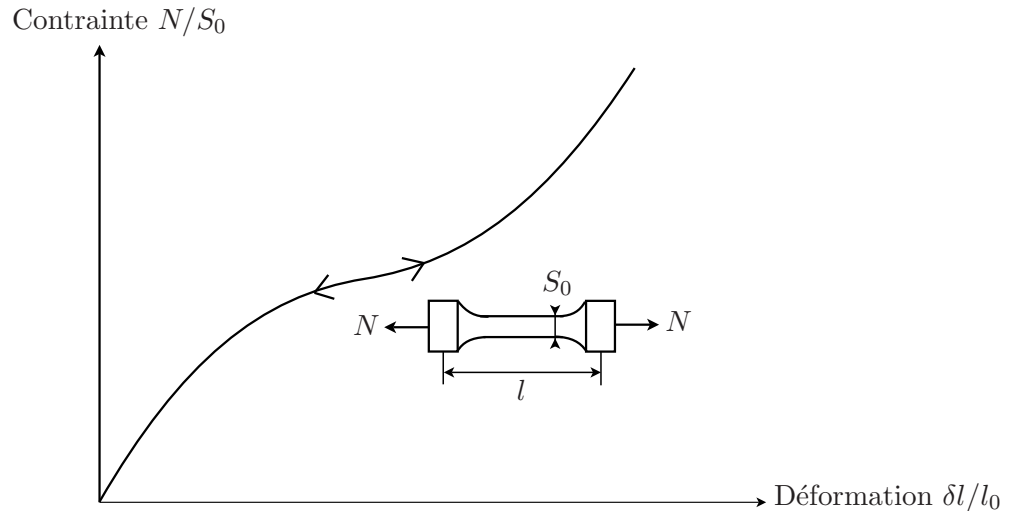


FIG. 1.7 – Matériaux élastiques non linéaires.

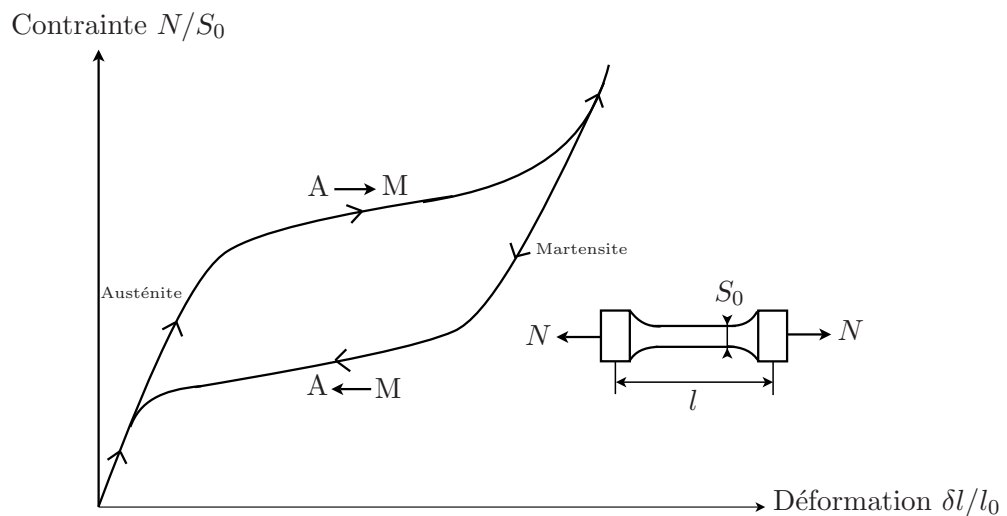


FIG. 1.8 – Alliages à mémoire de forme.

- **les nonlinéarités géométriques.**

Ces nonlinéarités proviennent de la géométrie et prennent effet lors de mécanismes en grands déplacements.

Un exemple d'une telle nonlinéarité est un ressort purement non linéaire qui est utilisé dans le phénomène de pompage énergétique analysé dans la présente étude. Un tel ressort non linéaire est présenté sur la Figure 1.9. Une masse m est attachée à un câble de section A , de demi-longueur au repos l_0 et de module d'Young élastique E (étirement axial).

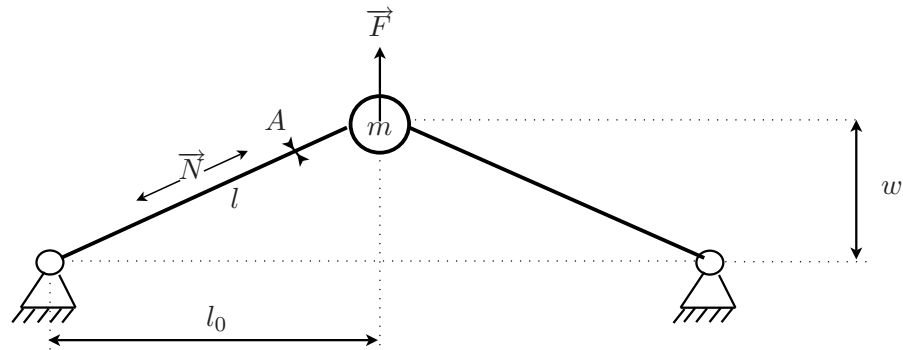


FIG. 1.9 – Ressort purement non linéaire.

Avec les notations de la Figure 1.9, il en résulte :

$$N \simeq \frac{1}{2}EA \left(\frac{w}{l_0}\right)^2, \quad F \simeq EA \left(\frac{w}{l_0}\right)^3, \quad (1.6)$$

et d'après la seconde loi de Newton du mouvement de la masse m :

$$m\ddot{w} + \frac{EA}{l_0^3}w^3 = 0, \quad (1.7)$$

ce qui donne :

$$w(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi) + \text{harm. sup.}, \quad \text{avec } \omega \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3EA}{ml_0^3}} a_1. \quad (1.8)$$

La nonlinéarité est alors régulière (il n'y a pas de partie linéaire dans l'oscillateur). Il faut noter que la fréquence des oscillations est proportionnelle à l'amplitude ce qui permettra, comme nous le verrons plus loin, des applications dans des absorbeurs non linéaires.

- **les nonlinéarités de contact.**

Ces nonlinéarités sont liées à l'interface et il en existe plusieurs types.

- Lois de Hertz qui sont des contacts localisés.

Ces contacts sont illustrés sur la Figure 1.10. Avec une précontrainte, la nonlinéarité est

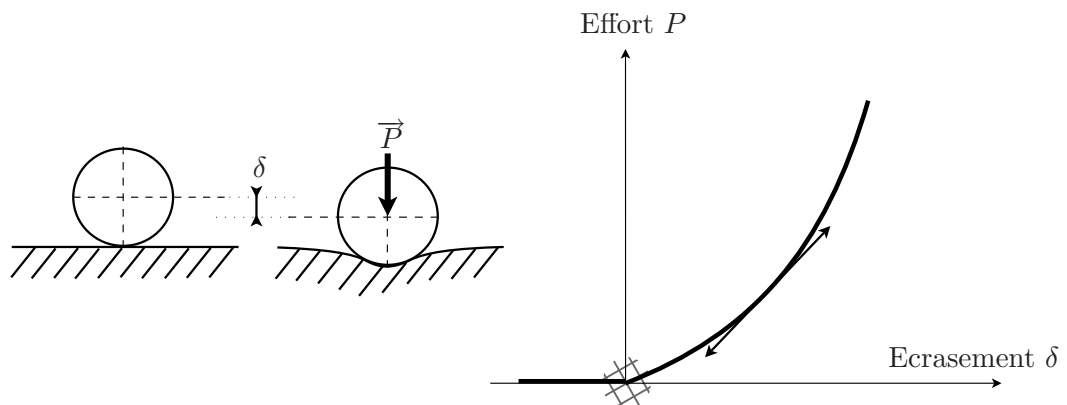


FIG. 1.10 – Contact localisé : loi de Hertz.

régulière. Les caractéristiques sont identiques aux nonlinéarités géométriques. Les cas pratiques les plus souvent rencontrés sont les roulements à billes et les engrenages.

– Frottements secs.

Ces frottements sont illustrés sur la Figure 1.11.

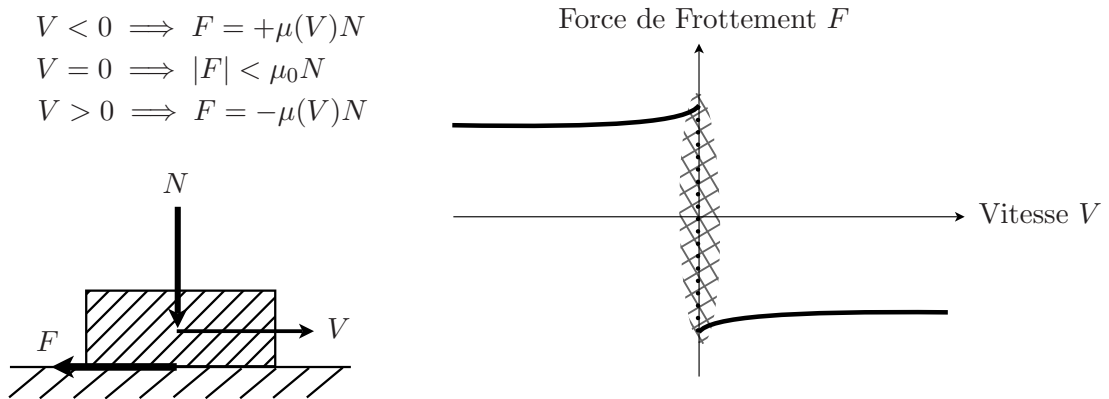


FIG. 1.11 – Frottement sec.

La nonlinéarité est non-régulière. Les cas pratiques les plus souvent rencontrés sont les freins et les rotors aubagés.

– Contacts intermittents.

Ces nonlinéarités sont constituées des contacts intermittents et des chocs, comme illustré sur la Figure 1.12.

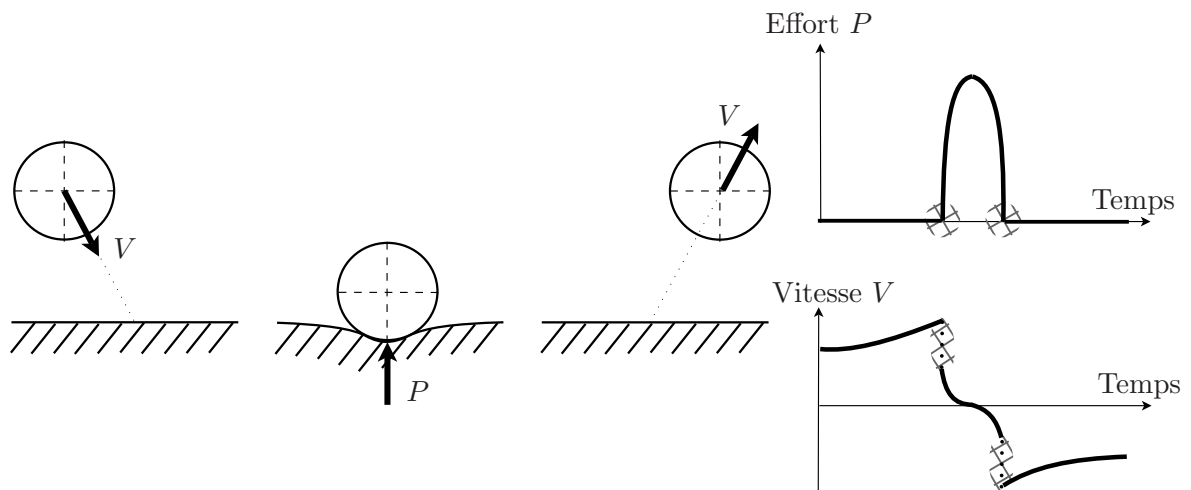


FIG. 1.12 – Contacts intermittents, chocs.

La nonlinéarité est non-régulière. Les cas pratiques souvent rencontrés sont les contacts aube/stator dans un moteur d'avion.

1.2.3 Dynamique non linéaire

L'intérêt actuel pour étendre les performances des structures avec des vitesses supérieures et le besoin de concevoir des structures plus hautes, plus légères, plus flexibles font intervenir

de plus en plus d'éléments structurels non linéaires. Il s'en suit que la demande pour utiliser de tels composants non linéaires s'accroît dans les applications en ingénierie. Il est donc plutôt paradoxal d'observer que souvent uniquement le comportement linéaire est considéré dans la dynamique des structures. Il est vrai qu'à des amplitudes suffisamment faibles, la théorie linéaire semble précise pour modéliser (bien que ce ne soit pas toujours le cas : par exemple pour la friction). Cependant, la principale raison de ce constat est que la théorie des systèmes dynamiques non linéaires est bien moins établie que la théorie linéaire. En effet, les principes de base qui s'appliquent à un système linéaire et qui forment la base de l'analyse modale ne sont plus valides en présence d'une nonlinéarité. De plus, même de faibles nonlinéarités peuvent provoquer des phénomènes extrêmement complexes et intéressants qui ne peuvent pas exister avec des systèmes linéaires. Ces phénomènes peuvent être : des sauts, des bifurcations, de la saturation, des résonances internes, sous-harmoniques et sur-harmoniques, des captures de résonances, des cycles limites, des interactions modales et du chaos.

Cependant, durant les dernières décennies, un intérêt croissant s'est développé pour ces systèmes non linéaires dans la littérature. Même si, pendant des années, une façon d'étudier les systèmes non linéaires a été **l'approche de linéarisation** [Caughey, 1963, Iwan, 1973], de nombreux chercheurs ont tenté de développer de nouvelles théories en dynamique des structures pour les systèmes non linéaires. Une extension non linéaire du concept de formes modales a été proposée dans [Rosenberg, 1961, Rosenberg, 1962, Rosenberg, 1966] et a été étudiée plus en profondeur dans [Rand, 1974, Shaw et Pierre, 1993, Vakakis et al., 1996, Vakakis, 1997]. Des systèmes faiblement non linéaires ont été analysés dans leur totalité en utilisant la théorie des perturbations [Nayfeh et Mook, 1979, Nayfeh, 1981, O'Malley, 1991, Kevorkian et Cole, 1996]. Les méthodes de perturbations incluent par exemple la **méthode de balance harmonique**, les **techniques de Lindsted-Poincaré** et la **méthode des échelles multiples** et leur but est d'obtenir des approximations asymptotiquement uniformes des solutions. Récemment, les études ont évolué des structures faiblement non linéaires vers des structures fortement non linéaires (un système fortement non linéaire est un système pour lequel les termes non linéaires sont du même ordre que les termes linéaires en moyenne) grâce à l'extension des techniques de perturbations classiques [Chan et al., 1996, Chen et Cheung, 1996] et au développement de nouvelles méthodologies [Pilipchuck, 1985, Manevitch, 1999, Qaisi et Kilani, 2000] ou encore [Babitsky et Krupenin, 2001].

Récemment, quelques études ont proposé de tirer avantage des nonlinéarités au lieu de les ignorer ou de les éviter. C'est ainsi que [Vakakis et Gendelman, 2001, Vakakis et al., 2004b] ont montré qu'une nonlinéarité essentielle (i.e. non linéarisable) peut mener au transfert irréversible non linéaire d'énergie entre des systèmes (phénomène appelé **pompage énergétique**).

Pour résumer, même s'il se peut que les mouvements non linéaires d'amplitudes suffisamment faibles ne perturbent pas la dynamique linéaire de façon significative, quand l'énergie du mouvement croît, les raideurs, l'inertie et/ou l'amortissement non linéaires peuvent introduire des phénomènes dynamiques qui sont radicalement différents de ceux prédits par la théorie linéaire. Ces effets dynamiques distincts doivent être pris en compte pour comprendre plus précisément et modéliser la dynamique. En fait, dans certaines applications pratiques il se peut que les effets non linéaires soient inévitables ; ils peuvent affecter la dynamique même si l'amplitude du mouvement est faible. Des exemples sont la friction, des oscillations de type vibro-impacts et des nonlinéarités géométriques fortes qui n'admettent pas de linéarisation, même en régime de faibles amplitudes. Pour donner un exemple de forte nonlinéarité inévitable, on peut considérer les vibrations d'un système composé de deux éléments flexibles couplés au moyen d'un joint

mécanique. Une faible détérioration du joint (due à un défaut, à la fatigue) peut introduire un écart (jeu) entre les composants structuraux à l'intérieur du joint, qui peut générer des non-linéarités de type vibro-impacts qui affectent la dynamique sur une large gamme de fréquences [Babitsky et Krupenin, 2001].

Ce qui rend la dynamique non linéaire intéressante à analyser et à modéliser est le résultat bien connu du **principe de superposition linéaire** qui ne s'applique pas (en général) aux systèmes non linéaires (il faut souligner que des tentatives de développements de principes de superpositions non linéaires ont été réalisées comme dans [Jackson, 1990, Anderson et al., 1982] mais aussi par les auteurs de [Jézéquel et Lamarque, 1991a]). Cela signifie que la réponse du système à une combinaison de forces dynamiques, appliquées simultanément, n'est pas égale à la somme des réponses individuelles dues à chaque force agissant séparément. Le principe de superposition est à la base de la théorie linéaire et probablement la principale raison pour laquelle cette théorie est si bien développée et appliquée à une multitude de domaines des sciences et de l'ingénierie. Bien évidemment, cela ne signifie pas que les problèmes linéaires sont facilement résolus. En effet, on peut par exemple constater les limitations de la théorie quasi-linéaire (il n'y a pas de théorie complète pour les équations différentielles ordinaires ou partielles linéaires avec des coefficients dépendant du temps, bien que le cas de coefficients périodiques est traité par la **Théorie de Floquet** [Yakubovich et Starzhinskii, 1975]). De nombreux concepts, théories et méthodes, basés sur le principe de superposition linéaire, ont été développés pour analyser la dynamique de systèmes linéaires :

- les intégrales de convolution (plus généralement, la théorie des fonctions de Green) ;
- les fonctions de réponse en fréquence (FrFs : Frequency response Functions) pour l'analyse de vibrations et l'analyse modale dans le domaine fréquentiel (plus généralement la théorie des transformées intégrales linéaires comme Laplace, Fourier, Hankel et autres) ;
- la théorie des opérateurs linéaires et la théorie spectrale ;
- les problèmes de valeurs aux limites linéaires (BVPs : Boundary Value Problems) et la théorie des fonctions orthogonales.

Ces concepts qui sont purement des constructions linéaires ne peuvent pas être directement appliqués aux problèmes non linéaires. Par exemple, la stricte définition des FrFs ne s'applique pas aux vibrations non linéaires car une force externe harmonique génère des réponses non linéaires multi-harmoniques, rendant le concept de FrF invalide. Un autre exemple est que les constructions linéaires, telles que les intégrales de convolution régulières, ne sont plus valides dans la théorie non linéaire, bien que des opérateurs de convolution d'ordres plus élevés puissent être définis et que la réponse non linéaire puisse être exprimée en terme de développements en séries de Volterra et de FrFs d'ordres plus élevés (HOFrFs). Cela ne signifie pas que ces méthodes linéaires ne peuvent pas être appliquées indirectement à certaines classes de problèmes non linéaires à travers, par exemple, des techniques de perturbations, où les problèmes non linéaires sont réduits à une hiérarchie de sous problèmes linéaires et où les techniques mentionnées précédemment peuvent être appliquées [Nayfeh et Mook, 1979, Vakakis et al., 2004a].

La non applicabilité des techniques linéaires classiques à la théorie non linéaire pose d'intéressants problèmes pour le développement de techniques non linéaires. Une première étape pour résoudre ces problèmes est la discussion des principales caractéristiques qui distinguent la dynamique linéaire de la dynamique non linéaire.

Une première caractéristique de la réponse non linéaire est la dépendance Energie-Fréquence des oscillations libres. En effet, la fréquence du mouvement d'un oscillateur non linéaire non

forcé avec des caractéristiques durcissantes ou mollissantes croît ou décroît avec l'amplitude [Nayfeh et Mook, 1979]. Cette dépendance fréquence-énergie est une déviation basique de la théorie des vibrations linéaires qui prédit des fréquences naturelles indépendantes de l'amplitude. C'est la raison de plusieurs caractéristiques en dynamique, telles que l'instabilité de Lyapunov des réponses périodiques libres des oscillateurs non linéaires non amortis comme montré dans les références [Nayfeh et Mook, 1979, Minorsky, 1983]; la non existence de solutions analytiques pour les réponses libres non linéaires amorties dans [Panayotounakos et al., 2002]; et les phénomènes non linéaires complexes dans la dynamique non forcée, tels que la localisation modale non linéaire dans des chaînes périodiques d'oscillateurs [Vakakis et al., 1996].

Une possibilité de faire la transition entre la dynamique linéaire et la dynamique non linéaire est l'extension du concept de **mode normal** de la théorie linéaire classique des vibrations aux systèmes non linéaires. En particulier, le concept de **mode normal non linéaire** (NNM : Non-linear Normal Mode) a été introduit par [Rosenberg, 1961, Rosenberg, 1962, Rosenberg, 1966, Vakakis et al., 1996, Vakakis, 1997]. Bien qu'une telle notion puisse sembler contradictoire en raison de l'inapplicabilité (en général) du principe de superposition linéaire aux systèmes non linéaires, il a été montré qu'en employant le concept de NNMs on peut mieux comprendre et expliquer la dynamique libre et forcée des oscillateurs non linéaires (cette notion de modes non linéaires est approfondie et expliquée dans la prochaine section). Par exemple, les interactions dynamiques complexes se produisant dans des systèmes d'oscillateurs couplés, telles que la localisation non linéaire d'énergie dans l'espace [Vakakis et al., 1996] et le phénomène de transfert non linéaire irréversible d'énergie entre des sous systèmes (qui est l'objet de la présente étude) nommé pompage énergétique [Vakakis et Gendelman, 2001, Vakakis et al., 2004b], ont été étudiées avec la théorie des NNMs. Etant donné que la théorie classique de Sturm-Liouville BVPs ne peut pas être directement étendue à la théorie non linéaire, d'autres méthodes ont été développées pour définir rigoureusement les NNMs d'oscillateurs non linéaires discrets ou continus. Le prochain sous-paragraphe présente plus en détail le calcul de ces NNMs ainsi que les différentes définitions possibles.

De plus, une autre source de caractéristique non linéaire dans la dynamique est constituée par des **bifurcations** des positions d'équilibre ou des orbites périodiques des systèmes non linéaires. Une bifurcation a lieu quand une dynamique différente se produit qualitativement dans le voisinage d'un point dans l'espace des paramètres, et est associée avec l'arrêt de la continuation analytique d'une branche solution en ce point. En termes mathématiques, une bifurcation correspond à un échec du théorème des fonctions implicites en ce point dans l'espace des paramètres [Guckenheimer et Holmes, 1983, Wiggins, 1990] ou de façon équivalente à la non-inversibilité du Jacobien du système dynamique linéarisé en ce point. On peut mentionner différents comportements dus aux bifurcations dans la dynamique essentiellement non linéaire.

- La possibilité de multiples positions d'équilibres stables coexistantes en est un (au contraire de systèmes linéaires qui possèdent une seule position d'équilibre), chacune avec son propre domaine d'attraction séparé (dans lequel le mouvement est attiré en fonction des conditions initiales).
- Des transitions non linéaires soudaines entre les attracteurs stables (sauts) en raison des phénomènes d'hystérésis non linéaires en est un autre. Ces transitions peuvent être particulièrement dangereuses quand un équilibre stable (trivial comme un linéaire) coexiste dans un certain intervalle de fréquences avec un équilibre stable essentiellement non linéaire (amplitude finie). Par exemple cela est le cas dans des résonances forcées de systèmes avec des

nonlinéarités cubiques [Nayfeh et Mook, 1979]. Sur la Figure 1.13, une boucle d’hystérésis non linéaire est présentée dans la résonance fondamentale d’un mode avec une nonlinéarité cubique durcissante (la fréquence de l’excitation périodique est presque identique à la fréquence naturelle linéarisée du mode). Il se produit alors des transitions soudaines (sauts)

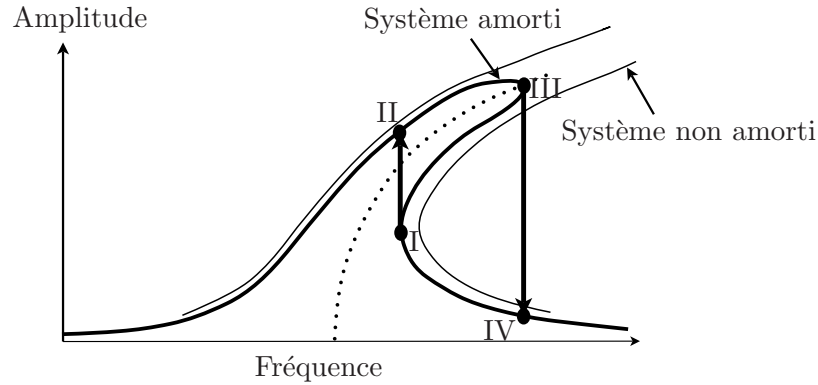


FIG. 1.13 – Phénomène de saut non linéaire dans la résonance fondamentale d’un mode avec une nonlinéarité cubique durcissante.

en raison de la boucle d’hystérésis non linéaire entre des branches stables coexistantes des solutions, qui apparaissent comme des changements soudains dans l’amplitude et la phase du mouvement pour de faibles variations de la fréquence d’excitation. Ces phénomènes de sauts sont dus à de faibles variations des conditions initiales du mouvement qui peuvent faire dériver la réponse entre des domaines d’attraction concurrents des solutions stables dans l’espace des phases du système. On peut noter que le saut III-IV sur la Figure 1.13 est sensible à l’amortissement, puisqu’un plus léger amortissement décalerait la fréquence où le saut se produit vers une plus haute fréquence. De telles transitions non linéaires sont typiques dans les résonances forcées d’oscillateurs non linéaires. Il faut cependant souligner que ce genre de transitions entre des branches stables coexistantes n’est pas toujours associé à des phénomènes d’hystérésis non linéaires. Par exemple, la Figure 1.14 représente un saut dans la résonance sous-harmonique d’un mode avec une nonlinéarité cubique raidissante (la fréquence de l’excitation externe représente environ un tiers de la fréquence naturelle linéarisée du mode [Nayfeh et Mook, 1979]). Dans ce cas, une transition soudaine se produit entre une solution sous-harmonique triviale et une non triviale pour des changements de fréquences. Il est intéressant de noter que la solution sous-harmonique triviale correspond à la réponse linéarisée du mode, ce qui signifie que la résonance sous-harmonique non linéaire peut apparaître soudainement pour de faibles variations des conditions initiales quand la fréquence de la force externe se trouve dans l’intervalle des solutions sous-harmoniques coexistantes. Cela peut avoir de graves conséquences sur une structure qui peut alors être soumise à des vibrations non forcément voulues ou prévues.

- Des transitions de mouvements réguliers vers des mouvements chaotiques, dans lesquelles la dynamique semble imprévisible, irrégulière, possédant une sensibilité aux conditions initiales, peuvent apparaître. Dans la littérature il a été établi que les mouvements chaotiques se produisent même dans des oscillateurs non linéaires avec des configurations relativement simples, tels que les attracteurs étranges dans les oscillateurs forcés, avec un seul degré de liberté de type vibro-impacts [Shaw et Holmes, 1983], dans les vibrations forcées à un seul mode d’une poutre dans un champ magnétique [Moon et Holmes, 1979] et dans des systèmes aussi simples que des balles rebondissantes sur des barrières mo-

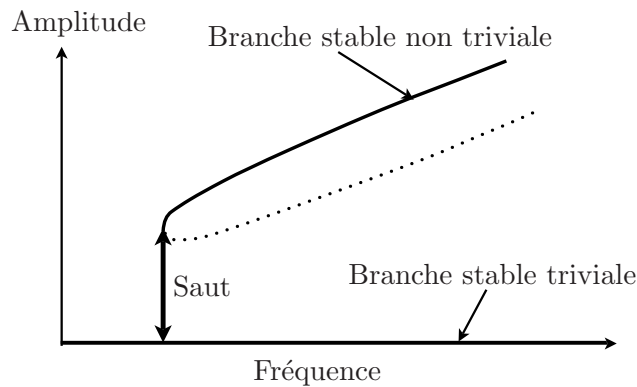


FIG. 1.14 – Phénomène de saut non linéaire dans la résonance sous-harmonique d'un mode avec une nonlinéarité cubique raidissante.

biles [Holmes, 1982]. Le chaos hamiltonien peut aussi se produire pendant les vibrations libres d'oscillateurs hamiltoniens à n degrés de liberté ($n \geq 2$) non intégrables comme l'ont montré les auteurs de [Vakakis et Rand, 1992].

- Les transitions d'un type de mouvement vers un autre qualitativement différent pour de faibles changements de paramètres peuvent se produire. Ceci est le cas par exemple de la bifurcation supercritique de Hopf [Guckenheimer et Holmes, 1983, Wiggins, 1990] quand pour un faible changement de paramètre un équilibre stable trivial (comme dans le cas linéaire) perd sa stabilité et provoque un mouvement de cycle limite stable. Cette bifurcation peut devenir extrêmement dangereuse si elle n'a pas été prise en compte dans le modèle de conception.
- L'augmentation de la dimensionnalité de la dynamique quand une bifurcation se produit peut exister. Cela signifie qu'après la bifurcation, l'attracteur de la dynamique est réalisé dans un sous-espace de plus grande dimension de l'espace des phases du système, comparé à l'attracteur avant la bifurcation. De telles augmentations de la dimensionnalité sont capturées par la méthode de décomposition orthogonale propre (Proper Orthogonal Decomposition, POD) comme montré dans [Cuscumano et al., 1994, Azeez et Vakakis, 2001].

Les phénomènes essentiellement non linéaires comme ceux cités précédemment sont provoqués par des interactions non linéaires d'énergie dues à des **résonances internes**, ou des **captures de résonances transitoires/soutenues**. Les résonances internes sont des phénomènes non linéaires de battements dans lesquels deux modes non linéaires ou plus avec des fréquences naturelles linéarisées incommensurables échangent de l'énergie entre eux d'une manière réversible ou irréversible [Nayfeh et Mook, 1979]. La seule analogie dans la théorie linéaire est le phénomène classique de battements quand deux modes ont presque leur fréquence naturelle égale et échangent de l'énergie de manière réversible entre eux. Les résonances internes augmentent la dimensionnalité de la dynamique et sont la cause de nombreux phénomènes dynamiques intéressants [MacKay et Meiss, 1987], allant de la mécanique des orbites (les écarts dans les distributions des astéroïdes [Dermott et Murray, 1983]) à la physique nucléaire [Gerasimov et al., 1986]. Dans des systèmes mécaniques, les résonances internes sont responsables de chaque phénomène fortement non linéaire, des bifurcations aux localisations non linéaires en passant par le chaos [Guckenheimer et Holmes, 1983, Wiggins, 1990]. Par exemple, on peut mentionner les transferts d'énergie des hautes vers les basses fréquences dans des systèmes flexibles [Nayfeh et Mook, 1995,

Malatkar et Nayfeh, 2003], dus à des résonances internes entre les modulations d'amplitudes des modes à basses et hautes fréquences. De tels échanges entre les modes avec des fréquences bien distinctes sont clairement impossibles avec la théorie linéaire.

Les captures de résonances se produisent quand les dynamiques d'un système non linéaire sont capturées sur une variété de résonance définie par une relation intégrable entre la fréquence du mode et une fréquence différente. Les problèmes de captures de résonances se produisent généralement lorsque certains systèmes hamiltoniens intégrables non linéaires sont sujets à une perturbation non hamiltonienne. La capture de la dynamique sur la variété de résonance peut être soit soutenue soit transitoire. Dans le dernier cas, après une durée finie de la capture, la dynamique s'échappe du voisinage de la variété de résonance [Quinn, 1997, Zniber et Quinn, 2003]. Il a été montré qu'une capture de résonance conduit à d'intéressants phénomènes dynamiques, incluant le transfert irréversible d'énergie entre différents composants d'un système mécanique [Lee et al., 2005] qui est le phénomène de pompage énergétique étudié dans cette thèse.

1.2.4 Modes de vibrations

L'étape primordiale des études est l'élaboration d'un modèle pertinent qui permettrait de représenter l'essentiel du comportement des structures étudiées. Un grand nombre de ces modèles débouche sur des systèmes complexes, qui obligent l'ingénieur à se confronter à des problèmes de mathématiques appliquées fondés sur les équations différentielles non linéaires.

1.2.4.1 Cas linéaire

Dans le cas linéaire, l'introduction de **l'analyse modale** a permis de simplifier l'analyse des phénomènes physiques.

Les procédures d'analyse des systèmes mécaniques en dynamique sont nombreuses. Mais que l'on procède par condensation modale, ou que l'on utilise des éléments finis, ou bien encore que l'on se serve de la méthode de Galerkin [Itô, 1980], de Rayleigh-Ritz, ou de toute autre méthode, on débouche sur un problème qui peut toujours s'exprimer à l'aide d'une formulation mathématique de la forme :

$$\ddot{X} + G(\dot{X}, X, t, \Lambda) = 0, \quad (1.9)$$

où X est un vecteur contenant les degrés de liberté du système, t est le temps, Λ est un vecteur qui contient l'ensemble des paramètres du système, à condition de modéliser des nonlinéarités régulières (ni frottement, ni plasticité, ni loi hystérétique, ni chocs,...) et G est une fonction linéaire en X , \dot{X} si le système est linéaire.

Dans la plupart des cas, la modélisation des systèmes dynamiques aboutit ainsi à une équation linéaire du type :

$$\mathcal{M}\ddot{X} + \mathcal{C}\dot{X} + \mathcal{K}X = F(t). \quad (1.10)$$

Les matrices de masse \mathcal{M} , d'amortissement \mathcal{C} et de raideur \mathcal{K} sont des matrices carrées de taille n (si X est un vecteur de taille n). L'excitation F est également un vecteur de taille n .

L'analyse modale permet notamment un découplage des équations.

Une structure possède ainsi des caractéristiques dynamiques propres dues à des paramètres qui lui sont propres : la répartition des masses, des raideurs et des amortissements des matériaux qui la composent. Ces caractéristiques sont indépendantes de toutes formes de sollicitations appliquées. Cette situation donne à la structure des états privilégiés : **les modes de vibrations**.

Toute structure possède une infinité de modes vibratoires distingués par la fréquence qui leur correspond ainsi que leurs caractéristiques associées : masse, raideur et amortissement. Lorsqu'un mode est excité, la structure est en situation de résonance.

Si on considère le cas linéaire (avec \mathcal{M} et \mathcal{K} constants, on considère $\mathcal{C} = 0$ par simplification ; l'amortissement n'est ainsi pas pris en compte dans un premier temps), on aboutit alors à un problème conservatif (en absence de sollicitation extérieure) :

$$\mathcal{M}\ddot{X} + \mathcal{K}X = 0. \quad (1.11)$$

Les solutions sont de la forme $X_0 e^{i\omega t}$ (ce sont **les modes propres** de la structure), ω étant la pulsation et $i^2 = -1$.

Le problème conservatif se réduit alors à résoudre $(\mathcal{K} - \omega^2 \mathcal{M})X_0 = 0$.

En fait, il s'agit d'un problème aux valeurs propres qui compte autant de couples de solutions (ω_k, X_k) qu'il y a de degrés de liberté. On suppose que n valeurs propres ω_k et vecteurs propres X_k ont été trouvés (les vecteurs propres ayant été normalisés par rapport à la matrice de masse, i.e. ${}^t P M P = I_d$ et ${}^t P K P = \text{Diag}(\omega_i^2)$).

Les modes propres ont la propriété remarquable d'être orthogonaux par rapport aux matrices de masse \mathcal{M} et de raideur \mathcal{K} . Pour résoudre (1.11), on peut passer en base modale, c'est-à-dire, on pose :

$$P = [X_1, X_2, \dots, X_n], \quad (1.12)$$

et on effectue le changement de variable suivant : $X = PQ$ avec

$$Q = {}^t(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)). \quad (1.13)$$

Les q_i sont les coordonnées modales. En considérant l'équation initiale avec la force extérieure, il vient :

$$\ddot{Q}(t) + \begin{pmatrix} \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n \end{pmatrix} Q(t) = {}^t P F(t). \quad (1.14)$$

Dans cette base modale, l'équation en Q (1.14) devient simple à résoudre car elle est découplée. En effet, il suffit de résoudre : $\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \mu_i(t)$ pour tout i où le terme μ_i est issu de ${}^t P F(t)$. On peut, par la suite, retrouver facilement $X = \sum_{i=1}^n q_i X_i$.

- **Remarque** : il est souvent supposé que \mathcal{C} est également diagonale dans cette base modale (Hypothèse de Basile). \mathcal{C} est, en général, assez mal connue. Les seules indications dont on dispose sont d'origine expérimentale.

- **Cas particulier** :

L'équation suivante est intéressante à étudier :

$$\mathcal{M}\ddot{X} + \mathcal{K}X = F \cos \omega t. \quad (1.15)$$

Dans ce cas particulier, on trouve

$$q_i(t) = \frac{\mu_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \varphi_i). \quad (1.16)$$

Ainsi, l'amplitude de X s'écrit sous la forme :

$$|X| = \sum_{i=1}^n \frac{{}^t T_i T_i F}{m_i (\omega_i^2 - \omega^2)}, \quad (1.17)$$

où m_i représente la masse modale et $T_i = {}^t(0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, le 1 étant à la $i^{\text{ème}}$ place.

Pour résumer, en théorie des vibrations linéaires, le concept de “mode normal” est utilisé pour étudier les oscillations libres des systèmes continus ou discrets. Pour un oscillateur linéaire non amorti à n degrés de liberté, il existe exactement n modes normaux, et le principe de superposition linéaire peut être utilisé pour exprimer tout mouvement comme une superposition des réponses individuelles modales.

1.2.4.2 Cas non linéaire

Cette notion de mode a notamment été généralisée au **cas non linéaire**. Comme nous le verrons plus loin, le phénomène de pompage énergétique fait intervenir des nonlinéarités qui sont indispensables. Il apparaît donc nécessaire d'introduire les outils nécessaires pour traiter ces nonlinéarités.

En effet, en s'inspirant de la situation linéaire, on peut essayer de généraliser cette notion de mode de vibration au cas non linéaire. Le problème est de trouver des solutions périodiques (approchées) satisfaisant à des équations différentielles non linéaires et régulières. De nombreuses méthodes plus ou moins efficaces essaient de déterminer ces **modes non linéaires**. On peut citer par exemple [Lamarque, 1992], [Jézéquel et Lamarque, 1991a], mais aussi [Pesheck et al., 2001]. En réalité, la définition d'un mode non linéaire n'est pas unique et de nombreux modes spéciaux ont été introduits. Par exemple, les modes peuvent être cherchés comme des solutions périodiques qui annulent les n coordonnées simultanément et qui relient les frontières énergétiques en passant par l'origine.

Rosenberg [Rosenberg, 1961, Rosenberg, 1962, Rosenberg, 1966] a étendu la notion de “mode normal linéaire” à l'étude des systèmes non linéaires discrets. Il a défini comme “modes normaux non linéaires” les mouvements libres durant lesquels les coordonnées du système varient équi-périodiquement, atteignant leurs valeurs extrémales aux mêmes instants de temps.

Nous allons détailler l'approche de Rosenberg car cette approche est utilisée pour expliquer le phénomène de pompage énergétique qui sera présenté dans cette étude. L'approche et les exemples donnés ci-après sont repris de la présentation des modes non-linéaires faite par l'auteur de [Cochelin, 2005].

Tout d'abord, on se place dans un **cadre mécanique**. On considère des systèmes discrets conservatifs : masses + ressorts à n degrés de liberté comme illustré sur la Figure 1.15. De plus, les forces de rappel f des ressorts sont des polynômes impairs dans le cadre de cette approche (ce qui sera le cas pour le phénomène de pompage énergétique), avec Δx le déplacement relatif d'un ressort :

$$f(\Delta x) = -k_1 \Delta x - k_3 (\Delta x)^3 - k_5 (\Delta x)^5 - \dots \quad (1.18)$$

Les notations suivantes sont utilisées :

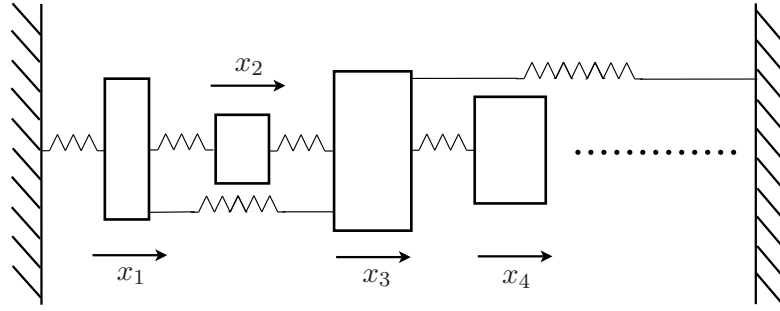


FIG. 1.15 – Systèmes discrets conservatifs.

le vecteur position $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; l'énergie cinétique $E_c(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = \frac{1}{2} \dot{X}^T \mathcal{M} \dot{X}$ où \dot{X}^T désigne

la transposée du vecteur colonne \dot{X} et \mathcal{M} la matrice de masse du système considéré ; l'énergie de déformation $W(x_1, \dots, x_n)$ (qui est paire c'est-à-dire $W(-X) = W(X)$) ; l'équation du mouvement $\mathcal{M} \ddot{X} + \underbrace{\mathcal{K}X + \mathcal{F}^{nl}(X)}_{\frac{\partial W}{\partial X}} = 0$ où $\mathcal{F}^{nl}(X)$ représente l'ensemble des forces non linéaires.

L'idée ici est bien de définir les modes non linéaires comme des extensions des modes linéaires.

Dans un souci de compréhension, un exemple élémentaire est utilisé avec le système représenté sur la Figure 1.16 pour présenter cette notion de mode non linéaire. Selon la seconde loi de New-

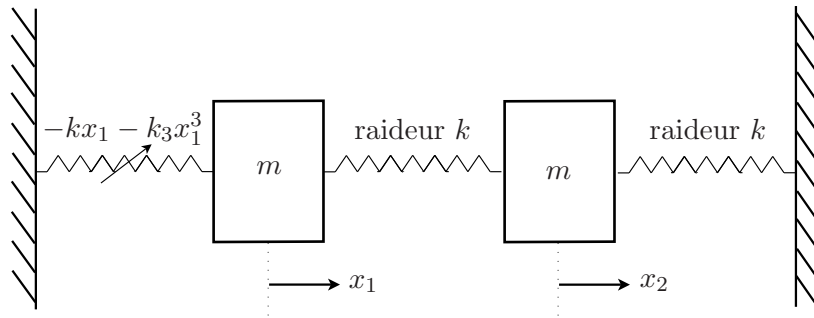


FIG. 1.16 – Exemple élémentaire.

ton du mouvement, on obtient :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_3 x_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

On s'intéresse tout d'abord à la recherche des modes normaux du système linéaire associé qui est le suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}}_{\mathcal{K}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

On recherche ainsi : $X(t) = X_0 e^{i\omega t}$ pour le réinjecter dans l'Equation (1.20).

On aboutit alors au problème aux valeurs propres suivant : $(\mathcal{K} - \omega^2 \mathcal{M})X_0 = 0$. Deux modes sont ainsi obtenus :

$$\begin{cases} \text{Mode 1 : } \omega_{10} = \sqrt{\frac{k}{m}}, & X_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \\ \text{Mode 2 : } \omega_{20} = \sqrt{\frac{3k}{m}}, & X_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \end{cases} \quad (1.21)$$

On s'intéresse alors maintenant aux mouvements libres du système (c'est à dire que l'on considère par exemple $X(0) \neq 0$, $\dot{X}(0) = 0$ et on visualise les trajectoires dans l'espace des configurations à l'aide d'une intégration temporelle de type Runge-Kutta par exemple). Dans un premier temps on s'intéresse au système linéaire associé comme montré sur la Figure 1.17 où plusieurs conditions initiales (avec $\dot{X}(0) = 0$, $k = 1$, $k_3 = 1$ et $m = 1$; on considère une équation dont les coefficients sont adimensionnés ceci à des fins didactiques. Des exemples plus réalistes sont donnés dans le deuxième chapitre) ont été choisies. Sur cette figure des flèches mentionnent la condition initiale choisie pour chacune des courbes. On constate bien le fait qu'en choisissant la condition initiale

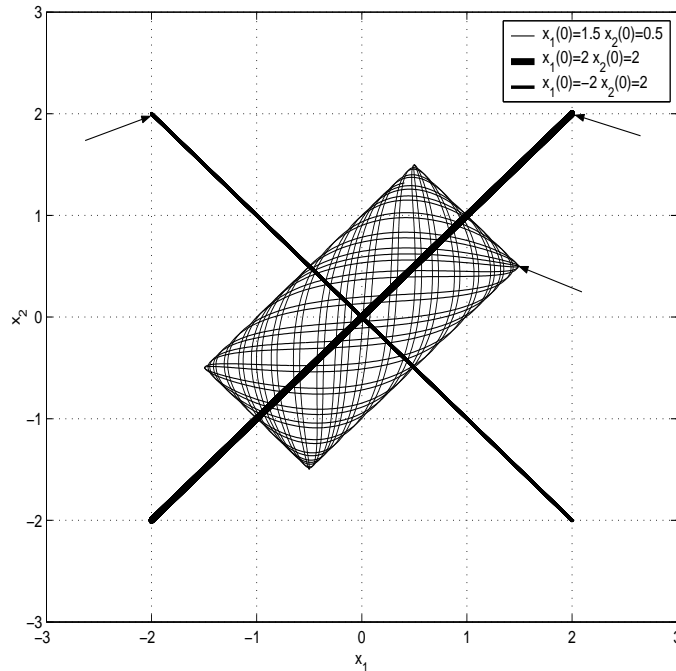


FIG. 1.17 – Mouvements libres du système linéaire associé.

sur un mode linéaire, la courbe correspond à une droite dans l'espace des configurations et que pour tout autre condition initiale, le mouvement est une combinaison linéaire de ces deux modes qui sont orthogonaux. Quand on part d'une condition initiale sur cette droite, la trajectoire reste sur cette droite.

Dans un deuxième temps on s'intéresse aux mouvements libres du système non linéaire comme montré sur la Figure 1.18 où une condition initiale (avec $\dot{X}(0) = 0$, $k = 1$, $k_3 = 1$ et $m = 1$) a été choisie sur le mode du système linéaire associé pour la première Figure 1.18 a).

Sur cette figure, la courbe ne correspond plus à une droite en raison de la nonlinéarité et il est même difficile de "voir" une combinaison linéaire des deux modes : l'ensemble des trajec-

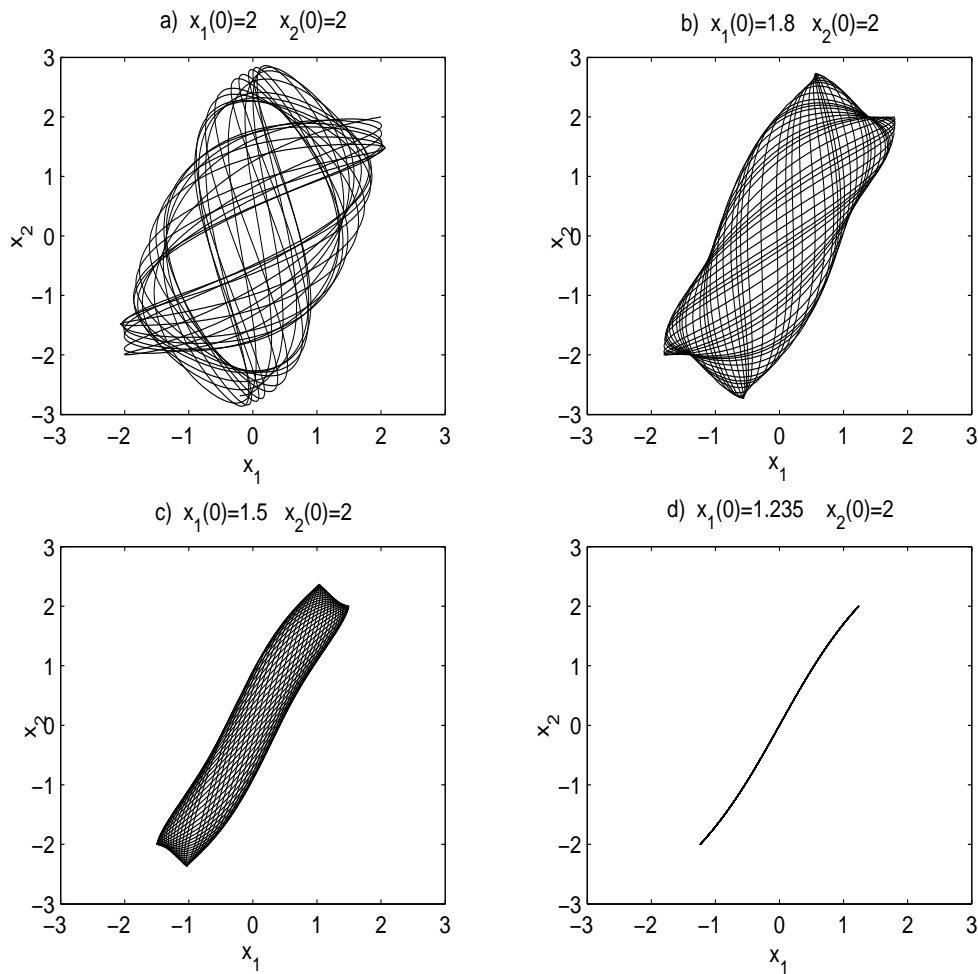


FIG. 1.18 – Mouvements libres du système non linéaire.

toires semble incurvé. En essayant de procéder de façon similaire à la façon de trouver les modes linéaires, on peut essayer de chercher un “squelette” de ces trajectoires. On fait ainsi varier les conditions initiales. Ici par exemple on ajuste la valeur de $x_1(0)$ de telle manière à diminuer le faisceau des trajectoires. En général, on essaie de se placer au centre de ce faisceau et de procéder par itérations. En appliquant ce procédé, on diminue le faisceau, comme montré sur les Figures 1.18 a), b), c) et d). On obtient alors, sur la Figure 1.18 d) non plus une droite comme dans le cas linéaire mais une ligne incurvée. Quand on considère une condition initiale sur cette courbe, alors la trajectoire reste sur cette courbe.

De plus, contrairement au cas linéaire, il n’y a pas deux seules lignes modales orthogonales mais plusieurs. En effet, la Figure 1.19 montre des courbes trouvées avec le même procédé énoncé précédemment.

Ces lignes modales sont caractérisées par des mouvements périodiques synchrones : $\dot{x}_i = 0$, $x_i = x_{i\max}$ en même temps pour tous les x_i ; la déformée modale évolue de façon continue, et la fréquence des oscillations dépend de l’amplitude ($\omega_1 \neq \omega_{10}$).

Le mode non linéaire 1 est “l’ensemble de ces lignes modales”.

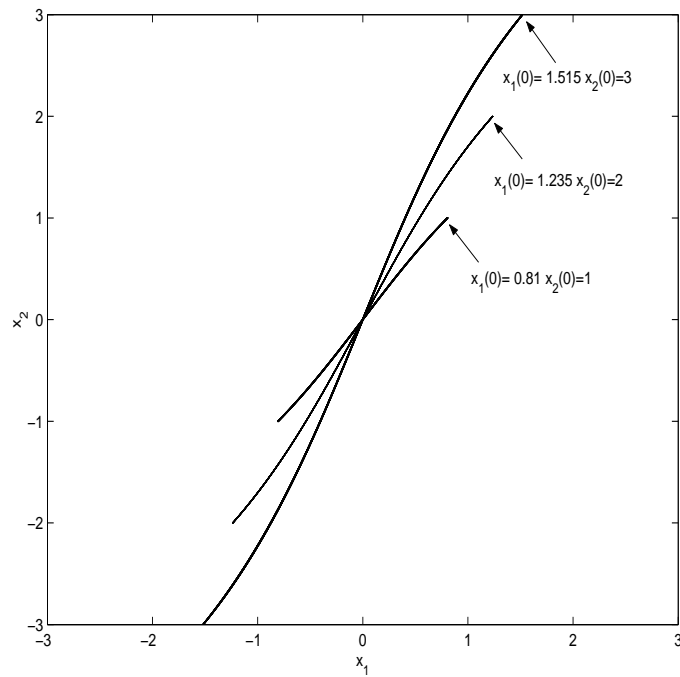


FIG. 1.19 – Lignes modales.

De la même manière, on peut chercher des mouvements libres du système non linéaire sur le mode non linéaire 2, comme montré sur la Figure 1.20.

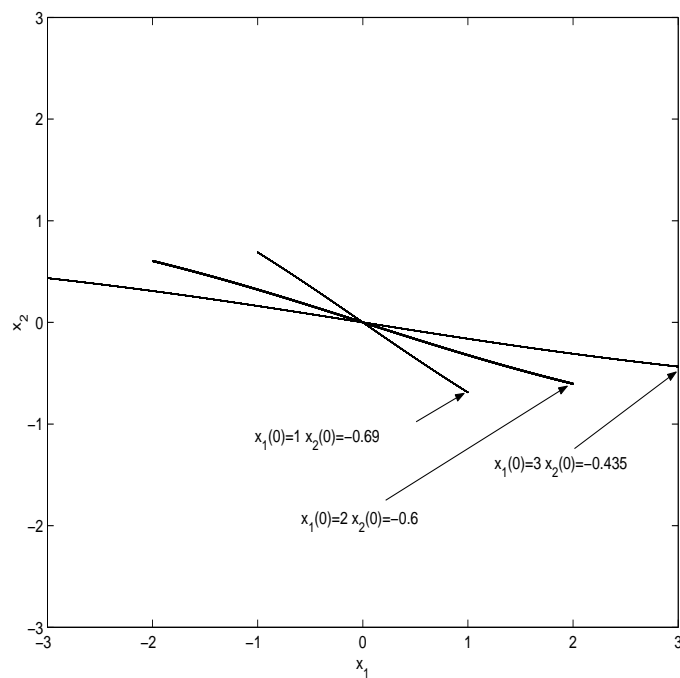


FIG. 1.20 – Mouvements libres du système non linéaire sur le mode non linéaire 2.

La méthode de calcul de ces lignes modales est maintenant présentée pour un système à

n degrés de liberté (la masse est considérée unitaire) :

$$\ddot{x}_i + \frac{\partial W(X)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1 \dots n. \quad (1.22)$$

On paramètre alors la ligne modale à l'aide de x_1 que l'on renomme u (d'autres choix sont possibles) :

$$X = \begin{Bmatrix} u \\ x_2(u) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(u) \end{Bmatrix}. \quad (1.23)$$

Les inconnues sont alors les $n - 1$ fonctions $x_i(u)$.

Les règles de dérivations suivantes sont alors utilisées (\dot{x} désignant la dérivée de x par rapport au temps t) :

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{du} \dot{u}, \quad \ddot{x}_i = \frac{dx_i}{du} \ddot{u} + \frac{d^2 x_i}{du^2} \dot{u}^2. \quad (1.24)$$

Pour éliminer le terme \ddot{u} on utilise la première équation

$$\ddot{u} + \frac{\partial W(X)}{\partial u} = 0. \quad (1.25)$$

Pour éliminer le terme \dot{u}^2 , on utilise la conservation de l'énergie (à chaque niveau d'énergie totale h correspond une ligne modale) :

$$h = \frac{1}{2} (\dot{u}^2 + \dot{x}_2(u)^2 + \dots + \dot{x}_n(u)^2) + W(u, x_2(u), \dots, x_n(u)), \quad (1.26)$$

ce qui donne

$$\dot{u}^2 = \frac{2(h - W(u, x_2(u), \dots, x_n(u)))}{1 + \left(\frac{dx_2}{du}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{du}\right)^2}. \quad (1.27)$$

Pour résumer, on obtient :

$$\frac{d^2 x_i}{du^2} \left(\frac{2(h - W(u, x_2(u), \dots, x_n(u)))}{1 + \left(\frac{dx_2}{du}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{du}\right)^2} \right) - \frac{dx_i}{du} \frac{\partial W(U)}{\partial x_1} + \frac{\partial W(U)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 2, \dots, n, \quad (1.28)$$

géométrie avec des conditions aux limites pour x_i en $u = 0$ et en $u = u_{max}$ ($h = W(u_{max})$) :

$$\ddot{u} + \frac{\partial W(u, x_2(u), \dots, x_n(u))}{\partial x_1} = 0 \quad \text{Mouvement (1ddl)}. \quad (1.29)$$

On est ainsi ramené à un système à un degré de liberté.

La résolution de l'Equation (1.28) peut parfois s'avérer difficile, c'est pourquoi plusieurs méthodes, dont la méthode des perturbations (développements asymptotiques), peuvent être utilisées.

Pour résumer, les modes non linéaires sont recherchés comme des solutions périodiques passant par l'origine et perpendiculaires à la surface équipotentielle maximale dans l'espace des configurations, comme montré sur la Figure 1.21. Il faut aussi souligner que le principe de su-

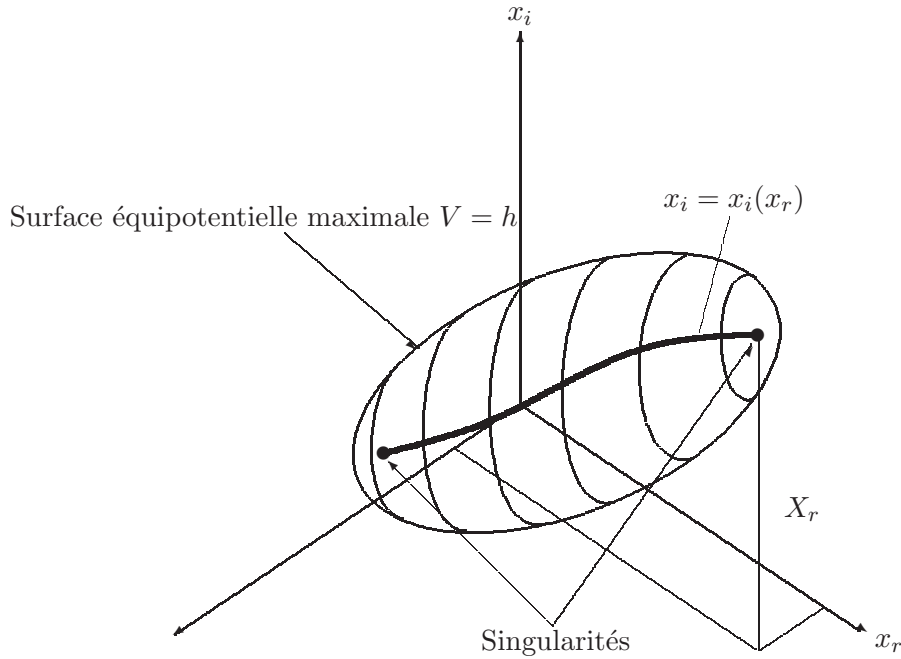


FIG. 1.21 – Mode non linéaire.

perposition valable dans le cas linéaire n'est plus valable dans le cas non linéaire.

De plus, on peut dire qu'une définition évidente phénoménologique et formelle d'un mode normal non linéaire (NNM) est donnée à travers l'extension non linéaire du concept de mode normal de la théorie classique des vibrations. Dans ce contexte, on définit un NNM d'un système non amorti discret ou continu comme une **oscillation périodique synchrone (vibration à l'unisson) où tous les points matériels du système atteignent leurs valeurs extrémales et passent par l'origine simultanément**. Quand des résonances internes se produisent, la précédente définition des NNMs n'est plus valide dans l'espace des configurations du système, mais plutôt dans un espace modale convenablement défini comme discuté dans [King et Vakakis, 1996, Vakakis et al., 1996]. Comme montré précédemment, il apparaît clairement que lorsqu'un système discret vibre sur un NNM, l'oscillation correspondante est représentée par une ligne, couramment appelée ligne modale, dans son espace de configuration. Les systèmes linéaires possèdent des lignes modales droites car leurs coordonnées obéissent à des relations linéaires pendant les oscillations du mode normal. Les lignes modales des systèmes non linéaires sont typiquement incurvées, bien que ces courbes dégénèrent parfois vers des lignes droites quand des symétries spéciales rentrent en jeu, comme dans le cas linéaire par exemple.

Une unique caractéristique des courbes modales des systèmes non linéaires est leur dépendance à l'énergie, qui est similaire avec la dépendance à l'énergie de la fréquence d'oscillation correspondante. Cela signifie que la forme des modes non linéaires change avec une énergie qui varie. Cependant, une telle dépendance n'existe pas quand les courbes modales non linéaires dégénèrent en lignes droites en raison de symétries spéciales. La dépendance vis-à-vis de l'énergie des courbes modales non linéaires empêche, en général, la séparation analytique directe de l'espace et du temps dans les équations non linéaires du mouvement, contrairement à la théorie linéaire, même si des méthodes analytico-numériques peuvent le permettre. Ainsi, ceci empêche le calcul analytique complet (des méthodes analytico-numériques le permettent) des courbes modales d'un os-

cillateur non linéaire non amorti en résolvant un BVP (contrairement au cas linéaire). A la place, un problème de perturbations singulier est formulé, qui couplé à une méthode de perturbations avec un développement double, conduit à une hiérarchie de BVPs linéaires. Les solutions de ces problèmes fournissent des approximations analytiques des courbes modales [Vakakis et al., 1996].

Il faut rappeler que la définition des NNMs n'est pas unique. Nous pouvons ainsi mentionner une définition alternative de Shaw et Pierre [Shaw et Pierre, 1991, Shaw et Pierre, 1993] et de A.H. Nayfeh et S.A. Nayfeh [Nayfeh et Nayfeh, 1994a, Nayfeh et Nayfeh, 1995], qui ont défini les NNMs comme des sous-espaces invariants de dimension deux de l'espace des phases. Ce sous-espace invariant contient l'origine (point d'équilibre stable) et il est tangent au sous-espace propre plan du système linéarisé. Cette définition alternative permet une extension directe du concept de NNM aux oscillateurs amortis (bien que l'extension des NNMs non amortis, précédemment expliqués, au cas faiblement amorti soit également possible).

Comme constaté auparavant, une autre caractéristique distincte des NNMs est qu'ils peuvent dépasser en nombre les degrés de liberté d'un oscillateur discret. Ceci est dû aux bifurcations des NNMs qui conduisent à des instabilités de modes (un concept qui est étranger à la théorie linéaire), et à des branches de bifurcations de modes non linéaires localisés. De telles bifurcations de modes peuvent se produire de la même façon dans des oscillateurs mécaniques simples avec un faible nombre de degrés de liberté [Vakakis et al., 1996]. Par conséquent, des modes de vibrations non linéaires se rencontrent assez fréquemment dans des applications pratiques. Ces bifurcations doivent être prises en compte dans les études des systèmes dynamiques non linéaires. C'est ainsi que lorsque l'on calcule un mode non linéaire, il ne faut pas négliger la stabilité et les bifurcations de ce mode.

Comme souligné auparavant, la construction de modes non linéaires est très fortement liée à la recherche de solutions périodiques et à l'étude de leur stabilité, ce qui a fait l'objet d'une littérature abondante. C'est ainsi que certaines s'inspirent des travaux de Rosenberg, comme dans [Anand, 1972, Cooke et Strubble, 1996] ou que d'autres reposent sur une troncature modale [Szemplińska-Stupnicka, 1983]. Des méthodes directes et géométriques ont été établies pour des systèmes conservatifs dans [Rand, 1974, Vakakis, 1992, Mikhlin, 1996], et pour des systèmes hamiltoniens dans [Johnson et rand, 1979]. De plus, l'utilisation d'approximants de Padé [Vakakis et al., 1996], de méthodes HFRF [Chen et al., 1997], mais aussi de la forme normale [Hsueh, 1983, Smith, 1986] ou l'utilisation de la théorie de la variété centrale comme dans les références [Shaw et Pierre, 1991, Boivin et al., 1995] par exemple, permettent de traiter les structures à comportement non linéaire par une approche modale. Il faut souligner que le principe de superposition modale valable dans la théorie linéaire a été étendu à des systèmes à petit nombre de degrés de liberté et nonlinéarités régulières, par l'intermédiaire de modes non linéaires obtenus par la méthode de la forme normale dans [Jézéquel et Lamarque, 1991a, Lamarque, 1992], incluant le cas des modes complexes dans [Jézéquel et Lamarque, 1991b] ou dans [Lamarque et Jézéquel, 1992]. La méthode vaut pour des petites oscillations, et les modes non linéaires construits afin d'approcher au mieux une équation de résonance dépendent des amplitudes de coordonnées modales.

Il faut aussi souligner que la plupart des logiciels de calculs des structures par éléments finis utilisent les techniques de prédiction-correction telle que la méthode de Newton-Raphson pour rechercher les solutions des problèmes non linéaires. Le principe de cette méthode consiste à calculer les solutions point par point via une succession de linéarisations et d'itérations pour minimiser le résidu des équations traitées. L'inconvénient de cette technique est son coût car elle

décompose une matrice de rigidité tangente à chaque itération. Des variantes de cette méthode ont été proposées. Par exemple la méthode de Newton modifiée a été utilisée et permet d'inverser une seule matrice pour toutes les itérations. La méthode dite quasi-Newton représente un compromis entre Newton-Raphson et Newton modifié.

La méthode asymptotique numérique (MAN) présente une alternative intéressante à ces techniques classiques de résolution. Elle a été utilisée pour une classe importante de problèmes non linéaires [Damil et Potier-Ferry, 1990, Azrar et al., 1993, Cochelin, 1994]. Cette méthode consiste à développer les variables du problème non linéaire à résoudre sous forme de séries entières. Ainsi, ce dernier est transformé en une suite de problèmes linéaires résolus en décomposant une seule matrice de rigidité tangente. Pour améliorer la solution asymptotique, les séries entières sont remplacées par des fractions rationnelles appelées approximants de Padé [Azrar et al., 1992, Cochelin et al., 1994, Elhage-Hussein et al., 2000]. Cette méthode, qui est simple à mettre en oeuvre, permet d'obtenir de très grands pas et grâce à sa technique de continuation, son algorithme est entièrement automatique. Les longueurs de pas sont naturellement adaptatives car elles sont calculées a posteriori à partir des coefficients des séries calculés par la technique de perturbations. Ainsi, la longueur du pas s'adapte automatiquement en fonction de la nonlinéarité locale rencontrée. La MAN a montré son efficacité dans la résolution de plusieurs problèmes réguliers tels que ceux d'élasticité en non linéaire géométrique [Azrar et al., 1993, Cochelin, 1994] ou bien ceux concernant les équations de Navier-Stokes [Tri et al., 1996, Cadou et al., 1998].

Avec cette méthode, il est ainsi possible de calculer les modes non linéaires de structures élastiques en grands déplacements ainsi que les différentes bifurcations. En effet, le NNM est construit en réalisant la continuation des branches de solutions périodiques. La continuation démarre à partir d'une première orbite périodique solution obtenue comme suit : on utilise le mode linéaire comme première approximation et on applique ensuite une correction pour retourner sur la branche solution. Puis, on suit la branche solution par la méthode MAN. De cette manière on obtient la surface invariante à deux dimensions de l'espace d'état, introduite par Shaw et Pierre.

Les techniques traditionnelles pour analyser la dynamique des structures non linéaires sont basées sur des hypothèses de faibles nonlinéarités et d'une structure modale non linéaire qui est similaire ou d'une faible perturbation du système linéarisé sous-jacent. Cette approche simplifiée conduit souvent à des résultats erronés quand des bifurcations de modes se produisent, comme c'est le cas pour le phénomène de pompage énergétique étudié dans la présente thèse. Dans ce contexte, le concept de NNM fournit un outil valable pour comprendre les effets de nonlinéarités sur la dynamique et pour développer des méthodologies d'analyse modale qui prennent en compte les possibilités d'interactions modales et d'espaces modaux qui diffèrent de façon significative de ceux prédits par la théorie classique linéaire des vibrations.

1.3 Absorbeurs de vibrations

Face aux vibrations omniprésentes, par exemple celles créées par le vent, les structures doivent pouvoir répondre à des excitations à la fois faibles et permanentes d'une part, et rares et importantes (comme les séismes sur de hautes constructions) d'autre part. Trois types de systèmes d'amortissement peuvent être utilisés : systèmes actifs, passifs (notamment le phénomène de pompage énergétique) et semi-actifs. Les principales données de ce qui suit sont extraites de [Joly, 2005].

1.3.1 Systèmes actifs

Les systèmes actifs fournissent une réponse adaptée à chaque contrainte appliquée et permettent d'adapter leur comportement en fonction des changements de leur environnement. Le principe est le suivant : les structures à isoler sont munies de systèmes de capteurs hydrauliques ou électromagnétiques qui mesurent les vibrations de la structure (cas des systèmes à boucle fermée) et/ou les excitations appliquées au bâtiment (cas des systèmes à boucle ouverte) ; les informations sont ensuite interprétées par des algorithmes de contrôle qui déterminent la réponse la plus adaptée en vue d'une application à la structure qui doit être isolée. Cette réponse, qui doit être appliquée à la structure, est réalisée à l'aide de systèmes hydrauliques ou électromagnétiques et nécessite donc l'apport d'énergie extérieure pour ce système de retour. Il existe principalement deux types d'amortisseurs actifs :

1.3.1.1 Les amortisseurs inertiels actifs (AMD, Active Mass Damper).

Les systèmes inertiels actifs schématisés sur la Figure 1.22 appliquent une force de contrôle

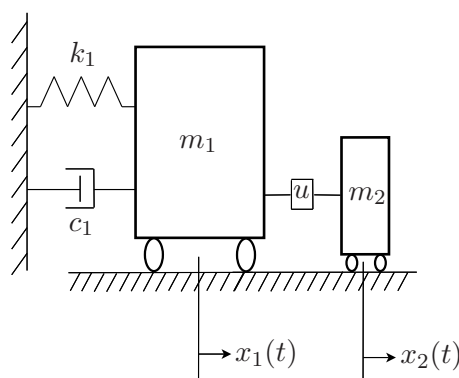


FIG. 1.22 – Amortisseur inertiel actif (AMD).

u sur la structure à isoler (déplacement x_1) calculée en fonction des accélérations de la structure. Le déclencheur met en mouvement une masse secondaire annexe (déplacement x_2) qui va “compenser” les vibrations de la structure après l’analyse du mouvement de la structure effectuée par un ordinateur grâce aux informations fournies par les différents capteurs répartis sur la structure. La force de contrôle est certes adaptée à la situation mais les coûts d’opération et de maintenance rendent ces systèmes onéreux. Les modes de support de la seconde masse ajoutée sont variés : pendules, porteurs à caoutchouc laminés ou encore roulements linéaires. Ces systèmes réduisent de 1/3 à 1/2 la réponse structurale aux différentes contraintes. Le premier constructeur au monde à avoir installé des amortisseurs inertiels actifs est Kajima en 1989 dans le Kyobashi Siewa Building comme montré sur la Figure 1.23. Le système peut protéger ce bâtiment des vents violents et des tremblements

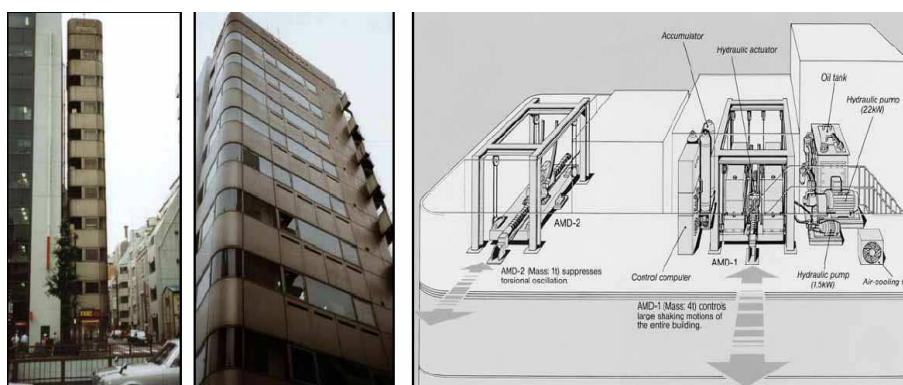


FIG. 1.23 – Kyobashi Siewa Building, 1989, Kajima Corporation, Tokyo, Japan (AMD).

de terre avec un temps de réponse de $1/100^{\text{ème}}$ de seconde. Kajima a installé deux masses, l'une (4.2 tonnes) au milieu de la structure pour répondre aux excitations de grandes amplitudes et une autre plus petite (1.2 tonne) sur le côté pour le contrôle en torsion comme montré sur la Figure 1.24. Les deux masses sont suspendues à des câbles et dirigées

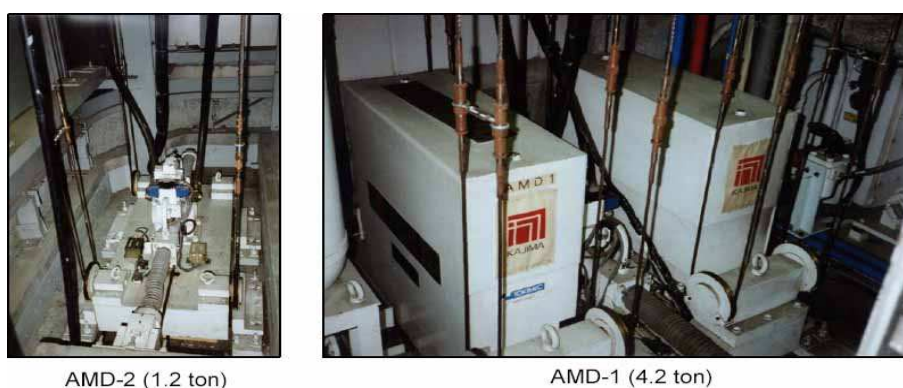


FIG. 1.24 – Les deux AMD de Kyobashi Siewa Building.

par des activateurs hydrauliques. Deux pompes et un accumulateur fournissent la pression hydraulique pour l'activateur, ce qui permet une réponse rapide et peu coûteuse en énergie.

Nous nous sommes alors intéressés théoriquement à un tel type d'amortisseur actif en collaboration avec S.C. Sinha de l'Université d'Auburn en Alabama, USA. Nous avons en particulier étudié le cas du contrôle actif de systèmes à coefficients périodiques. Cette étude a fait l'objet d'une publication qui se trouve en Annexe 1 [Sinha et al., 2005].

Le tableau 1.1 donne quelques exemples applicatifs d'amortisseurs inertiels actifs (AMD) extraits d'une liste développée par un groupe de recherche "Protective Systems Research Group of the Earthquake Engineering Research Center" de l'Université de Californie à Berkeley.

1.3.1.2 Les systèmes à rigidité variable (AVS, Active Variable Stiffness System)

Les AVS sont des systèmes développés depuis le début des années 1990 pour protéger les immeubles contre les tremblements de terre violents. Le système consiste en un ensemble

Nom et type de structure	Ville/Pays	Type et nombre d'amortisseurs	Date d'installation (approx.)	Autres Informations (fréquence naturelle, masse,...)
ORC 2000 Symbol Tower (188m)	Osaka, Japon	2 AMD	1992	0.21Hz 200t
Kansai International Airport	Osaka, Japon	2 AMD (pendules inversés)	1993	0.8Hz 10t
MKD8 Hikarigaoka Office Building (100m)	Tokyo, Japon	AMD (pendule)	1993	0.44Hz
Riverside Sumida (133m)	Tokyo, Japon	2 AMD	1994	0.29Hz 30t
Shinjuku Park Tower (227m)	Tokyo, Japon	3 AMD	1994	330t

TAB. 1.1 – Les amortisseurs inertiels actifs AMD.

de bras assemblés en V inversés dont les extrémités sont reliées aux bords du bâtiment pour atténuer les mouvements transversaux. La pointe du V est reliée à l'étage supérieur via un dissipateur. Le signal de contrôle agit sur l'ouverture d'une vanne qui, en variant la pression de liquide, permet d'exercer une force sur le piston relié à l'étage supérieur. De cette façon, le dissipateur agit selon la position de la vanne et le système est capable de modifier sa réponse en fonction de la contrainte exercée. Les V inversés peuvent être installés en plusieurs configurations : à plusieurs endroits (par exemple à tous les étages dans le cas où la structure à isoler est un bâtiment) ou uniquement à un endroit (par exemple à la base dans le cas où la structure à isoler est un bâtiment).

1.3.2 Systèmes passifs

Les systèmes passifs isolent les structures ou dissipent l'énergie grâce à leurs propriétés dynamiques intrinsèques, comme un amortisseur de voiture par exemple. Ces systèmes sont en général peu coûteux (relativement aux systèmes actifs), faciles d'utilisation, et permettent de réduire considérablement la réponse de la structure aux sollicitations extérieures. Ils peuvent dissiper l'énergie de façon directe, par friction par exemple, ou de façon indirecte en contre-balançant les vibrations.

1.3.2.1 L'isolation de base.

Les systèmes d'isolation de base séparent la structure du sol et possèdent une grande rigidité verticale et une grande flexibilité dans le plan horizontal. Cette grande flexibilité permet de transmettre les vibrations du sol à la superstructure en atténuant la fréquence et l'amplitude, soulageant le bâtiment de contraintes trop violentes. La fabrication de ces systèmes est simple et il existe plusieurs types d'isolateurs : à base de caoutchouc, d'élastomère ou par friction.

1.3.2.2 Les systèmes à dissipation directe.

Les dissipateurs directs ont pour objectif d'absorber une partie de l'énergie ou de la dévier. Ils sont en général situés entre la superstructure et les éléments de renfort (comme les bras par exemple).

1.3.2.2.1 Les amortisseurs viscoélastiques.

Le mécanisme d'amortissement viscoélastique est basé sur la force de retour créée par la déformation d'un polymère ou d'un composé caoutchouteux. Le matériau, situé entre deux plaques métalliques, se plie en dissipant l'énergie et répond par une force en retour. Ce système est efficace à hautes et basses fréquences et s'avère très adapté pour protéger le bâtiment de vents violents et des séismes d'intensité moyenne. La réponse des amortisseurs viscoélastiques dépend de la température, de leur environnement, et des vibrations qui leur sont appliquées.

1.3.2.2.2 Les dissipateurs par friction.

Les dissipateurs par friction utilisent les frottements créés par le glissement entre deux surfaces pour dissiper l'énergie des vibrations sismiques. Il y a deux familles de systèmes à friction : d'une part les systèmes rigides composés de charnières plastiques (remplaçables après séisme), et d'autre part les structures croisées dont les parties glissent l'une sur l'autre à des contraintes prédéterminées. Les systèmes de dissipation par friction montrent de bonnes performances pour la protection contre les vibrations sismiques de forte intensité et ont l'avantage d'être économiques.

1.3.2.2.3 Les systèmes d'amortissement visqueux.

Les systèmes d'amortissement visqueux existent sous deux formes principales. Ils peuvent dissiper l'énergie des vibrations en appliquant une résistance à la structure grâce à l'action d'un piston forcée par un fluide. L'amortissement peut aussi être produit par des murs composés de matériaux visqueux qui présentent une résistance aux mouvements horizontaux. Le TV Shisuoka Media City Building au Japon a été de cette façon équipé de 170 murs amortisseurs sur l'ensemble de ses 14 étages. Ces systèmes ont le double avantage de réduire considérablement les contraintes de cisaillement sur la structure et la déformation du bâtiment. En outre, ils ont fait l'objet de nombreuses applications dans le milieu militaire, et les retours d'expériences montrent que ces systèmes ont une durée de vie de plus de cent ans avec des exigences de maintenance limitées.

1.3.2.2.4 Les amortisseurs visco-élasto-plastiques.

Les systèmes d'amortissement visqueux et élasto-plastiques possèdent chacun des propriétés propres avec leurs avantages et leurs inconvénients. Un système élasto-plastique met à profit la forte élasticité de l'acier ou le mécanisme de glissement entre deux surfaces métalliques (cas des amortissements par friction). Dans le cas d'un séisme de forte intensité, ces amortisseurs dissipent l'énergie, limitant de cette façon l'impact du séisme sur les membres de la structure les plus critiques (porteurs, connecteurs,...). Cependant, dans le cas de séismes plus faibles mais plus fréquents, l'amortisseur conserve sa propriété élastique, mais sans jouer son rôle de dissipateur. L'énergie est ainsi transmise au reste du bâtiment et les accélérations provoquées peuvent causer des dégâts relativement importants sur les éléments d'habillage. Le polymère des amortisseurs visqueux dissipe l'énergie grâce à un phénomène de mouvement moléculaire. Cependant, si les capacités de réponse de l'amortisseur augmentent linéairement avec l'intensité du séisme,

les accélérations subies par les éléments de structure endommagent l'élément en cas de vibrations conséquentes. D'autre part, un système viscoélastique est très dépendant de la température. Un amortisseur qui combinerait à la fois les avantages des systèmes viscoélastiques et des systèmes élasto-plastiques constituerait une solution idéale. Cet amortisseur visco-élasto-plastique (VEP) est un axe de recherche actuel.

1.3.2.2.5 Les dissipateurs métalliques.

Ces dissipateurs utilisent les propriétés d'élasticité et de rigidité des métaux. Ils peuvent être utilisés sous de très nombreuses formes. Par exemple dans l'hôtel Grand Hyatt de Roppongi Hills au Japon, le dissipateur a pris la configuration d'un mur de 2x2m qui possède une rigidité de 2/3 inférieure à celle d'un mur normal.

1.3.2.3 Les amortisseurs à dissipation indirecte

1.3.2.3.1 Les amortisseurs inertiels à masse (Tuned Mass Damper).

- *Système ajouté linéaire.*

Un amortisseur à masse linéaire (TMD, Tuned Mass Damper) consiste en une masse située à l'un des niveaux de la structure qu'il équipe et liée à celui-ci via un ressort linéaire et un mécanisme d'amortissement (visqueux ou viscoélastique). L'inertie créée par le mouvement de cette masse va se transmettre à la structure et réduire les vibrations induites par la sollicitation extérieure. Un tel dispositif est schématisé sur la Figure 1.25. Le mouvement de la masse m_2 (c'est-à-dire x_2) s'effectue dans le sens op-

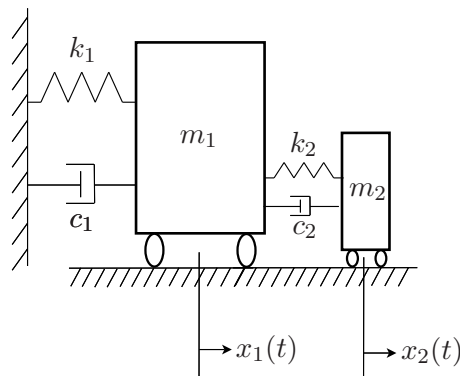


FIG. 1.25 – Amortisseur à masse linéaire (TMD).

posé à celui de la structure (déplacement x_1 et masse m_1) et avec la même fréquence grâce au ressort linéaire de raideur k_2 qui couple les deux masses. Ainsi, situé au plus haut d'une construction par exemple, le mouvement pendulaire peut amortir la déformation et limiter les dommages sur une structure. L'efficacité du système dépend de la valeur de la masse ajoutée (entre 1/300 et 1/100 de la masse du bâtiment pour le Génie Civil, la réduction des oscillations est de 1/3), de la possibilité de déplacement du solide, du type de ressort employé et de la configuration du mécanisme amortisseur qui soutient la masse. Cependant, les contraintes d'espace empêchent l'emploi d'un TMD traditionnel qui nécessite souvent le sacrifice d'un étage entier. Ainsi, de nombreuses alternatives ont été mises en place pour employer les TMD : des systèmes à plusieurs pendules répartis sur plusieurs étages, à pendules inversés, à déplacements contraints sur rails... Les configurations à plusieurs TMD associés en parallèle offrent de meilleurs résultats à masses égales que les TMD simples. La configuration en pa-

rallèle combine plusieurs pendules avec des fréquences propres différentes qui se situent autour de la fréquence de contrôle.

Il faut souligner que ces systèmes sont très répandus dans l'industrie, le Génie Mécanique et le Génie Civil. Ainsi, dans le cas des bâtiments au Japon par exemple, l'emploi d'un hélicoptère ou d'un jardin comme masse secondaire permet de pallier le problème d'ajout de masse et de rendre le système plus attractif commercialement. Mori Building a ainsi réalisé un jardin de 3650t situé sur le toit pour protéger le Keyakizaka de Roppongi Hills au Japon comme montré sur la Figure 1.26. Afin de laisser le jardin se balancer, le toit a été relié à la structure via des amortisseurs viscoélastiques (fluide Bingham) et des isolateurs en caoutchouc comme montré sur la Figure 1.27.

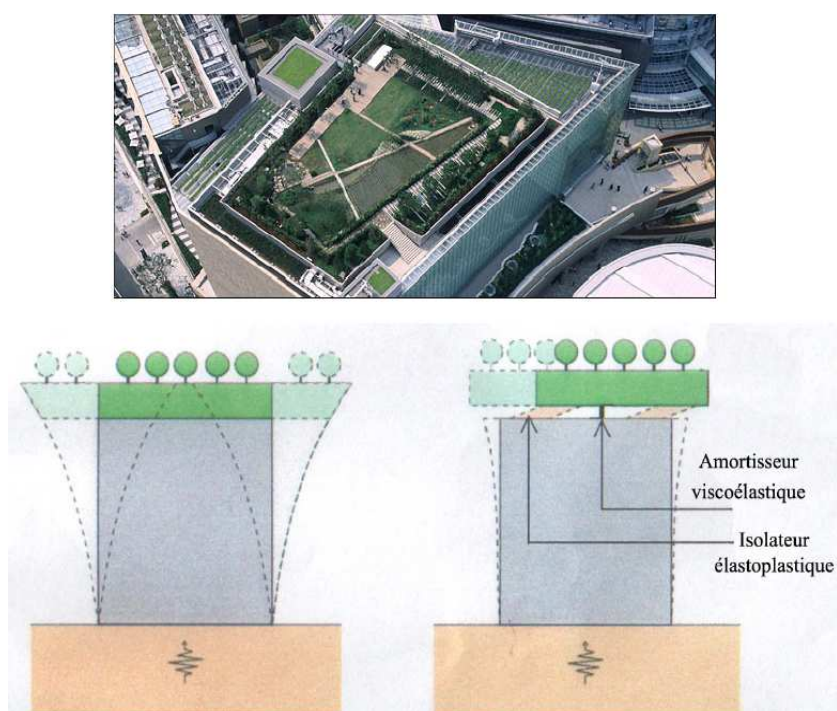


FIG. 1.26 – Jardin de 3650t situé sur le toit pour protéger le Keyakizaka de Roppongi Hills.

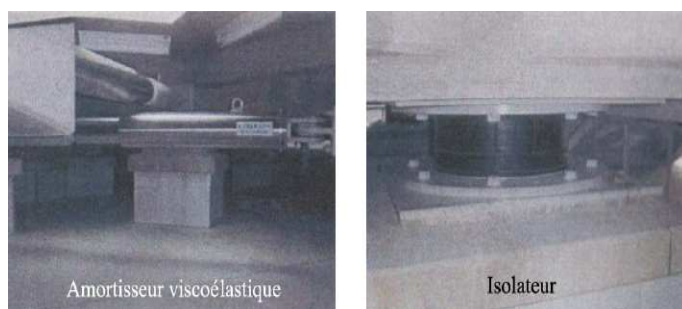


FIG. 1.27 – Le Keyakizaka et le fonctionnement de son jardin anti-vibrations.

Le tableau 1.2 fournit des exemples applicatifs d'amortisseurs linéaires à masse (TMD) issus d'une liste élaborée par un groupe de recherche "Protective Systems Research

Group of the Earthquake Engineering Research Center” de l’Université de Californie à Berkeley.

Nom et type de structure	Ville/Pays	Type et nombre d’amortisseurs	Date d’installation (approx.)	Autres Informations (fréquence naturelle, masse,...)
CN Tower TV antenna (553m)	Toronto, Canada	TMD Passif	1973	-
John Hancock Building (244m)	Boston, USA	TMD Passif (2)	1977	0.14Hz, 2×300t, amortissement : 4%
City Corp center (gratte-ciel) (278m)	New York, USA	TMD Passif	1978	0.16Hz 370t amortissement : sans TMD~1%, avec TMD~4%
Sydney Tower (305m)	Sydney, Australie	TMD Passif (de type pendule)	1980/1	0.10, 0.50Hz 220t
Crystal Tower (157m)	Osaka, Japon	2 TMD Passifs	1990	-
Rokko Island P et G (117m)	Kobe, Japon	TMD Passif (de type pendule)	1993	0.33-0.62Hz 270t
Chifley Tower (209m)	Sydney, Australie	TMD Passif (de type pendule)	1993	400t

TAB. 1.2 – Les amortisseurs inertiels à masse (TMD).

Cependant, la masse et l’espace sont les principaux facteurs limitants de ce type de système. C’est ainsi que le pompage énergétique peut contrer ces facteurs limitants en venant ajouter une masse couplée cette fois par un ressort non linéaire, ce qui permettra de venir ajouter de plus faibles masses.

- *Système ajouté non linéaire.*

Des “nonlinear tuned mass damper” (NTMD) peuvent être considérés comme montré sur la Figure 1.28. C’est le cas du pompage énergétique dont nous décrivons le principe plus loin. Le ressort qui couple les deux masses (la masse de la structure à isoler m_1 et la masse de la petite structure ajoutée m_2) est un ressort non linéaire.

On peut également citer les absorbeurs à impacts où la structure annexe est conçue de telle façon à impacter. Ce comportement non linéaire (proche du phénomène de pompage énergétique) permet également d’absorber les vibrations comme montré dans [Blazejczyk-Okolewska, 2001, Duncan et al., 2005, Cheng et Xu, 2006].

1.3.2.3.2 Les amortisseurs liquides (Tuned Liquid Damper).

Ici, le mouvement d’un liquide atténue les oscillations de la structure. Comme pour

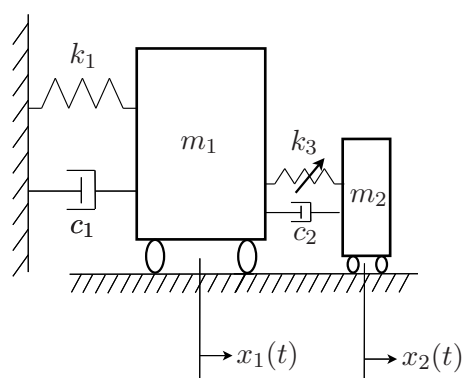


FIG. 1.28 – Amortisseur à masse non linéaire (NTMD).

le mouvement pendulaire créé par le mouvement d'un solide, les déformations sont atténuées par un mouvement opposé de même période. Le système peut réduire la réponse de la structure de 1/2 à 1/3 suivant la masse de liquide employée. L'un des facteurs de succès de ce type de système est qu'il n'y a pas besoin d'un ajout considérable de masse à la construction, les réservoirs d'eau, souvent situés sur le toit, pouvant servir de sources. Les TLD exploitent l'inertie créée par le mouvement du liquide et ses impacts sur son contenant. Sous certaines configurations, les TLD utilisent la viscosité du liquide et les effets de vagues pour atténuer les vibrations (cas des amortisseurs à faible volume). A contrario, les amortisseurs de gros volume exploitent plutôt la masse du liquide. Dans ce dernier cas, l'utilisation de la masse de liquide employée n'est pas optimisée et crée une contrainte économique supplémentaire. Par exemple le Shin Yokohama Prince Hotel au Japon est équipé d'un ensemble de plusieurs TLD qui mesurent 2m de haut. Chaque amortisseur est la superposition de 9 cylindres, en plastique renforcé, de 2m de diamètre et 22 cm de hauteur. La dissipation des vibrations du liquide se fait au travers de 12 filtres répartis symétriquement par rapport au diamètre. Cette installation a permis de réduire de 50 à 70% la réponse du bâtiment aux excitations provoquées par les vents violents.

Des études récentes sur les TLD [Casciati et al., 2003] ont aussi montré une alternative aux TLD traditionnels en utilisant des TLD coniques. Au lieu d'utiliser des réservoirs cylindriques, les réservoirs coniques permettent de mieux calibrer la fréquence naturelle de l'amortisseur en faisant varier la hauteur d'eau de façon non linéaire. Il a été montré dans [Casciati et al., 2003] que les mêmes niveaux de performance peuvent être atteints en utilisant moins de masse ajoutée.

Le tableau 1.3 donne quelques exemples applicatifs d'amortisseurs liquides (TLD) extraits d'une liste développée par un groupe de recherche "Protective Systems Research Group of the Earthquake Engineering Research Center" de l'Université de Californie à Berkeley.

Nom et type de structure	Ville/Pays	Type et nombre d'amortisseurs	Date d'installation (approx.)	Autres Informations (fréquence naturelle, masse,...)
Gold Tower (136m)	Udatsu, Japon	16 TLD (de type unidirectionnel rectangulaire)	1988	0.42Hz 9.6t
Shin-Yokohama Prince Hotel (149m)	Yokohama, Japon	30 TLD (de type trempant circulaire)	1991	0.31Hz, 83.5t
TYG Building (159m)	Atsugi, Japon	720 TLD (de type double butée torique)	1992	0.53Hz 18.2t
Narita Airport Tower (87m)	Narita, Japon	TLD (de type trempant circulaire)	1993	1.3Hz 16.5t+particules flottantes

TAB. 1.3 – Les amortisseurs liquides.

1.3.3 Systèmes semi-actifs

Le schéma de principe de ces systèmes peut être celui représenté sur la Figure 1.29. Il en existe plusieurs types. Il faut noter que le nombre de moyens de dissipation tend à augmenter dans les grandes structures modernes récentes, comme par exemple la Mori Tower Roppongi (Tokyo, Japan Kajima Corporation) qui possède 54 étages et qui comporte 356 amortisseurs semi-actifs.

1.3.3.1 Les systèmes hybrides.

Les systèmes hybrides ont été mis au point au début des années 1990 pour pallier au principal défaut des systèmes passifs linéaires, à savoir le temps de réponse trop important dans le cas d'un séisme d'intensité conséquente, et celui des systèmes actifs, à savoir la consommation en énergie (et le risque de défaillance en cas de destruction des systèmes d'alimentation). Le principe est par exemple de partir d'un TMD (amortisseur inertiel) et de lui adjoindre une masse supplémentaire via un câble, un amortisseur et un activateur. Les déplacements du TMD sont ainsi amplifiés par ceux de la masse active supplémentaire. L'emploi à la fois d'une source active et d'une masse passive permet d'offrir un temps de réponse convenable et, en cas de défaillance des systèmes électriques, un degré de protection minimum avec le mode passif. D'autre part, le système est moins coûteux en énergie qu'un système actif et on peut l'alimenter indépendamment du reste du bâtiment (ce qui le rend moins vulnérable en cas de fort séisme). Le concept posé, les applications prennent des formes très différentes suivant les constructeurs et la construction. Il est estimé que l'emploi de systèmes hybrides peut réduire de 50% la réponse

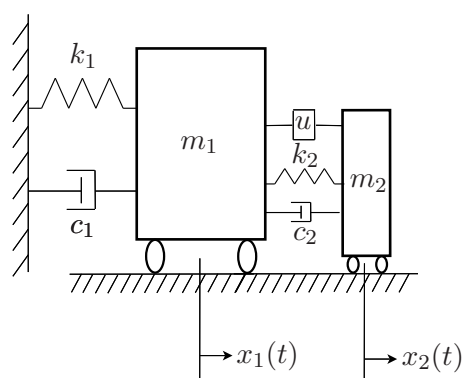


FIG. 1.29 – Système semi-actif.

structurale du bâtiment et offrir un coût de maintenance et d'exploitation plus faible que les systèmes purement actifs. Comme les systèmes actifs, les systèmes hybrides sont contrôlés par ordinateur et les informations sur le comportement de la structure sont données par un ensemble de capteurs (accéléromètres, anémomètres,...) répartis dans le bâtiment. Par exemple, le Ando Nishikicho Building au Japon, un immeuble de 14 étages soumis à des vents violents, a été équipé d'un système hybride de Kajima basé sur un amortisseur inertiel passif de 18t couplé à un amortisseur inertiel actif de 2t installé près du toit comme montré sur la Figure 1.30. Le système est relié au bâtiment par des amor-

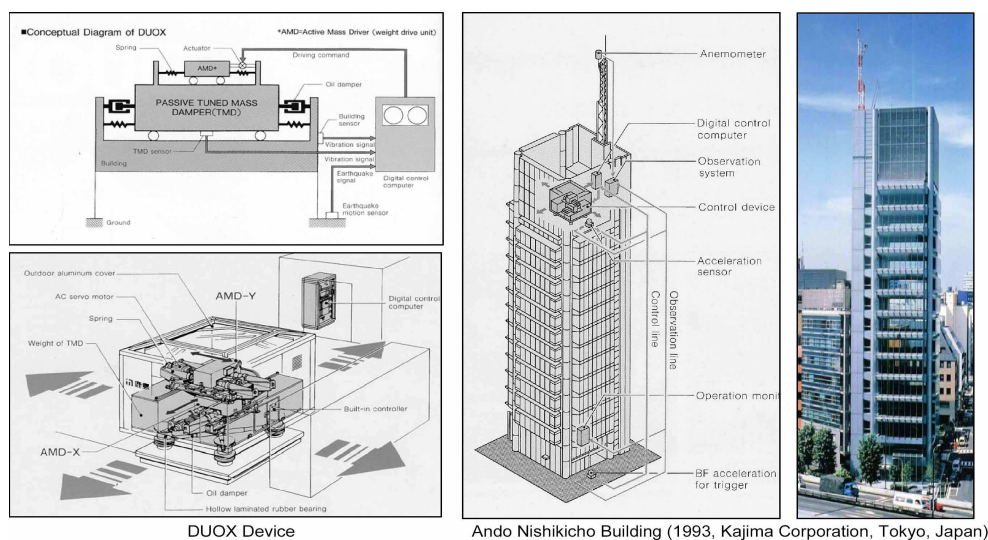


FIG. 1.30 – Le dispositif du Ando Nishikicho Building.

tisseurs viscoélastiques et les mouvements peuvent se faire simultanément sur les deux axes horizontaux. Le système est capable, en théorie, de répondre à un séisme d'intensité 5 sur l'échelle japonaise en actif et au-delà en passif. La performance en réponse au vent atteint 58% et 69% en réduction respectivement des déplacements et de l'accélération sur l'axe x et 30% et 52% respectivement en déplacement et en accélération sur l'axe y. Le concept du système hybride peut tout aussi bien être adapté à un système directement actif c'est-à-dire avec une seule masse contrôlée par un système actif lors d'excitations violentes et laissée libre le reste du temps (mode passif), économisant grandement la consommation en énergie et les coûts de maintenance. En cas de panne d'alimentation, ce type d'amortisseur fournirait, comme dans le cas précédent, un minimum de sécurité

lors d'un sinistre. Ce type de système hybride est souvent appelé Tuned Active Damper (TAD).

1.3.3.2 Les systèmes semi-actifs.

L'objectif des systèmes semi-actifs est le même que celui des systèmes hybrides : essayer de prendre le meilleur des systèmes actifs et des systèmes passifs. Le fonctionnement se base sur un amortissement passif par dissipation contrôlée (par friction ou visqueux), c'est-à-dire, par exemple, en contrôlant la force de friction au cours d'une réponse à une contrainte. Cette méthode est sensiblement différente des systèmes hybrides car le contrôle actif ne fournit pas directement l'énergie de réponse (comme c'est le cas lorsque le système active une masse) et il consomme de l'énergie uniquement pour l'absorption. De cette façon, ce type de système possède les avantages d'une réponse active (rapidité de réponse) en sollicitant moins le système d'alimentation en énergie du bâtiment. Si plusieurs concepts sont en développement, voire en exploitation, les systèmes semi-actifs peuvent encore être classés dans la catégorie des technologies émergentes. Le contrôle de l'absorption s'effectue par application d'un courant électrique ou magnétique sur un liquide ou un solide qui va accentuer ou diminuer la friction ou la viscosité du système d'amortissement.

Par exemple, la tour Mori, point culminant du complexe de Roppongi Hills au Japon, est équipée de 356 amortisseurs semi-actifs visqueux. Les mouvements des renforts diagonaux sont amortis par le liquide et contrôlés par courant électrique.

1.3.3.3 Les amortisseurs magnéto-rhéologiques.

Le contrôle semi-actif grâce aux amortisseurs magnéto-rhéologiques est une des voies explorées par la recherche japonaise. L'efficacité et la faisabilité de l'utilisation d'éléments de structure intelligents magnéto-rhéologiques pour le contrôle des vibrations ont été démontrées en 2002 lors d'un vaste atelier dirigé par le "National Research Institute on Earth Science and Disaster Prevention" (NIED). Dans cette étude, l'amortisseur contient un fluide dont la viscosité dépend du champ magnétique appliqué, et donc du courant parcourant les bobines de l'électro-aimant. La réponse de l'amortisseur est ainsi ajustable jusqu'à 200 kN.

1.3.3.4 Les amortisseurs à activateurs piézo-électriques.

Le contrôle de la friction grâce à des activateurs piézo-électriques (PE) est une alternative aux systèmes magnétiques. Un cristal PE est un cristal dont la géométrie varie avec la tension électrique appliquée, comme le quartz par exemple. L'idée est de contrôler la déformation d'un actionneur grâce à un signal électrique. L'actionneur, sous l'action du champ électrique, va exercer une pression plus ou moins importante sur une surface de friction. La valeur de la force de frottement est ainsi asservie au signal électrique.

Les systèmes semi-actifs sont prometteurs mais leur utilisation reste marginale et les données en retours d'expériences sont encore trop peu nombreuses pour évaluer les performances de ces amortisseurs.

Le contexte étant fixé, on peut alors s'intéresser au principe et mécanismes du pompage.

Principe et Premiers Exemples du Pompage Énergétique

Le phénomène de pompage énergétique peut servir pour la conception d'absorbeurs passifs de nouvelle génération. En effet, le caractère non linéaire de l'attache va permettre des régimes de fonctionnement développant une absorption rapide des vibrations. Après un développement du principe du phénomène de pompage énergétique en régime instationnaire, une analyse des travaux existants sur le sujet permet d'énoncer des problèmes ouverts, qui restent à résoudre. De plus, des évidences numériques sont apportées afin de comprendre le principe du phénomène de pompage énergétique. L'application à plusieurs modèles de bâtiments est également envisagée.

Sommaire

2.1 Principe	48
2.1.1 Objectifs	48
2.1.2 Travaux existants	50
2.1.3 Problèmes ouverts	63
2.2 Evidences Numériques	65
2.2.1 Equations du modèle	66
2.2.2 Nonlinéarité régulière	67
2.2.3 Nonlinéarité irrégulière : système linéaire par morceaux	68
2.2.4 Système non linéaire chaotique avec raideur négative	72
2.2.5 Application à un bâtiment	76

2.1 Principe

2.1.1 Objectifs

Il s'agit d'étudier l'atténuation des vibrations d'une structure linéaire ou linéarisée soumise à une excitation extérieure. Cette atténuation est effectuée grâce à :

- un couplage par une raideur faible entre la structure initiale linéaire et une faible masse ajoutée, elle-même soumise à une force de rappel non linéaire ;
- ou à un couplage non linéaire fort entre la structure initiale linéaire et une faible masse ajoutée.

Le pompage énergétique est ainsi défini comme le transfert irréversible de l'énergie vibratoire de la structure primaire linéaire vers la structure annexe ajoutée à comportement non linéaire ; c'est le phénomène qui rentre en jeu dans l'absorbeur de vibration passif ainsi conçu.

On se propose alors d'approfondir l'idée suivante : est-il possible, par ce couplage de la structure existante linéaire, avec une petite structure annexe à comportement non linéaire, et en concevant habilement le couplage et la nonlinéarité :

- de très peu modifier les caractéristiques de la structure existante (en particulier les fréquences et modes propres) ?
- de créer un "mode de vibration non linéaire" tel que, sous la moindre sollicitation (instationnaire entre autre) exercée sur la structure linéaire, celle-ci vibre moins qu'en absence de couplage ? Le phénomène de pompage énergétique permettrait de transférer l'énergie de la structure linéaire vers la structure non linéaire qui concentrerait alors l'essentiel des vibrations.

On considère ainsi un système soit linéaire ou linéarisé grâce notamment à une discrétisation ou une analyse modale, voir un système non linéaire que l'on appellera système primaire. Si ce système est soumis à une sollicitation extérieure alors des vibrations peuvent se produire, vibrations qui peuvent être dangereuses pour le confort ou la survie de la structure. On se propose alors de venir coupler un système non linéaire qui absorberait l'énergie vibratoire par résonance de modes non linéaires. On considère ainsi un contrôle passif des vibrations c'est-à-dire sans apport extérieur d'énergie. L'objectif est d'obtenir le transfert irréversible d'énergie du système primaire vers le système auxiliaire couplé, phénomène communément appelé pompage énergétique. Ainsi, les applications peuvent être nombreuses et variées : en Génie civil avec la réduction de vibrations de bâtiments, d'ouvrages d'art comme je l'ai effectué et comme nous le verrons dans la suite de ce rapport, en Génie mécanique avec l'amortissement des vibrations de machines-outils, en acoustique pour atténuer le bruit rayonné, en aéronautique avec le contrôle de vibrations d'une aile d'avion mais aussi en navale, en électronique voir en nanotechnologie.

Comme expliqué auparavant, on peut ainsi modéliser les structures linéaires ou linéarisées par des systèmes masses-ressorts-amortisseurs (par exemple en ne conservant qu'un mode) comme montré sur la Figure 2.1 où les deux possibilités de couplage ont été illustrées. Sur la Figure 2.1 a), un ressort linéaire de raideur faible γ vient coupler la structure primaire à isoler de masse m_1 à une structure de faible masse m_2 qui est elle-même soumise à une force de rappel non linéaire $F(x_2)$. Sur la Figure 2.1 b) un ressort non linéaire de forte raideur vient coupler (force de rappel $G(x_2 - x_1)$) la structure primaire à isoler de masse m_1 à une structure de faible masse m_2 .

Ces prototype théoriques de tels systèmes ont été proposés par A.F. Vakakis (University of Athens) et O. Gendelman ([Vakakis et al., 1999, Vakakis, 2001] mais aussi dans [Gendelman, 2001] et [Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001,

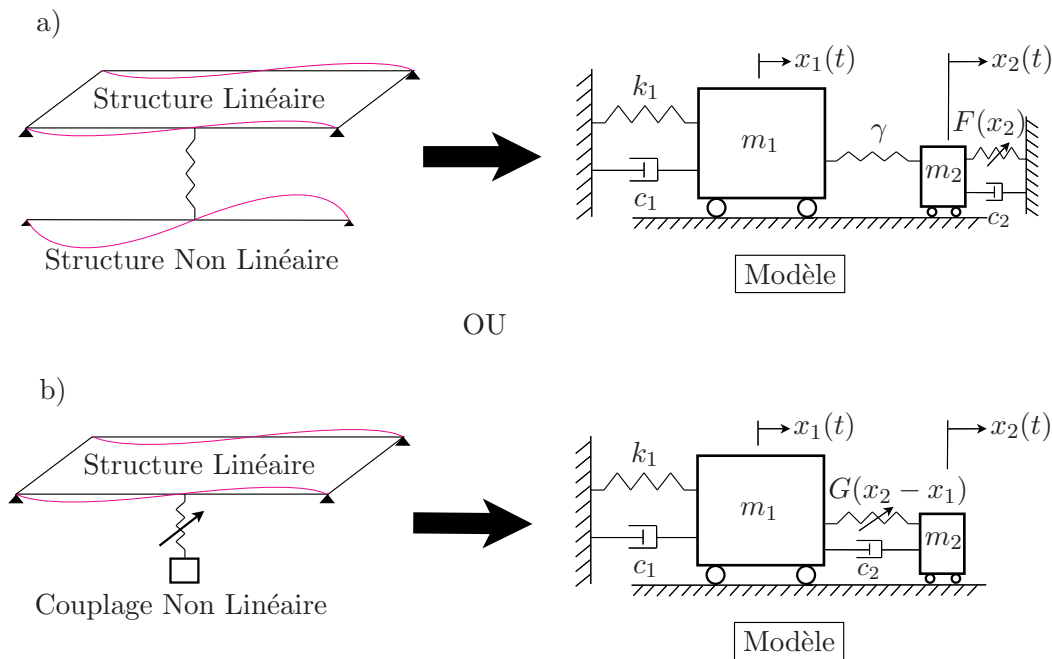


FIG. 2.1 – Principe de la modélisation.

Vakakis et al., 2003].

Le couplage peut aussi être modélisé par un “type” de ressort à comportement non linéaire qui sera à préciser par la suite. Dans le cas du Génie Civil, la structure linéaire peut ainsi être un tablier de pont qui vibre et la structure non linéaire un câble que l’on vient coupler à la structure linéaire.

A l’aide de ce couplage, on veut donc construire des modes non linéaires de telle manière à privilégier les vibrations de la petite masse ajoutée en diminuant les vibrations de la structure initiale.

Compte-tenu de la littérature émergente, ce dernier point paraît réalisable. Mais il reste à régler les points suivants :

- utiliser au mieux la notion de modes non linéaires des systèmes réguliers pour accroître la quantité d’énergie transférée,
- tester l’apport de différentes nonlinéarités (voire du “chaos transitoire”),
- tester (dans le but d’augmenter) l’efficacité de l’amorçage du pompage énergétique.
- tester la faisabilité de ce pompage énergétique théorique sur des cas pratiques concrets (structures réelles),
- optimiser les différents paramètres (notamment ajouter une très faible masse ce qui n’est pas le cas dans les principales études théoriques actuelles où la masse ajoutée est du même ordre de grandeur que la masse de la structure principale à isoler).

On pourrait donc arriver “théoriquement” à éteindre les vibrations de la masse (structure initiale).

Un des principaux objectifs serait alors de pouvoir appliquer cette méthode à des structures concrètes, de pouvoir passer de la théorie à l’expérimentation, notamment dans le domaine du Génie Civil et Mécanique. En effet, on voudrait pouvoir parvenir, avec cette méthode, à réaliser l’atténuation des vibrations de tabliers de ponts (ou d’immeubles) en venant ajouter une petite

structure non linéaire (câble, “ascenseur”) qui serait couplée au tablier par de faibles ressorts afin de pomper l’énergie.

Cependant, pour pouvoir réaliser ce passage de la théorie à l’expérimentation, plusieurs aspects importants n’ont pas encore été pris en compte dans la théorie. Ainsi, il faut :

- déterminer les conditions exactes sur l’efficacité du pompage énergétique : étudier comment augmenter l’efficacité du pompage énergétique, comment définir un pompage optimal ;
- étudier le rôle de chaque paramètre (voir les optimiser) en définissant notamment la façon de concevoir le couplage ;
- étudier le rôle de l’amortissement ;
- étudier la robustesse de la méthode (bassins d’attractions) ;
- étudier le cas des vibrations instationnaires, forcées, ceci dans un cadre déterministe dans un premier temps, voire stochastique dans un deuxième temps ;
- essayer de résoudre le problème du niveau minimal d’énergie nécessaire (peut-on définir un pompage énergétique à “changement de vitesse” ?) ;
- voir si la notion de pompage énergétique en présence de nonlinéarités irrégulières (systèmes affines par morceaux, ou autres termes irréguliers) peut accroître l’efficacité.

Nous aborderons ici tous ces problèmes. La démarche est ainsi la suivante : il s’agit plus précisément d’étudier dans un premier temps des systèmes à deux degrés de liberté. En effet, pour débiter, nous considérons la plus simple des structures linéaires possibles en ne retenant qu’un mode dans la discrétisation ($N = 1$), représentée par une masse liée à un ressort et un amortisseur (modélisation vue précédemment), soumise à une impulsion extérieure. Les réponses des structures sont ainsi des oscillations libres (on se place en régime instationnaire). Afin de contrôler cette structure dès l’apparition de cette sollicitation, nous supposons qu’il est possible soit de la coupler par une raideur petite à une masse (faible), elle-même soumise à une force de rappel non linéaire, soit de réaliser un couplage non linéaire à une faible masse. Comme nous l’avons dit auparavant, l’objectif est de pouvoir réussir, grâce à ce couplage, à “éteindre” les vibrations de la structure initiale.

Les aspects suivants peuvent être en particulier envisagés :

- une réduction du problème à une équation intégrale dans le cas d’une nonlinéarité régulière cubique, puis une étude des phénomènes de transferts par des méthodes variées : analytiques, numériques ou analytico-numériques, ceci pour expliquer le phénomène de pompage énergétique ;
- une étude de la robustesse de la méthode (étude du phénomène de pompage énergétique lorsque les paramètres sont incertains) et des bassins d’attractions ;
- une quantification de l’efficacité du pompage ;
- une bibliographie restreinte permet de se familiariser avec la modélisation, le traitement numérique et analytique des modèles et avec les méthodes usuelles concernant l’étude de tels systèmes et de tels phénomènes ;
- un traitement analytique et numérique du système peut être effectué en choisissant une famille générale de modèles à deux degrés de liberté dans un premier temps pour essayer de répondre aux problèmes soulevés précédemment ;
- des vérifications expérimentales des résultats analytiques/numériques doivent être réalisées.

2.1.2 Travaux existants

L’objet de cette section est d’introduire la notion de pompage énergétique, de voir les méthodes qui ont été mises en oeuvre ou qui pourraient l’être pour étudier ce phénomène, et de pouvoir appliquer ce phénomène de pompage à travers l’étude d’articles publiés par les principaux cher-

cheurs travaillant dans ce domaine. Cette partie permet ainsi de mettre l'accent sur la démarche à adopter pour pouvoir comprendre le phénomène sous un angle qualitatif dans un premier temps, puis quantitativement dans un deuxième temps. Cette étude bibliographique permet aussi de recenser ce qui reste à explorer.

2.1.2.1 Evidences numériques

Tout d'abord, le phénomène a été étudié grâce à des méthodes numériques en utilisant des schémas numériques classiques (de type Runge-Kutta car de fortes raideurs interviennent). C'est ainsi que dans [McFarland et al., 2002b] les auteurs s'intéressent aux réponses des oscillateurs décrits sur la Figure 2.1 a) vue précédemment en ajoutant une sollicitation extérieure $S(t)$ de type impulsion à la masse primaire m_1 . À l'aide de la seconde loi de Newton du mouvement, la mise en équations (en posant $z_1 = x_1$, $z_2 = \dot{x}_1$, $z_3 = x_2$, $z_4 = \dot{x}_2$) permettant l'application de schémas numériques de type Runge-Kutta du 4^{ème} ordre (et de routines de Matlab) est :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = \frac{1}{m_1}[S(t) - c_1 z_2 - k_1 z_1 - \gamma(z_1 - z_3)], \\ \dot{z}_3 = z_4, \\ \dot{z}_4 = \frac{1}{m_2}[-\gamma(z_3 - z_1) - c_2 z_4 - F(z_3)]. \end{cases} \quad (2.1)$$

En reprenant les valeurs que [McFarland et al., 2002b] ont utilisées, c'est-à-dire une charge transitoire $S(t)$ représentée par un pulse demi-sinus d'amplitude $80N$ et de durée $0.02s$, avec un rapport des masses de 0.5 ($m_1 = 1kg$ et $m_2 = 0.5kg$), des amortissements spécifiques de l'ordre de 2% ($c_1 = 2.5N/m/s$, $c_2 = 1.25N/m/s$, $k_1 = 4000N/m$), et en considérant une nonlinéarité cubique ($F(x_2) = k_2 x_2^3$ avec $k_2 = 20.10^7 N/m^3$), on obtient la Figure 2.2 en considérant un couplage ($\gamma = 400N/m$). On observe ainsi que les vibrations de la structure primaire sont forte-

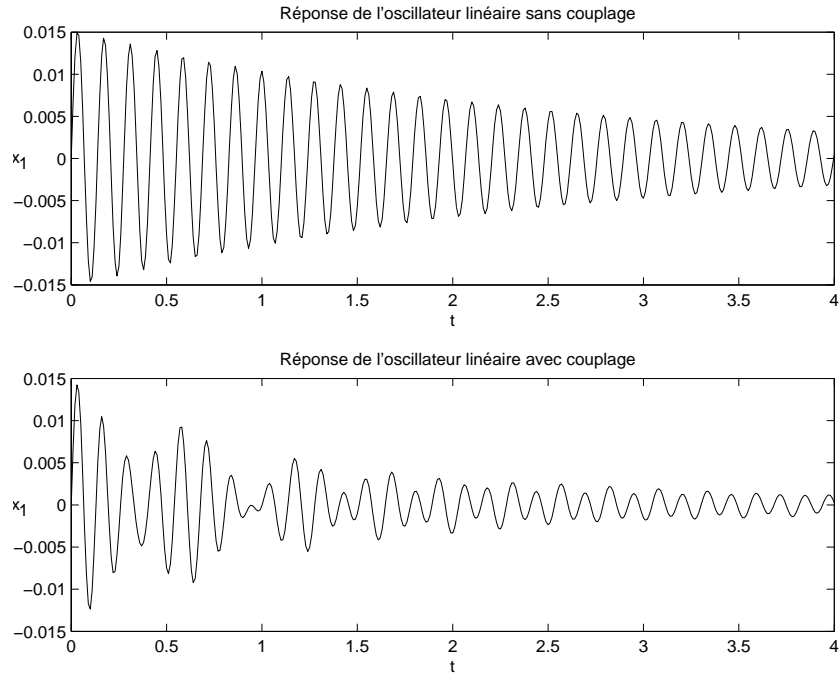


FIG. 2.2 – Simulation numérique du déplacement de la structure initiale linéaire sans et avec pompage énergétique.

ment atténuées dans la phase de transition : il se produit le phénomène de pompage énergétique

lorsqu'il y a couplage, les vibrations sont ensuite amorties comme dans le cas où il n'y a pas de couplage (amortissement naturel spécifique des oscillations libres amorties). Il faut souligner que cette atténuation est bien due au phénomène de pompage énergétique et non à l'amortissement spécifique des structures, car cette atténuation se déroule pendant la phase transitoire, et ensuite le déplacement oscille en s'amortissant comme lorsqu'il n'y a pas de couplage.

2.1.2.2 Transfert d'énergie

Il faut tout d'abord noter que les principaux articles publiés sur le sujet ne traitent que le cas où l'on vient ajouter une structure non linéaire de masse du même ordre de grandeur que la masse de la structure linéaire. Selon [Gendelman, 2001], on peut déterminer si une force externe donnée avec des conditions initiales données peuvent mener à la résonance ou non des vibrations de la petite masse. Certaines conditions permettant d'accélérer l'amortissement de l'oscillateur linéaire plus rapidement que l'oscillateur non linéaire ont été déterminées. En effet, les conditions pour que le transfert d'énergie au mode normal non linéaire se produise (si l'énergie est initialement localisée dans l'oscillateur linéaire) sont :

- 1) l'impact initial et l'amplitude doivent être suffisants pour que le mode localisé résonant soit excité,
- 2) les coefficients d'amortissement doivent satisfaire une inégalité.

Ces deux conditions sont nécessaires mais non suffisantes. Elles fournissent certaines indications pour concevoir le système d'oscillateurs couplés avec un pompage efficace, mais d'autres analyses sont nécessaires pour établir les conditions exactes sur ce procédé pour chaque cas concret. Des simulations numériques peuvent révéler plus de caractéristiques. Par exemple, on peut reprendre le cas de deux oscillateurs couplés : un linéaire (oscillateur 1) et un non linéaire (oscillateur 2) avec un faible amortissement :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{c_1}{m_1}\dot{x}_1 + \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{\gamma}{m_2}(x_1 - x_2) = 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{c_2}{m_2}\dot{x}_2 + \frac{k_2}{m_2}x_2^3 + \frac{\gamma}{m_1}(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

On peut noter que $\gamma \ll 1$ (faible couplage) et que les autres variables sont $O(1)$. Sur la Figure 2.3, les réponses numériques des deux oscillateurs sont tracées (avec $m_1 = m_2$). On a $\dot{x}_1(0) = \sqrt{2h}$, h étant l'énergie du système à $t = 0^+$, et $x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Sur cette figure, on a pour $h = 0.5$ (Figure 2.3 a-) deux oscillateurs avec des oscillations libres amorties. En augmentant le niveau d'énergie initial (Figure 2.3 b-), on s'aperçoit que l'énergie transite de l'oscillateur primaire de masse m_1 vers l'oscillateur non excité 2. Après un état de transition initial, la plus grande partie de l'énergie de vibration est transférée ("pompe") irréversiblement vers l'oscillateur 2. En augmentant le niveau d'énergie initial h (Figure 2.3 c-), le phénomène de pompage énergétique devient moins prononcé. Cette simulation numérique montre que pour des valeurs fixées de paramètres, le pompage énergétique a lieu au-dessus d'une valeur spécifique du niveau de l'énergie initiale due à l'excitation. Des résultats similaires sont obtenus pour des systèmes à 3 degrés de liberté (deux linéaires, un non linéaire). Le phénomène de pompage énergétique peut ainsi être réalisé pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

On s'intéresse maintenant au cas du système à deux degrés de liberté. Sur la figure 2.3, on note que lorsque le phénomène de pompage se produit, le mouvement peut être divisé en deux phases. Dans la première, l'énergie est pompée de l'oscillateur primaire de masse m_1 vers l'oscillateur ajouté de masse m_2 dans un seul sens et de façon irréversible, jusqu'à ce que l'oscillateur 1 atteigne une certaine amplitude d'oscillations. Dans la seconde phase du mouvement,

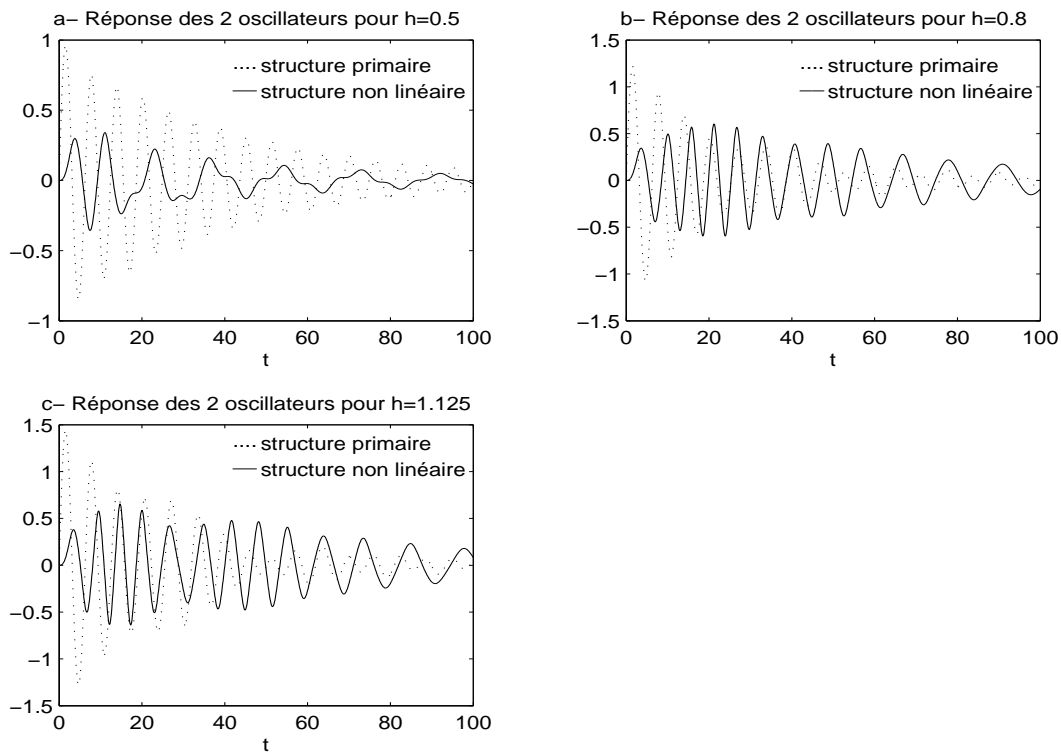


FIG. 2.3 – Réponses transitoires numériques $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour différentes valeurs de $\dot{x}_1(0) = \sqrt{2h}$.

les deux oscillateurs dissipent (amortissent) les oscillations grâce à l’oscillateur ajouté de masse m_2 qui retient la plus grande partie de l’énergie.

De plus, durant la phase initiale de pompage ($0 < t < 40$ pour $h = 0.8$ et $0 < t < 60$ pour $h = 1.125$), le mouvement de l’oscillateur de masse m_2 est composé d’une oscillation “rapide” avec une fréquence quasi identique à la fréquence de l’oscillateur primaire, et d’une enveloppe d’oscillation lente. Ceci suggère qu’une résonance interne entre l’oscillateur primaire et l’oscillateur ajouté non linéaire joue un rôle important dans cette phase de pompage énergétique, bien que ceci n’explique pas le pompage dans un seul sens.

2.1.2.3 Capture de résonance

Ce phénomène de transfert irréversible d’énergie de la structure initiale vers la structure non linéaire attachée est dû à une capture de résonance et se passe uniquement dans le système amorti. De tels échanges énergétiques sont ainsi souvent associés à des captures de résonances comme montré dans [Arnold, 1988, Quinn, 1997], où l’oscillateur non linéaire et non linéarisable s’engage dans une résonance transitoire avec l’oscillateur linéaire, avant que la dynamique ne “s’échappe” vers un régime de mouvement différent.

[McFarland et al., 2002a] montre que le phénomène de pompage énergétique dépend entièrement de la structure topologique des modes normaux non linéaires du système non amorti de base. En effet, le pompage énergétique est dû à l’excitation de certains modes non linéaires amortis invariants qui sont la continuation analytique des modes normaux non linéaires du système non amorti.

Définition 1 (d'après [Parker et Chua, 1989]) On considère un système d'ordre n :

$$\dot{X} = f(X, \alpha)$$

avec un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Quand α varie, les ensembles limites du système changent aussi. Typiquement, une faible variation de α produit un faible changement quantitatif dans l'ensemble limite. Par exemple, perturber α peut changer légèrement la position de l'ensemble limite, et si l'ensemble limite n'est pas un point d'équilibre, sa forme ou sa dimension peuvent également changer. Il existe aussi la possibilité qu'un faible changement de α puisse entraîner un changement qualitatif de l'ensemble limite. Un tel changement qualitatif est appelé une **bifurcation**, et la valeur de α à laquelle la bifurcation se produit est appelée valeur de bifurcation.

Un changement qualitatif peut se produire uniquement quand le système est structurellement instable. Ainsi, l'ensemble des valeurs de bifurcations est l'ensemble des valeurs de paramètres où le système est structurellement instable.

Les exemples de bifurcations sont la disparition ou la création d'ensembles limites et le changement dans le type de stabilité d'un ensemble limite (i.e., stable vers instable).

Les bifurcations des modes normaux non linéaires du système non amorti aident à expliquer l'existence de captures de résonances dans le système amorti. C'est une série de phénomènes de pompes énergétiques qui se passent à différentes fréquences, avec des transitions soudaines entre des événements séquentiels.

Certains résultats expérimentaux qui ont été obtenus confirment cette théorie.

Définition 2 (d'après [Guckenheimer et Holmes, 1983]) On considère notre système de n équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t) \quad (2.3)$$

avec $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ et $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ un champ de vecteurs. Pour simplifier l'écriture, nous ne mentionnons pas les paramètres qui se trouvent dans les f_i .

La solution de ce système avec conditions initiales $X(t_0) = X_0$ (notée $\phi_t(X_0)$) décrit, dans l'espace des phases $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, une courbe intégrale appelée **trajectoire** ou **orbite**.

Lorsque le champ de vecteurs f dépend explicitement du temps, le système est dit **non-autonome**. Dans le cas contraire, on dit que le système est **autonome**.

Définition 3 (d'après [Parker et Chua, 1989]) En reprenant les notations précédentes, on a : $\phi_t(X^*, t_0)$ est une **solution périodique** d'un système non-autonome si, pour tout t ,

$$\phi_t(X^*, t_0) = \phi_{t+T}(X^*, t_0)$$

pour une période minimale T (le plus petit T vérifiant la relation).

Une solution périodique d'un système non-autonome dont la période est un entier multiple (> 1) de la période du forcing est appelée **sous-harmonique**.

Le phénomène de pompage énergétique est ainsi provoqué par l'excitation d'une orbite stable sous-harmonique, et ne peut être excité qu'avec un niveau suffisant d'énergie.

Le mécanisme du pompage semble mobiliser également la notion de mode non linéaire : la présence d'une nonlinéarité est capitale. **Il faut ainsi souligner qu'un tel phénomène n'est pas possible avec l'ajout d'un système linéaire sur la structure initiale.**

2.1.2.4 Système Hamiltonien

Définition 4 Un système **hamiltonien** à n degrés de liberté est un système d'équations du mouvement de la forme :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

où $H = H(q, p, t)$ est l'**hamiltonien**. L'espace des phases du système (2.4) est \mathbb{R}^{2n} . On déduit de (2.4) :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}, \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Par conséquent, si le hamiltonien H ne dépend pas explicitement du temps, il sera conservé au cours du temps : $H(p, q) = E = \text{Constante}$.

Tout hamiltonien $H(p, q, t)$, à n degrés de liberté, qui dépend explicitement du temps peut être transformé en un hamiltonien indépendant du temps à $n + 1$ degrés de liberté.

Dans ce cas, les trajectoires de (2.4) évolueront sur une hyper-surface $H = \text{Const.}$ de dimension $2n - 1$. On peut aussi noter que si l'on assimile le système (2.4) à un système d'équations différentielles du type (2.3), en posant :

$$x_i = q_i, \quad x_{n+i} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

alors

$$\text{Div } f = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0. \quad (2.7)$$

Par conséquent, le système hamiltonien est conservatif.

Motivés par les observations numériques soulevées par les articles présentés précédemment, les auteurs de [Gendelman et al., 2001] et [Vakakis et Gendelman, 2001] examinent les orbites périodiques du système hamiltonien sous-jacent en éliminant l'amortissement des équations initiales. Comme le système est faiblement amorti, on s'attend à ce qu'aux premières étapes du mouvement, la dynamique soit influencée par la dynamique du système hamiltonien correspondant (sans amortissement). Cette dynamique est dominée par des orbites périodiques. On s'attend ainsi à ce que la structure topologique des orbites périodiques (et leurs bifurcations) du système hamiltonien joue un rôle essentiel dans le phénomène de pompage énergétique. Selon leur méthode, on peut ainsi tracer le diagramme de bifurcations des différentes sous-harmoniques.

Dans l'article [Vakakis et Gendelman, 2001], les effets de l'amortissement sont ajoutés à l'analyse et il est montré que le pompage énergétique est dû à une capture de résonance des trajectoires dans un domaine d'attraction de la variété résonante.

Dans notre cas, la nonlinéarité est forte et l'amortissement faible, donc on ne peut pas appliquer les méthodes de perturbations classiques. Tout d'abord, en utilisant les variables actions-angles du système hamiltonien sous-jacent (théorème de Liouville), les auteurs transforment les équations en un système de quatre équations du premier ordre. Les équations résultantes sont dans une forme permettant d'appliquer les méthodes de moyennes multi-fréquences et l'analyse de captures de résonances.

Dans la seconde méthodologie, les auteurs étendent la méthode de perturbation basée sur la complexification des équations et fournissent une reconstruction analytique des réponses transitoires du système lors du pompage énergétique.

Le phénomène primordial semble donc être la capture d'une résonance principale survenant à un niveau d'énergie suffisant. L'explication dans ces travaux repose pour l'essentiel sur l'étude théorique du système hamiltonien sous-jacent obtenu en supprimant les termes de dissipation. Il est important de noter que le mécanisme d'amorçage du pompage énergétique impose d'atteindre un niveau d'énergie suffisant pour le système hamiltonien sous-jacent. Cela signifie qu'un important travail reste à faire pour aller vers les applications, puisque l'objectif idéal serait de parvenir à amorcer le pompage dès les très faibles niveaux d'énergie, c'est-à-dire pour des sollicitations très faibles de la structure linéaire.

2.1.2.5 Mécanismes

Il a été montré (notamment dans [Kershen et al.,]) que le phénomène de pompage énergétique peut être initié par trois mécanismes basiques. En effet, le premier mécanisme (pompage énergétique fondamental) est réalisé quand le mouvement se produit le long de la courbe de résonance 1 : 1 dans le diagramme classique énergie-fréquence. Ce mécanisme se produit pour des relativement faibles fréquences en dessous de la fréquence de l'oscillateur linéaire. Le second mécanisme (le pompage énergétique sous-harmonique) ressemble au premier, et se produit quand le mouvement a lieu le long d'une branche de fréquence plus basse. Par exemple l'oscillateur non linéaire oscillant à une fréquence trois fois plus basse que la fréquence naturelle de l'oscillateur linéaire. Le troisième mécanisme (pompage énergétique initié par un phénomène de battements non linéaires), qui conduit à un pompage énergétique plus fort, met en jeu l'excitation d'une orbite spéciale avec une fréquence principale plus grande que la fréquence naturelle de l'oscillateur linéaire (la masse non linéaire étant initialement au repos, elle ne peut pas être initialement dans un mode de grandes vibrations ; il faut donc déclencher ce mode de grandes vibrations par ces orbites spéciales qui permettent la liaison entre le mode initialement au repos et le mode de grandes vibrations de la faible masse ajoutée). Dans ce dernier cas le pompage énergétique est initié par ce phénomène de battements. Ce troisième mécanisme est le plus intéressant pour les applications car c'est celui qui permet de transférer et de dissiper la plus grande partie de l'énergie.

On peut par exemple considérer le système représenté sur la Figure 2.4. Les équations

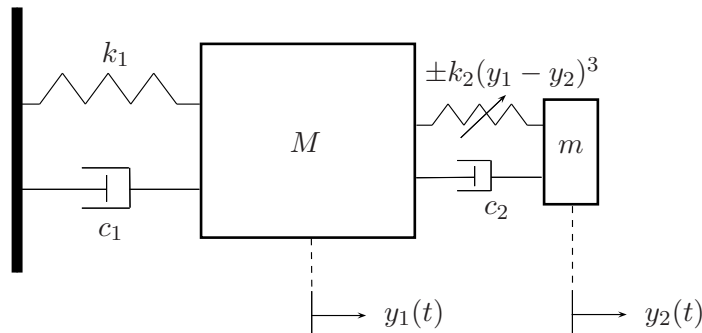


FIG. 2.4 – Système considéré avec 2 degrés de liberté.

considérées sont :

$$\begin{cases} M\ddot{y}_1 + k_1 y_1 + c_1 \dot{y}_1 + c_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2(y_1 - y_2)^3 = 0, \\ m\ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1)^3 = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

avec $y_1(0) = y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$ et $\dot{y}_1(0) = F$. En introduisant les paramètres suivants $\omega_1^2 = \frac{k_1}{M}$, $C = \frac{k_2}{M}$, $\lambda_1 = \frac{c_1}{M}$, $\lambda_2 = \frac{c_2}{M}$, $\varepsilon = \frac{m}{M}$, on obtient les équations :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 + \lambda_1 \dot{y}_1 + \lambda_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + C(y_1 - y_2)^3 = 0, \\ \varepsilon \ddot{y}_2 + \lambda_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + C(y_2 - y_1)^3 = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Dans l'intérêt d'une validation du pompage énergétique, les mesures numériques et expérimentales doivent être étudiées au moyen d'un outil de traitement du signal approprié. Un tel post-procédé doit permettre l'observation de captures de résonances et la destruction de modes normaux non linéaires avec des capacités de débruitage. L'objectif final est d'obtenir de façon précise les valeurs de fréquences instantanées. Une nouvelle méthodologie basée sur les ondelettes, nommée "quasi-continuous mapping" [Pernot, 2000], peut alors être appliquée aux résultats numériques et expérimentaux. Cette analyse temps-fréquence permet l'investigation complète des mesures. La superposition de fréquences peut ainsi être identifiée. Cela apparaîtra dans les cartes comme une juxtaposition verticale de contours. Une telle identification est très difficile avec des analyses telles que la Transformée d'Hilbert [Gourdon et Lamarque, 2005a] ou une analyse en ondelettes dyadiques [Mallat, 1989, Daubechies, 1998]. De plus, une succession de contours avec de faibles rayons pendant un intervalle temporel $\delta\tau$ et avec un niveau de fréquence constant ξ révèle la présence d'un motif avec une fréquence centrale ξ sur l'intervalle de temps $\delta\tau$. On peut également ajouter qu'un ensemble de contours avec de faibles rayons définis successivement de la fréquence ξ_1 jusqu'à la fréquence ξ_2 révèle une migration de fréquence sur l'intervalle de fréquences $[\xi_1, \xi_2]$. Un programme réalisé à l'aide de Matlab et basé sur une librairie ondelettes C++ a été développé au "Laboratoire Géomatériaux" de l'"Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat" et permet d'obtenir des cartographies ondelettes de façon rapide et précise à partir de signaux numériques ou expérimentaux dans le demi-plan temps-fréquence. De ce point de vue, le contenu fréquentiel des mesures numériques ou expérimentales est étudié à l'aide des propriétés des ondelettes.

En considérant les valeurs $\varepsilon = 0.04$, $\omega_1^2 = 1$, $C = 1$ et en considérant un très faible amortissement dans les deux structures (pour pouvoir "passer" lentement d'une orbite à l'autre) $\lambda_1 = 0.001$ et $\lambda_2 = 0.001$, on peut observer pour différentes valeurs de l'excitation F plusieurs "scénarios possibles" en utilisant l'outil basé sur les ondelettes sur les signaux numériques.

Sur les Figures 2.5 et 2.6 où $F = 0.09$, on observe un passage d'une résonance 4 : 3 (la masse m oscille 4/3 fois plus vite que la masse linéaire M) à une résonance 1 : 3 (la masse linéaire M oscille 3 fois plus vite que la petite masse m) en passant par une résonance 1 : 1. C'est le deuxième mécanisme de pompage énergétique sous-harmonique.

Pour une excitation plus forte sur les figures 2.7 et 2.8 où $F = 0.15$, on observe une résonance 3 : 2 au départ et ensuite une résonance 1 : 1 (résonance des deux structures à la même fréquence). C'est le troisième mécanisme de pompage énergétique qui est le pompage énergétique initié par un phénomène de battements non linéaires. Le phénomène de battements peut s'observer dès les premières secondes sur les vibrations de la structure non linéaire. Ce phénomène d'allers-retours entre la structure primaire et annexe est réversible et permet la transition vers le pompage

énergétique irréversible (assez d'énergie est injectée dans la deuxième structure initialement au repos ; nous reverrons ce point ultérieurement dans ce document).

Ces figures montrent également que l'atténuation est linéaire et plus rapide au lieu d'être simplement exponentielle dans le cas sans couplage.

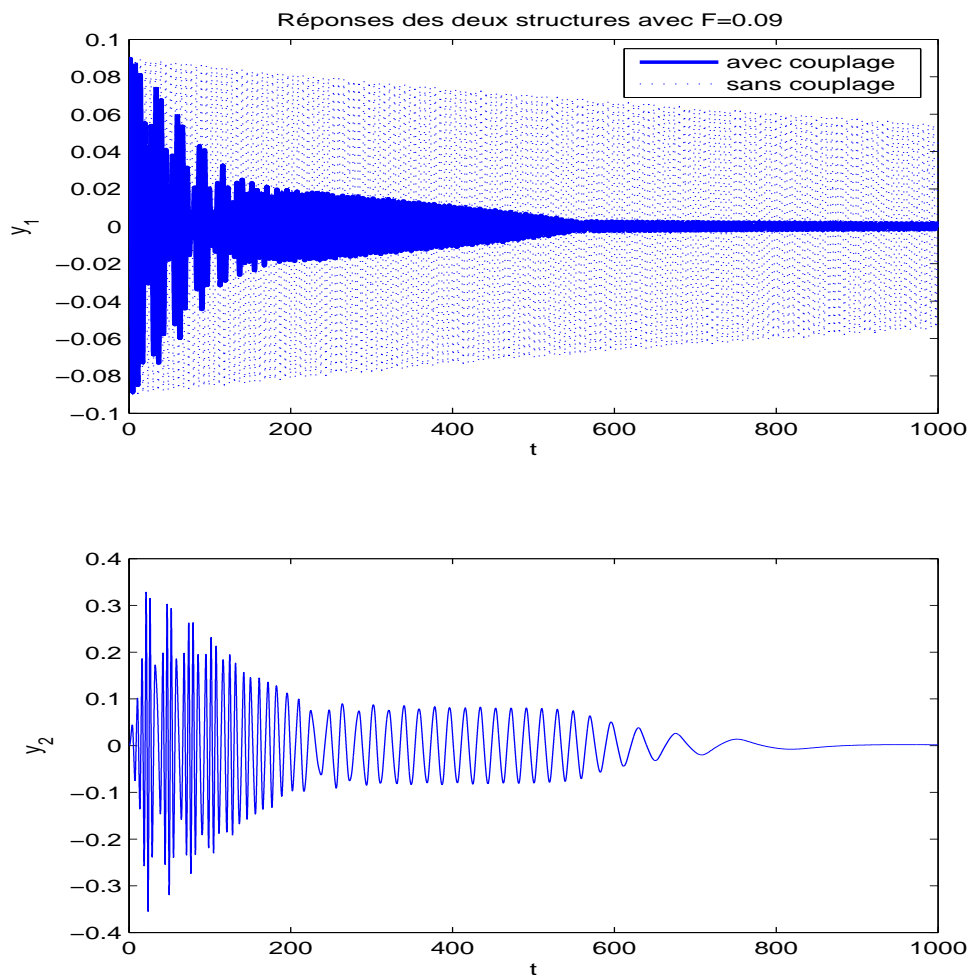


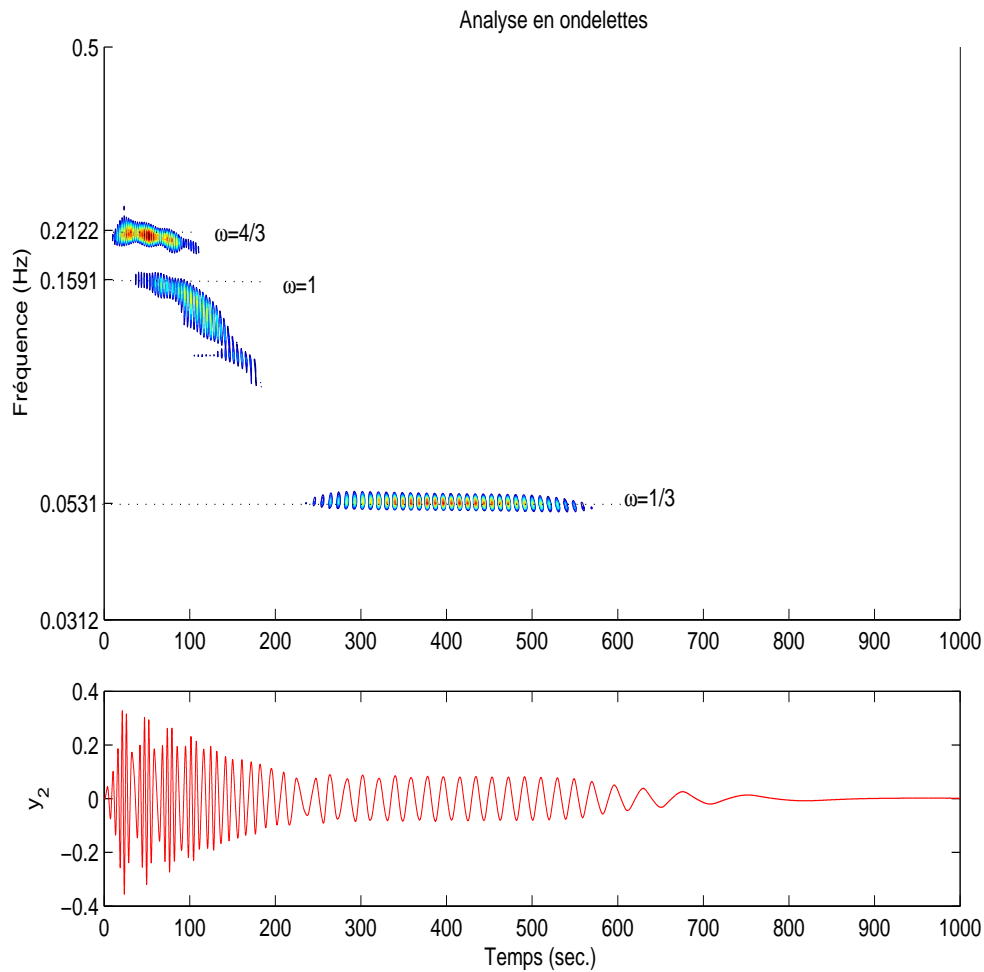
FIG. 2.5 – Réponses des oscillateurs avec $F = 0.09$.

2.1.2.6 Techniques analytiques

Bien que de nombreuses évidences numériques aient été apportées, peu de techniques analytiques ont pour l'instant été développées. Deux techniques analytiques ont, à ce jour, principalement été utilisées pour étudier le phénomène du pompage énergétique dans le système amorti : [Gendelman et al., 2001] et [Vakakis et Gendelman, 2001].

La première technique est basée sur une analyse perturbative de la dynamique de la variété résonante du système. Les résultats analytiques sont dérivés pour la région attractive responsable de la capture de résonance.

La seconde méthode est basée sur l'hypothèse de la résonance interne dans la dynamique rapide, et utilise la complexification et la méthode de la moyenne sur l'équation de mouvement.

FIG. 2.6 – Analyse en ondelettes avec $F = 0.09$.

Ceci mène à des approximations satisfaisantes des réponses transitoires non linéaires du système dans le régime du pompage énergétique.

Le succès de ces techniques est souvent attaché à des allures particulières du terme non linéaire, et n'est pas garanti pour des extensions quelconques (notamment des nonlinéarités irrégulières). De plus, la sensibilité aux conditions initiales, aux légers changements de paramètres n'est pas garantie non plus. La dynamique étant essentiellement une dynamique non linéaire globale, le rôle des différentes sollicitations doit aussi être traité (sollicitations stochastiques notamment).

2.1.2.7 Conception de la structure non linéaire

Le terme “conception” implique deux étapes :

- 1) construire un bon “pompage” à partir des modèles (étudier notamment une “efficacité”);
- 2) mettre en pratique le modèle : concevoir la structure linéaire (problèmes techniques).

Pour la conception de la structure non linéaire, quelques débuts de propositions ont été apportées par [McFarland et al., 2002b]. En effet, plusieurs schémas pour concevoir un ressort non linéaire ont été considérés, notamment par Rivin [Rivin, 1999], mais le besoin de minimiser

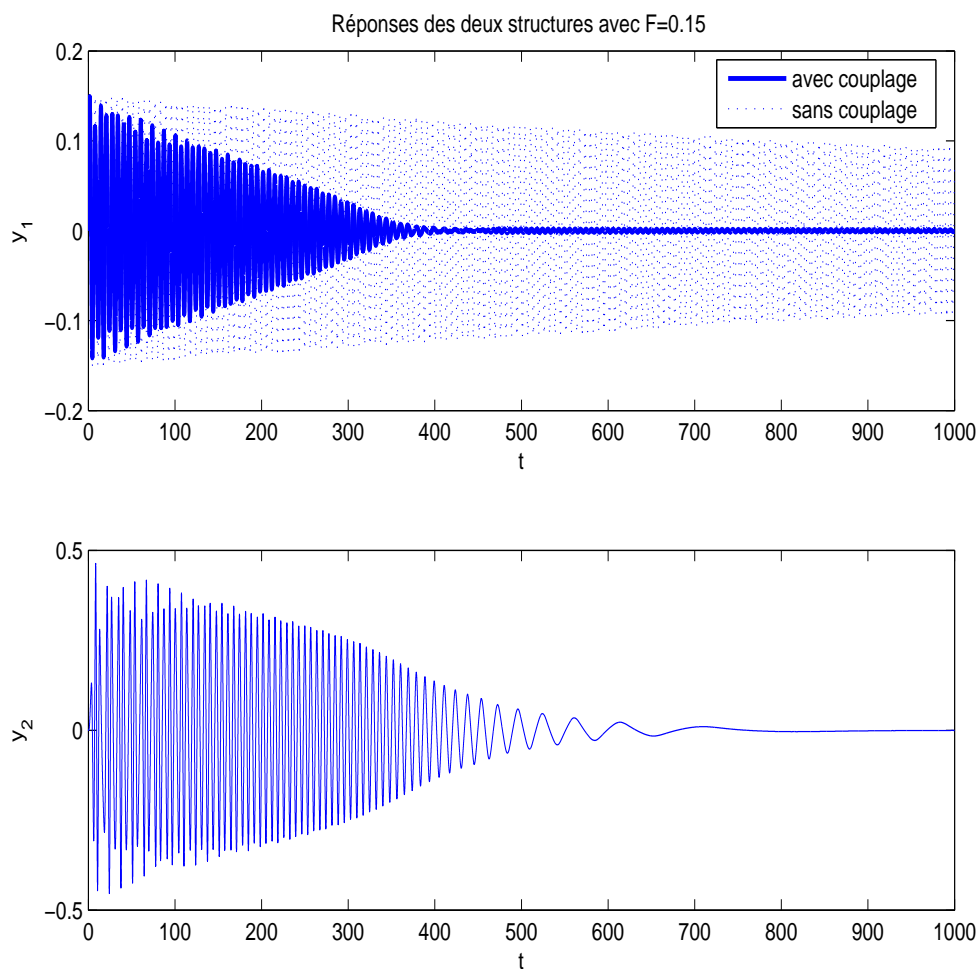


FIG. 2.7 – Réponses des oscillateurs avec $F = 0.15$.

les termes non linéaires dans la réponse du ressort, ainsi que la nécessité de la répétabilité de la configuration, et le désir d'éviter d'avoir une relation entre les propriétés du matériau et la fréquence, nous conduisent à favoriser un arrangement de ressorts linéaires dans lesquels la caractéristique non linéaire force-déplacement dérive uniquement de la géométrie. Pour une non-linéarité régulière cubique, la plus simple des formes est montrée sur la Figure 2.9, qui décrit la déformation d'un ressort linéaire en réponse à une charge appliquée perpendiculairement à son origine. Une modélisation de ce système nous donne $F_t \approx \frac{1}{2l^2}kx^3$ (l : longueur du ressort).

Cependant, d'un point de vue pratique, les effets du préchargement du ressort introduisent un terme linéaire dans la relation force-déplacement qui précède. Si le ressort a une longueur libre $l_0 < l$, on obtient alors $F_t \approx \frac{l-l_0}{l}kx + \frac{l_0}{l}\frac{1}{2l^2}kx^3$. Malheureusement, il apparaît que ce terme linéaire ne peut pas être éliminé en manipulant la géométrie du ressort. Il faut donc concevoir un ressort de ce type de telle manière à ce que le préchargement soit minimisé, si on ne peut pas l'éliminer. Une réalisation pratique de ce ressort non linéaire cubique est montrée sur la Figure 2.10. C'est ainsi que de petites expérimentations ont été réalisées d'après [McFarland et al., 2002c]. Les auteurs ont utilisé le système décrit sur la Figure 2.10 : le ressort linéaire est une corde de piano qui reste droite sous une tension presque nulle. La section A , le module d'Young E et la demi-longueur l de cette corde déterminent la raideur linéaire de chaque

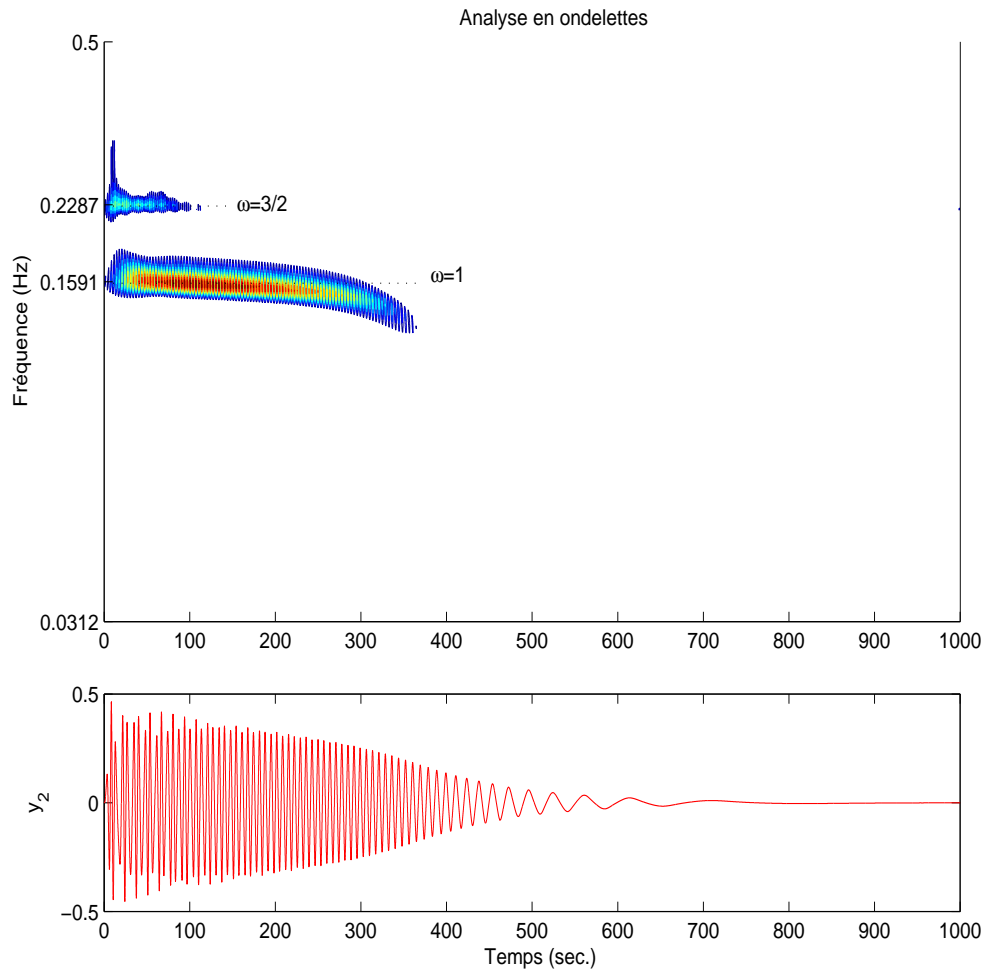
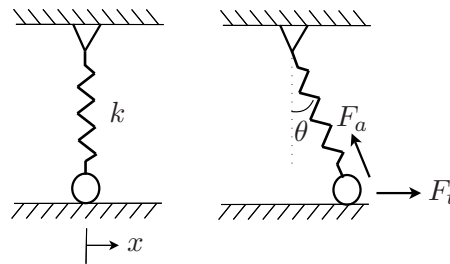
FIG. 2.8 – Analyse en ondelettes avec $F = 0.15$.

FIG. 2.9 – Géométrie des déformations du ressort.

moitié de corde en tension $k = \frac{EA}{l}$.

En ce qui concerne le Génie Civil et l'application possible qui est d'atténuer les vibrations d'un tablier de pont, on pourrait ajouter un câble incliné au tablier. On pourrait profiter de la présence de haubans sur certains ponts. En effet, les auteurs de l'article [Fujino et al., 1993] ont étudié le mouvement d'un câble à haubans relié à un tablier de pont ou à une poutre comme montré sur la figure 2.11. Si l'on ne retient que deux degrés de liberté *a*) mouvement du câble normal au plan vertical et *b*) mouvement de la poutre horizontal sur la figure 2.12, alors on obtient un couplage entre les deux mouvements et une nonlinéarité cubique dans le

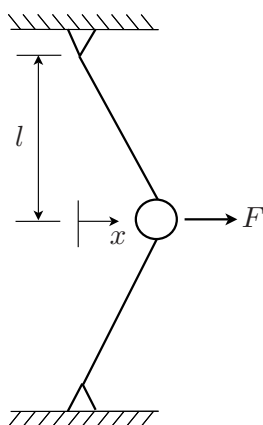


FIG. 2.10 – Conception pratique du ressort non linéaire.

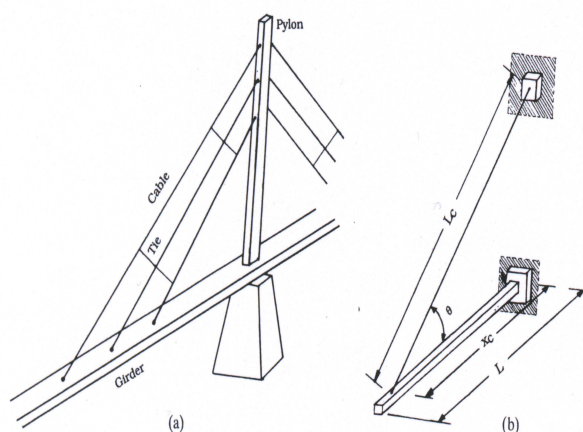


FIG. 2.11 – a) Pont avec câbles à haubans. b) Poutre suspendue par un câble.

mouvement du câble. A titre d'illustration, des travaux portant sur les vibrations d'un câble incliné à l'INSA de Lyon (Laboratoire de Mécanique des Structures, Dynamique non linéaire) montrent que le comportement correspond bien à une non linéarité cubique (cf la publication [Berlioz et al., 2001]).

2.1.2.8 Vérifications expérimentales

Le phénomène de pompage énergétique, dans lequel l'énergie vibratoire est transférée irréversiblement vers l'oscillateur non linéaire dans le but de diminuer la réponse transitoire de la structure linéaire initiale, a ainsi commencé à être étudié analytiquement et à l'aide de simulations numériques. Cependant, un des objectifs est de pouvoir passer de la théorie à l'expérimentation. Il faut ainsi noter que [McFarland et al., 2002c] décrit les premiers efforts pour démontrer le pompage énergétique en laboratoire en utilisant un banc d'essai, comme montré sur la Figure 2.13. Le système utilisé ici est celui du modèle de la Figure 2.1 avec une raideur cubique et un faible couplage linéaire. Les auteurs ont utilisé le système décrit sur la Figure 2.10 : le ressort linéaire est une corde de piano qui reste droite sous une tension presque nulle. La section A , le module d'Young E et la demi-longueur l de cette corde déterminent la raideur linéaire de chaque moitié de corde en tension $k = \frac{EA}{l}$.

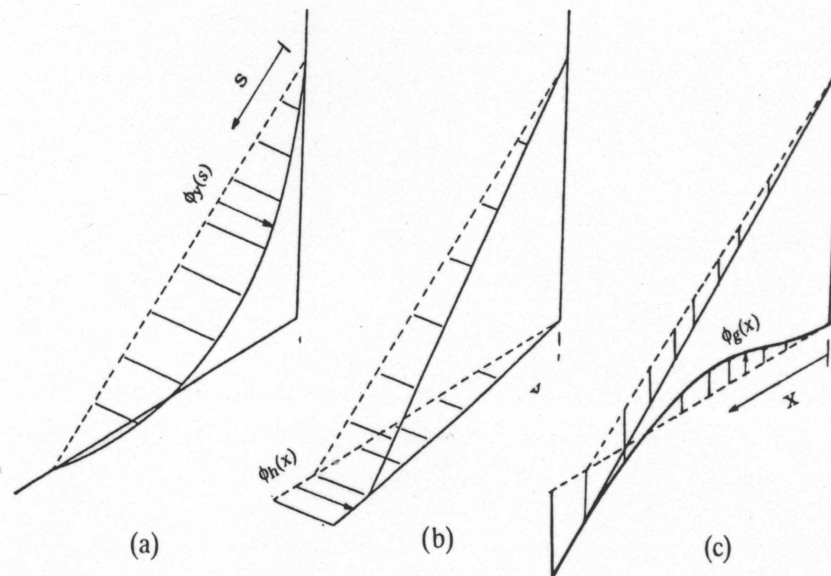


FIG. 2.12 – Vibrations locales a) du câble (normales au plan vertical), b) de la poutre (horizontales), c) de la poutre (verticales).

Les auteurs de [McFarland et al., 2002c] retrouvent ainsi les résultats des simulations numériques présentées dans les paragraphes précédents avec le fait que l'apparition expérimentale du pompage énergétique s'avère robuste.

C'est ainsi que ce phénomène peut être utilisé pour l'isolation de chocs et le contrôle, comme le montre A.F.Vakakis dans [Vakakis, 2003].

Ainsi, le phénomène de pompage énergétique considéré ici peut mener à la conception de structures avec l'ajout d'une petite structure non linéaire permettant le contrôle des structures initiales où l'énergie externe initiale serait d'abord dirigée vers la petite structure non linéaire, puis éliminée.

Il faut tout de même noter que les articles précédemment cités ne traitent principalement que du cas où l'on vient ajouter une structure non linéaire de masse de même ordre de grandeur que la masse de la structure linéaire.

2.1.3 Problèmes ouverts

En plus des questions que l'on a citées auparavant, l'étude bibliographique a soulevé d'autres points étant donné que les travaux existants nous ont montré que de nombreux problèmes n'ont pas encore été traités. On peut ainsi rappeler les différents problèmes ouverts.

- ◊ Il reste à étudier un système général avec deux degrés de liberté et prendre en compte "tous les paramètres" (masses différentes, amortissements,...).
- ◊ Il faut traiter le problème avec différentes sollicitations : impulsions, stationnaires, forcées, stochastiques,...
- ◊ On pourrait envisager de prendre en compte plus de degrés de liberté linéaires (structures quelconques).
- ◊ Dans les cas où la structure linéaire existe déjà : on ne peut pas utiliser un modèle, mais une réponse (données discrètes ...), ou un modèle "identifié" à partir de données expérimentales.

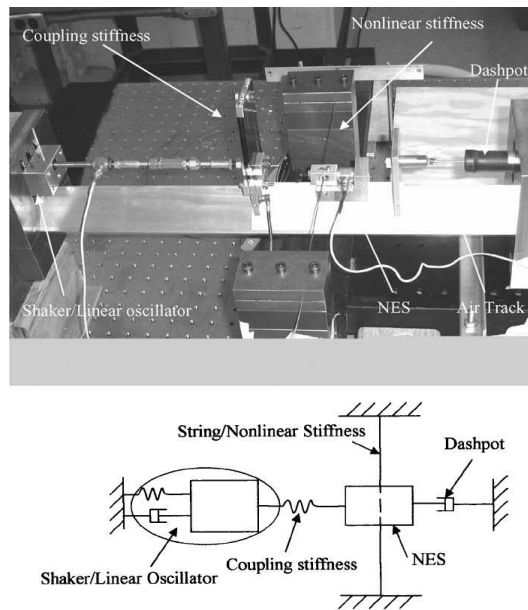


FIG. 2.13 – Banc d’essai du pompage énergétique avec un système à deux degrés de liberté.

- ◊ Les travaux existants se concentrent sur des systèmes mécaniques académiques simples, condensant la structure linéaire à un seul mode (un seul degré de liberté). Ils n’abordent pas la question du transfert en présence de nonlinéarités irrégulières.
- ◊ D’autres techniques pour le transfert ont été utilisées, mais impliquant un cadre non linéaire pour les deux structures en présence, ou impliquant de nombreux modes d’une même structure pour organiser un transfert d’énergie entre modes de “basses” fréquences et “hautes” fréquences par couplage non linéaire de ces modes (travaux de [Nayfeh et Nayfeh, 1994b]) : le problème du pompage peut être élargi à ce contexte, mais seulement si la structure existante a un comportement non linéaire.
- ◊ Il n’y a pas trace non plus dans la littérature de l’apport potentiel d’une structure non linéaire pouvant répondre de façon chaotique dans la zone d’amorçage du pompage énergétique.
- ◊ La conception pratique/expérimentale reste un problème ouvert pour pouvoir envisager d’éventuelles applications.

Ainsi, les points suivants sont traités par la suite :

- mise en équation du système ;
- études numériques permettant dans un premier temps de comprendre le phénomène ;
- étude de “l’efficacité” du pompage énergétique ;
- étude de la robustesse du phénomène (introduction de paramètres incertains) en vue d’applications réelles ;
- recherche d’approximations analytiques ;
- étude du système hamiltonien sous-jacent ;
- étude des sections de Poincaré ;
- structure annexe non linéaire remplacée par du linéaire par morceaux : calcul de modes ;
- apport d’une structure non linéaire pouvant répondre de façon chaotique dans la zone d’amorçage du pompage énergétique ;
- vérifications expérimentales.

2.2 Evidences Numériques

Dans cette section, des études numériques sont réalisées sur une structure linéaire faiblement couplée à une structure annexe non linéaire de faible masse. Le caractère non linéaire de la structure annexe lui permet de rentrer en résonance avec un mode linéarisé de la structure primaire à isoler. Il se produit alors du pompage énergétique, à savoir un transfert passif irréversible de la structure primaire vers la structure annexe ajoutée. En vue d'appliquer le pompage énergétique en Génie Civil, son efficacité est analysée à travers l'étude des différentes structures non linéaires ajoutées (système linéaire par morceaux, système chaotique). Une application spécifique est envisagée : elle consiste en l'atténuation des vibrations d'un bâtiment (deux modèles de bâtiments sont utilisés). Le cas d'excitations stochastiques est notamment pris en compte pour examiner s'il est envisageable de déclencher du pompage énergétique quand un séisme se produit. Un indicateur d'efficacité est également introduit.

Durant les dernières décennies, de nombreux moyens ont été utilisés pour l'absorption des vibrations de structures et pour la réduction des réponses transitoires des structures en raison de leur importance en ingénierie. La plupart des chercheurs se sont intéressés à des absorbeurs linéaires avec une masse importante, mais il est difficile de les appliquer dans la plupart des systèmes concrets, en particulier en Génie Civil. C'est pourquoi il semble intéressant d'étudier des absorbeurs passifs non linéaires et le phénomène de pompage énergétique en ajoutant une structure non linéaire légère. Dans la littérature, des absorbeurs non linéaires ont déjà été utilisés comme dans [Shaw et Wiggins, 1988] où un absorbeur centrifuge de vibrations de type pendule est utilisé pour réduire les oscillations de torsion, ou dans [Cuvalci et Ertas, 1996] où le pendule est aussi utilisé comme un absorbeur de vibrations pour réduire la réponse d'une poutre cantilever flexible. Un absorbeur de type impact a aussi été utilisé [Karyeaclis et Caughey, 1989a, Karyeaclis et Caughey, 1989b].

Dans des publications récentes [Vakakis et al., 1999, Vakakis et al., 1996], une recherche théorique et une petite vérification expérimentale sur l'utilisation de la localisation non linéaire, pour réduire les vibrations transmises dans les structures soumises à des mouvements de base transitoires, ont été présentées. L'idée principale est d'obtenir un mode normal non linéaire centré sur la deuxième sous-structure loin de la structure principale à isoler. L'idée d'utiliser le transfert spatial contrôlé de l'énergie vibratoire à partir du point de sa génération initiale vers un point différent où il localise essentiellement, est récente et permet le phénomène de pompage énergétique. Comme expliqué auparavant, ce phénomène de pompage énergétique correspond à un transfert contrôlé dans un seul sens de l'énergie vibratoire vers une structure passive non linéaire où l'énergie se localise et diminue (en fonction du temps) en raison de la dissipation due à l'amortissement [Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001, Gendelman, 2001]. Le pompage énergétique non linéaire peut donc être utilisé dans des oscillateurs mécaniques couplés [Gendelman et al., 2003] où la seule nonlinéarité essentielle de l'attache lui permet de rentrer en résonance avec un des modes linéarisés de la sous-structure [Vakakis et al., 2003].

Ainsi, à travers le pompage énergétique, les vibrations d'une structure linéaire (soumise à une excitation externe) peuvent être atténuées grâce à un faible couplage à une structure fortement non linéaire. En concevant habilement la structure non linéaire (la masse de la structure non linéaire sera nettement plus faible que la masse correspondante de la structure linéaire), il est possible de très peu modifier les caractéristiques de la structure existante et de créer un "mode de vibration non linéaire" qui provoque du pompage énergétique où l'énergie vibratoire initialement localisée dans l'oscillateur linéaire est irréversiblement transférée ("pompée") vers l'oscillateur non linéaire [McFarland et al., 2002a].

Les études existantes sur ce sujet se basent principalement sur l'ajout de nonlinéarités régulières. Ainsi, la plupart des auteurs travaillant sur le pompage considèrent une nonlinéarité de raideur cubique comme dans [Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001] et sur l'ajout de structures non linéaires de masses du même ordre de grandeur que la masse de la structure linéaire [Vakakis et al., 2003]. Cependant, il est nécessaire d'augmenter l'efficacité du pompage et d'utiliser des structures non linéaires très petites pour être capable de l'appliquer sur des structures réelles. C'est pourquoi on se propose d'analyser plus précisément cette structure non linéaire additionnelle qui est couplée à la structure initiale en donnant des évidences numériques.

De ce fait, la partie est organisée comme suit. Dans un premier temps, les équations du mouvement d'un système général à deux degrés de liberté sont données. Ensuite, on regarde l'ajout d'une nonlinéarité générale régulière ainsi que l'ajout de structures avec des nonlinéarités non régulières comme des systèmes linéaires par morceaux. En effet, la conception pratique de tels systèmes est plus aisée (changement de raideur) et il sera possible d'envisager une étude analytique complète par la suite. De plus, l'étude d'une structure non linéaire capable de répondre de façon chaotique dans la zone de démarrage du pompage énergétique est considérée pour essayer de résoudre le problème du niveau minimal d'énergie nécessaire pour atteindre l'orbite responsable du pompage énergétique. L'objectif étant toujours d'augmenter l'efficacité.

Enfin, nous considérons quelques applications, en particulier les vibrations d'un bâtiment. Le bâtiment peut être modélisé par différents systèmes linéaires. Deux modèles sont considérés : un modèle de bâtiment avec des étages et un modèle de bâtiment continu flexible. Pour atténuer les vibrations, différentes nonlinéarités, par exemple un système linéaire par morceaux, peuvent être couplées à la structure initiale. Dans le cas du modèle continu flexible, une excitation stochastique peut être analysée, en particulier pour être capable de considérer des sollicitations comme les séismes. Un indicateur d'efficacité est notamment trouvé avec l'écart-type de la réponse linéaire.

2.2.1 Equations du modèle

Les structures peuvent être représentées par des systèmes masses-ressorts-amortisseurs en utilisant des techniques de réductions de modèles (par exemple en conservant un mode dans l'analyse modale) comme montré sur la Figure 2.14. On considère ensuite le système à deux degrés de liberté composé de deux oscillateurs faiblement couplés et faiblement amortis.

Ici y_1 et y_2 représentent respectivement les déplacements de l'absorbeur et du système linéaire principal et $F(y_1)$ est la nonlinéarité.

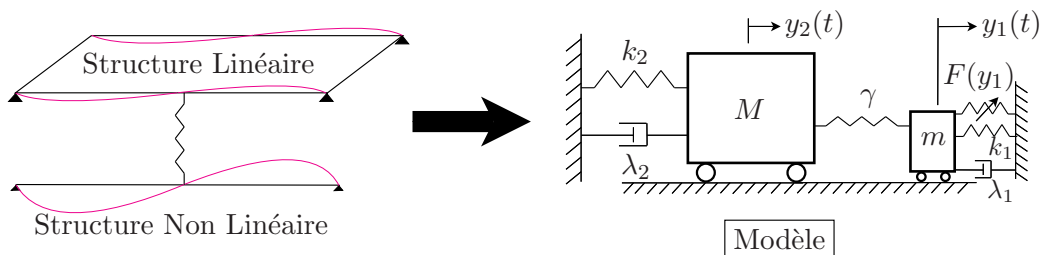


FIG. 2.14 – Système général à deux degrés de liberté

Selon la deuxième loi de Newton du mouvement (si l'oscillateur non linéaire (de masse m) est noté 1 et l'oscillateur linéaire (de masse M) est noté 2) :

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + \lambda_1\dot{y}_1 + k_1y_1 + F(y_1) + \gamma(y_1 - y_2) = 0, \\ M\ddot{y}_2 + \lambda_2\dot{y}_2 + k_2y_2 + \gamma(y_2 - y_1) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Les points représentent la différentiation par rapport à la variable indépendante t (temps).

Le faible couplage est assuré en exigeant que γ soit faible, et toutes les autres variables sont supposées être des quantités d'ordre 1.

Il est supposé que $m < M$ (l'objectif est d'avoir $m \ll M$).

La structure linéaire est excitée par une impulsion. On considère donc des oscillations libres des structures avec les conditions initiales : $y_1(0) = \dot{y}_1(0) = y_2(0) = 0$ et $\dot{y}_2(0) = \sqrt{2h}$ où h est l'énergie du système à $t = 0^+$.

Après cette mise en équation (où nous avons le même terme de couplage $\pm\gamma(y_1 - y_2)$ dans les deux équations pour être en mesure d'utiliser le système hamiltonien sous-jacent comme dans [Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001]), diverses nonlinéarités peuvent être analysées.

2.2.2 Nonlinéarité régulière

Premièrement, une nonlinéarité générale $F(y_1) = Cy_1^{2n+1}$, $n \geq 1$ est choisie pour sa propriété de régularité. On considère

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + \lambda_1\dot{y}_1 + k_1y_1 + Cy_1^{2n+1} + \gamma(y_1 - y_2) = 0, \quad n \geq 1, \\ M\ddot{y}_2 + \lambda_2\dot{y}_2 + k_2y_2 + \gamma(y_2 - y_1) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Le comportement des structures peut être étudié par intégration numérique du système d'équations (2.11).

En choisissant divers paramètres : $n = 2$, $m = 0.1M$, $M = 1$, $k_2 = 0.9$, $k_1 = 0$, $C = 0.1$, $\gamma = 0.05$, $\lambda_1 = 0.01$, $\lambda_2 = 0.05$, et des conditions initiales $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $\dot{y}_1(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = \sqrt{2h}$, où h (l'énergie du système à $t = 0^+$) varie, le pompage énergétique se produit, comme décrit dans [Gendelman et al., 2001].

En effet, *le pompage énergétique dans un système faiblement couplé a lieu au-dessus d'une valeur spécifique du niveau d'énergie initial (force de l'excitation)* comme montré sur la Figure 2.15.

Pour $h = 0.01$ (cas a)), les deux oscillateurs réalisent des oscillations libres amorties et le pompage énergétique ne se produit pas, puisque la plupart de l'énergie est conservée dans l'oscillateur linéaire directement excité. En augmentant le niveau d'énergie initiale à $h = 0.15$ (cas b)), on observe que le transfert d'énergie entre l'oscillateur linéaire directement excité et l'oscillateur non linéaire non excité se produit : après un état initial transitoire, la plus grande partie de l'énergie vibratoire est irréversiblement transférée ("pompe") vers l'oscillateur non linéaire.

De plus, en suivant la méthode développée dans [Gendelman et al., 2001], les orbites périodiques du système hamiltonien sous-jacent H^γ et des approximations analytiques peuvent être trouvées.

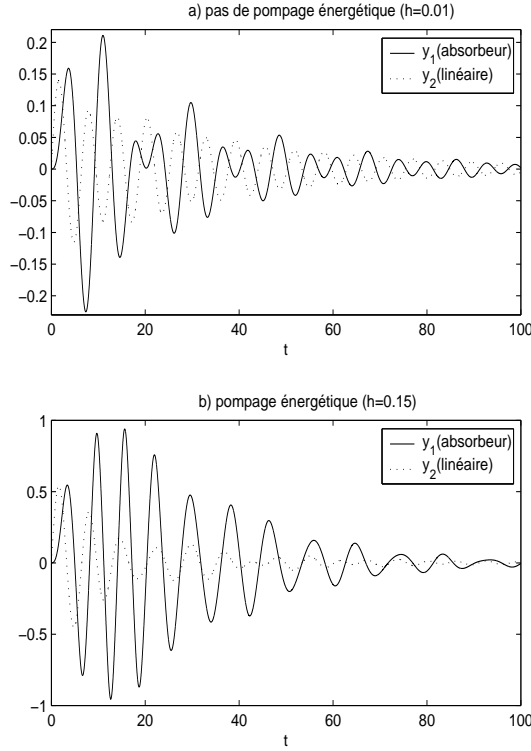


FIG. 2.15 – Réponses numériques transitoires du système (2.11) pour a) $h = 0.01$, b) $h = 0.15$.

En effet, l'hamiltonien suivant est obtenu : ($v_1 = \dot{y}_1$, $v_2 = \dot{y}_2$)

$$H^\gamma = P(y_1, v_1) + G(y_2, v_2) + \frac{\gamma}{2} H^1(y_1, v_1, y_2, v_2), \quad (2.12)$$

où

$$\begin{cases} P(y_1, v_1) = m \frac{v_1^2}{2} + k_1 \frac{y_1^2}{2} + C \frac{y_1^{2n+2}}{2n+2}, & G(y_2, v_2) = k_2 \frac{y_2^2}{2} + M \frac{v_2^2}{2}, \\ H^1(y_1, v_1, y_2, v_2) = (y_1 - y_2)^2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Cependant, l'efficacité du pompage doit être augmentée pour être capable de l'appliquer sur des structures réelles. C'est ainsi que [Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001] montrent que si les transitoires initiaux de l'oscillateur 1 ne peuvent pas atteindre une amplitude suffisamment grande, alors ils ne peuvent pas jouer le rôle d'orbites de liaisons pour exciter l'orbite sous-harmonique responsable du pompage énergétique et le phénomène de pompage énergétique ne peut pas se produire. On considère donc maintenant un système non linéaire qui sera capable de résoudre ce problème d'énergie minimale pour atteindre cette orbite.

2.2.3 Nonlinéarité irrégulière : système linéaire par morceaux

Maintenant, on envisage d'ajouter des structures avec des nonlinéarités irrégulières.

Tout d'abord, une nonlinéarité à raideur cubique (nonlinéarité régulière, qui provoque du pompage énergétique comme montré par les auteurs de [Gendelman et al., 2001]) ou une nonlinéarité régulière comme y_1^{2n+1} , $n \geq 1$, peuvent être remplacées par un système linéaire par morceaux (nonlinéarité irrégulière).

Ainsi les termes non linéaires sont approchés par un système linéaire par morceaux, ceci pour plusieurs raisons :

- on désire obtenir des expressions analytiques, ce qui sera possible avec un système linéaire par morceaux ;
- on veut être capable d'appliquer le phénomène de pompage énergétique, et il est plus aisé de réaliser un système linéaire par morceaux en pratique (système avec différentes raideurs comme montré sur la Figure 2.16) que de concevoir un système avec seulement une nonlinéarité cubique. Des termes "parasites" (comme des termes linéaires) apparaissent toujours dans les expérimentations.

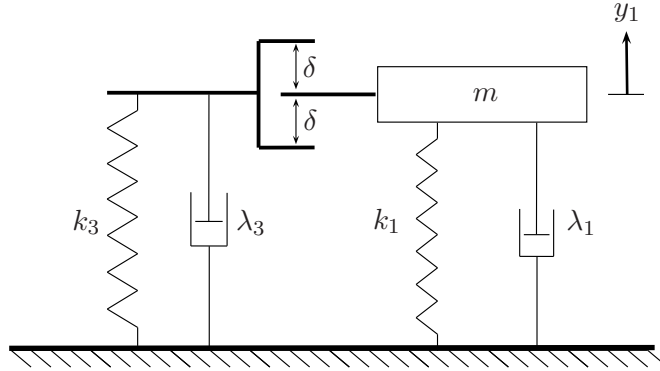


FIG. 2.16 – Conception d'un système linéaire par morceaux.

Il est cependant nécessaire de garder à l'esprit que si les termes non linéaires sont remplacés par un seul morceau (linéaire) le pompage énergétique ne peut pas se produire. Le système décrit sur la Figure 2.16 est un système bien connu de suspension avec une raideur multi-étages. Cette nonlinéarité se comporte comme des taquets et empêche le système d'avoir des déplacements relatifs excessifs. Ainsi, trois morceaux sont tout d'abord choisis (avec $\lambda_3 = 0$). Le système suivant est obtenu :

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + \lambda_1\dot{y}_1 + G(y_1, \delta) - \gamma(y_2 - y_1) = 0, \\ M\ddot{y}_2 + \lambda_2\dot{y}_2 + k_2y_2 - \gamma(y_1 - y_2) = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

avec

$$G(y_1, \delta) = \begin{cases} k_1y_1 & \text{si } -\delta < y_1 < \delta, \\ (k_1 + k_3)y_1 + k_3\delta & \text{si } y_1 < -\delta, \\ (k_1 + k_3)y_1 - k_3\delta & \text{si } y_1 > \delta. \end{cases} \quad (2.15)$$

En ajustant les paramètres δ , k_1 et k_3 , une bonne approximation des termes non linéaires peut être obtenue et le pompage énergétique se produit avec la résonance du système non linéaire comme montré sur la Figure 2.17 où $\delta = 0.4$, $k_1 = 0.02$ et $k_3 = 0.1$ ($\gamma = 0.05$, $k_2 = 0.9$, $M = 1$, $m = 0.1M$, $h = 0.2$, $\lambda_1 = 0.015$, $\lambda_2 = 0.05$).

Ainsi, on peut étudier le pompage énergétique analytiquement. En considérant le système (2.14), la distribution d'énergie peut être analysée. Si les conditions initiales suivantes sont considérées :

$$y_1(0) = \dot{y}_1(0) = y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = \sqrt{2h}, \quad (2.16)$$

alors les énergies normalisées sont définies comme :

$$\begin{cases} E_{1N} = \left(m\frac{\dot{y}_1^2}{2} + H(y_1) + \lambda_1 \int_0^t \dot{y}_1^2(s)ds \right) / (Mh), \\ E_{2N} = \left(M\frac{\dot{y}_2^2}{2} + k_2\frac{y_2^2}{2} + \lambda_2 \int_0^t \dot{y}_2^2(s)ds \right) / (Mh), \end{cases} \quad (2.17)$$

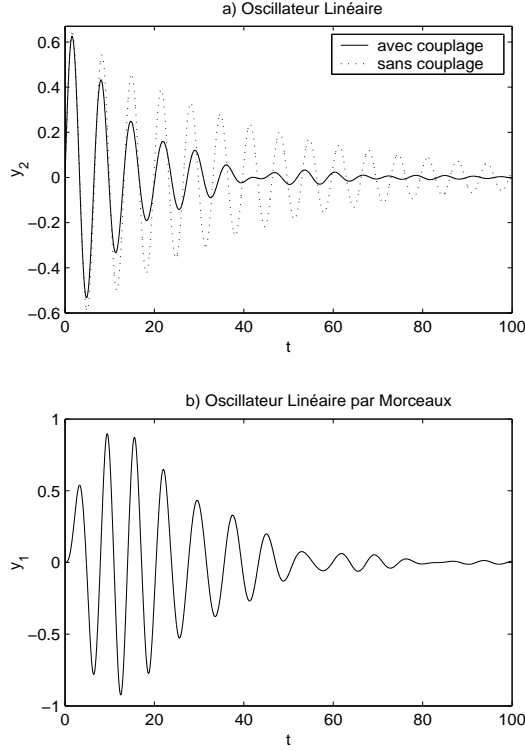


FIG. 2.17 – Vérification de l'apparition du pompage énergétique ($\delta = 0.4$, $k_1 = 0.016$ et $k_3 = 0.096$) : a) oscillateur linéaire avec et sans couplage , b) résonance de l'oscillateur non linéaire.

où

$$H(y_1) = \begin{cases} k_1 \frac{y_1^2}{2} & \text{si } -\delta < y_1 < \delta, \\ (k_1 + k_3) \frac{y_1^2}{2} + k_3 \delta y_1 + k_3 \frac{\delta^2}{2} & \text{si } y_1 < -\delta, \\ (k_1 + k_3) \frac{y_1^2}{2} - k_3 \delta y_1 + k_3 \frac{\delta^2}{2} & \text{si } y_1 > \delta. \end{cases} \quad (2.18)$$

L'énergie de couplage entre les oscillateurs est négligée. Sur la Figure 2.18, on décrit les décroissances numériques des énergies $E_{1N}(t)$ et $E_{2N}(t)$ correspondant aux paramètres $\delta = 0.4$, $k_1 = 0.02$ et $k_3 = 0.1$ ($\gamma = 0.05$, $k_2 = 0.9$, $M = 1$, $m = 0.1M$, $h = 0.15$, $\lambda_1 = 0.01$, $\lambda_2 = 0.05$) et aux conditions initiales $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $\dot{y}_1(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = \sqrt{2h}$, où h (l'énergie du système à $t = 0^+$) varie.

Pour $h = 0.005$, le pompage énergétique ne se produit pas et les énergies décroissent de façon presque exponentielle vers zéro, indiquant l'absence d'une capture de résonance. Pour des valeurs d'énergies plus élevées comme $h = 0.15$, le pompage énergétique se produit de l'oscillateur linéaire vers l'oscillateur non linéaire, ce qui est indiqué par le fait qu'au fur et à mesure que le temps progresse E_{1N} dépasse E_{2N} . De plus, à certains intervalles de temps il y a un "aplatissement" du tracé de E_{2N} , accompagné d'un comportement oscillatoire de E_{1N} : ces variations de tracés à partir de la décroissance exponentielle indiquent l'apparition d'une capture de résonance à des niveaux d'énergie plus élevés, un phénomène qui peut être directement associé au phénomène de pompage énergétique.

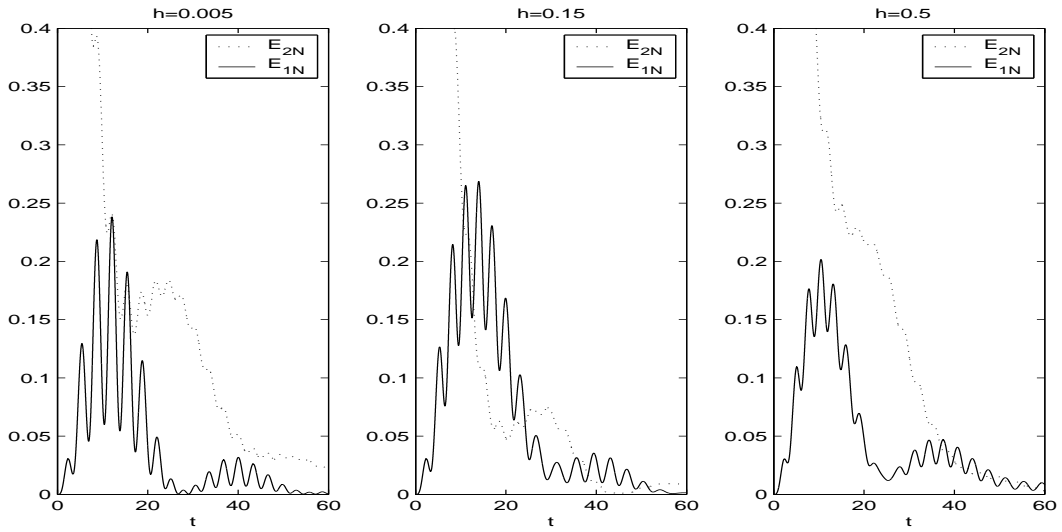


FIG. 2.18 – Transition de l'énergie pendant le phénomène de pompage énergétique.

En ce qui concerne la robustesse du pompage énergétique, l'influence des paramètres doit être analysée. Pour déterminer l'efficacité du pompage, une très courte durée de temps T peut être fixée (par exemple $T = 20s$ avec les valeurs précédentes de paramètres) pour calculer l'énergie dans l'oscillateur linéaire E_{2N} à cet instant T . Un pompage "optimal" sera déterminé quand cette énergie sera minimale et nous fournira des informations sur les paramètres pour l'apparition du pompage énergétique.

Si l'atténuation de l'énergie $\frac{E_{2N \text{ sans couplage}} - E_{2N \text{ avec couplage}}}{E_{2N \text{ sans couplage}}}$ à un court instant fixé T est supérieure à un certain niveau (par exemple 60%), alors nous conclurons que le pompage est "optimal", ce qui définira une "région" des paramètres pour le phénomène de pompage énergétique.

Par exemple, l'influence des variations de m et γ peut être analysée comme montré sur la Figure 2.19.

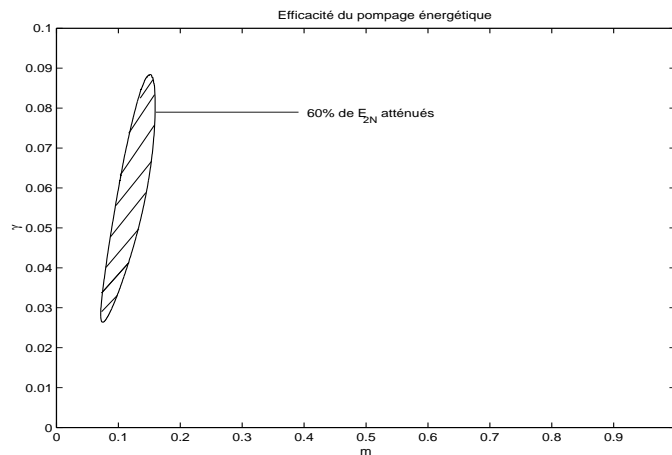


FIG. 2.19 – Efficacité du pompage énergétique dans le plan des paramètres (m, γ) avec $\gamma = 0.05$, $k_2 = 0.9$, $M = 1$, $h = 0.15$, $\lambda_1 = 0.01$, $\lambda_2 = 0.05$, $\delta = 0.4$, $k_1 = 0.02$ et $k_3 = 0.1$.

2.2.4 Système non linéaire chaotique avec raideur négative

Dans cette partie, on analyse l'ajout d'une structure non linéaire capable de répondre de façon chaotique dans la zone de démarrage du pompage énergétique pour être capable de provoquer du pompage énergétique pour de faibles niveaux d'énergie. On utilise la méthode de Melnikov qui prédit l'apparition de vibrations chaotiques [Guckenheimer et Holmes, 1983] en considérant le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) + \gamma g(x, t); \quad x = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (2.19)$$

où g est de période (fixée) T en t et γ est un réel.

Ici, $f(x)$ est un champ de vecteur Hamiltonien défini sur \mathbb{R}^2 (i.e. si $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$) alors il existe une fonction $H(u, v)$ telle que $f_1 = \frac{\partial H}{\partial v}$ et $f_2 = -\frac{\partial H}{\partial u}$, et $\gamma g(x, t)$ est une faible perturbation qui n'a pas besoin d'être hamiltonienne elle-même. On verra quelle peut être la forme de la structure non linéaire qui pourrait révéler du chaos. On considère alors notre système avec une nonlinéarité cubique :

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + \gamma\lambda_1\dot{y}_1 + (k_1 + \gamma)y_1 + Cy_1^3 - \gamma y_2 = 0, \\ M\ddot{y}_2 + \lambda_2\dot{y}_2 + (k_2 + \gamma)y_2 - \gamma y_1 = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

En définissant

$$\begin{cases} u = y_1, & v = \dot{y}_1, \\ w = y_2, & z = \dot{y}_2, \end{cases} \quad (2.21)$$

les équations (2.20) prennent la forme :

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = (-(k_1 + \gamma)u - Cu^3 + \gamma(w - \lambda_1 v)) / m, \\ \dot{w} = z, \\ \dot{z} = (-(k_2 + \gamma)w + \gamma u - \lambda_2 z) / M. \end{cases} \quad (2.22)$$

Cependant, le système non linéaire additionnel pourrait être conçu de telle manière à ce que $k_1 + \gamma$ soit négatif (on définit $k_1 + \gamma = -D$ avec $D > 0$ dans ce cas). On pourrait ainsi avoir une équation aux points fixes homoclines avec une raideur linéaire négative qui peut provoquer du chaos pour l'oscillateur non linéaire, car il est possible d'appliquer la méthode de Melnikov aux perturbations des orbites homoclines planes. Maintenant, seulement la première des deux équations de (2.22) est considérée :

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = \frac{D}{m}u - \frac{C}{m}u^3 + \frac{\gamma}{m}(y_2(t) - \lambda_1 v). \end{cases} \quad (2.23)$$

Pour $\gamma = 0$ le système (2.23) possède des centres pour $(u, v) = (\pm\sqrt{\frac{D}{C}}, 0)$ et un point selle hyperbolique en $(u, v) = (0, 0)$. L'ensemble de niveau

$$H(u, v) = \frac{mv^2}{2} - D\frac{u^2}{2} + C\frac{u^4}{4} \quad (2.24)$$

est composé de deux orbites homoclines, Γ_+^0 , Γ_-^0 et du point $p_0 = (0, 0)$. Les orbites homoclines non perturbées basées en $q_{\pm}^0(0) = (\pm\sqrt{\frac{2D}{C}}, 0)$ sont données par :

$$\begin{cases} q_+^0(t) = \left(\sqrt{\frac{2D}{C}} \operatorname{sech}(t), -\sqrt{\frac{2D}{C}} \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \right), \\ q_-^0(t) = q_+^0(t). \end{cases} \quad (2.25)$$

En supposant $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, alors $f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{D}{m}u - \frac{C}{m}u^3 \end{pmatrix}$ et $g(x) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (y_2(t) - \lambda_1 v)/m \end{pmatrix}$. Ensuite on calcule la fonction de Melnikov pour q_+^0 (le calcul pour q_-^0 est identique) en utilisant la forme donnée par [Guckenheimer et Holmes, 1983] :

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(t)) \wedge g(q^0(t), t + t_0) dt. \quad (2.26)$$

Ainsi,

$$M(t_0) = -\frac{1}{m} \sqrt{\frac{2D}{C}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(t) \tanh(t) y_2(t + t_0) dt - \lambda_1 \frac{2D}{Cm} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt}_{= \left[\frac{\tanh^2}{3} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 2/3}. \quad (2.27)$$

Cependant, selon (2.20)

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \frac{\gamma \lambda_1}{m} \dot{y}_1 + \frac{(k_1 + \gamma)}{m} y_1 + \frac{C}{m} y_1^3 - \frac{\gamma}{m} y_2 = 0, \\ \ddot{y}_2 + \frac{\lambda_2}{M} \dot{y}_2 + \frac{(k_2 + \gamma)}{M} y_2 - \frac{\gamma}{M} y_1 = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Puisque $M \gg m$, $\frac{\gamma}{M}$ est faible et le terme $\frac{\gamma}{M} y_1$ peut être négligé dans la deuxième équation de (2.28). En effet, dans cette section, l'objectif est l'analyse du mode résonant localisé : le but est d'analyser les conditions d'excitation du mode localisé résonant, donc $\frac{\gamma}{M} (y_2 - y_1)$ est négligé dans la deuxième équation. Ainsi, lorsque l'on prend en compte l'amortissement (et l'hypothèse qui précède), $y_2(t)$ prend la forme :

$$y_2(t) = A e^{-\frac{\lambda_2}{2M} t} \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{M}} t + \varphi\right) + O(\gamma). \quad (2.29)$$

L'hypothèse $y_2(t)$ T -périodique ($T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_2}{M}}}$) est faite (λ_2 étant faible, initialement $\lambda_2 = 0$ sera considéré, ce qui donne une fonction T -périodique sinon y_2 est pseudo-périodique et on réalise alors une approximation). Ainsi, dans le cas général ($\lambda_2 \neq 0$), la méthode des résidus donne

(sous l'hypothèse $\frac{\lambda_2}{2M} < 1$ et avec $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{M}}$) :

$$\begin{aligned}
M(t_0) &= \frac{A}{m} \sqrt{\frac{2D}{C}} \omega \pi e^{-\frac{\lambda_2}{2M} t_0} \frac{[\sin(\omega t_0 + \varphi) \cosh(\frac{\pi\omega}{2}) \cos(\frac{\pi\lambda_2}{4M}) - \cos(\omega t_0 + \varphi) \sinh(\frac{\pi\omega}{2}) \sin(\frac{\pi\lambda_2}{4M})]}{\cosh^2(\frac{\pi\omega}{2}) \cos^2(\frac{\pi\lambda_2}{4M}) + \sinh^2(\frac{\pi\omega}{2}) \sin^2(\frac{\pi\lambda_2}{4M})} \\
&+ \frac{A}{m} \sqrt{\frac{2D}{C}} \frac{\lambda_2}{2M} \pi e^{-\frac{\lambda_2}{2M} t_0} \frac{[\cos(\omega t_0 + \varphi) \cosh(\frac{\pi\omega}{2}) \cos(\frac{\pi\lambda_2}{4M}) + \sin(\omega t_0 + \varphi) \sinh(\frac{\pi\omega}{2}) \sin(\frac{\pi\lambda_2}{4M})]}{\cosh^2(\frac{\pi\omega}{2}) \cos^2(\frac{\pi\lambda_2}{4M}) + \sinh^2(\frac{\pi\omega}{2}) \sin^2(\frac{\pi\lambda_2}{4M})} \\
&\quad - \lambda_1 \frac{4D}{3Cm}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

- Cas $\lambda_2 = 0$: (y_2 est périodique)

$$y_2(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{M}} t + \varphi\right) + O(\gamma) \text{ pour } t > 0. \tag{2.31}$$

En utilisant le fait que les fonctions trigonométriques soient paires ou impaires, et puisque $\cos(\omega(t + t_0) + \varphi) = \cos(\omega t_0 + \varphi) \cos(\omega t) - \sin(\omega t_0 + \varphi) \sin(\omega t)$, $M(t_0)$ peut s'exprimer comme suit :

$$M(t_0) = \frac{1}{2} \frac{A}{m} \sqrt{\frac{2D}{C}} \sin(\omega t_0 + \varphi) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \sin(\omega t) dt - \lambda_1 \frac{4D}{3Cm}. \tag{2.32}$$

Le terme intégral est évalué par la méthode des résidus, ce qui donne :

$$M(t_0) = \frac{1}{2} \frac{A}{m} \omega \pi \sqrt{\frac{2D}{C}} \sin(\omega t_0 + \varphi) \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) - \lambda_1 \frac{4D}{3Cm}. \tag{2.33}$$

Selon la méthode de Melnikov, si les variétés stables et instables ont une intersection transversalement, l'apparition de chaos est fortement probable. En particulier, si $M(t_0)$ peut être annulée, il y a possibilité d'apparition du chaos. Pour que la fonction de Melnikov ait donc des zéros, il est nécessaire que :

$$\frac{\lambda_1}{A} \frac{8D \cosh(\frac{\pi\omega}{2})}{3C\pi\omega \sqrt{\frac{2D}{C}}} < 1. \tag{2.34}$$

Selon [Guckenheimer et Holmes, 1983], en définissant :

$$R^0(\omega) = \frac{8D \cosh(\frac{\pi\omega}{2})}{3C\pi\omega \sqrt{\frac{2D}{C}}}, \tag{2.35}$$

alors, si $\frac{A}{\lambda_1} > R^0(\omega)$, $W^s(p_\gamma^{t_0})$ a une intersection avec $W^u(p_\gamma^{t_0})$ pour γ suffisamment faible, et si $\frac{A}{\lambda_1} < R^0(\omega)$, alors $W^u(p_\gamma^{t_0}) \cap W^s(p_\gamma^{t_0}) = \emptyset$.

De plus, puisque $M(t_0)$ possède des zéros quadratiques quand $\frac{A}{\lambda_1} = R^0(\omega)$, alors il y a une courbe de bifurcations dans le plan (A, λ_1) pour chaque ω fixé, tangente à $A = R^0(\omega) \lambda_1$ en $A = \lambda_1$ sur laquelle se produit des tangences homoclines. En choisissant $k_2 = 0.9$, $M = 1$,

$m = 0.1M$, $k_1 = -0.15$, $\gamma\lambda_1 = 0.01$, $\gamma = 0.05$, $C = 0.1$, on a : $\lambda_1 = 0.2$, $D = -(\Omega_1^2 + \beta) = 0.1$, et on obtient la première tangence pour $A = 0.295$. Ensuite, on peut tracer la courbe de Melnikov, i.e. la courbe dans l'espace (ω, A) sur laquelle apparaît la première tangence. Cette courbe délimite l'espace : au dessus de cette courbe il y a possibilité d'apparition du chaos. Pour les valeurs précédentes (sauf ω), la courbe de Melnikov est représentée sur la Figure 2.20.

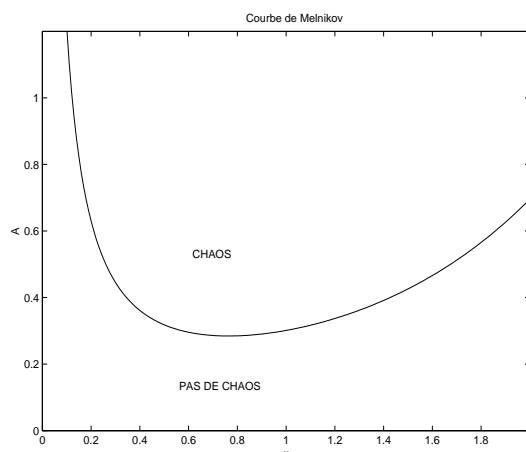


FIG. 2.20 – Possibilités d'apparition du chaos ($\lambda_1 = 0.2$).

De plus, $y_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + O(\gamma)$, avec $A = \sqrt{y_2(0)^2 + \frac{\dot{y}_2(0)^2}{\omega^2}}$, $\varphi = \arctan\left(-\frac{\dot{y}_2(0)^2}{\omega y_2(0)}\right)$.

On peut choisir $\dot{y}_2(0) = 0$ par commodité, ce qui donne $\varphi = 0$ et $A = y_2(0)$. Si ce n'est pas le cas, ce sont alors les deux paramètres A et φ qui modifient la courbe de Melnikov.

Il y a donc une frontière analytique pour savoir si on peut espérer obtenir du chaos ou non. Ainsi, en prenant $\lambda_1 = 0.2$, on peut se placer dans une région où l'on aura un chemin chaotique de démarrage.

Cependant, même si la méthode est analytique, on obtient seulement une région possible d'apparition du chaos et ce n'est pas une délimitation exacte (ce n'est pas une condition nécessaire et suffisante). Numériquement, on n'obtient pas forcément du chaos quand on se place juste au dessus de la courbe de Melnikov.

Avant d'étudier le cas $\lambda_2 \neq 0$ (amortissement dans l'oscillateur linéaire), on peut calculer les exposants de Lyapunov pour caractériser le chaos. En appliquant l'algorithme de Wolf, Swinney et Vastano (selon [Wolf et al., 1985]), les exposants de Lyapunov $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ peuvent être calculés, en particulier le plus grand exposant ρ_1 . Si $\rho_1 > 0$ et $\sum_{i=1}^4 \rho_i < 0$, alors l'état stationnaire est chaotique [Parker et Chua, 1989]. Ainsi, en prenant les valeurs précédentes avec : $k_2 = 1$, $A = 0.48$, $\lambda_2 = 0$ et on néglige γu dans l'oscillateur linéaire, le plus grand exposant est positif ($\rho_1 \simeq 0.18$) et la somme est négative ($\sum_{i=1}^4 \rho_i = -0.1$), comme montré sur la Figure 2.21. De plus, on peut noter que lorsque le chaos se produit, le plus grand exposant de Lyapunov est positif pendant la phase transitoire. On a donc du "chaos transitoire" dans la région de démarrage et du chaos asymptotique, ce qui était notre objectif. Maintenant, on peut ajouter le terme γu dans l'oscillateur linéaire et considérer $\lambda_2 \neq 0$. Même si l'on n'obtient pas de chaos (tous les exposants de Lyapunov sont négatifs pour un long t (l'état stationnaire est un point d'équilibre)), le plus grand exposant de Lyapunov est positif pendant un long

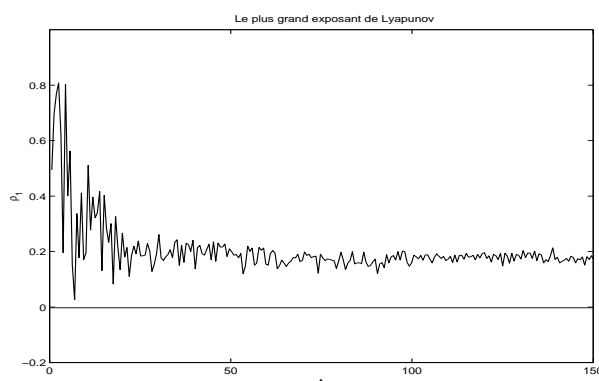


FIG. 2.21 – Le plus grand exposant de Lyapunov est positif : chaos ($\lambda_1 = 0.2$, $y_2(0) = 0.48$).

moment (et $\sum_{i=1}^4 \rho_i = -0.15 < 0$), comme montré sur la Figure 2.22 (pendant 70 secondes) ($\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.05$, $y_1(0) = \dot{y}_1(0) = y_2(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = 1$) ; on a donc du “chaos transitoire”.

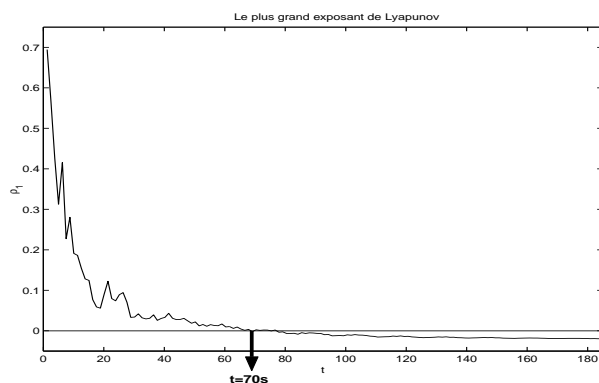


FIG. 2.22 – Le plus grand exposant de Lyapunov avec du “chaos transitoire” ($\lambda_2 = 0.05$, $\dot{y}_2(0) = 1$).

Grâce à ce “chaos transitoire”, le pompage énergétique se produit avec une très bonne efficacité, comme montré sur la Figure 2.23, car on constate quasiment une extinction des vibrations de la structure linéaire.

2.2.5 Application à un bâtiment

Comme application en Génie Civil, le cas d’un bâtiment dont les vibrations doivent être atténuées, pour sa survie par exemple, peut être considéré. La plupart des résultats obtenus dans la partie précédente semblent prometteurs, mais il est important de savoir qu’ils ont été obtenus dans des “conditions idéales”. Dans le but d’aboutir à des applications, certains problèmes “réels” doivent être traités en prenant en compte les modèles de la structure primaire. Comme nous l’avons vu dans la précédente partie, nous pouvons ajouter un oscillateur à nonlinéarité cubique avec une raideur négative ou un système linéaire par morceaux pour provoquer du pompage énergétique avec une efficacité élevée. Le schéma d’un tel système est représenté sur la Figure 2.24.

2.2.5.1 Modèle de bâtiment à étages

Pour analyser l’efficacité du pompage énergétique, on étudie les vibrations d’un modèle de bâtiment à huit étages, idéalisé par un système linéaire à 8 degrés de liberté (les données pro-

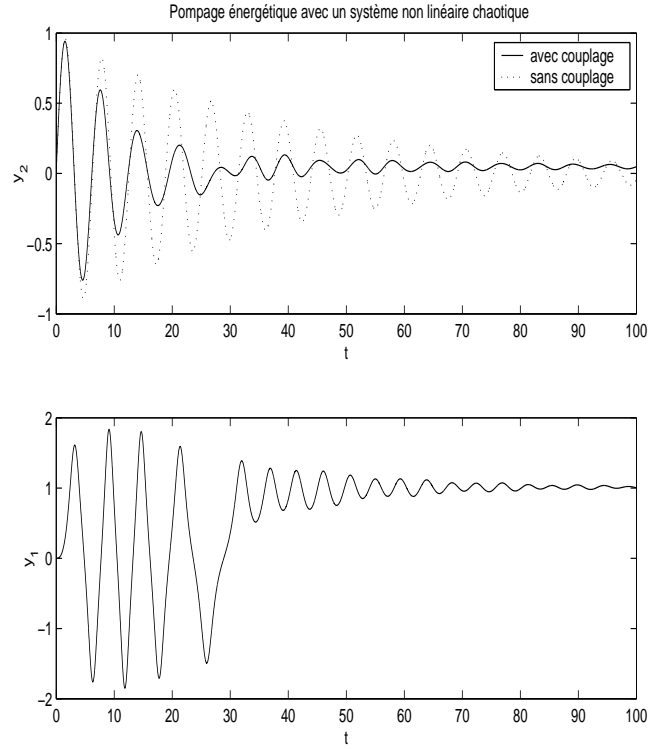


FIG. 2.23 – Pompage énergétique (avec du “chaos transitoire”) ($\lambda_2 = 0.05$, $\dot{y}_2(0) = 1$).

viennent de [Roberti, 1994]) comme montré sur la Figure 2.25. $x_0(t)$ dénote le déplacement de la 8^{ème} masse au point O , m_i ($i = 1..8$) sont les masses de chaque étage et p est le point où le système est excité.

Seul le mouvement latéral selon une dimension des étages est pris en compte (avec une impulsion latérale). On considère le bâtiment avec l’attache non linéaire locale faiblement connectée à un point ($x = L$), comme dans [Vakakis et al., 2003]. La raideur de couplage entre les parties linéaires et non linéaires est supposée être linéaire et faible, d’ordre γ . De plus, la liaison entre les deux systèmes est supposée être dans une seule dimension. Pour chaque étage, la masse, la raideur élastique et l’amortissement interne sont présentés sur la Figure 2.26.

Une analyse modale est réalisée : la pulsation et l’amortissement sont calculés et donnés dans la Figure 2.27. La réponse de la structure linéaire $x_0(t)$ au point d’attache O est exprimée sous la forme modale suivante :

$$x_0(t) = \sum_{i=1}^N \phi_0^{(i)} q_i(t), \quad (2.36)$$

où $\phi_0^{(i)}$ dénote l’élément à la position O du i ème vecteur propre normalisé (par rapport à la masse). En général, $\phi_j^{(i)}$ dénote l’élément à la position j du vecteur propre normalisé (par rapport à la masse) $\hat{\phi}^{(i)}$ de la structure linéaire non couplée avec $\gamma = 0$. Dans la relation (2.36), il est supposé que la structure linéaire non couplée possède N vecteurs propres normalisés par rapport à la masse $\hat{\phi}^{(i)}$ correspondant à N valeurs propres distinctes ω_i , $i = 1, \dots, N$. En prenant en compte (2.36), les N équations du mouvement du système combiné sont exprimées sous la forme

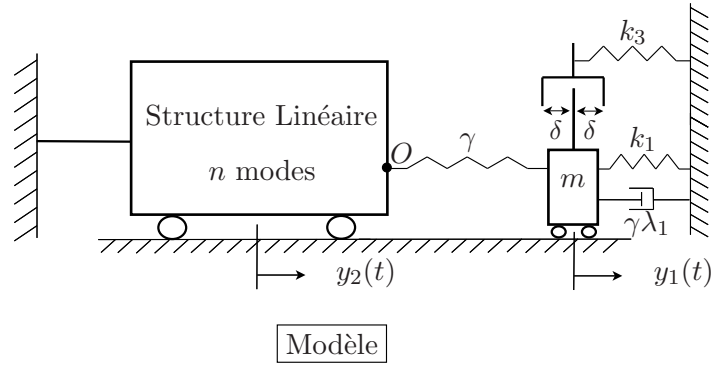


FIG. 2.24 – Système considéré pour des applications.

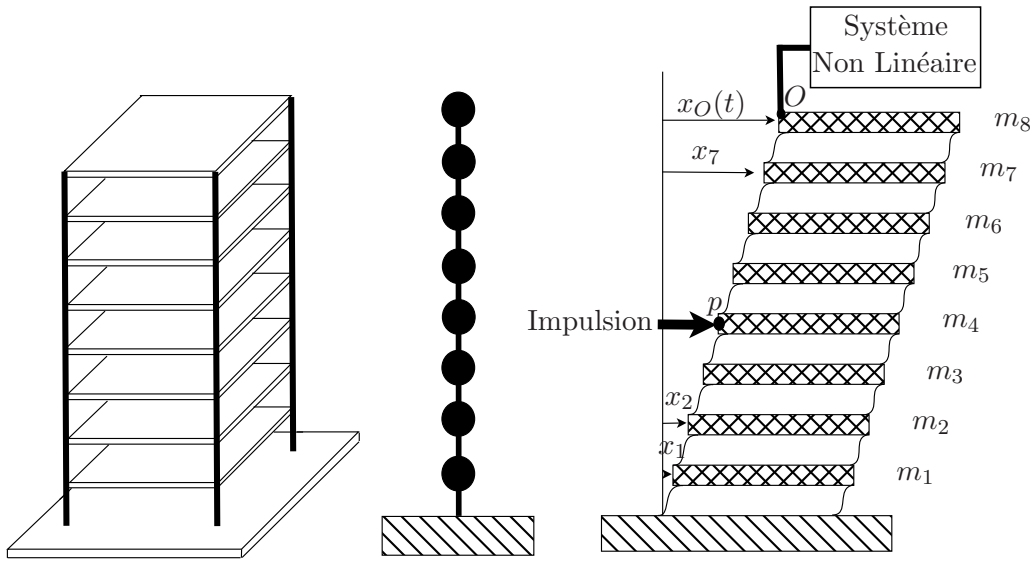


FIG. 2.25 – Modèle de bâtiment considéré.

suivante :

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1(t) + \gamma\lambda_1\dot{y}_1(t) + k_1y_1(t) + G(y_1(t)) + \gamma \left(y_1(t) - \sum_{i=1}^N \phi_0^{(i)} q_i(t) \right) = 0, \\ \ddot{q}_k(t) + 2\zeta_k\omega_k\dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) + \gamma \left(\sum_{i=1}^N \phi_0^{(i)} \phi_0^{(k)} q_i(t) - \phi_0^{(k)} y_1(t) \right) = 0, \quad k = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.37)$$

avec

$$G(y_1, \delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\delta < y_1 < \delta, \\ k_3y_1 + k_3\delta & \text{si } y_1 < -\delta, \\ k_3y_1 - k_3\delta & \text{si } y_1 > \delta, \end{cases} \quad (2.38)$$

et où les forces d'amortissement visqueux sont faibles et dont l'ordre est déterminé par le faible paramètre γ . Comme nous considérons des vecteurs propres normalisés par rapport à la masse (${}^T\hat{\phi}^{(i)}\mathcal{M}\hat{\phi}^{(i)} = 1$ avec \mathcal{M} la matrice de masse), alors : $\phi_0^{(1)} = 8,9531 \cdot 10^{-4}$, $\phi_0^{(2)} = 9,2553 \cdot 10^{-4}$, $\phi_0^{(3)} = 8,0527 \cdot 10^{-4}$, $\phi_0^{(4)} = 6,3940 \cdot 10^{-4}$, $\phi_0^{(5)} = 3,9548 \cdot 10^{-4}$, $\phi_0^{(6)} = 1,4478 \cdot 10^{-4}$, $\phi_0^{(7)} = -2,5904 \cdot 10^{-5}$, $\phi_0^{(8)} = 2,047 \cdot 10^{-6}$.

Paramètres de la structure			
Etage No.	Masse m_i en kg	Raideur k_i en kN.m^{-1}	Amortissement c_i en kN.sm^{-1}
1	345600	$3,4 \cdot 10^5$	490
2	345600	$3,26 \cdot 10^5$	467
3	345600	$2,85 \cdot 10^5$	410
4	345600	$2,69 \cdot 10^5$	386
5	345600	$2,43 \cdot 10^5$	348
6	345600	$2,07 \cdot 10^5$	298
7	345600	$1,69 \cdot 10^5$	243
8	345600	$1,37 \cdot 10^5$	196

FIG. 2.26 – Caractéristiques du bâtiment.

Paramètres modaux		
Mode No.	Pulsation ω_i en rad.s^{-1}	Ratio d'amort. ζ_i en %
1	5,24	0,37
2	13,99	1,00
3	22,56	1,61
4	30,23	2,17
5	36,91	2,64
6	43,06	3,09
7	49,55	3,55
8	55,98	4,01

FIG. 2.27 – Analyse modale.

Il est supposé que la structure linéaire est sollicitée par une excitation impulsive $F(t) = Y\delta(t)\delta(y - y_p)$ à la position p (où y et y_p sont les coordonnées horizontales). La réponse du système à $t = 0^+$ est une oscillation libre avec les conditions initiales, $q_i(0^+) = 0$, $\dot{q}_i(0^+) = Y\phi_p^{(i)}$, $y_1(0^+) = \dot{y}_1(0^+) = 0$, $i = 1, \dots, N$. Ici, par exemple on peut choisir la position p (localisation de l'excitation) située au niveau de la masse m_4 ($\phi_p^{(1)} = 5,0241 \cdot 10^{-4}$, $\phi_p^{(2)} = -7,3551 \cdot 10^{-4}$, $\phi_p^{(3)} = 1,2713 \cdot 10^{-5}$, $\phi_p^{(4)} = 7,01 \cdot 10^{-4}$, $\phi_p^{(5)} = -5,7130 \cdot 10^{-4}$, $\phi_p^{(6)} = -1,9794 \cdot 10^{-4}$, $\phi_p^{(7)} = -0,001$, $\phi_p^{(8)} = 4,7937 \cdot 10^{-4}$) et on étudie le déplacement de la masse m_8 (i.e. $x_0(t)$). On ajoute un système linéaire par morceaux. Dans notre cas, nous avons $M = 345600 \times 8 = 2764800 \text{kg}$. Avec $m = 0,01M$, $\gamma = 6 \cdot 10^5 \text{N.m}^{-1}$, $Y = 3 \cdot 10^5 \text{N}$, $\gamma\lambda_1 = 16 \cdot 10^3 \text{N.s.m}^{-1}$, $k_1 = 5 \cdot 10^4 \text{N.m}^{-1}$, $k_3 = 32 \cdot 10^4 \text{N.m}^{-1}$, $\delta = 0,03 \text{m}$, le pompage énergétique se produit comme montré sur la Figure 2.28. Sur cette figure, on peut voir *a*) la réponse de la structure au point O , *b*) la réponse du premier mode, *c*) la réponse du deuxième mode et *d*) la résonance du système non

linéaire. L'attache non linéaire est en interaction de résonance avec le premier mode.

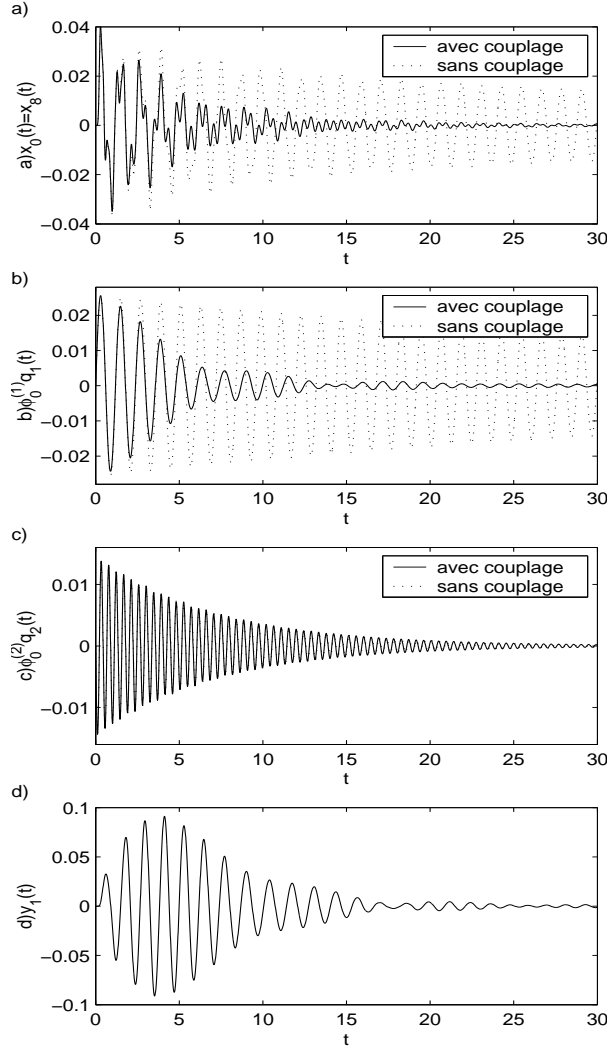


FIG. 2.28 – Pompage énergétique du bâtiment ($m = 0.01M$).

Cependant, pour concevoir un tel système, on a besoin d'attacher le système non linéaire au point O . Il est difficile, en pratique, de relier le système non linéaire au sol car le bâtiment peut être de grande hauteur. C'est pourquoi on peut imaginer et concevoir un système avec une autre masse qui jouera le rôle du sol, comme montré sur la Figure 2.29. Dans ce cas, on ajoute une nonlinéarité cubique. Le système d'équations est maintenant :

$$\begin{cases} m_s \ddot{y}_s(t) + \gamma \lambda_1 (\dot{y}_s(t) - \dot{y}_1(t)) + C(y_s(t) - y_1(t))^3 = 0, \\ m \ddot{y}_1(t) + \gamma \lambda_1 (\dot{y}_1(t) - \dot{y}_s(t)) + C(y_1(t) - y_s(t))^3 + \gamma \left(y_1(t) - \sum_{i=1}^N \phi_0^{(i)} q_i(t) \right) = 0, \\ \ddot{q}_k(t) + 2\zeta_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) + \gamma \left(\sum_{i=1}^N \phi_0^{(i)} \phi_0^{(k)} q_i(t) - \phi_0^{(k)} y_1(t) \right) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.39)$$

Avec les valeurs précédentes ($m = 0,01M$, $\gamma = 6.10^5 \text{N.m}^{-1}$, $Y = 3.10^5 \text{N}$, $\gamma \lambda_1 = 16.10^3 \text{N.s.m}^{-1}$, $C = 6.10^7 \text{N.m}^{-3}$) et avec $m_s = 0,023M$, le même phénomène de pompage énergétique que

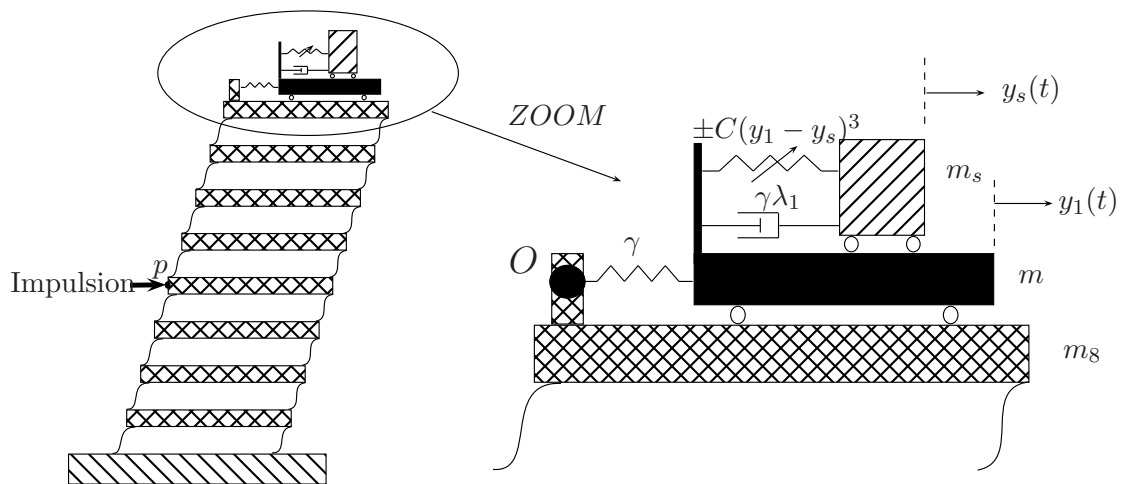


FIG. 2.29 – Système considéré avec huit degrés de liberté pour la structure linéaire, et deux degrés de liberté pour la structure non linéaire.

décrit précédemment se produit, comme présenté sur la Figure 2.30 ($y_s(0) = \dot{y}_s(0) = 0$). Dans cet exemple, la masse totale ajoutée est : $m + m_s = M/30$. Ainsi, on peut ajouter ce système

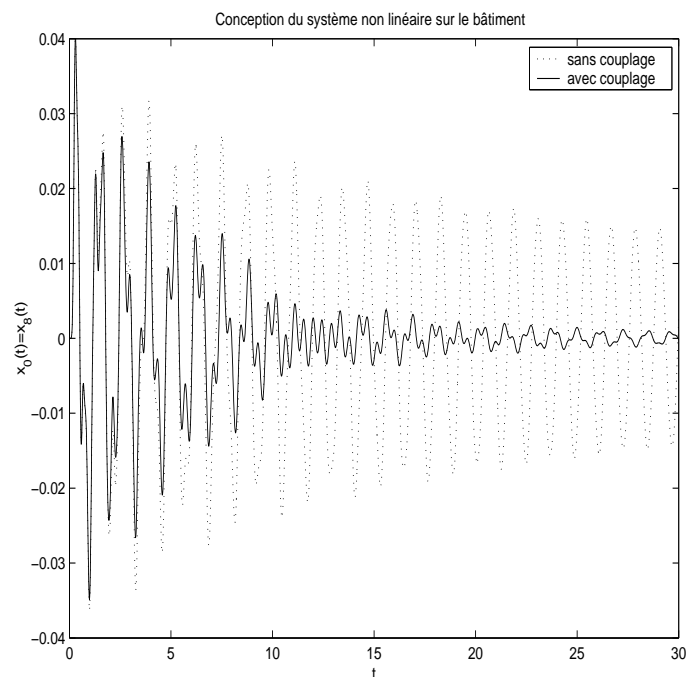


FIG. 2.30 – Pompage énergétique du bâtiment ($m + m_s = M/30$).

non linéaire à n'importe quel étage.

2.2.5.2 Bâtiment flexible continu

Dans cette partie, on considère un bâtiment flexible continu qui est modélisé par une poutre symétrique de hauteur L et de section D^2 , comme illustré sur la Figure 2.31. On note y la composante verticale d'un point de l'axe neutre, $x_a(y, t)$ et $x_b(y, t)$ les vecteurs déplacements relatifs horizontaux dans les directions a et b respectivement. Si les mouvements de torsion sont négligés,

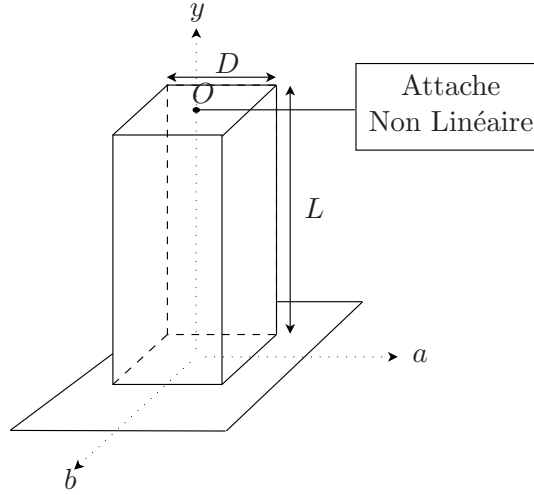


FIG. 2.31 – Modèle de bâtiment .

les équations générales sont obtenues selon la théorie d'Euler-Bernoulli [Timoshenko, 1954] :

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^4 x_a(y, t)}{\partial y^4} + C \frac{\partial x_a(y, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 x_a(y, t)}{\partial t^2} = f_a(y, t), \\ EI \frac{\partial^4 x_b(y, t)}{\partial y^4} + C \frac{\partial x_b(y, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 x_b(y, t)}{\partial t^2} = f_b(y, t), \end{cases} \quad (2.40)$$

où EI est la rigidité de flexion (I l'inertie et E le module d'Young), C l'amortissement par unité de longueur et m la masse du bâtiment par unité de longueur. $f_a(y, t)$ et $f_b(y, t)$ représentent les forces externes appliquées à la structure dans les directions x_a et x_b respectivement. Ensuite les modes normaux de vibrations sont étudiés.

$$\begin{cases} x_a(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{a,i}(y) q_{a,i}(t), \\ x_b(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{b,i}(y) q_{b,i}(t). \end{cases} \quad (2.41)$$

On multiplie alors les équations du système (2.41) par $\phi_{a,i}$ et $\phi_{b,i}$ respectivement, et on intègre le long de la fibre moyenne y de 0 à L , et les équations modales sont obtenues :

$$\begin{cases} \ddot{q}_{a,i}(t) + 2\zeta_{a,i}\omega_{a,i}\dot{q}_{a,i}(t) + \omega_{a,i}^2 q_{a,i}(t) = \nu_{a,i}, \quad i = 1 \dots \infty, \\ \ddot{q}_{b,i}(t) + 2\zeta_{b,i}\omega_{b,i}\dot{q}_{b,i}(t) + \omega_{b,i}^2 q_{b,i}(t) = \nu_{b,i}, \quad i = 1 \dots \infty. \end{cases} \quad (2.42)$$

$\nu_{a,i}$ et $\nu_{b,i}$ représentent les forces externes selon le i ème-mode dans les deux directions,

$$\begin{cases} \nu_{a,i} = \frac{1}{mL} \int_0^L \phi_{a,i}(y) f_a(y, t) dy, \\ \nu_{b,i} = \frac{1}{mL} \int_0^L \phi_{b,i}(y) f_b(y, t) dy, \end{cases} \quad (2.43)$$

en normalisant par rapport à la masse les fonctions modales

$$M \int_0^L \phi_{a,i}^2(y) dy = M \int_0^L \phi_{b,i}^2(y) dy = 1. \quad (2.44)$$

2.2.5.2.1 Excitation déterministe

Pour le bâtiment considéré, on obtient :

$$\phi_{a,i}(y) = \phi_{b,i}(y) = K \left\{ \cosh\left(\frac{\lambda_i y}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i y}{L}\right) - \sigma_i \left[\sinh\left(\frac{\lambda_i y}{L}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_i y}{L}\right) \right] \right\}, \quad (2.45)$$

où $\lambda_1 = 1.8751$, $\sigma_1 = 0.73409$, $\lambda_2 = 4.69409$, $\sigma_2 = 1.01847$, $\lambda_3 = 7.85475$, $\sigma_3 = 0.99922\dots$ et $K = \frac{1}{\sqrt{mL}}$. Nous pouvons aussi calculer une quantité qui nous servira par la suite :

$$\alpha = \frac{1}{mL} \int_0^L m \phi_{a,1}(y) dy = 0,7803. \quad (2.46)$$

De plus, on suppose que seules les impulsions dans la direction a sont transmises au bâtiment, la structure est encadrée. Finalement nous pouvons considérer uniquement les trois premiers modes sans couplage dans la direction a . Comme application, nous pouvons considérer ce bâtiment de grande hauteur : $L = 300\text{m}$, $D = 30\text{m}$ (50% de la section est en béton), $m = 16300\text{kg.m}^{-1}$, $E = 45\text{GPa}$ (béton). Avec ces valeurs on obtient :

$$M = 4890000\text{kg}, \quad \omega_1 = 4.216\text{rad.s}^{-1}, \quad \omega_2 = 26.422\text{rad.s}^{-1}, \quad \omega_3 = 73.982\text{rad.s}^{-1}. \quad (2.47)$$

Donc, sans couplage (en définissant le coefficient d'amortissement spécifique $\zeta_i = 2\%$) :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0, \\ \ddot{q}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0, \\ \ddot{q}_3 + 2\zeta_3\omega_3\dot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 = 0. \end{cases} \quad (2.48)$$

On considère le bâtiment avec l'attache locale non linéaire faiblement reliée à un point O ($y = L$) comme procédé dans [Vakakis et al., 2003]. La raideur de couplage entre les parties linéaires et non linéaires est supposée être linéaire et faible, d'ordre γ . De plus, la liaison entre les deux systèmes est supposée être à une dimension. Il est supposé que la structure linéaire est sollicitée par une excitation de type pulse $F(t) = Y\delta(t)\delta(y - y_p)$ à la position p (où y et y_p sont les coordonnées). Ici, on peut choisir p situé au milieu de la poutre ($y_p = \frac{L}{2}$) par exemple ; la réponse du système à $t = 0^+$ est une oscillation libre avec des conditions initiales, $q_i(0^+) = 0$, $\dot{q}_i(0^+) = Y\phi_p^{(i)}$, $y_1(0^+) = \dot{y}_1(0^+) = 0$.

Donc en ne retenant que les trois premiers modes :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{nl}\ddot{y}_1(t) + \gamma\lambda_1\dot{y}_1(t) + k_1y_1(t) + F(y_1(t)) + \gamma \left(y_1(t) - \sum_{i=1}^3 \phi_0^{(i)} q_i(t) \right) = 0, \\ \ddot{q}_1(t) + 2\zeta_1\omega_1\dot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) + \gamma \left(\sum_{i=1}^3 \phi_0^{(i)} \phi_0^{(1)} q_i(t) - \phi_0^{(1)} y_1(t) \right) = 0, \\ \ddot{q}_2(t) + 2\zeta_2\omega_2\dot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) + \gamma \left(\sum_{i=1}^3 \phi_0^{(i)} \phi_0^{(2)} q_i(t) - \phi_0^{(2)} y_1(t) \right) = 0, \\ \ddot{q}_3(t) + 2\zeta_3\omega_3\dot{q}_3(t) + \omega_3^2 q_3(t) + \gamma \left(\sum_{i=1}^3 \phi_0^{(i)} \phi_0^{(3)} q_i(t) - \phi_0^{(3)} y_1(t) \right) = 0. \end{array} \right. \quad (2.49)$$

En considérant nos valeurs précédentes pour l'application $(x_a(y, t) = \sum_{i=1}^3 \phi_{a,i}(y)q_i(t))$:

$$\phi_0^{(1)} = 2K \quad \phi_0^{(2)} = -2K, \quad \phi_0^{(3)} = 2.006K.$$

Pour la nonlinéarité, on peut choisir un système linéaire par morceaux qui est relié au point O, comme déjà vu auparavant. Avec $\delta = 0.3\text{m}$, $m_{nl} = M/20$, $\gamma = 6.10^6\text{N.m}^{-1}$, $k_1 = 9.10^5\text{N.m}^{-1}$, $\gamma\lambda_1 = 2.10^5\text{N.s.m}^{-1}$, $k_3 = 54.10^5\text{N.m}^{-1}$ et avec $p = \frac{L}{2}$ (excitation à $y_p = \frac{L}{2}$: $\phi_p^{(1)} = 0.679K$, $\phi_p^{(2)} = 1.427K$, $\phi_p^{(3)} = 0.039K$); on choisit $Y = 8.10^6\text{N}$, le pompage énergétique se produit comme montré sur la Figure 2.32. En effet, à $t = 5\text{s}$, l'atténuation est quasiment de 50%.

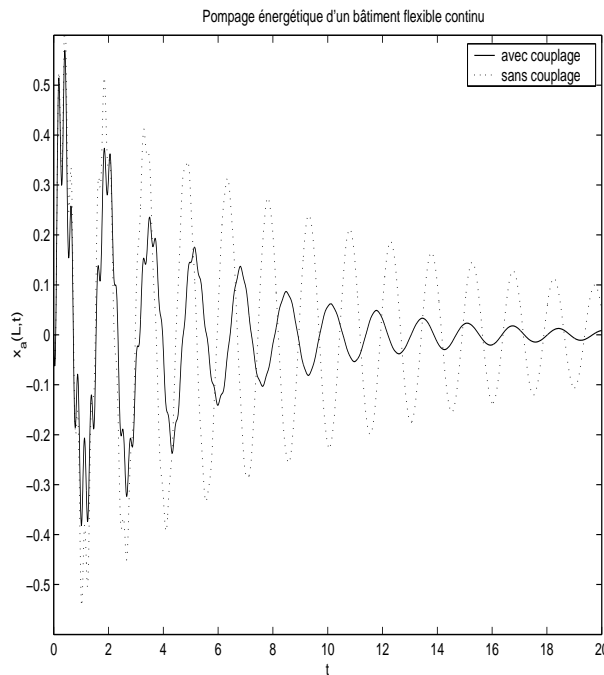


FIG. 2.32 – Pompage énergétique du bâtiment flexible continu ($m = M/20$).

2.2.5.2.2 Excitation stochastique

Dans le cas d'un modèle de bâtiment flexible continu où seulement le premier mode dans la direction a est considéré, il est possible de générer une excitation stochastique, notamment pour être capable d'appliquer le pompage énergétique pour les séismes. Cependant, l'excitation simulée doit avoir une durée, une intensité et un contenu fréquentiel réalistes représentant des conditions physiques. En raison de la nature complexe de la formation d'ondes sismiques et de leur cheminement avant d'atteindre la structure, une approche stochastique paraît être la mieux adaptée pour générer des séismes artificiels. De ce point de vue, des modèles stochastiques à la fois stationnaires et non stationnaires ont été extensivement utilisés dans la littérature pour simuler des mouvements de tremblements de terre. Ainsi le modèle de bruit blanc filtré stationnaire de Kanai-Tajimi a été utilisé par un grand nombre de chercheurs et ingénieurs [Kanai, 1957] et [Tajimi, 1960].

Dans ce modèle original de Kanai-Tajimi, les tremblements de terre sont traités comme

des processus aléatoires stationnaires. Une version améliorée du modèle fut introduite par les auteurs de [Ahmadi et Fan, 1990] pour capturer la caractéristique non stationnaire des enregistrements de tremblements de terre réels. Ce modèle de Kanai-Tajimi généralisé non-stationnaire est représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x}_f + 2\zeta_g(t)\omega_g(t)\dot{x}_f + \omega_g^2(t)x_f = \mathcal{N}(t), \\ \ddot{x}_g = -(2\zeta_g(t)\omega_g(t)\dot{x}_f + \omega_g^2(t)x_f)e(t), \end{cases} \quad (2.50)$$

où x_f est la réponse filtrée, ω_g est la fréquence du sol dépendante du temps, ζ_g est le coefficient d'amortissement du sol effectif, \ddot{x}_g est l'accélération du sol en sortie, et $e(t)$ est la fonction d'amplitude enveloppe. Dans (2.50), $\mathcal{N}(t)$ est un processus stationnaire gaussien de bruit blanc :

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[\mathcal{N}(t_1)\mathcal{N}(t_2)] = 2\pi G_0 d(t_1 - t_2), \quad (2.51)$$

où G_0 est l'intensité constante de pouvoir spectral, et d est la fonction Dirac. L'équation (2.50) fournit des séries de bruits blancs filtrés stochastiques (en temps) avec un contenu fréquentiel approprié et une modulation d'amplitude pour l'accélération du sol, en particulier pendant les tremblements de terre. Le modèle peut donc être facilement utilisé pour l'analyse d'une réponse stochastique de structures soumises à des excitations de type séisme. Ici, $\zeta_g(t)$, $\omega_g(t)$ sont supposés être constants et l'enveloppe $e(t)$ est supposée dépendre du temps. $e(t)$ est choisie pour donner une excitation réaliste : durée et intensité réalistes. Ainsi, nous pouvons considérer le modèle de bâtiment flexible continu, comme montré sur la Figure 2.31. Les excitations du sol viennent d'un séisme qui est sur la gauche (comparé à la direction a), et dont l'épicentre est très éloigné du pied du bâtiment. Ainsi, seules les excitations dans la direction a sont transmises au bâtiment, donc $f_b(y, t) = 0$. La structure est encastrée, i.e. sa base qui constitue son interface mécanique avec l'environnement externe est isostatique ou infiniment rigide. A l'instant de l'excitation de type séisme, les seules forces d'excitation dynamique de la structure sont celles d'inertie produites par les mouvements de la base dans la direction a . La force modale est dans ce cas écrite :

$$\nu_1(t) = \frac{1}{mL} \int_0^L -m\phi_{a,1}(y)\ddot{x}_s(t)dy = -\alpha\ddot{x}_s(t), \quad (2.52)$$

si $\ddot{x}_s(t)$ représentent les accélérations du sol dans la direction a .

Ainsi, en considérant le système classique (structure non linéaire attachée à la structure linéaire en retenant uniquement le premier mode (Equation (2.49))) et en introduisant le modèle Kanai-Tajimi comme vu précédemment (on cherche la réponse en $O : y = L$), nous avons :

$$\begin{cases} m_{nl}\ddot{y}_1(t) + \gamma\lambda_1\dot{y}_1(t) + k_1y_1(t) + F(y_1(t)) + \gamma(y_1(t) - \phi_0^{(1)}q_1(t)) = 0, \\ \ddot{q}_1(t) + 2\zeta_1\omega_1\dot{q}_1(t) + \omega_1^2q_1(t) + \gamma(\phi_0^{(1)2}q_1(t) - \phi_0^{(1)}y_1(t)) = \alpha(2\zeta_g\omega_g\dot{x}_f + \omega_g^2x_f)e(t), \\ \ddot{x}_f + 2\zeta_g\omega_g\dot{x}_f + \omega_g^2x_f = \mathcal{N}(t), \end{cases} \quad (2.53)$$

où $\mathcal{N}(t)$ dénote un bruit blanc.

On peut choisir un système linéaire par morceaux pour la structure non linéaire (par exemple le système vu dans (2.14, 2.15)) avec

$$F(y_1, \delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\delta < y_1 < \delta, \\ k_3y_1 + k_3\delta & \text{si } y_1 < -\delta, \\ k_3y_1 - k_3\delta & \text{si } y_1 > \delta. \end{cases}$$

On suppose que $X_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ q_1(t) \\ \dot{q}_1(t) \\ x_f(t) \\ \dot{x}_f(t) \end{pmatrix}$, $\mathcal{K}_1 = \begin{cases} -k_1 & \text{si } -\delta < y_1 < \delta, \\ -k_1 - k_3 & \text{sinon,} \end{cases}$ et

$\mathcal{K}_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } -\delta < y_1 < \delta, \\ -k_3\delta & \text{si } y_1 < -\delta, \\ k_3\delta & \text{si } y_1 > \delta, \end{cases}$ alors

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + N(t), \quad (2.54)$$

avec

$$b(t, X_t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{K}_1/m_{nl} & -\gamma\lambda_1/m_{nl} & \gamma\phi_0^{(1)}/m_{nl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma\phi_0^{(1)} & 0 & -\omega_1^2 - \gamma\phi_0^{(1)2} & -2\zeta_1\omega_1 & \alpha\omega_g^2 e(t) & \alpha 2\zeta_g\omega_g e(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_g^2 & -2\zeta_g\omega_g \end{bmatrix}}_B X_t + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{K}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

et $N(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{N}(t) \end{bmatrix}$. Soit $J = [0, T]$, $T > 0$ et $\sigma(t, X_t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

On utilise les mêmes notations et hypothèses que dans [Cépa, 1995].

$b : J \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ et $\sigma : J \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ sont deux fonctions Borel-mesurables et $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ un espace probabiliste filtré qui satisfait les conditions usuelles. En introduisant le mouvement Brownien standard $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; t \in J\}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $W_0 = 0$ et ξ_0 une variable aléatoire, l'équation différentielle stochastique suivante est obtenue :

$$\boxed{\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, & \forall t \in J, \\ X_0 &= \xi_0. \end{aligned}} \quad (2.56)$$

On suppose que $C = |B|$, alors

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C|x - y|, \quad \forall t \in J, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^6, \quad (2.57)$$

et

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad \forall t \in J, \quad \forall x \in \mathbb{R}^6. \quad (2.58)$$

Par [Cépa, 1995], il existe sous les précédentes hypothèses une unique solution de (2.56).

On peut utiliser un schéma numérique décrit dans [Kloeden et Platen, 1992]. Le schéma implicite de Runge-Kutta d'ordre 1.0 est par exemple bien adapté pour le système considéré.

Soit $\pi_\delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n^\delta} = T\}$ une partition de $[0, T]$; soit $h_k^\delta = t_{k+1} - t_k$, et soit δ la taille du maillage donnée par $\delta = \max\{h_k^\delta : 0 \leq k \leq n^\delta - 1\}$. On définit n^δ processus sur $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ (\mathcal{E} est un espace probabiliste filtré qui satisfait les conditions usuelles) inductivement pour tout $n \in \{0, \dots, n^\delta - 1\}$ comme suit :

$$\begin{cases} x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + b(t_{n+1}, x_{n+1}^\delta)h_n^\delta + \sigma(t_n, x_n^\delta)(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}) \\ \quad + \frac{1}{2\sqrt{h_n^\delta}}(\sigma(t_n, z_n^\delta) - \sigma(t_n, x_n^\delta))\{(W_{t_{n+1}} - W_{t_n})^2 - h_n^\delta\}, \\ x_0^\delta = \xi_0, \end{cases} \quad (2.59)$$

avec $z_n^\delta = x_n^\delta + b(t_n, x_n^\delta)h_n^\delta + \sigma(t_n, x_n^\delta)\sqrt{h_n^\delta}$.

Finalement pour $n \in \{0, \dots, n^\delta - 1\}$ et $t \in [t_n, t_{n+1}[$, on pose :

$$X^\delta(t) = x_n^\delta + \frac{t - t_n}{h_n^\delta}(x_{n+1}^\delta - x_n^\delta). \quad (2.60)$$

[Kloeden et Platen, 1992] ont montré la convergence de X^δ vers la solution X au sens :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}(\sup_{t \in J} |X^\delta(t) - X(t)|^2) = 0. \quad (2.61)$$

Comme application, on peut choisir l'exemple de modèle de bâtiment flexible continu avec les valeurs suivantes : $m_{nl} = M/20$, $\delta = 0.1$, $\gamma = 8.10^6 \text{N.m}^{-1}$, $k_1 = 4.10^5 \text{N.m}^{-1}$, $\gamma\lambda_1 = 2.10^5 \text{N.s.m}^{-1}$, $k_3 = 24.10^5 \text{N.m}^{-1}$. Pour le modèle Kanai-Tajimi on peut choisir $\omega_g = 30 \text{rad.s}^{-1}$, $\zeta_g = 0.05$ et

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ (t/4)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 4, \\ 1 & \text{si } 4 \leq t \leq 18, \\ e^{-0.2(t-18)} & \text{si } t > 18, \end{cases} \quad \text{ce qui donne une excitation réaliste. Si on considère un}$$

processus sans et avec couplage (on utilise le même bruit blanc), alors le pompage énergétique se produit comme montré sur la Figure 2.33 où deux processus différents ont été tracés. Cependant, pour voir si le pompage énergétique est efficace pour n'importe quel processus, on a besoin d'analyser des données statistiques. En effet, on peut utiliser l'écart-type μ de la réponse de l'oscillateur linéaire pour un grand nombre de processus.

Ainsi, en utilisant 10 000 processus (les paramètres sont les mêmes que précédemment), le maximum de l'écart-type décroît de 40%, comme on peut le voir sur la Figure 2.34. Ainsi, on a introduit un bon indicateur pour connaître l'efficacité du pompage énergétique. Par exemple, on peut voir, avec cet indicateur, que les vibrations sont plus atténuées avec du pompage énergétique et une nonlinéarité cubique qu'en attachant un système linéaire. En effet, avec le même jeu de

$$\text{paramètres : } \omega_g = 30, \zeta_g = 0.05 \text{ et } e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ (t/4)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 4, \\ 1 & \text{si } 4 \leq t \leq 18, \\ e^{-0.2(t-18)} & \text{si } t > 18, \end{cases} \quad \text{à l'exception de la}$$

nonlinéarité : dans un cas on ajoute Cy_1^3 (avec $C=40.10^6 \text{N.m}^{-3}$) et dans l'autre cas on ajoute Cy_1 ($C=40.10^6 \text{N.m}^{-1}$), on peut tracer l'écart-type de l'oscillateur linéaire comme montré sur la Figure 2.35. Cette figure souligne le fait que le pompage énergétique permet une meilleure atténuation des vibrations (le maximum de l'écart-type décroît de 40%) que le couplage avec une structure linéaire (le maximum de l'écart-type décroît de 10%).

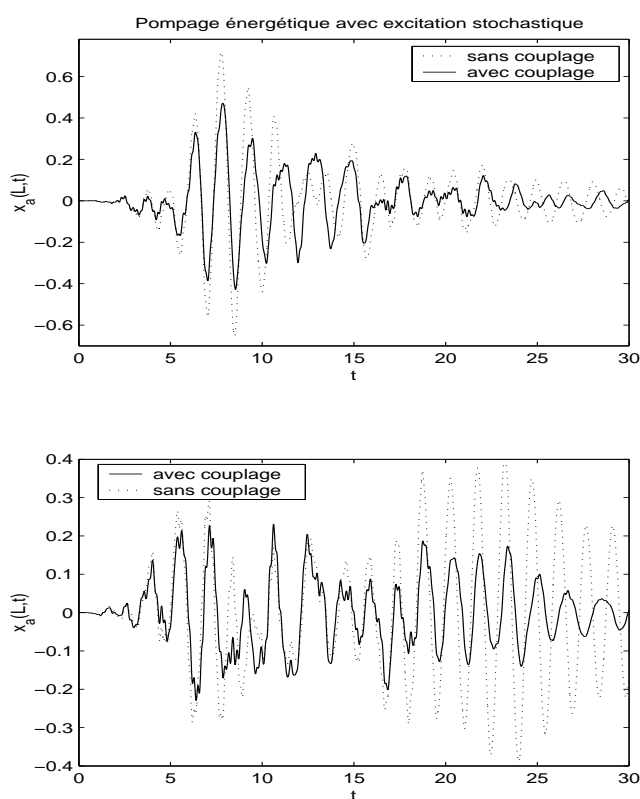


FIG. 2.33 – Pompage énergétique avec du bruit blanc : deux processus différents sont réalisés.

Dans la présente étude, de nombreuses recherches numériques ont été réalisées. Des évidences numériques du pompage énergétique ont montré que le pompage énergétique est un bon moyen pour absorber les vibrations de structures linéaires, en particulier en Génie Civil. Ainsi, ajouter un système linéaire par morceaux est plus aisé à concevoir et permet le transfert d'énergie de la structure linéaire vers la structure non linéaire avec une assez bonne efficacité. Maintenant, une étude analytique peut être réalisée pour obtenir plus d'informations sur les paramètres. Le pompage énergétique vient d'être étudié pour une structure non linéaire de très faible masse $m \ll M$, ce qui est nécessaire en Génie Civil, en particulier pour le cas de grands bâtiments. Dans ces évidences numériques, nous avons étudié $0.01 \leq \frac{m}{M} \leq 1$. L'objectif est d'obtenir un ratio encore plus faible pour être capable de l'appliquer sur des structures réelles.

De plus, le pompage énergétique a été appliqué à des modèles de bâtiments avec une analyse modale. Une excitation stochastique a été analysée et un bon indicateur avec l'écart-type peut déterminer l'efficacité du pompage énergétique. Comme il a été précédemment souligné, une des difficultés est d'être capable de définir et de déterminer une efficacité du phénomène de pompage énergétique. Pour le moment, nous avons fixé un instant et déterminé l'influence de divers paramètres sur l'atténuation des vibrations. Les régions où le pompage est optimal doivent cependant être déterminées plus exactement. Les études numériques semblent montrer une certaine robustesse du pompage quand les paramètres sont légèrement modifiés. Il reste à étudier plus précisément si le phénomène est robuste par la suite. En effet, nous pourrions penser à une application future si le phénomène est efficace même si les paramètres changent légèrement au cours du temps, ce qui semble être le cas.

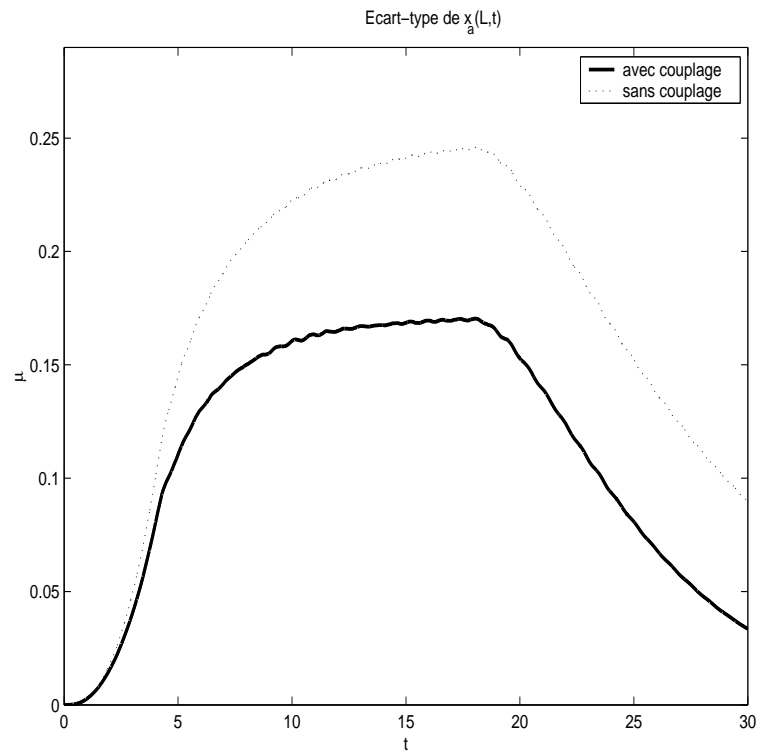
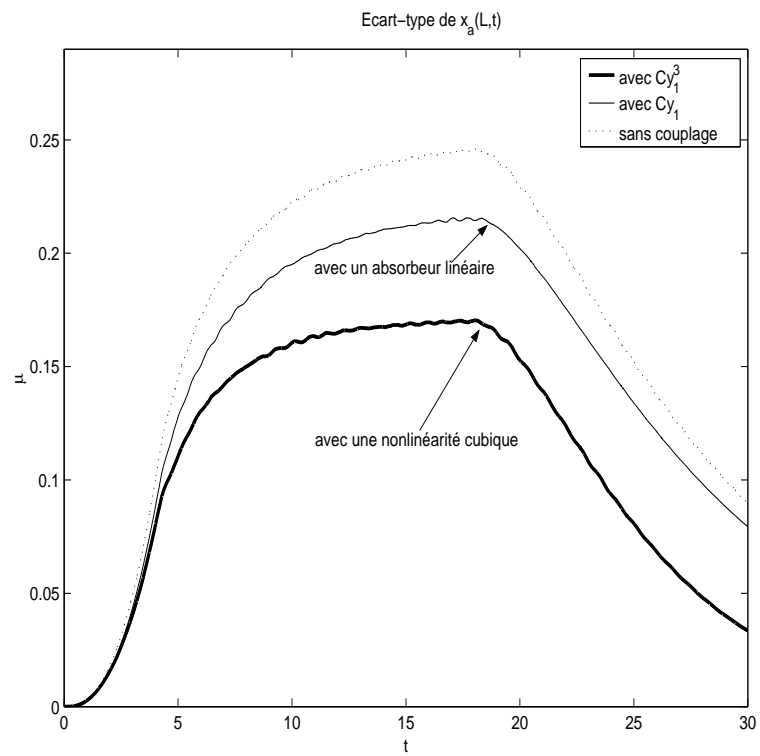


FIG. 2.34 – L'écart-type : un bon indicateur pour l'efficacité du pompage énergétique.

FIG. 2.35 – L'écart-type de $x_a(L,t)$ pour des couplages différents.

Pompage Énergétique en Régime Instationnaire

Après avoir présenté le pompage énergétique on s'intéresse au phénomène en régime instationnaire. L'objectif du pompage énergétique est d'être en mesure de concevoir un absorbeur d'énergie non linéaire efficace pour atténuer les vibrations transitoires. Ce transfert d'énergie peut être décrit et expliqué par l'étude des modes normaux non linéaires. Des méthodes numériques, analytiques et des vérifications expérimentales permettent ainsi de mieux comprendre le phénomène pour l'absorption passive des vibrations pendant le régime instationnaire. La robustesse du phénomène est notamment étudiée pour pouvoir envisager des applications réelles.

Sommaire

3.1	Études théoriques	92
3.1.1	Système annexe non linéaire avec couplage linéaire	92
3.1.1.1	Modes non linéaires et stabilités	93
3.1.1.2	Robustesse du pompage énergétique	100
3.1.2	Couplage non linéaire	115
3.2	Vérifications expérimentales	127
3.2.1	Systèmes considérés	127
3.2.1.1	Modèle réduit à un étage	127
3.2.1.2	Modèle réduit à quatre étages	130
3.2.2	Résultats expérimentaux	135
3.2.2.1	Modèle réduit à un étage	135
3.2.2.1	Modèle réduit à quatre étages	141

3.1 Etudes théoriques

Après avoir présenté le pompage énergétique on s'intéresse au phénomène en régime instationnaire, c'est-à-dire que l'on considère une impulsion sur la structure primaire et on regarde uniquement les oscillations libres des structures. Cette impulsion peut aussi être un séisme qui vient exciter brutalement la structure pendant une courte durée. Le comportement transitoire est donc important à étudier. L'objectif est d'être capable de concevoir un absorbeur non linéaire d'énergie efficace (par exemple avec un système comportant une nonlinéarité cubique [Gourdon et Lamarque, 2005b, Gourdon et Lamarque, 2005a]), en particulier pour atténuer les réponses modales pour des vibrations transitoires. Comme analysé dans des études récentes [Gendelman et al., 2001] mais aussi [Vakakis et Gendelman, 2001], ce transfert d'énergie peut être décrit par les modes normaux non linéaires du système non amorti/non forcé, et est relatif à un mécanisme de résonance non linéaire. Il faut souligner que le phénomène de pompage énergétique peut être utilisé pour atténuer les vibrations d'une structure discrète ou continue grâce à cette nonlinéarité. Ainsi, l'attache non linéaire peut être un absorbeur non linéaire de vibrations efficace, comme montré dans [Gourdon et Lamarque, 2005b] par exemple. Cependant, pour être capable de l'appliquer dans des applications pratiques réelles, de nombreuses études numériques et analytiques ont besoin d'être réalisées. C'est ainsi que dans cette partie, le phénomène de pompage énergétique avec la capture de résonance est présenté et les vibrations transitoires sont étudiées. Certains résultats ont été publiés sur ce sujet notamment dans les publications suivantes : [Gourdon et Lamarque, 2006, Gourdon et al., 2006b] et dans [Gourdon et al., 2006a].

3.1.1 Système annexe non linéaire avec couplage linéaire

Tout d'abord, un premier système à deux degrés de liberté composé de deux oscillateurs faiblement amortis et faiblement couplés est considéré comme montré sur la Figure 3.1. Ici, x_1 et x_2 représentent respectivement les déplacements du système principal linéaire (ou linéarisé) et de l'absorbeur. Les équations suivantes sont obtenues (deuxième loi de Newton du mouvement) :

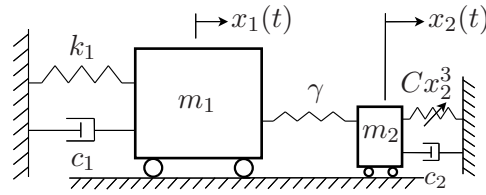


FIG. 3.1 – Système considéré.

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 + \gamma(x_1 - x_2) = 0, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_2 \frac{dx_2}{dt} + Cx_2^3 + \gamma(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

En définissant $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$ ($\varepsilon \ll 1$), alors :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + \gamma(x_1 - x_2) = 0, \\ \varepsilon m_1 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + Cx_2^3 + \gamma(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

La structure primaire linéaire est excitée par une impulsion. On considère donc des oscillations libres des structures avec des conditions initiales :

$$x_2(t=0) = x_1(t=0) = 0, \quad \frac{dx_2}{dt}(t=0) = 0, \quad \frac{dx_1}{dt}(t=0) = C_I. \quad (3.3)$$

Il faut aussi rappeler que le phénomène de pompage énergétique a été étudié très récemment [Vakakis et al., 1999, Vakakis et al., 2003] et correspond au transfert contrôlé dans un seul sens de l'énergie vibratoire vers une structure passive non linéaire où elle localise et diminue par dissipation par amortissement [Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001]. Ainsi, comme nous l'avons aussi souligné précédemment, à travers le pompage énergétique, les vibrations d'une structure linéaire (soumise à une excitation externe) peuvent être atténuées grâce à une structure fortement non linéaire. Cette attache à forte nonlinéarité permet une résonance 1 : 1 responsable du phénomène de pompage énergétique.

3.1.1.1 Modes non linéaires et stabilités

On se propose alors d'étudier les NNMs (Nonlinear Normal Modes) du système considéré pour comprendre et expliquer le phénomène de pompage énergétique. Pour cela, on considère le système sans amortissement :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \gamma(x_1 - x_2) = 0, \\ \varepsilon m_1 \ddot{x}_2 + C x_2^3 + \gamma(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Dans ce système, des modes de vibrations localisés sont aussi bien possibles que des modes de vibrations non localisés. Pour analyser les modes de vibrations, les méthodes de la théorie des NNMs vues auparavant sont utilisées. Dans ce régime des NNMs, un système de dimension finie se comporte comme un système conservatif ayant un seul degré de liberté, et toutes les coordonnées de position peuvent être analytiquement paramétrisées par n'importe laquelle des coordonnées. On écrit alors l'intégrale énergie du système (3.4) sous la forme :

$$E_c + E_p = h, \quad (3.5)$$

où $E_c = m_1(\varepsilon \dot{x}_2^2 + \dot{x}_1^2)/2$ (Energie cinétique) et $E_p = C x_2^4/4 + k_1 x_1^2/2 + \gamma(x_2 - x_1)^2/2$ (Energie potentielle), et h est une constante de l'énergie totale du système. En suivant l'approche [Vakakis et al., 1996, Manevitch et al., 1989] pour calculer les NNMs, les trajectoires des NNMs dans l'espace de configuration du système (3.4) sont recherchées sous la forme $x_1(x_2)$. Les équations suivantes sont utilisées pour éliminer le temps t :

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \dot{x}_2 \frac{d(\cdot)}{dx_2}, \quad \frac{d^2(\cdot)}{dt^2} = \dot{x}_2^2 \frac{d^2(\cdot)}{dx_2^2} + \ddot{x}_2 \frac{d(\cdot)}{dx_2}. \quad (3.6)$$

En utilisant les relations (3.4), (3.5) et (3.6) on obtient l'équation suivante pour obtenir les trajectoires :

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2 x_1}{dx_2^2} \frac{h - (k_1 x_1^2/2 + C x_2^4/4 + \gamma(x_2 - x_1)^2/2)}{\varepsilon + \left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dx_1}{dx_2} (\gamma(x_1 - x_2) - C x_2^3) \\ + k_1 x_1 + \gamma(x_1 - x_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) a une singularité au maximum de la surface isoénergétique $E_p = h$ où $x_2 = X_0, y = y(X_0)$, et toutes les vitesses sont égales à zéro. La trajectoire du NNM peut

être analytiquement continuée jusqu'à la surface équipotentielle maximale en satisfaisant des conditions de frontières additionnelles :

$$\left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{dx_1}{dx_2} (\gamma(x_1 - x_2) - Cx_2^3) + k_1x_1 + \gamma(x_1 - x_2) \right] \Big|_{E_p=h} = 0, \quad (3.8)$$

qui est une condition d'orthogonalité de la trajectoire des NNMs avec la surface isoénergétique maximale.

L'approximation zéro par rapport à ε ($\varepsilon = 0$) nous donne :

$$x_{10} = x_2 + \frac{C}{\gamma} x_2^3. \quad (3.9)$$

(3.9) est le mode de vibration non localisé. Dans ce régime, l'énergie vibratoire est distribuée à la fois dans l'oscillateur linéaire et dans l'absorbeur non linéaire. Ainsi, les amplitudes de vibrations des systèmes sont comparables. Le système limite correspondant qui peut être obtenu à partir des équations (3.4) est le suivant :

$$\begin{cases} Cx_2^3 + \gamma(x_2 - x_1) = 0, \\ m_1 \ddot{x}_1 + k_1x_1 + \gamma(x_1 - x_2) = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Pour la construction des trajectoires curvilignes des NNMs, plusieurs méthodes peuvent être utilisées comme il a été souligné auparavant. Par exemple, on peut utiliser la méthode des séries par rapport au faible paramètre ε

$$x_1 = x_{10} + \varepsilon x_{11} + \varepsilon^2 x_{12} + \dots \quad (3.11)$$

qui donne en utilisant (3.7) et (3.8) :

$$x_{11} = -x_2 \frac{12 \frac{C}{\gamma} [\frac{h}{\gamma} - (\frac{C}{\gamma} x_2^4 / 4 + \frac{k_1}{\gamma} x_2^2 (1 + \frac{C}{\gamma} x_2^2)^2 / 2 + \frac{C^2}{\gamma^2} x_2^6 / 2)] + [\frac{k_1}{\gamma} (1 + \frac{C}{\gamma} x_2^2) + \frac{C}{\gamma} x_2^2] (1 + 3 \frac{C}{\gamma} x_2^2)^2}{(1 + 3 \frac{C}{\gamma} x_2^2)^3}. \quad (3.12)$$

Ici

$$h = \frac{CX_0^4}{4} + \frac{k_1(x_{10}(X_0))^2}{2} + \frac{\gamma(X_0 - x_{10}(X_0))^2}{2}, \quad (3.13)$$

$x_2 = X_0$ est la valeur de la variable x_2 à la surface isoénergétique maximale.

On calcule maintenant le mode de vibration localisé. Quand les amplitudes de vibrations du système linéaire principal sont faibles, simultanément les vibrations de l'absorbeur sont importantes. Ce régime peut être analysé si la transformation de temps suivante est effectuée : $t = \sqrt{\varepsilon} \tau$. Le système (3.4) devient alors :

$$\begin{cases} \frac{m_1}{\varepsilon} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + k_1 x_1 + \gamma(x_1 - x_2) = 0, \\ m_1 \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + Cx_2^3 + \gamma(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Le système limite correspondant (pour $\varepsilon = 0$) se met sous la forme

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} = 0, \\ m_1 \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + Cx_2^3 + \gamma(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

On obtient ainsi

$$x_{10} = 0. \quad (3.16)$$

C'est le mode de vibration localisé. Dans ce cas l'équation pour obtenir la trajectoire du NNM $x_1(x_2)$ est la suivante :

$$2 \frac{d^2 x_1}{dx_2^2} \frac{h - (k_1 x_1^2/2 + C x_2^4/4 + \gamma(x_2 - x_1)^2/2)}{1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{dx_1}{dx_2} \right)^2} + \frac{dx_1}{dx_2} (\gamma(x_1 - x_2) - C x_2^3) + \varepsilon k_1 x_1 + \varepsilon \gamma(x_1 - x_2) = 0. \quad (3.17)$$

En utilisant l'équation de première approximation en ε et les conditions de frontière correspondantes à la surface maximale isoénergétique, on obtient une solution de la forme :

$$x_{11} = c_1 x_2 + c_3 x_2^3 + c_5 x_2^5 + \dots, \quad (3.18)$$

où

$$c_1 = -\frac{\frac{X_0^2 \gamma}{4h} + \frac{3X_0^4 \gamma^2}{32h^2}}{1 + \frac{X_0^2 \gamma}{4h} + \left(\frac{3\gamma}{4h} + \frac{C}{\gamma}\right) \frac{X_0^4 \gamma}{8h}}, \quad c_3 = \frac{1 + c_1}{12h/\gamma}, \quad c_5 = \frac{\gamma}{40h} \left[\frac{3\gamma}{4h} (1 + c_1) + \frac{c_1 C}{\gamma} \right]. \quad (3.19)$$

Ainsi, en prenant par exemple $\varepsilon = 0.1$, $m_1 = 1$, $k_1 = 1$, $\gamma = 0.05$, $C = 1$, on peut tracer des modes non linéaires localisés et non localisés, comme illustré sur la Figure 3.2.

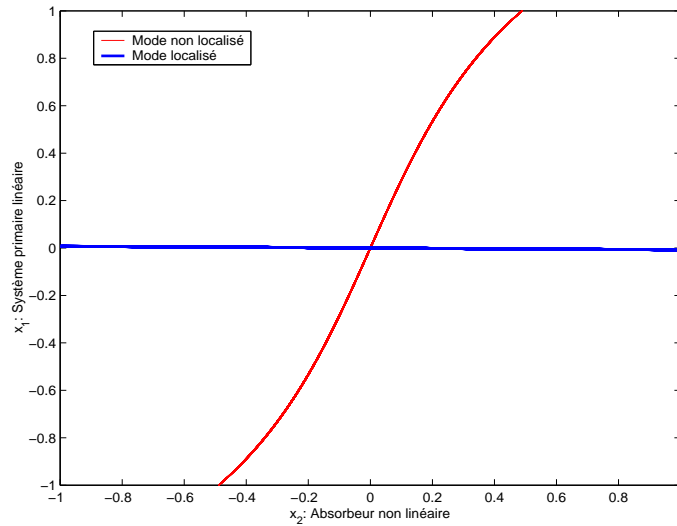


FIG. 3.2 – Mode localisé et mode non localisé.

Bien évidemment, cette notion de modes non linéaires est à mettre en relation avec une étude de stabilité de ces modes.

Ainsi, on peut tout d'abord considérer une stabilité du mode de vibration non localisé :

$$x_1 \cong x_2 + \frac{C}{\gamma} x_2^3. \quad (3.20)$$

En substituant l'approximation (3.20) et les dérivées suivantes :

$$\dot{x}_1 = \left(1 + \frac{3C}{\gamma}x_2^2\right)\dot{x}_2, \quad \ddot{x}_1 = \left(1 + \frac{3C}{\gamma}x_2^2\right)\ddot{x}_2 + \frac{6Cx_2}{\gamma}\dot{x}_2^2, \quad (3.21)$$

dans la première équation de (3.4), on peut écrire l'équation suivante pour obtenir la solution $x_2(t)$:

$$m_1 \left[\left(1 + \frac{3C}{\gamma}x_2^2\right)\ddot{x}_2 + \frac{6C}{\gamma}x_2\dot{x}_2^2 \right] + k_1 \left(x_2 + \frac{C}{\gamma}x_2^3\right) + Cx_2^3 = 0. \quad (3.22)$$

Pour obtenir une expression approchée de la fréquence du mode de vibration ω_0 , on utilise l'approximation suivante : $x_{20} = A \cos \omega_0 t$; A étant l'amplitude de vibration. En remplaçant l'approximation dans l'équation (3.22) et en ne conservant que les termes en $\cos \omega_0 t$, on obtient :

$$\omega_0 = \frac{k_1}{m_1} + \frac{\frac{3}{4}CA^2}{m_1(1 + \frac{3}{4\gamma}CA^2)}. \quad (3.23)$$

Pour étudier la stabilité des solutions du Système (3.4) on peut écrire un système d'équations variationnelles. Soit $x_2 = x_{20} + u$, $x_1 = x_{10} + v$, où u et v sont les variations pour les NNMs du système (3.4). Ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} \varepsilon m_1 \ddot{u} + 3Cx_{20}^2 u + \gamma(u - v) = 0, \\ m_1 \ddot{v} + k_1 v + \gamma(v - u) = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

On peut noter que l'on recherche une stabilité des NNMs jusqu'aux termes d'ordre $O(\varepsilon)$. Dans ce cas, en éliminant la variable u de la première équation du système (3.24), $u = \frac{v}{1 + \frac{3C}{\gamma}x_{20}^2}$, à partir de la deuxième équation de (3.24) on peut obtenir l'équation variationnelle simplifiée suivante :

$$m_1 \ddot{v} + v \left[k_1 + \gamma \left(1 - \frac{1}{1 + 3\frac{C}{\gamma}A^2 \cos^2 \omega_0 t} \right) \right] = 0. \quad (3.25)$$

La stabilité de cette équation variationnelle peut être étudiée de différentes manières.

On peut par exemple la simplifier en équation de Mathieu.

En effet, on peut utiliser le développement en séries de Fourier :

$$\frac{1}{1 + 3\frac{C}{\gamma}A^2 \cos^2 \omega_0 t} = a_0 + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots, \quad (3.26)$$

où

$$a_0 = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{\pi/\omega_0} \frac{d\tau}{1 + 3\frac{C}{\gamma}A^2 \cos^2 \omega_0 \tau} = \frac{1}{\chi}, \quad (3.27)$$

$$a_2 = 2\frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{\pi/\omega_0} \frac{\cos 2\omega_0 \tau d\tau}{1 + 3\frac{C}{\gamma}A^2 \cos^2 \omega_0 \tau} = -\frac{2(\chi - 1)}{\chi(\chi + 1)}, \quad (3.28)$$

avec $\chi = \sqrt{1 + 3\frac{C}{\gamma}A^2}$. En utilisant les deux premières harmoniques du développement (3.26), et en utilisant la transformation $\omega_0 t = \theta$, il est alors possible de réécrire l'équation variationnelle (3.25) :

$$v'' + [\delta^* + 2\varepsilon^* \cos 2\theta]v = 0, \quad (3.29)$$

où le ' représente la différentiation par rapport à θ et où :

$$\delta^* = \frac{k_1}{m_1 \omega_0^2} + \gamma \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) \frac{1}{m_1 \omega_0^2}, \quad \varepsilon^* = \frac{\gamma(\chi - 1)}{\chi(\chi + 1)m_1 \omega_0^2}. \quad (3.30)$$

Une analyse des modes de vibrations du Système (3.4) est donc réduite à l'étude de l'équation de Mathieu classique et très utilisée sous la forme (3.29). Les régions de stabilités et d'instabilités de l'équation de Mathieu peuvent ainsi être calculées par des méthodes classiques, notamment celle développée dans [Sinha et al., 2005] qui a l'avantage de fournir des résultats pertinents (même si les différents paramètres sont élevés, ce qui n'est pas le cas avec des méthodes de perturbations classiques). L'analyse qui suit a été faite pour des valeurs fixées de certains paramètres : $\varepsilon = 0.1$, $m_1 = 1$, $k_1 = 1$, $C = 1$. Il est important de noter que l'influence de ces paramètres sur les résultats de l'analyse de stabilité n'est pas principale. La Figure 3.3 montre la zone d'instabilité (en noir) pour le mode de vibration non-localisé. Il faut noter que sur la Fi-

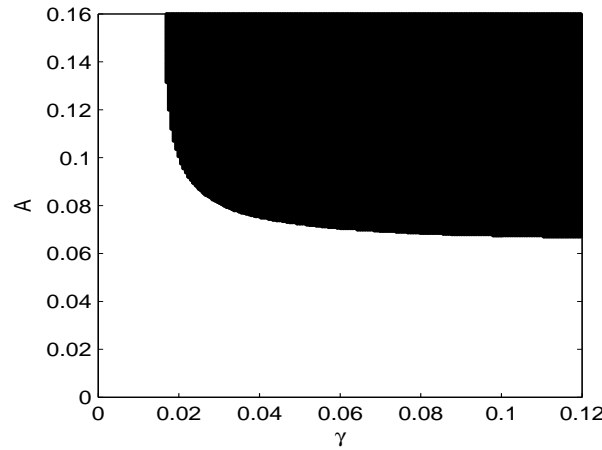


FIG. 3.3 – Zone d'instabilité (en noir) du mode de vibration non-localisé.

gure 3.3, pour une valeur fixée de γ , le mode de vibration non-localisé devient instable au-dessus d'une certaine valeur de l'amplitude A .

On peut maintenant considérer la stabilité du mode de vibration localisé sous la forme approchée suivante :

$$x_{10} \cong 0. \quad (3.31)$$

En substituant l'expression dans la deuxième équation du Système (3.14) on peut obtenir l'équation du mouvement sous la forme :

$$m_1 \ddot{x}_2 + Cx_2^3 + \gamma x_2 = 0. \quad (3.32)$$

En répétant la transformation qui a été faite dans le cas du mode de vibration non-localisé, on peut obtenir la fréquence de vibration avec l'approximation harmonique : $\omega_0^2 = \frac{\gamma}{m_1} + \frac{3CA^2}{4m_1}$. Dans ce cas l'équation variationnelle est également réduite à l'équation de Mathieu (3.29). En analysant cette équation, on constate que le mode de vibration localisé est stable pour presque toutes les valeurs des paramètres du système (sauf en des bandes extrêmement étroites).

Le phénomène de pompage énergétique est ainsi expliqué avec un mode de vibration non-localisé (grandes vibrations dans le système primaire) qui devient instable (pour une amplitude suffisante des vibrations) et un mode de vibration localisé stable (grandes vibrations dans le système

non linéaire ajouté et très faibles dans le système primaire). Il y a ainsi un transfert du mode de vibration non-localisé vers le mode de vibration localisé. Les Figures 3.4 et 3.5 illustrent ces transferts quand un faible amortissement est ajouté. En effet, sur la Figure 3.4, il se produit un transfert du mode de vibration non-localisé vers le mode de vibration localisé pour $\varepsilon = 0.1$, $m_1 = 1$, $k_1 = 1$, $C = 1$, $\gamma = 0.05$. Sur la Figure 3.5, il se produit un transfert du mode de vibration localisé vers le mode de vibration non-localisé pour $\varepsilon = 0.1$, $m_1 = 1$, $k_1 = 1$, $C = 1$, $\gamma = 0.05$.

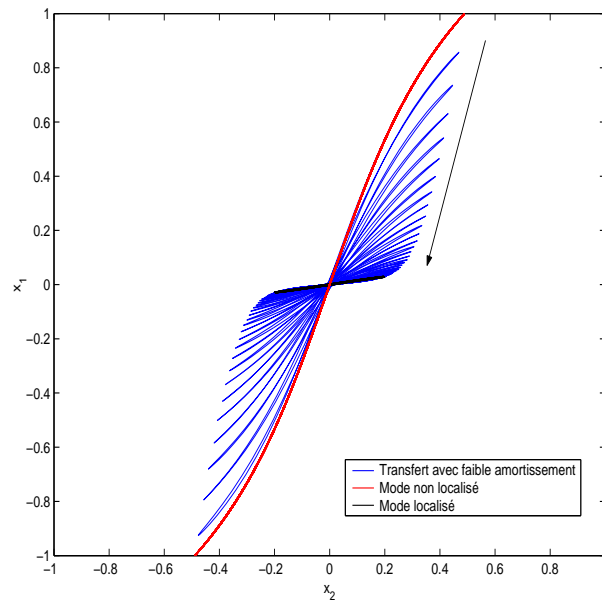


FIG. 3.4 – Mode de vibration non-localisé instable : transfert vers le mode de vibration localisé quand un faible amortissement est ajouté.

Ainsi, le troisième mécanisme de pompage énergétique qui est le pompage énergétique initié par un phénomène de battements non linéaires est expliqué. En effet, le phénomène d'allers-retours pendant les premières secondes (phénomène soulevé dans le deuxième chapitre de cette thèse) entre la structure primaire et annexe est réversible et permet la transition vers le pompage énergétique irréversible (assez d'énergie est injectée dans la deuxième structure initialement au repos pour que le mode localisé soit excité).

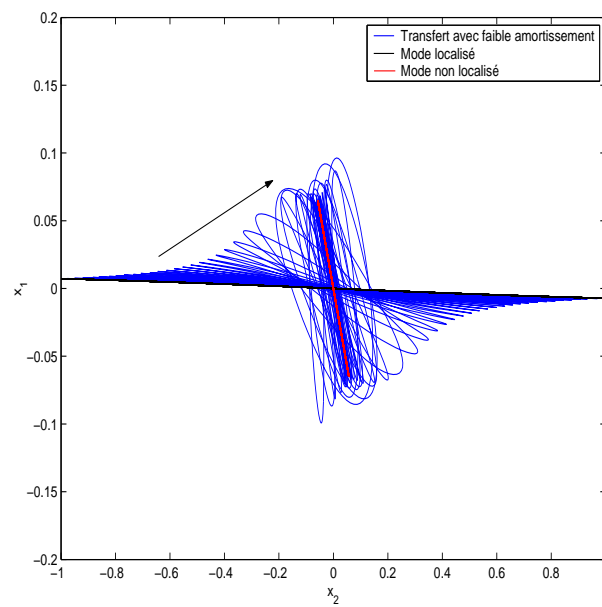


FIG. 3.5 – Mode de vibration localisé instable : transfert vers le mode de vibration non-localisé quand un faible amortissement est ajouté.

3.1.1.2 Robustesse du pompage énergétique

Les effets de l'absorbeur d'énergie non linéaire pendant le régime instationnaire sont analysés en introduisant des paramètres incertains pour vérifier la robustesse du transfert d'énergie spatial transitoire quand les paramètres ne sont pas bien connus. Il a été montré qu'il est possible d'absorber passivement de l'énergie d'un système linéaire non conservatif (amorti) vers une attache non linéaire faiblement couplée au système linéaire. Ce transfert d'énergie rapide et irréversible, nommé pompage énergétique, est étudié en prenant en compte des incertitudes sur les paramètres, en particulier l'amortissement (puisque l'amortissement joue un rôle important et il y a un manque de connaissances sur lui). Par essence, le sous-système non linéaire joue un rôle d'absorbeur passif non linéaire d'énergie pour des perturbations vibratoires externes appliquées sous la forme de pulses. L'objectif est d'être capable d'appliquer le pompage énergétique en pratique où la réalisation de l'attache non linéaire ne reflètera jamais parfaitement la conception théorique. Comme de fortes nonlinéarités rentrent en considération, des développements en polynômes de chaos sont utilisés pour obtenir des informations sur les déplacements aléatoires. Non seulement des investigations numériques sont faites, mais des modes normaux non linéaires et le rôle de l'amortissement sont aussi étudiés analytiquement, ce qui confirme les résultats numériques et montre l'information supplémentaire obtenue qui ne l'aurait pas été avec une étude paramétrique. Les résultats fournis dans cette partie ont été publiés dans [Gourdon et Lamarque, 2006].

De plus, il a été montré ([Vakakis et al., 1999, Vakakis et al., 2003, Gendelman et al., 2001] et [Vakakis et Gendelman, 2001, Gendelman, 2001]) que le phénomène de pompage énergétique est dû à une capture de résonance 1 : 1 (les deux structures oscillent à la même fréquence), un phénomène dynamique transitoire qui se produit dans les oscillateurs couplés non conservatifs et mène à une capture de résonance transitoire du flot dynamique sur une variété résonante 1 : 1 du système. Ainsi, quand le phénomène de pompage énergétique décrit précédemment se produit, l'oscillateur non linéaire rentre en résonance transitoire avec un mode linéaire, et l'énergie se voit transférée (pompée) vers l'attache non linéaire d'une façon irréversible. Le phénomène peut être étudié avec la théorie des modes normaux non linéaires [Bellizzi et Cochelin, 2003] puisque la résonance d'un mode normal non linéaire est introduite loin de la structure primaire à isoler. Cependant, il est nécessaire de savoir si la méthode est efficace avec des paramètres incertains (i.e. de savoir si le pompage énergétique se produit encore quand les paramètres ne sont pas bien connus) pour être capable de l'appliquer à des structures réelles car l'amortissement (qui reste mal connu) joue un rôle important dans le phénomène. Puisque l'attache non linéaire ne reflète jamais parfaitement la conception théorique, et puisque des problèmes pour l'identification non linéaire apparaissent, les incertitudes demeurent dans la nonlinéarité.

Pour vérifier ces points, il est considéré que les divers paramètres peuvent être incertains. C'est pourquoi on peut utiliser les procédures classiques pour l'analyse des problèmes faisant intervenir des modèles probabilistes. Pour résoudre les problèmes stochastiques linéaires, les simulations de Monte-Carlo sont largement employées, malgré leur coût élevé en temps de calculs et de programmations, et sont utilisées comme références pour des calculs approchés. La méthode des perturbations [Benaroya et Rehak, 1988, Ibrahim, 1987], qui est basée sur un développement en séries de Taylor (à un ordre faible), est la méthode la plus employée, malgré des problèmes de convergence. Le développement en séries de Neumann est aussi employé, mais souffre également de problèmes de convergence. Une méthode plus récente a aussi été présentée : elle utilise la projection sur une base de polynômes orthogonaux de variables gaussiennes [Dessombz, 2000]. On se propose alors d'étendre et d'utiliser cette méthode dans le cas non linéaire, car les coefficients devant les nonlinéarités ne sont pas nécessairement faibles et cela rend difficile l'application de la méthode des perturbations. L'intérêt d'utiliser ces polynômes orthogonaux est d'obtenir un

calcul analytico-numérique assez rapide des moments. Cependant, il peut se poser des problèmes de convergence (on doit tronquer les séries), les simulations Monte-Carlo sont donc utilisées pour comparer et valider l'ordre des séries.

De ce fait, la section est organisée comme suit. Tout d'abord, un développement en polynômes de chaos est utilisé pour un système à deux degrés de liberté. Des simulations numériques sont faites pour comprendre et analyser le phénomène de pompage énergétique sous impulsions puisque le phénomène décrit ici est un phénomène transitoire (les oscillations libres sont analysées). C'est pourquoi le système est considéré sous une vitesse initiale plutôt qu'une excitation externe comme il a été fait dans tous les nombreux articles sur ce phénomène [Vakakis et al., 1999, Vakakis et al., 2003, Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001, Gendelman, 2001], [Gendelman et al., 2003, McFarland et al., 2002a, McFarland et al., 2002c]. Ensuite, les résultats numériques trouvés précédemment sont confirmés analytiquement et qualitativement dans certains cas particuliers où il est possible d'obtenir des développements analytiques. Ainsi, dans un premier temps le comportement des modes normaux non linéaires est analysé, quand la raideur non linéaire est incertaine, grâce à l'utilisation de développements en polynômes de chaos. Ensuite le rôle de l'amortissement de la structure non linéaire est considéré analytiquement.

3.1.1.2.1 Développement en polynômes de chaos

Le système à deux degrés de liberté composé de deux oscillateurs faiblement couplés et faiblement amortis est considéré, comme montré sur la Figure 3.6. Ici, y_1 et y_2 représentent

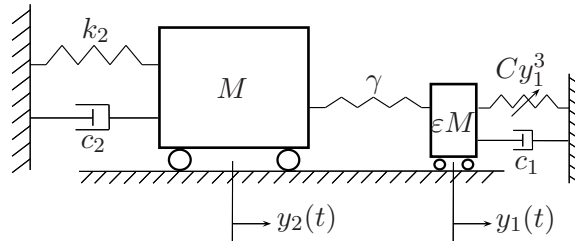


FIG. 3.6 – Système général à deux degrés de liberté.

respectivement les déplacements de l'absorbeur et du système linéaire principal, et Cy_1^3 est la nonlinéarité. Selon la deuxième loi de Newton du mouvement et si l'oscillateur non linéaire (masse εM ; ε est le ratio de masses) est noté 1 et l'oscillateur linéaire (masse M) est noté 2 :

$$\begin{cases} \varepsilon M \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + Cy_1^3 + \gamma(y_1 - y_2) = 0, \\ M \ddot{y}_2 + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 + \gamma(y_2 - y_1) = 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

avec $y_1(0) = \dot{y}_1(0) = y_2(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = \sqrt{2h}$ (h est l'énergie du système à $t = 0^+$). Comme souligné auparavant, le système est considéré sous une vitesse initiale plutôt qu'une excitation externe comme il a été fait dans les nombreux articles sur ce phénomène [Vakakis et al., 1999, Vakakis et al., 2003, Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001, Gendelman, 2001], [Gendelman et al., 2003, McFarland et al., 2002a, McFarland et al., 2002c] (ce n'est pas un absorbeur classique de vibrations). En effet, le pompage énergétique est un phénomène transitoire (les oscillations libres sont analysées).

Des paramètres du système (3.33) comme c_1 , c_2 , C peuvent être incertains, i.e. :

$$c_1 = \bar{c}_1 + \tilde{c}_1, \quad c_2 = \bar{c}_2 + \tilde{c}_2, \quad C = \bar{C} + \tilde{C}, \quad (3.34)$$

avec \bar{c}_1 , \bar{c}_2 , \bar{C} les paramètres du système déterministe et \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 , \tilde{C} les parties aléatoires des paramètres. Ainsi, dans notre cas, l'amortissement et la raideur non linéaire sont considérés comme incertains car l'amortissement n'est pas bien connu et nous considérons des réponses à des impulsions pour lesquelles l'amortissement est sensé jouer un rôle important. De plus, de part le vieillissement de la structure (ce qui modifie les paramètres), une perte de nonlinéarité peut se produire. Les \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 , \tilde{C} sont réécrits sous la forme (avec un développement de Karhunen-Loeve [Loeve, 1977] par exemple) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_1 = \sum_{k=1}^n c_{1k} \xi_k, \\ \tilde{c}_2 = \sum_{k=1}^n c_{2k} \xi_k, \\ \tilde{C} = \sum_{l=1}^n C_l \xi_l, \end{array} \right. \quad (3.35)$$

où les ξ_k , ξ_l sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes avec une moyenne nulle et une variance unité, et n est l'ordre de développement. c_{1k} , c_{2k} , et C_l ($k, l = 1, \dots, n$) représentent les coefficients dans le développement de Karhunen-Loeve par exemple. Le modèle choisi suppose que les paramètres aléatoires soient gaussiens. $\{\xi_i(\theta)\}_{i=0}^{\infty}$ variables aléatoires gaussiennes orthonormales sont considérées (θ est l'évènement aléatoire). $\Theta(\xi)$ est appelé l'espace généré par $\{\xi_i(\theta)\}_{i=0}^{\infty}$. Il est connu [Dessombz, 2000] que n'importe quel élément y de Θ admet la représentation :

$$y = y_0 + \sum_{i_1=1}^n y_{i_1} \Psi_1(\xi_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} y_{i_1 i_2} \Psi_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} y_{i_1 i_2 i_3} \Psi_3(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}) + \dots, \quad (3.36)$$

où les Ψ_p ($p = 1, 2, 3, \dots$) dénotent les chaos polynomiaux, qui sont des polynômes des variables aléatoires $\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$ donnés par :

$$\Psi_p(\xi) = \Psi_p(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_p}) = (-1)^p e^{\frac{1}{2} \xi \xi} \frac{\partial^p}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_p}} e^{-\frac{1}{2} \xi \xi}, \quad (3.37)$$

où les $\Psi_p(\xi) = \Psi_p(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_p})$ sont les polynômes d'Hermite multidimensionnels (développés dans [Xiu et Karniadakis, 2002]) de degré p , et ξ est le vecteur de p variables aléatoires normales $\{\xi_{i_k}\}_{k=1}^p$. Les variables sont les variables aléatoires gaussiennes indépendantes multidimensionnelles avec une moyenne nulle et une variance unité. La relation d'orthogonalité des polynômes de chaos généralisés prend la forme :

$$\langle \Psi_i \Psi_j \rangle = \langle \Psi_i^2 \rangle \delta_{ij}, \quad (3.38)$$

où δ_{ij} est le produit de Kronecker dans l'espace d'Hilbert des variables aléatoires ξ , et $\langle \dots \rangle$ est le produit intérieur dans l'espace d'Hilbert déterminé par le support des variables gaussiennes :

$$\langle f(\xi)g(\xi) \rangle = \int f(\xi)g(\xi)W(\xi)d\xi. \quad (3.39)$$

Ici $W(\xi)$ est la fonction pesante correspondant à la base des polynômes de chaos $\{\Psi_i\}$. Dans le cas des polynômes d'Hermite, la fonction de poids dans la relation d'orthogonalité (3.39) est :

$$W(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2} \xi \xi}, \quad (3.40)$$

où n est la dimension de ξ . Par exemple, selon (3.37) les polynômes d'Hermite à une dimension ($n = 1$, $\xi = \xi_1$) sont :

$$\Psi_0 = 1, \quad \Psi_1 = \xi, \quad \Psi_2 = \xi^2 - 1, \quad \Psi_3 = \xi^3 - 3\xi \dots \quad (3.41)$$

Ensuite on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = c_{1_0} + \sum_{k=1}^n c_{1_k} \xi_k, \\ c_2 = c_{2_0} + \sum_{k=1}^n c_{2_k} \xi_k, \\ C = C_0 + \sum_{l=1}^n C_l \xi_l, \end{array} \right. \quad (3.42)$$

où c_{1_0} , c_{2_0} et C_0 représentent les moyennes; c_{1_k} , c_{2_k} , et C_l ($k, l = 1, \dots, n$) représentent les coefficients dans le développement de Karhunen-Loeve. Comme $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont des éléments de Θ , ils peuvent être développés en séries de polynômes de chaos (sur la base des polynômes de chaos tronqués) mettant en jeu les coefficients déterministes $y_{1_i}(t)$ et $y_{2_i}(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = \sum_{i=0}^N y_{1_i}(t) \Psi_i(\{\xi\}_{i=1}^n), \\ y_2(t) = \sum_{i=0}^N y_{2_i}(t) \Psi_i(\{\xi\}_{i=1}^n), \end{array} \right. \quad (3.43)$$

où l'on a remplacé la sommation infinie de ξ dans l'Equation (3.36) par une sommation tronquée de termes finis de ξ dans l'espace de dimension finie. Les processus aléatoires ont été décomposés en un jeu de fonctions déterministes dans les variables spatio-temporelles multipliées par une base de polynômes aléatoires qui sont indépendants de ces variables. y_1 et y_2 sont ensuite remplacés par leur développement dans l'Equation (3.33), et les équations obtenues sont multipliées par Ψ_m for $m = 0 \dots N$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^N (\varepsilon M \dot{y}_{1_i} + c_{1_0} \dot{y}_{1_i} + \gamma y_{1_i} - \gamma y_{2_i}) \Psi_i \Psi_m + \sum_{i=0}^N \sum_{k=1}^n c_{1_k} \dot{y}_{1_i} \xi_k \Psi_i \Psi_m \\ + C_0 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N y_{1_i} y_{1_j} y_{1_k} \Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_m + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \sum_{l=1}^n C_l y_{1_i} y_{1_j} y_{1_k} \xi_l \Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_m = 0, \\ \sum_{i=0}^N (M \dot{y}_{2_i} + c_{2_0} \dot{y}_{2_i} + (k_2 + \gamma) y_{2_i} - \gamma y_{1_i}) \Psi_i \Psi_m + \sum_{i=0}^N \sum_{k=1}^n c_{2_k} \dot{y}_{2_i} \xi_k \Psi_i \Psi_m = 0, \quad m = 0 \dots N. \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Si la moyenne est réalisée (intégration sur le domaine des variables aléatoires) et si l'on utilise les propriétés d'orthogonalité des polynômes, le jeu d'équations suivant est obtenu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon M \ddot{y}_{1_m} + c_{1_0} \dot{y}_{1_m} + \gamma y_{1_m} - \gamma y_{2_m} + \sum_{i=0}^N \sum_{k=1}^n c_{1_k} \dot{y}_{1_i} \frac{\langle \xi_k \Psi_i \Psi_m \rangle}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \\ + C_0 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N y_{1_i} y_{1_j} y_{1_k} \frac{\langle \Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_m \rangle}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \\ + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \sum_{l=1}^n C_l y_{1_i} y_{1_j} y_{1_k} \frac{\langle \xi_l \Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_m \rangle}{\langle \Psi_m^2 \rangle} = 0, \\ M \ddot{y}_{2_m} + c_{2_0} \dot{y}_{2_m} + (k_2 + \gamma) y_{2_m} - \gamma y_{1_m} = - \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^n c_{2_k} \dot{y}_{2_i} \frac{\langle \xi_k \Psi_i \Psi_m \rangle}{\langle \Psi_m^2 \rangle}, \quad m = 0 \dots N, \end{array} \right. \quad (3.45)$$

avec $y_{1_m}(0) = \dot{y}_{1_m}(0) = y_{2_m}(0) = \dot{y}_{2_m}(0) = 0$ (pour $m \neq 0$) et $\dot{y}_{2_0}(0) = \sqrt{2h}$. Il est important de noter que les valeurs de $\langle \Psi_m^2 \rangle$, $\langle \Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_m \rangle$, et $\langle \xi_k \Psi_i \Psi_m \rangle$ doivent être calculées seulement une fois (beaucoup de valeurs sont nulles grâce aux propriétés des polynômes), et gardées en mémoire pour tous les calculs utilisant cette méthode. La formulation des Equations (3.45) pour $m = 0 \dots N$ conduit au système de $2(N + 1)$ équations différentielles ordinaires déterministes. Ce système d'équations peut être facilement résolu en utilisant des techniques standards pour les équations différentielles déterministes.

Une fois que les y_{i_m} sont connus, il est aisé de trouver la moyenne et la variance de y_1 et y_2 . En effet,

- Moyennes : $E(y_1) = y_{1_0}$ et $E(y_2) = y_{2_0}$,

- Ecart-types : $\sigma_{y_1} = \sqrt{\sum_{i=1}^N y_{1_i}^2 \langle \Psi_i^2 \rangle}$ et $\sigma_{y_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N y_{2_i}^2 \langle \Psi_i^2 \rangle}$.

Ainsi, en considérant dans un premier temps uniquement les paramètres de la structure non linéaire comme incertains, et en considérant $n = 1$ (en prenant par exemple en compte deux termes dans le développement de Karhunen-Loeve), i.e. les paramètres (si notés λ_j) sont supposés être des variables gaussiennes, de moyenne λ_{j_0} et d'écart-type λ_{j_1} :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = c_{1_0} + c_{1_1} \xi, \\ C = C_0 + C_1 \xi, \\ c_2 = c_{2_0}, \end{array} \right. \quad (3.46)$$

où ξ est une variable aléatoire gaussienne avec une moyenne nulle et une variance unité, alors les équations suivantes sont obtenues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon M \ddot{y}_{1m} + c_{10} \dot{y}_{1m} + \gamma y_{1m} - \gamma y_{2m} + \sum_{i=0}^N c_{11} \dot{y}_{1i} \frac{\langle \xi \Psi_i \Psi_m \rangle}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \\ + C_0 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N y_{1i} y_{1j} y_{1k} \frac{\langle \Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_m \rangle}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \\ + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N C_1 y_{1i} y_{1j} y_{1k} \frac{\langle \xi \Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_m \rangle}{\langle \Psi_m^2 \rangle} = 0, \\ \\ M \ddot{y}_{2m} + c_{20} \dot{y}_{2m} + (k_2 + \gamma) y_{2m} - \gamma y_{1m} = 0, \quad m = 0 \dots N. \end{array} \right. \quad (3.47)$$

En considérant un chaos polynomial d'ordre 2 ou 3, les moyennes et les écart-types de $y_1(t)$ et $y_2(t)$ avec et sans couplage peuvent être tracés. Pour voir l'influence de chaque paramètre séparément, deux cas sont considérés. Premièrement, seule la raideur non linéaire est considérée comme incertaine en prenant $\gamma = 0.04$, $h = 0.01$, $\varepsilon = 0.05$, $M = 1$, $c_1 = 0.01$, $c_2 = 0.01$, $k_2 = 1$, $C_0 = 1$ et $C_1 = 30\% \times C_0$, comme montré sur la Figure 3.7. Le phénomène de pompage

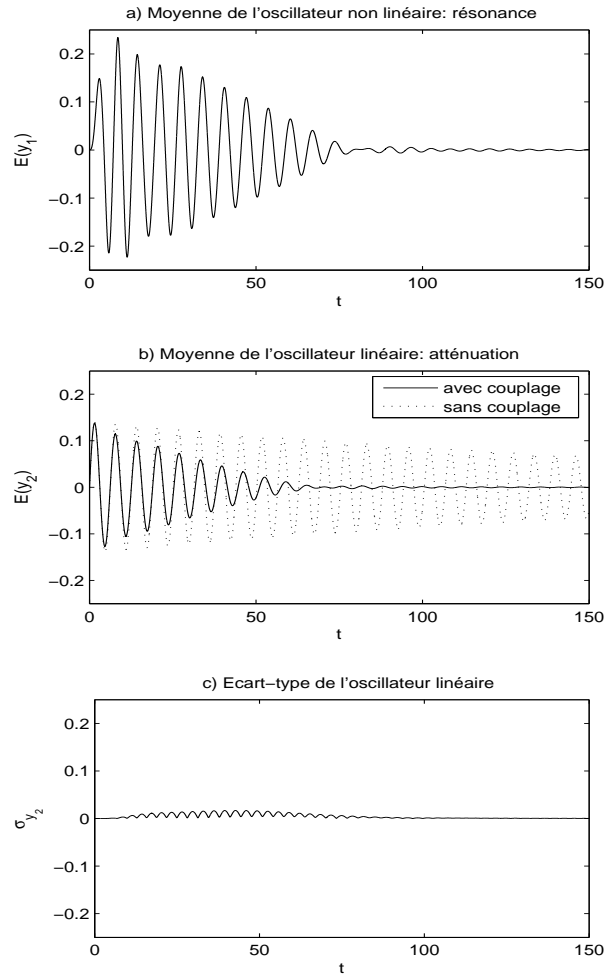


FIG. 3.7 – Moyennes et écart-types des oscillateurs sans et avec couplage en utilisant un chaos d'ordre 2 et avec C incertain.

énergétique se produit encore quand une énergie suffisante initiale h est injectée même si C est in-

certain (avec C_1 important). Dans les travaux précédents, il a été montré [Vakakis et al., 1999, Vakakis et al., 2003, Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001, Gendelman, 2001] que le pompage énergétique est dû à une capture de résonance 1 : 1 (les deux structures oscillent à la même fréquence). Il s'agit d'un phénomène dynamique transitoire qui se produit dans des oscillateurs non conservatifs couplés et conduit à une capture de résonance transitoire du flot dynamique sur une variété résonante 1 : 1 du système. Ainsi, quand le phénomène de pompage énergétique se produit, comme illustré sur la Figure 3.7, l'oscillateur non linéaire rentre en résonance en transitoire (la moyenne de y_1 Figure 3.7 a)) avec l'oscillateur linéaire (les deux oscillateurs oscillent à la même fréquence). L'énergie est alors transférée (pompée) vers l'attache non linéaire dans un sens de façon irréversible et une complète atténuation des vibrations dans l'oscillateur linéaire se produit donc (la moyenne de y_2 Figure 3.7 b)). Comme l'écart-type (3.7 c)) de y_2 est très faible l'atténuation complète sera bien réalisée.

Ce phénomène d'énergie initiale suffisante pour obtenir du pompage énergétique dans le cas déterministe a été décrit dans [Gendelman et al., 2001]. Un chaos d'ordre 2 ou 3 est utilisé car l'approximation est assez bonne. L'erreur comparée à une solution "exacte" est faible (ce point a été souligné dans [Dessombz, 2000] pour des équations linéaires). En effet, pour vérifier que la projection sur les chaos polynomiaux est une bonne approximation de la réponse aléatoire, cette méthode peut être comparée avec une simulation Monte-Carlo. Cette dernière méthode est plus consommatrice de temps et est seulement une méthode numérique mais elle fournit des résultats "exacts". En effet, en utilisant un chaos d'ordre 3, un jeu de 8 équations différentielles ordinaires déterministes doit être résolu alors qu'en utilisant 10000 itérations de Monte-Carlo (de telle manière à ce que la simulation de Monte-Carlo converge très bien), deux équations différentielles ordinaires déterministes (elles sont du même type que les équations différentielles ordinaires utilisées avec un chaos d'ordre 3) doivent être résolues 10000 fois. On a donc 20000 équations différentielles ordinaires à résoudre. En faisant la comparaison entre les réponses du précédent Système (3.47) avec les paramètres précédents et une simulation Monte-Carlo, une bonne concordance (même pour l'écart-type) est observée, comme montré sur la Figure 3.8. Donc, les chaos polynomiaux (même d'ordre 2) représentent un moyen efficace d'obtenir les réponses transitoires quand des incertitudes sont introduites. La projection est une approximation globale (projection sur des polynômes orthogonaux) par comparaison à l'approximation locale effectuée lors d'un développement en séries de Taylor. L'ordre suffisant considéré est donc très faible, ce qui n'est pas le cas avec des séries de Taylor où des ordres supérieurs dans les séries doivent être considérés pour obtenir une bonne convergence. Ensuite, seul l'amortissement de l'oscillateur non linéaire est considéré comme incertain. En prenant les mêmes paramètres que précédemment avec $C = C_0 = 1$, $c_{1_0} = 0.01$, $c_{1_1} = p \times c_{1_0}$, on peut observer que le pompage énergétique semble efficace pour un grand écart-type, comme montré sur la Figure 3.9, où $p = 30\%$ (atténuation complète de la moyenne des vibrations de l'oscillateur primaire linéaire $E(y_2)$ après $t = 60s$ sur la Figure 3.9 b) avec résonance de l'oscillateur non linéaire $E(y_1)$ sur la Figure 3.9 a)). En choisissant un développement en polynômes de chaos d'ordre 2, le calcul de la moyenne et de l'écart-type du ratio d'énergie en_1 localisé dans la masse ajoutée non linéaire (où les énergies sont calculées en utilisant l'hamiltonien du système initial sans amortissement) montre (sur la Figure 3.9 c) et d)) que le pompage énergétique se produit avec une bonne efficacité quand l'amortissement est incertain puisqu'un important ratio d'énergie est rapidement transféré vers la structure ajoutée en moyenne (l'écart-type est faible). La moyenne de ce ratio d'énergie est :

$$E(en_1) = \frac{\varepsilon}{2h}(\dot{y}_{10}^2 + \dot{y}_{11}^2 + 2\dot{y}_{12}^2) + \frac{C}{4Mh}(y_{10}^4 + 3y_{11}^4 + 60y_{12}^4 + 6y_{10}^2y_{11}^2 + 12y_{10}^2y_{12}^2 + 24y_{10}y_{11}^2y_{12} + 32y_{10}y_{12}^3 + 60y_{11}^2y_{12}^2). \quad (3.48)$$

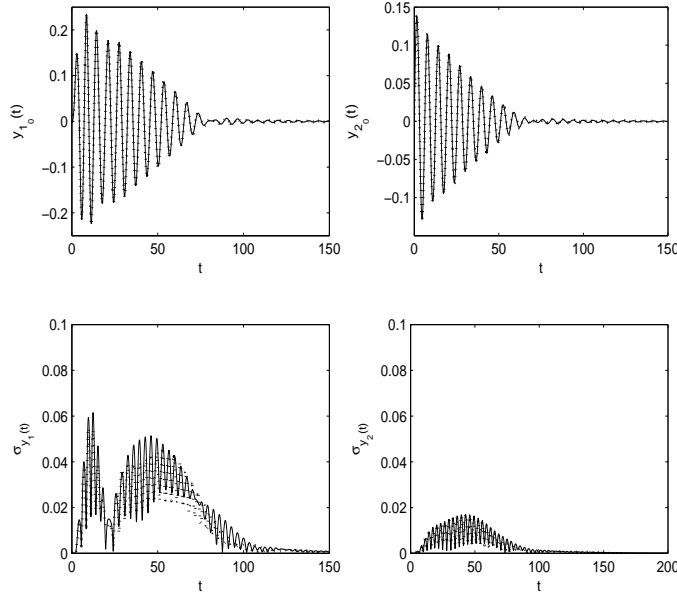


FIG. 3.8 – Développement en polynômes de chaos d'ordre 2 (ligne solide $-$) : comparaison avec une simulation Monte-Carlo (ligne pointillée \dots).

3.1.1.2.2 Etudes analytiques

Dans ce qui suit, on analyse les effets des paramètres incertains analytiquement.

Dans un premier temps, le cas de la raideur non linéaire est considéré.

Il faut souligner que les méthodes classiques de perturbations ne peuvent pas être utilisées puisque le coefficient de la nonlinéarité n'est pas nécessairement faible. C'est pourquoi un développement en polynômes de chaos peut être utilisé pour analyser le comportement des modes normaux non linéaires. Comme nous le verrons par la suite, une information importante sur l'efficacité de l'absorbeur peut être extraite de l'analyse du système conservatif correspondant. En effet, le pompage énergétique peut se produire uniquement dans le système amorti, et est dû à une capture de résonance 1 : 1 de la dynamique sur une variété résonante 1 : 1 du système [Vakakis et Gendelman, 2001]. [Vakakis et al., 2003] ont relevé un fait paradoxal : bien que le pompage énergétique ne puisse avoir lieu que dans le système amorti, la dynamique gouvernant le phénomène est influencée par la structure des modes normaux non linéaires (NNMs), i.e., les mouvements périodiques libres et synchrones du système sous-jacent non amorti et non forcé [Vakakis et al., 1996].

Dans l'analyse suivante, on étudie les NNMs du système non amorti d'oscillateurs couplés. Comme montré dans [Gendelman et al., 2003], cette analyse des NNMs fournit les conditions nécessaires pour l'apparition du pompage énergétique non linéaire dans le système amorti correspondant. En dénotant $D\varepsilon^2 = \frac{\gamma}{M}$, $F\varepsilon = \frac{C}{M}$ et en choisissant $\frac{k_2}{M} = 1$ par simplicité (si ce n'est pas le cas, un simple changement d'échelle de temps peut être fait), le système d'Equations

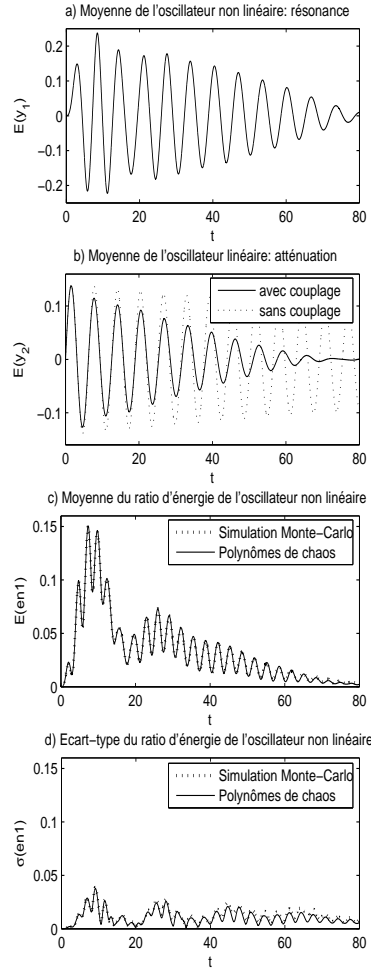


FIG. 3.9 – Moyennes et écart-types des oscillateurs sans et avec couplage et ratio d'énergie (moyenne et écart-type) dans l'oscillateur non linéaire en utilisant un chaos d'ordre 2 et avec c_1 incertain.

(3.33) devient sans amortissement :

$$\begin{cases} \varepsilon \ddot{y}_1 + F\varepsilon y_1^3 + D\varepsilon^2(y_1 - y_2) = 0, \\ \ddot{y}_2 + y_2 + D\varepsilon^2(y_2 - y_1) = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Le ratio de masse ε est supposé être faible ce qui a du sens pour des applications pratiques. Les ordres relatifs des paramètres sont choisis pour assurer un comportement non trivial. Avec le changement de variables $y_1 = \sqrt{\varepsilon}y$, $y_2 = \varepsilon x$, et en dénotant $\omega_2^2 = 1 + D\varepsilon(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon})$, mais également $\omega_1^2 = D\varepsilon(1 - \sqrt{\varepsilon})$, $\beta = D\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$, le système d'Equations (3.49) devient :

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega_1^2 y + F\varepsilon y^3 + \beta(y - x) = 0, \\ \ddot{x} + \omega_2^2 x + \beta(x - y) = 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

On exprime le Système (3.50) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{y} + (\omega_1^2 + \beta)y + F\varepsilon y^3 - \beta x = 0, \\ \ddot{x} + \omega_2^2 x - \beta y = 0, \end{cases} \quad (3.51)$$

où $\omega^2 = \omega_2^2 + \beta$ ($= \frac{k_2 + \gamma}{M}$). F est incertain et peut être réécrit sous la forme (avec un développement de Karhunen-Loeve par exemple car en pratique pour évaluer F , il y a souvent des erreurs d'imprécision avec l'identification non linéaire) : $\tilde{F} = F_0 + \xi F_1$. Ensuite, on peut utiliser le cadre standard d'analyse de la capture de résonance [Gendelman et al., 2001] pour approcher les réponses transitoires du système hamiltonien où la transformation suivante en variables complexes [Vakakis et Gendelman, 2001] est introduite :

$$\Gamma_1 = \dot{x} + j\omega x, \quad \Gamma_2 = \dot{y} + j\omega y, \quad (3.52)$$

et (3.51) sont réécrites comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\Gamma}_1 - j\omega\Gamma_1 + \frac{j\beta}{2\omega}(\Gamma_2 - \Gamma_2^*) = 0, \\ \dot{\Gamma}_2 - \frac{j\omega}{2}(\Gamma_2 + \Gamma_2^*) - \frac{\omega_1^2 + \beta}{2\omega}j(\Gamma_2 - \Gamma_2^*) + \frac{\beta j}{2\omega}(\Gamma_1 - \Gamma_1^*) - \frac{j\tilde{F}\varepsilon}{8\omega^3}(\Gamma_2 - \Gamma_2^*)^3 = 0, \end{cases} \quad (3.53)$$

où l'étoile dénote le conjugué complexe. En supposant des oscillations rapides à la fréquence ω (quand le pompage énergétique se produit, les deux oscillateurs rentrent en résonance à la même fréquence, comme montré dans les études numériques précédentes) :

$$\Gamma_1 = \varphi_1 e^{j\omega t}, \quad \Gamma_2 = \varphi_2 e^{j\omega t}, \quad (3.54)$$

en moyennant sur les termes périodiques rapides $e^{j\omega t}$, et en exprimant les amplitudes complexes sous la forme suivante (N est la première intégrale du mouvement) :

$$\varphi_1 = N \cos \alpha e^{j\delta_1}, \quad \varphi_2 = N \sin \alpha e^{j\delta_2}, \quad (3.55)$$

on obtient le jeu suivant d'équations ($\delta = \delta_1 - \delta_2$) :

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{1}{2\omega} \sin \delta, \\ \delta' = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega_1^2 + \beta}{2\omega} - \frac{3\tilde{F}\varepsilon N^2}{8\omega^3} \sin^2 \alpha \right) + \frac{1}{\omega} \cos \delta \cot 2\alpha. \end{cases} \quad (3.56)$$

Les oscillations périodiques libres (modes normaux non linéaires) du Système (3.51) correspondent aux points stationnaires :

$$\begin{cases} \alpha' = 0 \Rightarrow \delta = 0, \pi, \\ \delta' = 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta} \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega_1^2 + \beta}{2\omega} - \frac{3\tilde{F}\varepsilon N^2}{8\omega^3} \sin^2 \alpha \right) \pm \frac{1}{\omega} \cot 2\alpha = 0. \end{cases} \quad (3.57)$$

On peut considérer uniquement une des deux valeurs stationnaires de δ (ce sont les mêmes conclusions). Ainsi, par la suite, on suppose $\delta = 0$. Comme réalisé dans [Gendelman et al., 2003], on introduit la variable $z = \cos 2\alpha$. On peut exprimer la deuxième des équations de (3.57) en fonction de z :

$$f(z, N^2, \tilde{F}) = (1 - z^2) \left(\omega - (\omega_1^2 + \beta) - \frac{3\tilde{F}\varepsilon N^2}{8\omega^3} + \frac{3\tilde{F}\varepsilon N^2}{8\omega^3} z \right)^2 - \frac{4\beta^2}{\omega^2} z^2 = 0. \quad (3.58)$$

Une analyse de bifurcations est faite dans [Gendelman et al., 2003], mais ici on peut construire une expression analytique globale exacte de la branche globale régulière des solutions stationnaires, exprimée par la relation suivante :

$$N^2(z, \tilde{F}) = \frac{8\omega^2}{3\tilde{F}\varepsilon(1-z)} \left(\omega^2 - (\omega_1^2 + \beta)\omega + \frac{2\beta z}{\sqrt{1-z^2}} \right). \quad (3.59)$$

Comme souligné par [Gendelman et al., 2003], dans le cas déterministe, en suivant cette branche quand l'énergie décroît, un mouvement à haute énergie initialement localisé dans l'oscillateur linéaire ($z = +1 \Rightarrow \alpha = 0$) est converti en un mouvement localisé de façon prédominante dans l'oscillateur non linéaire ($z = -1 \Rightarrow \alpha = \pi/2$). Cependant, ici $\tilde{F} = F_0 + \xi F_1$ est incertain, donc N^2 est incertain :

$$N^2(z, \xi) = \sum_{i=0}^{Nc} E_i(z) \Psi_i(\xi), \quad (3.60)$$

où les Ψ_i sont des polynômes de chaos. Donc, si N est remplacé par son développement (3.60), alors l'équation obtenue est multipliée par \tilde{F} et par Ψ_0 en moyennant (intégration sur le domaine des variables aléatoires), alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0 = \frac{8(2F_1^2 - F_0^2)\omega^2}{3F_0(3F_1^2 - F_0^2)\varepsilon(1-z)} \left(\omega^2 - (\omega_1^2 + \beta)\omega + \frac{2\beta z}{\sqrt{1-z^2}} \right), \\ \sigma_{N^2}(z) = \frac{8F_1\omega^2 \sqrt{1 + 2\frac{F_1^2}{F_0^2}}}{3|3F_1^2 - F_0^2|\varepsilon(1-z)} \left| \omega^2 - (\omega_1^2 + \beta)\omega + \frac{2\beta z}{\sqrt{1-z^2}} \right|. \end{array} \right. \quad (3.61)$$

E_0 représente la moyenne de N^2 . Ainsi, en choisissant les mêmes paramètres qu'auparavant : $D = 16$, $\varepsilon = 0.05$, $M = 1$, $k_2 = 1$, $F_0 = 20$ (ainsi, $\gamma = 0.04$, $C = 1$ comme dans les études numériques précédentes) et $F_1 = 30\% \times F_0$, on peut tracer E_0 comme illustré sur la Figure 3.10. Comme montré sur la Figure 3.10, l'approximation analytique (3.61) est précise comparée à une

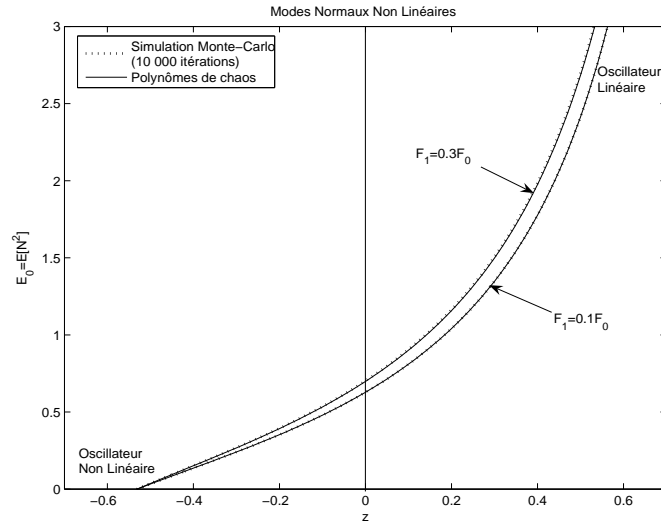


FIG. 3.10 – Calcul analytique global des modes normaux non linéaires : conversion inverse stable de localisation de mode avec $F_0 = 20$, $F_1 = 0.1F_0$ ou $F_1 = 0.3F_0$.

simulation Monte-Carlo. On peut donc analyser le pompage énergétique avec des paramètres incertains analytiquement. La moyenne et l'écart-type peuvent être calculés analytiquement (c'est

une approximation) et peuvent être utiles pour posséder des informations sur le comportement des modes normaux non linéaires. En effet, en suivant la branche de la moyenne quand l'énergie décroît (lorsque l'amortissement est introduit), un mouvement à haute énergie initialement localisé dans l'oscillateur linéaire est converti en un mouvement localisé de façon prédominante dans l'oscillateur non linéaire. De plus, sur la Figure 3.10, on note que la conversion de l'oscillateur linéaire vers l'oscillateur non linéaire a lieu pour une plus importante énergie (N^2) quand l'écart-type F_1 de \tilde{F} (équivalent de la raideur non linéaire C) est plus grand. Ainsi, on peut voir que pour avoir en moyenne un transfert de l'oscillateur linéaire vers l'oscillateur non linéaire, la moyenne de l'énergie initiale injectée (N^2) doit être supérieure quand l'écart-type de \tilde{F} est plus grand (sur la Figure 3.10, quand $F_1 = 0.3F_0$, le transfert a lieu pour la moyenne de N^2 supérieure au cas $F_1 = 0.1F_0$). Ce dernier point n'était pas évident sans cette étude (de plus, quand l'écart-type de \tilde{F} est plus grand, alors l'écart-type de N^2 est plus grand ce qui paraît plus évident). Nous pouvons évaluer ce transfert en considérant qu'il a lieu quand $z = 0$ ($\alpha = \pi/4$). Donc, en considérant un écart-type F_1 autour de la moyenne F_0 , le ratio R d'énergie supplémentaire à injecter entre le cas avec un écart-type et le même cas mais déterministe ($F_0 = 0$) pour obtenir transfert est :

$$R = \frac{F_1^2}{F_0^2 - 3F_1^2}. \quad (3.62)$$

Par exemple, pour éviter un écart de plus de 15% d'énergie (N^2) avec $F_0 = 10$, selon (3.62), on doit avoir $F_1 \leq 32.2\% \times F_0$. C'est pour cela que lorsque $F_1 = 30\% \times F_0$ (le cas étudié numériquement auparavant), la fluctuation d'énergie nécessaire pour obtenir ce transfert est faible, donc le pompage énergétique se produit avec une bonne efficacité.

Dans un deuxième temps, le cas de l'amortissement non linéaire est étudié. De récentes investigations [Gendelman, 2004] basées sur l'approche des variétés invariantes [Vakakis et al., 1996] ont introduit des procédures asymptotiques [Awrejcewicz et al., 1998] appropriées pour le compte explicite de l'atténuation dans le cadre des modes normaux non linéaires. Une méthode modifiée développée dans [Gendelman et al., 2005] est donc utilisée ici pour traiter le rôle de l'amortissement non linéaire. Cette étude théorique est très similaire à [Gendelman, 2004], donc uniquement les résultats finaux sont donnés dans ce qui suit (de plus amples détails sont fournis dans la suite de la présente étude). Le Système (3.49) est considéré avec de l'amortissement (en posant $a_1\varepsilon^2 = \frac{c_1}{M}$ et $a_2\varepsilon^2 = \frac{c_2}{M}$). Les variables complexes [Vakakis et al., 1996] ($\psi_1 = \dot{y}_1 + jy_1$ et $\psi_2 = \dot{y}_2 + jy_2$) sont introduites, des oscillations rapides ($\psi_i = \varphi_i e^{jt}$, $i = 1, 2$) sont supposées et une analyse multi-échelles est réalisée :

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_{i0} + \varepsilon\varphi_{i1} + \varepsilon^2\varphi_{i2} + \dots, \quad i = 1, 2, \\ \tau_1 &= \varepsilon^l t, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial\tau_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\tau_2} + \dots \end{aligned} \quad (3.63)$$

Les variables complexes sont développées avec les parties module et argument :

$$\varphi_{10} = R_1 e^{j\vartheta_1}, \quad \varphi_{20} = R_2 e^{j\vartheta_2}, \quad (3.64)$$

où $R_i, \vartheta_i, i = 1, 2$ sont des fonctions dépendantes de τ_2 . En posant $Z = R_1^2$ (mesure de l'énergie dans le premier oscillateur) et après simplification, on obtient finalement ($b = \frac{1}{\varepsilon}$) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_2} \left(Z \left(a_1^2 + \left(D - 2b \left(\frac{1}{2} - \frac{3F}{8} Z \right) \right)^2 \right) \right) \\ + a_2 \left(Z \left(a_1^2 + \left(D - 2b \left(\frac{1}{2} - \frac{3F}{8} Z \right) \right)^2 \right) \right) + D^2 a_1 Z = 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Cette équation différentielle ordinaire peut être réduite à :

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\tau_2} = - \frac{a_2 Z \left(a_1^2 + (D-b)^2 + \frac{3F}{2}(D-b)bZ + \frac{9F^2}{16}b^2 Z^2 \right)}{a_1^2 + (D-b)^2 + 3F(D-b)bZ + \frac{27F^2}{16}b^2 Z^2} \\ - \frac{D^2 a_1 Z}{a_1^2 + (D-b)^2 + 3F(D-b)bZ + \frac{27F^2}{16}b^2 Z^2}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

L'intégrale de (3.66) peut être calculée explicitement (le calcul a été omis pour une meilleure clarté car il s'agit d'une très longue expression). Il doit être mentionné que la solution possède deux points avec des dérivées divergentes, correspondants aux racines du dénominateur dans (3.66). La courbe obtenue a deux points selles. La bifurcation peut être associée avec la rupture du régime résonant des vibrations et la condition d'amplitude pour ce point est déterminée par l'équation suivante (possibilité que le dénominateur de (3.66) s'annule) :

$$a_1^2 + (D-b)^2 + 3F(D-b)bZ + \frac{27F^2}{16}b^2 Z^2 = 0. \quad (3.67)$$

Des solutions réelles de l'Equation (3.67) n'existent que pour $0 < a_1 < \frac{|D-b|}{\sqrt{3}}$. Ainsi, pour $0 < a_1 < \frac{|D-b|}{\sqrt{3}} = a_1^*$, "une bifurcation se produit, i.e. le régime du mode normal non linéaire est rompu avec une décroissance assez abrupte des deux amplitudes, la trajectoire de phase du système couplé quitte la variété résonante et le mode normal non linéaire est totalement détruit comme résultat du passage à travers la bifurcation" [Gendelman et al., 2005]. Il a aussi été montré avec des études énergétiques [Gendelman et al., 2005] que le passage de la trajectoire de phase à travers la bifurcation facilite essentiellement la dissipation d'énergie (décroissance plus abrupte d'énergie). Cependant, l'amortissement dans la structure non linéaire $\tilde{a}_1 = a_{1_0} + \xi a_{1_1}$ est incertain, donc Z est incertain :

$$Z(\tau_2, \xi) = \sum_{i=0}^{N_c} Z_i(\tau_2) \Psi_i(\xi), \quad (3.68)$$

où les Ψ_i sont des polynômes de chaos. Ensuite avec l'aide de l'intégrale explicite de (3.66) et en utilisant (3.68) il est possible de calculer $Z_i, i = 0 \dots N_c$. Par exemple, en prenant les mêmes paramètres que précédemment dans toute l'étude, et en utilisant des développements en polynômes de chaos d'ordre 3 ($N_c = 3$) : $D = 16, \varepsilon = 0.05$ (donc $b = 20$), $F = 20, \tilde{a}_1 = a_{1_0} + \xi a_{1_1}$ avec $a_{1_1} = 40\% a_{1_0}$ et différentes valeurs pour a_{1_0} , $Z_0(\tau_2)$ peut par exemple être tracé comme illustré sur la Figure 3.11 où les deux bifurcations points-selles apparaissent sur la Figure 3.11 a) pour $a_{1_0} = 1.5$ (sous la limite de la valeur critique $a_1^* = 2.31$) et n'apparaissent pas sur la Figure 3.11

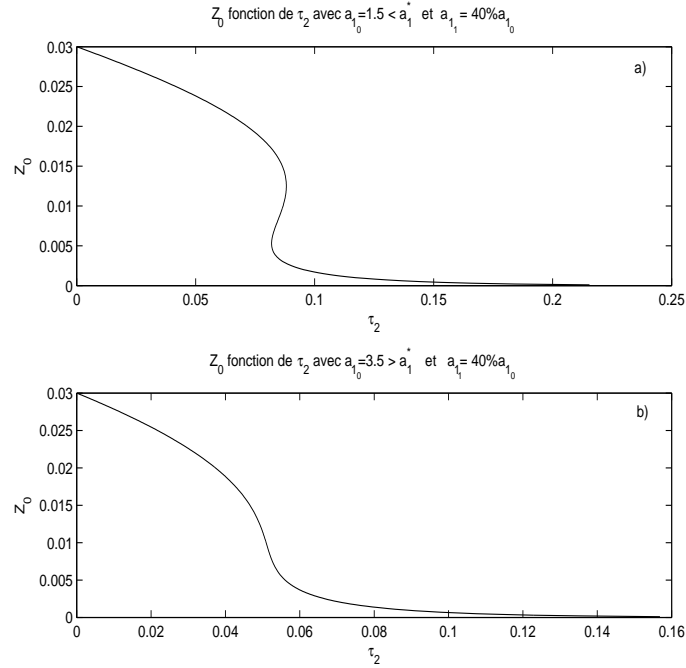


FIG. 3.11 – Courbes avec deux bifurcations points-selles dans certains cas ($a_{10} = 1.5$ ou $a_{10} = 4.5$ et $a_{11} = 40\% \times a_{10}$).

b) pour $a_{10} = 4.5$ (au-dessus de la limite de la valeur critique $a_1^* = 2.31$). Cependant, une telle étude est plus intéressante qu'une étude paramétrique puisqu'elle montre plus d'informations. En effet, même si la moyenne a_{10} de \tilde{a}_1 est au-dessus de la valeur critique, la bifurcation point-selle peut apparaître pour la moyenne de $Z_0(\tau_2)$ en raison de l'écart-type a_{11} comme illustré sur la Figure 3.12 où la bifurcation n'apparaît pas pour $a_{11} = 0$ mais apparaît pour $a_{11} = 40\%a_{10}$ même si a_{10} ($= 2.4$) est au-dessus de la valeur critique a_1^* .

Dans la présente étude, le pompage énergétique a donc été étudié pour un système basique à deux degrés de liberté avec des paramètres incertains. En utilisant un développement en polynômes de chaos, qui est une bonne approximation avec de fortes nonlinéarités, comme montré dans cette étude par rapport à des simulations Monte-Carlo, le phénomène de pompage énergétique a été étudié et apparaît être assez efficace même si les écart-types des paramètres incertains sont forts. Ainsi, les simulations Monte-Carlo ont été considérées comme références pour tester les résultats de l'analyse grâce à l'utilisation de polynômes de chaos (consommant moins de temps). La validité des approximations a été testée et de bons résultats ont été obtenus pour l'apparition du pompage énergétique. Dans des cas particuliers, des résultats analytiques confirmer les résultats numériques obtenus avec des développements en polynômes de chaos. C'est pourquoi ces développements peuvent être utilisés pour obtenir des résultats. Un jeu d'équations différentielles déterministes est obtenu et il peut être intéressant d'analyser plus précisément ces équations obtenues pour étudier la robustesse du pompage énergétique. Même si les lois de probabilité des réponses n'ont pas été étudiées, des résultats statistiques attachés à la moyenne et à la variance fournissent des informations intéressantes sur l'apparition du pompage énergétique. Nous avons notamment vu que lorsque les résultats fournis par la moyenne et la variance pour les réponses, pour les conditions d'apparition du pompage énergétique et du transfert d'énergie, correspondent à un transfert d'énergie efficace, alors la réalisation du système montre un pompage énergétique efficace. Donc avec cette étude nous pouvons dire que même si

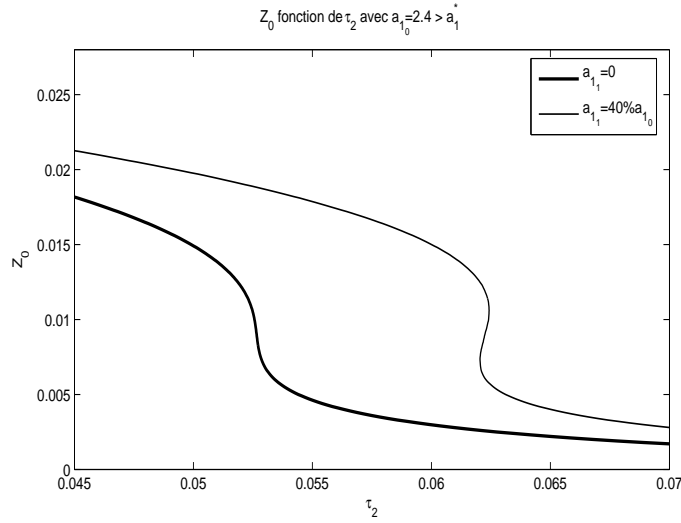


FIG. 3.12 – Apparition ou non de la bifurcation ($a_{10} = 2.4$ et $a_{11} = 0$ ou $a_{11} = 40\% \times a_{10}$).

les paramètres sont incertains, il est possible de concevoir l'attache de telle manière à ce qu'un pompage énergétique efficace soit obtenu. En ce sens, la méthode permet d'étudier la robustesse du pompage énergétique. Ensuite, nous pouvons penser à une application future puisque la méthode semble être efficace quand les paramètres varient légèrement. Par exemple, il est possible de considérer une expérimentation puisqu'en pratique les paramètres non linéaires et l'amortissement ne sont pas nécessairement bien connus et peuvent être déterminés expérimentalement avec l'identification non linéaire (par exemple les auteurs de [Boutin et al., 1999] essaient de déterminer l'amortissement de bâtiments avec des expérimentations) avec des incertitudes. Il est notamment possible de considérer les paramètres comme une combinaison d'une moyenne plus un écart-type. Dans cette étude, nous avons choisi de prendre les paramètres non linéaires comme incertains car pour les applications, même s'il y a une correction expérimentale du modèle, les paramètres ne sont pas connus exactement (erreurs des mesures ou on peut disposer de valeurs théoriques (mais sans correction du modèle) qui peuvent fluctuer avec l'exécution). Les mêmes études peuvent par exemple être faites en considérant l'amortissement linéaire, ou tout autre paramètre, comme incertain. Dans cette étude, les paramètres ont été choisis comme des processus gaussiens, mais cette étude peut être généralisée quand on ne connaît pas la forme analytique de la distribution du processus (c'est souvent le cas dans des applications pratiques ou si elle est connue, il se peut que cela ne soit pas une des distributions basiques, i.e. gaussiennes, de Poisson, etc...). Dans ce cas, on peut choisir un jeu de développements en polynômes de chaos de Wiener-Askey, comme montré dans [Xiu et Karniadakis, 2002]. De plus, le comportement des modes normaux non linéaires a été analysé. Pour avoir en moyenne un transfert de l'oscillateur linéaire vers l'oscillateur non linéaire, la moyenne de l'énergie initialement injectée doit être supérieure quand l'écart-type de la raideur non linéaire est plus grand. Ce phénomène peut aussi être observé en analysant les équations différentielles déterministes obtenues avec le développement en polynômes de chaos.

Même si beaucoup d'informations obtenues qualitativement sont vérifiées avec des investigations numériques, force est de constater que le besoin d'obtenir des résultats analytiques supplémentaires se fait ressentir, en particulier pour pouvoir être capable d'estimer les régions de paramètres où le pompage est efficace. Tel va être l'objectif dans les parties suivantes de ce travail.

3.1.2 Couplage non linéaire

Ensuite, un nouveau système à deux degrés de liberté composé de deux oscillateurs faiblement amortis est considéré, comme montré sur la Figure 3.13. Ici, x_1 et x_2 représentent les déplacements respectifs du système principal linéaire (ou linéarisé) et de l'absorbeur. Les

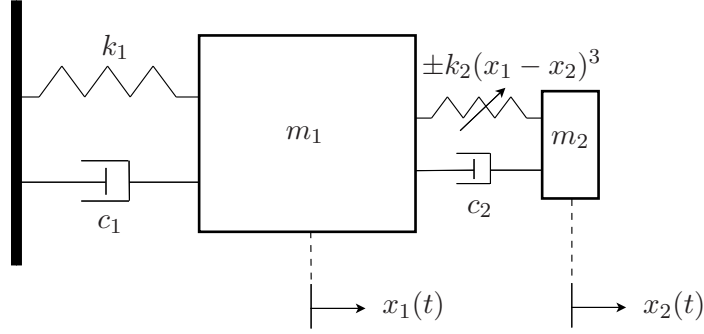


FIG. 3.13 – Système considéré.

équations suivantes sont obtenues (deuxième loi de Newton du mouvement) :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 + c_2 \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + k_2 (x_1 - x_2)^3 = 0, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_2 \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) + k_2 (x_2 - x_1)^3 = 0. \end{cases} \quad (3.69)$$

En définissant $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$ ($\varepsilon \ll 1$) et $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$, $\lambda_1 = \frac{c_1}{m_1}$, $\lambda_2 = \frac{c_2}{m_2}$, $\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$, alors :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \varepsilon \lambda_1 \dot{x}_1 + \varepsilon \lambda_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon \omega_2^2 (x_1 - x_2)^3 = 0, \\ \varepsilon \ddot{x}_2 + \varepsilon \lambda_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \varepsilon \omega_2^2 (x_2 - x_1)^3 = 0. \end{cases} \quad (3.70)$$

Un couplage non linéaire est considéré. Ce couplage est considéré pour des raisons pratiques de design. En effet, il a été souligné dans les études numériques précédentes que pour le cas de bâtiments avec des grandes hauteurs, il n'était pas aisé de relier la seconde masse ajoutée au sol. La structure primaire linéaire est excitée par une impulsion, on considère donc des oscillations libres des structures avec des conditions initiales :

$$x_2(t=0) = x_1(t=0) = 0, \quad \frac{dx_2}{dt}(t=0) = 0, \quad \frac{dx_1}{dt}(t=0) = C_I. \quad (3.71)$$

Comme il a été dit auparavant, le phénomène de pompage énergétique a été étudié récemment [Vakakis et al., 1999, Vakakis et al., 2003] et il correspond au transfert contrôlé dans un seul sens de l'énergie vibratoire vers une structure passive non linéaire où elle localise et diminue par dissipation par amortissement [Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001]. Ainsi, comme nous l'avons déjà souligné, à travers le pompage énergétique, les vibrations d'une structure linéaire (soumise à une excitation externe) peuvent être atténuées grâce à une structure fortement non linéaire. Cette attache à forte non linéarité permet une résonance 1 : 1 responsable du phénomène de pompage énergétique.

Pour observer cette capture de résonance qui se produit, une analyse temps-fréquence doit être réalisée puisque la résonance entre le mode linéaire et le mode normal non linéaire se produit pendant les réponses transitoires. C'est pourquoi, dans un premier temps, nous pouvons

utiliser la Transformée de Hilbert (Hilbert Transform : HT) et ses propriétés qui sont souvent utilisées dans les vibrations libres non linéaires dans le domaine non-stationnaire, en particulier le concept de Fréquence Instantanée (Instantaneous Frequency : IF). Comme une généralisation de la définition de la fréquence, l'IF est définie comme le taux de changement de l'angle de phase au temps t de la version analytique du signal [Ville, 1948]. Etant donné un signal réel $s(t)$, le signal analytique $z(t)$ est un signal complexe ayant le signal actuel comme partie réelle et la transformée de Hilbert du signal comme composante imaginaire, à savoir :

$$z(t) = s(t) + jH[s(t)] = a(t)e^{j\phi(t)}, \quad (3.72)$$

où l'amplitude $a(t)$ et la phase $\phi(t)$ sont données par :

$$a(t) = \sqrt{(s(t))^2 + (H[s(t)])^2} \quad \text{et} \quad \phi(t) = \tan^{-1} \left(\frac{H[s(t)]}{s(t)} \right), \quad (3.73)$$

et la Transformée d'Hilbert est donnée par la valeur principale de l'intégrale suivante :

$$H[s(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (3.74)$$

La Fréquence Instantanée est définie par :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}. \quad (3.75)$$

La définition de la Fréquence Instantanée capture la variation dans le temps de la fréquence de façon précise, alors que lorsque le domaine de Fourier est utilisé, les résultats contiennent un nombre important de composants avec des fréquences différentes et la simple nature du signal est perdue. Ainsi, une analyse des fréquences peut être performante avec le calcul de l'IF. Pour vérifier que l'IF capture bien le changement de la fréquence instantanée, on peut traiter un signal numérique construit. Par exemple, on peut considérer le cas de la migration de fréquence d'un signal entre 0 et 16Hz (construit numériquement de cette façon) et le traiter à l'aide de la Transformée de Hilbert. Le résultat est tracé sur la Figure 3.14. Cette figure illustre bien la variation temporelle de la fréquence. Ainsi, le phénomène de pompage peut être étudié comme montré sur la Figure 3.15 ($\frac{m_2}{m_1} = 0.025$, $\frac{k_1}{m_1} = 1$, $\frac{k_2}{m_1} = 1$, $\frac{c_1}{m_1} = 0.0015$, $\frac{c_2}{m_1} = 0.0015$ et $C_I = 0.13$). L'amortissement naturel est très faible pour mieux voir le phénomène et les différentes résonances où l'attache non linéaire s'engage dans une résonance non linéaire. Clairement, quand le pompage énergétique se produit, il apparaît qu'une capture de résonance se produit avec l'oscillateur non linéaire : la fréquence instantanée de $x_2(t)$ devient identique à la fréquence instantanée du mode linéaire, comme illustré sur la Figure 3.15 c) (un transfert d'énergie se produit). Comme l'énergie de l'oscillateur linéaire décroît en raison de l'amortissement, l'attache s'engage dans une résonance 1 : 1 pendant laquelle un transfert d'énergie ciblé de la structure linéaire vers la structure non linéaire se produit (atténuation de x_1 sur la Figure 3.15). De plus, comme souligné dans [Lee et al., 2005] et comme montré sur la Figure 3.15 c), entre 0 et 50s un phénomène de battements semble jouer un rôle de "déclencheur" pour un fort transfert d'énergie non linéaire dans le système en considération, i.e. des battements intervenant tôt (avant $t = 50$ s) jouent le rôle de catalyseur pour un transfert d'énergie efficace. Ensuite une résonance 1 : 1 entre 50s et 250s a lieu.

On considère maintenant des paramètres numériques pour correspondre à une future expérimentation (comme nous le verrons dans la suite de la présente thèse) : $m_2 = 0.33$ kg, $m_1 = 3.3$ kg

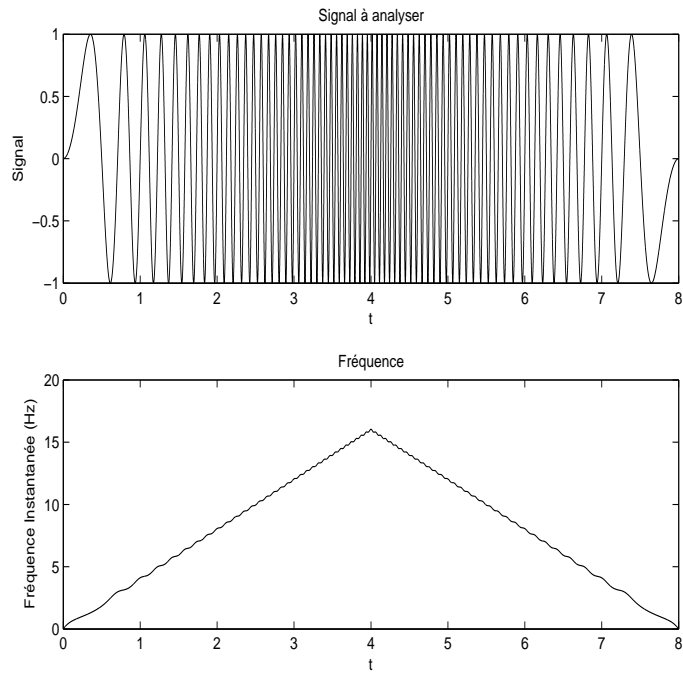


FIG. 3.14 – Etude d’une migration de fréquence grâce à la Transformée de Hilbert.

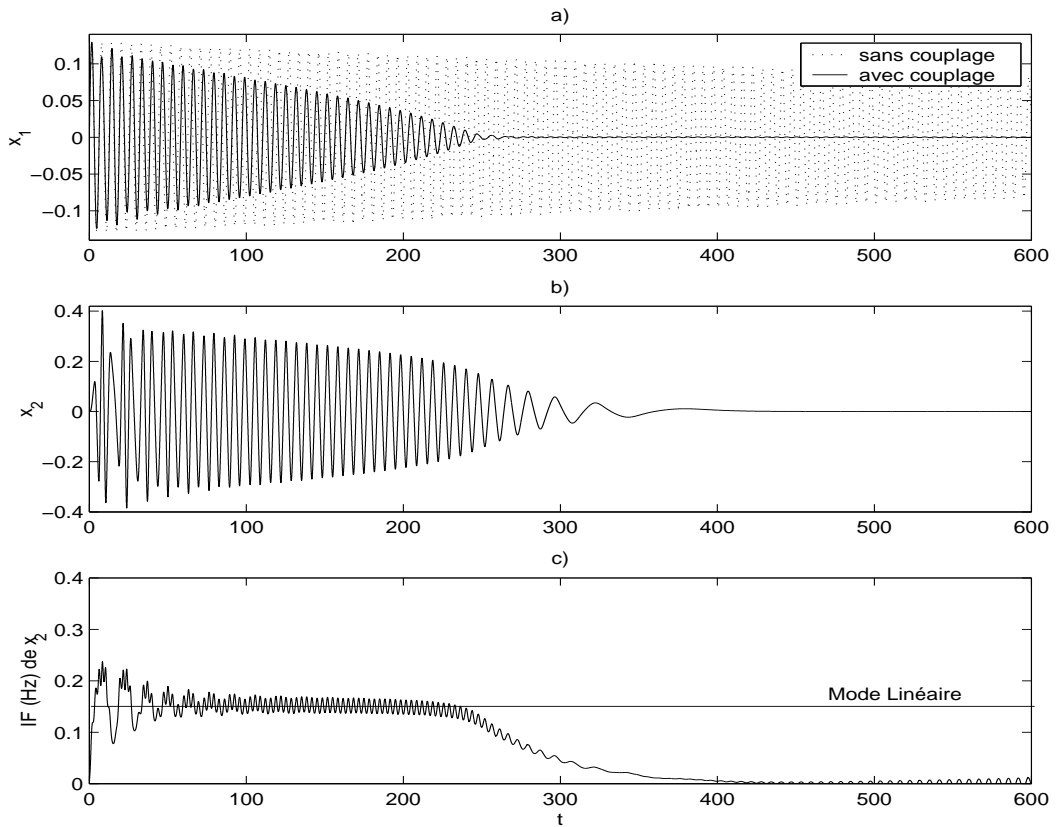


FIG. 3.15 – Phénomène de pompage énergétique grâce à une résonance 1 : 1.

donc $\varepsilon = 0.1$. On considère aussi $\omega_1 = 29.2 \text{ rad.s}^{-1}$, $c_1 = 1.4 \text{ N.s.m}^{-1}$, $c_2 = 5 \text{ N.s.m}^{-1}$ et $\omega_2^2 = 6,06 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1}$. Ainsi $\lambda_1 = 4.24$ et $\lambda_2 = 15.15$. L’amortissement naturel spécifique

pour la structure primaire linéaire ($= \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$) est 0.73%, et l'amortissement naturel spécifique pour la deuxième structure ajoutée ($= \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$) est 0.97%.

La fréquence naturelle de la structure primaire, sans absorbeur, est ainsi choisie à 4.65 Hz (choisie ici pour correspondre à une future expérimentation) et est une valeur approchée pour la fréquence naturelle fondamentale d'un bâtiment à deux étages.

Ainsi, des impulsions avec des oscillations libres sont considérées. Au moyen de circuits électroniques conçus de façon appropriée, comme présenté sur la Figure 3.16, les équations précédentes (3.69, 3.70) peuvent être analysées (avec pour application la stabilisation de signaux électriques comme je l'ai effectuée); une telle expérimentation permet d'estimer la robustesse du pompage énergétique car les circuits électroniques contiennent inévitablement de l'amortissement additionnel et d'autres facteurs non pris en compte dans les modèles analytiques et numériques. Comme montré sur la Figure 3.17, un transfert d'énergie de l'oscillateur linéaire directement excité vers l'oscillateur non linéaire non excité se produit avec une atténuation des oscillations de la structure linéaire et une résonance du deuxième oscillateur non linéaire avec la même fréquence (ce qui définit une résonance 1 : 1). Le système primaire est réalisé avec des intégrateurs/dérivateurs et le système non linéaire avec des multiplieurs.

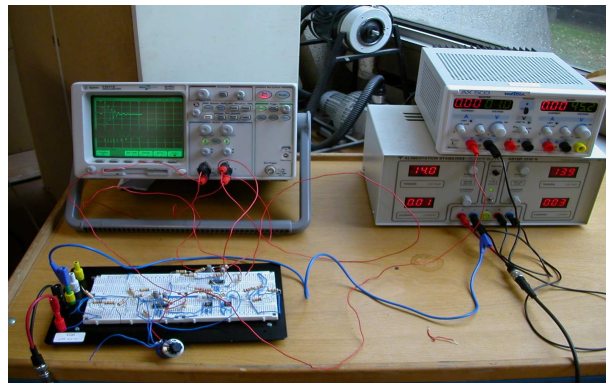


FIG. 3.16 – Modélisation du système considéré avec deux degrés de liberté au moyen d'un circuit électronique.

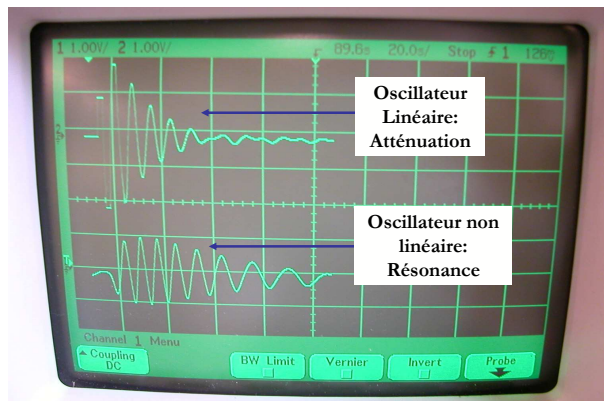


FIG. 3.17 – Résultats obtenus avec la modélisation au moyen d'un circuit électronique.

Une application possible de cet absorbeur non linéaire est relative à l'absorption des vibrations dans les systèmes mécaniques. Cette étude diffère des précédentes [Agnes, 1997, Arnold, 1955, Hunt et Nissen, 1982] puisqu'une nonlinéarité forte est proposée ici. Ce système (3.70) peut exhiber des types de mouvements non disponibles dans les absorbeurs de vibrations linéaires ou faiblement non linéaires. L'énergie vibratoire est transférée vers le second oscillateur ajouté et amortie ensuite. Ainsi l'atténuation des vibrations de la masse principale est réalisée. Ce type d'absorbeur semble être assez efficace pendant les instants transitoires [McFarland et al., 2005, Gendelman et al., 2005]. C'est pourquoi l'utilisation de cet absorbeur non linéaire pendant des excitations réelles transitoires (comme des enregistrements réels de séismes) peut être considérée. C'est alors que je me suis intéressé au cas d'impulsions de type séisme. Le passage théorique d'un forcing sinusoïdal à un tremblement de terre n'est pas évident. Cependant, les tremblements de terre considérés dans cette étude sont vus comme des impulsions (beaucoup d'énergie pendant un temps très court) et il apparaît, à partir du spectre de réponse, que ces tremblements de terre possèdent seulement un pic principal donc ils sont presque mono-chromatiques. Par exemple, on peut considérer les données d'accélérogrammes du tremblement de terre de Friule (Italie, 06/05/1976) à la station de Tolmezzo-Diga Ambiesta, à savoir la composante horizontales N-S (toutes les données des tremblements de terre sont extraites du CD-rom "Strong Motion Database Navigator", Copyright (c) 1996-2000 CubicSoft). Le spectre de réponse (i.e. le spectre de réponse en accélération) est montré sur la Figure 3.18.

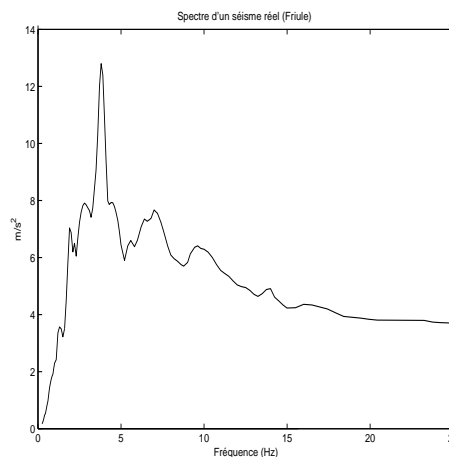


FIG. 3.18 – Spectre (i.e. le spectre de réponse en accélération) d'un tremblement de terre réel à Friule (Italie).

Soient les paramètres de l'Equation (3.70) pour l'attache non linéaire : $\omega_2^2 = 800000$, $\varepsilon = 0.06$, $\lambda_2 = 8.17$ (l'amortissement naturel spécifique dans le système non linéaire est 0.46%). Comme montré sur la Figure 3.19, le pompage énergétique et l'atténuation des vibrations de l'oscillateur linéaire se produisent. Il apparaît alors que les vibrations de la structure attachée, après une résonance, sont totalement détruites à $t = 7.5s$ (Figure 3.19 c)). Ce phénomène peut être mieux vu sur la Figure 3.20 où l'intensité du tremblement de terre a été amplifiée. Cette figure montre que lorsque les vibrations de la structure primaire x_1 dépassent une certaine valeur (à $t = 4.7s$), alors la structure non linéaire ajoutée (x_2) rentre en résonance. Ainsi, l'atténuation de x_1 se produit et on peut voir clairement la destruction totale de x_2 à $t = 6s$ (changement brutal de fréquence) qui garantit une meilleure atténuation (comme nous le verrons plus loin dans cette étude) des vibrations de x_1 .

Il faut noter, dans cet exemple, que le déplacement maximum n'est pas nécessairement atténué de façon significative, puisque le pompage énergétique se produit au-dessus d'une certaine va-

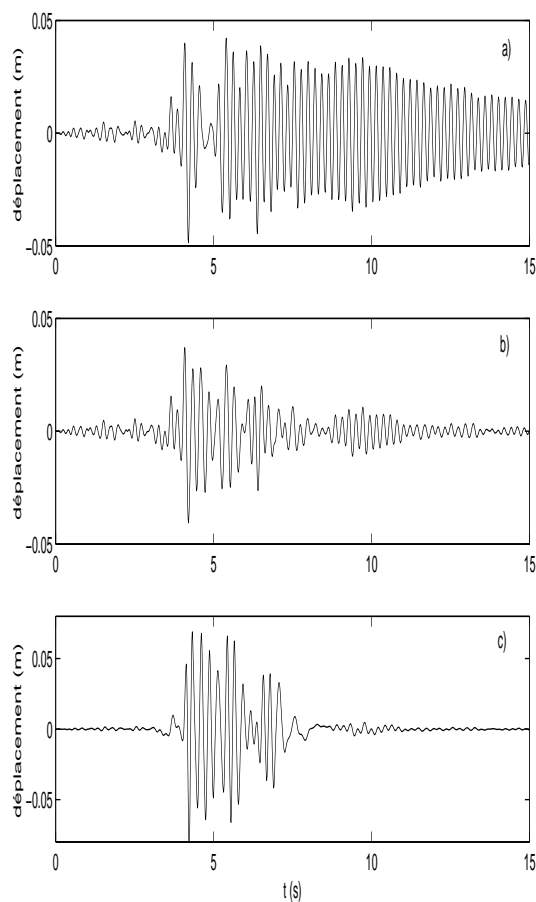


FIG. 3.19 – Pompage énergétique avec un tremblement de terre réel à Friule (Italie). a) Structure primaire sans couplage (i.e. le cas où il n'y a pas d'absorbeur). b) Structure primaire avec couplage (i.e. le cas où un absorbeur est présent). c) Structure attachée avec couplage.

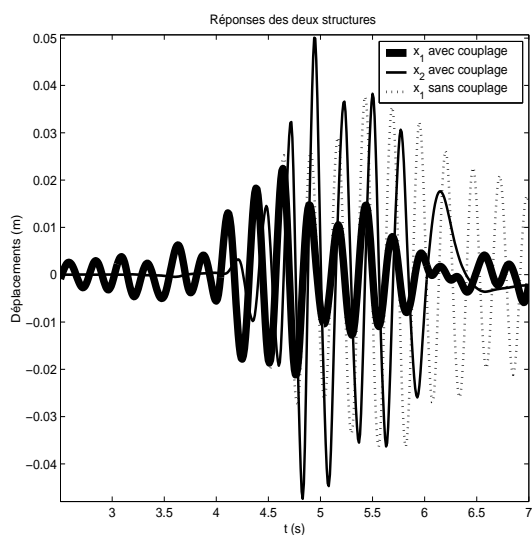


FIG. 3.20 – Pompage énergétique avec un tremblement de terre réel à Friule (Italie).

leur limite de l'amplitude. Cependant au-dessus de cette valeur limite, les vibrations sont ensuite atténuées efficacement. L'amplitude de la puissance fournie par l'accélération du sol, au Système

(3.70) et particulièrement le “timing” de cette puissance fournie est critique. Pour déterminer l’efficacité du pompage énergétique, il est nécessaire d’utiliser des indicateurs de la puissance fournie en entrée. L’Intensité d’Arias est une mesure de la puissance totale fournie par le mouvement du sol au système. Elle permet une bonne corrélation avec plusieurs mesures communes utilisées pour les performances des structures, notamment pour l’étude de la liquéfaction, et de la stabilité des pentes des séismes. L’Intensité d’Arias a été définie par Arias [Arias, 1970] comme suit :

$$I_a = \frac{\pi}{2g} \int_0^\infty a(t)^2 dt, \quad (3.76)$$

où I_a est l’Intensité d’Arias (unité en longueur par temps), g est l’accélération de la gravité et $a(t)$ est l’histoire en temps de l’accélération (unité en g). On peut aussi définir une Intensité d’Arias modifiée I_r de la réponse des structures par :

$$I_r = \frac{\pi}{2g} \int_0^\infty \ddot{x}_i(t)^2 dt, \quad i = 1, 2, \quad (3.77)$$

où $\ddot{x}_i(t)$, $i = 1, 2$ sont les accélérations des deux structures (unité en g). Ainsi, il est possible de tracer l’ I_r de la réponse (accélération) d’une structure comme une fonction de l’ I_a de l’excitation du tremblement de terre \ddot{x}_g . L’Intensité d’Arias du mouvement du sol augmente typiquement avec une augmentation de l’amplitude du tremblement de terre, bien que la relation ne soit pas linéaire pour des amplitudes plus grandes du tremblement de terre. La Figure 3.21 fournit les Intensités d’Arias de l’excitation et des réponses pour la masse primaire, la masse secondaire ajoutée et la structure primaire dans le cas où l’absorbeur n’est pas présent. Une échelle logarithmique est utilisée pour les axes afin de souligner les effets non linéaires et l’intérêt du pompage énergétique. En effet, quand on ne considère pas de couplage (le cas où l’absorbeur n’est pas présent), le tracé est une ligne droite pour un oscillateur linéaire.

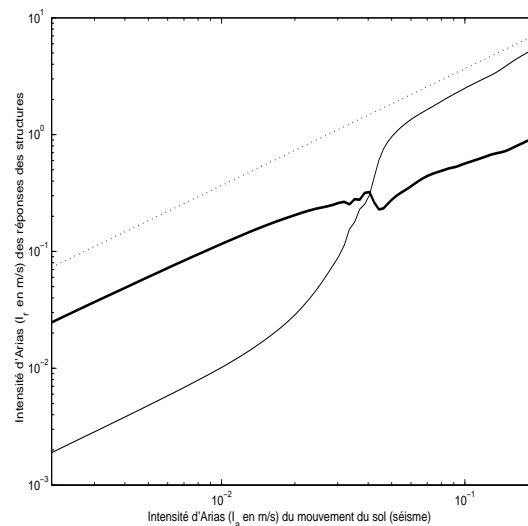


FIG. 3.21 – Intensité d’Arias I_a avec et sans couplage. La structure primaire sans couplage est représentée par une ligne pointillée - -, la structure primaire avec couplage correspond à une ligne épaisse — et la structure attachée avec couplage est représentée par une ligne fine -.

Sur cette Figure 3.21, le transfert d’énergie de la structure primaire vers la seconde apparaît pour l’ I_a de \ddot{x}_g égale à $0.04m.s^{-1}$. Loin de ce point, les courbes sont des lignes droites car le deuxième oscillateur se comporte comme un “tuned mass damper” linéaire. Le pompage énergétique se produit uniquement au-dessus de cette valeur limite de l’amplitude. L’atténuation

de l'accélération de la masse primaire se produit avec un accroissement de l'accélération de la masse secondaire. La destruction du régime de résonance dans la deuxième structure résulte en une diminution abrupte de la puissance de la masse primaire. On peut alors considérer la Figure 3.22 où deux amplitudes différentes du mouvement du sol ont été appliquées ; une en dessous et l'autre au-dessus de la valeur limite.

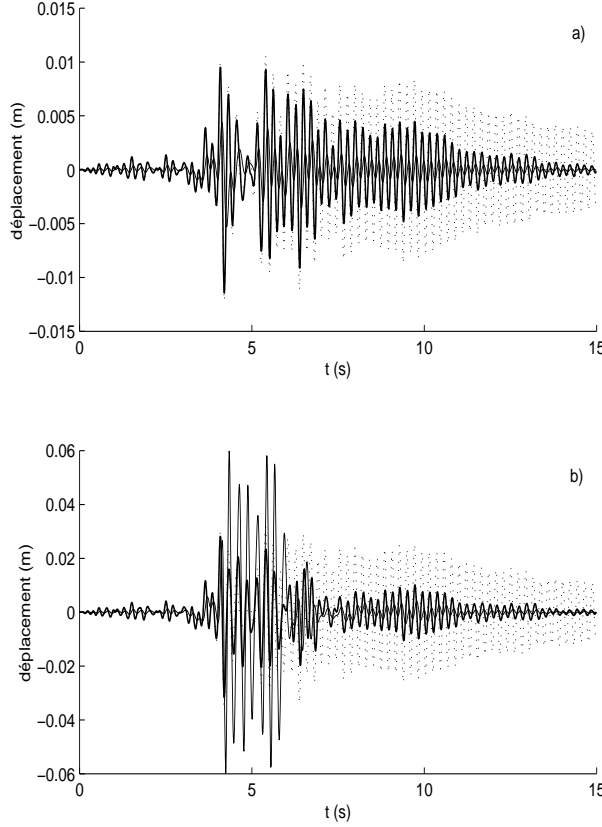


FIG. 3.22 – Deux amplitudes différentes de \ddot{x}_g sont considérées. a) Amplitude = 1m.s^{-2} . b) Amplitude = 3m.s^{-2} . Dans a) et b), la ligne pointillée - - représente le déplacement de x_1 sans couplage, la ligne épaisse — représente le déplacement de x_1 avec couplage et la ligne fine – le déplacement de x_2 avec couplage.

Dans l'étude théorique suivante, le cas d'une impulsion avec des oscillations libres (conditions initiales non nulles) est considéré. Toute cette étude théorique est principalement basée sur [Gendelman et al., 2006]. Le changement de variables :

$$v = x_1 + \varepsilon x_2, \quad w = x_1 - x_2, \quad (3.78)$$

permet de réduire les Equations (3.70) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{v} + \frac{\varepsilon\lambda_1}{1+\varepsilon}\dot{v} + \frac{\varepsilon^2\lambda_1}{1+\varepsilon}\dot{w} + \frac{\omega_1^2}{1+\varepsilon}v + \frac{\omega_1^2\varepsilon}{1+\varepsilon}w = 0, \\ \ddot{w} + \frac{\varepsilon\lambda_1}{1+\varepsilon}\dot{v} + \left(\frac{\varepsilon^2\lambda_1}{1+\varepsilon} + (1+\varepsilon)\lambda_2\right)\dot{w} + \frac{\omega_1^2}{1+\varepsilon}v + \frac{\varepsilon\omega_1^2}{1+\varepsilon}w + (\varepsilon+1)\omega_2^2w^3 = 0. \end{cases} \quad (3.79)$$

Ce changement de variables correspond physiquement à la considération du centre de masses et du déplacement interne du système d'oscillateurs. Ensuite un nouveau faible paramètre est introduit et les variables dépendantes font l'objet d'un changement d'échelle :

$$\mathcal{X} = \varepsilon^{1/3}, \quad V = \mathcal{X}^{-1}v, \quad W = w. \quad (3.80)$$

En prenant en compte (3.80), le Système (3.79) est réduit sous la forme suivante (seuls les termes jusqu'à l'ordre $O(\mathcal{X}^2)$ sont conservés) :

$$\begin{cases} \frac{d^2V}{dt^2} + \omega_1^2 V + \mathcal{X}^2 \omega_1^2 W = 0, \\ \frac{d^2W}{dt^2} + \lambda_2 \frac{dW}{dt} + \mathcal{X} \omega_1^2 V + \omega_2^2 W^3 = 0. \end{cases} \quad (3.81)$$

On est ainsi ramené au système déjà étudié où le couplage entre les deux structures est linéaire et faible et la deuxième structure est "reliée" au sol par un ressort cubique.

Maintenant, un changement d'échelle de temps est effectué en posant $\tau = \omega_1 t$. Ainsi :

$$\begin{cases} \frac{d^2V}{d\tau^2} + V + \mathcal{X}^2 W = 0, \\ \frac{d^2W}{d\tau^2} + a \frac{dW}{d\tau} + \mathcal{X} V + DW^3 = 0, \end{cases} \quad (3.82)$$

où $a = \frac{\lambda_2}{\omega_1}$, $D = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$ et $\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$. Dans les études suivantes, la différentiation par rapport à la variable τ (changement d'échelle) sera représentée par des points au-dessus de la variable qui est différenciée. Comme souligné auparavant, l'objectif de la présente recherche est l'exploration des modes normaux non linéaires des Equations (3.70) au voisinage d'une résonance 1 : 1 (une résonance 1 : 1 est une résonance se produisant entre les deux oscillateurs, chacun oscillant avec la même fréquence). Cela signifie que les deux variables, V et W , sont supposées avoir une fréquence proche de l'unité (dans le nouveau domaine de temps).

Il faut donc envisager que les deux variables soient exprimées sous la forme :

$$\begin{cases} V = \cos(\tau + \mu_1(\mathcal{X}\tau)) f_1(\mathcal{X}\tau), \\ W = \cos(\tau + \mu_2(\mathcal{X}\tau)) f_2(\mathcal{X}\tau). \end{cases} \quad (3.83)$$

où μ_i , $i = 1, 2$ prend en compte le décalage en fréquence et la dérive lente de phase et f_i , $i = 1, 2$ la modulation lente d'amplitude. On se restreint en considérant uniquement les trajectoires de phases avec des conditions initiales dans le domaine d'attraction de la variété résonante 1 : 1. Les Equations (3.82) peuvent être arrangées sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{V} + V + \mathcal{X}^2 W = 0, \\ \ddot{W} + W + \mathcal{X}(\delta[a\dot{W} + DW^3 - W] + V) = 0, \end{cases} \quad (3.84)$$

où $\delta = \mathcal{X}^{-1}$. Si l'estimation présentée dans les Equations (3.83) est valable, alors on obtient :

$$\ddot{W} = -\cos((1 + O(\mathcal{X}))\tau + \varphi_2) f_2(\mathcal{X}\tau) + O(\mathcal{X}) = -W + O(\mathcal{X}). \quad (3.85)$$

Cela signifie que pour avoir une puissance 1 du faible paramètre \mathcal{X} dans la deuxième des Equations (3.84), on doit avoir :

$$\delta[a\dot{W} + DW^3 - W] \sim O(1), \quad (3.86)$$

et l'expression entre crochets doit donc être d'ordre \mathcal{X} . C'est plutôt naturel, car cela décrit une modulation lente et un amortissement des vibrations avec une fréquence proche de l'unité. Ensuite l'étude théorique est très similaire à [Gendelman et al., 2006] et [Gendelman, 2004] donc seulement les résultats finaux sont donnés dans ce qui suit. En effet, en utilisant la

méthode de complexification [Manevitch, 1999] ($\psi_1 = \dot{V} + jV$, $\psi_2 = \dot{W} + jW$) qui consiste à découpler la dynamique lente de la dynamique rapide, en supposant des oscillations rapides ($\psi_i = \varphi_i e^{j\tau}$, $i = 1, 2$) et en introduisant une analyse d'échelles multiples [Nayfeh, 1973] :

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \varphi_{k0} + \mathcal{X}\varphi_{k1} + \mathcal{X}^2\varphi_{k2} \dots, \quad k = 1, 2, \\ \tau_l &= \mathcal{X}^l \tau, \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \mathcal{X} \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \mathcal{X}^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots \end{aligned} \quad (3.87)$$

l'équation suivante est obtenue :

$$\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial \tau_2} = \frac{-\frac{18D}{8}\varphi_{20}|\varphi_{20}|^2 + (j-a)\varphi_{20}}{2\delta(1+a^2 - \frac{24D}{8}|\varphi_{20}|^2 + \frac{108D^2}{64}|\varphi_{20}|^4)}. \quad (3.88)$$

Pour $0 < a < 1/\sqrt{3}$, l'Equation (3.88) présente des singularités dues à la possibilité que le dénominateur s'annule. En effet, pour $0 < a < 1/\sqrt{3}$, une bifurcation se produit, i.e. *“le régime du mode normal non linéaire est rompu résultant en une diminution plutôt abrupte des deux amplitudes. La trajectoire de phase du système couplé quitte la variété résonante et le mode normal non linéaire est totalement détruit comme résultat du passage à travers la bifurcation”* [Gendelman et al., 2006]. En considérant donc une impulsion pour l'excitation avec des oscillations libres, alors en dessous de la valeur critique de a , le régime du mode normal non linéaire est rompu avec une diminution plutôt abrupte des amplitudes x_1 et x_2 , le premier oscillateur continue alors d'osciller avec la même fréquence alors que le second voit son comportement totalement changé. Ce dernier point a été souligné dans [Gendelman et al., 2005]. Dans le cas où l'amortissement non linéaire est au-dessus de la valeur critique, alors il n'existe pas de bifurcation de la variété invariante, donc le mode normal non linéaire amorti persiste dans tout le domaine temporel. Dans [Gendelman et al., 2005], il a été montré avec des études énergétiques que le passage de la trajectoire de phase à travers la bifurcation de la variété invariante facilite essentiellement la dissipation d'énergie (diminution plus abrupte de l'énergie). En considérant donc une impulsion pour l'excitation avec des oscillations libres, ce phénomène se produira si :

$$0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{i.e. } c_2 < \frac{m_2\sqrt{k_1}}{\sqrt{3}m_1} \quad \text{ou} \quad \xi < \sqrt{\frac{4k_1m_2}{3k_2m_1}}, \quad (3.89)$$

où ξ est l'amortissement naturel spécifique.

Comme application, la Figure 3.19 montre le cas d'une excitation de type séisme. Sur cette figure, on peut tout d'abord voir clairement le fait que lorsque la structure primaire dépasse une certaine valeur (sur la Figure 3.19 b)) à $t = 4s$, alors la structure non linéaire rentre en résonance (sur la Figure 3.19 c)). Ensuite, on peut voir clairement sur la Figure 3.19 c) le fait que le mode normal non linéaire est totalement détruit à $t = 7.5s$.

Dans l'intérêt d'une validation du pompage énergétique, les mesures numériques et expérimentales doivent être étudiées au moyen d'un outil de traitement du signal approprié qui est l'outil basé sur les “ondelettes” déjà utilisé dans le deuxième chapitre de cette thèse. En ce qui concerne cette partie les captures de résonances et les modes normaux non linéaires sont principalement analysés grâce à cet outil basé sur les ondelettes.

Par exemple, en prenant $\varepsilon = 0.06$, $\lambda_2 = 8$ (l'amortissement spécifique naturel dans l'oscillateur non linéaire est de 0.44%), $C = 800000$, $\omega_1 = 10\pi$ (une impulsion est considérée), alors la valeur critique de l'amortissement non linéaire λ_2 est $10\pi/\sqrt{3}$. En utilisant donc la méthode

des ondelettes, on peut apercevoir sur la Figure 3.23 (où les outils ondelettes sont utilisés pour x_2) que lorsque $\lambda_2 = 8$ est sous la valeur critique, le pompage énergétique est plus efficace car le mode normal non linéaire est totalement détruit alors que lorsque $\lambda_2 = 22$ (l'amortissement spécifique naturel est donc de 1.23%) est au-dessus de la valeur critique le pompage énergétique est moins efficace puisque le mode normal non linéaire persiste dans tout le domaine temporel, comme montré sur la Figure 3.24.

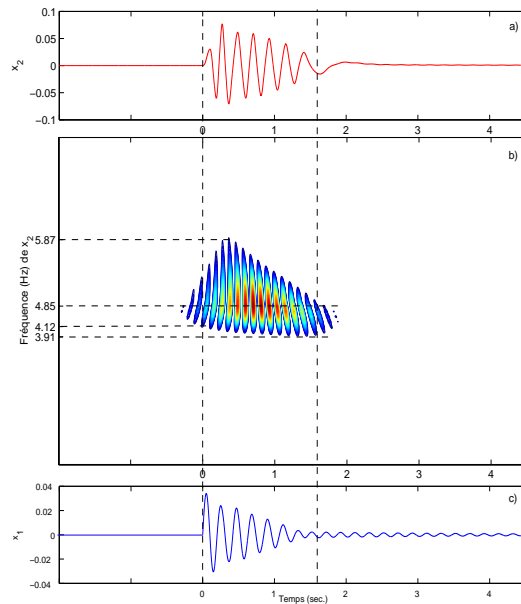


FIG. 3.23 – Analyse en ondelettes avec $\lambda_2 = 8$ ($h = 0.6$).

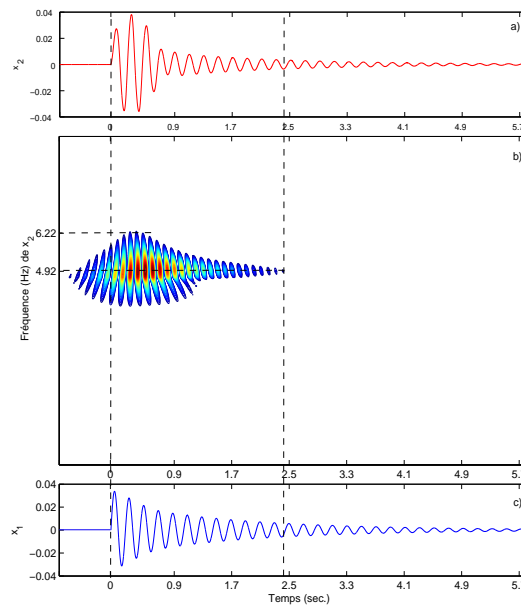


FIG. 3.24 – Analyse en ondelettes avec $\lambda_2 = 22$ ($h = 0.6$).

En effet, comme illustré sur la Figure 3.23, grâce à une capture de résonance 1 : 1 (autour de 5Hz), l'énergie est irréversiblement transférée de la masse primaire vers la structure non

linéaire. On peut aussi observer que le pompage énergétique non linéaire est initié par l'excitation de modes transitoires comme montré sur la Figure 3.23 b) entre 0 et 0.5s (des fréquences plus élevées sont excitées au début de la réponse). De plus, le mode normal non linéaire décroît faiblement entre 0 et 1.5s (succession de contours avec faibles rayons mais pas à un niveau constant de la fréquence : le niveau des centres diminue autour de 4.85Hz) et est complètement détruit à $t = 1.5s$ ce qui produit l'atténuation quasi complète de la réponse de la structure primaire, comme illustré sur la Figure 3.23 c). Sur la Figure 3.24 b), il apparaît clairement que le mode normal non linéaire persiste dans le domaine temporel entre 0 et 2.5s (succession de contours avec de faibles rayons à un niveau constant de fréquence 4.92Hz), c'est pourquoi aucune bifurcation ne se produit et la réponse de la structure primaire est moins atténuée (Figure 3.24 c)).

En résumé comme nous l'avons déjà vu auparavant il faut de l'amortissement dans la structure ajoutée pour déclencher ce phénomène de pompage énergétique (notamment pour l'échange de la stabilité des modes) mais cet amortissement doit être en dessous d'une valeur critique comme montré ici. En général dans les applications traitées jusqu'à présent la valeur critique était toujours assez élevée.

3.2 Vérifications expérimentales

3.2.1 Systèmes considérés

J'ai alors entrepris de vérifier expérimentalement ce phénomène de pompage énergétique : de passer de la théorie à l'expérimentation. Je me suis alors intéressé à des applications en Génie Civil avec le contrôle des vibrations de bâtiments soumis à divers excitations (séismes, vents) et où l'on vient ajouter un couplage fort non linéaire avec un faible amortissement visqueux qui peuvent être réalisés par ajout d'une raideur cubique c'est-à-dire ajout d'une nonlinéarité géométrique. Comme nous l'avons vu auparavant, il faut tout d'abord noter qu'en utilisant une analyse modale le premier mode fondamental peut être modélisé par un oscillateur linéaire équivalent. Ainsi, le système analytique est constitué d'un oscillateur linéaire, pour une structure simple de type bâtiment, et d'un oscillateur fortement non linéaire couplé, pour l'absorbeur passif non linéaire (avec une faible masse). Les termes non linéaires sont de nature cubique. L'excitation du système peut être transitoire (notamment de type séisme). Deux systèmes expérimentaux ont été considérés.

3.2.1.1 Modèle réduit à un étage

Le système expérimental présenté ici a fait l'objet de plusieurs études et a notamment permis une publication dans [Gourdon et al., 2006b]. Le premier système expérimental est montré et représenté sur la Figure 3.25. La masse secondaire, de l'absorbeur, peut glisser le long d'un rail

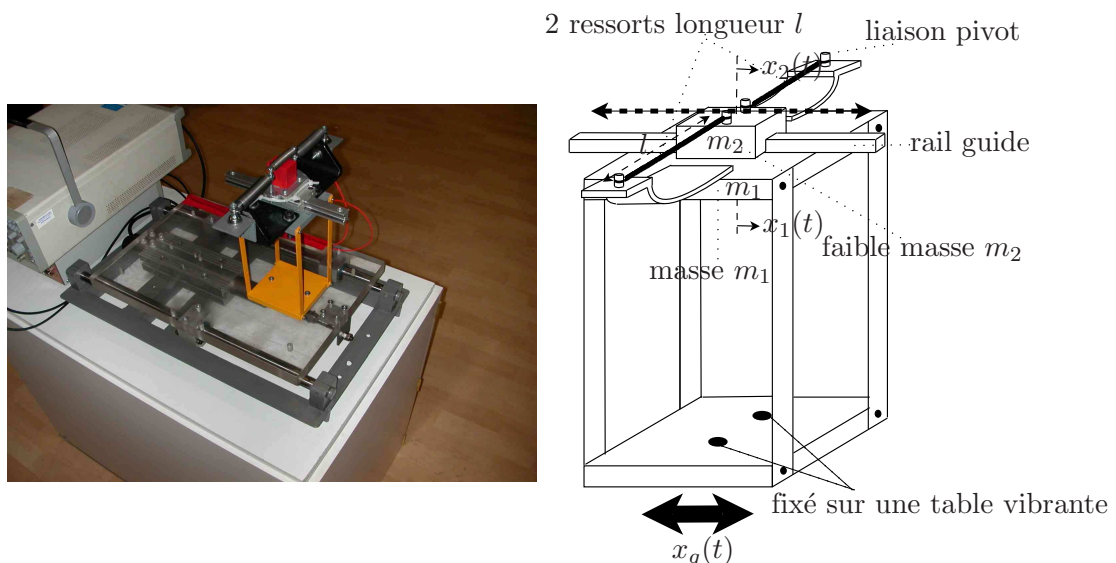


FIG. 3.25 – Système expérimental.

guide en aluminium à roulements fixé en haut du modèle simple de bâtiment. Un modèle réduit de bâtiment à un étage sensé représenté un système masse-ressort a ainsi été conçu. Le système masse-ressort, c'est-à-dire un mode est réalisé à l'aide de 4 poutres d'acier reliées à une masse rectangulaire. $x_1(t)$ et $x_2(t)$ représentent les déplacements absolus respectifs de la masse primaire et de la masse secondaire. $x_g(t)$ représente le déplacement des supports de la structure. Pour des raisons expérimentales pragmatiques, il est plus aisé d'employer les coordonnées absolues que les coordonnées relatives. On note m_1 la masse de la structure primaire et m_2 la masse de la seconde structure ajoutée. Dans cette expérimentation, le coefficient visqueux d'amortissement idéalisé entre la masse primaire et les supports est c_1 et entre la masse primaire et la masse secondaire est c_2 . Nous mesurons l'amortissement naturel présent dans le dispositif a posteriori

sachant qu'il est très faible. La Figure 3.26 montre des photographies additionnelles du dispositif expérimental.

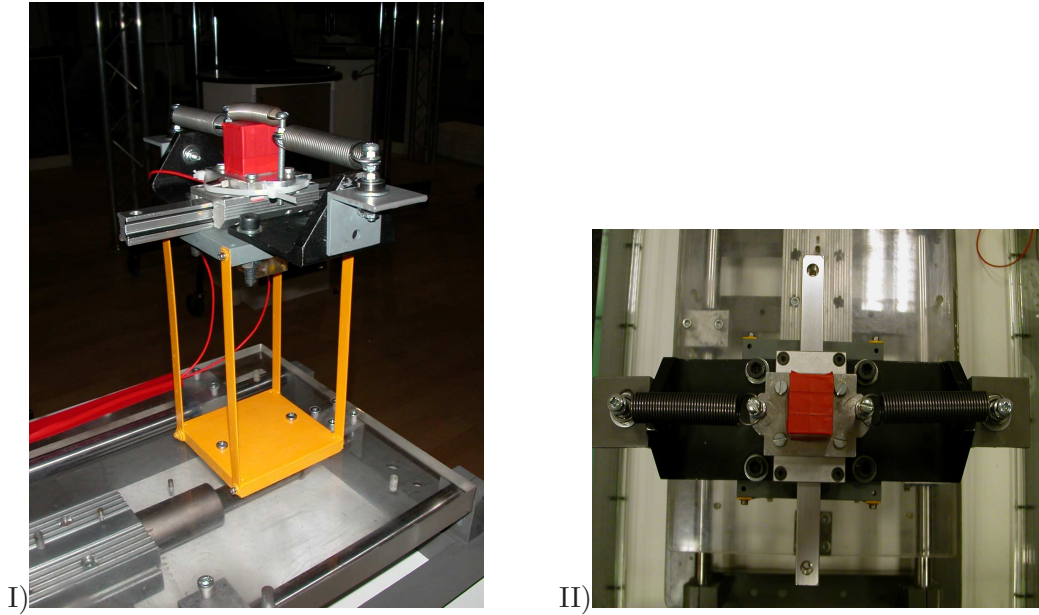


FIG. 3.26 – I) Modèle de bâtiment. II) Nonlinéarité expérimentale.

Les supports du modèle simple de bâtiment sont connectés à une petite table vibrante uniaxiale. Cette table a été conçue, construite et testée au “Earthquake Laboratory of University of Bristol (UK)”. La table elle-même est dirigée par un moteur linéaire Linmot contrôlé par un ordinateur (“Linmot E1000 MT controller” caractérisé par la capacité à produire efficacement quasiment n’importe quel profil d’excitation : balayage sinus, bruits blancs, pulses, séismes,...) qui dirige horizontalement la table le long de rails guides à roulements à billes (glissières). Un marteau calibré est également utilisé pour des impulsions. La table vibrante servira dans la prochaine partie pour le cas d’excitations périodiques. En ce qui concerne la réalisation de la nonlinéarité plusieurs systèmes peuvent être envisagés. J’ai choisi de réaliser une nonlinéarité géométrique de type cubique. Des ressorts coniques, des membranes en acoustique ou tout autre dispositif non linéaire peut être utilisé en fonction des applications. Comme souligné dans [McFarland et al., 2005], la nonlinéarité cubique peut être réalisée géométriquement avec deux ressorts linéaires. (k et l sont respectivement la raideur et la longueur d’un ressort linéaire) comme illustré sur la Figure 3.27. Les ressorts linéaires s’étirent axialement et sont libres en rotation autour de leurs supports. Le comportement de flexion des ressorts induit par les actions d’inertie est négligé. La relation de force de raideur $F(u)$ - déplacement u est donnée par l’équation suivante (3.90) qui est approximativement de nature cubique à l’aide d’un développement en séries de Taylor (où P est la force de pré-tension dans les ressorts et $|u| \ll 1$).

$$f = 2ku + \frac{2u(P - kl)}{\sqrt{l^2 + u^2}} \approx \frac{2P}{l}u + \frac{kl - P}{l^3}u^3 + O(u^5). \quad (3.90)$$

Cependant, comme souligné dans [McFarland et al., 2005], quand la force de pré-tension P est approximativement zéro, les termes linéaires de (3.90) peuvent être négligés. Expérimentalement P doit être fixée à un minimum. Les ressorts ont été calibrés en mesurant le débattement sous une charge statique. En utilisant une variété de ressorts de différentes tailles il est possible d’ajuster le coefficient devant la nonlinéarité cubique. Des valeurs expérimentales dérivées pour $F(u)$ en

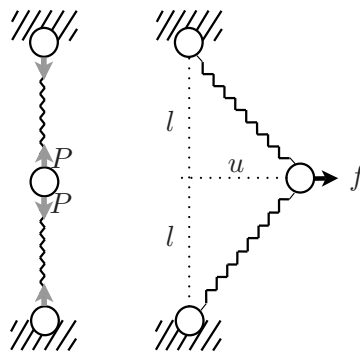


FIG. 3.27 – Conception de la nonlinéarité cubique.

fonction de u sont tracées sur la Figure 3.28 et sont approchées en utilisant une optimisation non linéaire aux moindres carrés pour identifier la caractéristique non linéaire.

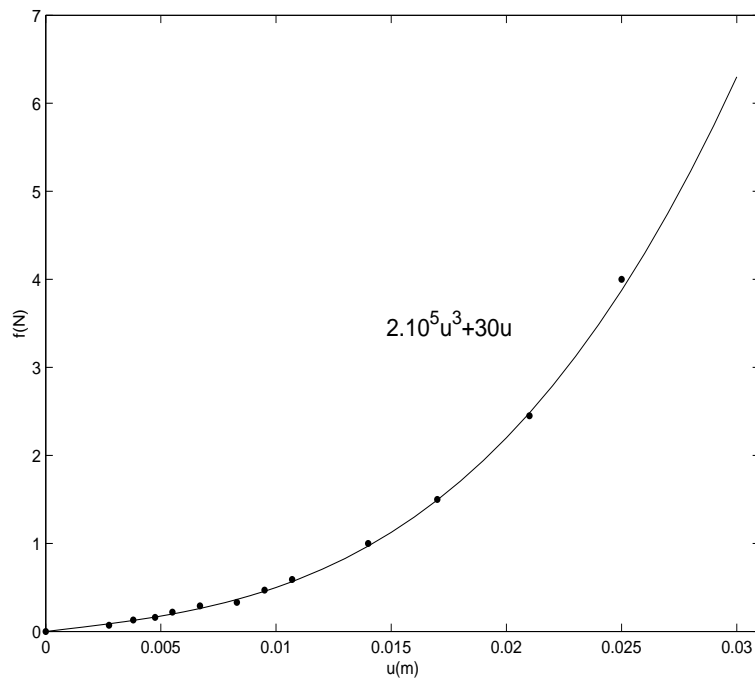


FIG. 3.28 – Caractéristique force-déplacement du ressort non linéaire. Les points correspondent aux résultats expérimentaux et la ligne correspond à une approximation cubique.

Il faut souligner que l'approximation cubique dans l'Equation (3.90) a été très largement utilisée dans de tels problèmes et ainsi les équations sont plus faciles à manipuler puisqu'une analyse théorique (avec des expressions analytiques) est plus aisée et possible. Cependant, dans les simulations numériques, puisque des schémas de Runge-Kutta sont adoptés, on utilisera l'expression exacte. On commentera l'erreur relative qui est très faible quand on utilise l'approximation cubique. Ainsi, le bâtiment et l'absorbeur non linéaire peuvent être idéalisés par le modèle décrit sur la Figure 3.29 et déjà étudié auparavant. Le système complet est donné par les équations suivantes (déjà étudiées auparavant) :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2)^3 = k_1 x_g + c_1 \dot{x}_g, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1)^3 = 0, \end{cases} \quad (3.91)$$

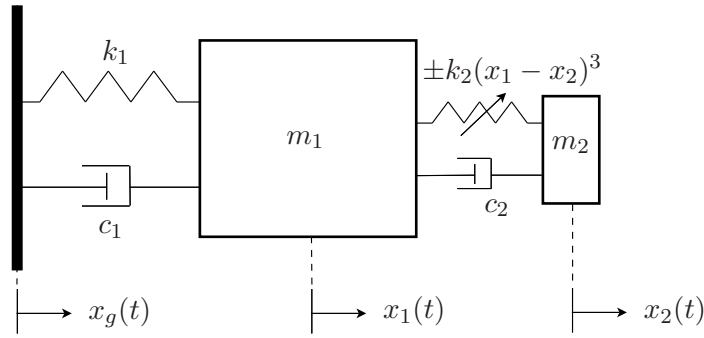


FIG. 3.29 – Schéma du système considéré à deux degrés de liberté.

où $k_2 = \frac{k}{l^2}$. En définissant $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$ ($\varepsilon \ll 1$) et $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$, $\lambda_1 = \frac{c_1}{m_2}$, $\lambda_2 = \frac{c_2}{m_2}$, $\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$, alors :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \varepsilon\lambda_1\dot{x}_1 + \varepsilon\lambda_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_1^2x_1 + \varepsilon\omega_2^2(x_1 - x_2)^3 = \omega_1^2x_g + \varepsilon\lambda_1\dot{x}_g, \\ \varepsilon\ddot{x}_2 + \varepsilon\lambda_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \varepsilon\omega_2^2(x_2 - x_1)^3 = 0. \end{cases} \quad (3.92)$$

Deux accéléromètres PCB piezotronics, avec une bonne sensibilité aux basses fréquences, ont été attachés à la structure (Figures 3.25 et 3.26). L'un est connecté sous la plaque de la première masse et l'autre est connecté sur la masse secondaire. Une identification modale est effectuée par une technique de pôle résiduel en utilisant la toolbox dynamique des structures de Matlab SDTools.

Les paramètres expérimentaux sont $m_2 = 0.33\text{kg}$, $m_1 = 3.3\text{kg}$ donc $\varepsilon = 0.1$. Une analyse modale et une analyse dynamique expérimentale des structures donnent $\omega_1 = 29.2\text{rad.s}^{-1}$, $c_1 = 1.4\text{N.s.m}^{-1}$, $c_2 = 5\text{N.s.m}^{-1}$ et $\omega_2^2 = 6,06.10^5\text{N.m}^{-3}.\text{kg}^{-1}$. Ainsi $\lambda_1 = 4.24$ et $\lambda_2 = 15.15$. L'amortissement naturel spécifique pour la structure primaire linéaire ($= \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$) est donc 0.73% et l'amortissement naturel spécifique pour la seconde structure ajoutée ($= \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$) est 0.97%.

La fréquence naturelle de la structure primaire, sans absorbeur, est 4.65Hz et est une valeur approchée de la fréquence naturelle fondamentale d'un bâtiment à deux étages.

L'utilisation de l'approximation cubique est justifiée ici comme montré sur la Figure 3.30 où l'expression exacte dans l'Equation (3.90) et l'approximation cubique ont été comparées grâce à une simulation numérique (à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta). Les valeurs des paramètres sont les mêmes que celles mentionnées précédemment (avec $k = 780\text{M.m}^{-1}$, $l = 0.109\text{m}$, $x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2 = 0$, $\dot{x}_1 = 1.2$). Les deux cas sont quasiment identiques et se superposent. On peut aussi comparer l'erreur relative comme montré sur la Figure 3.31. Cette erreur est très faible quand l'approximation cubique est utilisée. Le maximum de l'erreur est 7.71×10^{-4} pour x_1 et 3.32×10^{-3} pour x_2 . L'erreur est plus faible pour x_1 puisque l'approximation cubique joue un rôle moins important dans l'équation du mouvement de la première masse.

3.2.1.2 Modèle réduit à quatre étages

Le second système expérimental considéré est montré sur la Figure 3.32. Une expérimentation de modèle réduit de bâtiment à 4 étages a été développée au LGM notamment dans le cadre de travaux précédents. Nous nous sommes alors servis de ce modèle de bâtiment pour venir ajouter le dispositif non linéaire sur le dernier étage. Cette expérimentation permet ainsi de prendre en

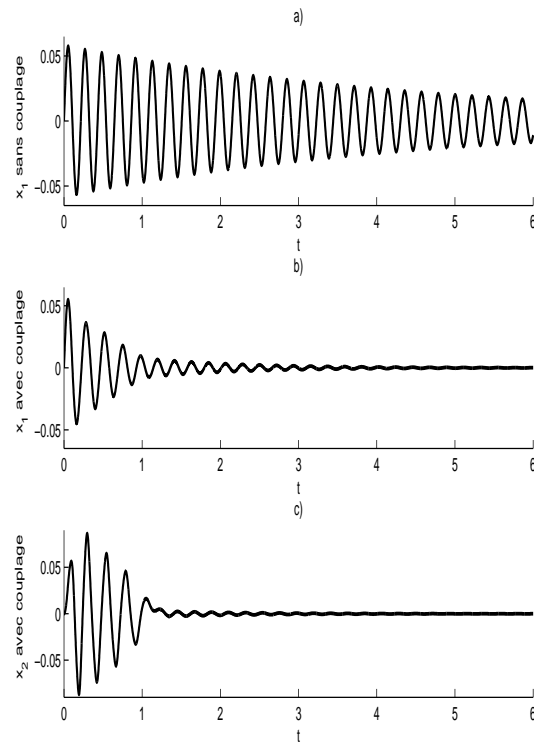


FIG. 3.30 – Evaluation de l’approximation cubique dans l’Equation (3.90) : la ligne continue représente la solution exacte et la ligne pointillée représente l’approximation.

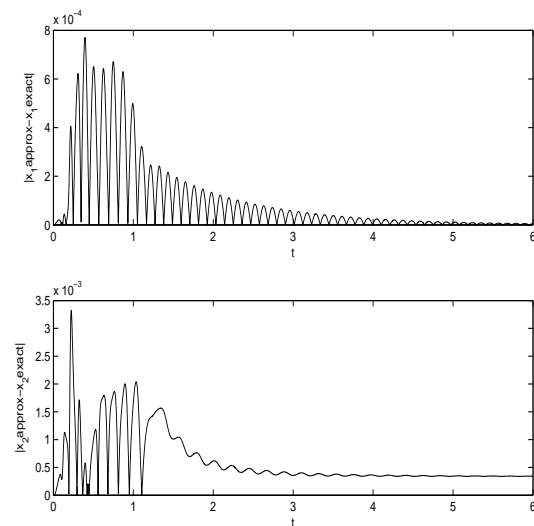


FIG. 3.31 – Evaluation de l’erreur relative en utilisant l’approximation cubique dans l’Equation (3.90).

compte plus de degrés de liberté/modes pour le système primaire. J’ai adapté cette structure linéaire et j’ai conçu le design du dispositif non linéaire notamment pour le choix des paramètres. Le dispositif non linéaire a ainsi été construit sur le modèle que j’avais développé à l’Université de Bristol.

Ainsi, un modèle de bâtiment à échelle réduite et à quatre étages est considéré à la fois pour vérifier la faisabilité et pour explorer le phénomène de pompage énergétique sur un cas d’étude

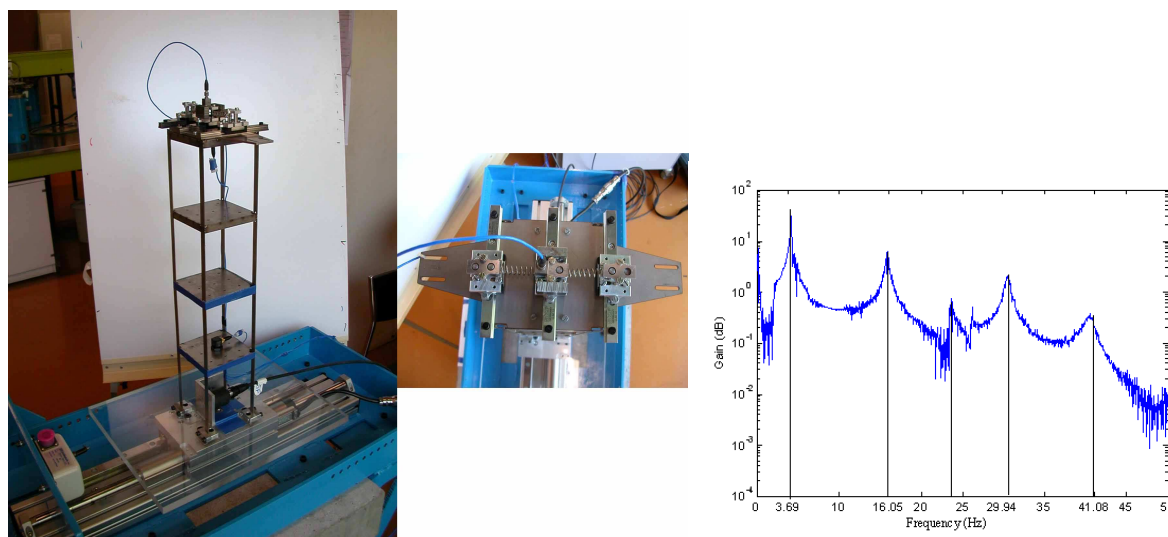


FIG. 3.32 – Système expérimental et identification linéaire.

plus réaliste et plus complexe. Le bâtiment à quatre étages, à savoir la structure linéaire primaire, a été fabriqué en soudant les colonnes d’aciers inoxydables et les poutres supports. Des plaques en acier ont aussi été soudées sur chaque étage pour simuler des dalles de mélange acier-béton réalistes. Le système est encastré sur une plaque de plexiglass montée sur une table vibrante elle-même dirigée par un moteur linéaire électromagnétique Linmot. Ce dernier est contrôlé par un “Linmot E1000 MT controller” caractérisé par la capacité à produire presque n’importe quel profil d’excitation : balayage sinus, bruits aléatoires, pulses, séismes). L’acquisition des données de 6 accéléromètres PCB piezotronics est réalisée en utilisant un analyseur HP 3566A/67 à une fréquence d’échantillonnage de 12800Hz, permettant ainsi de capturer la plupart de l’information instantanée des réponses dynamiques. L’ensemble du banc d’essai est monté sur un bloc de béton très lourd isolé dynamiquement du sol. Les valeurs propres linéaires et l’amortissement spécifique relatif de la structure principale sont identifiés en analysant les courbes de réponses FrF moyennées obtenues pour un bruit blanc aléatoire ou des excitations de type balayage sinus comme illustré sur la Figure 3.32. Une identification modale est effectuée par une technique de pôle résiduel en utilisant la toolbox dynamique des structures de Matlab SDTools. Les vecteurs propres, généralement parlant, sont des modes de cisaillement à cause de la faible raideur des colonnes et des plaques hautes. Ceci a pour conséquence que les accéléromètres placés sur chaque étage de la structure enregistrent les composantes horizontales actuelles et non celles de rotation.

Il faut souligner que les fréquences naturelles de la structure à 4 étages peuvent être ajustées et modifiées en ajoutant/retirant des masses à chaque étage (des plaques sont ajoutées/retirées à chaque étage). Ainsi une illustration est fournie sur la Figure 3.33 où une analyse modale montre les diverses fréquences rencontrées différentes des précédentes.

Des photographies additionnelles du montage expérimentale sont représentées sur la Figure 3.34.

Un modèle éléments finis d’une structure à quatre étages a été réalisée en utilisant ANSYS pour concevoir tout d’abord le modèle réduit de bâtiment (dont les fréquences sont comparables à celles d’un bâtiment réel), et deuxièmement pour prédire le comportement de la structure. Le modèle éléments finis est représenté sur la Figure 3.35. Ce modèle est construit en utilisant des éléments avec trois degrés de liberté en rotation et trois degrés en translation pour chaque noeud.

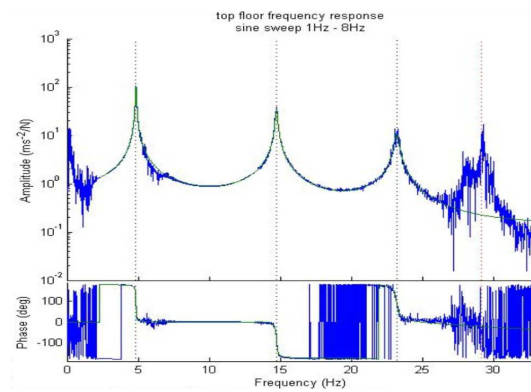


FIG. 3.33 – Identification linéaire avec masses ajoutées/retirées.

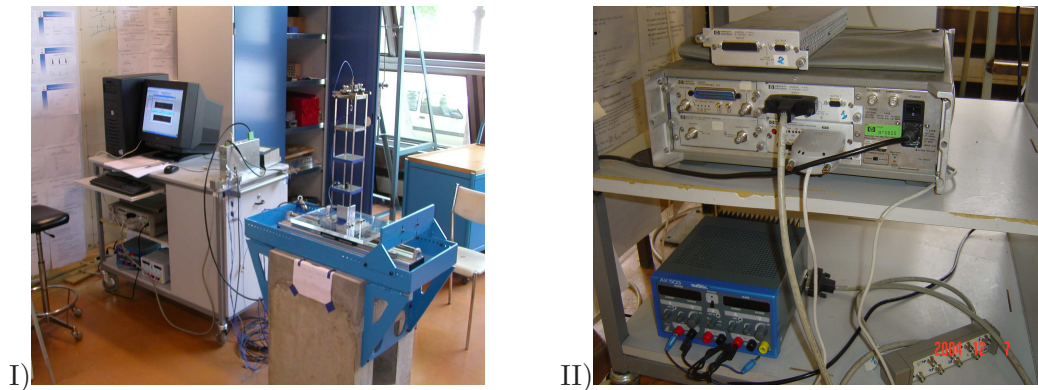


FIG. 3.34 – I) Montage expérimental. II) Système d'acquisition.

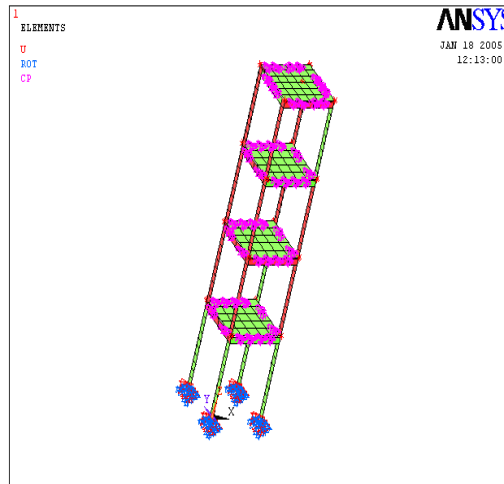


FIG. 3.35 – Modèle éléments finis du modèle de bâtiment.

Les inerties des colonnes et des poutres supports et les charges ajoutées sur chaque étage ont été ajustées tout d'abord pour fixer le premier mode le long de la direction principale de la table X et pour éloigner les fréquences dans la direction Y (pour qu'elles soient nettement plus grandes). Les calculs de modes montrent finalement une distribution de quatre modes principaux le long de la direction X. Quand les paramètres du système sont ajustés grâce à l'étude expérimentale,

un calage de la distribution des masses sur chaque étage ainsi que de la tension d'encastrement sont réalisés afin de caler le modèle éléments finis sur les réponses modales expérimentales. Après calibration, les fréquences naturelles obtenues par les éléments finis (FEM : Finite Elements Method) sont données sur la Figure 3.36 avec les valeurs trouvées expérimentalement. Les formes

Mode Numéro	Modèle FEM freq.	Expérimental	
		freq.	amort.
1-X	4.874	4.875	0.003046
2-X	14.59	14.594	0.001897
3-X	23.27	22.98	0.001495
1-Y	27.87	27.87	?
4-X	29.05	29.05	0.001767
1-XY	42.64	39.25	?

FIG. 3.36 – Fréquences naturelles du modèle de bâtiment à l'aide du modèle éléments finis après calages.

modales fournies sur la Figure 3.37 permettent d'obtenir des modes linéaires dont les fréquences sont assez éloignées et avec les premiers modes uniquement dans la direction principale X (direction de la table vibrante).

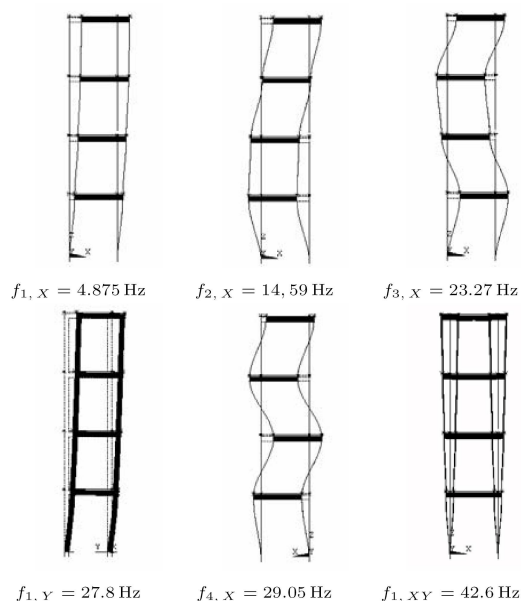


FIG. 3.37 – Formes des modes linéaires de la structure à quatre étages.

Nous avons construit le système non linéaire avec un encombrement plus réaliste en tête du bâtiment. La masse secondaire, de l'absorbeur, peut glisser le long d'un rail fixé sur la plus haute plaque du modèle de bâtiment. x_1 et x_2 représentent les déplacements absolus respectifs de la structure primaire (au niveau de la plus haute plaque de la structure) et de la masse ajoutée. On note m_1 la masse de la structure primaire et m_2 la masse de la deuxième structure ajoutée. La conception de la structure ajoutée non linéaire est illustrée sur la Figure 3.38.

Dans cette expérimentation, le premier coefficient modal d'amortissement visqueux idéalisé

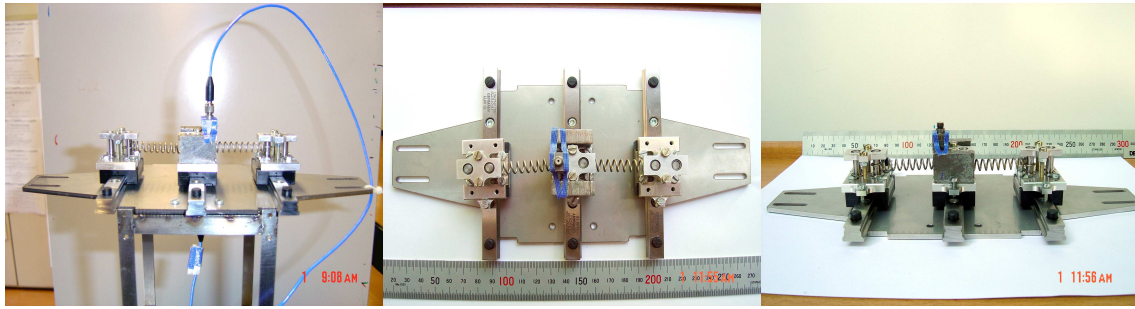


FIG. 3.38 – Système expérimental et design du NES.

entre la masse primaire et le support est c_1 et entre la masse primaire et la masse secondaire est c_2 . Ce modèle a été conçu, construit et testé à l'ENTPE. Comme souligné dans [McFarland et al., 2005], une nonlinéarité cubique est réalisée géométriquement avec deux ressorts linéaires (k et l sont la raideur et la longueur de chaque ressort linéaire). Pour la structure primaire, on considère tout d'abord uniquement le premier mode. Ainsi, le bâtiment et l'absorbeur non linéaire peuvent être idéalisés par le modèle décrit sur la Figure 3.29. Les équations sont similaires au Système (3.70) ou à (3.91). Les paramètres expérimentaux sont $m_2 = 0.121\text{kg}$, $m_1 = 1.677\text{kg}$. Une analyse modale et une analyse dynamique expérimentale des structures donnent $k_1 = 900.3\text{N.m}^{-1}$, $c_1 = 0.995\text{N.s.m}^{-1}$, $c_2 = 1.452\text{N.s.m}^{-1}$, et $k_2 = 1.48 \cdot 10^6\text{N.m}^{-3}$. La fréquence naturelle de l'oscillateur linéaire est 3.69Hz .

3.2.2 Résultats expérimentaux

3.2.2.1 Modèle réduit à un étage

Les résultats obtenus ont fait l'objet d'une publication dans [Gourdon et al., 2006b]. Tout d'abord, pour vérifier que lorsque $0 < a < 1/\sqrt{3}$, le régime du mode normal non linéaire est rompu résultant en une diminution assez abrupte des deux amplitudes, le cas où le forcing est absent est considéré. En effet des impulsions (sur la plus haute plaque uniquement) avec des oscillations libres ($x_g = 0$) sont considérées. Expérimentalement, un déplacement initial non nul de la structure primaire est considéré avec toutes les autres conditions initiales nulles. Ce déplacement initial est le même en étudiant le cas avec couplage (i.e. le cas pour lequel l'absorbeur est présent) et le cas sans couplage (i.e. le cas pour lequel l'absorbeur n'est pas présent). Les différentes accélérations mesurées avec et sans couplage sont données sur la Figure 3.39.

Clairement, il apparaît qu'avec la présence du fort couplage non linéaire, le pompage énergétique se produit, i.e. une atténuation de l'accélération de la structure primaire avec résonance de la structure non linéaire. De plus, en utilisant l'analyse en ondelettes (pour x_2) sur la Figure 3.40, il est montré que le mode normal non linéaire (représenté sur la Figure 3.40 a)) est totalement détruit grâce au passage à travers une bifurcation : la résonance se produit seulement entre 0 et 1s, et le mode non linéaire décroît comme montré sur la Figure 3.40 b). Il faut souligner que ce phénomène se produit seulement si le déplacement initial de la masse primaire est suffisant. Ce dernier point a été décrit dans [Vakakis et al., 2003]. Dans ce cas, une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et numériques est obtenue.

De plus, comme souligné auparavant, une application possible est relative à l'absorption des vibrations particulièrement pendant les tremblements de terre où le forcing se produit pendant le temps transitoire. Le moteur est piloté en déplacement par un générateur de fonction ("TTi 40MHz Arbitrary Waveform Generator TGA 1241") dans lequel il est possible de char-

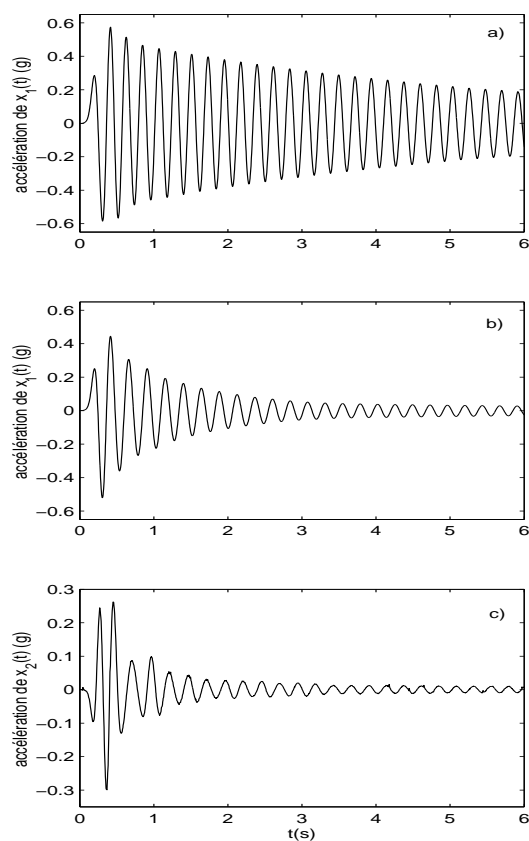


FIG. 3.39 – Oscillations libres avec un déplacement initial non nul de la structure primaire (impulsion sur la plus haute plaque). a) Oscillations libres sans couplage. b) Atténuation avec couplage. c) Résonance de la masse secondaire.

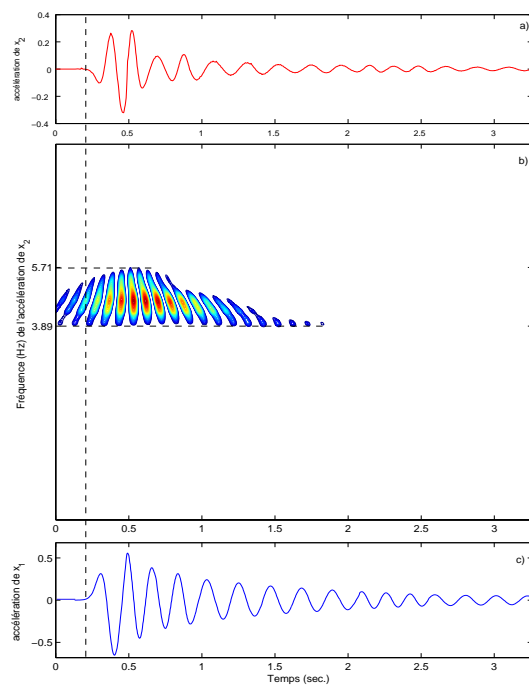


FIG. 3.40 – Analyse en ondelettes de la réponse expérimentale avec un déplacement initial non nul.

ger un signal désiré. Toutes les données de séismes sont extraites du CD-Rom “Strong Motion Database Navigator” (Copyright (c) 1996-2000 CubicSoft). Ces données sont transformées en terme de déplacements pour les appliquer au modèle réduit de bâtiment. Par exemple, on peut appliquer à la structure primaire le tremblement de terre de Friule (Italie) (le même que pour les études numériques précédentes, le pic de l’accélération est réduit pour être égal à $4\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, et ensuite l’accélération est transformée en déplacement) avec la présence de l’absorbeur et sans la présence du couplage fort (i.e. sans absorbeur). Les résultats sont présentés sur la Figure 3.41.

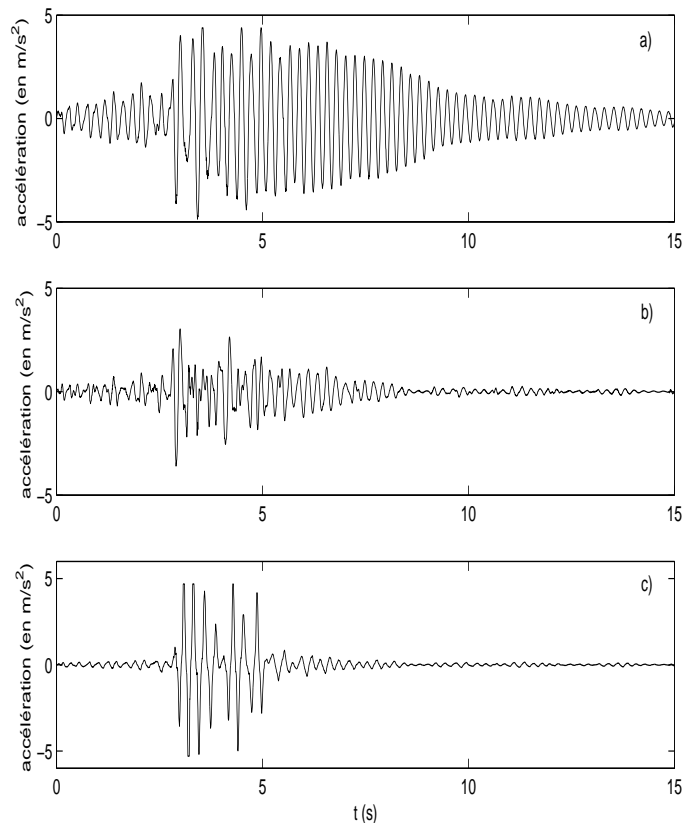


FIG. 3.41 – Résultats expérimentaux avec un forçage de tremblement de terre réel (Friule en Italie). a) Structure primaire (x_1) sans couplage. b) Structure primaire (x_1) avec couplage. c) Structure attachée (x_2) avec couplage.

Sur la Figure 3.41, le NES (“Nonlinear Energy Sink”) apparaît être efficace comme absorbeur de vibrations pour un forçage transitoire. Sur cette figure, on peut parfaitement voir l’effet du NES. En effet, quand l’énergie est transférée à la seconde masse (résonance de x_2) alors le mode normal non linéaire est détruit (diminution abrupte de x_2 par exemple à $t = 5\text{s}$ sur la Figure 3.41 c)) ce qui a pour conséquence de dissiper les vibrations de x_1 instantanément. Comme décrit précédemment dans l’étude numérique, il se peut que le maximum de la réponse de la structure primaire avec couplage (Figure 3.41 b)) puisse être encore important mais après ce point, en temps, les vibrations sont atténuées avec une bonne efficacité. C’est pourquoi, il est possible de vérifier expérimentalement la courbe de l’Intensité d’Arias I_a en changeant l’intensité du tremblement de terre (ce qui permet également d’observer le transfert d’énergie). Une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et numériques est observée sur la Figure 3.42. Les points/plus/étoiles correspondent à des valeurs expérimentales alors que les traits continus proviennent de simulations. On peut noter aussi une différence pour des amplitudes très élevées sans couplage car le système devient plastique. Le pompage énergétique est clairement illustré

avec un transfert qui apparaît quand les deux courbes se croisent : c'est la limite seuil pour de grandes vibrations dans la structure non linéaire entraînant une atténuation de la structure primaire. Avec un dispositif linéaire ce phénomène de localisation ne serait pas possible.

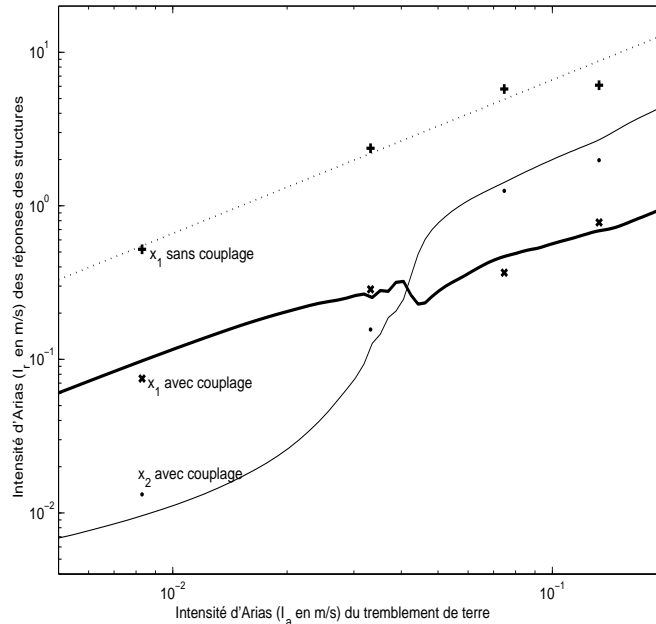


FIG. 3.42 – Résultats expérimentaux pour l'Intensité d'Arias.

Néanmoins, il faut souligner que le pic maximum peut être fortement atténué en fonction des séismes considérés. Par exemple, si le tremblement de terre d'Annecy (France, 15/07/1996) est considéré, alors le pic maximum est atténué de 60% comme montré sur la Figure 3.43.

De plus, les résultats peuvent être généralisés. Le cas que nous avons considéré apparaît très convainquant. Cependant, il concerne uniquement un jeu de (m_1, k_1) , i.e. uniquement une configuration du bâtiment. Il reste à explorer l'influence de la fréquence naturelle pour souligner l'intérêt d'un tel dispositif non linéaire comparé à un "tuned mass damper" classique. Ainsi, on peut tracer le spectre de réponse, i.e. le spectre de réponse en déplacement : pour différents jeux de (m_1, k_1) (i.e. ω_1) du bâtiment, on trace le pic (le maximum de la valeur absolue du déplacement) quand l'excitation est celle du séisme d'Annecy comme illustré sur la Figure 3.44. Ainsi, cette figure démontre un élargissement de l'intervalle de fréquences atténuées. Sur toute la gamme fréquentielle, la ligne continue qui représente la prise en compte du couplage non linéaire est nettement en dessous de la courbe sans couplage en pointillée ce qui signifie bien que l'absorbeur de vibrations construit possède bien le caractère adaptatif puisque la réponse n'est jamais amplifiée pour aucune fréquence. Ceci est un avantage clé du NES comparé au "tuned mass damper" classique (le NES est plus robuste). En effet, un "tuned mass damper" classique est ajusté et dimensionné pour seulement un jeu de (m_1, k_1) mais il n'est plus efficace si la raideur change (en raison du vieillissement de la structure par exemple).

Pour montrer que cette étude n'est pas dépendante d'un seul tremblement de terre spécifique, la Figure 3.45 fournit des résultats similaires avec le séisme d'Alkion (Grèce, 24/02/1981, station de Xilokastro-OTE) ; le pic de l'accélérogramme est réduit pour être égal à $2\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et l'accélération

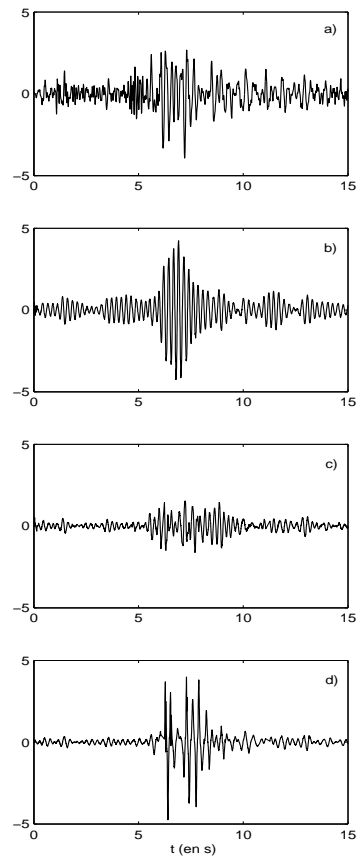


FIG. 3.43 – Résultats expérimentaux avec un forçage de tremblement de terre réel (Annecy en France). a) Accélération de x_g (en m.s^{-2}). b) Accélération de x_1 (en m.s^{-2}) sans couplage. c) Accélération de x_1 (en m.s^{-2}) avec couplage. d) Accélération de x_2 (en m.s^{-2}) avec couplage.

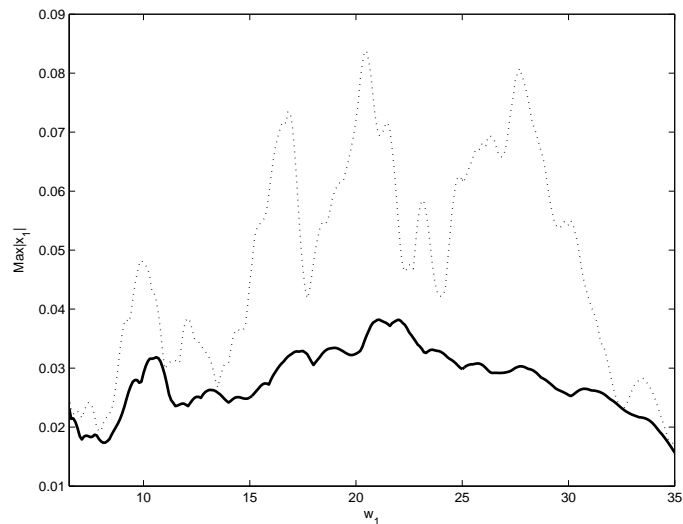


FIG. 3.44 – Spectre de réponse en déplacement (la pulsation naturelle ω_1 du bâtiment varie) avec le séisme d'Annecy. La ligne continue représente le pic de déplacement de x_1 (i.e. le maximum de la valeur absolue du déplacement $\text{Max}|x_1|$) avec couplage (i.e. le cas où l'absorbeur est présent) et la ligne pointillée le pic du déplacement de x_1 (i.e. le maximum de la valeur absolue du déplacement $\text{Max}|x_1|$) sans couplage.

est ensuite transformée en déplacement) qui a été appliqué à la structure primaire. Sur les Figures 3.41, 3.43, 3.45, on observe une résonance de la structure ajoutée non linéaire, et donc une atténuation des vibrations de la structure primaire. Nous avons conservé les mêmes paramètres

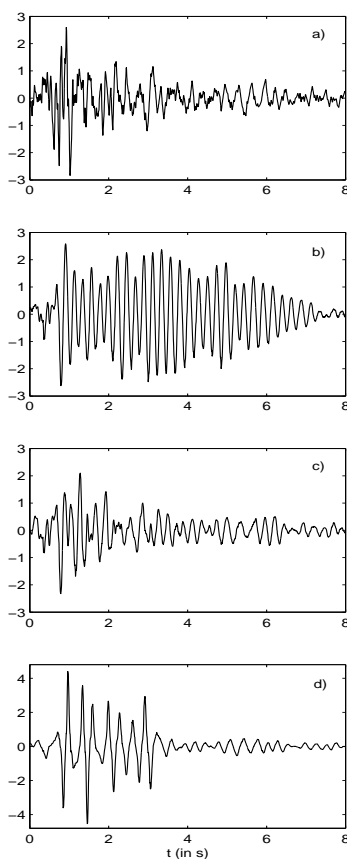


FIG. 3.45 – Résultats expérimentaux avec un forçage de tremblement de terre réel (Alkion en Greece). a) Accélération de x_g (en m.s^{-2}). b) Accélération de x_1 (en m.s^{-2}) sans couplage. c) Accélération de x_1 (en m.s^{-2}) avec couplage. d) Accélération de x_2 (en m.s^{-2}) avec couplage.

de la structure ajoutée non linéaire que pour le cas d'impulsions et nous avons ainsi appliqué des séismes dont les spectres ont différentes formes, ceci sans venir modifier les paramètres pour observer la capacité d'adaptabilité de l'absorbeur ainsi construit. Annecy a un spectre quasi monochromatique, le spectre de Friule est à plusieurs pics et celui d'Alkion est plus étalé. Il faut souligner que cette étude montre l'intérêt du couplage non linéaire comparé à un absorbeur classique linéaire de vibrations. Effectivement, le dispositif non linéaire ne possède pas de fréquence propre et peut donc rentrer en résonance avec n'importe quelle fréquence contrairement à l'absorbeur passif classique de vibrations qui est ajusté pour une fréquence bien précise. Les absorbeurs classiques linéaires souffrent d'un manque d'adaptabilité aux variations des caractéristiques des structures ou de l'environnement.

3.2.2.2 Modèle réduit à quatre étages

Dans un deuxième temps, les vibrations transitoires sont analysées dans la structure plus complexe à 4 étages.

En considérant une impulsion au sommet de la structure (la plus haute des plaques) :

$$x_2(t=0) = x_1(t=0) = 0, \quad \frac{dx_2}{dt}(t=0) = 0, \quad \frac{dx_1}{dt}(t=0) = 0.25, \quad (3.93)$$

réalisée à l'aide d'un marteau calibré, alors les accélérations des oscillations libres sont mesurées et tracées comme montré sur la Figure 3.46 I) où le pompage énergétique se produit (atténuation des vibrations de la première masse grâce à une résonance de la structure non linéaire). Une

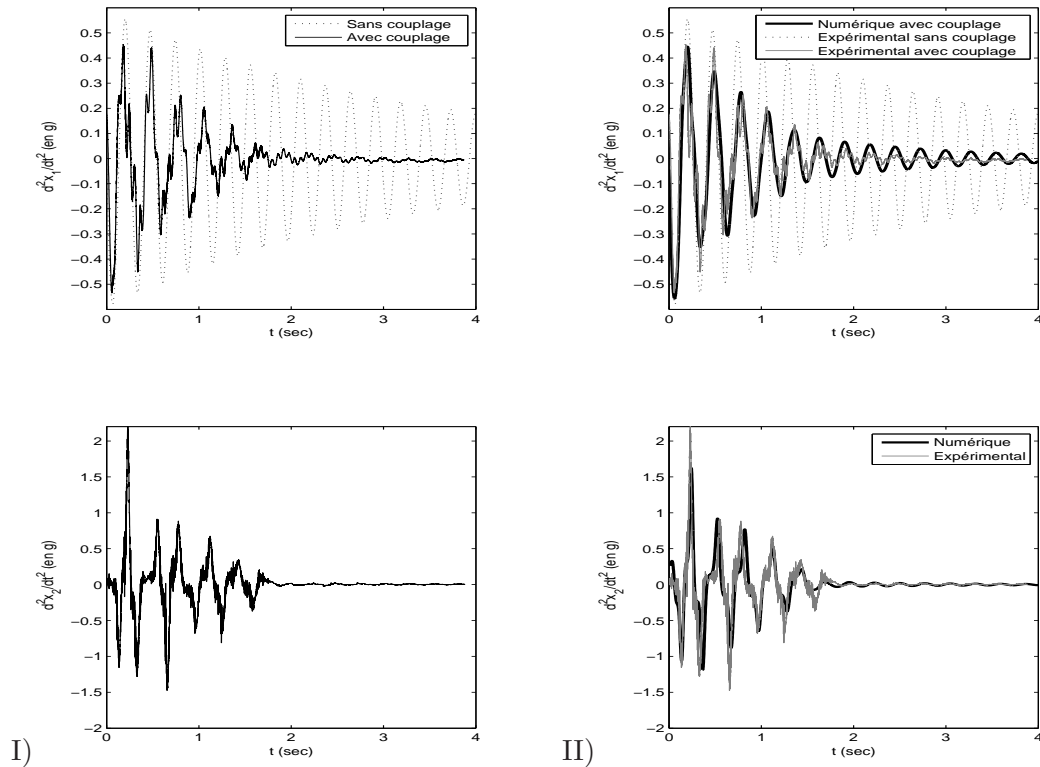


FIG. 3.46 – I) Résultats expérimentaux avec une impulsion. II) Comparaison des résultats expérimentaux et numériques.

bonne concordance entre les résultats expérimentaux et l'intégration numérique du Système (3.91) avec les paramètres précédents est observée (en prenant un seul mode en compte dans l'analyse numérique) comme montré sur la Figure 3.46 II). On peut alors clairement observer que pendant le phénomène de pompage énergétique le premier mode est uniquement responsable de la réponse. Il existe une faible différence dans l'expérimentation puisque les autres modes changent très légèrement la réponse de x_1 , mais comme souligné dans [Gourdon et Lamarque, 2005b], le premier mode ici est uniquement responsable du pompage énergétique et les autres modes de la structure linéaire sont juste de simples oscillateurs amortis.

Ensuite, quand le pompage énergétique se produit, il apparaît qu'une capture de résonance se produit avec l'oscillateur non linéaire comme montré sur la Figure 3.47 où la fréquence instantanée du signal expérimental $x_2(t)$ (l'accélération expérimentale a été intégrée deux fois avec des filtres spéciaux) a été calculée avec la Transformée de Hilbert classique. Sur la Figure 3.47,

la fréquence instantanée de $x_2(t)$ devient identique à la fréquence instantanée du mode linéaire (3.69 Hz) (le transfert d'énergie se produit). Après $t = 2$ s, le mode normal non linéaire est totalement détruit (changement brutal de fréquence de x_2) résultant en une quasi destruction des vibrations.

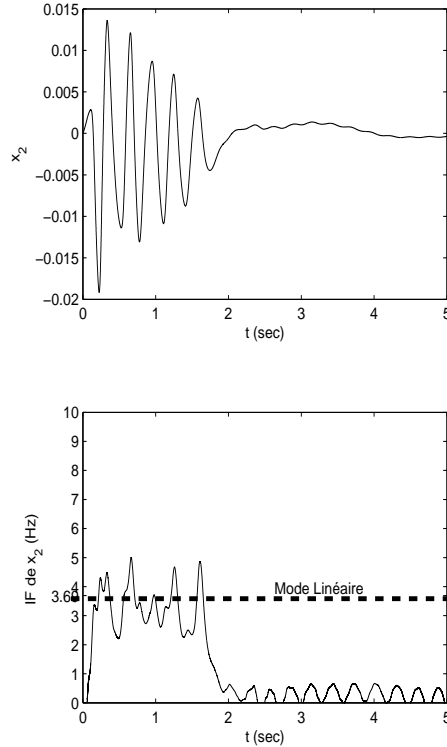


FIG. 3.47 – Phénomène de capture de résonance.

De plus, des expérimentations supplémentaires ont été menées grâce au moteur linéaire. En particulier, la masse de la structure primaire est modifiée (certaines plaques qui avaient été ajoutées sur chaque étage sont enlevées). Après une analyse modale expérimentale on obtient les modes linéaires à différentes fréquences : mode 1 à 4.87Hz, mode 2 à 14.59Hz, mode 3 à 22.98Hz et mode 4 à 29.05Hz. Ainsi, les réponses transitoires à une excitation de type pulse ont été analysées. Les expérimentations réalisées avec un pulse gaussien centré sur la fréquence 4.87Hz (voir la Figure 3.48) et illustrées sur la Figure 3.49 révèlent bien le comportement dynamique transitoire du système étudié. Une comparaison directe de l'accélération et du spectre des fréquences du quatrième étage quand le couplage non linéaire est alternativement déconnecté et connecté (Figure 3.49 a) et 3.49 b)) permet de conclure que le pompage énergétique est très efficace puisque les vibrations sont fortement atténuées selon l'amplitude et la durée. La Figure 3.49 c), fournissant l'accélération du NES, atteste que la capture de résonance a été activée quand le couplage non linéaire est réalisé. La cartographie en ondelettes de l'accélération de l'étage le plus élevé (cas linéaire), lorsque forcé par l'excitation de type pulse (voir Figure 3.50), montre clairement une région constituée d'un amas régulier de coefficients centrés autour de la fréquence 4.87Hz et d'un amas résiduel s'éteignant rapidement autour du second mode 14.59Hz, dont l'existence est imputable aux imperfections de mouvement du sol de la table vibrante. Quand l'attache non linéaire est connectée, les cartes ondelettes de la réponse en accélération du quatrième étage (voir Figure 3.51) et de l'accélération de la masse non linéaire attachée (voir Figure 3.52) révèlent des comportements dynamiques bien plus compliqués. Après quelques

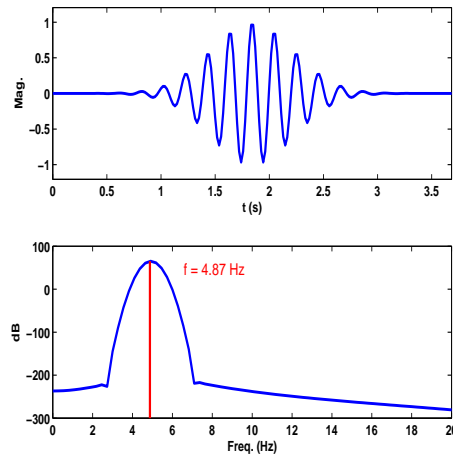


FIG. 3.48 – Excitation de type pulse Gaussien avec une fréquence centrée à 4.87Hz.

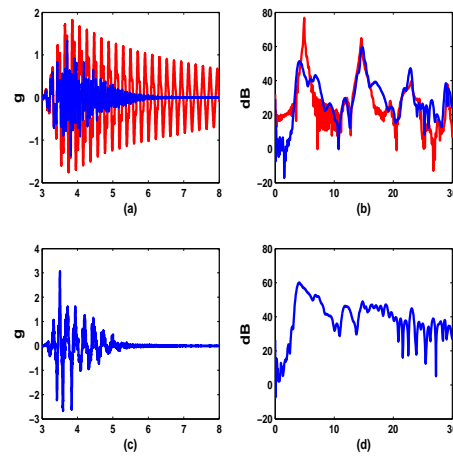


FIG. 3.49 – Comparaison des réponses temps/fréquence de la structure excitée avec un pulse gaussien centré sur la fréquence 4.87Hz quand l’attache non linéaire est soit enlevée, soit activée. (a) Accélération du quatrième étage quand l’attache est active (en bleu)/ enlevée (en rouge). (b) Spectre de réponse du quatrième étage. (c) Accélération du NES. (d) Spectre du NES.

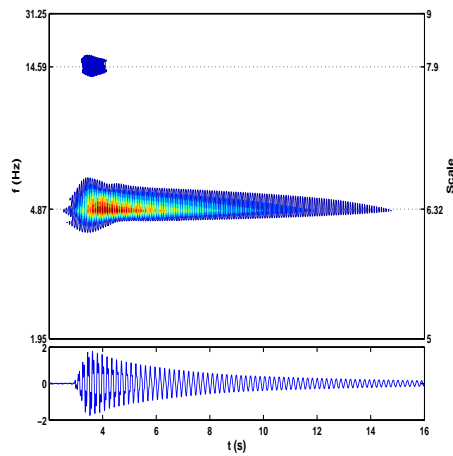


FIG. 3.50 – Cartographie en ondelettes / réponse de l’accélération du quatrième étage excité par un pulse gaussien (4.87Hz) quand le pompage énergétique n’est pas actif.

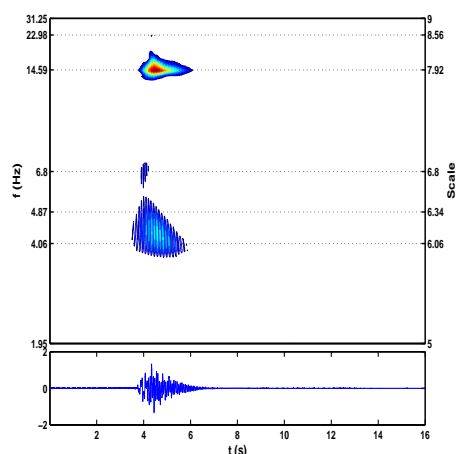


FIG. 3.51 – Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excité par un pulse gaussien (4.87Hz) quand le pompage énergétique est actif.

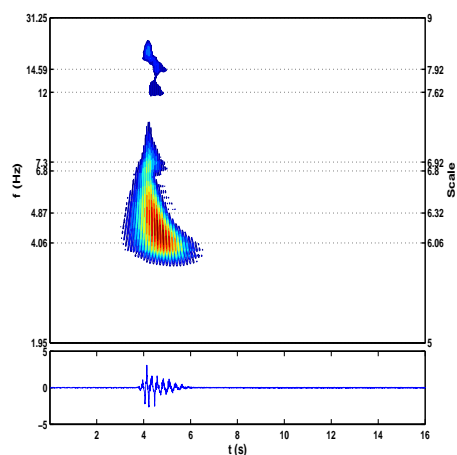


FIG. 3.52 – Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération de l'attache non linéaire avec un pulse gaussien (4.87Hz) quand le pompage énergétique est actif.

périodes du premier mode 4.87Hz, une capture de résonance est initiée à $t \simeq 3.8s$ mettant en jeu les fréquences 6.8Hz et 7.1Hz sur le diagramme 3.52 : grâce à un mécanisme d'orbites d'accrochages et de liaisons, l'énergie vibratoire emmagasinée dans le mode 4.87Hz est graduellement transférée vers le NES dont l'amplitude/fréquence est grandissante jusqu'à ce qu'une bifurcation soit atteinte à $t \simeq 4.15s$. A partir de $t \simeq 4.15s$, la fréquence instantanée qui est définie comme la crête des amas de coefficients passe soudainement de la fréquence 7.1Hz à 4.06Hz en une demi-seconde. Ces observations permettent la reconnaissance de l'existence d'une localisation de mode non linéaire résultant en une soudaine dissipation de l'énergie. D'autre part, la cartographie en ondelettes de l'accélération de l'étage le plus élevé met en évidence une annulation complète et rapide du mode 4.87Hz. En d'autres mots, le mode fondamental de la structure principale a été détruit par le phénomène de pompage énergétique alors qu'au même moment, le deuxième mode 14.59Hz reste non contrôlé.

De plus, les réponses transitoires à des excitations de type pulse ont aussi été analysées. Les composantes de l'accélération N-S des tremblements de terre de Friule (Italie, 1976, Ms=6.5) et de Rethimnon (Crète, 1991, Ms=3.1) ont été utilisées comme mouvements du sol pour explorer le phénomène de pompage énergétique. Des enregistrements de données physiques ont été re-

dimensionnés à la fois en temps et en amplitude de telle manière à ce que la fréquence du pic du spectre coïncide avec la fréquence fondamentale 4.87Hz de la structure principale, tout en préservant l'Intensité d'Arias du véritable tremblement de terre correspondant. Ainsi, de façon similaire à l'excitation de type pulse, le cas du séisme de Friule (Italie, 1976) est considéré et les niveaux de l'accélération du quatrième étage sont amortis efficacement par le dispositif d'attache non linéaire comme on peut le noter sur la Figure 3.53 par comparaison avec le comportement dynamique linéaire (voir Figure 3.54). Une analyse en ondelettes plus fine, comme illustré sur la

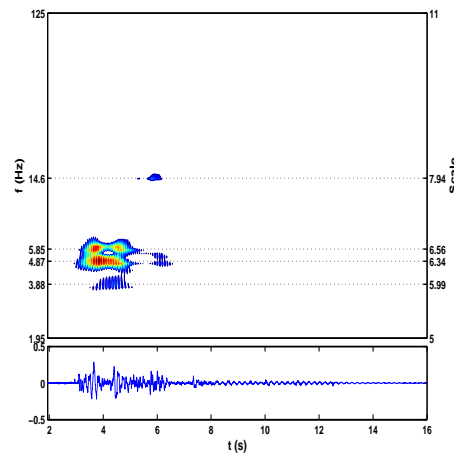


FIG. 3.53 – Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excitée par le tremblement de terre de Friule à 25% quand le pompage énergétique est actif.

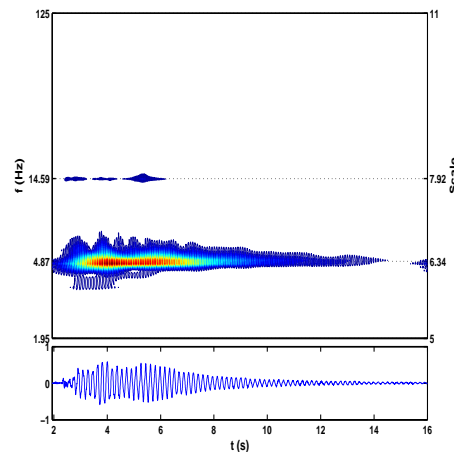


FIG. 3.54 – Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excitée par le tremblement de terre de Friule à 25% quand le pompage énergétique est inactif.

Figure 3.53, montre deux éclatements de l'accélération successifs amortis par le NES. On peut aussi noter que deux fréquences 5.85Hz et 3.88Hz, incommensurables avec la fréquence linéaire fondamentale 4.87Hz, apparaissent pendant le transfert irréversible d'énergie ; phénomène que nous reverrons et expliquerons plus loin lors de l'étude du pompage énergétique en régime stationnaire.

Dans le cas du séisme de Rethimnon (Crète, 1991), dont la principale différence avec le tremblement de terre de Friule repose sur le fait que le profil d'accélération est plus progressif et est caractérisé par une étendue plus riche de fréquences, les réponses dynamiques sont plus com-

plexes à analyser. Contrairement au cas linéaire (voir Figure 3.55) le mode fondamental 4.87Hz est atténué par l'attache non linéaire comme remarqué sur les Figures 3.56 et 3.57. Comme

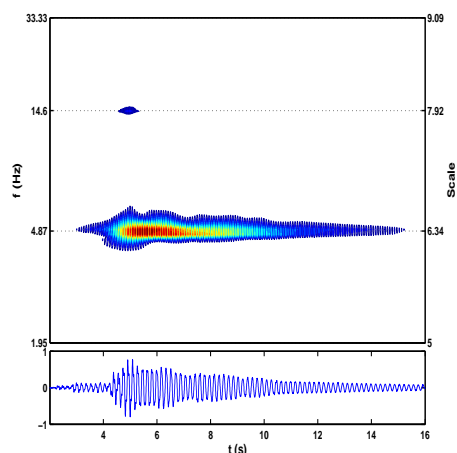


FIG. 3.55 – Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excité par le tremblement de terre de Rethimnon à 30% quand le pompage énergétique est inactif.

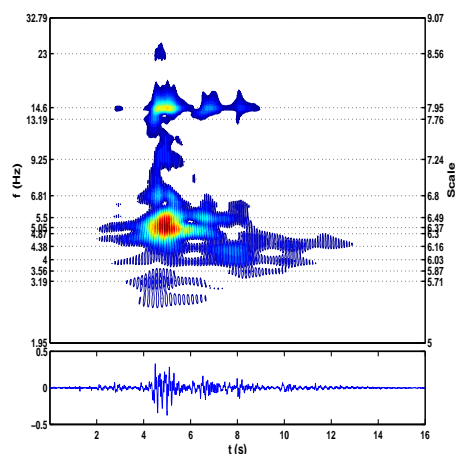


FIG. 3.56 – Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excité par le tremblement de terre de Rethimnon à 30% quand le pompage énergétique est actif.

l'amplitude menante de l'excitation est faible (30%), le mode 4.87Hz n'est pas complètement détruit pendant le processus de pompage énergétique qui met plus de temps à localiser. Ceci a pour conséquence qu'une relativement grande étendue de fréquences instantanées est mise à contribution dans la réponse globale des réponses en accélération du quatrième étage et de la structure non linéaire ajoutée. En augmentant l'amplitude de l'excitation jusqu'à 80% l'absorbeur non linéaire devient plus efficace, comme décrit sur les Figures 3.58 et 3.59.

Des vérifications expérimentales des résultats analytiques et numériques du pompage énergétique non linéaire ont donc été réalisées au moyen de modèles réduits de bâtiments appropriés. Les résultats expérimentaux démontrent que le système fait apparaître le pompage énergétique de la masse principale vers la faible masse par mécanisme de résonance 1 : 1. Ces expérimentations montrent la possible application du pompage énergétique en Génie Civil et Mécanique (les différents paramètres ont été choisis pour correspondre à des problèmes de Génie Civil). L'at-

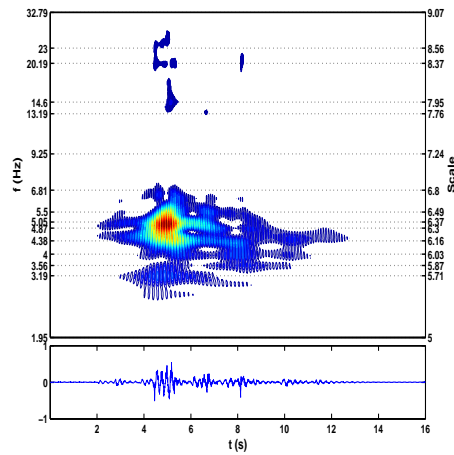


FIG. 3.57 – Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du NES par le tremblement de terre de Rethimnon à 30% quand le pompage énergétique est actif.

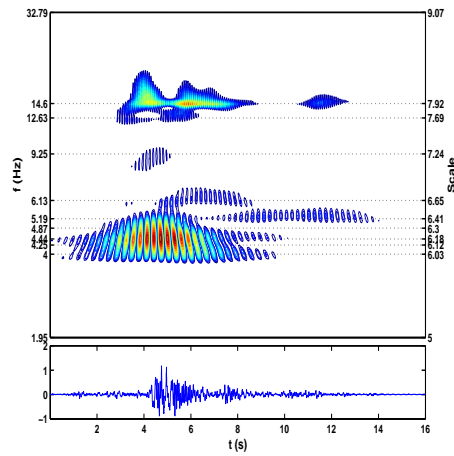


FIG. 3.58 – Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excité par le tremblement de terre de Rethimnon à 80% quand le pompage énergétique est actif.

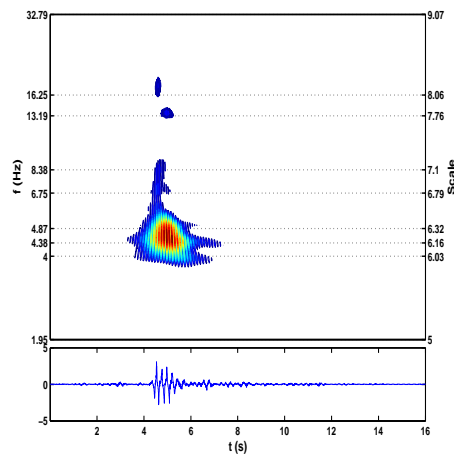


FIG. 3.59 – Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du NES par le tremblement de terre de Rethimnon à 80% quand le pompage énergétique est actif.

ténuation de la structure primaire est réalisée grâce au fort couplage non linéaire. Le système apparaît notamment être très efficace avec différentes excitations de type séisme. Pour des applications pratiques, cela est très intéressant car il est difficile d'atténuer un fort pourcentage de l'énergie dans un temps très court avec un "tuned mass damper" classique. De plus, la masse ajoutée avec un NES peut être plus faible qu'avec un "tuned mass damper" classique ce qui est très intéressant pour des applications pratiques. Le cas que nous avons considéré apparaît très convainquant, et comme souligné dans la présente étude, ce n'est pas seulement pour un jeu de (m_1, k_1) , i.e. seulement une configuration de bâtiment. En effet, l'influence de la fréquence naturelle a été explorée. Un élargissement de l'intervalle de fréquences atténuées a été illustré, donc les résultats ont été généralisés. En effet, dans des applications pratiques la fréquence naturelle change (en raison du vieillissement de la structure par exemple). Dans ce cas, le NES sera effectif, ce qui n'est pas le cas avec des "tuned mass damper" classiques qui sont ajustés pour une fréquence naturelle spécifique (pas de design ni d'ajustements supplémentaires sont nécessaires avec le NES). Ensuite, le passage théorique d'une impulsion à un tremblement de terre n'est pas évident. Cependant, les nombreux résultats expérimentaux et numériques montrent la bonne efficacité d'un tel absorbeur pour différents séismes.

Il faut aussi noter que le système en considération fait apparaître le comportement désiré uniquement pour un certain intervalle d'amplitudes de la force externe, et le phénomène ne se produit qu'au-dessus d'une certaine amplitude.

Les séismes permettent une transition avec des sollicitations périodiques. Il reste ainsi à étudier le phénomène de pompage énergétique pendant le régime stationnaire, pour notamment pouvoir comparer le NES ainsi construit avec les "tuned mass damper" classiques beaucoup utilisés dans l'industrie à ce jour.

Pompage Énergétique en Régime Stationnaire

Le pompage énergétique étant réalisé pour le régime instationnaire qui est sa vocation première, on regarde néanmoins l'intérêt de tels dispositifs pendant le régime stationnaire, après le transitoire. Le phénomène de pompage énergétique est ainsi étudié dans le régime stationnaire, à savoir à long terme sous excitation périodique. Les informations obtenues permettent d'obtenir les caractéristiques sur l'absorbeur de vibrations ainsi construit. En particulier, des comparaisons avec des absorbeurs passifs de vibrations linéaires classiques peuvent être réalisées. Des vérifications expérimentales permettent également de pouvoir envisager des applications pratiques.

Sommaire

4.1	Etudes théoriques	150
4.1.1	Etudes numériques	150
4.1.2	Etudes analytiques	153
4.1.2.1	Approche asymptotique	153
4.1.2.2	Approche échelles multiples	165
4.1.2.3	Approche équation variationnelle	173
4.2	Vérifications expérimentales	180
4.2.1	Modèle à un étage	180
4.2.2	Modèle à quatre étages	184

L'effet d'un absorbeur non linéaire d'énergie (de masse relativement faible) sur la dynamique d'un système couplé sous excitation périodique au voisinage de la résonance principale (1 : 1) est étudié théoriquement et expérimentalement. Il est démontré que sur un intervalle d'amplitudes du forcing externe le système amorti présente un régime de vibrations quasi-périodiques, plutôt que les réponses périodiques à long terme reportées dans des précédentes publications. Ce régime est relatif à l'attraction du flot dynamique vers un mode normal non linéaire amorti/forcé (NNM) du système et un mouvement hystérétique du flot dans le voisinage de ce mode. Diverses expérimentations confirment les résultats précédents. Il est montré que le régime de réponse quasi-périodique fournit une suppression des vibrations plus efficace que le meilleur des absorbeurs linéaires classiques avec la même masse.

4.1 Etudes théoriques

Dans les chapitres précédents, nous avons vu que divers systèmes linéaires et des attaches fortement non linéaires démontrent une localisation et un transfert transitoire irréversible (pompage) de l'énergie pour atténuer les vibrations d'une structure qui dépendent des conditions initiales et de la force externe. L'ajout d'une attache relativement petite et localisée spatialement conduit à des changements essentiels dans les propriétés de l'ensemble total.

Contrairement aux systèmes communs linéaires ou faiblement non linéaires, les systèmes avec des éléments fortement non linéaires sont capables de réagir efficacement sur les caractéristiques de l'amplitude du forcing externe dans un large intervalle de fréquences. Ainsi, le système en considération donne naissance à un nouveau concept d'absorbeur non linéaire d'énergie (NES).

Les études dans les chapitres précédents ont montré que le transfert d'énergie de la structure linéaire non conservative vers l'attache est dû à une capture de résonance, phénomène dynamique transitoire.

Il a aussi été démontré que la possibilité du phénomène de pompage énergétique, de capture de résonance dans des systèmes non conservatifs peut être comprise et expliquée en étudiant la dépendance énergétique des solutions périodiques non linéaires non amorties (Modes Normaux Non linéaires NNMs) du système conservatif correspondant qui sont obtenues en éliminant toutes les forces d'amortissement.

De récentes recherches [Gendelman, 2004] ont introduit une procédure asymptotique appropriée pour l'inclusion explicite de l'amortissement dans le cadre des NNMs. L'objectif ici est d'explorer la réponse du système composé d'une masse primaire assez importante et d'un faible NES sous un forcing externe harmonique au voisinage de la plus dangereuse résonance 1 : 1. Des réponses périodiques à long terme de l'oscillateur primaire avec le NES attaché ont été étudiées précédemment [Jang et al., 2003] pour une conception différente du NES. Les différents résultats présentés ici ont fait l'objet de publications dans [Gourdon et al., 2006b, Gourdon et al., 2006a].

4.1.1 Etudes numériques

On considère le modèle qui a déjà été étudié dans le chapitre précédent et qui est donné sur la Figure 4.1. Le système complet est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2)^3 = k_1 x_g + c_1 \dot{x}_g, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1)^3 = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

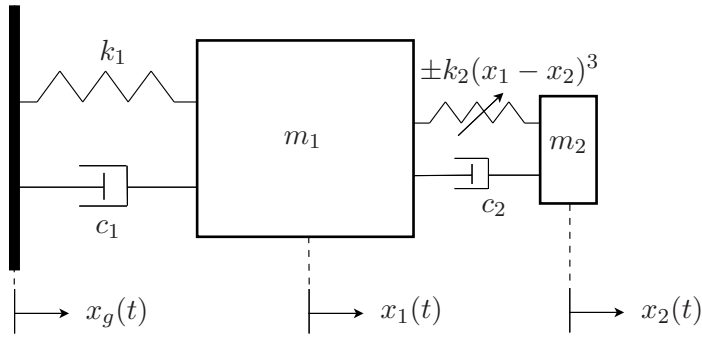


FIG. 4.1 – Système considéré à deux degrés de liberté.

En définissant $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$ ($\varepsilon \ll 1$) et $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$, $\lambda_1 = \frac{c_1}{m_2}$, $\lambda_2 = \frac{c_2}{m_2}$, $\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$, alors :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \varepsilon\lambda_1\dot{x}_1 + \varepsilon\lambda_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_1^2x_1 + \varepsilon\omega_2^2(x_1 - x_2)^3 = \omega_1^2x_g + \varepsilon\lambda_1\dot{x}_g, \\ \varepsilon\ddot{x}_2 + \varepsilon\lambda_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \varepsilon\omega_2^2(x_2 - x_1)^3 = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Dans un premier temps, les paramètres sont choisis pour correspondre à une future application expérimentale comme nous le verrons par la suite : $m_2 = 0.33\text{kg}$, $m_1 = 3.3\text{kg}$ donc $\varepsilon = 0.1$. De plus, on choisit $\omega_1 = 29.2\text{rad.s}^{-1}$, $c_1 = 1.4\text{N.s.m}^{-1}$, $c_2 = 5\text{N.s.m}^{-1}$ et $\omega_2^2 = 6,06.10^5\text{N.m}^{-3}.\text{kg}^{-1}$. Ainsi $\lambda_1 = 4.24$ et $\lambda_2 = 15.15$. L'amortissement naturel spécifique pour la structure primaire linéaire ($= \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$) est 0.73% et l'amortissement naturel spécifique pour la seconde structure ajoutée ($= \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$) est 0.97%.

On choisit la fréquence naturelle de la structure primaire, sans absorbeur, à 4.65Hz ce qui est une valeur approchée pour la fréquence naturelle fondamentale d'un bâtiment à deux étages.

Un forcing purement harmonique $x_g = G \cos(\omega t)$ est considéré. Soit $\omega = \omega_1 = 29.2\text{rad.s}^{-1}$; ainsi la dynamique du système est analysée au voisinage de la plus dangereuse résonance. La fréquence de l'excitation externe est de ce fait la fréquence naturelle de l'oscillateur linéaire. Des simulations numériques, en utilisant un schéma de Runge-Kutta, montrent le régime vibratoire quasi-périodique du système amorti sur la Figure 4.2 où $\omega_1^2 G = 2.5\text{m.s}^{-2}$. Pour confirmer que cette solution est quasi-périodique et non périodique, les sections de Poincaré pour les deux oscillateurs sont montrées sur la Figure 4.3. Ici, la *méthode d'Hénon* est utilisée. L'application de Poincaré est définie par :

$$P(x_{i0}) = x_i(x_{i0}, t_0; t_0 + T), \quad i = 1, 2, \quad (4.3)$$

où x_{i0} sont les solutions du système initial (4.1) qui passent par le point x_{i0} au temps $t = t_0$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Les points x_{i0} , $x_{i1} = P(x_{i0})$, $x_{i2} = P^2(x_{i0})$, ... correspondent à l'intersection de la trajectoire $x_i(x_{i0}, t_0; t)$ avec les plans $t = t_0$, $t_0 + T$, $t_0 + 2T$, ... respectivement. Ces points forment une séquence d'images stroboscopiques de la solution à des intervalles de temps réguliers $\Delta t = T$ [Hagedorn, 1988].

Comme déjà souligné à maintes reprises, une application possible de cet absorbeur non linéaire est relative à l'absorption des vibrations dans les systèmes mécaniques. Cette étude diffère des précédentes [Agnes, 1997, Arnold, 1955, Hunt et Nissen, 1982] puisqu'une forte non-linéarité est proposée ici. Ce système (4.2) peut présenter des types de mouvements non disponibles dans des absorbeurs de vibrations linéaires ou faiblement non linéaires. L'énergie des

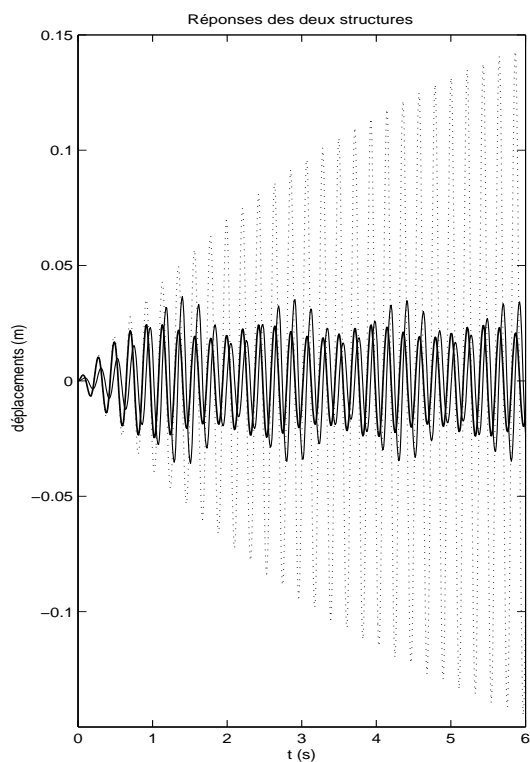


FIG. 4.2 – Pompage énergétique avec un régime vibratoire quasi-périodique. La ligne pointillée - - représente le déplacement de x_1 sans couplage (i.e. le cas où l'absorbeur n'est pas présent), la ligne épaisse — représente le déplacement de x_1 avec couplage (i.e. le cas où l'absorbeur est présent) et la ligne fine — représente le déplacement de x_2 avec couplage.

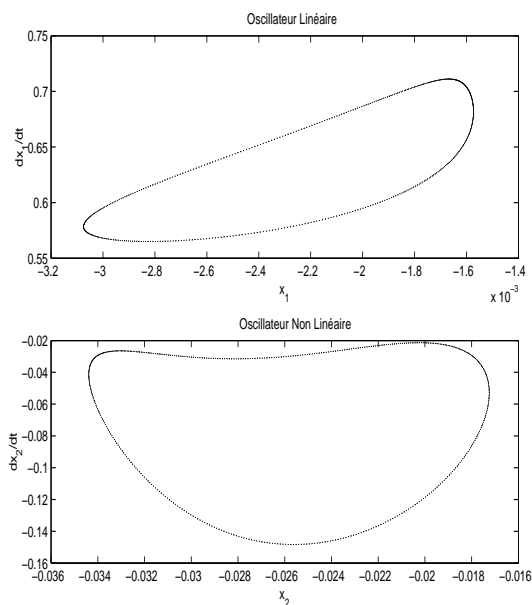


FIG. 4.3 – Sections de Poincaré montrant un régime vibratoire quasi-périodique (les deux figures sont tracées lorsque l'attache non linéaire est couplée à la structure primaire; celle du haut est pour la structure primaire et celle du bas pour l'attache non linéaire).

vibrations est transférée dans le second oscillateur et amortie dans un régime quasi-périodique; ainsi l'atténuation des vibrations de la masse primaire est réalisée. En effet, nous verrons que

dans le régime de réponse quasi-périodique l'oscillateur non linéaire assure une meilleure suppression des oscillations que le meilleur absorbeur linéaire de même masse.

4.1.2 Etudes analytiques

Diverses approches sont utilisées. L'approche asymptotique permet de trouver les solutions quasi-périodiques présentes dans le système. L'approche avec les échelles multiples permet ensuite de pouvoir comparer le NES avec un "tuned mass damper" classique optimal. Enfin, l'approche variationnelle permet de mieux comprendre d'où vient l'instabilité qui donne naissance aux oscillations quasi-périodiques.

4.1.2.1 Approche asymptotique

Dans la suite, on démontre qu'au voisinage proche de la résonance principale le système avec le NES peut faire apparaître une réponse quasi-périodique plutôt que périodique, conduisant à un comportement dynamique qualitativement différent.

Des prédictions analytiques concernant le régime des réponses peuvent être trouvées grâce à une approche prenant en compte l'amortissement et le forcing externe.

Un traitement analytique du modèle suit généralement les procédures exposées dans les chapitres précédents avec des modifications dues à la présence du forcing externe. On considère ainsi le même système que celui décrit dans les parties précédentes (Equation (4.2)) quand l'attache est réalisée par un fort couplage non linéaire cubique (l'absorbeur n'a pas besoin d'être relié au sol) :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \varepsilon\lambda_1\dot{x}_1 + \varepsilon\lambda_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_1^2x_1 + \varepsilon\omega_2^2(x_1 - x_2)^3 = \omega_1^2x_g + \varepsilon\lambda_1\dot{x}_g, \\ \varepsilon\ddot{x}_2 + \varepsilon\lambda_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \varepsilon\omega_2^2(x_2 - x_1)^3 = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Ainsi, dans l'analyse théorique suivante, le cas d'une excitation périodique $x_g = G \cos(\omega t)$ est considéré.

Le changement de variables :

$$v = x_1 + \varepsilon x_2, \quad w = x_1 - x_2, \quad (4.5)$$

permet de réduire l'Equation (4.4) sous la forme suivante (où $G = \varepsilon F$) :

$$\begin{cases} \ddot{v} + \frac{\varepsilon\lambda_1}{1+\varepsilon}\dot{v} + \frac{\varepsilon^2\lambda_1}{1+\varepsilon}\dot{w} + \frac{\omega_1^2}{1+\varepsilon}v + \frac{\omega_1^2\varepsilon}{1+\varepsilon}w = \varepsilon\omega_1^2F \cos(\omega t) - \varepsilon^2\lambda_1F \sin(\omega t), \\ \ddot{w} + \frac{\varepsilon\lambda_1}{1+\varepsilon}\dot{v} + \left(\frac{\varepsilon^2\lambda_1}{1+\varepsilon} + (1+\varepsilon)\lambda_2\right)\dot{w} + \frac{\omega_1^2}{1+\varepsilon}v + \frac{\varepsilon\omega_1^2}{1+\varepsilon}w + (\varepsilon+1)\omega_2^2w^3 \\ = \varepsilon\omega_1^2F \cos(\omega t) - \varepsilon^2\lambda_1F \sin(\omega t). \end{cases} \quad (4.6)$$

Ce changement de variables correspond physiquement à la considération du centre de masses et du déplacement interne du système d'oscillateurs. Ensuite un nouveau faible paramètre est introduit et les variables dépendantes sont redimensionnées comme suit :

$$\mathcal{X} = \varepsilon^{1/3}, \quad V = \mathcal{X}^{-1}v, \quad W = w. \quad (4.7)$$

En prenant en compte (4.7), le Système (4.6) est réduit sous la forme suivante (seuls les termes jusqu'à l'ordre $O(\mathcal{X}^2)$ sont conservés) :

$$\begin{cases} \frac{d^2V}{dt^2} + \omega_1^2 V + \mathcal{X}^2 \omega_1^2 W = \mathcal{X}^2 \omega_1^2 F \cos(\omega t), \\ \frac{d^2W}{dt^2} + \lambda_2 \frac{dW}{dt} + \mathcal{X} \omega_1^2 V + \omega_2^2 W^3 = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Maintenant, un changement d'échelle de temps est effectué en posant $\tau = \omega_1 t$, ainsi :

$$\begin{cases} \frac{d^2V}{d\tau^2} + V + \mathcal{X}^2 W = \mathcal{X}^2 F \cos(\Omega \tau), \\ \frac{d^2W}{d\tau^2} + a \frac{dW}{d\tau} + \mathcal{X} V + DW^3 = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

où $a = \frac{\lambda_2}{\omega_1}$, $D = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$ et $\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$. Dans les études suivantes, la différentiation par rapport à la variable τ (changement d'échelle) sera représentée par des points au-dessus des variables. Comme souligné plus haut, l'objectif de la présente recherche est l'exploration des modes normaux non linéaires de l'équation (4.4) au voisinage de la résonance 1 : 1. Cela signifie que les deux variables V and W sont supposées avoir une fréquence proche de l'unité (dans le nouveau domaine de temps). De plus, la dynamique du système est analysée au voisinage de la plus dangereuse résonance et la fréquence de l'excitation externe est donc aussi adoptée être assez proche de l'unité :

$$\Omega = 1 + \mathcal{X}^3 \sigma. \quad (4.10)$$

Les deux variables peuvent donc être exprimées de la façon suivante :

$$\begin{cases} V = \cos(\tau + \mu_1(\mathcal{X}\tau)) f_1(\mathcal{X}\tau), \\ W = \cos(\tau + \mu_2(\mathcal{X}\tau)) f_2(\mathcal{X}\tau). \end{cases} \quad (4.11)$$

μ_i , $i = 1, 2$, prend en compte le décalage en fréquence et la dérive lente de phase et f_i , $i = 1, 2$, la modulation lente d'amplitude. On se restreint en considérant uniquement les trajectoires de phases avec des conditions initiales dans le domaine d'attraction de la variété résonante 1 : 1. Les Equations (4.9) peuvent être arrangées sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{V} + V + \mathcal{X}^2 W = \mathcal{X}^2 F \cos((1 + \mathcal{X}^3 \sigma)\tau), \\ \ddot{W} + W + \mathcal{X}(\delta[a\dot{W} + DW^3 - W] + V) = 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

où $\delta = \mathcal{X}^{-1}$. Si l'estimation présentée dans les Equations (4.11) est valable, on obtient alors :

$$\ddot{W} = -\cos((1 + O(\mathcal{X}))\tau + \varphi_2) f_2(\mathcal{X}\tau) + O(\mathcal{X}) = -W + O(\mathcal{X}). \quad (4.13)$$

Cela signifie que pour avoir une puissance 1 du faible paramètre \mathcal{X} dans la deuxième des Equations (4.12), on doit avoir :

$$\delta[a\dot{W} + DW^3 - W] \sim O(1), \quad (4.14)$$

et l'expression entre crochets doit donc être d'ordre \mathcal{X} . C'est plutôt naturel, car cela décrit une modulation lente et un amortissement des vibrations avec une fréquence proche de l'unité. Les variables complexes sont introduites selon la relation suivante :

$$\varphi_1 e^{j\tau} = \dot{V} + jV, \quad \varphi_2 e^{j\tau} = \dot{W} + jW. \quad (4.15)$$

En prenant en compte ce changement de variables, les Equations (4.12) sont réécrites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}_1 - j\frac{\mathcal{X}^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_2^* e^{-2j\tau}) = \mathcal{X}^2 \frac{F}{2}(e^{j\mathcal{X}^3\sigma\tau} e^{j\tau} + e^{-j\mathcal{X}^3\sigma\tau} e^{-j\tau}), \\ \dot{\varphi}_2 + \mathcal{X}\left\{\delta\left[\frac{j}{2}(\varphi_2 - \varphi_2^* e^{-2j\tau}) + \frac{a}{2}(\varphi_2 + \varphi_2^* e^{-2j\tau}) + \frac{D}{8}j e^{-j\tau}(\varphi_2 e^{j\tau} - \varphi_2^* e^{-j\tau})^3\right] \right. \\ \left. - \frac{j}{2}(\varphi_1 - \varphi_1^* e^{-2j\tau})\right\} = 0, \end{array} \right. \quad (4.16)$$

où l'étoile représente le complexe conjugué. Une analyse en échelles multiples est réalisée selon les développements suivants :

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \varphi_{k0} + \mathcal{X}\varphi_{k1} + \mathcal{X}^2\varphi_{k2} \dots, \quad k = 1, 2, \\ \tau &= \mathcal{X}^l\tau, \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau_0} + \mathcal{X}\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \mathcal{X}^2\frac{\partial}{\partial\tau_2} + \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

Une combinaison de (4.16) et (4.17) conduit à l'approximation zéro :

$$\frac{\partial\varphi_{k0}}{\partial\tau_0} = 0 \Rightarrow \varphi_{k0} = \varphi_{k0}(\tau_1, \tau_2, \dots), \quad k = 1, 2. \quad (4.18)$$

La prise en compte des termes ayant l'ordre de $O(\mathcal{X})$ conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_{10}}{\partial\tau_1} + \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\tau_0} &= 0, \\ \frac{\partial\varphi_{20}}{\partial\tau_1} + \frac{\partial\varphi_{21}}{\partial\tau_0} + \delta\left[\frac{j}{2}(\varphi_{20} - \varphi_{20}^* e^{-2j\tau}) + \frac{a}{2}(\varphi_{20} + \varphi_{20}^* e^{-2j\tau}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{D}{8}j e^{-j\tau}(\varphi_{20} e^{j\tau} - \varphi_{20}^* e^{-j\tau})^3\right] - \frac{j}{2}(\varphi_{10} - \varphi_{10}^* e^{-2j\tau}) = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Les termes séculaires par rapport à l'échelle de temps τ_0 doivent être éliminés de (4.19). Cette condition est satisfaite si la relation suivante a lieu (la solution pour l'ordre zéro (4.18) est aussi prise en compte) :

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= \varphi_{10}(\tau_2, \dots) \quad \varphi_{11} = \varphi_{11}(\tau_1, \tau_2, \dots), \\ \frac{\partial\varphi_{20}}{\partial\tau_1} + \delta\left[\frac{j}{2}\varphi_{20} + \frac{a}{2}\varphi_{20} - 3\frac{D}{8}j\varphi_{20}|\varphi_{20}|^2\right] - \frac{j}{2}\varphi_{10} &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Selon la première équation des Equations (4.20), la variable φ_{10} ne dépend pas de τ_1 , donc sous la condition d'une résonance 1 : 1 la seconde équation de ce système décrit l'évolution de la variable φ_{20} par rapport à l'échelle de temps τ_1 . Il est possible de prouver que la variable φ_{20} évolue vers une valeur équilibre définie comme suit :

$$\begin{aligned} \delta\left[\frac{j}{2}\tilde{\varphi}_{20} + \frac{a}{2}\tilde{\varphi}_{20} - 3\frac{D}{8}j\tilde{\varphi}_{20}|\tilde{\varphi}_{20}|^2\right] - \frac{j}{2}\varphi_{10} &= 0, \\ \tilde{\varphi}_{20}(\tau_2, \dots) &= \lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} \varphi_{20}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Une évolution similaire de la variable φ_1 est décrite par l'équation d'ordre \mathcal{X}^2 :

$$\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial\tau_2} + \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\tau_1} + \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial\tau_0} - \frac{j}{2}(\varphi_{20} - \varphi_{20}^* e^{-2j\tau}) = \frac{F}{2}(e^{j\sigma\tau_3} + e^{-j\sigma\tau_3} e^{-2j\tau_0}). \quad (4.22)$$

Les termes séculaires par rapport à τ_0 sont absents si :

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \tau_2} + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \tau_1} - \frac{j}{2} \varphi_{20} = \frac{F}{2} e^{j\sigma\tau_3}. \quad (4.23)$$

φ_{10} , $\tilde{\varphi}_{20}$ et le membre de droite de l'Equation (4.23) ne dépendent pas de τ_1 . Ensuite à la limite $\tau_1 \rightarrow \infty$ les termes séculaires par rapport à l'échelle de temps τ_1 seront absents si :

$$\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \tau_1} \rightarrow 0. \quad (4.24)$$

Donc, comme $\tau_1 \rightarrow \infty$, l'Equation (4.23) est réduite sous la forme :

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \tau_2} - \frac{j}{2} \tilde{\varphi}_{20} = \frac{F}{2} e^{j\sigma\tau_3}. \quad (4.25)$$

Les Equations (4.21) et (4.25) décrivent la dynamique du système par rapport à l'échelle de temps τ_2 à la limite $\tau_1 \rightarrow \infty$. Le second membre de l'Equation (4.25) dépend uniquement de l'échelle de temps τ_3 et doit donc être considéré comme constant. L'Equation (4.21) est en fait une liaison algébrique entre deux variables dépendantes, φ_{10} et $\tilde{\varphi}_{20}$. Donc par rapport à l'échelle de temps τ_2 la dimensionnalité effective de l'espace d'état du système est réduite de 4 à 2. Un tel régime dynamique peut être interprété comme un mode normal non linéaire amorti avec une variété invariante ($\tilde{\varphi}_{10}$, $\tilde{\varphi}_{10}^*$) [Gendelman, 2004]. Les Equations (4.20) et (4.23) décrivent comment la trajectoire de phase du système est attirée vers ce mode normal non linéaire. Ce processus d'attraction est développé avec l'échelle de temps τ_1 . A cause de l'amortissement la variété invariante du NNM évolue aussi par rapport à l'échelle de temps τ_2 ; cette évolution est décrite par l'Equation (4.25). Après avoir exprimé φ_{10} de l'Equation (4.21) et l'avoir substitué à l'Equation (4.25), on obtient

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_{20}}{\partial \tau_2} \left(\frac{j}{2} + \frac{a}{2} - \frac{6D}{8} j |\tilde{\varphi}_{20}|^2 \right) - \frac{3D}{8} j \tilde{\varphi}_{20} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{20}^*}{\partial \tau_2} = \frac{Fj}{4\delta} e^{j\sigma\tau_3} - \frac{1}{4\delta} \tilde{\varphi}_{20}. \quad (4.26)$$

En prenant le complexe conjugué de l'Equation (4.26) et en opérant de simples manipulations, on peut extraire la dérivée à partir de l'équation :

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_{20}}{\partial \tau_2} = \frac{F \left[\frac{6D}{8} \tilde{\varphi}_{20}^2 e^{-j\sigma\tau_3} + (1 + ja - \frac{12D}{8} |\tilde{\varphi}_{20}|^2) e^{j\sigma\tau_3} \right] - j \frac{18D}{8} \tilde{\varphi}_{20} |\tilde{\varphi}_{20}|^2 + (j - a) \tilde{\varphi}_{20}}{2\delta(1 + a^2 - \frac{24D}{8} |\tilde{\varphi}_{20}|^2 + \frac{108D^2}{64} |\tilde{\varphi}_{20}|^4)} \quad (4.27)$$

L'Equation (4.27) peut directement révéler certaines propriétés qualitatives. Tout d'abord, pour $0 < a < 1/\sqrt{3}$, l'Equation (4.27) présente des singularités dues à la possibilité que le dénominateur s'annule. En effet, pour $0 < a < 1/\sqrt{3}$, une bifurcation se produit, i.e. "*le régime du mode normal non linéaire est rompu résultant en une diminution plutôt abrupte des deux amplitudes. La trajectoire de phase du système couplé quitte la variété résonante et le mode normal non linéaire est totalement détruit comme résultat du passage à travers la bifurcation*" [Gendelman et al., 2006]. En considérant donc une impulsion pour l'excitation avec des oscillations libres, alors en dessous de la valeur critique de a , le régime du mode normal non linéaire est rompu avec une diminution plutôt abrupte des amplitudes x_1 et x_2 , le premier oscillateur continue alors d'osciller avec la même fréquence alors que le second voit son comportement totalement changé. Ce dernier point a été souligné dans [Gendelman et al., 2005]. Dans le cas où l'amortissement non linéaire est au-dessus de la valeur critique, alors il n'existe pas de bifurcation de la variété invariante donc le mode normal non linéaire amorti persiste dans tout le domaine temporel. Dans [Gendelman et al., 2005], il a été montré avec des études énergétiques que le passage de la trajectoire de phase à travers la bifurcation de la variété invariante facilite essentiellement la dissipation d'énergie (diminution plus abrupte de l'énergie). Sous une

charge externe constante une telle structure de branches peut donner naissance à des oscillations quasi-périodiques de “relaxations” (voir, e.g. [Jackson, 1994]). Cela signifie que pour un certain intervalle de l’intensité du forcing externe et du coefficient d’amortissement, le Système (4.4) peut démontrer un régime d’oscillations quasi-périodiques à la place de réponses périodiques étudiées dans la littérature [Jang et al., 2003].

En effet, L’Equation (4.27) décrit l’évolution d’un variété invariante à deux dimensions du NNM forcé-amorti qui attire le flot de phase de dimension cinq du système initial. Contrairement à l’Equation (4.4), cette équation est singulière. La singularité apparaît à la limite $\delta \rightarrow \infty$ (ou de façon équivalente $\varepsilon \rightarrow 0$) et est une conséquence de projeter la dynamique de phase à cinq dimensions du système sur un sous-espace à deux dimensions. Pour explorer le comportement de $\tilde{\varphi}_{20}$ en accord avec l’Equation (4.27), on prend $\tau_3 = 0$, $\tilde{\varphi}_{20} = Ne^{i\theta}$ où N et θ sont des fonctions réelles de τ_2 . Le dernier changement de variables réduit l’Equation (4.27) au système suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial \tau_2} &= \frac{1}{2\delta K} \left(F(\cos \theta + a \sin \theta - \frac{12D}{8}N^2 \cos \theta) - aN \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau_2} &= \frac{1}{2\delta KN} \left(F(-\sin \theta + a \cos \theta + \frac{18D}{8}N^2 \sin \theta) + N - \frac{18D}{8}N^3 \right), \\ K &= (1 + a^2 - \frac{24D}{8}N^2 + \frac{108D^2}{64}N^4).\end{aligned}\quad (4.28)$$

Une exploration plus détaillée des Equations (4.28) peut être réalisée et une étude similaire assez proche est publiée ailleurs [Gendelman et Starosvetsky, 2006]. L’explication d’une réponse quasi-périodique possible ne requiert pas une analyse complète et est présentée ci-dessous. Tout d’abord, on rappelle que pour $0 < a < 1/\sqrt{3}$, (4.28) présente des singularités dues à la possibilité que son dénominateur s’annule aux deux valeurs de N :

$$N_{1,2} = \sqrt{\frac{16 \pm 8\sqrt{1 - 3a^2}}{18D}}. \quad (4.29)$$

De plus, l’Equation (4.28) possède un point fixe évident pour $N = F$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ce point fixe correspond à une réponse périodique à long terme du système décrit par les Equations (4.4) avec un forcing harmonique. Il est aisé de vérifier que pour $F < N_1$ et $F > N_2$ ce point fixe est un foyer stable. Cependant, pour $N_1 < F < N_2$ le point fixe est de type point-selle. Donc le régime à long-terme périodique est instable, donnant ainsi naissance à une réponse quasi-périodique. Pour $a > 1/\sqrt{3}$ le point fixe est toujours stable et ainsi on ne peut pas obtenir de réponse quasi-périodique. Dans la publication [Gendelman et Starosvetsky, 2006] il est démontré que pour le système sans forcing ($F = 0$), la première des Equations de (4.28) ne dépend pas de θ et possède la solution implicite suivante :

$$\frac{54D^2}{64}Z^2 - \frac{24D}{8}Z + (1 + a^2) \log Z = C - \frac{a\tau_2}{\delta}, \quad Z = N(\tau_2)^2. \quad (4.30)$$

Pour $0 < a < 1/\sqrt{3}$ la solution ci-dessus donne naissance à une structure à trois branches, avec deux branches stables et une branche instable. Le régime de réponse quasi-périodique peut ainsi être interprété comme des “sauts” entre deux branches stables. Ce phénomène se produira si

$$0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ i.e. } c_2 < \frac{m_2\sqrt{k_1}}{\sqrt{3m_1}} \quad \text{ou} \quad \xi < \sqrt{\frac{4k_1m_2}{3k_2m_1}}, \quad (4.31)$$

où ξ est l'amortissement spécifique naturel. Pour $a > 1/\sqrt{3}$ il existe uniquement une branche stable et les "sauts" ne sont plus possibles.

Des simulations numériques du Système (4.4) avec des conditions initiales nulles vérifient les dernières conclusions. En effet, sur la Figure 4.2, $a = 0.52 < 1/\sqrt{3}$ et le tracé démontre un comportement typique quasi-périodique des deux réponses (x_1 et x_2). Ce comportement a aussi été révélé dans des simulations à long terme. Pour vérifier l'explication suggérée de ce phénomène (rupture du mouvement sur la variété de résonance 1 : 1 (i.e. résonance avec la même fréquence pour chaque oscillateur) en raison des singularités, phénomène accompagné par des attractions successives de la trajectoire de phase sur une autre branche), on trace la coordonnée interne du système ($x_1 - x_2$) en fonction du temps (avec les mêmes paramètres que précédemment sur la Figure 4.2 : $a = 0.5188$ and $D = 711$), et on la compare avec les valeurs critiques de cette fonction qui correspondent aux singularités de l'Equation (4.27), comme illustré sur la Figure 4.4.

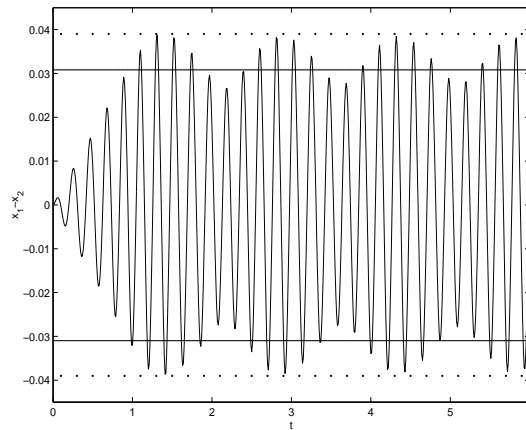
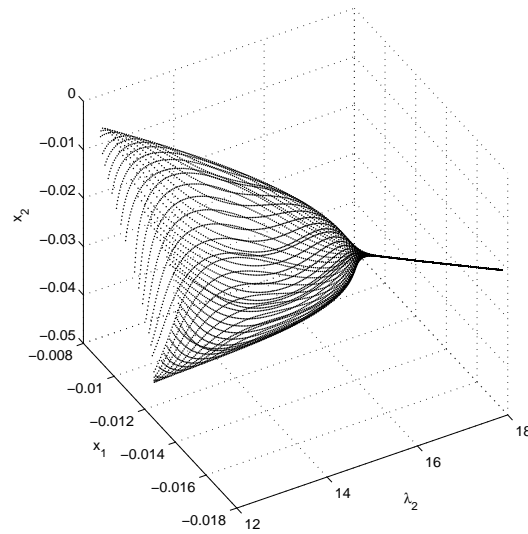
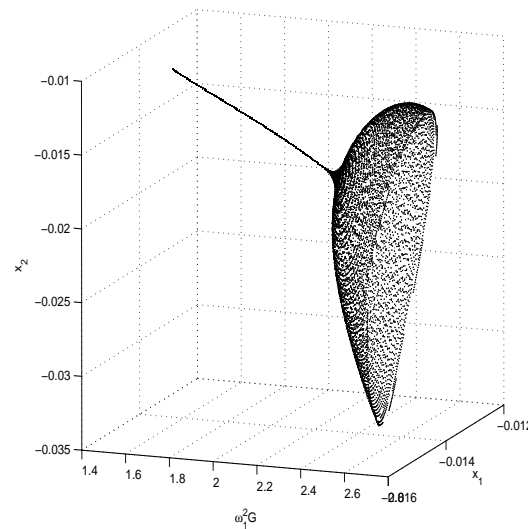


FIG. 4.4 – Déformation interne $x_1 - x_2$ du NES. Les lignes horizontales correspondent aux valeurs critiques de $\tilde{\varphi}_{20}$ (liées à la déformation interne) calculées à partir du dénominateur de l'Equation (4.27). La ligne pointillée - - correspond à la frontière la plus haute et la ligne continue - à la frontière la plus basse.

Il est facile de voir que la variation en amplitude de pic de la coordonnée interne suit les valeurs critiques avec une bonne précision et donc le système se "déplace" dans différents régimes résultant en un régime quasi-périodique. L'autre argument en faveur du scénario suggéré est qu'aucune réponse quasi-périodique n'a été numériquement révélée pour des valeurs de a au-dessus de l'intervalle $0 < a < 1/\sqrt{3}$. La raison suggérée est que pour ces valeurs de coefficients d'amortissement la bifurcation n'est plus possible. La bifurcation de Neimark qui se produit peut être montrée par un diagramme de bifurcations comme montré sur la Figure 4.5. Cette Figure 4.5 montre les sections de Poincaré en fonction du paramètre λ_2 avec les mêmes paramètres que précédemment (pour chaque section les conditions initiales nulles sont considérées puisque dans des expérimentations pratiques, les masses seront initialement au repos). Il faut noter que lorsque $\lambda_2 > \lambda_{2critique}$ des solutions périodiques sont trouvées et lorsque $\lambda_2 < \lambda_{2critique}$ des solutions quasi-périodiques sont observées. Sur cette figure, on peut clairement noter qu'en dessous de la valeur critique d'amortissement ($\lambda_{2critique} = 15.8$), les oscillations de l'oscillateur non linéaire sont plus élevées.

Si l'amplitude de l'excitation externe varie alors la bifurcation peut être vue comme cela est montré sur la Figure 4.6. Cette Figure 4.6 montre les sections de Poincaré en fonction du

FIG. 4.5 – Diagramme de bifurcations (en fonction du paramètre λ_2).FIG. 4.6 – Diagramme de bifurcations (en fonction du paramètre $\omega_1^2 G$).

paramètre $\omega_1^2 G$ avec les mêmes paramètres que précédemment. Il faut noter que le régime quasi-périodique se produit uniquement au-dessus d’une valeur critique de l’excitation externe.

De plus, les résultats peuvent être généralisés. Le cas que nous avons considéré est uniquement pour un jeu de (m_1, k_1) i.e. uniquement une configuration du bâtiment. Il reste à explorer l’influence de la fréquence naturelle pour souligner l’intérêt d’un tel dispositif non linéaire comparé à un “tuned mass damper” classique. Ainsi, on peut tracer le spectre de réponse, i.e. le spectre de réponse en déplacement : pour différents jeux de paramètres (m_1, k_1) (i.e. ω_1) du bâtiment, on trace le pic (le maximum de la valeur absolue du déplacement) quand un forcing périodique (de fréquence $\omega = 29.2$ pour chaque jeu (m_1, k_1)) est appliqué comme illustré sur la Figure 4.7. Ainsi, cette figure démontre un élargissement de l’intervalle de suppression de fréquences. Ceci est un avantage clé du NES comparé au “tuned mass damper” classique (Le NES est plus robuste). En effet, un “tuned mass damper” classique est ajusté et adapté pour uniquement un jeu de (m_1, k_1) mais il n’est plus efficace si la raideur varie (à cause du vieillissement de la

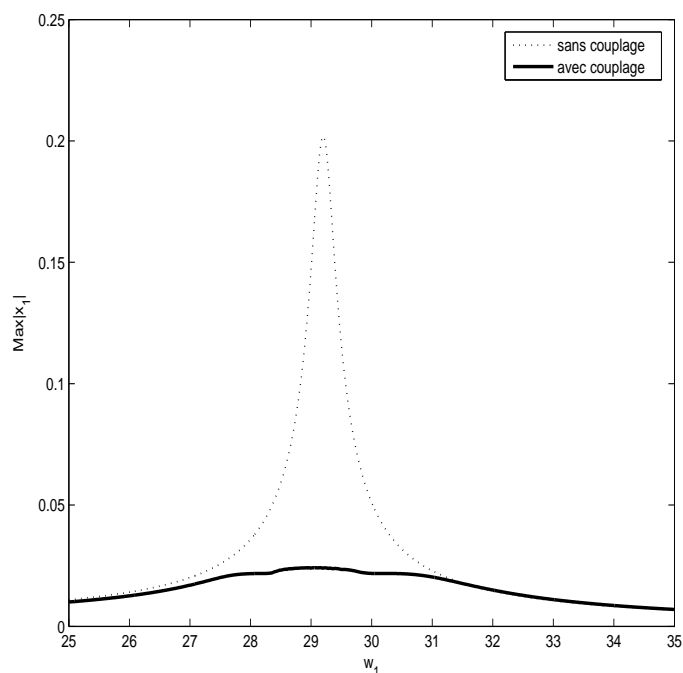


FIG. 4.7 – Spectre de réponse en déplacement (la fréquence naturelle ω_1 du bâtiment varie) avec une excitation externe $2.5 \cos(29.2t)$. La ligne continue représente le déplacement de x_1 avec couplage (i.e. le cas où l'absorbeur est présent) et la ligne pointillée le déplacement de x_1 sans couplage.

structure par exemple).

On peut donner une autre illustration de ce phénomène quasi-périodique en prenant comme paramètres : $\varepsilon = 0.05$, $\omega_2^2 = 8$, $\omega_1^2 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.2$, $F = 0.2$. La Figure 4.8 montre les réponses obtenues avec l'apparition du régime quasi-périodique. Les résultats théoriques

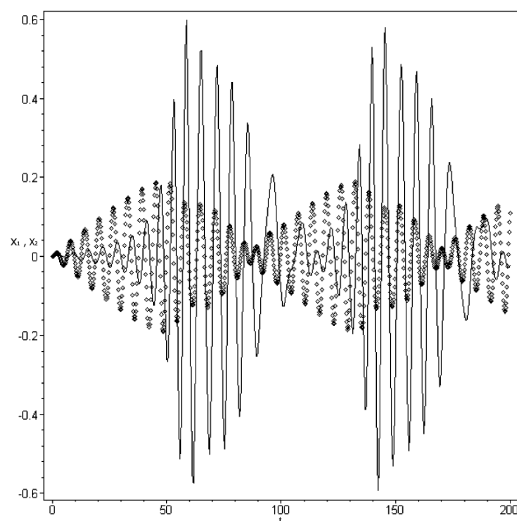


FIG. 4.8 – Réponse quasipériodique du Système (4.4) pour le jeu de paramètres : $\varepsilon = 0.05$, $\omega_2^2 = 8$, $\omega_1^2 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.2$, $F = 0.2$. La ligne pointillée représente le déplacement de l'oscillateur linéaire et la ligne continue représente le déplacement du NES en fonction du temps.

sont aussi vérifiés en ce qui concerne les singularités de l'équation (4.28) comme illustré sur

la Figure 4.9. Une vérification de la robustesse des résultats numériques et analytiques décrits

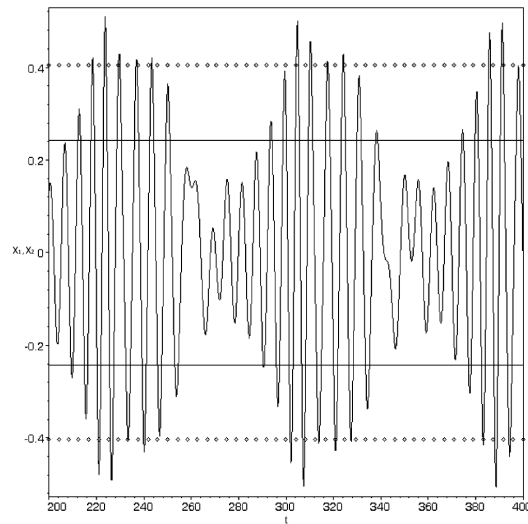


FIG. 4.9 – Tracé de la déformation interne du NES $x_1 - x_2$ en fonction du temps pour le jeu de paramètres : $\varepsilon = 0.05$, $\omega_2^2 = 8$, $\omega_1^2 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.2$, $F = 0.2$. La ligne horizontale correspond aux singularités des Equations (4.28), décrites par l'Equation (4.29). La ligne pointillée correspond à N_2 et la ligne continue à N_1 .

précédemment a été réalisée au moyen de circuits électroniques conçus de façon appropriée. En effet, les circuits électroniques contiennent d'autres facteurs (amortissement, tolérance sur la valeur des résistances,...) non pris en compte dans l'étude théorique et les paramètres sont donc incertains (imprécision et tolérance). De tels circuits permettent donc d'estimer la robustesse du régime de réponse quasi-périodique. Un circuit électronique type utilisé est présenté sur la Figure 4.10 et est détaillé plus précisément sur la Figure 4.11. L'ensemble des dispositifs est

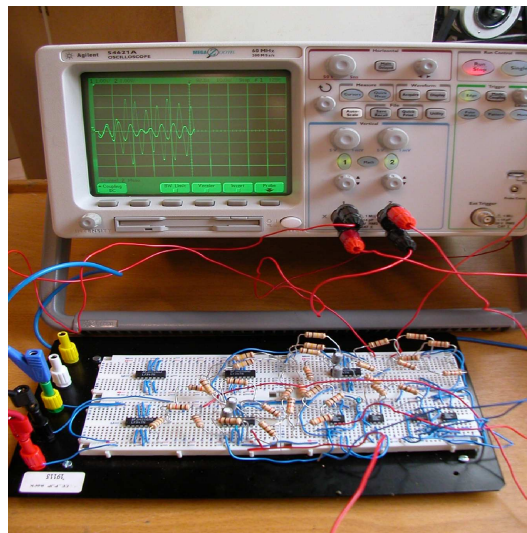


FIG. 4.10 – Circuit électronique type utilisé.

représenté sur la Figure 4.12. Le schéma du circuit électronique utilisé est représenté sur la Figure 4.13. Les paramètres utilisés pour le schéma électronique sont les suivants : $\varepsilon = 0.065$, $\omega_2^2 = 8$, $\omega_1^2 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.1$, $F = 0.192$, $\sigma = 0$. Le forcing externe périodique est réalisé par un générateur. Les résultats (comparés à des résultats obtenus à l'aide d'une simulation numérique) sont présentés sur la Figure 4.14.

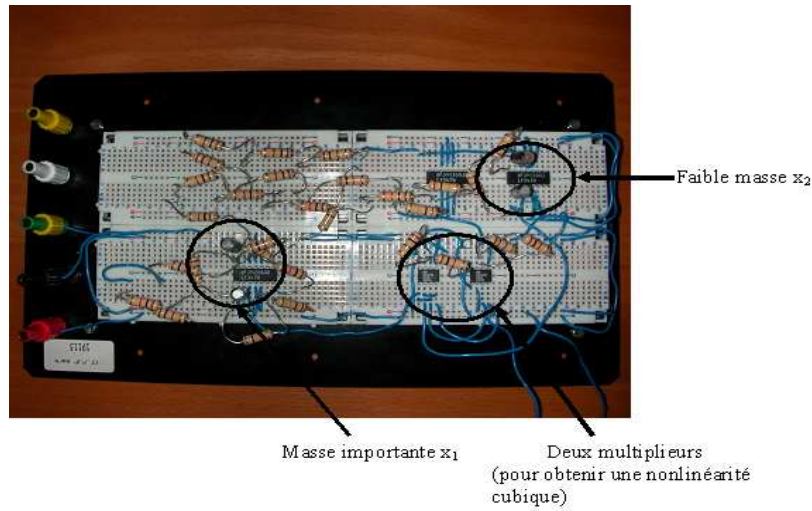


FIG. 4.11 – Détail d'un circuit électronique utilisé.

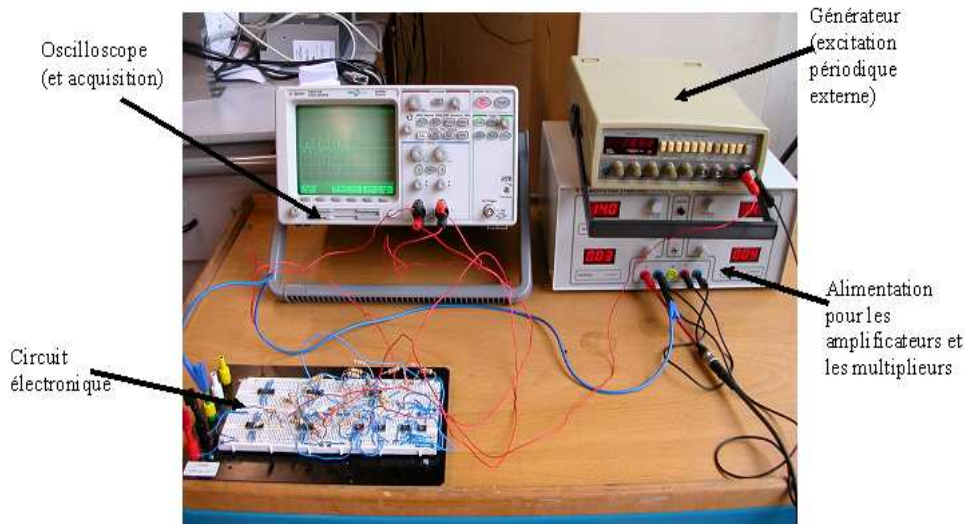


FIG. 4.12 – Détail de l'ensemble des dispositifs électroniques.

Les résultats obtenus précédemment démontrent que le circuit électronique révèle clairement le phénomène de pompage énergétique de la grande masse vers la faible masse par un mécanisme de résonance 1 : 1, accompagné par la génération de vibrations de relaxations quasi-périodiques. Ce processus est robuste aux incertitudes des paramètres du circuit électronique et du générateur externe utilisés. Ces résultats démontrent que le régime de réponse quasi-périodique associé au transfert d'énergie vers le NES peut être utilisé dans des systèmes physiques. Ceci rend possible la discussion sur d'éventuelles applications raisonnables de ce phénomène. Une application possible est ainsi relative à l'absorption des vibrations dans des systèmes mécaniques. Le système (4.4) ressemble à une exemple classique de système mécanique à un degré de liberté sous l'action d'une force périodique avec un absorbeur de vibrations attaché [Ormondroyd et Hartog, 1928, Bykhovsky, 1980, Natsiavas, 1992]. La seule différence par rapport aux nombreuses études précédentes dans la littérature est la nonlinéarité forte considérée dans la présente étude. Comme il a été démontré, ce système étudié peut faire apparaître des types de mouvements non dis-

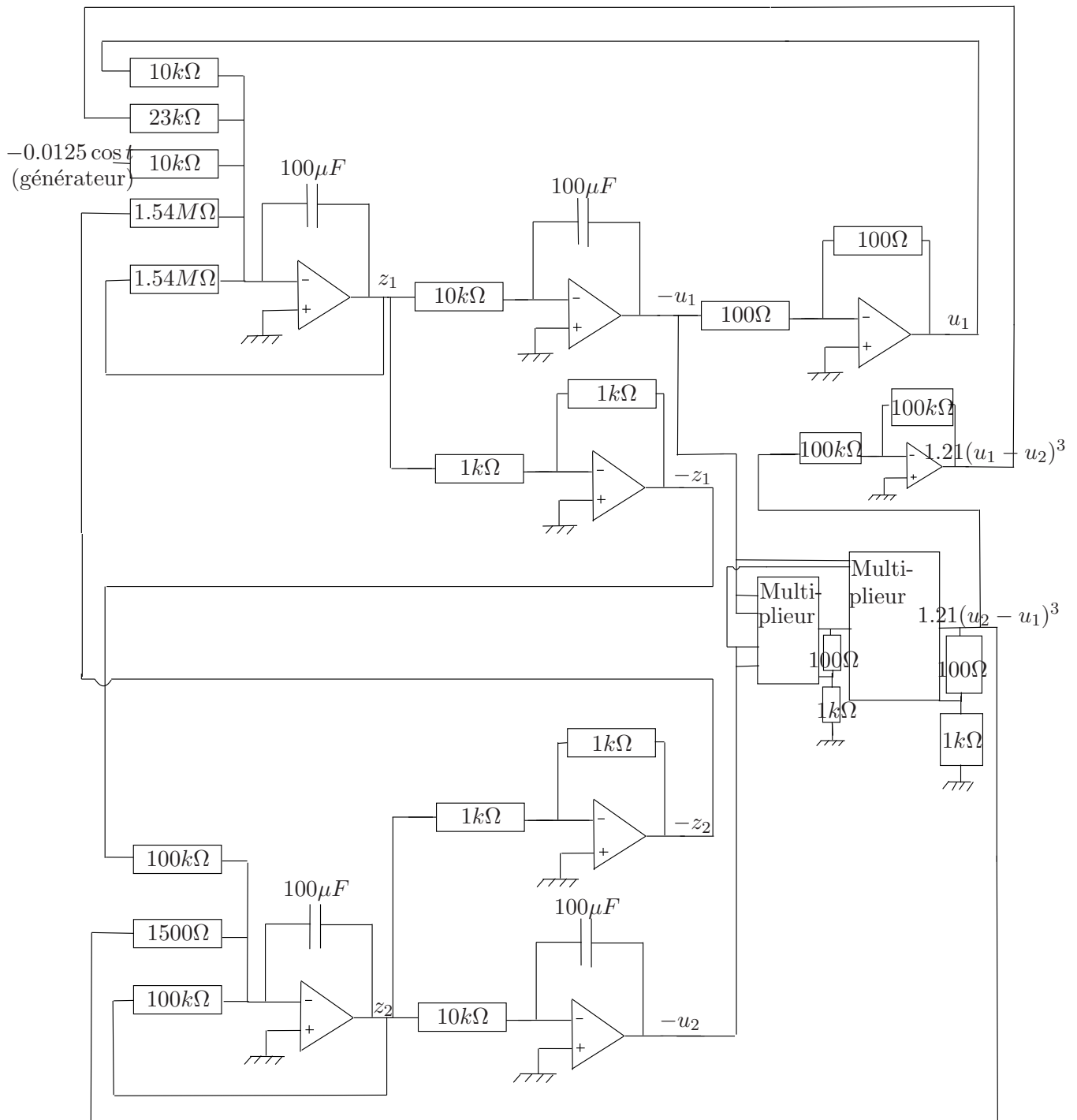


FIG. 4.13 – Schéma du circuit électronique.

ponibles pour des absorbeurs linéaires de vibrations. L'énergie vibratoire est transférée vers le NES et amortie dans un régime quasi-périodique et ainsi l'atténuation des vibrations de la masse primaire est réalisée. Pour vérifier l'efficacité de cette méthode de suppression des vibrations, la performance du NES est comparée à celle d'un absorbeur linéaire proprement conçu ayant la même masse et le même coefficient d'amortissement (la valeur du coefficient d'amortissement correspond à une conception propre de l'absorbeur linéaire). La dynamique de l'absorbeur

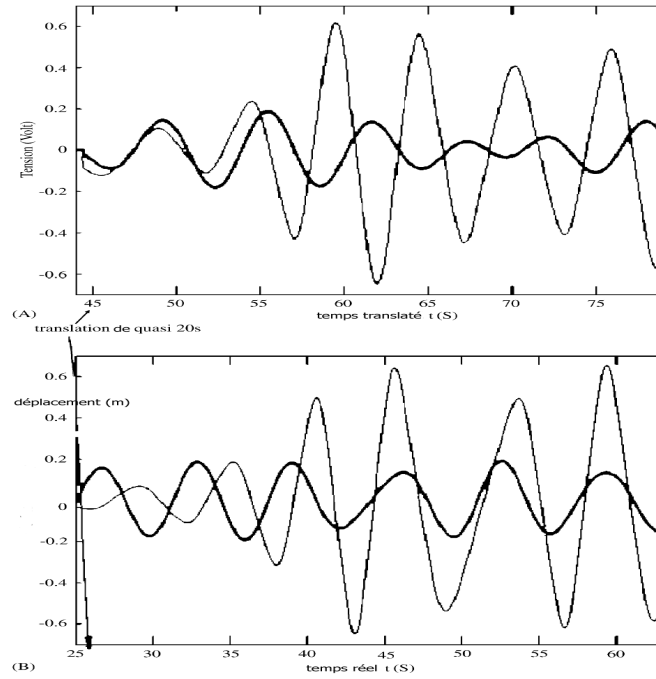


FIG. 4.14 – Résultats obtenus avec des circuits électroniques. (A) Résultats expérimentaux. (B) Résultats numériques.

linéaire est décrite par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + \varepsilon\lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \varepsilon k(x_1 - x_2) = \varepsilon F \cos(1 + \varepsilon\sigma)t, \\ \varepsilon\ddot{x}_2 + \varepsilon\lambda(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \varepsilon k(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Les deux systèmes sont considérés au point de la plus dangereuse résonance (maximum de l'amplitude de réponse) correspondant à des valeurs légèrement différentes du décalage de fréquence $\varepsilon\sigma$. Le critère choisi pour la comparaison est l'énergie (des vibrations) emmagasinée dans le système à chaque moment du temps. Cette énergie est calculée à partir des hamiltoniens des systèmes décrits par les Equations (4.4) et (4.32) sans les termes de forcing et d'amortissement. Les paramètres de l'absorbeur linéaire proprement conçu ont été calculés par une procédure bien connue de minimisation de la réponse à l'aide du software MAPLE. Les résultats de la comparaison sont présentés sur la Figure 4.15. A partir de la Figure 4.15 il est clair que dans le régime de réponse quasi-périodique le NES assure une meilleure suppression des oscillations que le meilleur absorbeur linéaire avec la même masse. L'énergie moyenne emmagasinée dans le système vibrant avec le NES est environ de 50% de moins que dans le système avec l'absorbeur linéaire. Le résultat précédent démontre que le régime de réponse quasi-périodique peut s'avérer avantageux du point de vue de l'absorption de vibrations. Une raison possible de cet effet est que l'attache non linéaire, dans les régimes de réponses quasi-périodiques, vibre avec une amplitude relativement grande et dans un régime de fréquences multiples. Tous ces facteurs facilitent l'amortissement de l'énergie et permettent une meilleure capacité d'absorption. Il faut mentionner que les paramètres utilisés pour la simulation sont différents de ceux listés pour les figures précédentes. La raison est que le régime quasi-périodique est plus prononcé pour les figures précédentes (la modulation de la fréquence rapide est très prononcée) et l'avantage du système avec le NES par rapport à la suppression des vibrations (comparé au meilleur absorbeur linéaire) est plus évident pour les paramètres utilisés pour la dernière simulation. Cette différence soulève une question concernant l'optimisation des performances du système, ce qui sera l'objet du prochain chapitre. Le système en considération fait apparaître ce type de réponse uniquement

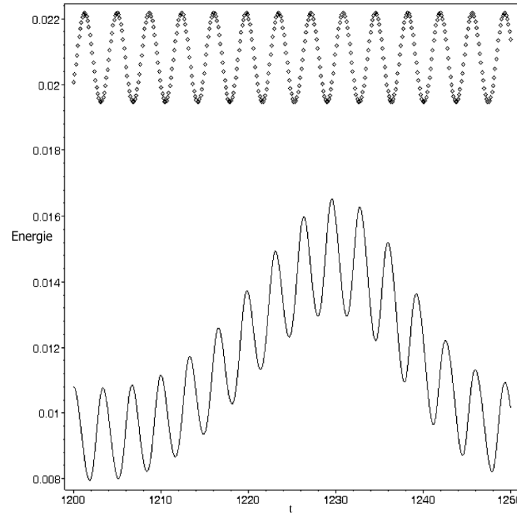


FIG. 4.15 – Comparaison de l'énergie emmagasinée dans le système pour l'absorbeur non linéaire de vibrations (ligne continue) et pour l'absorbeur linéaire de vibrations proprement conçu (ligne pointillée). Les paramètres utilisés sont $\varepsilon = 0.1$, $\omega_2^2 = 8$, $\omega = 0.95$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.2$, $F = 0.2$ (absorbeur non linéaire) et $\omega = 0.85$, $k = 0.9$ (absorbeur linéaire). Les valeurs ont été choisies pour fournir la plus grande amplitude de réponse dans chaque cas.

pour un certain intervalle d'amplitudes du forcing externe. En dehors de cet intervalle d'amplitudes la réponse sera approximativement périodique à long terme, similairement à celle décrite dans [Jang et al., 2003], à condition qu'aucune autre résonance plus complexe n'intervienne. Les simulations démontrent cependant qu'un élargissement de l'intervalle de fréquences atténuées peut être observé dans le régime périodique à long terme.

C'est ainsi que l'on va s'intéresser à ces solutions périodiques à long terme pour montrer cet élargissement. Les absorbeurs de vibrations linéaires classiques étant beaucoup utilisés dans l'industrie, il nous faut déterminer des indicateurs de comparaisons possibles avec ces absorbeurs de vibrations linéaires. Les méthodes d'échelles multiples permettent ainsi de calculer des solutions stationnaires dans les systèmes non linéaires. Grâce à cette méthode, il sera alors possible d'établir des comparaisons avec les tuned mass damper classiques.

4.1.2.2 Approche échelles multiples

Le phénomène est maintenant étudié à l'aide des échelles multiples en considérant le système suivant :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 + c_2 \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + k_2 (x_1 - x_2)^3 = F \cos(\omega t), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_2 \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) + k_2 (x_2 - x_1)^3 = 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Grâce à une analyse en échelles multiples, il est possible de tracer les courbes amplitude-fréquence du système analytiquement. La méthode d'échelles multiples développée par [Nayfeh, 1973] est une technique singulière de perturbations qui peut être utilisée pour résoudre des systèmes dynamiques non linéaires (des développements et des applications peuvent être vus dans les publications suivantes [Nayfeh et Nayfeh, 1994b, Nayfeh, 1973]). Ensuite, un modèle sans dimension est utilisé ($u = x_1$, $v = x_2 - x_1$) :

$$\ddot{u} + \varepsilon \lambda_1 \dot{u} + \omega_1^2 u - \varepsilon \lambda_2 \dot{v} - \varepsilon \omega_2^2 v^3 = \varepsilon f \cos(\omega t), \quad (4.34)$$

$$\ddot{v} + (1 + \varepsilon)\lambda_2\dot{v} - \varepsilon\lambda_1\dot{u} - \omega_1^2u + (1 + \varepsilon)\omega_2^2v^3 = -\varepsilon f \cos(\omega t), \quad (4.35)$$

où

- $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$: ratio de masses,
- $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$: fréquence propre de la structure maître,
- $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$: coefficient de la nonlinéarité,
- $\lambda_i = \frac{c_i}{m_2}$: facteurs d'amortissement $i = 1, 2$,
- $f = \frac{F}{m_1\varepsilon}$: forcing sans dimension.

Les solutions sont cherchées sous la forme suivante :

$$u(t) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (4.36)$$

$$v(t) = v_0(T_0, T_1) + \varepsilon v_1(T_0, T_1) + \dots \quad (4.37)$$

avec de nouvelles dérivées/temps indépendantes :

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1, \dots \quad \frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots = \frac{d}{dT_0} + \varepsilon \frac{d}{dT_1} + \dots$$

Ensuite, on s'intéresse à une résonance 1 : 1 entre les deux oscillateurs (comme montré par les simulations numériques). En effet, il a été montré dans de nombreuses évidences numériques [Gourdon et Lamarque, 2005b, Manevitch et al., 2003] et dans de nombreux résultats théoriques [Gendelman et al., 2005, Gendelman, 2004, Vakakis et al., 1996, Vakakis, 2001] mais aussi par les auteurs de [Vakakis et al., 2003] que lorsque le phénomène de pompage énergétique se produit, u et v oscillent avec la même fréquence. Ici c'est une résonance avec la même pulsation ω_1 . Il faut noter que ce n'est pas une résonance classique entre deux modes linéaires. En effet, ici le système essentiellement non linéaire (avec aucun terme linéaire) peut rentrer en résonance avec n'importe quelle fréquence linéaire du système primaire. Ce point a été étudié dans de nombreuses études sur ce sujet. Cependant, dans l'Equation (4.35) il n'y a pas de terme en " $\omega_1^2 v$ ". C'est pourquoi le terme " $\omega_1^2 v$ " est introduit dans l'Equation (4.35). Ainsi, le système est maintenant :

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_1^2 u + \varepsilon(\lambda_1 \dot{u} - \lambda_2 \dot{v} - \omega_2^2 v^3 - f \cos(\omega t)) = 0, \\ \ddot{v} + \omega_1^2 v + \varepsilon((1 + \delta)\lambda_2 \dot{v} - \lambda_1 \dot{u} - \delta\omega_1^2 u - \delta\omega_1^2 w + (1 + \delta)\omega_2^2 v^3 + f \cos(\omega t)) = 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

où $\delta = \varepsilon^{-1}$.

Ensuite, les techniques échelles multiples sont utilisées près de la résonance 1 : 1 : $\omega \equiv \omega_1 + \varepsilon\sigma$. Les solutions stationnaires

$$u_0 = a_0 \cos(\omega_1 T_0 + \sigma T_1 + c_0), \quad (4.39)$$

$$v_0 = b_0 \cos(\omega_1 T_0 + \sigma T_1 + d_0), \quad (4.40)$$

sont alors introduites. Ainsi, dans les Equations (4.38), si l'estimation présentée dans (4.39) et (4.40) est valable, on doit adopter :

$$\delta [\lambda_2 \dot{v} - \omega_1^2 u - \omega_1^2 w + \omega_2^2 v^3] \sim O(1), \quad (4.41)$$

et l'expression entre crochets doit donc être d'ordre ε (mais chaque terme n'est pas nécessairement faible). En effet, comme cela est montré dans de nombreuses évidences numériques notamment dans [Gourdon et Lamarque, 2005b, Gendelman et al., 2005, Vakakis et al., 1996] et dans

des résultats théoriques [Gendelman et al., 2006, Gendelman et Starosvetsky, 2006], lorsque le pompage énergétique se produit, u et v oscillent avec la même fréquence. Une telle procédure est entièrement justifiée par les analyses numériques détaillées et par les nombreuses études précédentes. Cela semble plutôt naturel car cela décrit une modulation lente et un amortissement des vibrations avec une fréquence proche de $\frac{\omega_1}{2\pi}$. Pour le vérifier numériquement par exemple on peut prendre les paramètres suivants (qui seront utilisés dans les études numériques suivantes) : $\varepsilon = 7.215\%$, $\omega_2 = 2000\text{rad.s}^{-1}.\text{m}^{-1}$, $\omega_1 = 23.17\text{rad.s}^{-1}$, $\lambda_1 = 5.13\text{s}^{-1}$, $\lambda_2 = 12\text{s}^{-1}$, $m_1 = 1.677\text{kg}$, $m_2 = 0.121\text{kg}$, $\omega = 23.17\text{rad.s}^{-1}$ et $f = 1.5$. Avec ces paramètres, la Figure 4.16 montre l'évolution de $(\lambda_2\dot{v} - \omega_1^2u - \omega_1^2v + \omega_2^2v^3)$ grâce à une intégration numérique. Cette expression est de l'ordre de $\varepsilon = 0.07215$, ce qui vérifie l'hypothèse supposée précédemment. De plus, la condition (4.41) restreint le type de solutions qui peuvent être obtenues avec les échelles multiples. Cependant, le but ici est d'étudier le mécanisme de pompage énergétique souligné dans de nombreuses études [Gendelman et al., 2005, Gendelman, 2004, Vakakis et al., 1996, Gendelman et al., 2006] mais aussi [Manevitch et al., 2003] qui supposent une résonance 1 : 1 à la pulsation ω_1 . Toutes les autres résonances qui peuvent se produire dans ce type de système ne sont pas analysées dans la présente étude. Cette hypothèse a été vérifiée explicitement en regardant les solutions approchées, à la fois en échelles multiples et numériquement comme montré sur la Figure 4.18 comme nous le verrons par la suite.

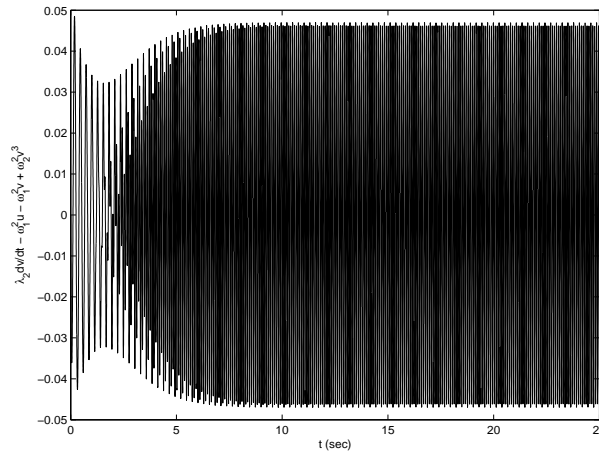


FIG. 4.16 – Evolution de $(\lambda_2\dot{v} - \omega_1^2u - \omega_1^2v + \omega_2^2v^3)$ par intégration numérique ($\varepsilon = 0.07215$).

Ainsi les solutions stationnaires sont introduites dans les équations en échelles de ε :

$$D_0u_0 + \omega_1^2u_0 = 0, \quad \varepsilon^0 \quad (4.42)$$

$$D_0v_0 + \omega_1^2v_0 = 0, \quad \varepsilon^0 \quad (4.43)$$

$$D_0^2u_1 + 2D_0D_1u_0 + \lambda_1D_0u_0 - \lambda_2D_0v_0 + \omega_1^2u_1 - \omega_2^2v_0^3 = f \cos(\omega t), \quad \varepsilon^1 \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} D_0^2v_1 + 2D_0D_1v_0 + (1 + \delta)\lambda_2D_0v_0 - \lambda_1D_0u_0 + \omega_1^2v_1 \\ - \delta\omega_1^2u_0 + (1 + \delta)\omega_2^2v_0^3 = -f \cos(\omega t), \end{aligned} \quad \varepsilon^1 \quad (4.45)$$

fournissant les équations en (u_1, v_1) mettant en jeu les composantes $e^{j\omega_1T_0}$, $e^{3j\omega_1T_0}$. En annulant les parties séculaires en $e^{j\omega_1T_0}$ on peut obtenir les conditions résonantes pour u_0, v_0 . Quand toutes les opérations sont effectuées, a_0, b_0, c_0, d_0 sont solutions implicites du système :

$$a_0\omega_1\sigma - \frac{\lambda_2b_0\omega_1 \sin(d_0 - c_0)}{2} + \frac{3\omega_2^2b_0^3 \cos(d_0 - c_0)}{8} + \frac{f \cos(c_0)}{2} = 0, \quad (4.46)$$

$$\frac{\lambda_1 a_0 \omega_1}{2} - \frac{\lambda_2 b_0 \omega_1 \cos(d_0 - c_0)}{2} - \frac{3\omega_2^2 b_0^3 \sin(d_0 - c_0)}{8} + \frac{f \sin(c_0)}{2} = 0, \quad (4.47)$$

$$b_0 \omega_1 \sigma - \frac{\lambda_1 a_0 \omega_1 \sin(c_0 - d_0)}{2} + \frac{\delta \omega_1^2 a_0 \cos(c_0 - d_0)}{2} + \frac{\delta \omega_1^2 b_0}{2} - \frac{3\omega_2^2 b_0^3 (1 + \delta)}{8} - \frac{f \cos(d_0)}{2} = 0, \quad (4.48)$$

$$\frac{(1 + \delta)\lambda_2 b_0 \omega_1}{2} - \frac{\lambda_1 a_0 \omega_1 \cos(c_0 - d_0)}{2} - \frac{\delta \omega_1^2 a_0 \sin(c_0 - d_0)}{2} - \frac{f \sin(d_0)}{2} = 0. \quad (4.49)$$

Une procédure de Newton est ensuite utilisée pour obtenir les FrFs de la structure couplée à l'absorbeur d'énergie. Comme exemple, on considère $\varepsilon = 7.215\%$, $\omega_2 = 2700 \text{rad.s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $\omega_1 = 23.17 \text{rad.s}^{-1}$, $\lambda_1 = 15 \text{s}^{-1}$, $\lambda_2 = 12 \text{s}^{-1}$, $m_1 = 1.677 \text{kg}$, $m_2 = 0.121 \text{kg}$ pour tracer les FrFs des structures, comme indiqué sur la Figure 4.17. Ensuite, on peut noter que l'hypothèse (4.41)

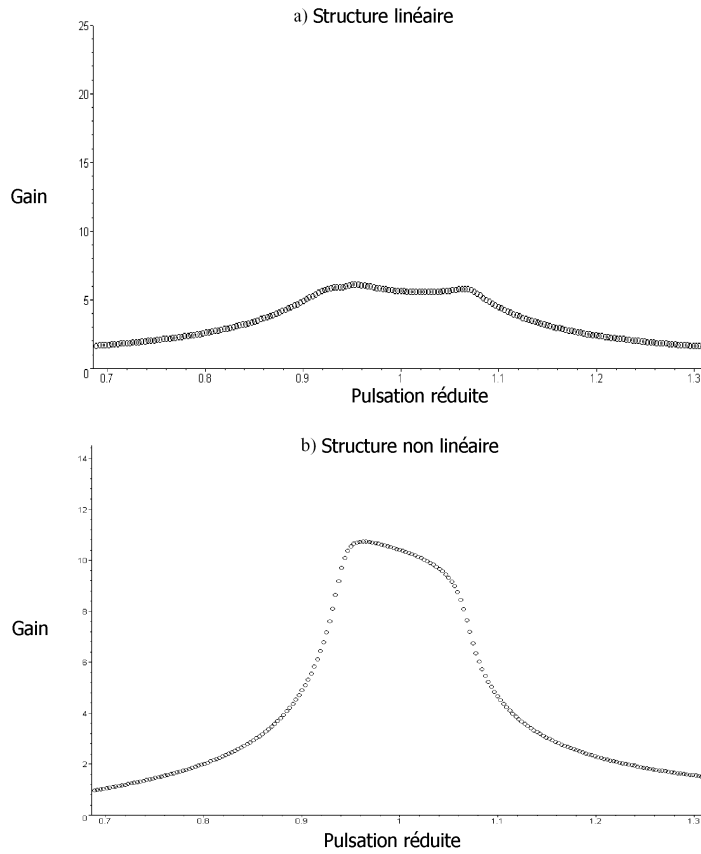


FIG. 4.17 – FrFs tracées grâce à une analyse en échelles multiples.

et le fait que l'on s'intéresse uniquement à une résonance 1 : 1 (les autres types de solutions qui peuvent être obtenues par une analyse en échelles multiples ne sont pas étudiées dans la présente étude) ont été vérifiés explicitement en regardant les solutions approchées, à la fois en échelles multiples et numériquement, comme illustré sur la Figure 4.18 avec les paramètres précédents (ici $f = 5$).

De plus, en analysant plus précisément ces FrFs comme montré sur la Figure 4.19 ($\varepsilon =$

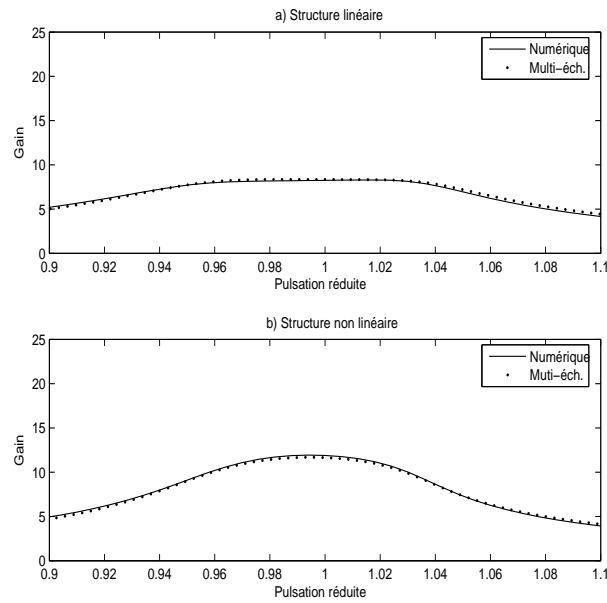


FIG. 4.18 – Comparaison entre les échelles multiples et les solutions numériques.

7.215%, $\omega_2 = 3500\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$, $\omega_1 = 23.17\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $\lambda_1 = 5.13\text{s}^{-1}$, $\lambda_2 = 12\text{s}^{-1}$, $m_1 = 1.677\text{kg}$, $m_2 = 0.121\text{kg}$) où l'amplitude d'excitation f varie (cette figure montre le déplacement maximal de la structure primaire en fonction de l'amplitude du forcing f : pour chaque valeur de f la barre représente l'intervalle de déplacements de la structure primaire ; chaque point de la barre est pour une valeur fixée de l'excitation externe ω donc le sommet de la barre est la valeur maximale du déplacement pour une valeur fixée de f). Sur cette Figure 4.19 on observe que pour de faibles amplitudes (avant $f = 4$), le pompage énergétique n'est pas activé ; pour des amplitudes intermédiaires, il existe un intervalle efficace de l'absorbeur (le déplacement maximal de la structure primaire n'augmente pas quand l'amplitude f du forcing externe augmente) et pour de plus grandes amplitudes (après $f = 9$), le phénomène est faiblement efficace. De plus, pour

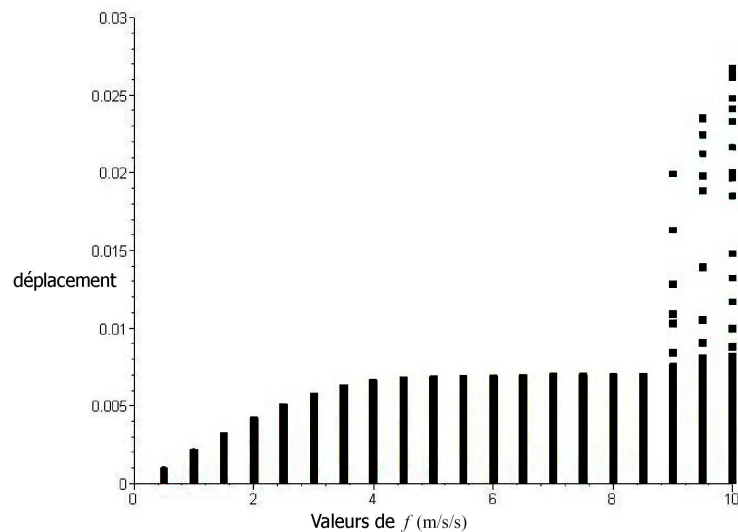


FIG. 4.19 – Evolution de la FrF tracée grâce à une analyse en échelles multiples.

vérifier la bonne précision de l'analyse en échelles multiples, nous pouvons comparer les résultats précédents avec une autre méthode nommée méthode de complexification qui est similaire à la technique développée dans [Jang et al., 2003] (où la précision de la méthode de complexification a été vérifiée). En effet, le système considéré possède les équations du mouvement suivantes (même système que précédemment) :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon \lambda_1 \dot{x}_1 + \varepsilon \lambda_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \varepsilon \omega_2^2 (x_1 - x_2)^3 = \varepsilon f \cos(\omega t), \\ \varepsilon \ddot{x}_2 + \varepsilon \lambda_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \varepsilon \omega_2^2 (x_2 - x_1)^3 = 0, \end{cases} \quad (4.50)$$

qui peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon \lambda_1 \dot{x}_1 + \varepsilon \lambda_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \varepsilon \omega_2^2 (x_1 - x_2)^3 - \varepsilon f \cos(\omega t) = 0, \\ \ddot{x}_2 + \lambda_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_2^2 (x_2 - x_1)^3 = 0. \end{cases} \quad (4.51)$$

La méthode de complexification décrite dans [Jang et al., 2003] est utilisée. Ainsi, les nouvelles variables complexes

$$\psi_1 = \dot{x}_1 + j\omega x_1, \quad \psi_2 = \dot{x}_2 + j\omega x_2, \quad j^2 = -1, \quad (4.52)$$

sont introduites. Ensuite, les amplitudes complexes sont exprimées sous la forme :

$$\psi_1 = \varphi_1 e^{j\omega t}, \quad \psi_2 = \varphi_2 e^{j\omega t}. \quad (4.53)$$

En substituant les Equations (4.52) et (4.53) dans les Equations du mouvement (4.51) et en moyennant à la pulsation d'excitation ω , on retient uniquement les termes contenant $e^{j\omega t}$. On obtient ensuite un jeu de deux équations complexes de modulation qui régissent l'évolution (lente) des amplitudes complexes φ_i , $i = 1, 2$. Pour étudier les solutions périodiques à long terme du système on impose des conditions stationnaires aux équations de modulation en posant $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$. Pour analyser le jeu d'équations algébriques complexes obtenues (qui gouvernent les amplitudes complexes constantes des deux oscillateurs), on exprime les amplitudes complexes en fonction des parties réelles et imaginaires,

$$\varphi_1 = z_1 + jz_2, \quad \varphi_2 = z_3 + jz_4, \quad (4.54)$$

qui après plusieurs substitutions fournissent le jeu suivant non homogène de quatre équations réelles :

$$\begin{cases} -\frac{\omega z_2}{2} + \frac{\varepsilon \lambda_1 z_1}{2} + \frac{\omega_1^2 z_2}{2\omega} + \frac{\varepsilon \lambda_2}{2} (z_1 - z_3) + \frac{3\varepsilon \omega_2^2}{8\omega^3} ((z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_4)^2) (z_2 - z_4) = 0, \\ \frac{\omega z_1}{2} + \frac{\varepsilon \lambda_1 z_2}{2} + \frac{\varepsilon f}{2} - \frac{\omega_1^2 z_1}{2\omega} + \frac{\varepsilon \lambda_2 (z_2 - z_4)}{2} - \frac{3\varepsilon \omega_2^2 (z_1 - z_3)}{8\omega^3} ((z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_4)^2) = 0, \\ -\frac{\omega z_4}{2} + \frac{\lambda_2}{2} (z_3 - z_1) + \frac{3\omega_2^2}{8\omega^3} ((z_3 - z_1)^2 + (z_4 - z_2)^2) (z_4 - z_2) = 0, \\ \frac{\omega z_3}{2} + \frac{\lambda_2}{2} (z_4 - z_2) - \frac{3\omega_2^2}{8\omega^3} ((z_3 - z_1)^2 + (z_4 - z_2)^2) (z_3 - z_1) = 0. \end{cases} \quad (4.55)$$

Pour des valeurs fixées des paramètres du système, ce jeu est résolu numériquement pour une pulsation ω qui varie pour obtenir les courbes de résonances fondamentales du système où la fréquence rapide de la réponse à long terme est identique à la fréquence de l'excitation externe. Les approximations analytiques des réponses des deux oscillateurs sont obtenues en remontant les transformations sur les variables, et sont données par :

$$x_1(t) \approx \frac{|\varphi_1|}{\omega} \cos(\omega t + \phi_1), \quad x_2(t) \approx \frac{|\varphi_2|}{\omega} \cos(\omega t + \phi_2), \quad (4.56)$$

où les amplitudes et les phases sont calculées en fonction des solutions de (4.55) comme suit,

$$|\varphi_1| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad |\varphi_2| = \sqrt{z_3^2 + z_4^2}, \quad \phi_1 = \arctan\left(\frac{z_2}{z_1}\right), \quad \phi_2 = \arctan\left(\frac{z_4}{z_3}\right). \quad (4.57)$$

En prenant les mêmes valeurs que précédemment ($\varepsilon = 7.215\%$, $\omega_2 = 4228\text{rad.s}^{-1}.\text{m}^{-1}$, $\omega_1 = 23.17\text{rad.s}^{-1}$, $\lambda_1 = 5.13\text{s}^{-1}$, $\lambda_2 = 12\text{s}^{-1}$, $m_1 = 1.677\text{kg}$, $m_2 = 0.121\text{kg}$), on peut constater que l'analyse en échelles multiples est en bon accord avec la méthode de complexification comme illustré sur la Figure 4.20.

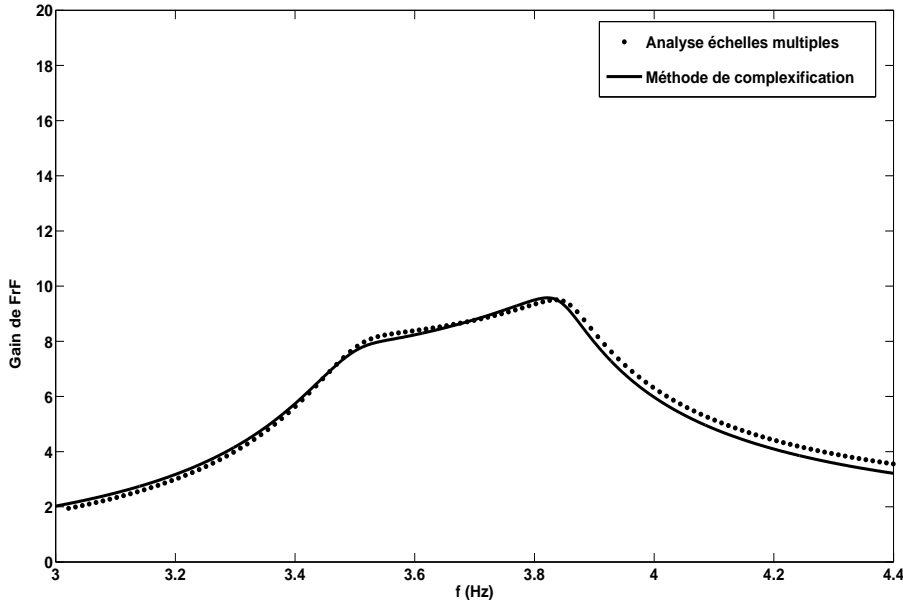


FIG. 4.20 – Comparaison entre la méthode de complexification et l'analyse en échelles multiples.

De plus, pour une excitation périodique et pour mieux comprendre l'intérêt du pompage énergétique comparé à un “tuned mass damper” linéaire classique, les courbes amplitudes-fréquences peuvent être comparées. Par exemple, deux cas peuvent être comparés : (a) une structure primaire avec un tuned mass damper linéaire optimal (l'optimisation est décrite dans [Hartog, 1947] : $k_2 = 232.54\text{N.m}^{-1}$) (b) une structure primaire avec une attache non linéaire $\frac{k_2}{m_2} = 800000$, $\frac{m_2}{m_1} = 0.1$, $\frac{c_2}{m_2} = 7$ (l'amortissement naturel spécifique dans le système non linéaire est de 0.39%). Le coefficient d'amortissement et la masse du système secondaire ajouté sont identiques dans les deux cas. Les résultats sont fournis sur la Figure 4.21 pour une excitation harmonique. J'ai ainsi comparé les courbes de réponses en fréquences des deux types d'absorbeurs optimisés pour un ajout de coefficient d'amortissement égal. On peut clairement voir un avantage important du couplage fortement non linéaire. En effet, la courbe avec couplage cubique (i.e. le cas où l'absorbeur est présent) se trouve toujours “sous” la courbe sans couplage (i.e. le cas pour lequel l'absorbeur n'est pas présent) : l'amplitude n'est pas amplifiée pour une valeur fixée de la fréquence de forcing $f = \frac{\omega}{2\pi}$; ce qui n'est pas le cas avec un tuned mass damper linéaire classique où deux résonances peuvent apparaître. En effet, sur la Figure 4.21 pour $20 < \omega < 25$, l'absorbeur linéaire n'est pas efficace et est même dangereux pour la structure primaire. Comme illustré sur la Figure 4.22 avec un tuned mass damper classique, et loin de la principale résonance, deux autres pics peuvent apparaître et l'ajustement est réalisé pour une fréquence de résonance bien précise. Ainsi, loin de la résonance principale, l'oscillateur

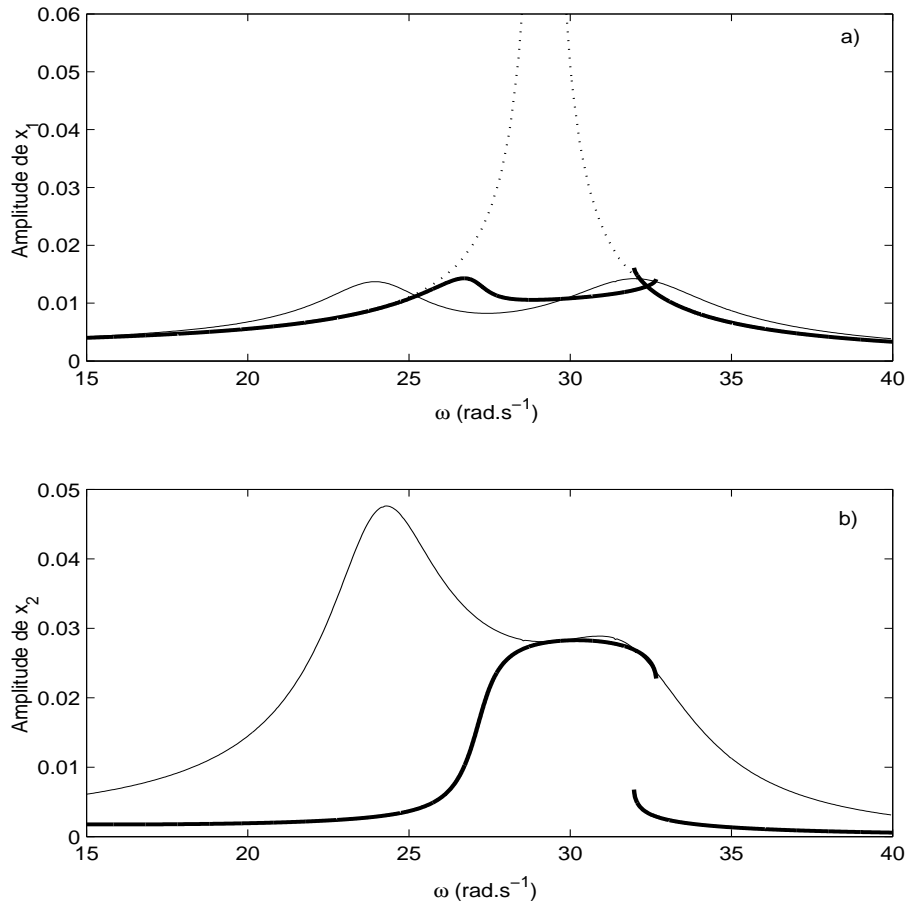


FIG. 4.21 – Comparaison avec un Tuned Mass Damper (TMD) en calculant les régimes stationnaires stables. a) Amplitude de $x_1(t)$. b) Amplitude de $x_2(t)$. La ligne épaisse — représente les amplitudes avec le couplage non linéaire et la ligne fine — représente les amplitudes avec le TMD linéaire, la ligne pointillée - - représente les amplitudes de x_1 sans couplage.

de Frahm peut venir amplifier la réponse qu'aurait la structure primaire sans le dispositif de contrôle ce qui peut être dangereux pour la structure dans le cas où l'excitation n'est pas monochromatique mais contient une bande de fréquences ce qui est le cas pour les séismes. Si la fréquence de résonance de la structure primaire est modifiée pour des raisons de vieillissement, de modification du bâtiment (comme ajout de cloisons) alors le tuned mass damper n'est plus adapté. Au contraire le fort couplage cubique permet de rester toujours en dessous de la courbe de réponse en fréquences du système primaire initial. Un des objectifs de la problématique qui était de ne pas venir modifier les caractéristiques de la structure primaire (en particulier les fréquences et modes propres) peut donc être atteint avec le pompage énergétique et les absorbeurs ainsi construits qui vont posséder une adaptabilité aux variations des caractéristiques des structures ou de l'environnement.

Les avantages et les inconvénients des deux types d'absorbeurs (le TMD est le tuned mass damper classique et le NES est le couplage fortement non linéaire avec le phénomène de pompage énergétique) peuvent être résumés dans le Tableau 4.1 dans lequel les inconvénients ont été soulignés.

Ainsi si la fréquence de la structure primaire linéaire change (en raison du vieillissement...), on a besoin d'ajuster l'amortisseur de Frahm (tuned mass damper linéaire) ce qui n'est pas le cas avec le NES.

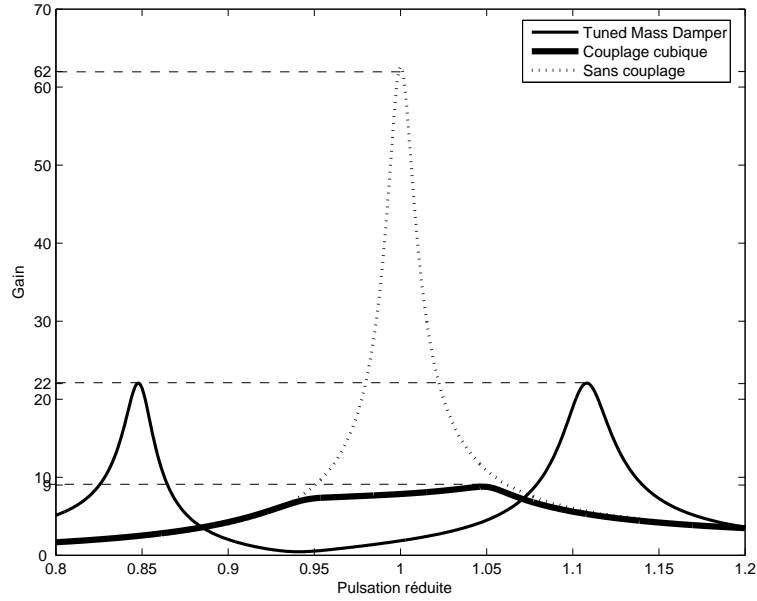


FIG. 4.22 – Comparaison avec un tuned mass damper linéaire classique.

4.1.2.3 Approche équation variationnelle

L'objectif ici est de présenter quelques nouveaux résultats sur le régime quasi-périodique, pour comprendre comment il apparaît et pourquoi il apparaît uniquement au dessus d'une certaine amplitude du forcing. Ce régime quasi-périodique apparaît dans les régions de la fréquence d'excitation où aucune solution harmonique stable n'existe. Des méthodes analytiques approchées comparées à des méthodes numériques peuvent être utilisées pour rechercher les différentes régions d'instabilités des solutions harmoniques (la région instable correspond à un régime autre que celui périodique). Toute la présente étude suit la théorie développée par les auteurs de la publication suivante [Szemplińska-Stupnicka et Bajkowski, 1980].

On rappelle qu'on s'intéresse au système gouverné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon \lambda (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \varepsilon C (x_1 - x_2)^3 = F \cos(\omega t), \\ \varepsilon \ddot{x}_2 + \varepsilon \lambda (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \varepsilon C (x_2 - x_1)^3 = 0, \end{cases} \quad (4.58)$$

qui peuvent être réécrites sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon \lambda (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \varepsilon C (x_1 - x_2)^3 - F \cos(\omega t) = 0, \\ \ddot{x}_2 + \lambda (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + C (x_2 - x_1)^3 = 0. \end{cases} \quad (4.59)$$

Ensuite on considère les solutions harmoniques :

$$x_1^{(0)} = A_1 \cos(\omega t + \phi_1), \quad x_2^{(0)} = A_2 \cos(\omega t + \phi_2). \quad (4.60)$$

Pour rechercher la stabilité des solutions harmoniques on ajoute de faibles perturbations aux coordonnées $x_i^{(0)}(t)$ en posant :

$$\tilde{x}_i = x_i^{(0)} + \delta x_i \equiv A_i \cos(\omega t + \phi_i) + \delta x_i(t), \quad (4.61)$$

et en examinant le comportement de δx_i avec le temps. Les équations variationnelles sont des équations différentielles avec des coefficients périodiques et aucune restriction n'est imposée sur

Couplage fortement non linéaire	Tuned mass damper linéaire
Ajusté pour atténuer l'ensemble de l'étendue fréquentielle d'un mode	Ajusté pour atténuer une simple fréquence ou une bande étroite qui l'entoure
Atténuation importante de la fréquence naturelle	Atténuation optimale d'une fréquence ciblée
La courbe d'atténuation reste toujours sous la FrF non contrôlée	<u>Amplification possible en dehors de la largeur de bande de la fréquence ciblée</u>
Peu sensible aux changements de fréquences de la FrF (dommages structuraux, durabilité)	<u>Sensible aux changements de fréquences</u>
Applications	Applications
<u>Atténuation déclenchée au-dessus d'une amplitude limite</u>	atténuation dès les faibles niveaux d'amplitudes
<u>atténuation dépendant de l'amplitude</u>	gain en atténuation indépendant du niveau d'excitation
Oscil. libres : Oui / Vib. forcées : Oui Vib. transitoires : Oui	Oscil. libres : Oui / Vib. forcées : Oui <u>Vib. transitoires : Non</u>
Contrôle simultané de plusieurs modes : cascades de résonances	<u>Non</u>

TAB. 4.1 – Comparaison du TMD et du NES.

le comportement de $\tilde{x}_i(t)$ sur la frontière des régions instables. De ce fait, cette approche rend possible la recherche de différents types d'instabilités (au contraire des approches qui consistent à ajouter de faibles perturbations aux amplitudes et aux angles des phases). Avant de construire les équations variationnelles, l'amplitude et les angles des phases de la solution harmonique doivent être déterminés. C'est ainsi que la méthode de complexification décrite dans [Jang et al., 2003] et déjà utilisée dans la présente thèse est employée. Ainsi, les nouvelles variables complexes

$$\psi_1 = \dot{x}_1 + j\omega x_1, \quad \psi_2 = \dot{x}_2 + j\omega x_2, \quad j^2 = -1, \quad (4.62)$$

sont introduites. Ensuite, les amplitudes complexes sont exprimées sous la forme :

$$\psi_1 = \varphi_1 e^{j\omega t}, \quad \psi_2 = \varphi_2 e^{j\omega t}. \quad (4.63)$$

En substituant (4.62) et (4.63) dans les équations du mouvement (4.59) et en moyennant à la fréquence d'excitation ω , on retient uniquement les termes contenant $e^{j\omega t}$. On obtient ensuite un jeu de deux équations complexes de modulation gouvernant l'évolution (lente) des amplitudes complexes φ_i , $i = 1, 2$. Pour étudier les solutions périodiques stationnaires du système on impose des conditions stationnaires aux équations de modulation en posant $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$. Pour analyser le jeu d'équations complexes algébriques obtenues (qui gouvernent les amplitudes constantes complexes des deux oscillateurs), on exprime les amplitudes complexes en fonction de leurs parties réelles et imaginaires,

$$\varphi_1 = z_1 + jz_2, \quad \varphi_2 = z_3 + jz_4, \quad (4.64)$$

qui après plusieurs substitutions fournissent le jeu suivant non homogène de quatre équations réelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\omega z_2}{2} + \frac{\varepsilon \lambda z_1}{2} + \frac{\omega_1^2 z_2}{2\omega} + \frac{\varepsilon \lambda}{2}(z_1 - z_3) + \frac{3\varepsilon C}{8\omega^3}((z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_4)^2)(z_2 - z_4) = 0, \\ \frac{\omega z_1}{2} + \frac{\varepsilon \lambda z_2}{2} + \frac{F}{2} - \frac{\omega_1^2 z_1}{2\omega} + \frac{\varepsilon \lambda(z_2 - z_4)}{2} - \frac{3\varepsilon C(z_1 - z_3)}{8\omega^3}((z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_4)^2) = 0, \\ -\frac{\omega z_4}{2} + \frac{\lambda}{2}(z_3 - z_1) + \frac{3C}{8\omega^3}((z_3 - z_1)^2 + (z_4 - z_2)^2)(z_4 - z_2) = 0, \\ \frac{\omega z_3}{2} + \frac{\lambda}{2}(z_4 - z_2) - \frac{3C}{8\omega^3}((z_3 - z_1)^2 + (z_4 - z_2)^2)(z_3 - z_1) = 0. \end{array} \right. \quad (4.65)$$

Pour des valeurs fixées des paramètres du système, ce jeu est résolu numériquement pour une fréquence ω qui varie pour obtenir les courbes de résonances fondamentales du système où la fréquence rapide de la réponse stationnaire est identique à la fréquence de l'excitation externe. Les approximations analytiques aux réponses des deux oscillateurs sont obtenues en se servant des transformations des variables, et sont données par :

$$x_1(t) \approx \frac{|\varphi_1|}{\omega} \cos(\omega t + \phi_1), \quad x_2(t) \approx \frac{|\varphi_2|}{\omega} \cos(\omega t + \phi_2), \quad (4.66)$$

où les amplitudes et les phases sont calculées en fonction des solutions de (4.65) comme suit,

$$|\varphi_1| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad |\varphi_2| = \sqrt{z_3^2 + z_4^2}, \quad \phi_1 = \arctan\left(\frac{z_2}{z_1}\right), \quad \phi_2 = \arctan\left(\frac{z_4}{z_3}\right). \quad (4.67)$$

Pour trouver les équations variationnelles les solutions perturbées (4.61) sont substituées dans les équations du mouvement (4.59). On prend ensuite en compte le fait que la solution non perturbée satisfait les équations du mouvement avec la précision de la méthode de complexification et les termes avec des puissances de δx_i , $\delta \dot{x}_i$ plus élevées que la première sont rejetés. Ainsi, on arrive à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \ddot{x}_1 + \omega_1^2 \delta x_1 + \varepsilon \lambda (\delta \dot{x}_1 - \delta \dot{x}_2) + 3\varepsilon C (x_1^{(0)} - x_2^{(0)})^2 (\delta x_1 - \delta x_2) = 0, \\ \delta \ddot{x}_2 + \lambda (\delta \dot{x}_2 - \delta \dot{x}_1) + 3C (x_2^{(0)} - x_1^{(0)})^2 (\delta x_2 - \delta x_1) = 0. \end{array} \right. \quad (4.68)$$

Par souci de simplicité, dans un premier temps, on peut négliger les angles des phases (et aussi car avec le système considéré, on recherche la région (des fréquences) éloignée des régions des résonances principales puisque le système est maintenant couplé ; ceci est expliqué plus loin dans le texte) :

$$x_1^{(0)} = A_1 \cos(\omega t), \quad x_2^{(0)} = A_2 \cos(\omega t). \quad (4.69)$$

Ensuite, le terme $(x_1^{(0)} - x_2^{(0)})^2$ est développé en séries de Fourier et on aboutit aux équations variationnelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \ddot{x}_1 + \omega_1^2 \delta x_1 + \varepsilon \lambda (\delta \dot{x}_1 - \delta \dot{x}_2) + \frac{3}{2} \varepsilon C [(A_1 - A_2)^2 + (A_1 + A_2)^2 \cos(2\omega t)] (\delta x_1 - \delta x_2) = 0, \\ \delta \ddot{x}_2 + \lambda (\delta \dot{x}_2 - \delta \dot{x}_1) + \frac{3}{2} C [(A_1 - A_2)^2 + (A_1 + A_2)^2 \cos(2\omega t)] (\delta x_2 - \delta x_1) = 0, \end{array} \right. \quad (4.70)$$

qui sont sous la forme des équations couplées de Hill. La théorie bien connue de telles équations nous dit qu'il existe deux groupes de régions de la fréquence où la solution pour $\delta x_i(t)$, $i = 1, 2$ augmente exponentiellement avec le temps :

- (I) régions dans le voisinage de $\omega = \frac{\hat{\omega}_s}{r}$, $r = 1, 2, 3, \dots$
 - (II) régions dans le voisinage de $\omega = \frac{\hat{\omega}_s + \hat{\omega}_p}{2r}$, $s, p = 1, 2$,
- où $\hat{\omega}_s$, $s = 1, 2$ sont les fréquences naturelles des Equations (4.70) avec les termes dépendant du temps rejetés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\ddot{x}_1 + \omega_1^2 \delta x_1 + \underbrace{\frac{3}{2}\varepsilon C(A_1 - A_2)^2}_{p_{11}} \delta x_1 - \underbrace{\frac{3}{2}\varepsilon C(A_1 - A_2)^2}_{p_{12}} \delta x_2 = 0, \\ \delta\ddot{x}_2 + \underbrace{\frac{3}{2}C(A_1 - A_2)^2}_{p_{22}} \delta x_2 - \underbrace{\frac{3}{2}C(A_1 - A_2)^2}_{p_{21}} \delta x_1 = 0. \end{array} \right. \quad (4.71)$$

Les coefficients p_{i_k} dans les Equations (4.71) dépendent des amplitudes de la solution harmonique (4.60). Il s'en suit que les fréquences naturelles $\hat{\omega}_1$, $\hat{\omega}_2$ du Système (4.71) diffèrent légèrement de celles du Système (4.59).

Les régions d'instabilités du premier type (I), reconnues comme les résonances périodiques paramétriques dans la théorie des vibrations paramétriques, sont du même caractère que celles se produisant dans la simple équation de Hill. Le dernier type, correspondant à celui appelé résonance paramétrique de combinaison, peut se produire seulement dans le jeu d'équations couplées. En s'intéressant à l'instabilité du premier ordre en choisissant $r = 1$, on reconnaît immédiatement que dans le système considéré à deux degrés de liberté, il apparaît des régions additionnelles d'instabilités du premier ordre se trouvant à part de celles dans le voisinage des résonances principales $\omega \approx \omega_{0_s}$. Ces nouvelles régions sont proches des valeurs de la fréquence

$$\omega = \frac{\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2}{2}, \quad (4.72)$$

et dans le cas général elles peuvent se produire dans ces parties des courbes de résonances $A_i \equiv A_i(\omega)$ où uniquement une solution harmonique théorique existe. Si c'est le cas, il n'y a pas de solution harmonique stable dans ces régions. Ensuite il se pose immédiatement la question de savoir ce qu'est la solution stable et de ce fait quelle est la vraie réponse du système dans ces régions de ω . Un examen approfondi d'un problème analogue apparaissant dans le cas d'un système à un seul degré de liberté dans des régions instables dont l'ordre est plus élevé du type $\omega = \frac{\hat{\omega}}{r}$, $r = 2, 3, \dots$ permet d'en déduire une conclusion sur la forme d'une solution stable dans la nouvelle région instable (4.72). Il est alors attendu (la suite le confirmera) que la solution stable, et donc la vraie réponse du système, contienne plusieurs composantes harmoniques en plus de celles à la fréquence ω (en première approximation) à savoir les deux composantes harmoniques avec les fréquences proches de $\hat{\omega}_1$ et $\hat{\omega}_2$. Comme il a été supposé que les fréquences sont, dans le cas général, incommensurables, la solution devrait être quasi-périodique :

$$\begin{aligned} x_i(t) &= A_i \cos(\omega t + \phi_i) + a_{i1} \cos(\bar{\omega}_1 t + \phi_{i1}) + a_{i2} \cos(\bar{\omega}_2 t + \phi_{i2}), \quad i = 1, 2, \\ \omega &= \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}, \quad \bar{\omega}_1 \approx \hat{\omega}_1, \quad \bar{\omega}_2 \approx \hat{\omega}_2, \quad \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2} \neq 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.73)$$

Dans le but de recherches supplémentaires, les équations variationnelles (4.70) sont ensuite transformées dans les coordonnées normales $\delta\zeta_1$, $\delta\zeta_2$ c'est-à-dire les coordonnées qui découplent le jeu d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\ddot{x}_1 + \delta x_1 + \frac{3}{2}\varepsilon C(A_1 - A_2)^2(\delta x_1 - \delta x_2) = 0, \\ \delta\ddot{x}_2 + \frac{3}{2}C(A_1 - A_2)^2(\delta x_2 - \delta x_1) = 0. \end{array} \right. \quad (4.74)$$

Si on note les fréquences naturelles du système (4.74) par $\hat{\omega}_1$, $\hat{\omega}_2$ et ses coefficients normaux par \hat{b}_{i_1} , \hat{b}_{i_2} , en mettant $\hat{b}_{1_1} = \hat{b}_{1_2} = 1$, les nouvelles coordonnées $\delta\zeta_1$, $\delta\zeta_2$ sont introduites au moyen de la transformation linéaire

$$\delta x_1 = \delta\zeta_1 + \delta\zeta_2, \quad \delta x_2 = \hat{b}_{2_1}\delta\zeta_1 + \hat{b}_{2_2}\delta\zeta_2, \quad (4.75)$$

avec \hat{b}_{i_j} satisfaisant la condition d'orthogonalité

$$1 + \varepsilon\hat{b}_{2_1}\hat{b}_{2_2} = 0, \quad 1 + \varepsilon\hat{b}_{2_i}^2 \equiv 1. \quad (4.76)$$

En appliquant la procédure classique, (4.70) devient

$$\delta\ddot{\zeta}_i + \hat{\omega}_i^2\delta\zeta_i + \sum_{k=1}^2 \beta_{ik}\delta\dot{\zeta}_k + \sum_{k=1}^2 h_{ik}\delta\zeta_k \cos(2\omega t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.77)$$

où les coefficients d'amortissement β_{ik} et les coefficients de "l'excitation paramétrique" h_{ik} sont comme suit :

$$\begin{cases} \beta_{ik} = \frac{1}{M_i}\varepsilon\lambda(1 - \hat{b}_{2_i})(1 - \hat{b}_{2_k}), \\ h_{ik} = \frac{3C\varepsilon}{2M_i}(A_1 - A_2)^2(1 - \hat{b}_{2_i})(1 - \hat{b}_{2_k}), \quad i, k = 1, 2. \end{cases} \quad (4.78)$$

Cette forme des équations variationnelles rend possible l'application directe de la théorie de perturbations de première approximation pour déterminer la région instable proche de la fréquence $\omega = \frac{\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2}{2}$. Il y a plusieurs procédures de perturbations développées de la méthode asymptotique de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski ou basées sur la théorie de Floquet, mais elles conduisent toutes au même résultat en première approximation. La formule pour la région de ω dans laquelle la solution pour $\delta\zeta_i$ croît exponentiellement avec le temps est comme suit :

$$\frac{\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2}{2} - \Delta\omega < \omega < \frac{\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2}{2} + \Delta\omega, \quad \Delta\omega = \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{4} \sqrt{\frac{h_{12}h_{21}}{4\beta_{11}\beta_{22}\hat{\omega}_1\hat{\omega}_2} - 1}. \quad (4.79)$$

Les régions d'instabilités ont été calculées en utilisant la relation (4.79) et déterminées au moyen de simulations numériques. Un exemple de résultats est présenté sur la Figure 4.23 avec les valeurs suivantes $F = 0.4$, $\omega_1 = 1.5$, $C = 6$, $\varepsilon = 0.1$, $\lambda = 0.1$. Dans la région de ω où la réponse diffère considérablement de la réponse harmonique, la ligne en pointillés épais est utilisée pour indiquer la solution harmonique existante théoriquement. Pour compléter les courbes de résonances, les branches instables de la solution harmonique théorique dans les régions des deux résonances principales sont aussi montrées par une fine ligne pointillée. Le point d'intérêt est la région entre les deux principales résonances (où uniquement une seule solution théorique existait et où la vraie réponse du système n'est pas périodique). Un exemple de forme des oscillations qui se produisent à l'intérieur de la région est montré sur la Figure 4.24 où $F = 0.1$ et $\omega = 1.6$. On peut voir que plusieurs harmoniques avec des fréquences incommensurables peuvent être observées en plus de la composante harmonique de la fréquence ω ($\bar{\omega}_1 = 1.31$ et $\bar{\omega}_1 = 1.9$). Le caractère de la réponse subit des changements rapides proches de la frontière entre la ligne solide et pointillée ; la valeur de ω à laquelle le changement se produit diffère légèrement dépendant si la pulsation ω augmente, ou décroît. Il peut être attendu que cette région corresponde à une région d'instabilité de type combinaison de la solution harmonique. Pour vérifier cela, les frontières de l'instabilité de type combinaison sont calculées en utilisant la formule de première approximation (4.79) et dessinées avec les résultats numériques sur la Figure 4.25. La région hachurée est la région trouvée par simulation numérique, les résultats théoriques sont indiqués par des croix.

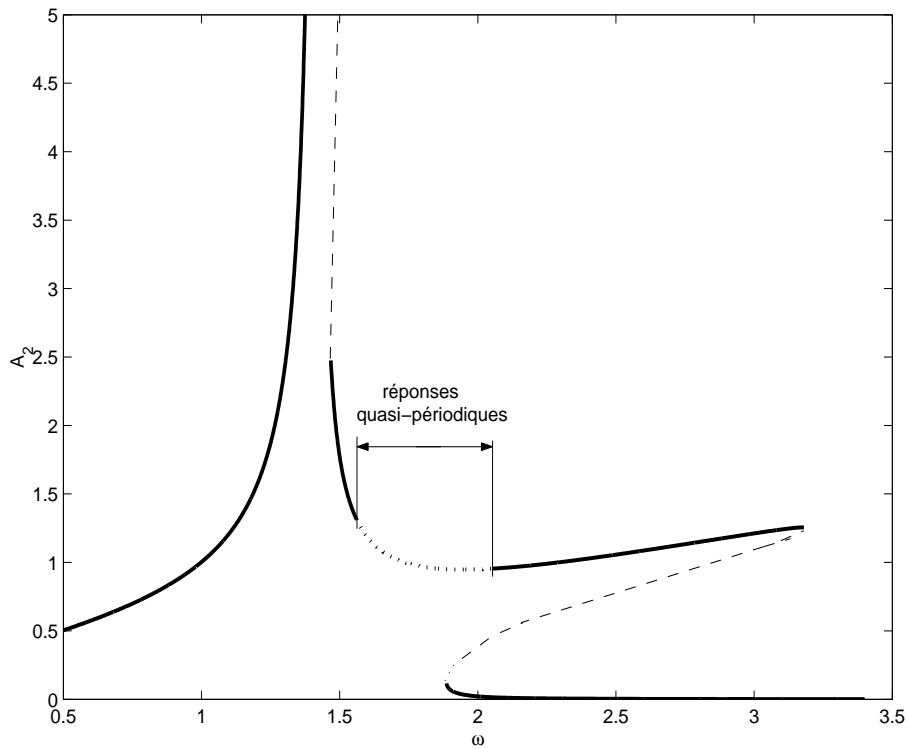


FIG. 4.23 – Courbes de résonances et régions de réponses quasi-périodiques.

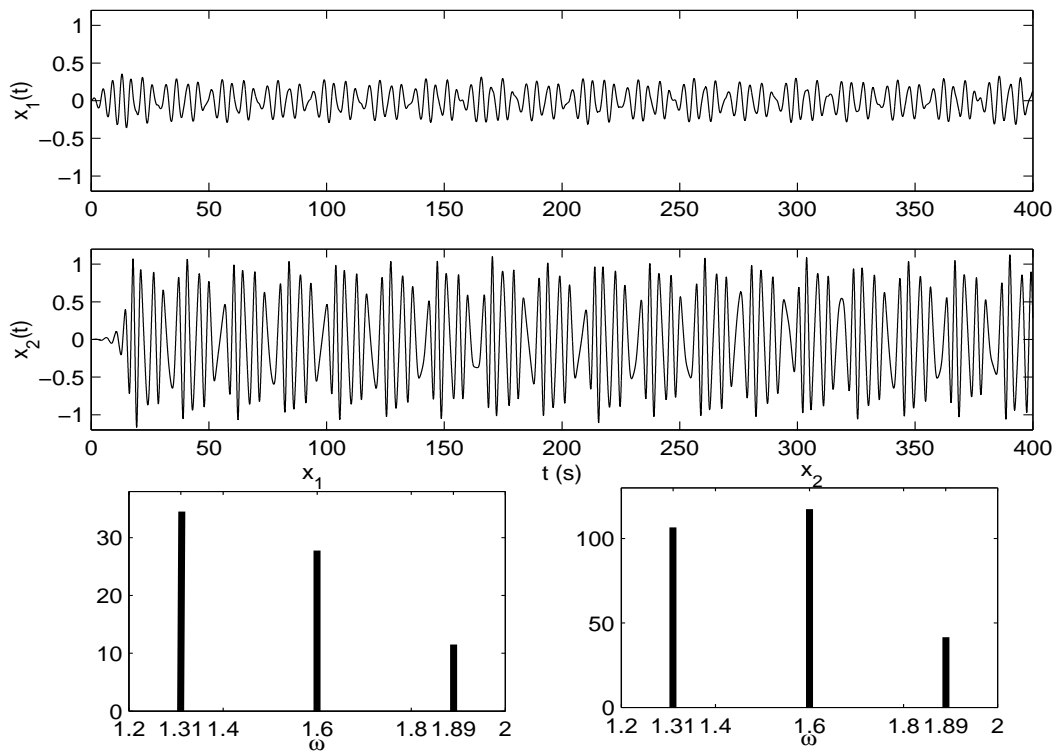


FIG. 4.24 – Formes des oscillations quasi-périodiques avec des simulations numériques.

On observe que la largeur de la région décroît avec le paramètre de forçage F et en dessous d'une certaine valeur de F la région d'instabilité disparaît. Pour illustrer l'effet de la valeur

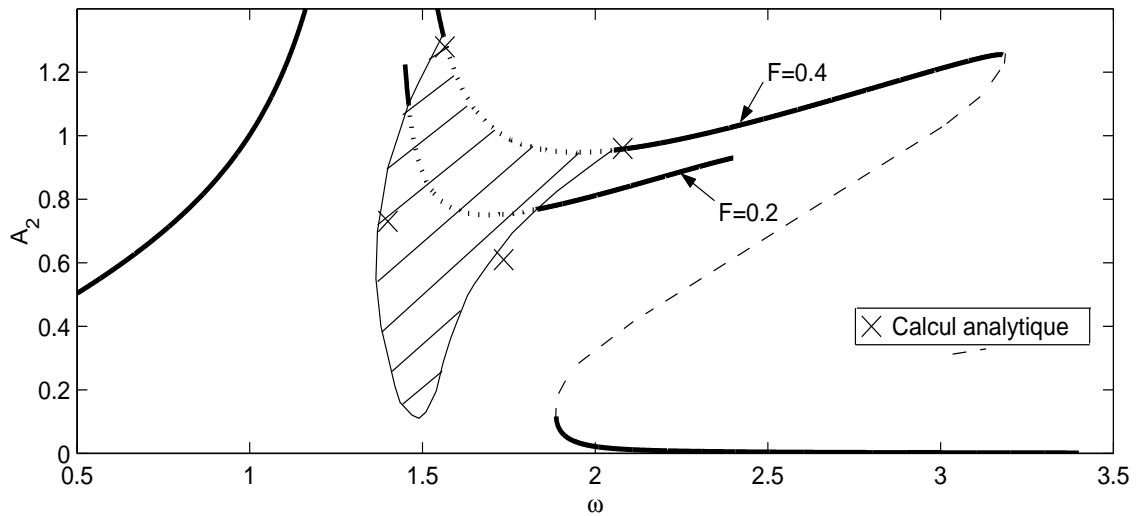


FIG. 4.25 – Région de réponses quasi-périodiques et frontière de l’instabilité de type combinaison de la solution harmonique.

du paramètre de forçage F les formes des oscillations à une valeur constante de la pulsation ω ($\omega = 1.85$) et pour quatre valeurs de F sont montrées sur la Figure 4.26. Pour la valeur $F = 0.2$, la région d’instabilité de la solution harmonique disparaît et la réponse est harmonique. La

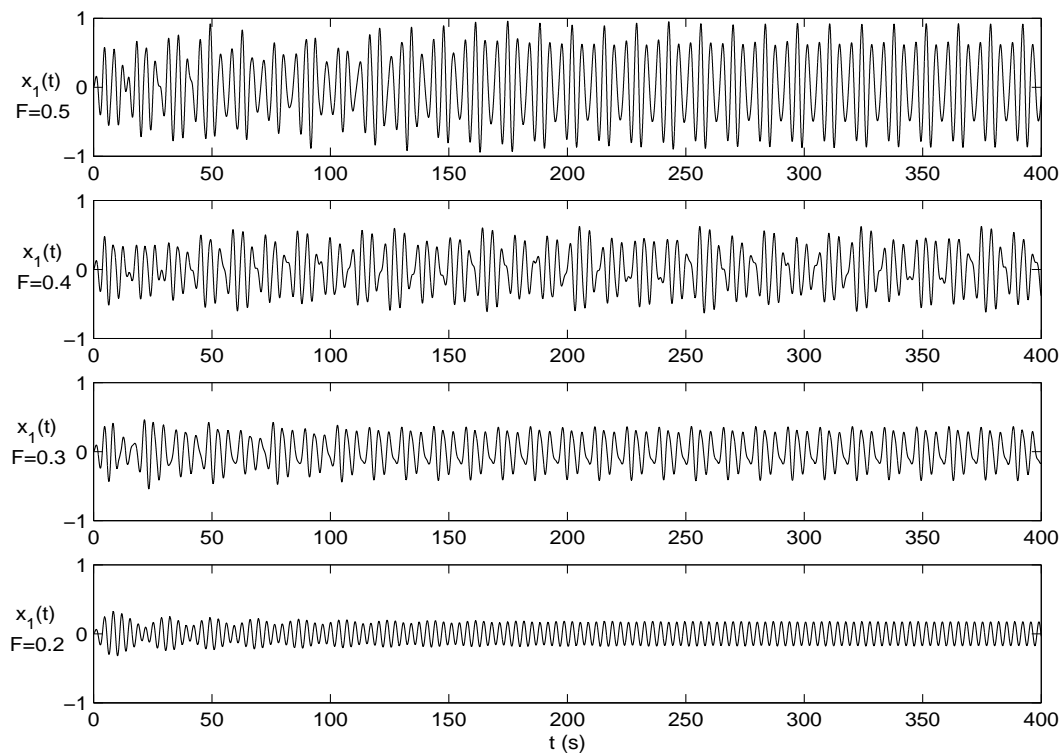


FIG. 4.26 – Formes des oscillations quasi-périodiques à une valeur constante de la pulsation $\omega = 1.85$ et pour plusieurs valeurs du paramètre de forçage F .

comparaison des résultats permet de certifier que la région de ω où la réponse du système est quasi-périodique, contenant plusieurs harmoniques avec des fréquences incommensurables, correspond à celle déterminée théoriquement comme la région d’instabilité de type combinaison

de la solution harmonique. La forme des oscillations pour le paramètre de forcing égal à $F = 0.1$ a déjà été montrée sur la Figure 4.24. Les résultats de l'analyse harmonique montrent que la réponse contient trois composantes harmoniques avec des fréquences incommensurables : une avec la fréquence ω , les autres avec $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ (ces dernières étant proches des fréquences naturelles $\hat{\omega}_1$, $\hat{\omega}_2$ du système (4.74)), comme il était attendu dans la solution de première approximation (4.73) avec la condition satisfaite

$$x_i(t) = A_i \cos(\omega t + \phi_i) + a_{i1} \cos(\bar{\omega}_1 t + \phi_{i1}) + a_{i2} \cos(\bar{\omega}_2 t + \phi_{i2}), \quad i = 1, 2, \quad (4.80)$$

$$\omega = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}, \quad \bar{\omega}_1 \approx \hat{\omega}_1, \quad \bar{\omega}_2 \approx \hat{\omega}_2, \quad \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2} \neq 1, 2, 3, \dots$$

Pour de larges valeurs du paramètre de forcing F la solution de première approximation (4.73) n'est pas suffisante - une autre harmonique avec des amplitudes plus larges apparaît dans la réponse (comme sur la Figure 4.27 où $F = 3$ et $\omega = 2.5$). Il est cependant difficile d'identifier

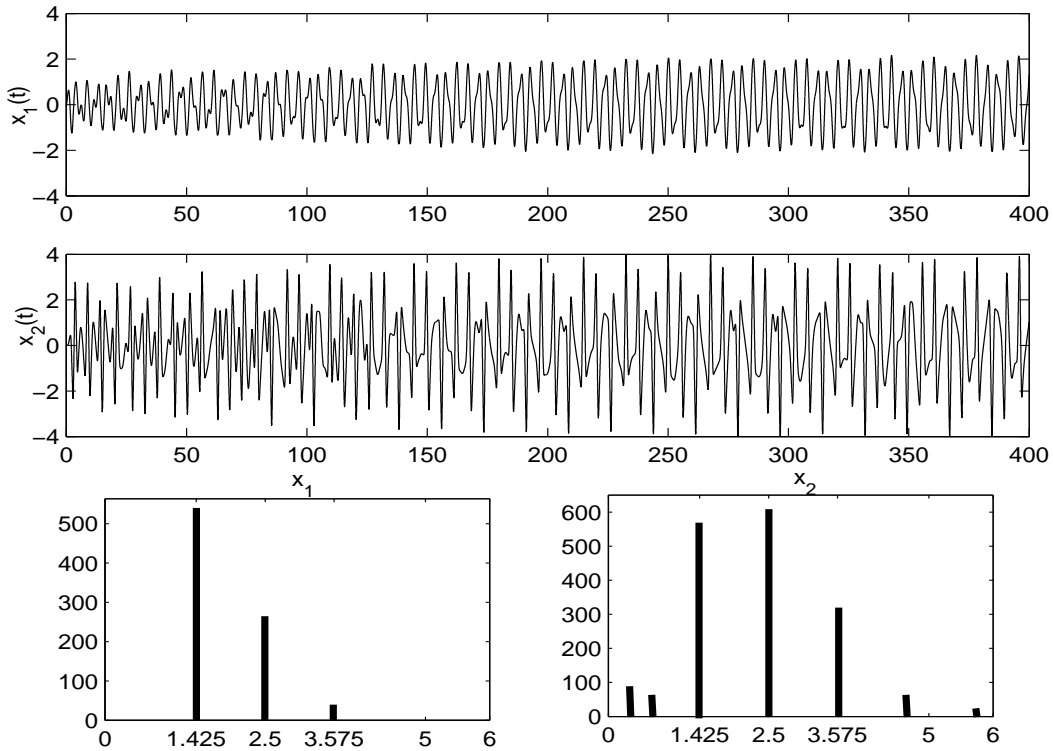


FIG. 4.27 – Formes des oscillations et résultats de l'analyse harmonique.

ces composantes harmoniques additionnelles. Une analyse théorique préliminaire de la solution de seconde approximation indique qu'une variété de différents types de composantes harmoniques peut apparaître. On peut s'attendre à rencontrer les composantes avec les fréquences 3ω , $3\bar{\omega}_i$, $2\bar{\omega}_i \pm \omega$, $2\omega \pm \bar{\omega}_i$, $2\bar{\omega}_i \pm \bar{\omega}_j$, $\omega \pm \bar{\omega}_1 \pm \bar{\omega}_2$, $i, j = 1, 2$. Les valeurs des fréquences "mixées" $2\bar{\omega}_i \pm \omega$, $2\omega \pm \bar{\omega}_i$, $2\bar{\omega}_i \pm \bar{\omega}_j$, $\omega \pm \bar{\omega}_1 \pm \bar{\omega}_2$ sont disposées très près l'une de l'autre.

4.2 Vérifications expérimentales

4.2.1 Modèle à un étage

Le modèle expérimental considéré ici est celui déjà décrit dans le chapitre précédent qui était représenté sur la Figure 3.25.

On considère ainsi maintenant une excitation périodique avec une fréquence externe proche de la fréquence naturelle de la structure primaire (i.e. 4.65Hz) : un forcing externe égal à 4.5Hz est ainsi choisi (donc $\sigma = -0.32$ avec les notations des paragraphes précédents $\Omega = 1 + \varepsilon\sigma$). Les accélérations expérimentales mesurées sans la présence de l'absorbeur et avec la présence du fort couplage sont tracées sur la Figure 4.28 pour une amplitude suffisante du forcing externe. Il faut noter que pour le cas sans couplage, nous avons arrêté le forcing externe à $t = 3s$ car la

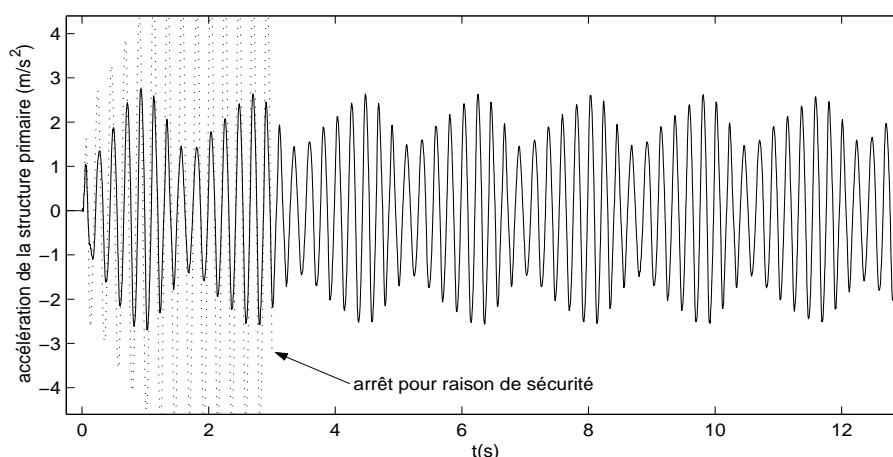


FIG. 4.28 – Forcing périodique transitoire à une fréquence proche de la fréquence interne de résonance. La ligne pointillée - - représente les vibrations sans couplage et la ligne fine – représente les vibrations avec couplage.

résonance devenait dangereuse pour la sécurité de la structure (la structure pouvait rompre).

Comme illustré sur la Figure 4.28, l'absorption des vibrations dans un système mécanique est réalisée avec une bonne efficacité. De plus, dans le temps transitoire, la Figure 4.28 montre que le phénomène quasi-périodique décrit dans l'étude théorique se produit. Ce mouvement apparaît être clairement quasi-périodique et non un comportement transitoire puisqu'il est toujours présent après $t = 12s$, comme montré sur la Figure 4.29. Un autre exemple de réponse quasi-périodique obtenue est montré sur la Figure 4.30. Pendant le temps transitoire, au moyen d'une analyse en ondelettes, la Figure 4.31 montre que les phénomènes de sauts (i.e. un saut est un changement brutal de fréquence dû à la bifurcation) décrits dans l'étude théorique se produisent. De plus, comme cela est montré sur la Figure 4.31 b), pendant un phénomène (par exemple entre 1s et 2s) on peut clairement voir que le mode normal non linéaire décroît (tout d'abord 5.12Hz, ensuite 4.60Hz et 4.01Hz) : le mode normal non linéaire est détruit ; après il se produit la même capture de résonance due au forcing continu. Avec la Figure 4.31 c), il est mis en évidence le fait que lorsque la résonance du mode normal non linéaire se produit, la réponse de la structure primaire est atténuée. En raison du forcing externe continu (avec une fréquence proche de la fréquence naturelle de la structure linéaire), la réponse linéaire augmente ensuite encore et le pompage énergétique est activé uniquement quand l'amplitude de la structure linéaire est au-dessus d'une certaine valeur (par exemple à $t = 1s$ ou $t = 3s$) comme illustré sur la Figure 4.31 c). Ce tracé montre que le pompage énergétique se produit au-dessus d'une valeur spécifique du niveau d'énergie initial comme souligné dans [Vakakis, 2001] : donc quand l'énergie injectée est trop faible, le transfert d'énergie de la structure linéaire vers la structure non linéaire n'apparaît pas. Ce mouvement quasi-périodique souligné dans [Gendelman et al., 2006] est révélé avec l'analyse en ondelettes. Ainsi, la présence du couplage fortement non linéaire peut faire apparaître des types de mouvements (comme vus dans la partie précédente) non disponibles avec des absorbeurs linéaires ou faiblement non linéaires de vibrations. Cependant, le système en considération

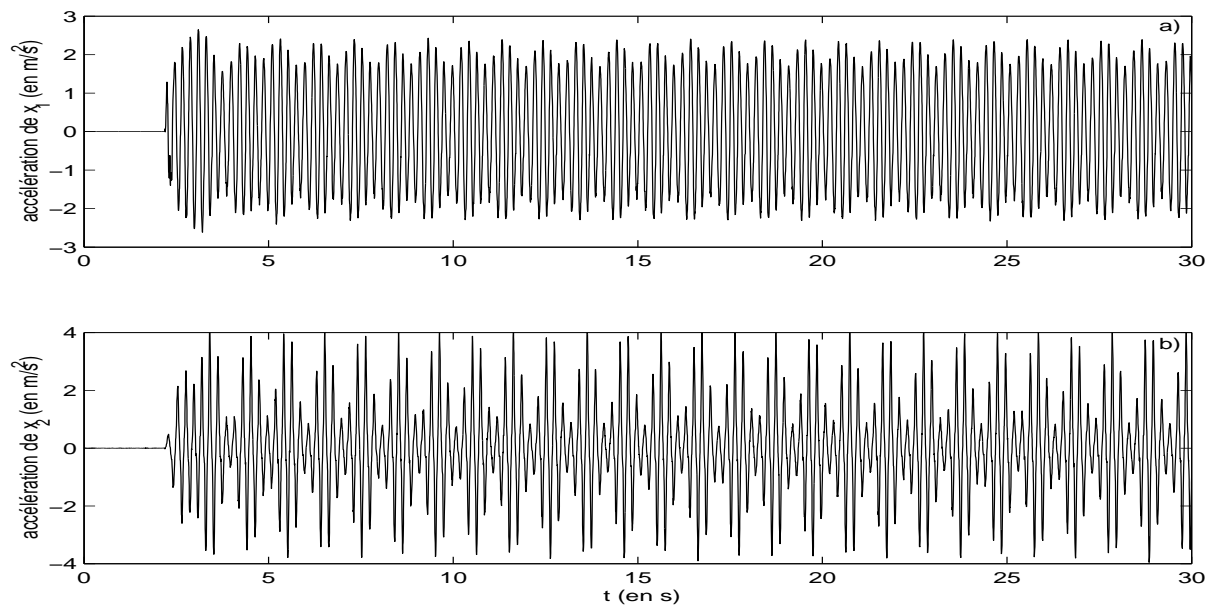


FIG. 4.29 – Réponses quasi-périodiques des deux masses. a) Accélération de x_1 (en m/s^2). b) Accélération de x_2 (en m/s^2).

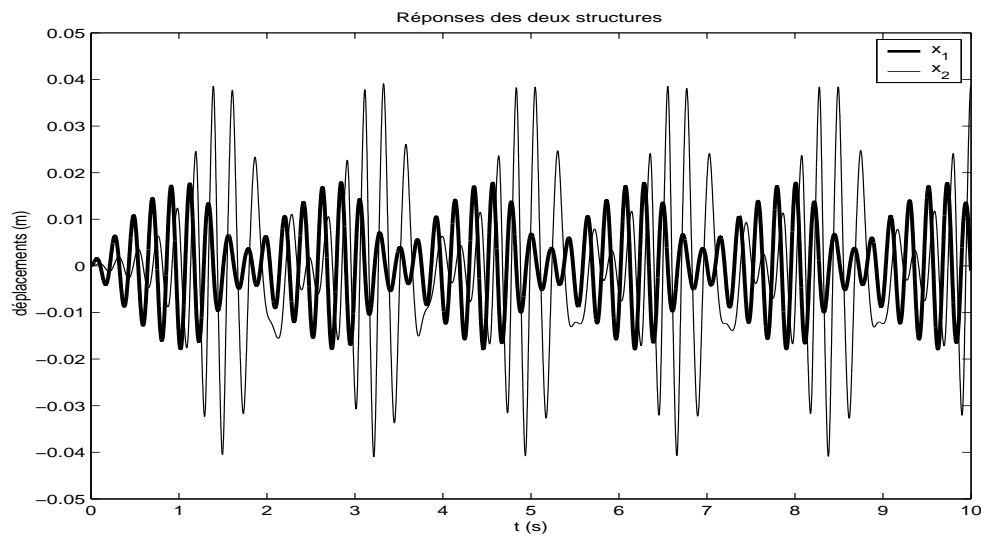


FIG. 4.30 – Réponses quasi-périodiques obtenues.

fait apparaître ce type de réponse uniquement pour un certain intervalle d'amplitude du forcing externe sinon il correspond à un régime périodique, qui semble moins intéressant qu'un tuned mass damper linéaire bien qu'un élargissement de l'intervalle de fréquences où les vibrations sont supprimées peut être démontré. En effet, quand l'amplitude du forcing externe n'est pas assez suffisante, ce mouvement quasi-périodique n'apparaît pas comme montré sur la Figure 4.32 (la Figure 4.29 montre que le phénomène de mouvement quasi-périodique pour x_1 et x_2 est aussi un phénomène à long terme).

Pour vérifier cette quasi-périodicité (fréquences incommensurables), on peut tracer l'application de premier retour expérimentale de la structure primaire ($x_1(t)$), comme montré sur la Figure 4.33. Cette application de premier retour est juste dérivée de la *méthode de Hénon* (ex-

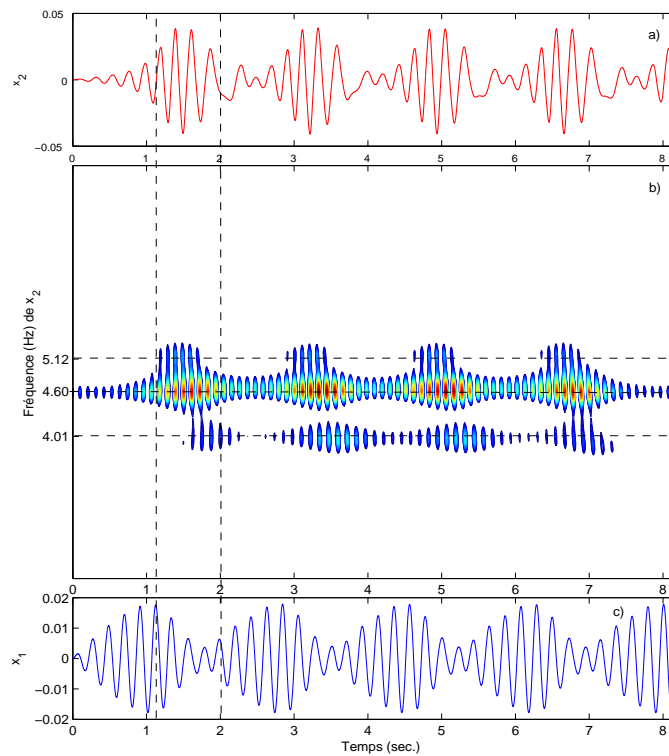


FIG. 4.31 – Analyse en ondelettes des réponses quasi-périodiques ($F=0.03$). a) Oscillations de x_2 . b) Analyse en ondelettes de x_2 . c) Oscillations de x_1 .

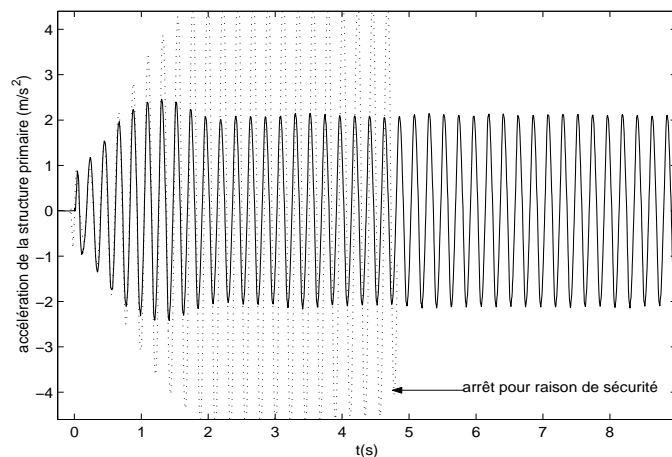


FIG. 4.32 – Forcing périodique transitoire à une fréquence proche de la fréquence interne de résonance sans une amplitude de forcing suffisante. La ligne pointillée - - représente les vibrations sans couplage et la ligne fine - représente les vibrations avec couplage.

pliquée dans la partie précédente) en traçant x_{1n+1} en fonction de x_{1n} . Cette application de premier retour est souvent utilisée pour des données expérimentales (ou numériques) pour éviter de mélanger des résultats et des incertitudes de plusieurs données mesurées issues de différents accéléromètres.

Comme cela est montré sur la Figure 4.33, l'application de premier retour est soit un point (donc un mouvement périodique) comme illustré sur la Figure 4.33 a), soit une boucle fermée (comme montré sur la Figure 4.33 b)), donc un mouvement quasi-périodique quand l'amplitude de forcing est au-dessus d'une certaine valeur. Les résultats expérimentaux confirment ainsi les

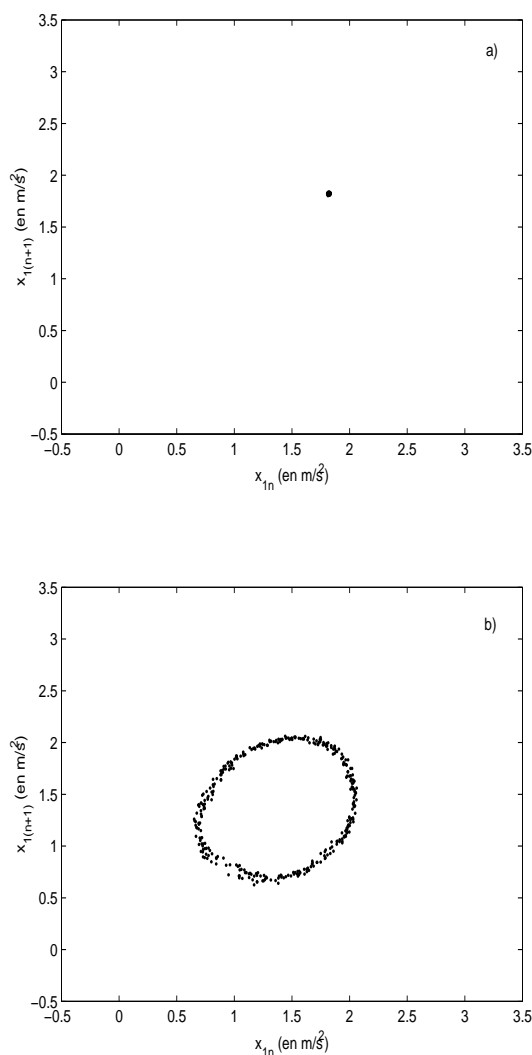


FIG. 4.33 – Application de premier retour expérimentale. a) Mouvement périodique. b) Mouvement quasi-périodique.

résultats analytiques et numériques.

4.2.2 Modèle à quatre étages

Le modèle expérimental considéré ici est celui déjà décrit dans le chapitre précédent qui était représenté sur la Figure 3.32.

La présente expérimentation a pour objectif de faire apparaître des captures de résonances se produisant pour un forçage harmonique à la fréquence $f = 4.87$ Hz (la masse de la structure à 4 étages est “ajustée” pour avoir une première fréquence naturelle à 4.87 Hz). Contrairement au cas linéaire qui met en évidence des courbes de “sinus réguliers”, la réponse en temps du quatrième étage décrite sur la Figure 4.34 met en évidence des courbes de vagues de sinus à une fréquence $f = 4.87$ Hz et modulées par une fréquence voisine (l’excitation de type périodique a été réalisée grâce à la table vibrante un axe). De façon similaire, la cartographie en ondelettes révèle trois fréquences localisées incommensurables $f = 4.87\text{Hz}$, $f_{+NL} = 5.94\text{Hz}$ et $f_{-NL} = 3.80\text{Hz}$ qui sont des évidences du mouvement quasi-périodique avec $f = (f_{+NL} + f_{-NL})/2$. Ici la fréquence $f_{-NL} = 3.80\text{Hz}$ apparaît clairement comme la fréquence de modulation des battements. Pour chaque amplitude d’excitation naissante, une capture de résonance est déclenchée, le mode nor-

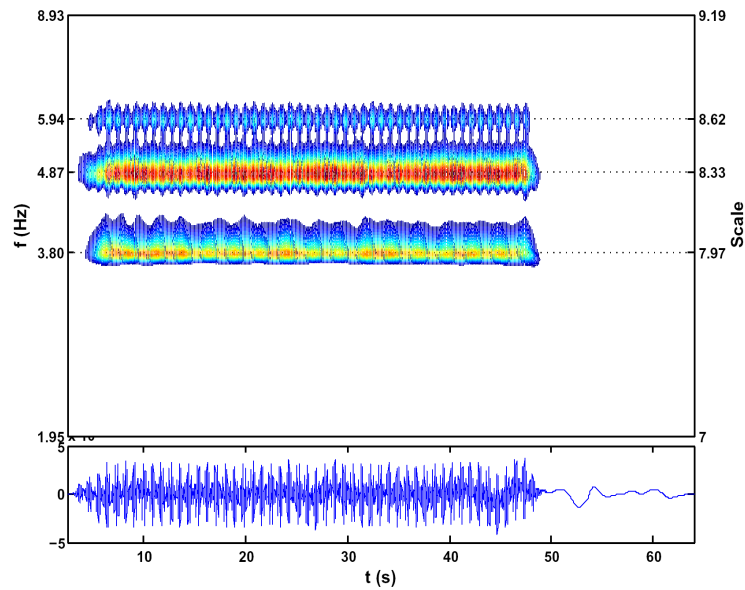


FIG. 4.34 – Cartographie en ondelettes du déplacement du quatrième étage et réponse temporelle à une excitation de type sinus à une fréquence $f = 4.87$ Hz.

mal non linéaire augmentant alors jusqu'à ce qu'il bifurque, dissipant une fraction de l'énergie emmagasinée dans le mode linéaire $f = 4.87$ Hz. Le processus est répété pour la prochaine "bouffée" d'énergie quand l'amplitude d'excitation est assez large pour activer le pompage énergétique. Le portrait de phase relatif montre aussi une boucle fermée comme dans [Gendelman et al., 2006] révélant ainsi des évidences du phénomène de pompage énergétique.

De plus, les courbes amplitudes-fréquences expérimentales vérifient la théorie détaillée précédemment comme illustré sur la Figure 4.35. En effet, les courbes avec couplage (présence de

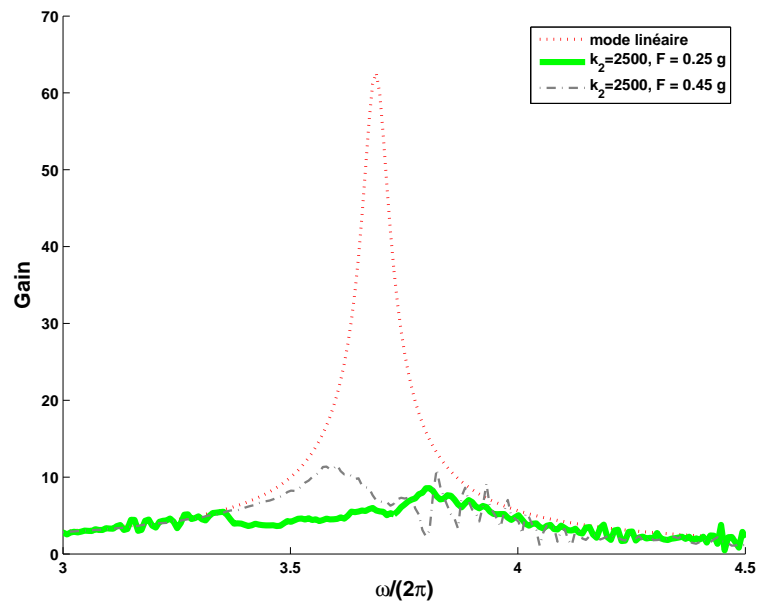


FIG. 4.35 – Résultats expérimentaux avec une excitation périodique.

l'absorbeur non linéaire) se situent "en dessous" de la courbe sans couplage (le cas où il n'y a pas

d'absorbeur) pour différentes valeurs d'amplitude du forcing. Les principales caractéristiques de la structure principale qui doit être isolée ne sont donc pas modifiées. Il faut noter que cela est vrai pour l'ajout d'un système non linéaire où le gain est différent selon l'amplitude d'excitation ce qui n'est pas le cas pour un système linéaire. C'est pour cette raison que j'ai affiché deux courbes pour montrer que cela fonctionnait même pour des amplitudes différentes 0.25g et 0.45g. Pour des amplitudes supérieures le pompage énergétique devient moins efficace.

Les mêmes phénomènes que sur la structure à 1 étage sont ainsi observés sur la structure plus complexe à 4 étages. De plus, comme montré sur la Figure 4.36, les modes supérieurs sont excités et comme ils disposent d'un amortissement plus rapide l'énergie est dissipée plus rapidement.

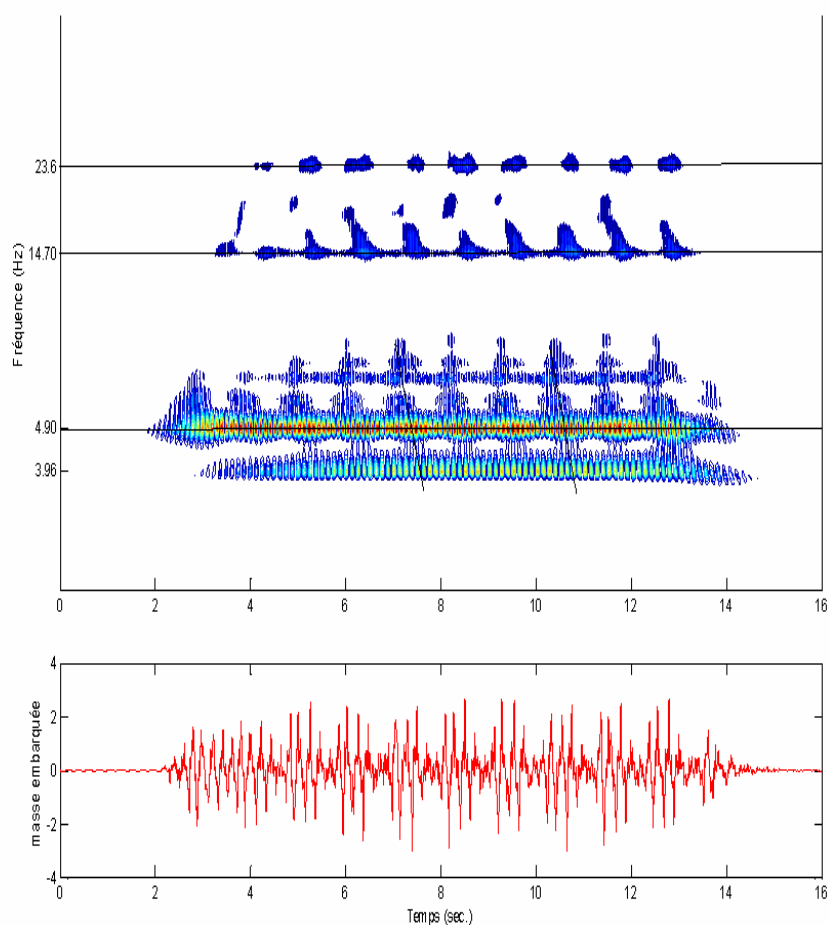


FIG. 4.36 – Analyse en ondelettes avec une excitation périodique.

Le pompage énergétique a ainsi été étudié numériquement, théoriquement et expérimentalement pour différentes excitations. Non seulement le pompage énergétique est efficace pour des vibrations transitoires, mais il est aussi très efficace pour une excitation périodique. En effet, une vérification expérimentale a montré l'efficacité du pompage énergétique comparé à un tuned mass damper classique linéaire. Le point important est le fort couplage non linéaire qui apporte un avantage crucial dans l'absorbeur non linéaire comparé à un absorbeur classique linéaire. En

effet, les absorbeurs linéaires (ou faiblement non linéaires) sont utilisés communément pour absorber les vibrations d'un mode linéaire spécifique et leur design est effectué pour une fréquence donnée précise. Le tuned mass damper est ajusté pour une fréquence naturelle spécifique de la structure. Il n'est pas utile si l'on considère de légers changements de fréquences naturelles de la structure primaire en raison par exemple de la fatigue, de divers dommages de la structure ou de problèmes de durabilité. Le but du pompage énergétique est très différent car le NES est conçu pour pouvoir rentrer en résonance avec n'importe quelle fréquence naturelle de la structure primaire. Les vibrations de différentes fréquences peuvent ainsi être atténuées par le même NES. De plus le NES peut absorber (grâce à des cascades de résonances) plusieurs modes de la structure primaire séquentiellement. Contrairement au cas linéaire, le transfert d'énergie avec le NES est irréversible en raison de la localisation modale qui empêche l'énergie de retourner dans la structure primaire.

Cependant, avant de pouvoir considérer la mise en oeuvre d'un tel dispositif sur des structures réelles, il reste à optimiser les paramètres et le phénomène (essayer notamment d'augmenter l'intervalle d'amplitudes où le pompage énergétique est efficace).

L'objectif ici est l'optimisation afin de pouvoir appliquer le principe du pompage énergétique sur des structures réelles. Cette optimisation passe par l'optimisation des paramètres dans un premier temps et le choix optimal de ces paramètres en vue d'une application pratique. Dans un deuxième temps l'optimisation du phénomène lui-même est envisagée : une meilleure amorce du pompage et un intervalle d'amplitudes plus important avec l'utilisation de modes normaux non linéaires multiples sont considérés.

Sommaire

5.1	Optimisation des paramètres	190
5.1.1	Etudes théoriques	191
5.1.1.1	Expression analytique	191
5.1.1.2	Etude des modes normaux non linéaires	200
5.1.2	Vérifications expérimentales	207
5.1.2.1	Modèle réduit à un étage	207
5.1.2.2	Modèle réduit à quatre étages	210
5.2	Modes normaux non linéaires multiples	214
5.2.1	Etudes théoriques	216
5.2.2	Vérifications expérimentales	222

5.1 Optimisation des paramètres

Une optimisation des paramètres pour le pompage énergétique est considérée. Le cas du système non linéaire fortement non homogène avec deux degrés de liberté est considéré. Les amortissements dans l'absorbeur fortement non linéaire ainsi que dans la structure primaire linéaire sont pris en compte. En particulier, l'efficacité du pompage énergétique est étudiée en utilisant une expression analytique. Cette forme analytique est obtenue grâce à une analyse en échelles multiples en utilisant les variables complexes. Les résultats analytiques sont confirmés par des résultats numériques. Une vérification expérimentale basée sur les différents modèles de bâtiments est aussi considérée. Les différents résultats présentés ici ont fait l'objet de publications dans [Manevitch et al., 2006a].

Dans la littérature, les études existantes portant sur le phénomène de pompage énergétique [Gendelman et Lamarque, 2005, Gendelman et Vakakis, 2000, Gendelman et Manevitch, 2000, Gendelman, 2001, Vakakis, 2001, Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001] et les auteurs de [Manevitch et al., 2003] s'intéressent principalement à la compréhension du comportement pendant le pompage énergétique. Cependant, ils traitent de masses quasi équivalentes pour les oscillateurs ou sans amortissement pour la structure primaire. De plus, la nonlinéarité en considération [Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001] est souvent liée au sol. Cependant, pour être capable d'appliquer le pompage énergétique sur des applications réelles (atténuation des vibrations d'une structure linéaire, un bâtiment par exemple) des conditions plus réalistes doivent être considérées.

C'est pourquoi de récentes études [Gendelman et al., 2005] et [Gourdon et Lamarque, 2005b] s'intéressent à analyser des structures additionnelles non linéaires très légères. Ensuite ici on considère une attache "libre" sans "anchor spring" et avec de l'amortissement dans la structure primaire. Cela nous permet de considérer des applications réelles en particulier en Génie Civil.

Bien que les résultats obtenus dans la littérature ont clairement démontré le phénomène de pompage, ils ne sont pas adaptés comme solutions du problème d'optimisation. L'étape suivante importante a été faite dans [Manevitch et al., 2006b]. Les avantages des techniques de développements en échelles multiples en utilisant les variables complexes [Manevitch, 1999, Manevitch, 2001] ont permis de trouver des solutions analytiques efficaces du problème. Cependant, dans [Manevitch et al., 2006b], l'amortissement dans le système primaire linéaire n'a pas été pris en compte ce qui exclut la possibilité de traiter le problème d'optimisation et la possibilité d'applications réelles. L'objectif ici est

1. d'étendre la solution analytique trouvée dans [Manevitch et al., 2006b] pour prendre en compte l'amortissement dans la structure primaire ;
2. sur cette base de proposer une procédure d'optimisation du pompage énergétique pour l'application sur des bâtiments réels et de révéler une transition du régime de pompage vers un amortissement commun ;
3. de vérifier analytiquement les résultats avec des données expérimentales obtenues pour des modèles réduits de bâtiments.

De plus, une analyse comparative des plans de phases pour différents types d'absorbeurs peut être réalisée. En considérant le processus de pompage efficace comme un battement amorti avec un fort transfert d'énergie, on montre qu'il est possible de concevoir le type de plan des phases en terme des variables amplitudes-phases qui fournit le résultat le plus efficace. Dans ce contexte, les principaux types d'absorbeurs peuvent être comparés.

[Gendelman et al., 2001] et [Vakakis et Gendelman, 2001] ont démontré la dépendance de la dynamique amortie du NES (Nonlinear Energy Sink) sur sa dynamique non amortie. En particulier, il a été montré que le système non amorti possède un mode normal non linéaire (NNM) qui possède une grande quantité d'énergie localisée dans l'oscillateur non linéaire. Quand un faible amortissement est ajouté, ce NNM est perturbé, et quand il est suffisamment excité le pompage énergétique se produit.

De plus, il faut souligner que la plupart des publications sur le pompage énergétique essaient plutôt d'expliquer le phénomène qui est responsable du pompage énergétique. Aucun ne traite de la conception d'un NES optimal (design des paramètres optimaux) pour une spécification donnée du système primaire. Le phénomène de pompage énergétique dans un système autonome amorti fortement non linéaire manifestant clairement des régularités générales de processus dynamiques transitoires dans les voisinages de résonances internes met en avant des séries de problèmes d'une principale importance. L'un d'entre eux est ainsi la possibilité d'optimisation des paramètres du NES. C'est ainsi que l'efficace description analytique d'un processus de pompage dans un système à deux degrés de liberté fortement non homogène proposée dans [Manevitch et al., 2006b] s'est avérée être appropriée pour la recherche de solutions du problème d'optimisation pour l'application d'absorbeurs de type "cubique" étudiés principalement dans des publications précédentes [Manevitch et al., 2007].

En même temps que ce type d'absorbeur, d'autres absorbeurs fortement non linéaires ont aussi été discutés dans le cadre des problèmes généraux de pompage énergétique. Cependant, des estimations numériques isolées et l'absence de critère général d'efficacité relative des absorbeurs rendent leur comparaison difficile. Un tel critère général suit le point de vue proposé dans [Manevitch et al., 2007] en considérant le processus de pompage énergétique comme un battement amorti. Le développement de ce point de vue permettant de concevoir un plan des phases effectif d'un système dynamique est ainsi entrepris par la suite. Sur cette base on considère et on compare les absorbeurs qui sont les systèmes avec plusieurs états d'équilibre et les absorbeurs proches de systèmes vibro-impacts.

5.1.1 Etudes théoriques

5.1.1.1 Expression analytique

Le système suivant d'oscillateurs couplés est considéré :

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \tilde{\mu}_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 + \tilde{\eta} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + k_3 (x_1 - x_2)^{2n-1} \pm D(x_1 - x_2) = 0, & n \geq 2, \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) - k_3 (x_1 - x_2)^{2n-1} \pm D(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Un couplage non linéaire, avec des états d'équilibre multiples, correspond au signe "-" devant les termes $\pm D(x_2 - x_1)$. La structure primaire est excitée par une impulsion : on considère des oscillations libres des structures avec les conditions initiales : $x_1(t=0) = x_2(t=0) = \frac{dx_2}{dt}(t=0) = 0$, $\frac{dx_1}{dt}(t=0) = C_I$. Le Système (5.1) peut être analysé en utilisant la théorie des perturbations. Le changement de variables suivant $\tilde{U}_1 = x_1$, $\tilde{U}_2 = x_2 - x_1$ est effectué. Ensuite le Système (5.1)

devient

$$\begin{cases} (M + m)\frac{d^2\tilde{U}_1}{dt^2} + m\frac{d^2\tilde{U}_2}{dt^2} + \tilde{\mu}_1\frac{d\tilde{U}_1}{dt} + k_1\tilde{U}_1 = 0, \\ m\frac{d^2\tilde{U}_2}{dt^2} + m\frac{d^2\tilde{U}_1}{dt^2} + \tilde{\eta}\frac{d\tilde{U}_2}{dt} + k_3\tilde{U}_2^{2n-1} \pm D\tilde{U}_2 = 0, \quad n \geq 2. \end{cases} \quad (5.2)$$

Pour clarifier les équations, des coefficients et des déplacements adimensionnés sont utilisés et les Equations (5.2) sont réécrites sous la forme :

$$\begin{cases} (1 + \varepsilon)\frac{d^2U_1}{d\tau^2} + \varepsilon\frac{d^2U_2}{d\tau^2} + \varepsilon\mu_1\frac{dU_1}{d\tau} + U_1 = 0, \\ \varepsilon\frac{d^2U_2}{d\tau^2} + \varepsilon\frac{d^2U_1}{d\tau^2} + \varepsilon\eta\frac{dU_2}{d\tau} + cU_2^{2n-1} \pm \varepsilon\alpha U_2 = 0, \quad n \geq 2, \end{cases} \quad (5.3)$$

où :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{M}}, U_1 = \frac{\omega}{C_I}\tilde{U}_1, U_2 = \frac{\omega}{C_I}\tilde{U}_2, \varepsilon = \frac{m}{M}, \tau = \omega t, \varepsilon\mu_1 = \sqrt{\frac{1}{k_1M}} \tilde{\mu}_1, \varepsilon\eta = \sqrt{\frac{1}{k_1M}} \tilde{\eta},$$

$$\varepsilon\alpha = \sqrt{\frac{1}{k_1M}} D \text{ et } c = \frac{C_I^{2n-2}k_3}{\omega^{2n-2}k_1}. \quad \varepsilon \text{ est un faible paramètre } (\varepsilon \text{ représente un ratio des masses qui doit être très faible}).$$

L'ordre infinitésimal du terme non linéaire dans la deuxième des Equations (5.3) est moins important que l'ordre infinitésimal des termes linéaires dans la même équation.

Le changement de variables suivant $u_1 = \varepsilon^{-1/(2n-2)}U_1$, $u_2 = \varepsilon^{-1/(2n-2)}U_2$, est introduit. Ainsi les Equations (5.3) deviennent :

$$\begin{cases} (1 + \varepsilon)\frac{d^2u_1}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon)u_1 + \varepsilon\left(\frac{d^2u_2}{d\tau^2} + \mu_1\frac{du_1}{d\tau} - u_1\right) = 0, \\ \frac{d^2u_2}{d\tau^2} + u_2 + \varepsilon(-\delta u_2 + \delta\frac{d^2u_1}{d\tau^2} + \delta\eta\frac{du_2}{d\tau} + \delta c u_2^{2n-1} \pm \delta\alpha u_2) = 0, \quad n \geq 2. \end{cases} \quad (5.4)$$

On suppose de plus que les oscillations se produisent près de la résonance à la fréquence ω . En effet, comme montré dans de nombreuses évidences numériques et dans de nombreux résultats analytiques de la présente thèse et des publications sur ce domaine, lorsque le pompage énergétique se produit, u_1 et u_2 oscillent avec la même fréquence. Ensuite on doit supposer que la somme des termes entre les crochets dans la deuxième des Equations (5.4) (mais pas chaque terme séparément !) est une faible quantité de l'ordre de ε . Pour prendre cela en compte dans l'analyse asymptotique, on introduit le paramètre ε avant les parenthèses. Il est nécessaire d'isoler les termes qui correspondent à la principale approximation asymptotique. Après cela, on attache au coefficient avant les parenthèses son amplitude actuelle égale à l'unité, en utilisant un paramètre additionnel libre δ . Ainsi, pour valider ce point, on doit supposer que :

$$\delta(-u_2 + \frac{d^2u_1}{d\tau^2} + \eta\frac{du_2}{d\tau} + c u_2^{2n-1} \pm \alpha u_2) \sim O(1). \quad (5.5)$$

Une telle procédure, comme nous l'avons déjà vu, est totalement justifiée par une analyse numérique détaillée. Cela est plutôt naturel, comme cela décrit une modulation lente et un amortissement des vibrations avec une fréquence proche de l'unité. Ensuite les Equations (5.4) deviennent :

$$\begin{cases} (1 + \varepsilon)\frac{d^2u_1}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon)u_1 + \varepsilon\left(\frac{d^2u_2}{d\tau^2} + \mu_1\frac{du_1}{d\tau} - u_1\right) = 0, \\ \frac{d^2u_2}{d\tau^2} + u_2 + \varepsilon\delta(-u_2 + \frac{d^2u_1}{d\tau^2} + \eta\frac{du_2}{d\tau} + c u_2^{2n-1} \pm \alpha u_2) = 0, \quad n \geq 2. \end{cases} \quad (5.6)$$

En introduisant le changement de variables [Manevitch, 2001]

$$\begin{cases} \varphi_1 = e^{-i\tau} \left(\frac{du_1}{d\tau} + iu_1 \right), & \varphi_1^* = e^{i\tau} \left(\frac{du_1}{d\tau} - iu_1 \right), \\ \varphi_2 = e^{-i\tau} \left(\frac{du_2}{d\tau} + iu_2 \right), & \varphi_2^* = e^{i\tau} \left(\frac{du_2}{d\tau} - iu_2 \right), \end{cases} \quad (5.7)$$

et en réalisant une analyse en échelles multiples :

$$\tau_0 = \tau, \quad \tau_1 = \varepsilon\tau, \quad \tau_2 = \varepsilon^2\tau, \dots \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{10} + \varepsilon\varphi_{11} + \varepsilon^2\varphi_{12} + \dots \\ \varphi_2 = \varphi_{20} + \varepsilon\varphi_{21} + \varepsilon^2\varphi_{22} + \dots \end{cases} \quad (5.9)$$

on aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial\tau_1} + \frac{i}{2}(\varphi_{20} + \varphi_{10}) + \frac{\mu_1}{2}\varphi_{10} = 0, \quad (5.10)$$

et à :

$$\frac{\partial\varphi_{20}}{\partial\tau_1} + \delta \left[\frac{i}{2}(\varphi_{20} + \varphi_{10}) + \frac{\eta}{2}\varphi_{20} - \frac{C_{2n-1}^{n-1} ic}{2^{2n-1}} \varphi_{20} |\varphi_{20}|^{2n-2} \pm \frac{i\alpha}{2} \varphi_{20} \right] = 0. \quad (5.11)$$

En multipliant les Equations (5.10, 5.11) par φ_{10}^* et φ_{20}^* respectivement, en combinant ces équations et en utilisant les complexes conjugués on obtient :

$$\frac{\partial|\varphi_{20}|^2}{\partial\tau_1} + \delta \frac{\partial|\varphi_{10}|^2}{\partial\tau_1} + \eta\delta|\varphi_{20}|^2 + \delta\mu_1|\varphi_{10}|^2 = 0. \quad (5.12)$$

S'il n'y a pas d'amortissement dans le Système (5.1), i.e. $\eta = \mu_1 = 0$, alors l'Equation (5.12) est la loi de conservation de la quantité $H = |\varphi_{20}|^2 + \delta|\varphi_{10}|^2$ relative au temps τ_1 . On peut considérer la relation (5.12) comme une équation ordinaire différentielle par rapport à la fonction $|\varphi_{20}|^2$, le terme $\delta \frac{\partial|\varphi_{10}|^2}{\partial\tau_1} + \delta\mu_1|\varphi_{10}|^2$ étant le second membre. En appliquant la transformée de Laplace directe à l'Equation (5.12) on obtient sa solution sous la forme :

$$\Psi(s) = \frac{G(s) + |\varphi_{20}|^2(0)}{s + \delta\eta}, \quad (5.13)$$

où $\Psi(s)$ est la représentation de Laplace de la fonction $|\varphi_{20}|^2(\tau_1)$, $G(s)$ est une représentation de Laplace de la fonction $-\delta \frac{\partial|\varphi_{10}|^2}{\partial\tau_1} - \delta\mu_1|\varphi_{10}|^2$. Après application de la transformée de Laplace inverse à cette équation on peut trouver la représentation suivante pour la fonction $H(\tau_1)$:

$$H(\tau_1) = e^{-\delta\eta\tau_1} \left[H(0) + \delta(\delta\eta - \mu_1) \int_0^{\tau_1} |\varphi_{10}|^2(p) e^{\delta\eta p} dp \right]. \quad (5.14)$$

Pour trouver une solution on développe l'intégrale dans le second membre de l'Equation (5.14) en séries de Taylor au voisinage du point $\tau_1 = 0$. Cela nous permet de calculer la fonction $H(\tau_1)$ en évitant la solution des Equations (5.10, 5.11) ou des équations initiales (5.1). Ensuite l'Equation (5.14) devient :

$$H(\tau_1) = e^{-\delta\eta\tau_1} \left[H(0) + \delta(\delta\eta - \mu_1) \left\{ \tau_1 |\varphi_{10}|^2(0) + \frac{\tau_1^2}{2} (2|\varphi_{10}|(0) \frac{\partial|\varphi_{10}|(0)}{\partial\tau_1} + \delta\eta |\varphi_{10}|^2(0)) + \dots \right\} \right]. \quad (5.15)$$

Paramètres	Valeurs
n	2
ω	1
μ_1	0
ε	0.1
η	0.5
c	0.8
α	0.2
$\frac{dx_1}{dt}(t = 0)$	0.3

TAB. 5.1 – Valeurs des paramètres du système.

Les quantités $H(0)$ et $|\varphi_{10}|^2(0)$ sont connues à partir des conditions initiales. La dérivée $\frac{\partial|\varphi_{10}|(0)}{\partial\tau_1}$ et les dérivées d'ordre plus élevé de la fonction $|\varphi_{10}|$ au même point $\tau_1 = 0$ peuvent être trouvées à partir des conditions initiales et des équations du mouvement (5.1). Dans tous les exemples numériques qui suivent, les valeurs des paramètres du système sont essentiellement les mêmes et sont données dans le Tableau 5.1.

Il faut noter que le traitement est basé sur le calcul des séries de Taylor pour la solution du système “moyenné”. Le nombre de termes pris en compte dans les séries doit donc être suffisant pour avoir une bonne convergence des séries. De plus, on doit garder à l'esprit que l'intérêt ici est d'obtenir une solution complètement analytique pour être capable de concevoir et d'optimiser l'attache non linéaire ; c'est pourquoi un nombre “minimum” de termes (avec une bonne approximation) est pris en compte.

Dans tous les exemples suivants, l'approximation analytique (5.15) est utilisée en prenant en compte les séries de Taylor jusqu'aux termes du cinquième ordre sur τ_1 . En effet, en prenant les valeurs des paramètres du système indiqués dans le Tableau 5.1 et le signe “+” dans les Equations (5.1), on peut comparer l'approximation analytique (5.15) en considérant différents ordres en τ_1 pour le développement en séries de Taylor avec la solution numérique de (5.14) (l'intégrale dans (5.14) est développée en séries de Taylor). Ainsi la Figure 5.1 montre que le cinquième ordre est suffisant pour obtenir une bonne approximation (les erreurs maximales entre (5.14) et (5.15) sont les suivantes : ordre 1 : 0.5155 ; ordre 2 : 0.3158 ; ordre 3 : 0.2395 ; ordre 4 : 0.008792 ; ordre 5 : 0.0049731 ; ordre 6 : 0.0047692 ; ordre 7 : 0.0047474).

Quand le pompage énergétique se produit l'approximation analytique (5.15) est précise, comme montré sur la Figure 5.2 sur laquelle la solution analytique H de (5.15), en prenant en compte des séries de Taylor jusqu'aux termes d'ordre 5 en τ_1 , et l'intégration numérique du Système (5.1), ont été comparées avec les paramètres du systèmes du Tableau 5.1 et le signe “+” est considéré dans les Equations (5.1).

Dans ce cas, le pompage énergétique se produit comme montré sur la Figure 5.3 sur laquelle les solutions numériques du Système (5.1) ont été tracées avec et sans couplage. Non seulement l'approximation analytique (5.15) est bonne mais les différents φ_1 , φ_2 introduits sont aussi de bonnes approximations comme montré sur la Figure 5.4 sur laquelle ces approximations analytiques sont comparées avec les résultats de l'intégration du système initial (5.1) (les paramètres du système sont indiqués dans le Tableau 5.1 et le signe “+” reste dans les Equations (5.1)).

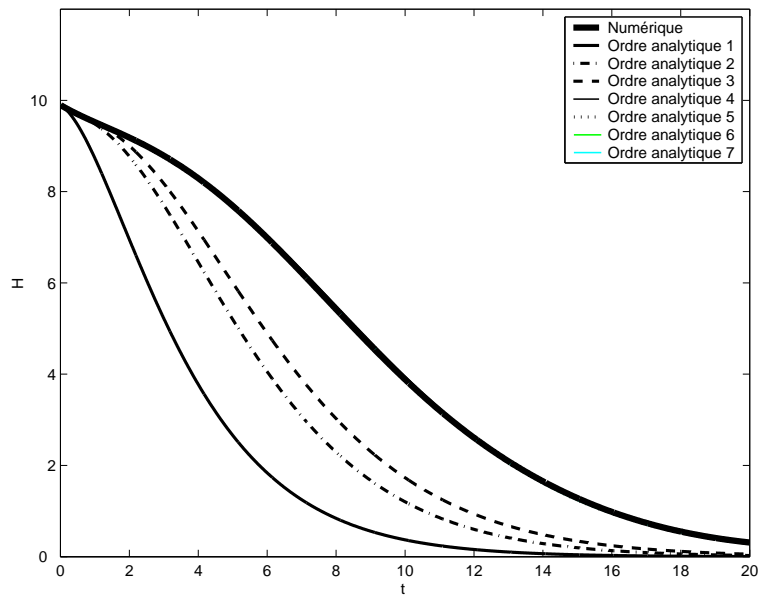


FIG. 5.1 – Fonction $H(t)$. Comparaison entre la solution numérique de (5.14) et l'expression analytique (5.15) pour différents ordres des séries de Taylor.

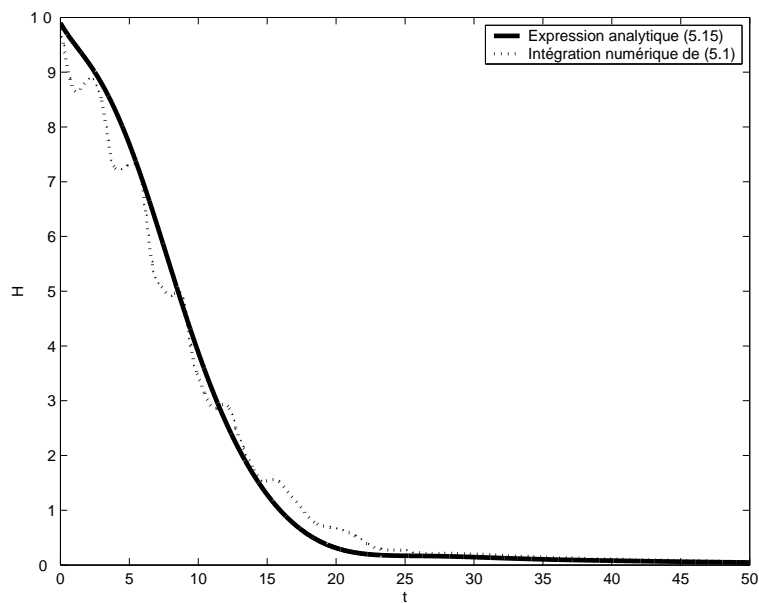


FIG. 5.2 – Fonction $H(t)$. La ligne solide décrit la solution (5.15) en prenant en compte des séries de Taylor jusqu'aux termes du cinquième ordre en τ_1 . La ligne pointillée décrit la solution numérique du Système (5.1).

Si le signe “-” est considéré dans les Equations (5.1), alors l'expression analytique (5.15) est aussi très bonne comme montré sur la Figure 5.5 où les paramètres du système sont indiqués dans le Tableau 5.1 en prenant en compte les séries de Taylor jusqu'aux termes d'ordre 5 en τ_1 .

Ainsi maintenant il est possible d'essayer de concevoir un NES optimal grâce au calcul de H . En effet, on peut voir que si le signe “+” est considéré dans les Equations (5.1) alors le pompage énergétique apparaît être plus efficace puisque la décroissance de l'énergie H est plus abrupte. L'énergie décroît plus rapidement avec le signe “+” dans les Equations (5.1) qu'avec le signe “-”

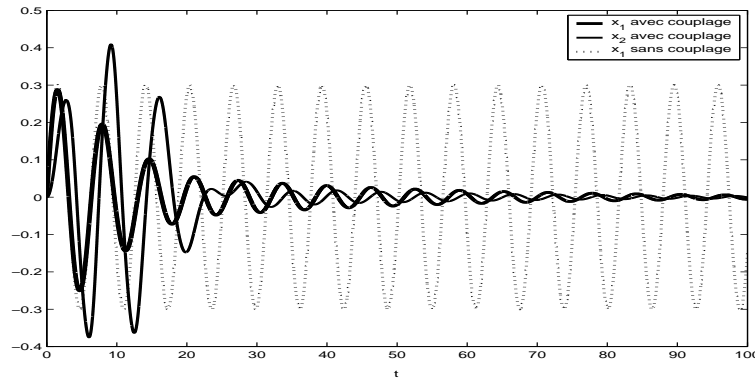
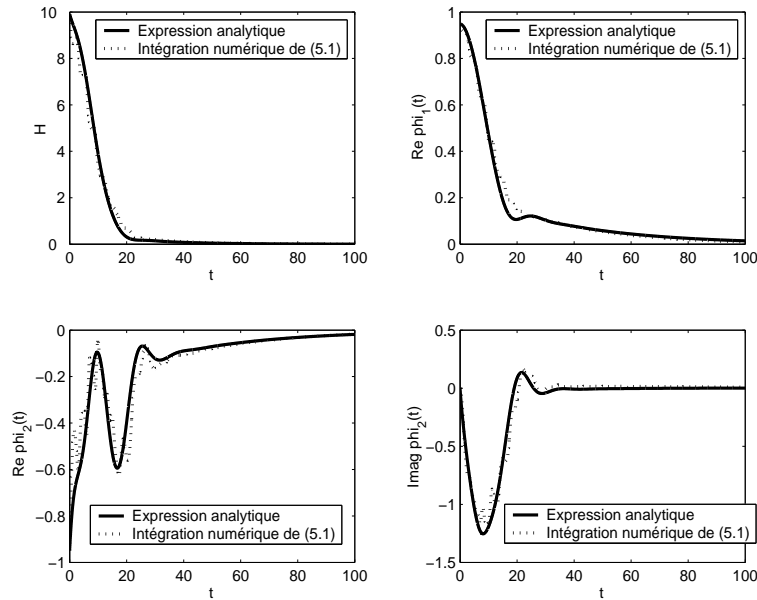


FIG. 5.3 – Réponses avec intégration numérique de (5.1) avec et sans couplage.

FIG. 5.4 – Fonctions $H(t)$, $\text{Imag}(\varphi_{10}(t))$, $\text{Re}(\varphi_{10}(t))$, $\text{Re}(\varphi_{20}(t))$, comparées avec les résultats de l'intégration du Système initial (5.1).

(si tous les autres paramètres sont fixés) comme montré sur la Figure 5.6 où les paramètres du système sont indiqués dans le Tableau 5.1.

Ainsi, le pompage énergétique est plus efficace quand le signe “+” est considéré dans les Equations (5.1) comme illustré sur la Figure 5.7 avec intégration numérique du Système (5.1) et avec les mêmes valeurs de paramètres que précédemment. Sur cette figure, il apparaît clairement que les vibrations sont presque complètement atténuées à $t = 20\text{s}$ quand le signe “+” est considéré dans les Equations (5.1). De plus, on peut aussi considérer l'influence du degré n de la nonlinéarité sur l'efficacité du NES. En effet, pour un jeu donné de paramètres, il existe une valeur optimale de n pour laquelle l'efficacité du pompage énergétique est optimale. Maintenant, nous considérons le cas du signe “+” dans les Equations (5.1) puisque l'efficacité semble meilleure dans ce cas. Par exemple, avec $\frac{dx_1}{dt}(t=0) = 0.4$, $\frac{dx_2}{dt}(t=0) = 0$, $x_1(t=0) = x_2(t=0) = 0$, $n = 2/3/4$, $\eta = 0.2$, et tous les autres paramètres étant similaires à ceux indiqués dans le Tableau 5.1 avec le signe “+” dans les Equations (5.1), alors la valeur optimale de n est 3 (le degré de la nonlinéarité est de 5) comme montré sur la Figure 5.8. Sur cette figure, on peut aussi voir que pour $n = 4$

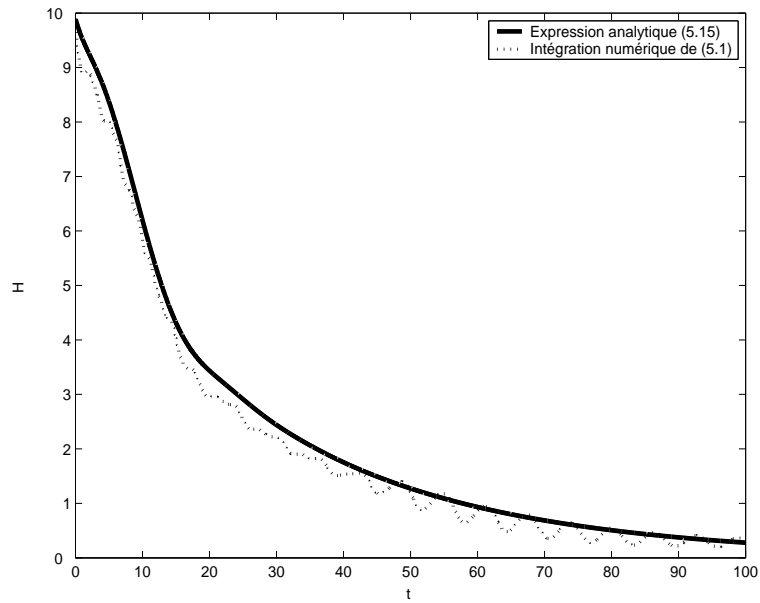


FIG. 5.5 – Fonction $H(t)$. La ligne solide décrit la solution (5.15) en prenant en compte des séries de Taylor jusqu'aux termes d'ordre 5 en τ_1 . La ligne pointillée décrit la solution numérique du Système (5.1).

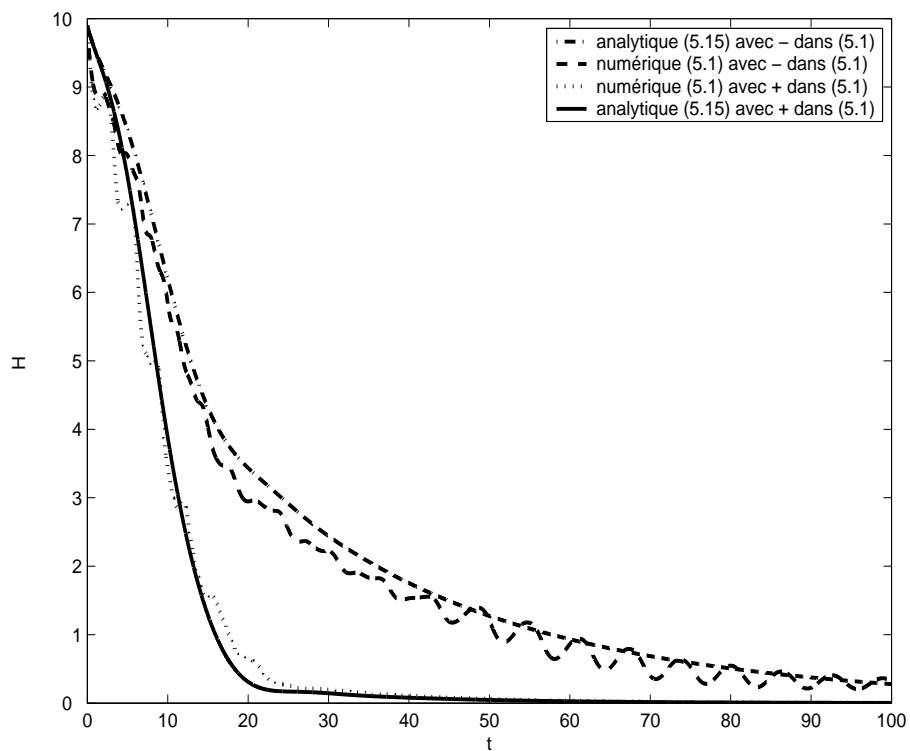


FIG. 5.6 – Comparaison de la fonction $H(t)$ en considérant le signe + ou - dans les Equations (5.1).

l'approximation analytique n'est pas aussi bonne car après $t = 30s$ le pompage énergétique ne se produit pas et il n'y a plus de résonance.

Il est aussi intéressant de noter que dans le cas conservatif (quand l'amortissement est absent) la possible région de pompage dans l'espace paramétrique donne naissance à une alternative au

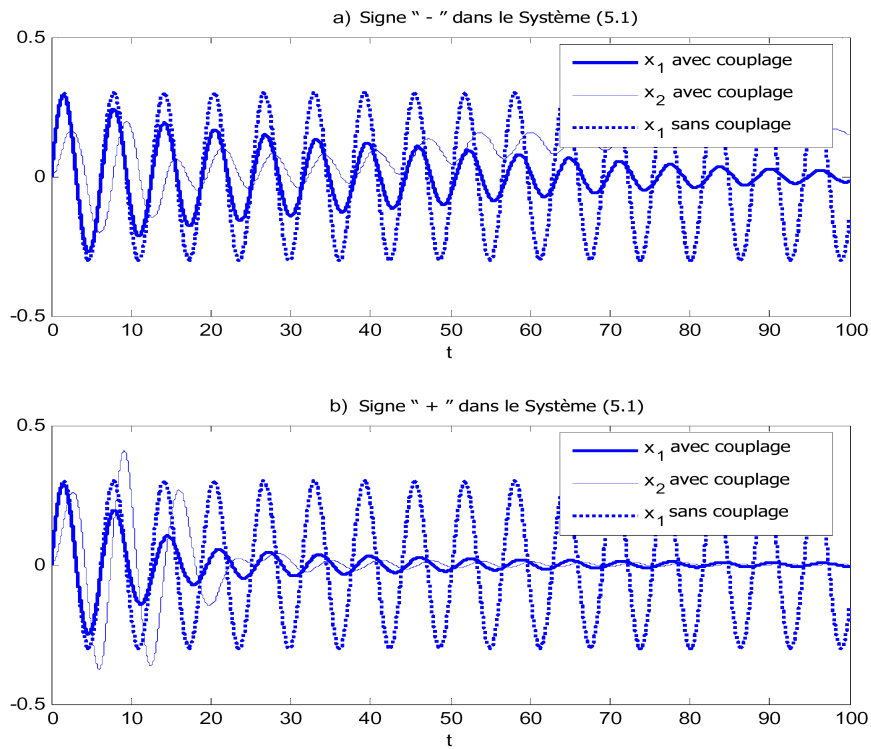


FIG. 5.7 – Comparaison des réponses avec intégration numérique de (5.1) en considérant le signe + ou - dans les Equations (5.1).

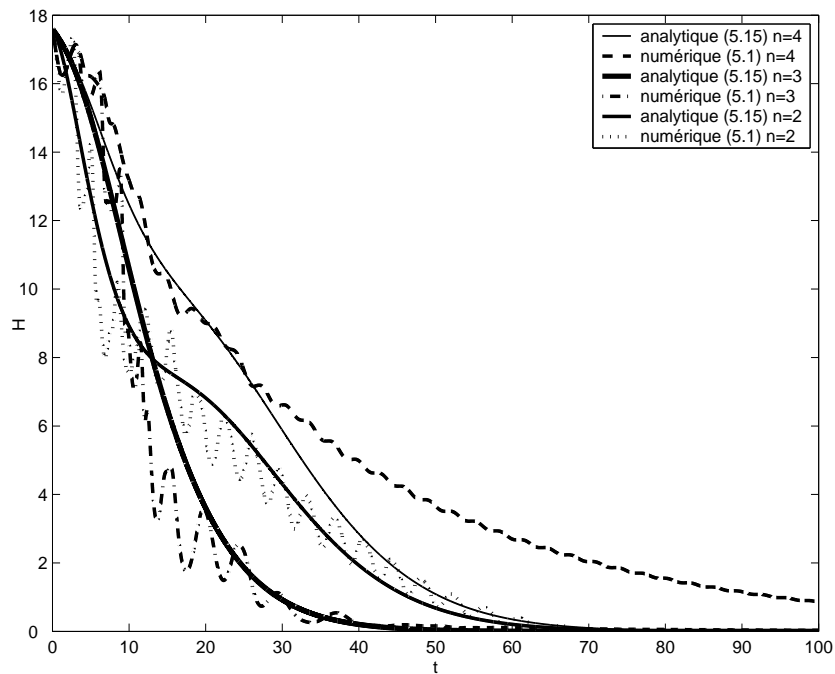


FIG. 5.8 – Comparaison de $H(t)$ pour différentes valeurs de n .

comportement stochastique. Cela peut être clairement observé sur les Figures 5.9, 5.10, 5.11 sur lesquelles les sections de Poincaré du Système initial (5.1) sont tracées pour un N augmentant ($N = 0.08, 0.18, 0.98$; N étant l'énergie initiale injectée à $t = 0^+$) pour les mêmes valeurs de

paramètres : $M = 1\text{kg}$, $m = 0.06\text{kg}$, $k_1 = 852.64\text{N.m}^{-1}$, $k_3 = 36000\text{N.m}^{-3}$, $n = 2$, $D = 0$. Le

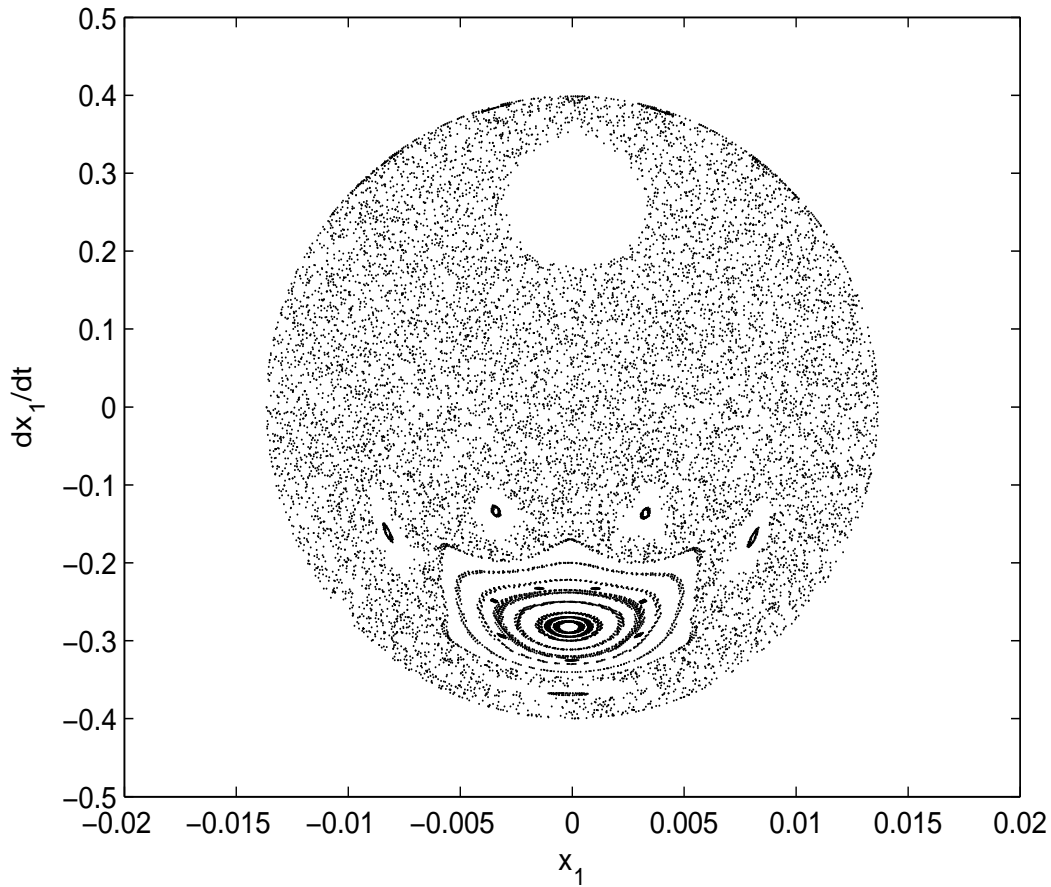


FIG. 5.9 – Section de Poincaré pour $N = 0.08$ (système conservatif).

comportement non stochastique dans le cadre du modèle considéré est prédominant si $N \geq 0.15$. Il se peut aussi que dans le cas conservatif le régime correspondant à une intensité assez large de perturbation soit un battement non linéaire (par exemple sur la Figure 5.12 où $N = 0.16$). Comme nous le verrons par la suite, le régime de pompage peut ainsi être identifié à ce battement amorti.

Ensuite comme l'expression analytique (5.15) semble être assez précise quand le pompage énergétique se produit, il est possible d'analyser l'influence des paramètres sur l'efficacité du pompage énergétique. L'objectif est d'optimiser les paramètres pour obtenir la meilleure efficacité. Disposant d'une expression complètement analytique pour l'énergie du système, on peut réussir à optimiser les paramètres en essayant de minimiser cette fonction à un certain temps : le but étant une décroissance très rapide de cette énergie pour une bonne atténuation des vibrations. L'optimisation se réduit ainsi à une simple étude analytique : on veut minimiser la fonction énergie H dont on connaît l'expression analytique. Les paramètres de la structure primaire linéaire sont souvent donnés. L'objectif est alors de concevoir les paramètres de la structure non linéaire ajoutée pour obtenir la meilleure atténuation des vibrations de la structure primaire. C'est pourquoi le rôle des paramètres η (ou $\tilde{\eta}$) et c (ou k_3) peut être analysé. Dans ce qui suit, on considère seulement l'influence du paramètre η (ou $\tilde{\eta}$) par exemple. En effet, pour une structure primaire linéaire donnée, le but est de concevoir le système additionnel non linéaire en particulier l'amortissement. Puisque $H(t)$ représente l'énergie il est possible d'observer analytiquement le

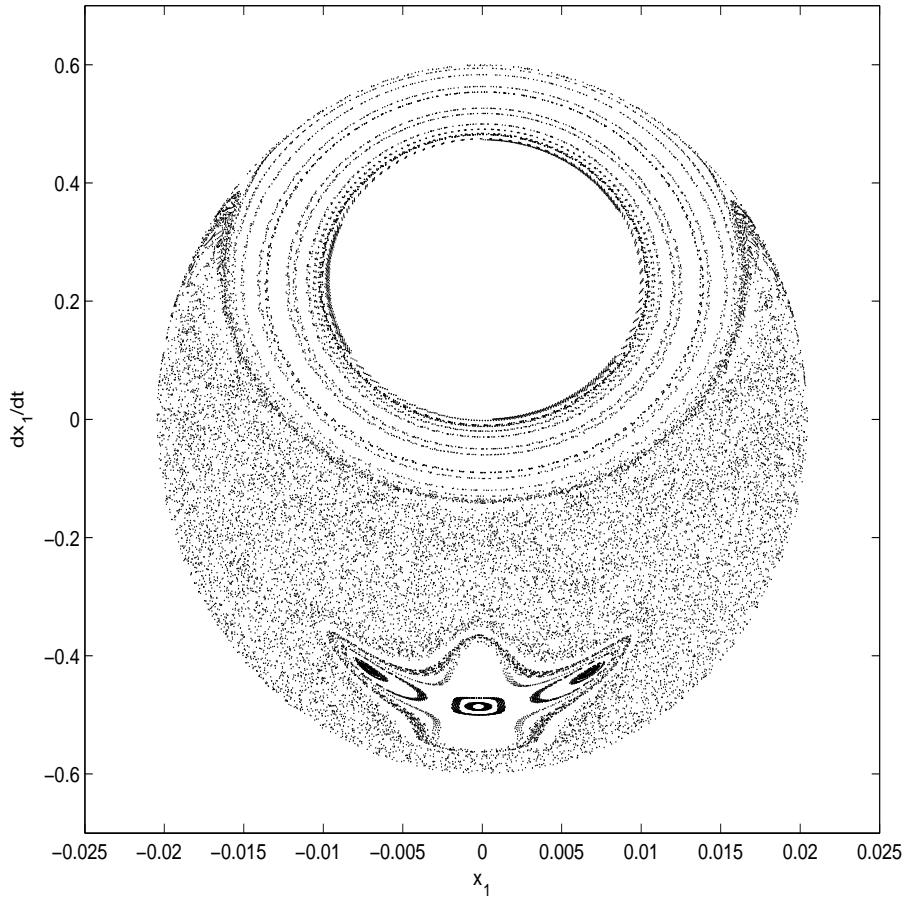


FIG. 5.10 – Section de Poincaré pour $N = 0.18$ (système conservatif).

comportement de $H(t)$ si η varie. Par exemple, avec $M = 1\text{kg}$, $m = 0.06\text{kg}$, $k_1 = 852.64\text{N.m}^{-1}$, $\tilde{\mu}_1 = 0.15\text{N.s.m}^{-1}$, $k_3 = 36000\text{N.m}^{-3}$ et $\frac{dx_1}{dt}(t=0) = 1.2$, ce comportement a été tracé sur la Figure 5.13. Sur cette figure, le dégradé des couleurs signifie que plus la valeur de H est élevée et plus la couleur est foncée. Dans la région de pompage les résultats analytiques sont bien vérifiés par les données des simulations numériques (contrairement aux autres types de mouvements). Une telle coïncidence peut être considérée comme un signe évident de proximité du design optimal. Sur la Figure 5.13, il apparaît clairement qu'il y a une valeur optimale $\tilde{\eta} = 0.96$ ($\eta = 0.548$) pour laquelle l'énergie est rapidement atténuée. En effet, avant cette valeur, le pompage énergétique se produit mais avec une moins bonne efficacité. Quand $\tilde{\eta}$ est trop grand, le système non linéaire joue le rôle d'amortisseur classique linéaire. Ces points sont illustrés sur la Figure 5.14 pour deux valeurs de $\tilde{\mu}_1$. Il faut souligner que l'avantage même du NES est qu'il n'a pas besoin d'être ajusté quand les paramètres de la structure primaire varient. Par exemple, sur la Figure 5.14 quand μ_1 varie le pompage reste efficace.

5.1.1.2 Étude des modes normaux non linéaires

Comme nous le verrons, d'importantes informations sur l'efficacité de l'absorbeur peuvent être extraites de l'analyse du système conservatif correspondant. En effet, le pompage énergétique peut avoir lieu uniquement dans le système amorti, et est dû à une capture de résonance 1 : 1 de la dynamique sur une variété résonante 1 : 1 du système [Vakakis et Gendelman, 2001]. [Vakakis et al., 2003] a mis en évidence un fait paradoxal, à savoir que bien que le pompage

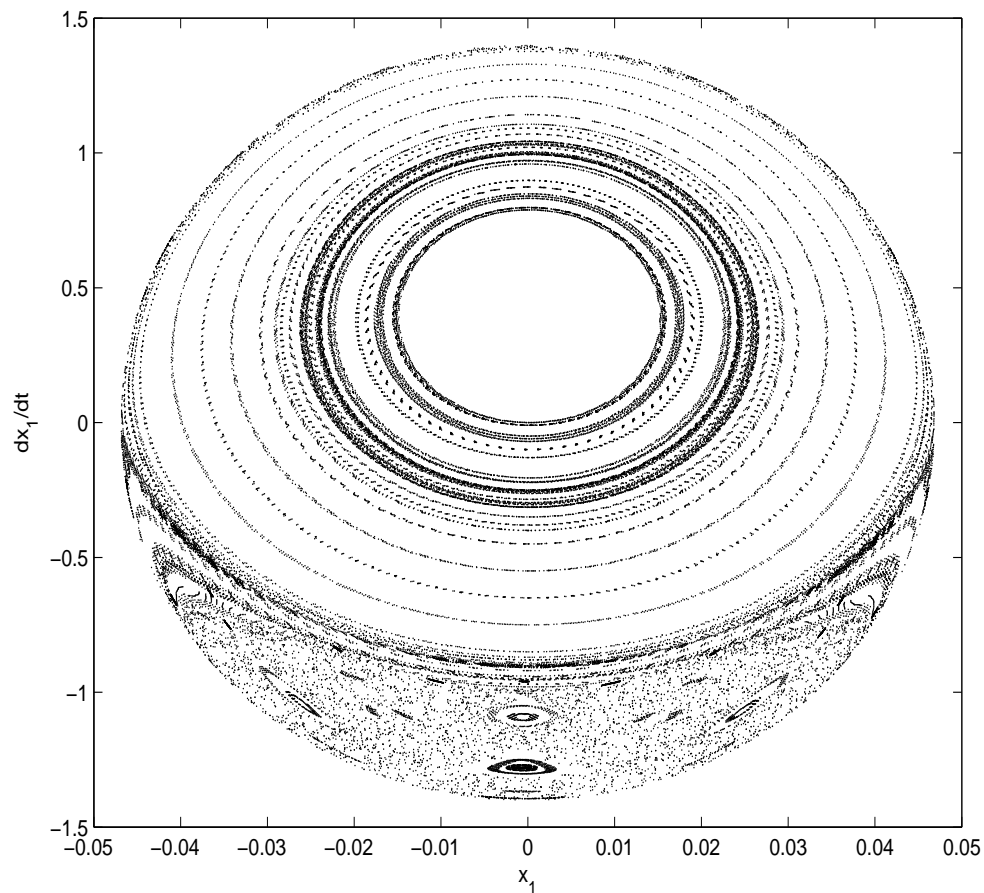


FIG. 5.11 – Section de Poincaré pour $N = 0.98$ (système conservatif).

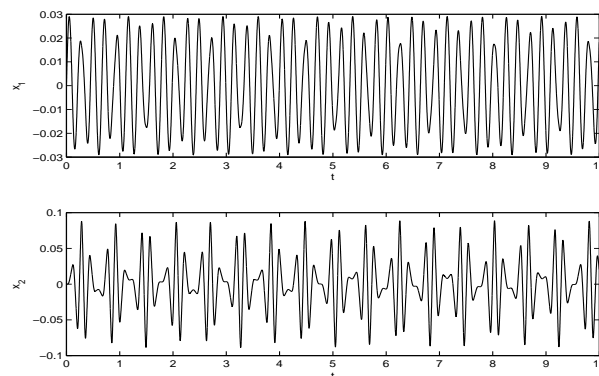
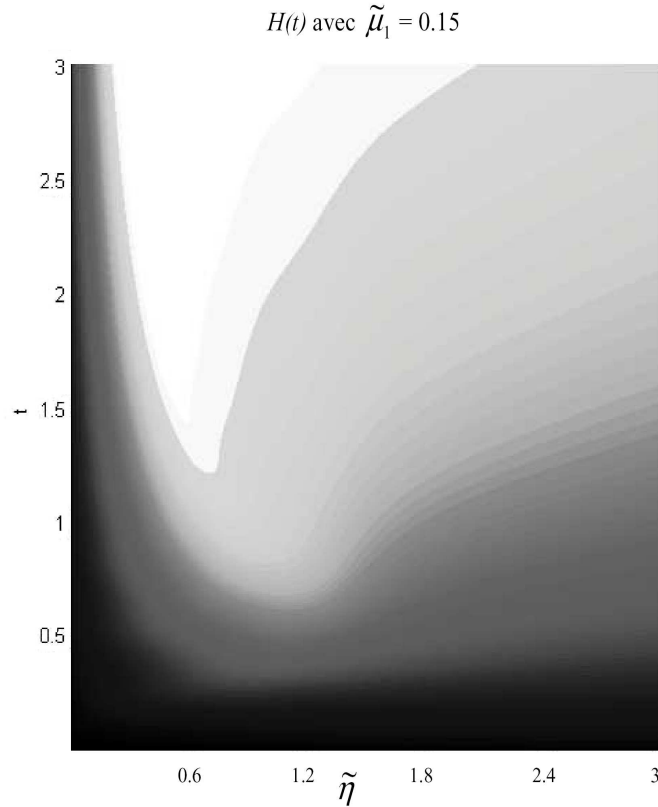


FIG. 5.12 – Phénomène de battements non linéaires pour $N = 0.16$ (système conservatif).

énergétique ait lieu uniquement dans le système amorti, la dynamique gouvernant ce phénomène est influencée par la structure des Modes Normaux Non linéaires (NNMs), i.e. les mouvements périodiques libres, synchrones du système sous-jacent non amorti, non forcé [Vakakis et al., 1996]. Dans l'analyse qui suit, on étudie la structure de bifurcations des NNMs du système non amorti d'oscillateurs couplés. Comme montré dans [Gendelman et al., 2003], cette bifurcation de NNMs fournit les conditions nécessaires pour l'apparition de pompage énergétique non linéaire dans le système amorti correspondant.

FIG. 5.13 – Influence de $\tilde{\eta}$ sur $H(t)$.

Si $\eta = \mu_1 = 0$, les Equations (5.10, 5.11) deviennent :

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \tau_1} + \frac{i}{2}(\varphi_{20} + \varphi_{10}) = 0, \quad (5.16)$$

et :

$$\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial \tau_1} + \delta \left[\frac{i}{2}(\varphi_{20} + \varphi_{10}) - \frac{C_{2n-1}^{n-1} ic}{2^{2n-1}} \varphi_{20} |\varphi_{20}|^{2n-2} \pm \frac{i\alpha}{2} \varphi_{20} \right] = 0. \quad (5.17)$$

En introduisant le changement de variables :

$$\varphi_{10} = f_1, \quad \varphi_{20} = \sqrt{\delta} f_2, \quad (5.18)$$

les Equations (5.16, 5.17) deviennent :

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} + \frac{i}{2}(\sqrt{\delta} f_2 + f_1) = 0, \quad (5.19)$$

et :

$$\frac{\partial f_2}{\partial \tau_1} + \sqrt{\delta} \left[\frac{i}{2}(\sqrt{\delta} f_2 + f_1) - \frac{C_{2n-1}^{n-1} ic}{2^{2n-1}} \delta^{(2n-1)/2} f_2 |f_2|^{2n-2} \pm \frac{i\alpha}{2} \sqrt{\delta} f_2 \right] = 0. \quad (5.20)$$

Le système est maintenant complètement intégrable avec les deux intégrales premières du mouvement :

$$H_1 = -\frac{i}{2}(|f_1|^2 + \delta |f_2|^2) - \frac{i}{2}(f_2 f_1^* + f_1 f_2^*) + \frac{C_{2n-1}^{n-1} ic}{2^{2n-1}} \delta^n |f_2|^{2n} \pm \frac{i\alpha}{2} \delta |f_2|^2, \quad (5.21)$$

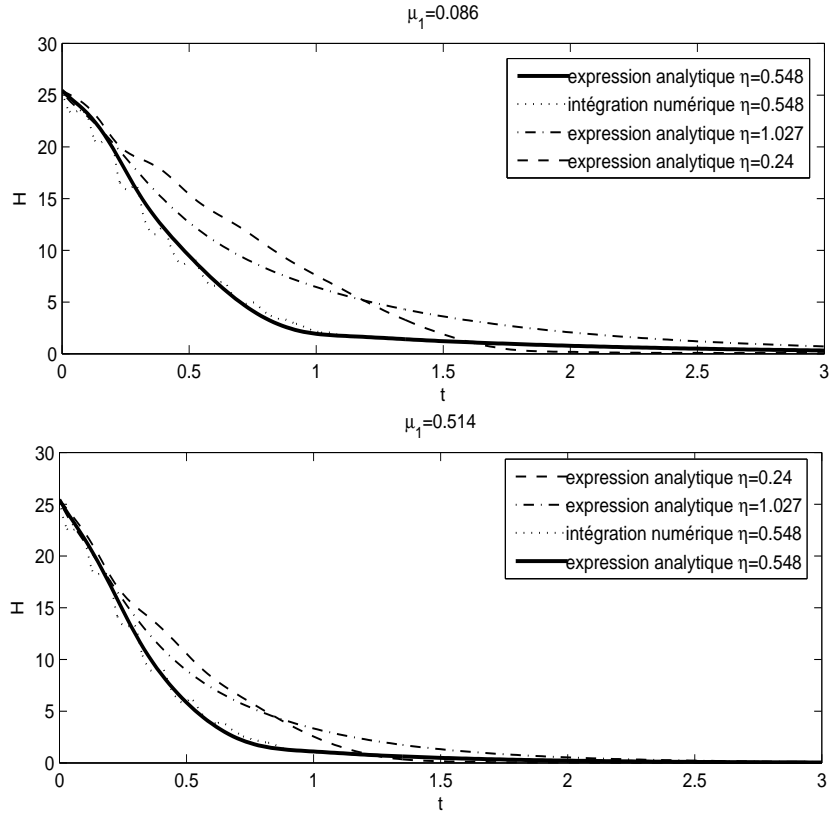


FIG. 5.14 – Comportement de $H(t)$ pour différentes valeurs des coefficients d'amortissement.

et

$$N = |f_1|^2 + |f_2|^2. \quad (5.22)$$

On peut donc introduire le changement de variables suivant :

$$f_1 = \sqrt{N} \cos \theta e^{i\delta_1}, \quad f_2 = \sqrt{N} \sin \theta e^{i\delta_2}, \quad (5.23)$$

et

$$\Delta = \delta_1 - \delta_2. \quad (5.24)$$

Finalement on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau_1} - \frac{\sqrt{\delta}}{2} \sin \Delta = 0, \quad (5.25)$$

et :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \tau_1} - \frac{\delta - 1}{2} \pm \frac{\alpha \delta}{2} - \sqrt{\delta} \cos \Delta \cot g 2\theta + \frac{C_{2n-1}^{n-1} c}{2^{2n-1}} \delta^n N^{n-1} \sin^{2n-2} \theta = 0. \quad (5.26)$$

Les solutions périodiques libres (NNMs) du Système (5.6) (sans amortissement) correspondent aux points stationnaires du flot lent (5.25, 5.26), points qui sont obtenus en annulant les dérivées :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau_1} = 0 \Rightarrow \delta = 0, \pi, \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \tau_1} = 0 \Rightarrow \frac{\delta - 1}{2} \pm \frac{\alpha \delta}{2} \pm \sqrt{\delta} \cot g 2\theta - \frac{C_{2n-1}^{n-1} c}{2^{2n-1}} \delta^n N^{n-1} \sin^{2n-2} \theta = 0. \quad (5.28)$$

De manière identique on peut considérer uniquement une des deux valeurs stationnaires de Δ ; de ce fait, dans l'analyse qui suit on impose le signe "+" devant $\sqrt{\delta}\cotg2\theta$ dans (5.28). Ensuite les solutions stationnaires de (5.28) peuvent être calculées. Ainsi, pour différentes valeurs de N (avec les valeurs indiquées dans le Tableau 5.1 excepté $\eta = 0$) il est possible de tracer les solutions stationnaires de (5.28) comme montré sur la Figure 5.15 sur laquelle des diagrammes de bifurcations ont été tracés avec α le paramètre qui varie. Ainsi, sous une certaine valeur de N ,

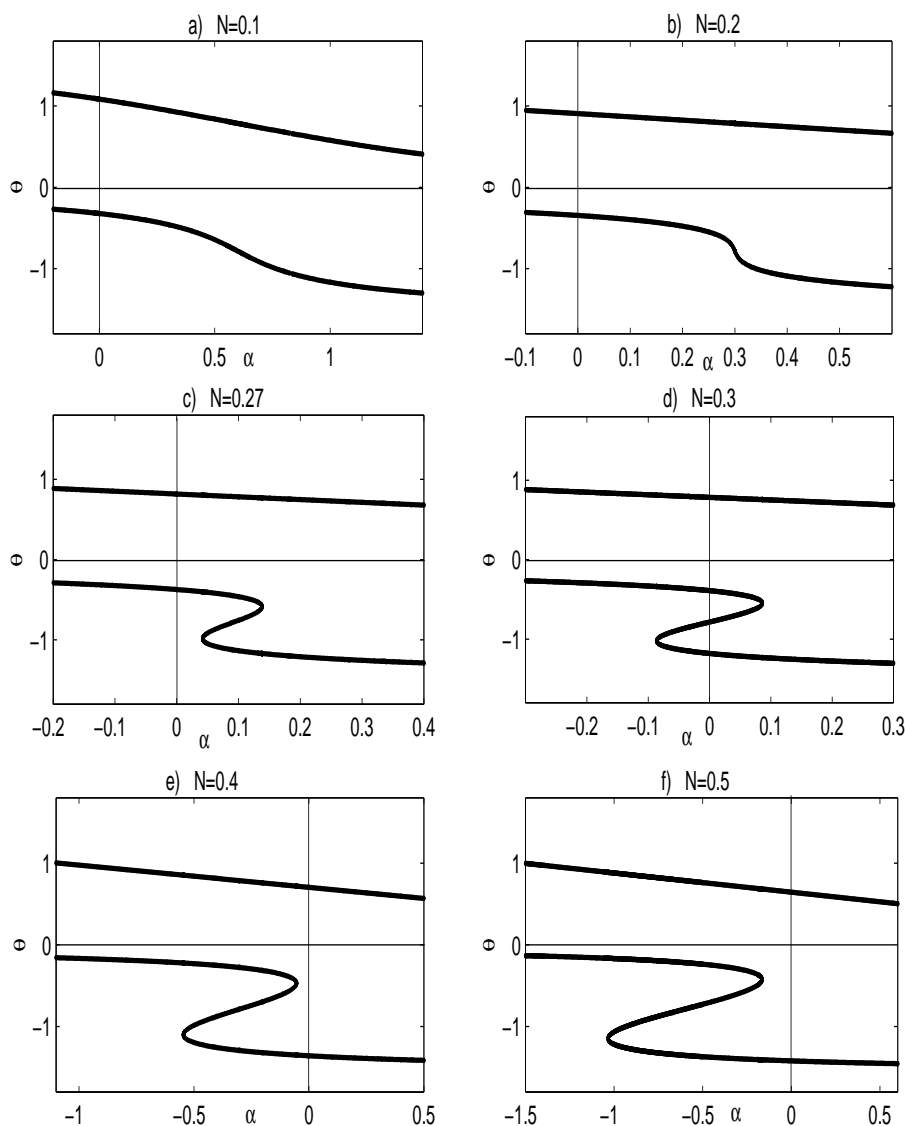


FIG. 5.15 – Diagrammes de bifurcations : solutions stationnaires de l'Equation (5.28).

seulement deux NNMs existent (i.e. pour une valeur fixée de α , ils y a seulement deux solutions pour θ), comme décrit sur les Figures 5.15 a) et 5.15 b), alors que quatre NNMs peuvent exister pour une plus grande valeur de N , comme souligné sur les Figures 5.15 b) c) d) e) (i.e. pour une valeur fixée de α , quatre solutions pour θ existent). De plus, en étudiant l'Equation (5.28) plus précisément, les conclusions suivantes peuvent être dressées : deux cas apparaissent.

- Premièrement, si $-\frac{\delta-1}{2} \pm \frac{\alpha\delta}{2} > 0$ alors pour toutes les valeurs de N il existe seulement deux NNMs (i.e. pour une valeur fixée de α il y a seulement deux solutions pour θ) comme montré sur la Figure 5.15.

- Deuxièmement, si $-\frac{\delta-1}{2} \pm \frac{\alpha\delta}{2} < 0$ alors en dessous d'une certaine valeur de N deux NNMs existent, comme décrit sur la Figure 5.15, et au-dessus d'une certaine valeur de N , quatre NNMs peuvent être trouvés (i.e. pour une valeur fixée de α , il y a quatre solutions pour θ)

Dans le cas où quatre NNMs apparaissent, le phénomène de pompage énergétique se produira quand l'amortissement sera ajouté. En effet, ce point peut être expliqué par le fait qu'un phénomène de battements apparaît quand l'amortissement n'est pas présent (ce point a été discuté dans [Gendelman et al., 2003] et est décrit ici plus loin).

Ces battements non linéaires se produisent dans le système initial, comme montré sur la Figure 5.16, où la partie haute du portrait des phases dans le plan $(\theta - \Delta)$ a été tracée avec une intégration numérique du Système initial (5.1) et comparée à l'intégration de (5.25, 5.26); sur la Figure 5.16, $N = 0.25$ (et α est choisi pour obtenir quatre NNMs). Sur cette figure, on peut voir que l'approximation (5.25,5.26) est bonne quand le pompage énergétique se produit, i.e. θ proche de $\frac{\pi}{2}$ (le transfert d'énergie le plus intensif). Ce phénomène de battements qui

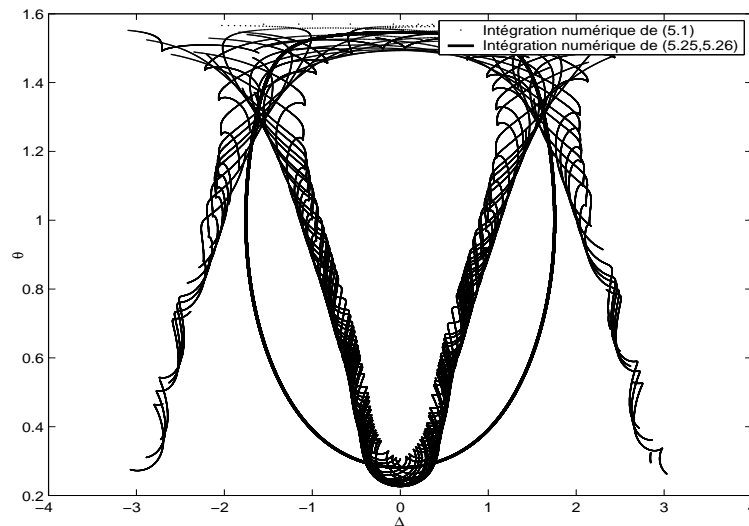


FIG. 5.16 – Battements non linéaires dans le plan $(\theta - \Delta)$ pour $N = 0.25$.

apparaît peut être observé sur les portraits des phases. En effet ce phénomène de battements est seulement possible sur la Figure 5.19 où quatre NNMs apparaissent alors que sur les Figures 5.17 et 5.18 deux NNMs seulement apparaissent.

Ces battements non linéaires peuvent aussi être observés dans les deux déplacements x_1 et x_2 , comme montré sur la Figure 5.20, avec les mêmes valeurs que précédemment (l'amortissement n'est pas pris en compte dans cette figure). En effet, en regardant les réponses, il est évident qu'il y a un transfert d'énergie se produisant avec des allers-retours entre les deux masses (le phénomène de battements permet un transfert intensif d'énergie). Il y a une résonance de l'oscillateur non linéaire (x_2). Sur la Figure 5.20, x_1 ne tend pas vers zéro puisque l'amortissement naturel n'a pas été pris en compte ($\eta = 0$) alors que ce dernier est nécessaire pour le déclenchement du pompage. En prenant en compte l'amortissement (les NNMs sont calculés sans amortissement), le pompage énergétique se produira (i.e. un transfert irréversible de l'énergie d'une masse vers l'autre), comme montré sur la Figure 5.21 où l'amortissement a été pris en compte ($\eta \neq 0$, $\eta = 0.15$) et tous les autres paramètres sont identiques à ceux pris en compte

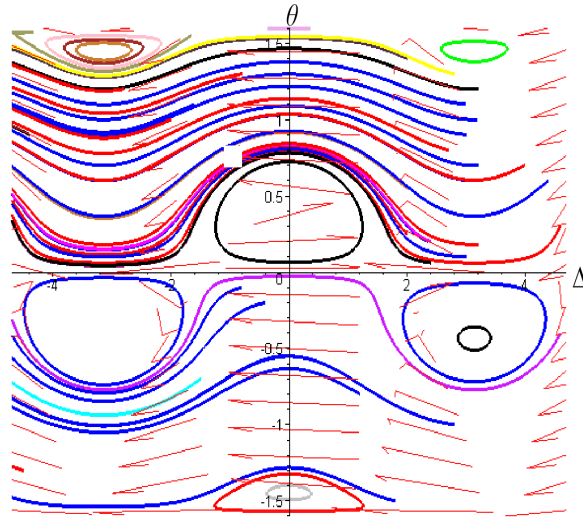


FIG. 5.17 – Solutions des Equations (5.25, 5.26) dans le plan $(\theta - \Delta)$ avec $-\frac{\delta-1}{2} \pm \frac{\alpha\delta}{2} > 0$ pour $N=0.4$.

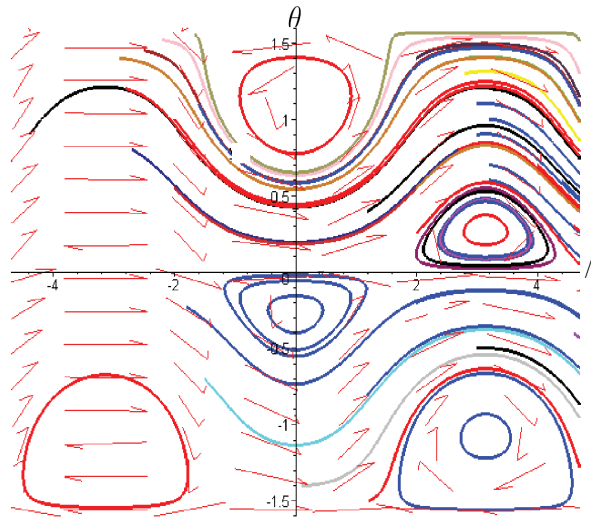


FIG. 5.18 – Solutions des Equations (5.25, 5.26) dans le plan $(\theta - \Delta)$ avec $-\frac{\delta-1}{2} \pm \frac{\alpha\delta}{2} < 0$ pour $N=0.15$.

pour la Figure 5.20.

Ce point a été justifié par [Gendelman, 2001] : les conditions de la résonance de x_2 sont recherchées sans amortissement. Cette approche des NNMS est commune dans les études de pompage énergétique. [Gendelman, 2001, Gendelman et al., 2001] et [Vakakis et Gendelman, 2001] ont démontré la dépendance de la dynamique du système amorti sur sa dynamique non amortie. En particulier, il a été montré que le système non amorti possède un mode normal non linéaire qui possède une grande quantité d'énergie localisée dans l'oscillateur non linéaire. Quand un faible amortissement est ajouté, ce NNM est transformé en un NNM perturbé, et quand il est suffisamment excité, le pompage énergétique se produit. Dans notre cas, le phénomène de battements (quand l'amortissement n'est pas pris en compte) est responsable pour le déclenchement du pompage énergétique quand l'amortissement est ensuite ajouté. En effet, quand l'amortissement naturel est ajouté, toutes les réponses tendent vers zéro. C'est la raison pour laquelle il

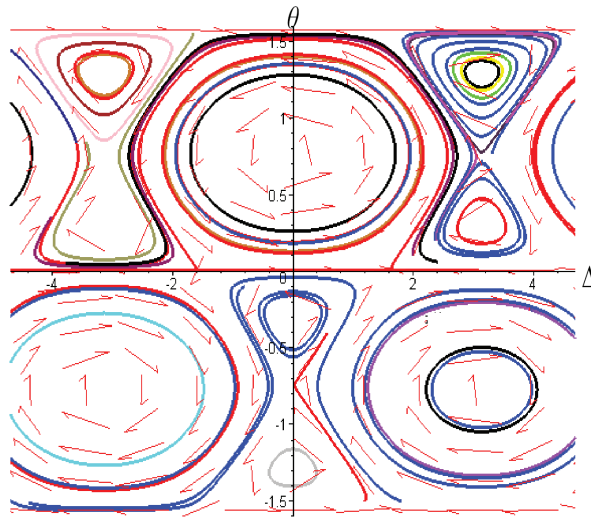


FIG. 5.19 – Solutions des Equations (5.25,5.26) dans le plan $(\theta - \Delta)$ avec $-\frac{\delta-1}{2} \pm \frac{\alpha\delta}{2} < 0$ pour $N=0.38$.

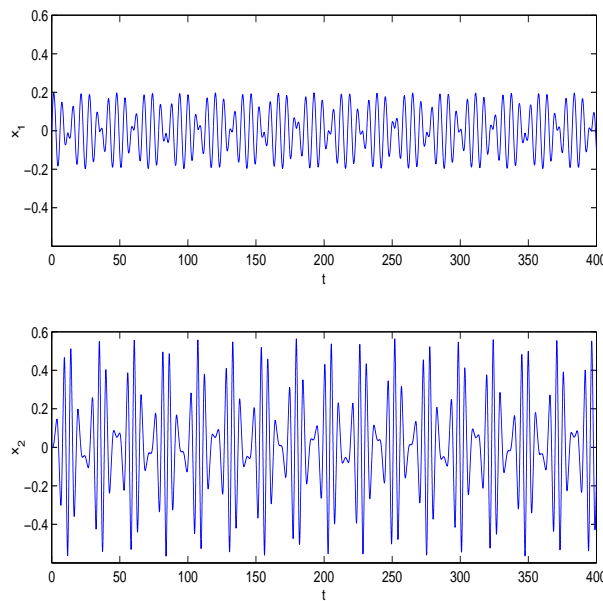


FIG. 5.20 – Battements non linéaires sans amortissement pour $N = 0.25$.

n'est pas justifié de tracer un diagramme de bifurcations en prenant en compte l'amortissement puisque le pompage énergétique est un phénomène transitoire (les solutions stationnaires sont des zéros pour chaque condition initiale même si le pompage énergétique ne se produit pas). Ainsi, l'efficacité de l'absorbeur est mesurée grâce aux diagrammes de bifurcations montrés sur la Figure 5.15 en terme de NNMs non amortis (résonance de l'oscillateur non linéaire).

5.1.2 Vérifications expérimentales

5.1.2.1 Modèle réduit à un étage

Le système expérimental considéré est celui du modèle réduit à un étage, construit à l'Earthquake Laboratory de l'Université de Bristol, déjà présenté dans les parties précédentes de cette thèse et représenté sur la Figure 3.25. On rappelle juste que x_1 et x_2 représentent les

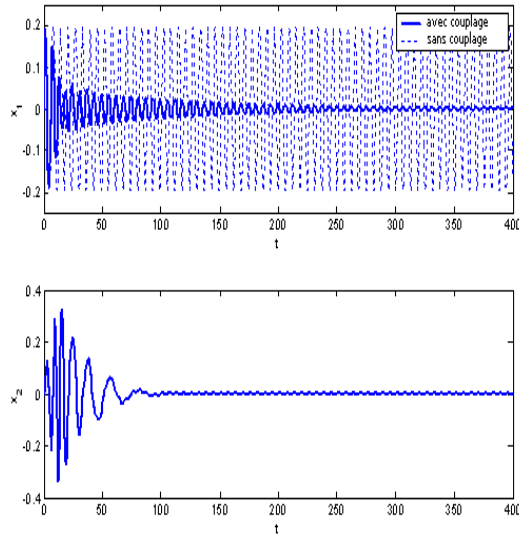


FIG. 5.21 – Déclenchement du pompage énergétique avec amortissement).

déplacements absolus respectifs de la structure primaire et de la faible masse ajoutée. M représente la masse de la structure primaire et m la masse de la seconde structure ajoutée. Le coefficient idéalisé visqueux d'amortissement entre la masse primaire et le support est c_1 et entre la masse primaire et la masse secondaire c_2 . Une impulsion est considérée au niveau de la première plaque. Le système complet est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \tilde{\mu}_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 + \tilde{\eta} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + k_3 (x_1 - x_2)^3 = 0, \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) - k_3 (x_1 - x_2)^3 = 0. \end{cases} \quad (5.29)$$

(5.29) est similaire aux Equations (5.1) étudiées dans la précédente partie. Les paramètres expérimentaux sont $m = 0.33\text{kg}$, $M = 3.3\text{kg}$ donc $\varepsilon = 0.1$. Une analyse modale et une analyse dynamique expérimentale des structures donnent $k_1 = 2814\text{N.m}^{-1}$, $\tilde{\mu}_1 = 1.4\text{N.s.m}^{-1}$, $\tilde{\eta} = 5\text{N.s.m}^{-1}$ et $k_3 = 2.10^5\text{N.m}^{-3}$. La fréquence naturelle de l'oscillateur linéaire est 4.65Hz . En considérant une impulsion sur la première masse ($x_1(t=0) = x_2(t=0) = \frac{dx_2}{dt}(t=0) = 0$, $\frac{dx_1}{dt}(t=0) = 2$), les accélérations des oscillations libres sont mesurées et tracées comme montré sur la Figure 5.22. Sur cette figure, le pompage énergétique se produit (atténuation des vibrations de la masse primaire grâce à une résonance de la structure non linéaire) et on obtient bien une vérification expérimentale des résultats numériques. Ensuite la fonction expérimentale $H(t)$ peut être calculée grâce aux déplacements expérimentaux x_1 et x_2 pour voir s'il y a un bon accord entre l'expression analytique (5.15) et les résultats expérimentaux. Ainsi la fonction $H(t)$ expérimentale, analytique et numérique peut être tracée comme montré sur la Figure 5.23 où les valeurs des paramètres sont les mêmes que précédemment pour faire des comparaisons. La Figure 5.23 montre les résultats expérimentaux. Ces derniers confirment l'expression analytique et les simulations numériques puisque l'approximation apparaît être assez bonne quand le pompage énergétique se produit (pendant la première seconde). En effet, les solutions $\varphi_{10}(t)$ et $\varphi_{20}(t)$ des Equations (5.10, 5.11) introduites pour obtenir l'approximation analytique (5.15)

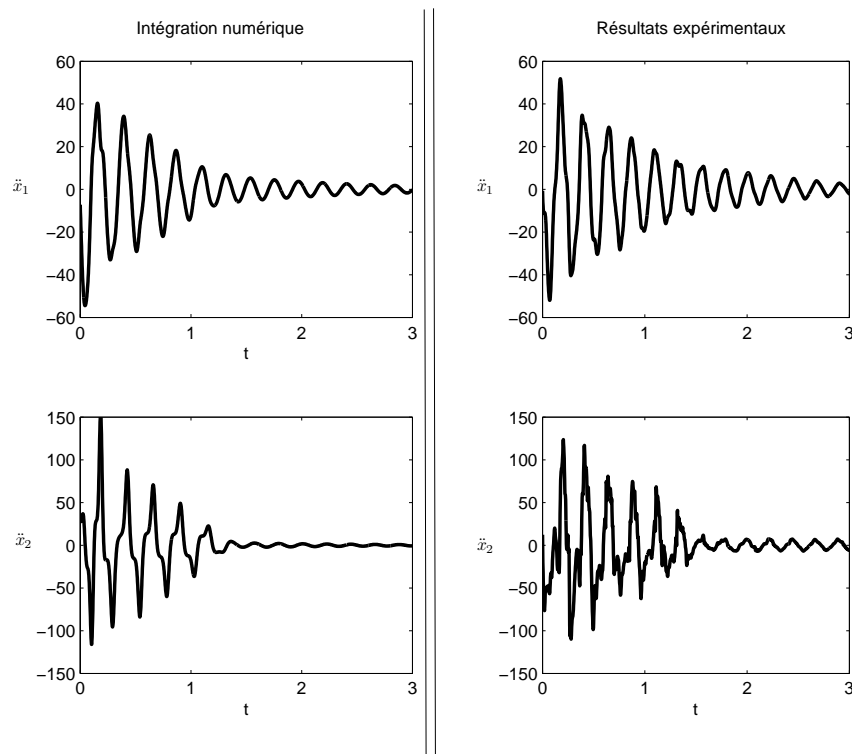


FIG. 5.22 – Résultats expérimentaux avec une impulsion et comparaison avec les résultats numériques.

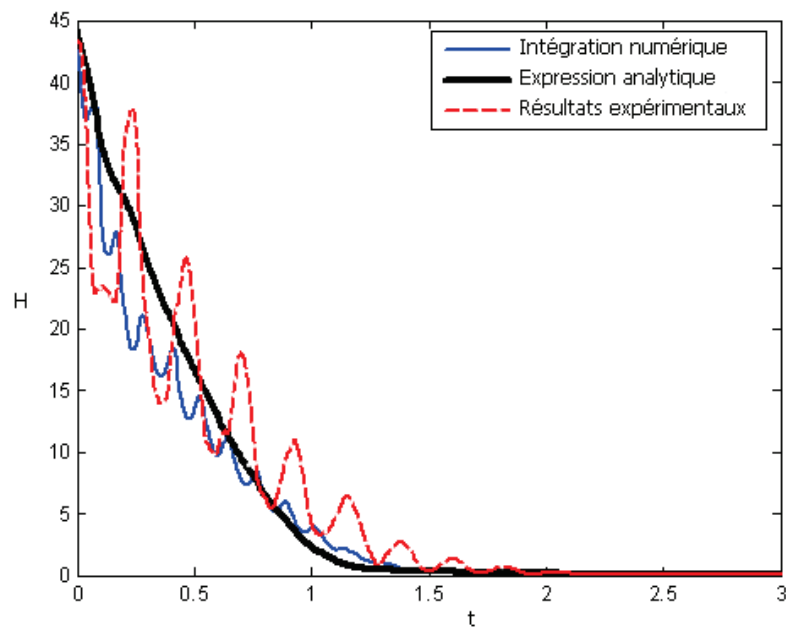


FIG. 5.23 – Comparaison des résultats expérimentaux avec l'intégration numérique et l'expression analytique (5.15).

sont vérifiées expérimentalement comme montré sur la Figure 5.24 avec les mêmes valeurs des paramètres que précédemment.

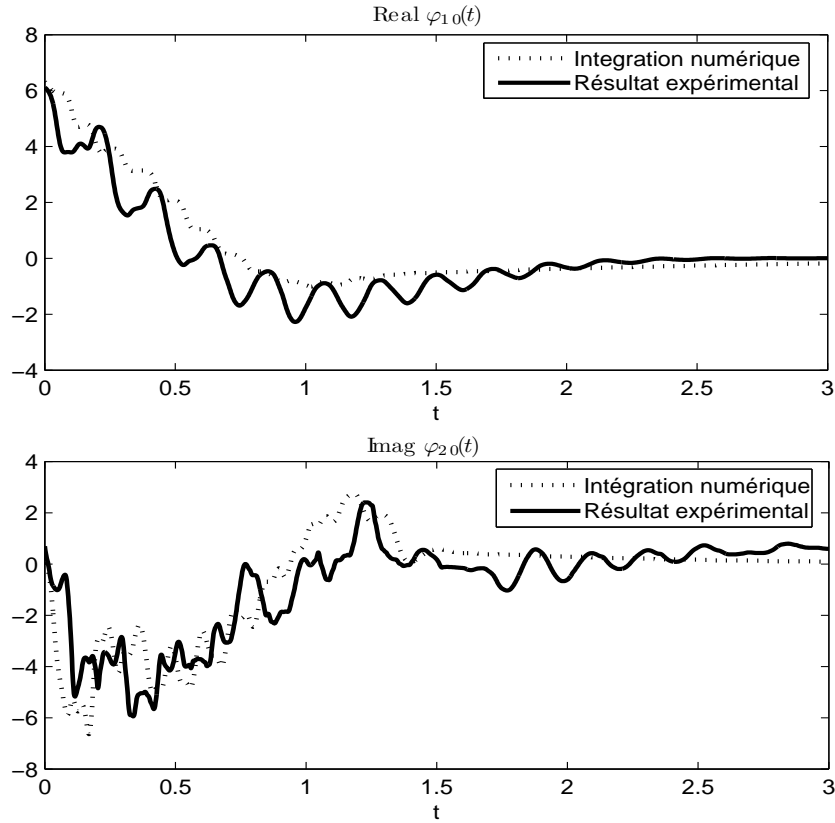


FIG. 5.24 – Comparaison des résultats expérimentaux avec l’intégration numérique des Equations (5.10, 5.11).

5.1.2.2 Modèle réduit à quatre étages

Le système expérimental considéré est celui du modèle réduit à quatre étages, construit au laboratoire Géomatériaux de l’ENTPE, déjà présenté dans les parties précédentes de cette thèse et représenté sur la Figure 3.32. On rappelle juste que x_1 et x_2 représentent les déplacements absolus respectifs de la structure primaire et de la faible masse ajoutée. M représente la masse de la structure primaire et m la masse de la seconde structure ajoutée. Pour la structure primaire, on considère tout d’abord uniquement le premier mode (la réduction du modèle de bâtiment à son premier mode (masse M) semble raisonnable puisque comme souligné dans les chapitres précédents, le premier mode ici est uniquement responsable du pompage énergétique et les autres modes de la structure linéaire sont juste de simples oscillateurs amortis). Le système complet est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \tilde{\mu}_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 + \tilde{\eta} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + k_3 (x_1 - x_2)^{2n-1} \pm D(x_1 - x_2) = 0, & n \geq 2, \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) - k_3 (x_1 - x_2)^{2n-1} \pm D(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

(5.30) est similaire aux Equations (5.1) étudiées dans la précédente partie en considérant le signe “+” devant les termes $\pm D(x_1 - x_2)$ et $n = 2$. Les paramètres expérimentaux sont $m = 0.121\text{kg}$, $M = 1.677\text{kg}$ donc $\varepsilon = 0.07215$. Une analyse modale et une analyse dynamique expérimentale des structures donnent $k_1 = 900.3\text{N.m}^{-1}$, $\tilde{\mu}_1 = 0.995\text{N.s.m}^{-1}$, $\tilde{\eta} = 1.452\text{N.s.m}^{-1}$, $D = 30\text{N.m}^{-1}$ et $k_3 = 1.48 \cdot 10^6\text{N.m}^{-3}$. La fréquence naturelle de l’oscillateur linéaire est 3.69Hz .

En considérant une impulsion sur la première masse ($x_1(t=0) = x_2(t=0) = \frac{dx_2}{dt}(t=0) = 0$, $\frac{dx_1}{dt}(t=0) = 0.25$) à l'aide d'un marteau calibré (la charge a été appliquée au dernier étage du modèle de bâtiment), les accélérations des oscillations libres sont mesurées et tracées sur la Figure 5.25 où le pompage énergétique se produit. Les résultats expérimentaux sont très proches de ceux obtenus par l'intégration numérique du Système (5.1) avec les paramètres précédents (en prenant un mode en compte dans l'analyse numérique) comme montré sur la Figure 5.25. Ensuite la fonc-

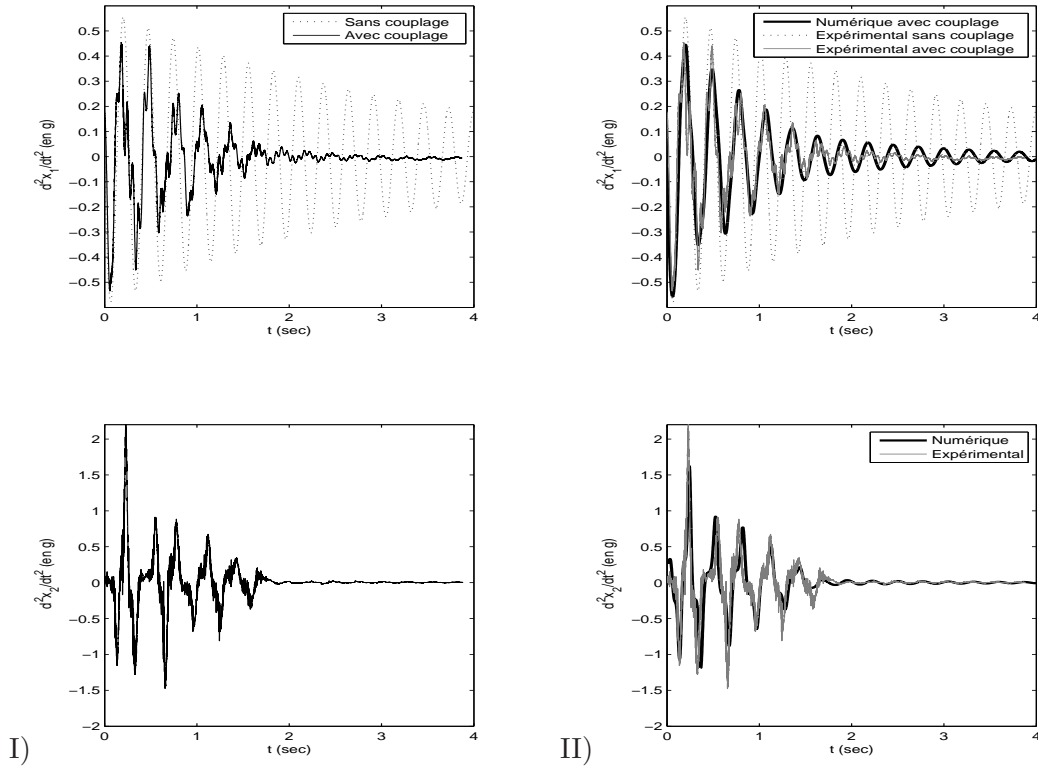


FIG. 5.25 – I) Résultats expérimentaux avec une impulsion. II) Comparaison des résultats expérimentaux avec les résultats numériques.

tion expérimentale $H(t)$ peut être calculée grâce aux déplacements expérimentaux x_1 et x_2 pour voir s'il y a un bon accord entre l'expression analytique (5.15) et les résultats expérimentaux. Ainsi la fonction $H(t)$ expérimentale, analytique et numérique peut être tracée comme montré sur la Figure 5.26 où les valeurs des paramètres sont les mêmes que précédemment pour faire des comparaisons. La Figure 5.26 montre que les résultats expérimentaux confirment l'expression analytique et les simulations numériques puisque l'approximation apparaît être très bonne. De plus, comme montré sur la Figure 5.27 les solutions $\varphi_{10}(t)$ et $\varphi_{20}(t)$ des Equations (5.10, 5.11) introduites pour obtenir l'approximation analytique (5.15) sont vérifiées expérimentalement.

Il a ainsi été montré que la solution analytique du problème de pompage énergétique pour un système à deux degrés de liberté fortement non homogène fournit une base intéressante pour trouver les paramètres optimaux de l'absorbeur énergétique. Les caractéristiques optimales de l'amortissement calculées se révèlent être réalistes et peuvent être réalisées en pratique. Les résultats analytiques sont vérifiés expérimentalement pour des modèles réduits de bâtiments.

La description analytique du processus de pompage comme phénomène de battements amortis

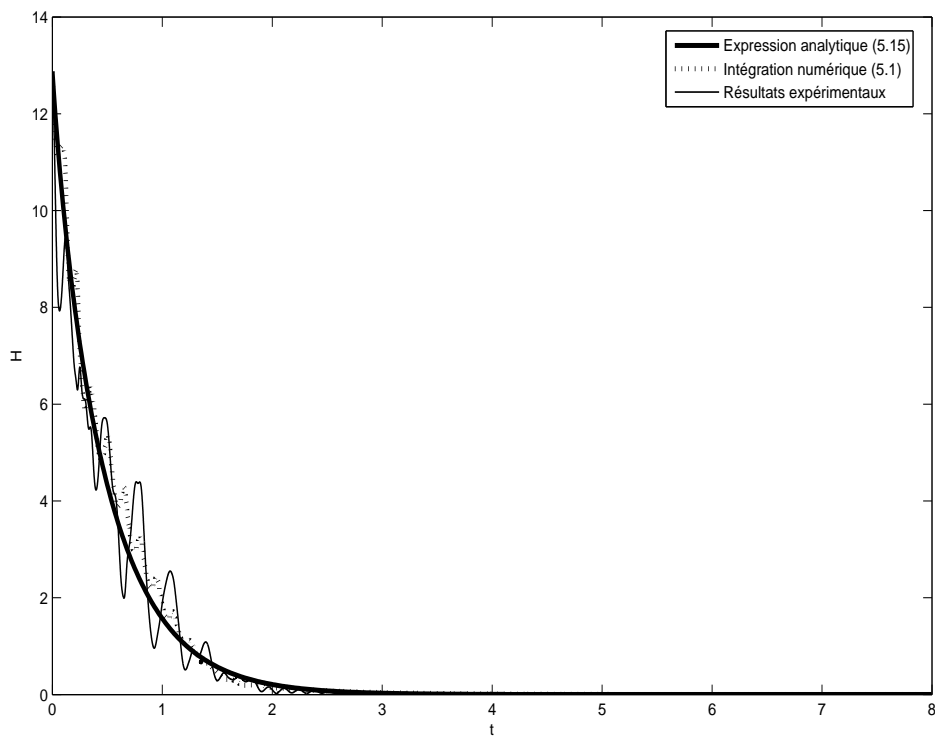


FIG. 5.26 – Comparaison des résultats expérimentaux avec l'intégration numérique et l'expression analytique (5.15).

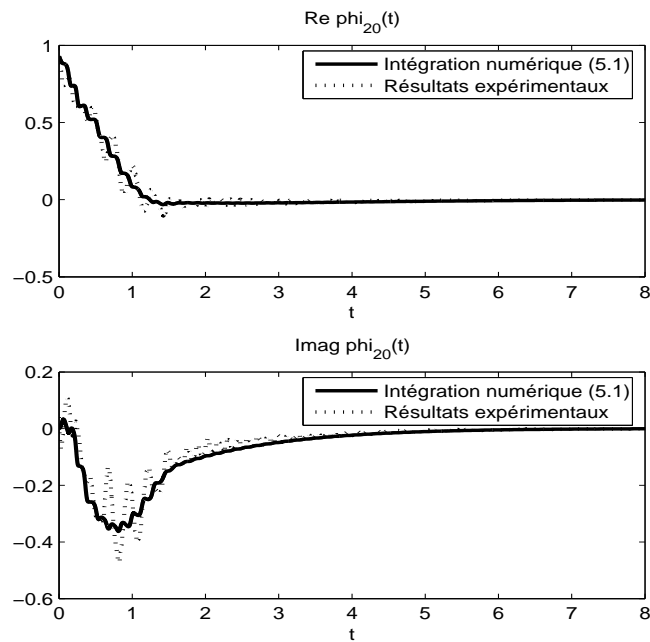


FIG. 5.27 – Comparaison des résultats expérimentaux avec l'intégration numérique.

avec le transfert d'énergie le plus important se révèle être efficace pour les principaux types d'absorbeurs énergétiques. En dépit de la structure topologique similaire, les structures "optimales" amplitudes-phases pour différents types d'absorbeurs démontrent d'importantes différences fournissant plus ou moins une proximité à une structure caractéristique pour le battement avec le transfert d'énergie le plus intensif. Il faut souligner que la conception de courbes amplitudes-phases désirées permet de fournir les paramètres optimaux de l'absorbeur. Ensuite, comme l'expression analytique semble être très bonne quand le pompage énergétique se produit, il est possible d'analyser l'influence des paramètres sur l'efficacité du pompage. L'objectif est d'optimiser les paramètres pour obtenir la meilleure efficacité. Les paramètres de la structure primaire sont souvent donnés. L'objectif est alors de concevoir les paramètres de la structure ajoutée non linéaire pour obtenir la meilleure atténuation des vibrations de la structure primaire. C'est pourquoi le rôle des paramètres peut être analysé. Puisque $H(t)$ représente l'énergie il est possible d'observer analytiquement le comportement de $H(t)$ si les paramètres changent. Dans la région du pompage les résultats analytiques sont en bon accord avec les données des simulations numériques (contrairement aux autres types de mouvement). Une telle coïncidence doit donc être considérée comme un signe intéressant de proximité de design optimal. De plus, une vérification expérimentale a confirmé l'expression analytique obtenue avec une bonne précision.

Il reste maintenant à optimiser le phénomène de pompage énergétique.

5.2 Modes normaux non linéaires multiples

Dans un deuxième temps, il reste donc à essayer d'optimiser le phénomène de pompage énergétique, c'est ce que j'ai proposé avec l'ajout d'absorbeurs non linéaires multiples. Le pompage énergétique correspond au contrôle de la structure linéaire en la couplant à une structure non linéaire passive adaptée ([Gendelman et al., 2001, Vakakis et Gendelman, 2001, Gendelman, 2001, Gendelman et al., 2003, Vakakis et al., 2003]). Cependant, comme décrit dans [Vakakis, 2001], le pompage énergétique se produit au-dessus d'une valeur spécifique du niveau d'énergie initial : donc lorsque l'énergie injectée est trop faible le transfert d'énergie de la structure linéaire vers la structure non linéaire n'apparaît pas. Lorsque le pompage énergétique se produit, l'énergie décroît dans la structure linéaire : tout d'abord ceci est dû au phénomène efficace non linéaire transitoire de résonance, et ensuite ceci est dû uniquement à la dissipation par amortissement naturel (moins efficace) quand l'énergie résiduelle est trop faible dans le système couplé. C'est pour cette raison que l'on se propose d'utiliser plusieurs modes non linéaires pour agrandir l'intervalle d'énergie menant à l'activation du pompage énergétique. Les résultats qui suivent ont fait l'objet d'une publication dans [Gourdon et Lamarque, 2005a].

Dans les précédentes études sur le pompage énergétique ([Gendelman, 2001] mais aussi dans les papiers [Vakakis et al., 2003, Vakakis et al., 1996, McFarland et al., 2002a]), une attache essentiellement non linéaire a été étudiée comme illustré sur la Figure 5.28. Les équations régissant

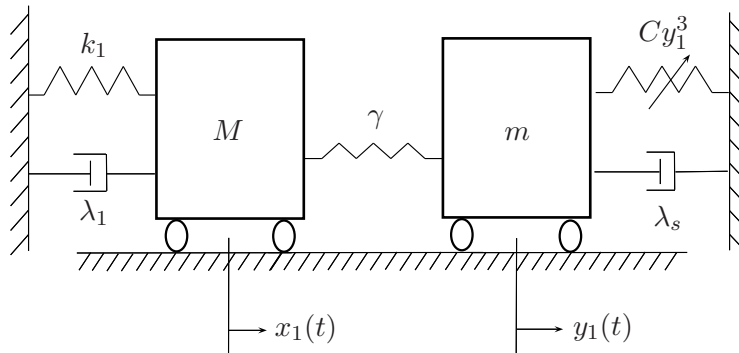


FIG. 5.28 – Système considéré avec un mode normal non linéaire.

un tel système sont :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 + \lambda_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + \gamma(x_1 - y_1) = 0, \\ m\ddot{y}_1 + \lambda_s\dot{y}_1 + Cy_1^3 + \gamma(y_1 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (5.31)$$

La structure linéaire est excitée par une impulsion, donc on considère des oscillations libres des structures avec les conditions initiales : $x_1(0) = y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$ et $\dot{x}_1(0) = \sqrt{2h}$ où h est l'énergie du système à $t = 0^+$. Dans ce système, le pompage énergétique se produit au-dessus d'une valeur spécifique du niveau d'énergie. En effet, en considérant le Système (5.31) avec les paramètres suivants $k_1 = 4000 \text{ N.m}^{-1}$, $\lambda_1 = 100 \text{ N.s.m}^{-1}$, $M = 4000 \text{ kg}$, $\gamma = 1000 \text{ N.m}^{-1}$, $m = 4000 \text{ kg}$, $\lambda_s = 300 \text{ N.s.m}^{-1}$, $C = 600 \text{ N.m}^{-3}$, le pompage énergétique se produit pour $h = 14$ comme montré sur la Figure 5.29 dans le cas *c*) où la résonance de l'oscillateur non linéaire ($y_1(t)$) se produit ce qui induit une atténuation de la réponse de l'oscillateur linéaire ($x_1(t)$) sur le tracé *d*). Quand l'énergie initiale est trop faible, par exemple pour $h = 5$, il n'y a pas de résonance de l'attache non linéaire comme montré dans le cas *a*) de la Figure 5.29.

Pour observer des captures de résonances qui se produisent, on utilise par la suite des analyses temps-fréquences, que ce soit grâce à la Transformée d'Hilbert classique (pour calculer

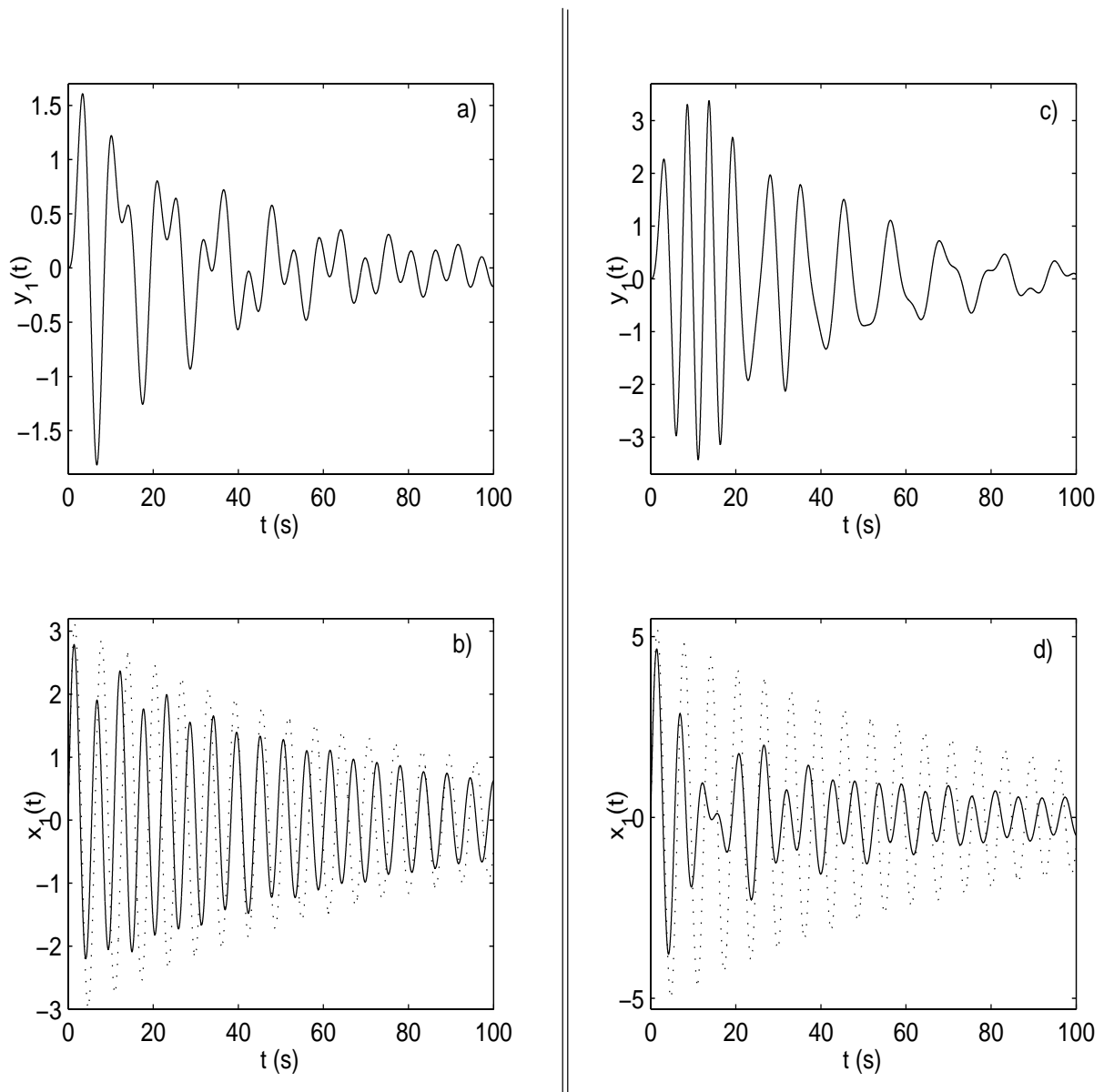


FIG. 5.29 – Capture de résonance au-dessus d’une valeur spécifique de l’énergie injectée h . Avec $h = 5$, a) oscillations libres amorties de l’oscillateur non linéaire $y_1(t)$ et b) le pompage énergétique ne se produit pas pour l’oscillateur linéaire $x_1(t)$: la ligne pointillée - - représente le déplacement de l’oscillateur linéaire sans couplage et la ligne solide - représente le déplacement de l’oscillateur linéaire avec couplage. Avec $h = 14$, il y a c) résonance de l’oscillateur non linéaire $y_1(t)$ et b) le pompage énergétique se produit : la ligne pointillée - - représente le déplacement de l’oscillateur linéaire sans couplage et la ligne solide - représente le déplacement de l’oscillateur linéaire avec couplage.

le fréquence instantanée notée IF) ou à des analyses en ondelettes car les résonances entre le mode linéaire et le mode normal non linéaire se produisent pendant le régime transitoire. En considérant le Système (5.31) avec les valeurs précédentes des paramètres, on peut ainsi analyser la fréquence instantanée (IF) quand le pompage énergétique se produit ($h = 14$) comme montré sur la Figure 5.30.

Clairement, quand le pompage énergétique se produit, il apparaît que pendant 20 s, une capture de résonance se produit avec l’oscillateur non linéaire : la fréquence instantanée de $y_1(t)$

coupe la fréquence linéaire et devient identique à la fréquence instantanée du mode linéaire comme illustré sur la Figure 5.30 (le transfert d'énergie se produit). Cependant, ce phénomène se produit pour un haut niveau d'énergie ($h = 14$) car lorsque l'énergie initiale est trop faible ($h = 5$), le phénomène ne se produit pas ; c'est pourquoi des modes normaux non linéaires multiples peuvent être utilisés pour obtenir une étendue plus large d'énergie où le phénomène de pompage se produit.

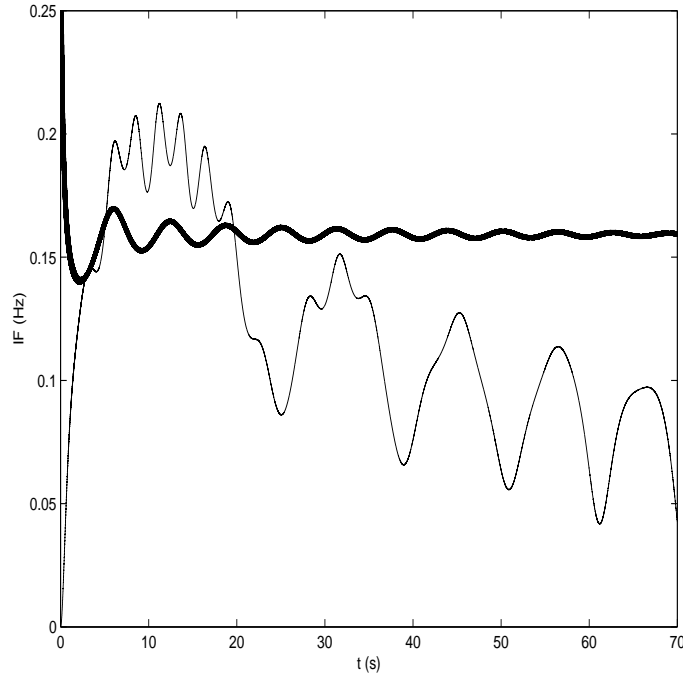


FIG. 5.30 – Capture de résonance du mode normal non linéaire $h = 14$ étudiée avec une analyse Temps-Fréquences : l'IF de $y_1(t)$ est représentée par une ligne solide – et l'IF du mode linéaire est représentée par une ligne solide plus épaisse.

5.2.1 Etudes théoriques

L'utilisation des modes normaux non linéaires est ainsi étudiée en concevant une attache non linéaire composée de plusieurs oscillateurs non linéaires. C'est pourquoi un système à quatre degrés de liberté composé d'une structure linéaire faiblement couplée à une structure non linéaire est considérée comme montré sur la Figure 5.31. Le système non linéaire n'est pas relié au sol. Ainsi, il peut être facilement ajouté à la structure non linéaire en pratique pour des structures réelles.

Selon la deuxième loi de Newton du mouvement :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 + \lambda_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + \gamma(x_1 - y_1) = 0, \\ m_1\ddot{y}_1 + \lambda_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + C_1(y_1 - y_2)^3 + \gamma(y_1 - x_1) = 0, \\ m_2\ddot{y}_2 + \lambda_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \lambda_3(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + C_1(y_2 - y_1)^3 + C_2(y_2 - y_3)^3 = 0, \\ m_3\ddot{y}_3 + \lambda_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + C_2(y_3 - y_2)^3 = 0. \end{cases} \quad (5.32)$$

La structure linéaire est excitée par une impulsion donc on considère des oscillations libres des structures avec les conditions initiales : $x_1(0) = y_1(0) = \dot{y}_1(0) = y_2(0) = \dot{y}_2(0) = y_3(0) = \dot{y}_3(0) = 0$ et $\dot{x}_1(0) = \sqrt{2h}$ où h est l'énergie du système à $t = 0^+$. La structure non linéaire découplée (attachée à la structure linéaire) possède trois modes normaux non linéaires [Vakakis et al., 1996] (pour $\gamma = 0$) : le premier correspond à un mode de corps rigide du système non linéaire découplé,

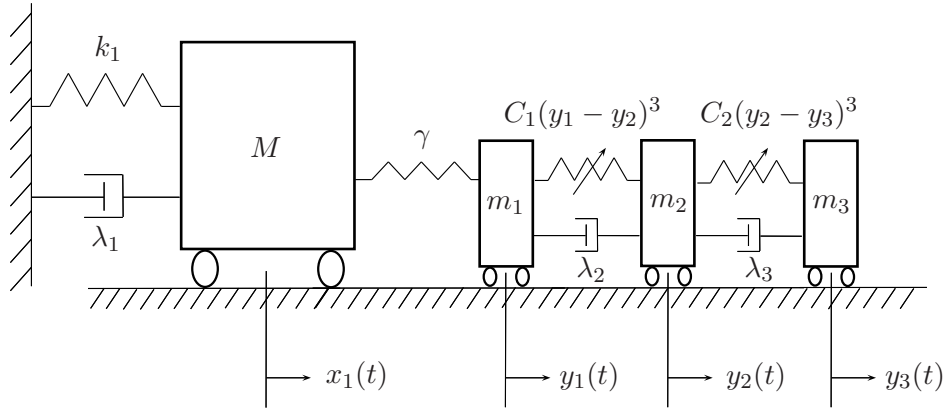


FIG. 5.31 – Système considéré avec des oscillateurs non linéaires multiples.

il y a un mode normal non linéaire en phase, $y_2(t) - y_3(t) = y_1(t) - y_2(t)$, et il y a enfin un mode normal non linéaire en anti-phase $y_2(t) - y_3(t) = -(y_1(t) - y_2(t))$. Ainsi, les coordonnées modales non linéaires $w_1(t)$, $w_2(t)$ et $w_3(t)$ qui correspondent aux modes normaux non linéaires de la structure non linéaire découplée peuvent être introduits :

$$\begin{cases} w_1(t) &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t), \\ w_2(t) &= (y_2(t) - y_3(t)) - (y_1(t) - y_2(t)) = 2y_2(t) - y_1(t) - y_3(t), \\ w_3(t) &= (y_2(t) - y_3(t)) + (y_1(t) - y_2(t)) = y_1(t) - y_3(t). \end{cases} \quad (5.33)$$

Quand le couplage est introduit, le système possède des modes normaux non linéaires qui sont des perturbations des modes normaux non linéaires précédents. Quand la fréquence d'un mode normal non linéaire devient identique à la fréquence naturelle du mode linéaire, des résonances internes (et des bifurcations des modes normaux non linéaires) peuvent se produire et le pompage énergétique peut avoir lieu [Vakakis et al., 2003]. En concevant habilement les oscillateurs non linéaires, il est possible d'obtenir des modes normaux non linéaires qui croisent la fréquence linéaire pour différents niveaux d'énergie. Ce point est illustré schématiquement sur la Figure 5.32. Ainsi, le transfert d'énergie aura lieu entre le mode linéaire et tout d'abord avec un des

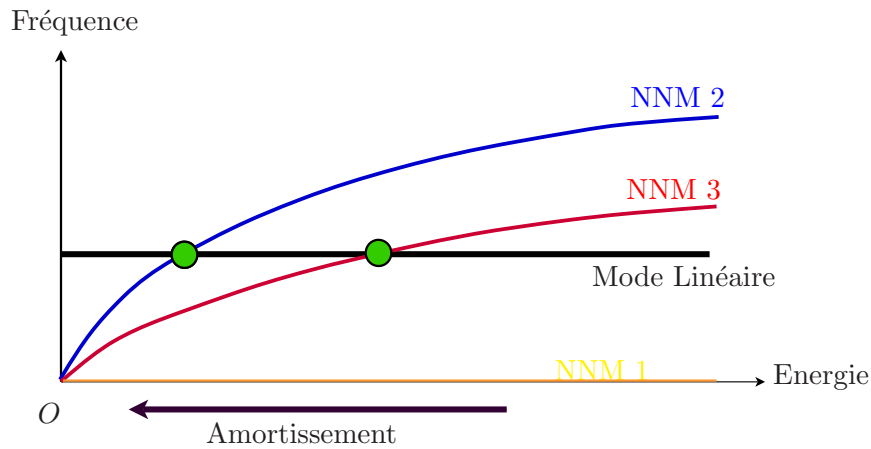


FIG. 5.32 – Principe des modes normaux non linéaires multiples.

modes normaux non linéaires et lorsque l'énergie diminuera (en raison de la dissipation par amortissement ou si l'énergie initiale injectée est faible), le transfert d'énergie aura toujours

lieu mais avec un autre mode normal non linéaire. Pour observer ce phénomène, une analyse temps-fréquences doit être réalisée puisque les résonances entre le mode linéaire et les modes normaux non linéaires se produisent pendant les réponses transitoires. En considérant le Système (5.32) avec les paramètres suivants $k_1 = 4000 \text{ N.m}^{-1}$, $\lambda_1 = 100 \text{ N.s.m}^{-1}$, $M = 4000 \text{ kg}$, $\gamma = 1000 \text{ N.m}^{-1}$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1333 \text{ kg}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 100 \text{ N.s.m}^{-1}$, $C_1 = 600 \text{ N.m}^{-3}$, $C_2 = 120 \text{ N.m}^{-3}$, on peut analyser les fréquences instantanées des modes normaux non linéaires. Le ratio d'amortissement visqueux de la structure linéaire est ainsi de 2.5%, ce qui est proche du ratio d'amortissement des structures en Génie Civil. Il faut noter que la masse totale ajoutée (3 fois 1333 kg) est la même que celle de la précédente simulation ($m = 4000\text{kg}$) et le ratio d'amortissement pour le système non linéaire est aussi le même ($\frac{\lambda_2}{m_2} = \frac{\lambda_3}{m_3} = \frac{\lambda_s}{m}$).

Tout d'abord, si on considère un haut niveau d'énergie initiale $h = 20$, alors dans ce cas, comme montré sur la Figure 5.33, une capture de résonance se produit avec le troisième mode normal non linéaire $w_3(t)$ (la fréquence instantanée de $w_3(t)$ devient identique à la fréquence instantanée du mode linéaire pendant 40s comme montré sur la Figure 5.33 a)). Ainsi, il y a résonance du troisième mode normal non linéaire comme montré sur la Figure 5.33 b) ce qui produit une atténuation des vibrations linéaires comme montré sur la Figure 5.33 c). Dans ce cas, il n'y a pas de capture de résonance avec le mode normal non linéaire $w_2(t)$ puisque sa fréquence instantanée n'est pas capturée par la fréquence instantanée du mode linéaire comme montré sur la Figure Figure 5.33 a) (l'énergie injectée est trop élevée et le phénomène de pompage énergétique est moins prononcé).

Deuxièmement, si on considère une énergie initiale plus faible $h = 1.6$, alors comme montré sur la Figure 5.34, une capture de résonance se produit avec le deuxième mode normal non linéaire $w_2(t)$ (la fréquence instantanée de $w_2(t)$ devient identique à la fréquence instantanée du mode linéaire, comme montré sur la Figure 5.34 a) pendant 40s). Ainsi, il y a résonance du mode normal non linéaire comme montré sur la Figure 5.34 b) ce qui produit une atténuation des vibrations linéaires comme montré sur la Figure 5.34 c). Dans ce cas, il n'y a pas de capture de résonance avec le mode normal non linéaire $w_3(t)$ puisque sa fréquence instantanée est sous la fréquence instantanée du mode linéaire comme montré sur la Figure 5.34 a) (l'énergie injectée est trop faible).

Il faut souligner qu'il n'était pas possible d'obtenir du pompage énergétique pour ce faible niveau d'énergie dans le cas d'un système non linéaire à un degré de liberté comme montré auparavant avec les mêmes paramètres. Ainsi, l'utilisation des modes normaux multiples permet d'étendre la plage d'énergie dans laquelle le pompage énergétique se produit. Les modes normaux non linéaires rentrent en résonance selon le niveau d'énergie présent dans le système.

Entre cette large étendue d'énergie, il existe des captures de résonances avec les deux modes normaux non linéaires $w_2(t)$ et $w_3(t)$. En effet, pour $h = 5.2$, comme montré sur la Figure 5.35, tout d'abord pour $t < 20\text{s}$ il y a résonance du mode normal non linéaire $w_3(t)$ comme montré sur la Figure 5.35 b) (et donc une atténuation des vibrations linéaires comme montré sur la Figure 5.35 d)) puisque l'IF de $w_3(t)$ devient identique à la fréquence linéaire comme montré sur la Figure 5.35 a). Mais après $t = 20\text{s}$, comme l'énergie de l'oscillateur linéaire décroît, la capture de résonance de $w_3(t)$ est finie (le mode normal non linéaire est détruit par passage à travers la bifurcation comme souligné dans le quatrième chapitre de cette thèse). Cependant, grâce à la conception des modes normaux non linéaires multiples, la résonance du mode normal non linéaire $w_2(t)$ se produit comme montré sur la Figure 5.35 c) puisque l'énergie est plus faible et l'IF de $w_2(t)$ devient identique en moyenne à la fréquence linéaire comme montré sur la Figure

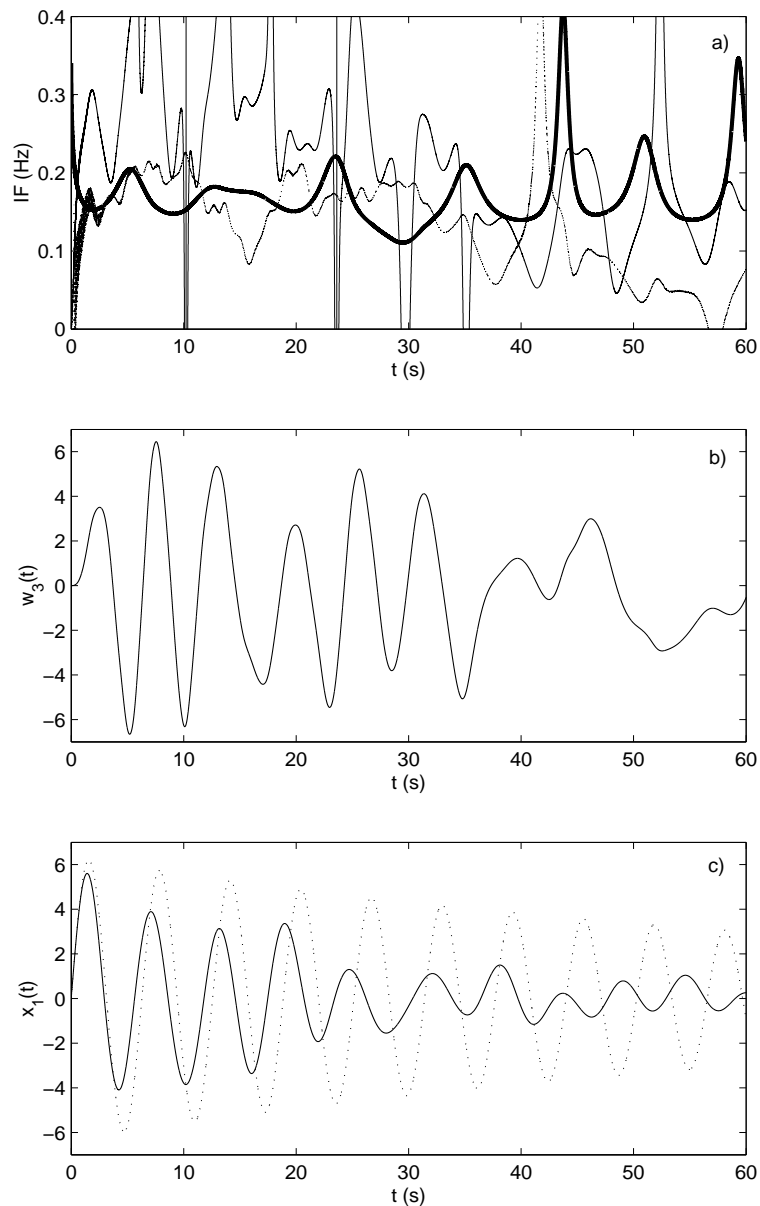


FIG. 5.33 – Capture de résonance du mode normal non linéaire $w_3(t)$ avec $h = 20$. a) Une analyse temps-fréquences est considérée : l'IF de $w_2(t)$ est représentée par une ligne solide -, l'IF de $w_3(t)$ est représentée par une fine ligne pointillée - - et l'IF de l'oscillateur linéaire est représentée par une ligne solide épaisse —. b) Résonance de $w_3(t)$. c) Vibrations de l'oscillateur linéaire (la ligne pointillée - - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire sans couplage et la ligne solide - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire avec couplage).

5.35 a). Ainsi, les vibrations de l'oscillateur linéaire sont encore atténuées après $t = 20$ s comme montré sur la Figure 5.35 d). Ainsi, le phénomène de pompage énergétique est plus efficace.

Ce point est vérifié et mieux visualisé grâce à une analyse en ondelettes des signaux comme montré sur la Figure 5.36 sur laquelle on peut voir la résonance de $w_3(t)$ dans un premier temps et ensuite celle de $w_2(t)$ ce qui permet une meilleure atténuation des vibrations de l'oscillateur linéaire. Il faut aussi souligner que sur les Figures 5.36 a) et b) se trouve une fréquence additionnelle plus basse (0.036Hz) indiquant la présence d'un mode essentiellement non linéaire dans le système couplé.

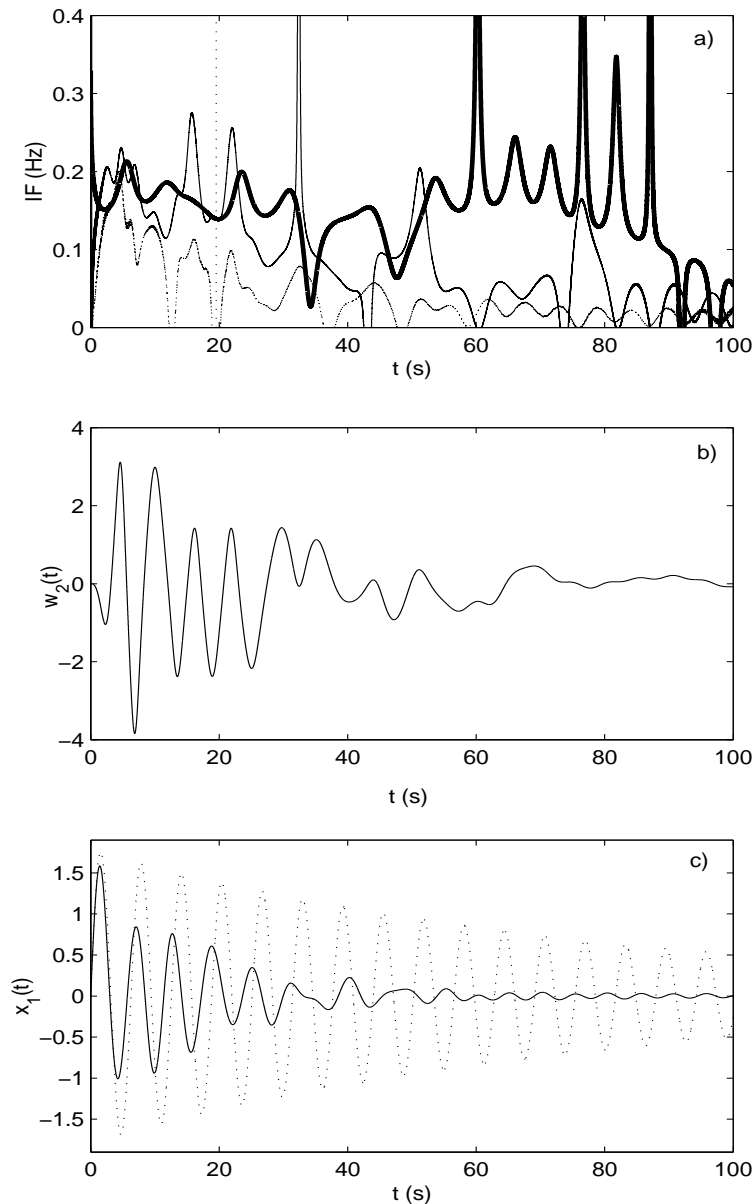


FIG. 5.34 – Capture de résonance du mode normal non linéaire $w_2(t)$ avec $h = 1.6$. a) Une analyse temps-fréquences est considérée : l'IF de $w_2(t)$ est représentée par une ligne solide —, l'IF de $w_3(t)$ est représentée par une fine ligne pointillée - - et l'IF de l'oscillateur linéaire est représentée par une ligne solide épaisse ——. b) Résonance de $w_2(t)$. c) Vibrations de l'oscillateur linéaire (la ligne pointillée - - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire sans couplage et la ligne solide — représente le déplacement de l'oscillateur linéaire avec couplage).

Le pompage énergétique a donc été optimisé grâce à l'utilisation des modes normaux non linéaires. Ainsi, en concevant habilement la structure linéaire, l'étendue d'énergie dans laquelle le phénomène se produit peut être élargie. Le calcul des fréquences instantanées grâce à la Transformée d'Hilbert ou grâce aux ondelettes souligne les phénomènes de captures de résonances avec les différents modes normaux non linéaires rentrant en résonance pour différents niveaux d'énergie. L'utilisation des modes normaux non linéaires multiples permet l'apparition de pompage énergétique pour des énergies plus faibles. Les différents modes normaux non linéaires

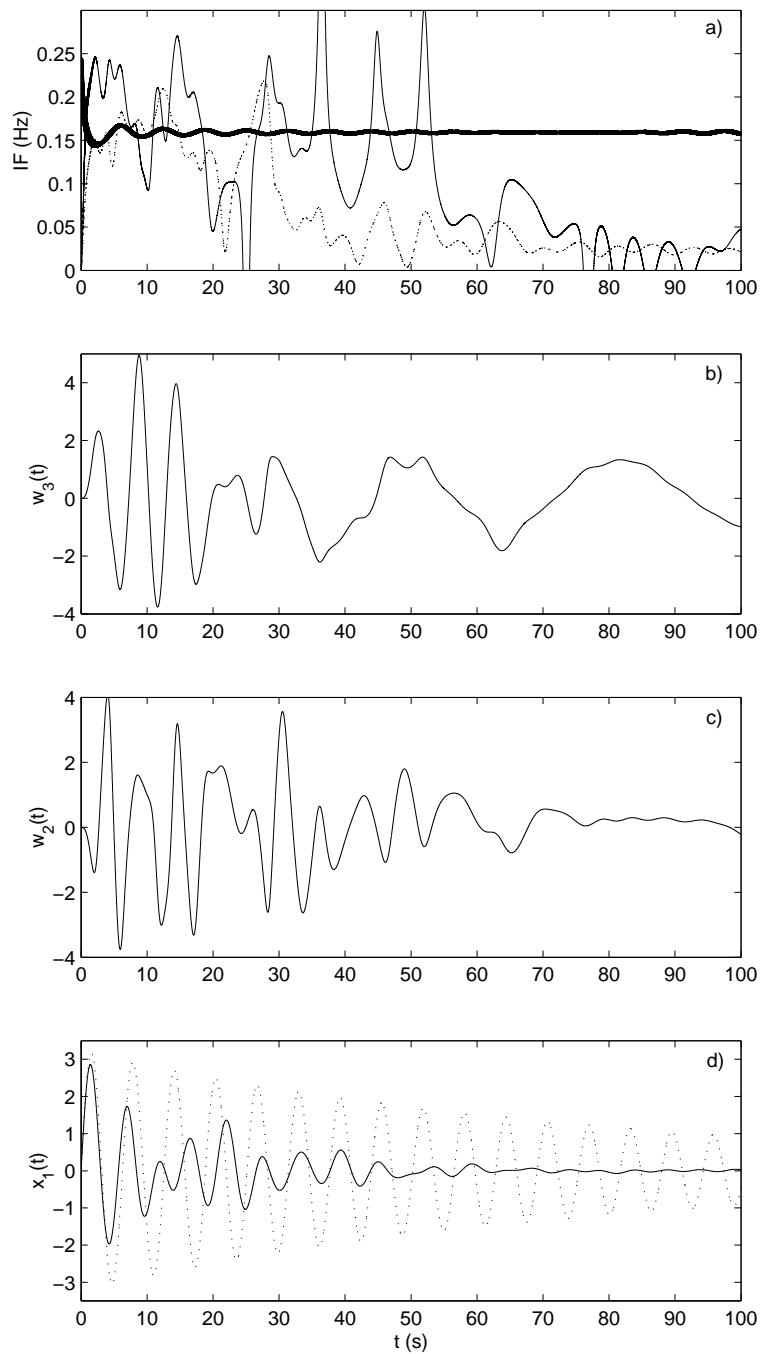


FIG. 5.35 – Capture de résonance des deux modes normaux non linéaires $w_2(t)$ et $w_3(t)$ avec $h = 5.2$. *a*) Une analyse temps-fréquences est considérée : l'IF de $w_2(t)$ est représentée par une ligne solide -, l'IF de $w_3(t)$ est représentée par une fine ligne pointillée - - et l'IF de l'oscillateur linéaire est représentée par une ligne solide épaisse —. *b*) Résonance de $w_3(t)$. *c*) Résonance de $w_2(t)$. *d*) Vibrations de l'oscillateur linéaire (la ligne pointillée - - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire sans couplage et la ligne solide - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire avec couplage).

rentrent en résonance en fonction du niveau d'énergie. L'efficacité du pompage énergétique est ainsi améliorée en augmentant cette étendue d'énergie où le pompage se produit. Il reste cependant à vérifier expérimentalement cette possibilité en vue d'une application pratique réelle. On peut également souligner qu'avec un seul couplage cubique on pourrait atténuer plusieurs modes

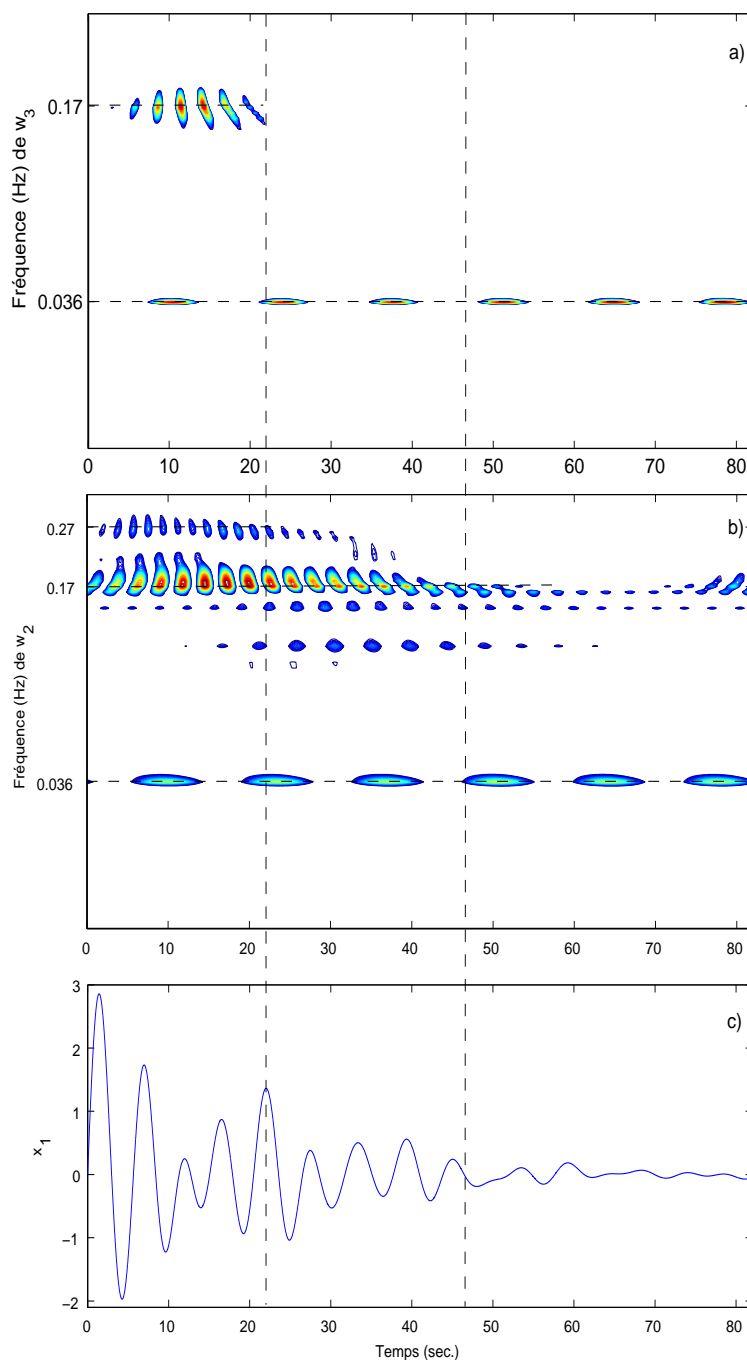


FIG. 5.36 – a) Analyse Temps-Fréquences en ondelettes de $w_3(t)$. b) Analyse Temps-Fréquences en ondelettes de $w_2(t)$. c) Vibrations de l'oscillateur linéaire.

d'une structure primaire en cascade de résonances ce qui n'est pas possible avec un tuned mass damper classique.

5.2.2 Vérifications expérimentales

On s'intéresse maintenant à la faisabilité du contrôle simultané du premier mode d'une structure linéaire au moyen d'absorbeurs non linéaires multiples associés en série. On essaie ainsi de vérifier expérimentalement l'efficacité de l'utilisation de modes non linéaires multiples pour

améliorer l'efficacité du pompage énergétique. La méthodologie basée sur l'analyse des modes normaux non linéaires sous-jacents est ainsi vérifiée avec des données expérimentales.

Dans la présente thèse nous nous sommes déjà intéressés à la faisabilité de la réduction des vibrations induites par les séismes se produisant dans les bâtiments au moyen d'une sous-structure non linéaire (jouant le rôle d'absorbeur énergétique) dont les propriétés mécaniques (masse, inertie) sont relativement légères comparées à celle de la structure primaire maîtresse. Dans toutes les vérifications expérimentales des chapitres précédents, nous avons considéré une structure non linéaire à un degré de liberté attachée en haut d'un modèle de bâtiment (en particulier d'un modèle de bâtiment à quatre étages) pour absorber les vibrations induites par la principale résonance linéaire comme on peut le voir sur la Figure 5.37 a). Par conséquent, le dispositif non

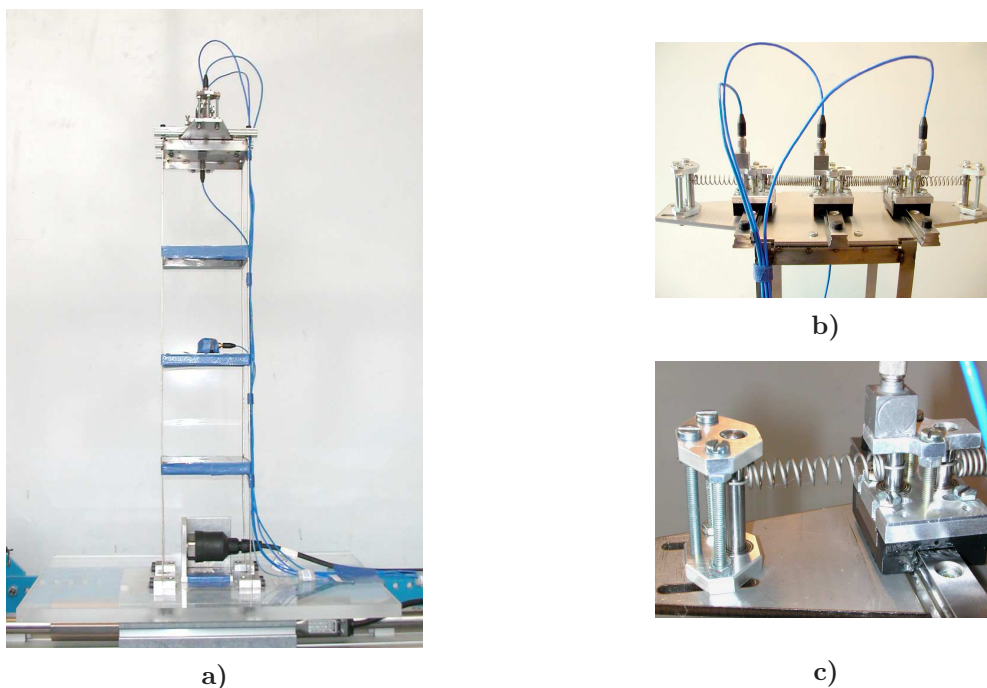


FIG. 5.37 – Modèle de bâtiment à quatre étages avec un double NES attaché sur le dernier étage. a) Vue de face ; b) double NES ; c) zoom sur les ressorts et les glissières.

linéaire réussissait à contrôler passivement le mode fondamental du bâtiment avec succès à la fois pour des régimes stationnaires et transitoires en utilisant le mécanisme de pompage énergétique. Bien qu'efficace, le simple NES possède quelques difficultés pour atténuer le premier pic des oscillations induites par des excitations de faibles durées de type pulse typiquement rencontrées dans les tremblements de terre. Les principales raisons sont les suivantes :

- la capture de résonance avec des NNMS localisés ne peut pas être directement initiée quand la structure non linéaire se trouve initialement au repos ; des orbites de transitions (un phénomène de battements apparaissant) doivent être d'abord excitées avant que le régime de résonance 1 : 1 prenne place ;
- l'énergie du système doit être supérieure à une certaine limite d'activation pour déclencher le pompage énergétique.

Comme nous l'avons vu dans l'étude théorique précédente, une réponse aux problèmes d'efficacité et de design optimal du NES apparaît être nécessaire en vue d'applications et peut être constituée par l'utilisation de modes normaux non linéaires multiples. C'est ainsi que l'on

va considérer un double NES incluant deux oscillateurs essentiellement non linéaires assemblés en série (j'ai alors effectué des vérifications expérimentales sur le modèle de bâtiment réduit à 4 étages en complexifiant le dispositif non linéaire). La principale idée est de déclencher des résonances simultanées avec deux NNMs :

- tout d'abord, pour anticiper l'atténuation du premier pic ;
- deuxièmement, pour accélérer la décroissance des vibrations après le pic.

La conception expérimentale de ce double NES est montrée sur les Figures 5.37 b) et c). Dans cette conception les nonlinéarités sont réalisées géométriquement comme dans les chapitres précédents. Le principe d'Hamilton est utilisé pour dériver le modèle dynamique réduit du double NES non linéaire en liaison avec la structure linéaire (représentation sur les Figures 5.38 et 5.39). Ici la contribution modale du bâtiment est réduite à un simple mode. Des évidences

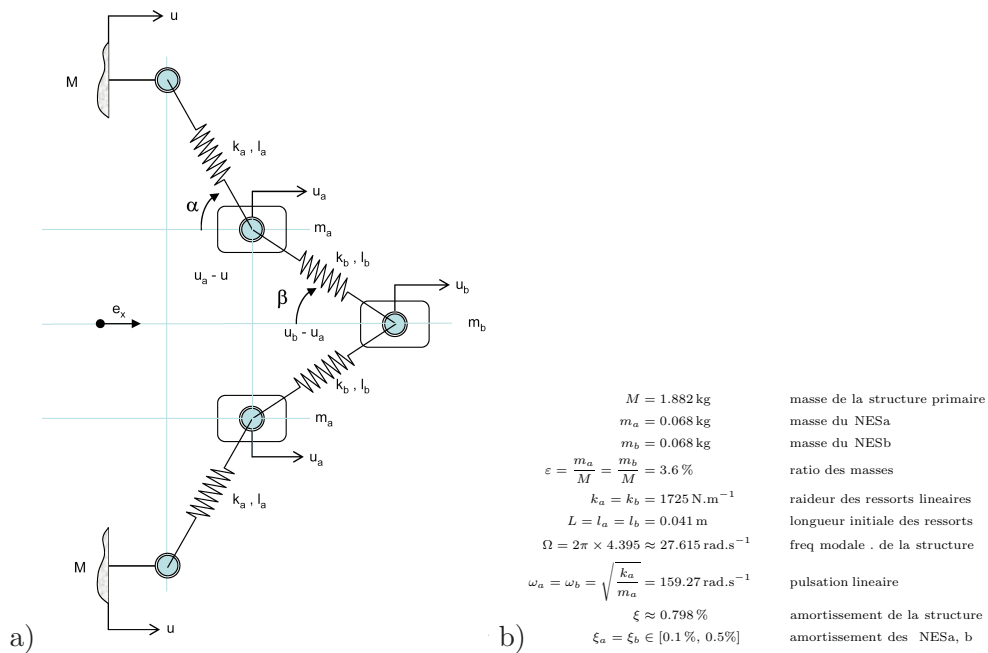


FIG. 5.38 – Dispositif du double NES. a) Schéma du comportement non linéaire. b) Glossaire.

numériques et expérimentales permettent d'étudier qualitativement les mécanismes de pompage énergétique et le rôle relatif des deux modes normaux non linéaires sous-jacents. L'influence de l'amortissement du NES est en particulier analysée pour un jeu de paramètres conçus (raideur non linéaire). Une comparaison des fonctions de réponses en fréquences avec celles d'un TMD de Frahm standard est aussi réalisée expérimentalement pour montrer l'efficacité globale du dispositif à double NES. Les cartographies en ondelettes des profils d'accélération et de déplacements sont analysées pour suivre comment les modes normaux non linéaires dissipent simultanément ou séquentiellement l'énergie du système linéaire.

En considérant le comportement non linéaire du double NES décrit par le schéma 5.38 a), un modèle réduit à trois degrés de liberté dessiné sur la Figure 5.39 est obtenu en appliquant le principe d'Hamilton au système incluant la structure de bâtiment maître (M, C, K), le NESa ($2m_a, c_a, k_a$) et le NESb (m_b, c_b, k_b). Les propriétés physiques et géométriques des masses m_a et m_b , des raideurs des ressorts k_a et k_b et des longueurs initiales l_a et l_b sont telles que les deux masses m_a sont caractérisées par un déplacement identique à savoir $u_a(t)$.

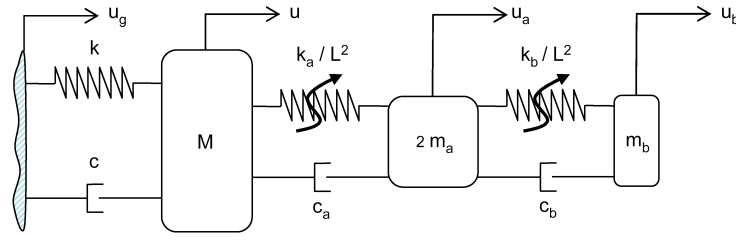


FIG. 5.39 – Système masse-ressort non linéaire réduit à trois degrés de liberté.

Un incrément d'énergie cinétique du système global peut être développé :

$$\begin{aligned}\delta T &= \delta T_M + 2\delta T_{m_a} + \delta T_{m_b}, \\ &= M(\dot{u} + \dot{u}_g)\delta\dot{u} + 2m_a(\dot{u}_a + \dot{u}_g)\delta\dot{u}_a + m_b(\dot{u}_b + \dot{u}_g)\delta\dot{u}_b,\end{aligned}\quad (5.34)$$

où u_g représente le mouvement de la table vibrante.

Soit $U_a = (u_a - u)$ et $U_b = (u_b - u_a)$ les déplacements internes respectivement entre les masses M et m_a et entre m_b et m_a . L'énergie potentielle incrémentale est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \delta\Pi_M + 2\delta\Pi_{m_a} + 2\delta\Pi_{m_b}, \\ &= Ku\delta u + 2k_a(\sqrt{l_a^2 + U_a^2} - l_a)\cos\alpha\delta U_a + 2k_b(\sqrt{l_b^2 + U_b^2} - l_b)\cos\beta\delta U_b, \\ &= Ku\delta u + 2k_a\left(1 - \frac{l_a}{\sqrt{l_a^2 + U_a^2}}\right)U_a\delta U_a + 2k_b\left(1 - \frac{l_b}{\sqrt{l_b^2 + U_b^2}}\right)U_b\delta U_b.\end{aligned}\quad (5.35)$$

Le travail incrémental des forces de dissipation δW_{nc} peut être exprimé par :

$$\begin{aligned}\delta W_{nc} &= \delta W_{nc}(M) + 2\delta W_{nc}(m_a) + 2\delta W_{nc}(m_b), \\ &= C\dot{u}\delta\dot{u} + c_a\dot{U}_a\delta\dot{U}_a + c_b\dot{U}_b\delta\dot{U}_b.\end{aligned}\quad (5.36)$$

Les équations d'Hamilton qui peuvent être simplifiées ici comme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}}\right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \frac{\partial W_{nc}}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \quad \forall \lambda \in \{u, u_a, u_b\}, \quad (5.37)$$

fournissent les équations du mouvement suivantes pour le système réduit à trois degrés de liberté :

$$\left\{ \begin{array}{l} M\ddot{u} + C\dot{u} + c_a(\dot{u} - \dot{u}_a) + Ku + 2k_a\left(1 - \frac{l_a}{\sqrt{l_a^2 + (u_a - u)^2}}\right)(u - u_a) = -M\ddot{u}_g, \\ 2m_a\ddot{u}_a + c_a(\dot{u}_a - \dot{u}) + c_b(\dot{u}_a - \dot{u}_b) + 2k_a\left(1 - \frac{l_a}{\sqrt{l_a^2 + (u_a - u)^2}}\right)(u_a - u) \\ \quad + 2k_b\left(1 - \frac{l_b}{\sqrt{l_b^2 + (u_b - u_a)^2}}\right)(u_a - u_b) = -2m_a\ddot{u}_g, \\ m_b\ddot{u}_b + c_b(\dot{u}_b - \dot{u}_a) + 2k_b\left(1 - \frac{l_b}{\sqrt{l_b^2 + (u_b - u_a)^2}}\right)(u_b - u_a) = -m_b\ddot{u}_g. \end{array} \right. \quad (5.38)$$

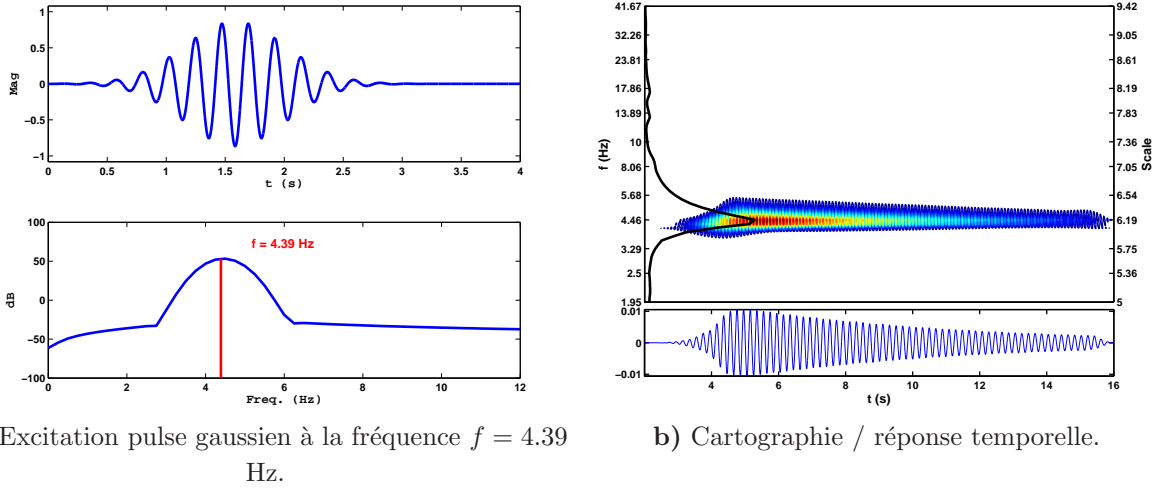


FIG. 5.40 – Réponse linéaire (sans NES) du bâtiment à quatre étages : a) excitation de la table vibrante ; b) analyse en ondelettes de la réponse du dernier étage.

En supposant que les propriétés suivantes aient lieu pour les masses $m_a = m_b$, les raideurs $k_a = k_b$, les longueurs initiales $l_a = l_b = L$ et en considérant des déplacements internes relativement faibles $(u_a - u) = \mathcal{O}(L)$ et $(u_b - u_a) = \mathcal{O}(L)$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} M\ddot{u} + C\dot{u} + c_a(\dot{u} - \dot{u}_a) + Ku + \frac{k_a}{L^2}(u - u_a)^3 = -M\ddot{u}_g + \mathcal{O}\left(\frac{u - u_a}{L}\right)^5, \\ 2m_a\ddot{u}_a + c_a(2\dot{u}_a - \dot{u} - \dot{u}_b) + \frac{k_a}{L^2}((u_a - u)^3 + (u_a - u_b)^3) = -2m_a\ddot{u}_g \\ \quad + \max\left\{\mathcal{O}\left(\frac{u - u_a}{L}\right)^5, \mathcal{O}\left(\frac{u_b - u_a}{L}\right)^5\right\}, \\ m_b\ddot{u}_b + c_b(\dot{u}_b - \dot{u}_a) + \frac{k_b}{L^2}(u_b - u_a)^3 = -m_b\ddot{u}_g + \mathcal{O}\left(\frac{u_b - u_a}{L}\right)^5. \end{array} \right. \quad (5.39)$$

Maintenant, soit $\Omega^2 = \frac{K}{M}$, $\xi = \frac{C}{2M\Omega}$, $\omega_a^2 = \omega_b^2 = \frac{k_a}{m_a} = \frac{k_b}{m_b}$, $\xi_a = \xi_b = \frac{c_a}{2m_a\omega_a} = \frac{c_b}{2m_b\omega_b}$ et $\varepsilon = \frac{m_a}{M} = \frac{m_b}{M}$, on obtient alors finalement un jeu d'équations dynamiques adimensionnelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} + 2\xi\Omega\dot{u} + 2\xi_a\omega_a\varepsilon(\dot{u} - \dot{u}_a) + \Omega^2u + \varepsilon\frac{\omega_a^2}{L^2}(u - u_a)^3 \simeq -\ddot{u}_g, \\ \ddot{u}_a + 2\xi_a\omega_a(\dot{u}_a - \frac{1}{2}(\dot{u} + \dot{u}_b)) + \frac{\omega_a^2}{2L^2}((u_a - u)^3 + (u_a - u_b)^3) \simeq -\ddot{u}_g, \\ \ddot{u}_b + 2\xi_b\omega_b(\dot{u}_b - \dot{u}_a) + \frac{\omega_b}{L^2}(u_b - u_a)^3 \simeq -\ddot{u}_g. \end{array} \right. \quad (5.40)$$

Les raideurs $k_a = k_b = 1725 \text{ N.m}^{-1}$ des ressorts linéaires ont été calibrées pour fournir un pompage énergétique efficace pour une configuration de NES simple et fournissent le meilleur compromis disponible pour un ratio des masses $\varepsilon \simeq 3.6\%$. Les valeurs numériques des autres paramètres physiques sont données dans le glossaire 5.38 b).

Des tests numériques et expérimentaux sont utilisés pour mettre en évidence comment le double NES atténue le premier mode $f = 4.39$ Hz du modèle de bâtiment. Les résultats numériques sont basés sur l'intégration des Equations dynamiques (5.40) au moyen de schémas de Runge-Kutta. Des résultats expérimentaux sont obtenus à la fois pour des pulses (voir Figure 5.40 a)) et du forcing sinusoïdal. Une analyse en ondelettes est également utilisée pour rechercher les changements de fréquences instantanées comme montré sur la Figure 5.40 b). La densité de pouvoir spectral est éventuellement superposée verticalement sur les cartographies pour aider à distinguer entre l'information à faible énergie et l'information importante. Une comparaison des réponses linéaires (sans NES) et non linéaires (avec NES) est réalisée quand cela est possible.

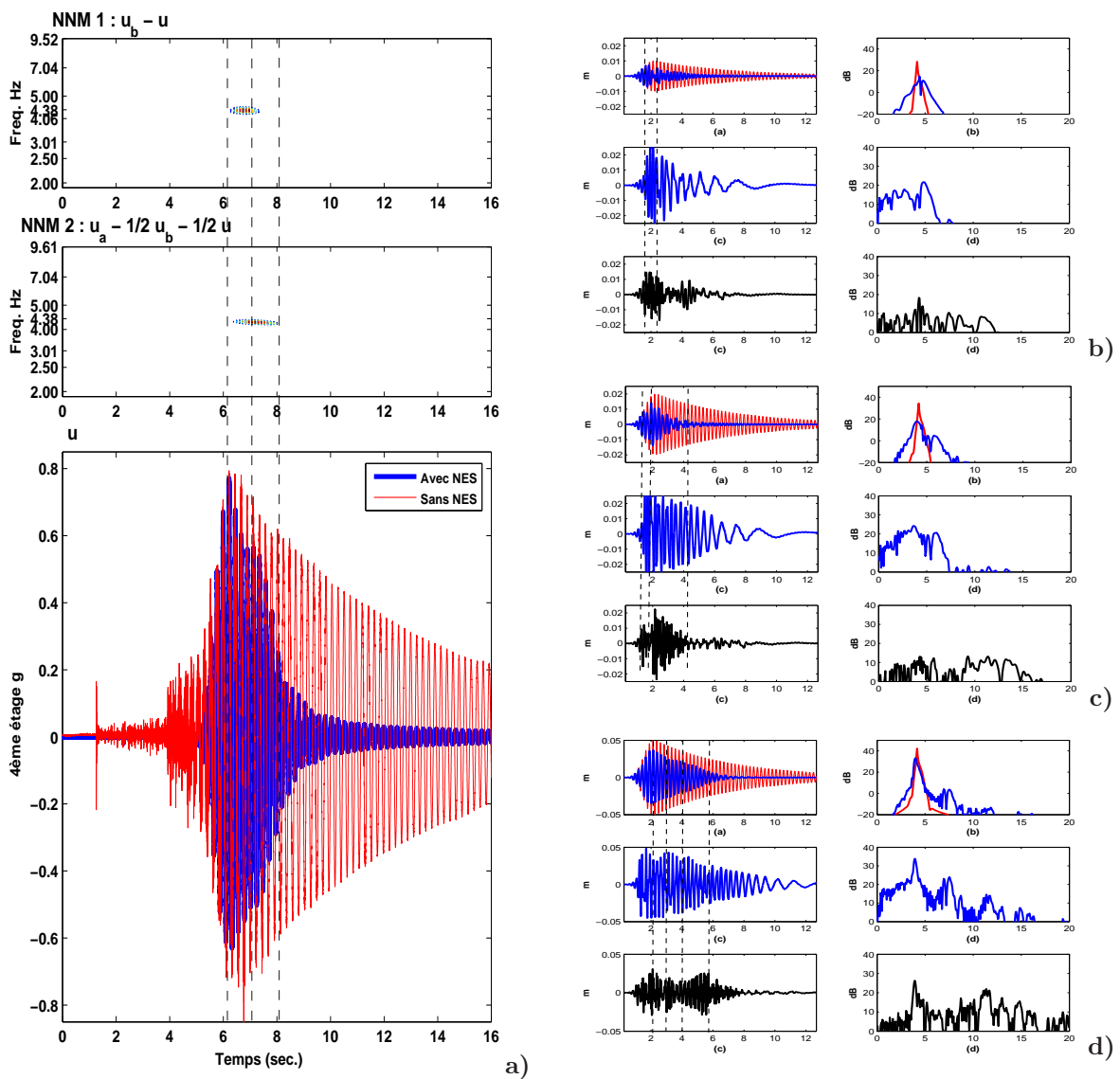


FIG. 5.41 – Atténuation des vibrations induites par une excitation de type pulse gaussien à $f = 4.39$ Hz : a) rôle simultané des NNMs; b-d) comparaison entre les mouvements linéaires et non linéaires : haut-gauche) réponse du dernier étage u , milieu-gauche) réponse du NNM 1 $u_b - u$, bas-gauche) réponse du NNM2 $u_a - \frac{1}{2}u_b - \frac{1}{2}u$, droite) densités de pouvoir spectral correspondantes; b) 0.08 g, c) 0.15 g et c) 0.3 g.

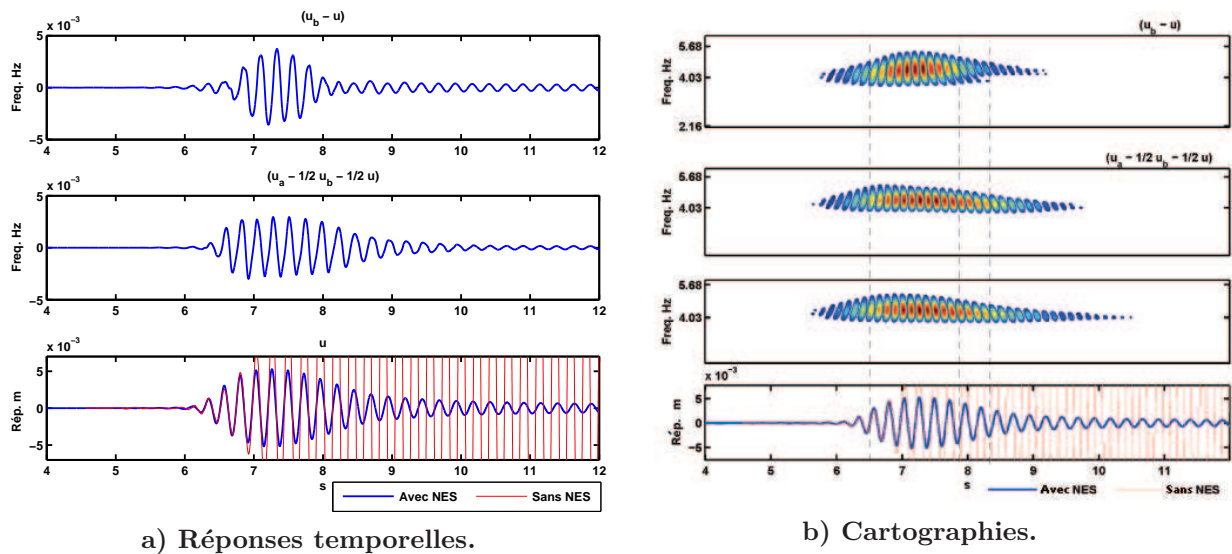


FIG. 5.42 – Comparaison des réponses linéaires (sans NES) et non linéaires (avec NES) du bâtiment à quatre étages forcé avec une excitation de type pulse 0.07 g à $f = 4.39\text{ Hz}$.

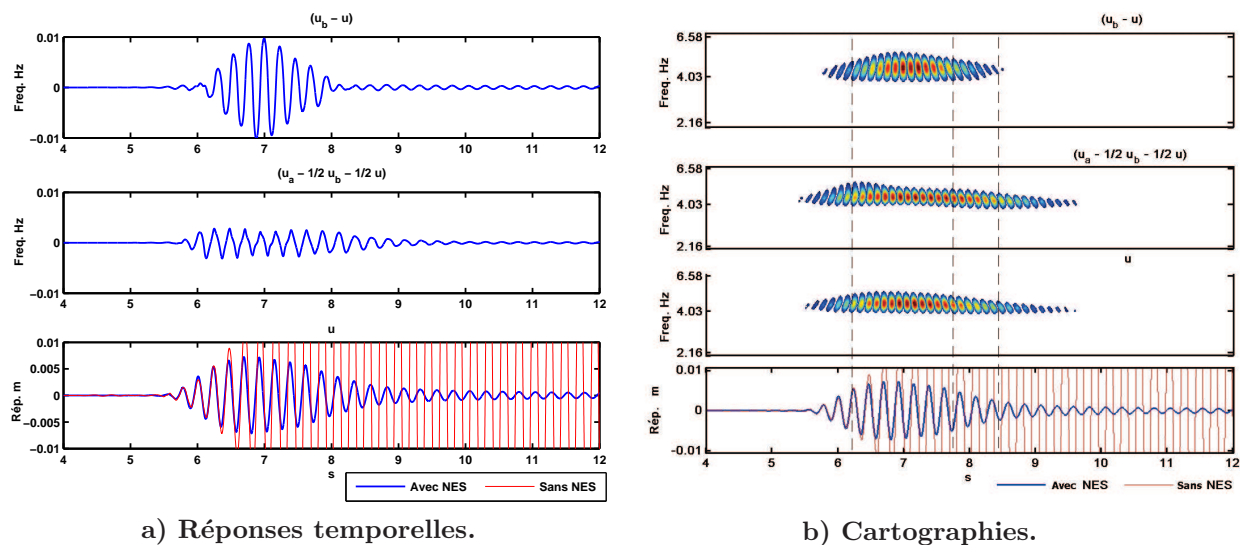


FIG. 5.43 – Comparaison des réponses linéaires (sans NES) et non linéaires (avec NES) du bâtiment à quatre étages forcé avec un excitation de type pulse 0.1 g à $f = 4.39\text{ Hz}$.

Les expérimentations réalisées avec un pulse gaussien centré autour de la fréquence $f = 4.39\text{ Hz}$ mettent en évidence le comportement dynamique transitoire du système étudié. Une comparaison directe des réponses temporelles et de la densité de pouvoir spectral du quatrième étage lorsque le couplage non linéaire est alternativement connecté et déconnecté (voir la partie la plus basse de la Figure 5.41 a)) permet de dire que le pompage énergétique est très efficace car les vibrations sont fortement atténuées selon à la fois l'amplitude et la durée. Les résultats numériques avec une double atténuation de la réponse de la structure linéaire sont expérimentalement vérifiés. En effet, pour des énergies intermédiaires on peut obtenir une

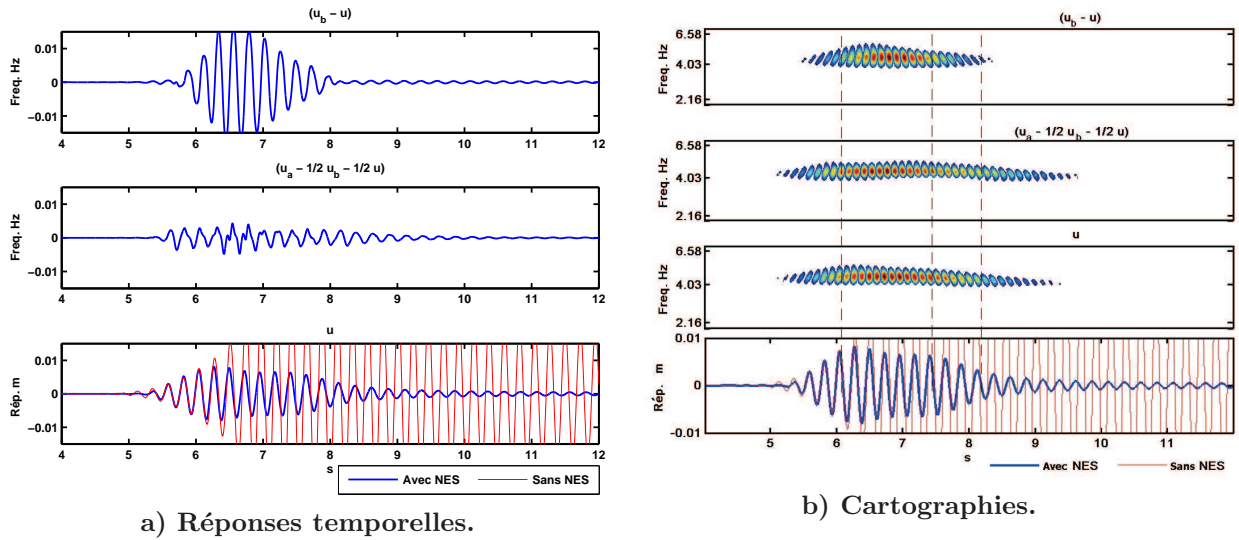


FIG. 5.44 – Comparaison des réponses linéaires (sans NES) et non linéaires (avec NES) du bâtiment à quatre étages forcé avec un excitation de type pulse 0.13 g à $f = 4.39$ Hz.

résonance des deux modes normaux non linéaires comme montré sur la Figure 5.41 a). Le comportement dynamique des NNMs peut être compris en analysant les accélérations des quantités $(u_b - u)$ et $(u_a - \frac{1}{2}u_b - \frac{1}{2}u)$ relatives respectivement au NNM1 et au NNM2 ou similairement en analysant leur cartographie en ondelettes comme montré sur la Figure 5.41 a).

Ainsi, même si le pic initial n'est pas atténué à cause de la masse non linéaire initialement au repos, la double atténuation plus efficace est bien obtenue expérimentalement.

Des amas de coefficients ondelettes dans les profils d'accélération attestent que deux captures de résonances avec le NNM1 et le NNM2 sont presque simultanément déclenchées quand le couplage non linéaire est réalisé. Le NNM1 et le NNM2 coexistent pendant un instant, ensuite le NNM1 disparaît pendant que le NNM2 existe encore provoquant toujours du pompage énergétique du système linéaire avant qu'il ne disparaisse lui aussi. A partir de ce point, le pompage énergétique n'est plus activé et une décroissance exponentielle des oscillations libres peut être observée en raison de l'amortissement visqueux. Ceci a pour conséquence que l'on peut observer deux sauts dans la décroissance des vibrations sur la réponse du dernier étage. Les simulations numériques réalisées selon plusieurs amplitudes de la table vibrante sont fournies sur les Figures 5.41 b), c), d) et illustrent des comportements transitoires qualitatifs observés quand l'amplitude du forcing augmente. Sur la Figure 5.41 b) (amplitudes relativement faibles), les NNMs sont simultanément déclenchés et disparaissent au même moment. Sur la Figure 5.41 c) (amplitudes moyennes), bien que simultanément activés, le NNM1 est le mode non linéaire menant alors que le NNM2 disparaît rapidement. Pourtant, l'apparition du NNM2 est importante puisqu'elle permet une rapide et efficace atténuation du premier pic d'oscillations du système principal. Sur la Figure 5.41 c) (grandes amplitudes), une fraction de l'énergie pompée est localisée dans le NNM1 et ensuite transférée en retour au NNM2 et vice-versa.

Les résultats expérimentaux montrent en effet que le double NES est même plus efficace que ce que l'on pouvait attendre pour atténuer les vibrations de la structure maîtresse provoquées par des excitations de type pulse comme décrit sur les Figures 5.42 à 5.44. Les réponses temporelles et les cartographies relatives des NNMs et des déplacements du dernier étage corroborent

l'apparition d'un double saut dans la réponse de u pour à la fois des amplitudes de pulses $0.07 g$, $0.10 g$ et $0.13 g$. Les cartographies en ondelettes font apparaître une migration de la fréquence durcissante du NNM1 pour $0.07 g$ tandis que la fréquence instantanée du mode NNM2 reste constante comme on peut le noter sur la Figure 5.42 b). Sur la Figure 5.43 b), la fréquence instantanée du NNM1 est constante par rapport au temps alors qu'un effet mollissant peut être distingué sur le NNM2 après la décroissance du NNM1. Pour $0.13 g$ la fréquence du NNM2 est durcissante tandis que le NNM1 se produit, ensuite mollissante après la disparition du NNM1 comme montré sur la Figure 5.44 b). Pour des amplitudes croissantes (voir sur les Figures 5.43 et 5.44), le mode NNM2 apparaît par ailleurs être activé avant et après que le mode NNM1 apparaît ce qui aide à atténuer le pic d'oscillations du dernier étage plus rapidement qu'avec un simple NES. Sur la Figure 5.43, un transfert d'énergie vers le mode NNM2 est observé quand le NNM1 est fortement activé.

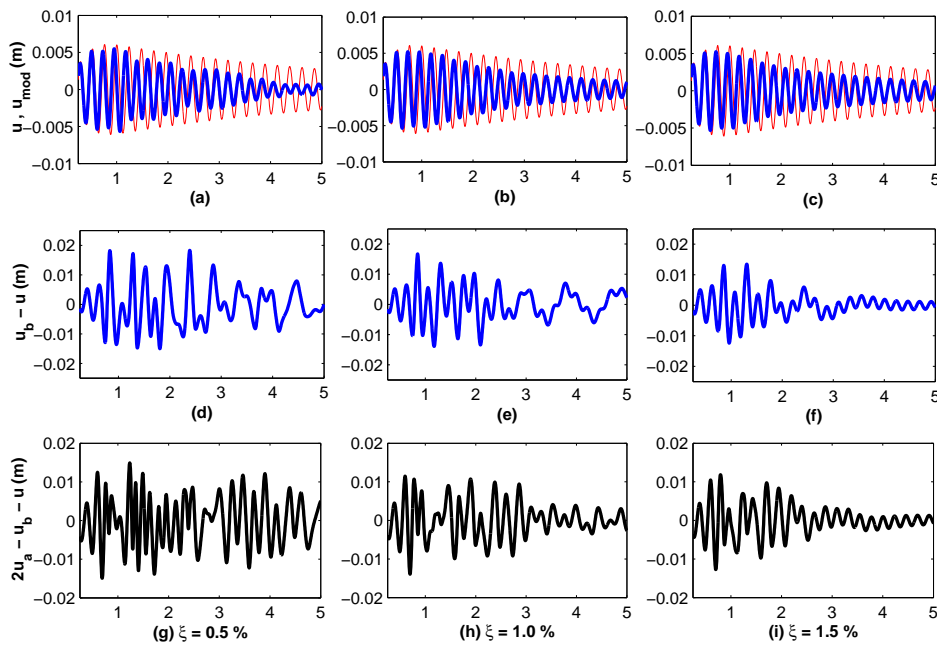


FIG. 5.45 – Influence de l'amortissement spécifique du NES $\xi_a = \xi_b = \xi$ sur le comportement des NNM : simulations numériques ; haut) réponse linéaire non linéaire du quatrième étage ; milieu) réponse du NNM1 ($u_b - u$) ; bas) réponse du NNM2 ($u_a - \frac{1}{2}u_b - \frac{1}{2}u$).

Des simulations numériques sont utilisées pour rechercher l'influence qualitative de l'amortissement du NES sur la dynamique des NNM. Les simulations pour des amortissements spécifiques $\xi = \xi_a = \xi_b \in \{0.5\%, 1\%, 1.5\%\}$ sur les Figures 5.45 démontrent que pour un amortissement croissant ξ , le pompage énergétique est de plus en plus mené uniquement par le mode NNM1, le rôle du NNM2 étant réduit à un mode esclave.

Les courbes de réponses en fréquences sont construites expérimentalement pour accéder à l'efficacité du double NES par comparaison avec la structure linéaire et avec un TMD de Frahm optimal en prenant le même ratio des masses et des facteurs d'amortissement. Un balayage sinus $2 \rightarrow 20$ Hz a été utilisé pour exciter la base du modèle de bâtiment à quatre étages avec les amplitudes $0.12 g$, $0.17 g$ et $0.25 g$. Les profils de déplacements ont été calculés en intégrant

successivement et en filtrant les profils d'accélération et de vitesses. Les FrFs relatives calculées en utilisant la procédure de Welch [Oppenheim et Schafer, 1975] sont introduites sur la Figure 5.46. Comme souligné dans le précédent chapitre la courbe de FrF obtenue quand le NES est activé reste presque partout sous la FrF linéaire. Le double NES est plus efficace qu'un amortisseur de Frahm optimal et n'amplifie pas les vibrations en dehors de la bande passante de la fréquence ciblée ce qui est le principal inconvénient des amortisseurs TMD de Frahm. Le mode NNM1 est le principal mode activé quand le pompage énergétique est activé. Le mode NNM2 est simultanément activé avec le mode NNM1.

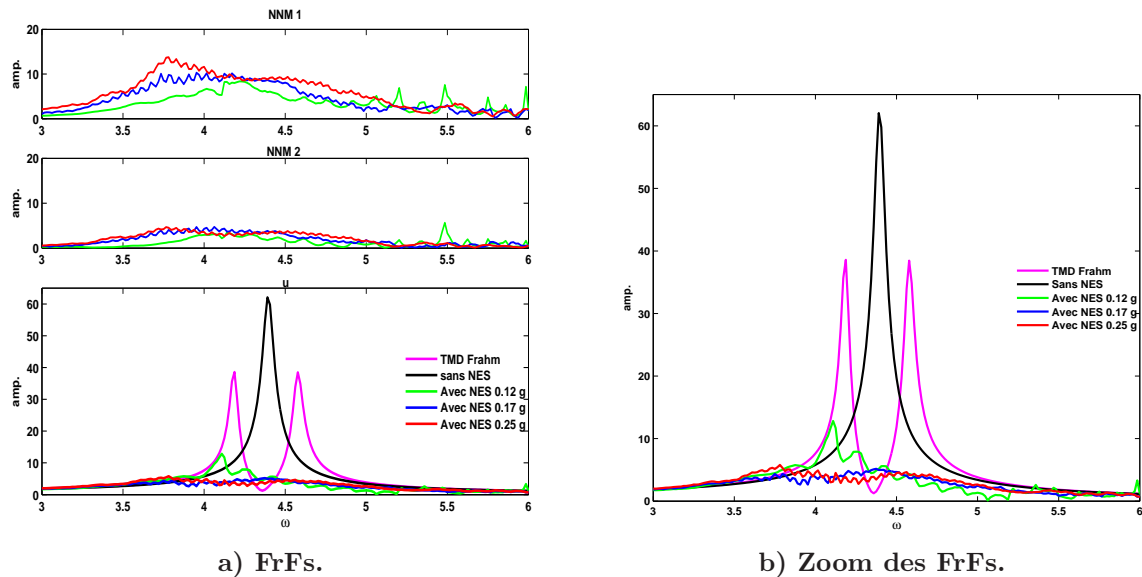
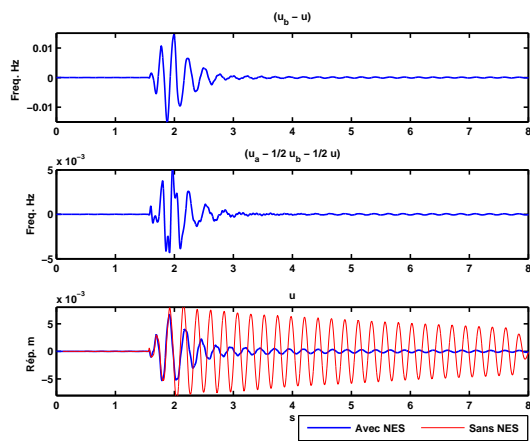


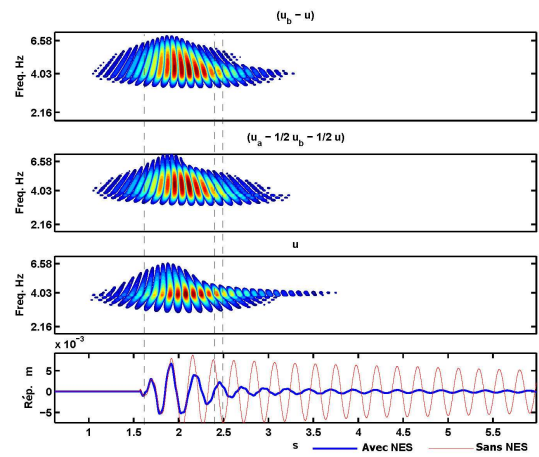
FIG. 5.46 – Courbes amplitudes-fréquences avec une excitation de type balayage sinus $2 \rightarrow 20$ Hz : comparaison entre le comportement linéaire, l'optimal TMD de Frahm et la structure couplée avec le double NES.

Le comportement dynamique du double NES (ayant pour objectif d'absorber les vibrations d'une structure linéaire maître) a ainsi été étudié à la fois numériquement et expérimentalement. Les résultats numériques et expérimentaux soulignent les caractéristiques complémentaires des comportements du double NES. Le rôle des NNMs a été partiellement identifié pendant les différentes phases du pompage. Les résultats mettent en évidence l'influence de l'amortissement du NES et de l'amplitude de forcing sur l'efficacité du pompage simultanément.

J'ai ainsi optimisé les paramètres et le phénomène de pompage énergétique ce qui était un des objectifs initiaux. Je peux donc maintenant conclure.



a) Réponse temporelle.



b) Cartographie.

FIG. 5.47 – Comparaison des réponses linéaires (sans NES) et non linéaires (avec NES) du bâtiment excité par un pulse grâce à un marteau de 2.4 kgF sur le dernier étage.

Conclusions et Perspectives

Synthèse des travaux présentés

Dans cette thèse, il a été montré que l'atténuation passive des vibrations par phénomène de pompage énergétique est possible. En effet, non seulement le phénomène de pompage énergétique a été expliqué et compris mais d'intéressants résultats théoriques, analytiques, numériques ont permis de répondre à la plupart des questions qui se posaient sur ce phénomène. De plus, la faisabilité a été étudiée, non seulement d'un point de vue expérimental avec l'application sur des modèles réduits de bâtiments, mais aussi sur une optimisation des paramètres en vue d'une application pratique réelle. Les diverses simulations, vérifications expérimentales ont permis de conclure sur la très bonne efficacité de l'absorbeur de vibrations ainsi construit. Cette étude permet ainsi de concevoir des absorbeurs dynamiques de vibrations de nouvelle génération.

Dans le premier chapitre, les outils nécessaires à la compréhension des divers phénomènes rentrant en jeu lors du pompage énergétique ont été introduits. En particulier, les modes de vibrations non linéaires, d'une très grande utilité pour décrire le phénomène de pompage énergétique ont été présentés. Le phénomène de pompage énergétique a été replacé dans son contexte avec la description des divers absorbeurs de vibrations existants. L'absorbeur de vibration ainsi construit grâce au couplage à une structure non linéaire de faible masse est un absorbeur passif de vibrations.

Dans le deuxième chapitre, le principe du pompage énergétique est étudié et des exemples numériques ont permis de se rendre compte du grand intérêt du phénomène pour atténuer efficacement les vibrations en pratique comme pour des bâtiments. Ce chapitre montre l'intérêt de traiter des questions de faisabilité et d'efficacité en vue de l'application du pompage énergétique.

Le troisième chapitre a permis de se rendre compte que le phénomène de pompage énergétique est très efficace pendant le régime instationnaire ; que le phénomène est très robuste ; qu'il est dû à un phénomène de localisation de modes non linéaires. L'avantage même du NES est qu'il n'a pas de fréquence de résonance privilégiée : il peut rentrer en résonance avec n'importe quelle fréquence de la structure primaire. Des vérifications expérimentales ont permis de valider les différents scénarios envisagés dans les études théoriques. Des méthodes analytico-numériques ont été développées. Des indicateurs d'efficacité ont notamment été trouvés.

Le quatrième chapitre a permis de montrer que le pompage énergétique restait très efficace dans le cas d'une excitation périodique. Ce chapitre a permis de mettre en avant les nombreux avantages de l'absorbeur non linéaire comparé à l'absorbeur classique linéaire très utilisé dans l'industrie à savoir que le NES est auto-ajustable aux changements de la fréquence et de l'amortissement de la structure primaire à isoler. Des vérifications expérimentales ont montré la

faisabilité du pompage énergétique. Des méthodes analytico-numériques ont été développées.

Le cinquième chapitre a permis de donner des méthodes pour l'optimisation du pompage énergétique, à savoir une optimisation des paramètres et du phénomène en utilisant des modes non linéaires multiples. Une expérimentation a aussi permis de valider les résultats théoriques et de vérifier la faisabilité de la méthode.

Nous pouvons ainsi dire que le phénomène de pompage énergétique a été étudié théoriquement pour comprendre et optimiser le phénomène : les principaux mécanismes sont ainsi cernés ; une partie numérique a permis de compléter les prévisions. Les concepts et certaines applications ont été validés par une partie expérimentale notamment électronique et grâce à des modèles réduits de bâtiments.

Ce travail a ainsi permis d'avoir une meilleure connaissance du comportement des absorbeurs de vibrations conçus à l'aide du phénomène de pompage énergétique. Ce point est crucial pour atteindre un compromis optimal entre les avantages et les inconvénients pour des applications réelles.

La littérature émergente sur le pompage énergétique laissait penser à une possible application mais de nombreux problèmes restaient ouverts. C'est ainsi que nous avons réglé les points suivants.

- Nous avons utilisé la notion de modes non linéaires des systèmes réguliers pour accroître la quantité d'énergie transférée.
- Nous avons testé l'apport de différentes nonlinéarités [Gourdon et Lamarque, 2005b].
- Nous avons testé (dans le but d'augmenter) l'efficacité de l'amorçage du pompage énergétique.
- Nous avons testé la faisabilité de ce pompage énergétique théorique sur des cas pratiques concrets (structures réelles) [Gourdon et al., 2006b].
- Nous avons optimisé les différents paramètres [Manevitch et al., 2007, Manevitch et al., 2006a] (notamment en ajoutant une très faible masse ce qui n'est pas le cas dans les principales études théoriques actuelles où la masse ajoutée est du même ordre de grandeur que la masse de la structure principale à isoler).

Un des principaux objectifs que nous avons réalisé était alors de pouvoir appliquer cette méthode à des structures concrètes, de pouvoir passer de la théorie à l'expérimentation, notamment dans le domaine du Génie Civil et Mécanique. En effet, on peut maintenant réaliser, avec cette méthode, l'atténuation des vibrations de tabliers de ponts (ou d'immeubles) en venant ajouter une petite structure non linéaire qui serait couplée au tablier par de faibles ressorts afin de pomper l'énergie.

Pour pouvoir réaliser ce passage de la théorie à l'expérimentation, plusieurs aspects importants ont été pris en compte dans nos travaux. C'est ainsi que nous avons déterminé les conditions exactes sur l'efficacité du pompage énergétique (avec une augmentation de cette efficacité). Un pompage optimal a été défini. Le rôle de chaque paramètre (avec une optimisation) et la façon de concevoir le couplage (en pratique) ont été étudiés. Le rôle de l'amortissement a aussi été étudié. La robustesse de la méthode (étude des vibrations aléatoires/stochastiques) a été analysée [Gourdon et Lamarque, 2006]. Le cas des vibrations instationnaires, forcées, ceci dans un cadre déterministe dans un premier temps et stochastique dans un deuxième temps, a été abordé. Nous nous sommes alors intéressés au problème du niveau minimal d'énergie nécessaire (un pompage énergétique à "changement de vitesse" a été défini [Gourdon et Lamarque, 2005a]). La notion de

pompage énergétique en présence de nonlinéarités irrégulières (systèmes affines par morceaux, ou autres termes irréguliers) pour accroître l'efficacité a été abordée. Les aspects suivants ont ainsi été traités :

- le pompage énergétique a ainsi été expliqué par des méthodes analytico-numériques ;
- la robustesse de la méthode (introduction de paramètres incertains dans les structures et étude du phénomène de pompage énergétique qui se produit bien avec pour exemple les circuits électroniques dont les composants, comme les résistances par exemple, sont incertains) a été étudiée ;
- l'efficacité du pompage a été quantifiée ;
- de nombreuses vérifications expérimentales des résultats analytiques/numériques ont été réalisées.

Dans ces travaux, nous avons aussi montré que les absorbeurs non linéaires faisant intervenir le phénomène de pompage énergétique sont nettement plus intéressants à utiliser que des absorbeurs linéaires classiques utilisés dans l'industrie. En effet, l'atténuation est plus efficace en ajoutant moins de masse, la gamme fréquentielle est plus importante, plusieurs modes peuvent être atténués simultanément ce qui n'est pas le cas avec un absorbeur classique linéaire.

Nous avons ainsi envisagé plusieurs applications avec notamment l'isolation sismique de bâtiments.

Ce travail a permis de nombreuses collaborations internationales avec des scientifiques et chercheurs référents du domaine comme Leonid Manevitch (sur les méthodes complexes et sur l'optimisation des paramètres), Colin Taylor (pour des expérimentations), Oleg Gendelman (pour l'étude des vibrations quasi-périodiques), Subbash Sinha (sur des questions de calcul de stabilités et sur le contrôle actif) et des laboratoires (Earthquake Laboratory, Nonlinear Systems Research Laboratory...).

Ce travail a aussi permis une production scientifique avec neuf publications dans des journaux internationaux à comités de lecture et sept publications dans des actes de conférences.

Perspectives

Le phénomène de pompage énergétique semble intéressant en vue d'une application réelle sur des bâtiments ou des tabliers de ponts par exemple, car il permet l'atténuation passive des vibrations. Sans avoir à injecter de l'énergie extérieure, ce phénomène transfère de façon irréversible l'énergie d'une structure primaire à isoler vers une petite structure annexe que l'on vient concevoir.

Concernant cette atténuation passive des vibrations, les applications semblent nombreuses et variées. On peut citer le domaine de l'automobile, de l'acoustique, de l'aéronautique où quelques études/projets ont commencé à être réalisés.

La présentation des travaux réalisés permet aussi de soulever certaines perspectives. En particulier j'ai montré le rôle indispensable et primordial de l'amortissement qu'il faudrait pouvoir quantifier plus précisément avec l'étude de modes non linéaires amortis par exemple.

Le phénomène de pompage énergétique peut faire intervenir des cascades de résonances pour atténuer plusieurs modes séquentiellement/simultanément d'une structure quelconque. Il reste

cependant à étudier théoriquement plus précisément ce phénomène pour pouvoir appliquer le pompage sur une structure réelle à n modes, voire une structure continue.

Les indicateurs d'efficacité trouvés dans cette thèse ne sont pas forcément suffisants dans tous les cas et il reste à optimiser certains paramètres comme le ratio des masses qui doit être encore plus faible pour des applications en Génie Civil.

Même si la robustesse de la méthode a été étudiée (principalement numériquement), la sensibilité des différents paramètres reste à approfondir. En effet, des calculs sur les densités de probabilités par exemple sont nécessaires pour obtenir plus de renseignements sur le comportement du phénomène quand des paramètres ou conditions initiales varient.

Nous nous sommes essentiellement intéressés à l'atténuation passive des vibrations d'une structure linéaire. Le cas de structures primaires à comportement non linéaire, c'est-à-dire des nonlinéarités régulières ou non régulières comme le cas élasto-plastique (plus réaliste) pourrait s'avérer utile sachant que j'ai aussi considéré des structures à plusieurs degrés de liberté ou issus de modèles éléments finis.

Même si de nouvelles méthodes ont été trouvées pour essayer de résoudre le problème du niveau minimal d'énergie nécessaire pour activer le pompage énergétique, ce point demeure un problème à résoudre en vue d'applications concrètes pour atténuer encore plus rapidement les vibrations. Des pistes sont actuellement recherchées pour mettre le NES dans une configuration où il serait déjà activé avant que les vibrations "n'arrivent". En effet, le mécanisme de pompage le plus efficace est la résonance 1 : 1 qui est déclenchée par un phénomène de battements car le NES est initialement au repos. Si le NES pouvait ne pas être initialement au repos mais déjà "déplacé" alors la résonance 1 : 1 pourrait se produire immédiatement.

On peut aussi envisager une application du "pompage énergétique" en acoustique. Cette thématique fait notamment l'objet d'une réponse à un appel d'offres ANR avec le Laboratoire de Mécanique Acoustique de Marseille.

Annexes



Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

Communications in Nonlinear Science
and Numerical Simulation 10 (2005) 835–854

Communications in
Nonlinear Science and
Numerical Simulation

www.elsevier.com/locate/cnsns

Control of time-periodic systems via symbolic computation with application to chaos control

S.C. Sinha ^{*}, E. Gourdon ¹, Y. Zhang

*Nonlinear Systems Research Laboratory, Department of Mechanical Engineering,
Auburn University, Auburn, AL 36849, USA*

Received 19 May 2004; received in revised form 30 May 2004; accepted 2 June 2004

Available online 27 July 2004

Abstract

A general method for the control of linear time-periodic systems employing symbolic computation of Floquet transition matrix is considered in this work. It is shown that this method is applicable to chaos control. Nonlinear chaotic systems can be driven to a desired periodic motion by designing a combination of a feedforward controller and a feedback controller. The design of the feedback controller is achieved through the symbolic computation of fundamental solution matrix of linear time-periodic systems in terms of unknown control gains. Then, the Floquet transition matrix (state transition matrix evaluated at the end of the principal period) can determine the stability of the system owing to classical techniques such as pole placement, Routh–Hurwitz criteria, etc. Thus it is possible to place the Floquet multipliers in the desired locations to determine the control gains. This method can be applied to systems without small parameters. The Duffing's oscillator, the Rössler system and the nonautonomous parametrically forced Lorenz equations are chosen as illustrative examples to demonstrate the application.

© 2004 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 02.30Yg; 02.70Wz; 05.04Gg

Keywords: Time-periodic systems; Symbolic controller design; Chaos control

^{*} Corresponding author.

E-mail address: ssinha@eng.auburn.edu (S.C. Sinha).

¹ Present address: École Nationale des Travaux Publics de l'État, Rue Maurice Audin, F-69518 Vaulx-en-Velin Cedex, France.

1. Introduction

The modeling of many engineering, economic and biological systems leads to a set of nonlinear ordinary differential equations with time periodic coefficients. Under suitable conditions, these global equations of motion can be expanded about equilibrium solutions to yield equations that describe the local behavior of the system. The stability of the linearized system (about a hyperbolic fixed point or a periodic solution) is completely characterized by Floquet Theory.

The control problems associated with linear time periodic systems can be handled by existing state-space techniques for general time varying systems. The optimal control techniques require the solution of a periodic Riccati equation or for the general dynamic output feedback case, one can solve two time varying differential equations containing periodic coefficients [1,2]. Other methods are based on transformation of the original systems to suitable canonical forms in order to utilize the special properties in controller design [3,4]. However, the canonical transformations are not unique and the implementation is difficult. Stabilization of time-varying systems has also been suggested by the ‘pole assignment’ technique [5,6] for special class of problems. Recently, Sinha and Joseph [7] have shown that Floquet theory can be used in the control of time periodic systems by implementing Lyapunov–Floquet (L–F) transformation. This technique allows one to design a controller in the time-invariant domain and obtain the desired periodic controller via L–F transformation. Successful applications to rotating mechanical systems with parametric systems were demonstrated by Sinha et al. [8] and Boghiu et al. [9]. Sinha et al. [10] have also demonstrated an application of this method in chaos control to a periodic orbit. Using the same approach, Deshmukh et al. [11] designed state feedback and observer based controllers for large-scale time periodic system. The efficient computation of the L–F transformation matrices was achieved using a ‘hybrid formulation’ developed by Butcher and Sinha [12]. As pointed out by the authors themselves (also see [13,14]), there is a drawback in Sinha and Joseph method in that the asymptotic stability is not guaranteed because of the presence of a generalized inverse of a rectangular matrix in the expression for the control law. This is because of the fact that the time invariant auxiliary system and the original time periodic system can only be equivalent by minimizing a least square error. The designer may have to go through trial and error or iterations before coming up with a control law that successfully stabilizes the original system asymptotically.

In [15], Sinha and Butcher have shown that the state transition matrix for the linear time-periodic system can be computed in symbolic form in terms of the unknown parameters of the system and by employing the symbolic computation of the state transition matrix of a parametric linear time-periodic system, the linear controller can be designed to guarantee the asymptotic stability of the closed-loop system.

Another possible application of this methodology is in chaos control. Recently, control strategies to suppress bifurcations and chaos in nonlinear systems have been proposed in the literature and most of those studies have dealt with autonomous systems. The nonautonomous systems are often converted to autonomous discrete systems using the Poincaré map where the fixed points of the Poincaré map correspond to the periodic orbits of the initial system and the stabilization problem of orbits is reduced to the stabilization of fixed points. First, it must be pointed out that, except in rare cases, it is very difficult to obtain an analytical expression for the Poincaré map and we need to obtain an approximate expression with numerical or experimental data. Secondly, this method (discrete case) leads to some serious limitations. The most popular among these methods

is the OGY (Ott–Grebogi–Yorke) method [16,17] which uses the Poincaré map of the system. The changes in parameters can only be discrete and this method can be used to stabilize only orbits whose largest Lyapunov exponent is small compared to the reciprocal of time-interval between parameter changes. This can be avoided with the design of continuous time control system.

Because the local stabilization problem of a periodic orbit leads to a linear system with time periodic coefficients, we must use the Floquet theory to guarantee the stability of the system. Sinha et al. [10] have proposed a general approach in the design of active controllers for nonlinear systems exhibiting chaos. In this method, it is shown that a system exhibiting chaos can be driven to a desired periodic motion by designing a combination of a feedforward and a feedback controller. The feedback controller is designed by the method proposed by Sinha and Joseph [7] where a time-invariant auxiliary system is constructed and stabilized with pole placement method. However, since this method uses a least square approximation technique, in certain parameter ranges of the system, it may not be good enough to ensure stability of the periodic orbit.

In the present work, a combination of feedforward and feedback controllers is designed to drive the nonlinear chaotic system to a desired periodic trajectory. The Floquet transition matrix of the closed-loop system is computed symbolically in terms of the unknown control gains of the feedback controller. Then by applying some well-known classical techniques, such as Shur–Cohn or Routh–Hurwitz criteria, we can select the gains to guarantee the asymptotic stability. It is also possible to select the control gains by placing the Floquet multipliers in desired locations. One advantage of this approach is that we can design the controllers in a symbolic form: it can explicitly show how the stability depends on the control gains. Moreover, this technique is applicable to general periodic systems without any restriction on the size of periodic terms.

The Duffing's oscillator, the Rössler system and the nonautonomous parametrically forced Lorenz equations are chosen as illustrative examples to demonstrate the application.

2. Symbolic computation of the Floquet transition matrix

Sinha and Butcher [15] have outlined a technique for computing the fundamental solution matrix for a linear time-periodic dynamical system explicitly as a function of the systems parameters via Picard iteration and expansion in shifted Chebyshev polynomials. When this state transition matrix is evaluated at the end of the principal period, the parameter-dependent Floquet transition matrix (FTM) is obtained, and hence it is possible to express the local stability conditions in a closed form.

Two formulations were outlined: one applicable to general periodic systems and the other for systems in which the periodic system matrix contains constant terms. It was shown that the latter, called the “alternate formulation”, converges much faster than the former “general formulation”.

First, we briefly discuss the “general formulation”.

Consider the linear time-periodic system

$$\dot{x} = A(t, \alpha)x, \quad A(t, \alpha) = A(t + T, \alpha), \quad x(0) = x^0 \quad (1)$$

The equivalent integral form can be written as

$$x(t) = x^0 + \int_0^t A(\tau, \alpha)x(\tau) d\tau \quad (2)$$

838 *S.C. Sinha et al. / Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 10 (2005) 835–854*

where $x(t) \in R^N$ is the state vector, $t \in R^+$ denotes time, and $\alpha \in R^L$ is a parameter vector. The method of Picard iteration is utilized to find the $(k+1)$ th approximation

$$\begin{aligned} x^{(k+1)}(t) &= x^0 + \int_0^t A(\tau_k, \alpha) x^{(k)}(\tau_k) d\tau_k \\ &= \left[I + \int_0^t A(\tau_k, \alpha) d\tau_k + \int_0^t A(\tau_k, \alpha) \int_0^{\tau_k} A(\tau_{k-1}, \alpha) d\tau_{k-1} d\tau_k \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \int_0^t A(\tau_k, \alpha) \cdots \int_0^{\tau_1} A(\tau_0, \alpha) d\tau_0 \cdots d\tau_k \right] x^0 \end{aligned} \quad (3)$$

where τ_0, \dots, τ_k are all dummy variables. The expression in the square brackets is an approximation to the fundamental solution matrix $\Phi(t, \alpha)$ since it is truncated after a finite number of terms (iterations). After the period is normalized to unity via the transformation $t = T\tau$, the normalized 1-periodic system matrix $\bar{A}(\tau, \alpha) = \bar{A}(\tau + 1, \alpha)$ is expanded in m shifted Chebyshev polynomials of the first kind valid in the interval $[0, 1]$ as

$$\bar{A}(\tau, \alpha) = \hat{T}^T(\tau) D(\alpha) \quad (4)$$

where $\hat{T}^T(\tau)$ is the $N \times Nm$ Chebyshev polynomial matrix and $D(\alpha)$ is the $Nm \times N$ Chebyshev coefficient matrix. This is inserted into Eq. (3) and the integration and product operational matrices [18] associated with the Chebyshev polynomials are employed to obtain an expression for the expansion of $\Phi(t, \alpha)$ in shifted Chebyshev polynomials as

$$\Phi^{(p,m)}(\tau, \alpha) = \hat{T}^T(\tau) \left[\hat{I} + \left(\sum_{k=1}^p [L(\alpha)]^{k-1} \right) P(\alpha) \right] = \hat{T}^T(\tau) B(\alpha) \quad (5)$$

where (p, m) refers to the number of iterations and polynomials employed in the approximation, respectively. The $Nm \times N$ Chebyshev coefficient matrix $B(\alpha)$ is expressed in terms of \hat{I} , $L(\alpha) = \hat{G}^T \hat{Q}_D(\alpha)$, and $P(\alpha) = \hat{G}^T D(\alpha)$ via simple matrix multiplications and additions of the operational matrices. The parameter-dependent FTM $H(\alpha) = \Phi(\tau=1, \alpha)$ is obtained by evaluating the fundamental solution matrix at the end of the principal period. For additional details on this algorithm (such as convergence issues) as well as an outline of the ‘‘alternate formulation’’ (see [15]).

3. Design of a linear controller in a symbolic form for systems with periodic coefficients

Consider the full state feedback control problem,

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u; \quad A(t) = A(t+T), \quad B(t) = B(t+T) \quad (6)$$

with $u = -KX$ such that (6) is controllable. Thus, the closed-loop system is given by

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (7)$$

The stability behavior of the origin can be completely characterized in terms of the state transition matrix $\Phi(t, t_0)$ of the system. As $[A(t) - B(t)K]$ is periodic, we can compute the state transition matrix symbolically using the method described in Section 2 with a software like Mathematica.

After selecting a ‘reasonably good’ value for the number of Picard iterations p (so that it converges), we obtain the Floquet transition matrix (FTM) Φ which depends on the control gains

k_1, \dots, k_n . Increasing the number of polynomials m beyond a certain value cannot improve the accuracy if p is too low. Since in general one does not know the exact solution, it was found that the best procedure to achieve a desired accuracy, is, for high value of m , to select an appropriate p for a converged FTM (we compare with a Runge–Kutta method), and then adjust m until the point where desired convergence is retained. This should be done at various locations in the parameter region (the control gains) of interest to ensure uniform convergence before the final analytical solution is obtained.

Generally speaking, Φ contains high degree polynomial expressions of k_1, \dots, k_n and therefore, solving for the eigenvalues in terms of k_1, \dots, k_n is not a trivial task. Instead, we may select them by applying appropriate stability criteria. Thus, we define the characteristic polynomial of Φ as

$$P = \text{Det}(\Phi - \rho I) \quad (8)$$

where ρ (Floquet multiplier) is an eigenvalue of Φ . Then, by introducing the complex fractional transformation

$$\rho = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \quad (9)$$

we map the unit circle of the complex plane to the left half plane. It transforms (8) into a polynomial in λ , where coefficients depend on the control gains, and the criteria for continuous-time systems (for example the Routh–Hurwitz criterion) may be applied. Based on the stability condition, the control gains are chosen to guarantee the asymptotic stability.

Moreover, we can also use a technique which is similar to “Pole Placement Method”. Indeed, the FTM eigenvalues can be placed at desired locations ρ_i inside the unit circle. Thus, we have:

$$P = \text{Det}(\Phi - \rho I) = \prod_{i=1}^n (\rho - \rho_i) \quad (10)$$

The coefficients of ρ^k in the left-hand side of Eq. (10) are dependent on the control gains k_1, \dots, k_n and coefficients of ρ^k in the right-hand side are known. A term by term comparison provides the values of k_1, \dots, k_n . We can call this method “Multipliers placement method”.

For example, we can apply the method to the Mathieu equation: $\ddot{y} + (a + b \cos t)y = 0$, where a and b are the systems parameters. Thus, we have $\dot{X} = AX$ with

$$X = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

and

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix} \cos(t).$$

For the parameter values $a=b=1.5$, the system is unstable as shown in Fig. 1. By introducing the control vector $u(t)$, we have $\dot{X} = AX + Bu$ with $u = -KX$; $K = (k_1 \ k_2)$. B is such that the system is controllable and we select $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Thus, the closed-loop system is given by $\dot{X} = (A - BK)X$. k_1 and k_2 must satisfy Routh–Hurwitz inequalities in order to guarantee asymptotic stability. Fig. 2 plotted with Mathematica shows the area that guarantees asymptotic stability. Twenty-two Picard iterations and 18 polynomials are used in the computation and the controlled dynamics

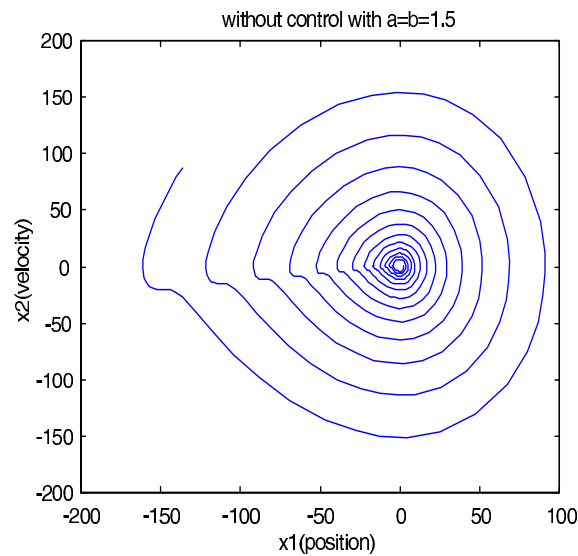


Fig. 1. Unstable case of the Mathieu equation.

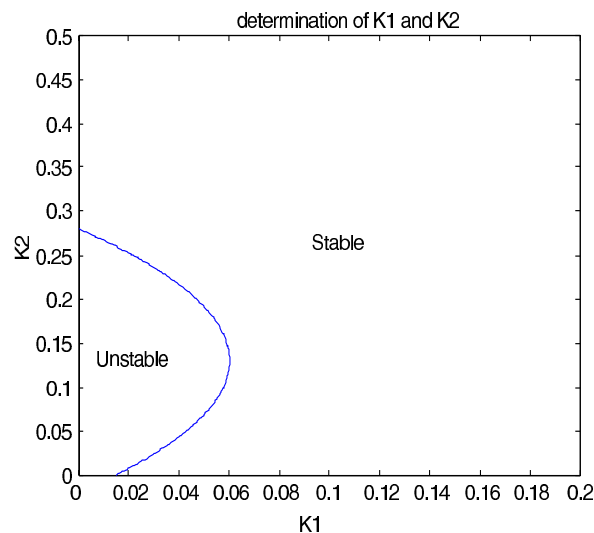


Fig. 2. Stable–unstable areas of asymptotic stability for the Mathieu equation.

is shown in Fig. 3. By using the method described earlier as the “Multipliers placement method”, we may place the desired Floquet multipliers at, say, $\rho_1=0.3$; $\rho_2=0.1$ to find $k_1=0.175$; $k_2=0.381$.

4. Design of controllers for nonlinear systems exhibiting chaos

We consider a general nonlinear, nonautonomous system

$$\dot{x} = f[t, x(t)] \quad (11)$$

which has a chaotic attractor for a given set of parameter values.

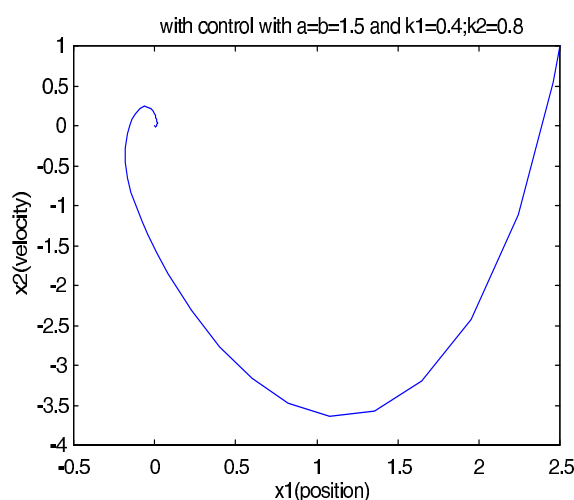


Fig. 3. Phase plane plot of the controlled Mathieu equation.

As the chaotic response is not desirable, the objective of this method is to choose a control law to drive the response to a desired periodic orbit. Let $y(t)$ be the desired orbit which may be an unstable periodic orbit of Eq. (11). The advantage of this method is that the desired periodic orbits need not to be a solution of the uncontrolled system.

Now we consider the system with the control law $u(t)$ (with two control parts) given by

$$\dot{x} = f[t, x(t)] + u(t); \quad u(t) = u_f + u_t \quad (12)$$

where u_f is the feedforward control and u_t is the time-varying feedback control. u_f and u_t are taken as

$$u_f = \dot{y} - f[t, y(t)], \quad u_t = F(t)(x - y) \quad (13)$$

where $F(t)$, in general, is the time-varying linear state feedback matrix.

As shown in [10], by defining the error between the actual and desired trajectories

$$e = x - y \quad (14)$$

and using the form of u_f given in Eq. (13), Eq. (12) can be written as

$$\dot{e} = g[t, e(t)] + u_t \quad (15)$$

Assuming that

$$g(t, 0) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (16)$$

where g is a C^1 function, and defining

$$A(t) = \left[\frac{\partial g(t, e)}{\partial e} \right]_{e=0} \quad (17)$$

and

$$h(t, e) = g(t, e) - A(t)e \quad (18)$$

842 *S.C. Sinha et al. / Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 10 (2005) 835–854*

if the condition

$$\lim_{\|e\| \rightarrow 0} \sup \frac{\|h(t, e)\|}{\|e\|} = 0 \quad (19)$$

holds, then the system

$$\dot{e} = A(t)e(t) + u_t \quad (20)$$

is called the linearization of Eq. (15) around the origin.

The local stability of Eq. (12) is guaranteed by the global asymptotic stability of the linearized system given by Eq. (20). Since $A(t)$ is periodic, we can design constant control gains by computing the state transition matrix symbolically using the method outlined in Section 3. The FTM is obtained in a symbolic form as a function of both the system parameters and the control gains. The FTM eigenvalues can be placed at desired locations to yield appropriate values of the control gains as a function of the parameters in some domain \mathcal{D} . Since the control gains are functions of the system parameter and guarantee stability for all parameters in \mathcal{D} , we can eliminate chaos from the entire parameter range we are interested in. The desired periodic orbit may be independent of the parameters, which means that the system is driven to the same orbit in the entire parameter range, or it may be a function of the parameters in the given range. With this method, it is possible to drive the system to a periodic orbit which does not the same period as the original system. However, in order to compute the FTM of the linearized system, we must assume that the frequencies (ω_1 : frequency of the original system; ω_2 : frequency of the desired orbit) are commensurate ($n_1\omega_1 = n_2\omega_2$; n_1, n_2 , integers).

5. Applications

5.1. The Duffing's oscillator

Consider the Duffing's oscillator with the control law $u(t)$ given by

$$\ddot{x} = -\alpha x - x^3 - 2\zeta\dot{x} + f \cos \omega t + u \quad (21)$$

with $u(t) = u_f + u_t$, where α is the stiffness parameter, ζ ($\zeta > 0$) is the viscous damping coefficient, f and ω are the amplitude and frequency of the external input, respectively. It is well-known that in the absence of the control term, for certain values of system parameters, Eq. (21) possesses a chaotic attractor. The objective is to choose the feedback control law such that the response of the controlled Duffing's equation results in a asymptotically stable desired periodic orbit or a fixed point. For $\alpha = -1$, $\zeta = 0.125$, $f = 1$, $\omega = 1$, the system undergoes chaotic motion, as shown in Fig. 4. We choose the desired simple periodic orbit as $y(t) = 2\cos t + \sin t$, and from Eq. (13), the feedforward control u_f is

$$u_f = \ddot{y} - y + y^3 + 0.25y - \cos t. \quad (22)$$

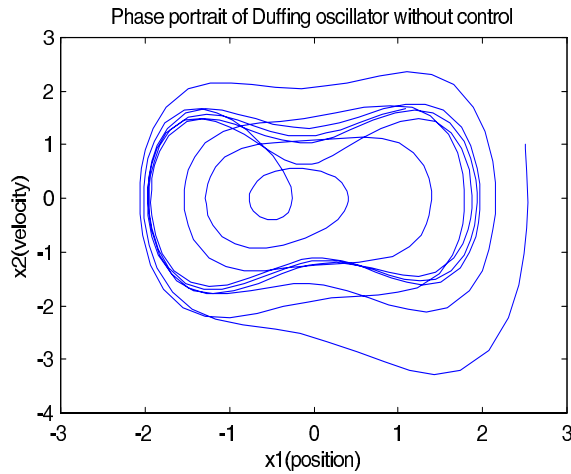


Fig. 4. Chaotic motion of Duffing's oscillator.

and the linearized equation in the error state $e(t)$ is given by

$$\dot{e}(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6.5 & -0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4.5 & 0 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \sin 2t \right) e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_t \quad (23)$$

Taking $u_t = -Ke$; $K = (k_1 \ k_2)$, we can obtain the Floquet transition matrix (FTM) Φ for the closed-loop system which depends on k_1 and k_2 . Fig. 5 shows the area which guarantees asymptotic stability in the $k_1 k_2$ plane. If k_1 and k_2 are selected from the stable region then $e \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ and consequently $x \rightarrow y$. Eighteen Chebyshev polynomials and 22 Picard iterations were used in the computation. Therefore, the closed-loop system given by Eq. (21) takes the form $\ddot{x} = x - x^3 - 0.25\dot{x} + \ddot{y} - y + y^3 + 0.25\dot{y} - k_1(x - y) - k_2(\dot{x} - \dot{y})$ where $y(t) = 2\cos t + \sin t$, $k_1 = 0.25$ and $k_2 = 0.4$. The oscillator is controlled to the periodic orbit $y(t)$ as shown on Fig. 6. In the ‘‘Multipliers placement method’’, if we place the Floquet multipliers at $\rho_1 = 0.8$; $\rho_2 = 0.3$ then using

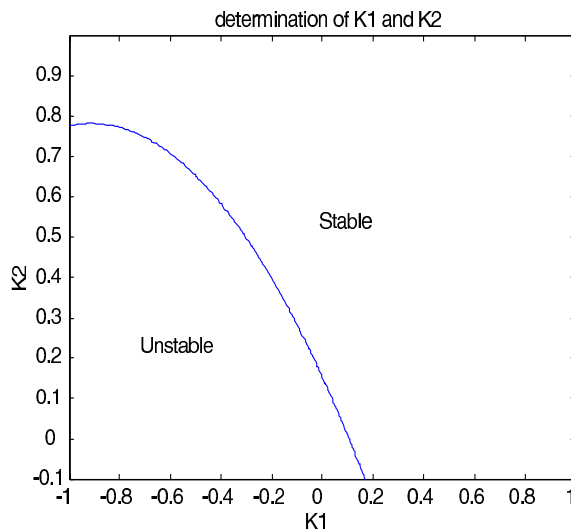


Fig. 5. Stable–unstable areas of asymptotic stability for the linearized system for the Duffing's oscillator.

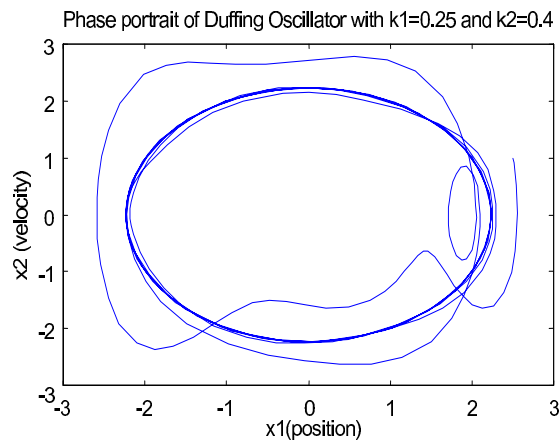


Fig. 6. Trajectory of the Duffing's oscillator controlled to periodic $y(t)=2\cos t + \sin t$.

Mathematica, we find $k_1=0.102$; $k_2=0.196$ which yields similar results. The same method can be applied for control to a fixed point. For this case, let the desired trajectory be $y(t)=y_0$ and thus from Eq. (13)

$$u_f = y_0 + y_0^3 - \cos t. \quad (24)$$

It should be noticed that in this case matrix $A(t)$ of Eq. (20) has constant coefficients and we can directly employ Routh–Hurwitz criterion to generate the feedback portion of the control law.

For example, if the desired fixed point is $(y_0, \dot{y}_0) = (-0.4, 0)$, then the error equation can be shown to be

$$\begin{Bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.52 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ \dot{e} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_t$$

Once again taking $K = \{k_1 \ k_2\}$, the closed-loop system in error e is given by

$$\begin{Bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.52 - k_1 & -0.25 - k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ \dot{e} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

By using the Routh–Hurwitz criterion, we obtain the conditions:

$$\begin{cases} k_1 > 0.52 \\ k_2 > -0.25 \end{cases}$$

Using $k_1=0.9$ and $k_2=0$, the controlled equation is given as $\ddot{x} = (1 - k_1)x - x^3 - (0.25 + k_2)\dot{x} - 0.4(k_1 + k_2) + 0.4 - 0.4^3$. The dynamics of the oscillator controlled to the fixed point $(y_0, \dot{y}_0) = (-0.4, 0)$ is shown in Fig. 7.

5.2. The Rössler's system

The Rössler equations form a nonlinear system notable for its recognizable strange attractor (the “Rössler bands”) and the example it presents of the low degree of nonlinearity necessary to induce chaos. The Rössler equations are given by

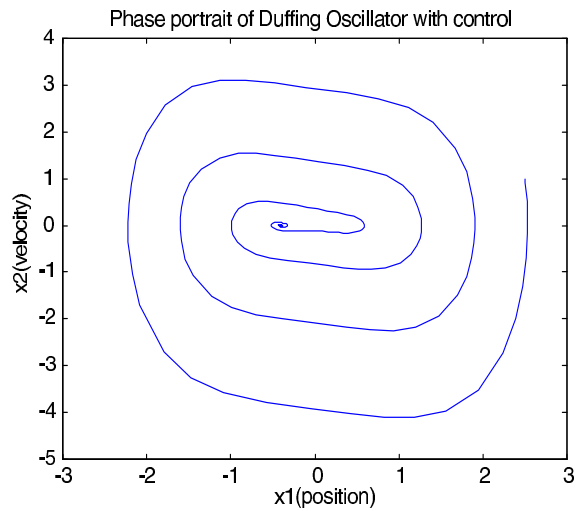


Fig. 7. Control of the Duffing's oscillator to the fixed point $(y_0, \dot{y}_0) = (-0.4, 0)$.

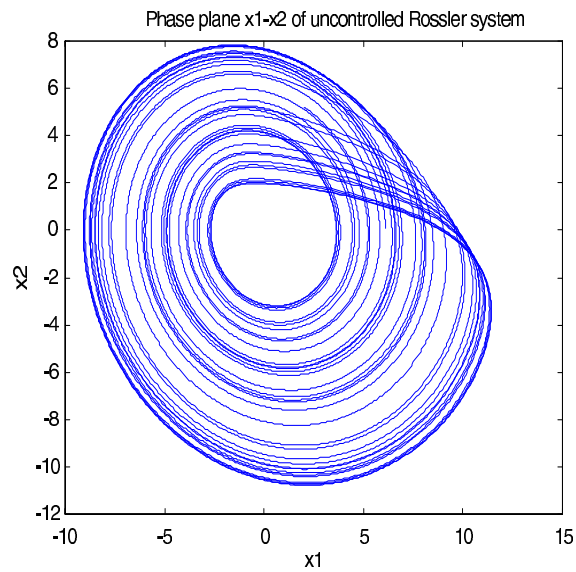
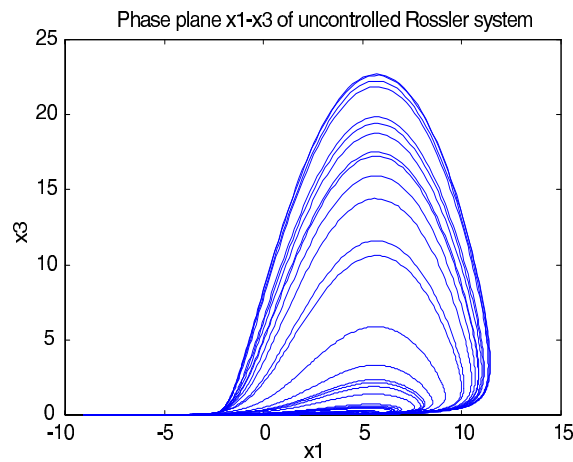


Fig. 8. The chaotic attractor of Rössler system for $a=5.7$.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\
 \dot{x}_2 &= x_1 + 0.2x_2 \\
 \dot{x}_3 &= 0.2 + x_3(x_1 - a)
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

where a is the critical parameter. There is only a single mild nonlinearity, located in the third state equation. Nonetheless, for $a=5.7$, Eq. (26) possesses a familiar chaotic attractor shown in Figs. 8 and 9. Consider an arbitrary desired periodic trajectory

Fig. 9. The chaotic attractor of the Rössler system for $a=5.7$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix} \quad (27)$$

With the feedforward control u_f and the feedback control u_t Eq. (26) takes the form

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + u_{f,1} + u_t \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 0.2x_2 + u_{f,2} \\ \dot{x}_3 &= 0.2 + x_3(x_1 - 5.7) + u_{f,3} \end{aligned} \quad (28)$$

The feed forward control u_f is chosen as

$$\begin{cases} u_{f,1} = \dot{y}_1 - f_1(y_1, t) \\ u_{f,2} = \dot{y}_2 - f_2(y_2, t) \\ u_{f,3} = \dot{y}_3 - f_3(y_3, t) \end{cases} \quad (29)$$

Including this feedforward control and linearizing about the goal trajectory given by Eq. (27), we can express the linearized system in $e (=x-y)$ as

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.2 & 0 \\ \sin 2\pi t & 0 & -0.7 + \cos 2\pi t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_t \quad (30)$$

As the control is to a periodic orbit, periodic terms appear in the matrix. In general, we may assume $u_t = -K\{e_1 \ e_2 \ e_3\}^T$ with $K = \{k_1 \ k_2 \ k_3\}$. However, for simplicity we set $k_3=0$ and with symbolic computation, we obtain conditions on k_1 and k_2 to guarantee asymptotic stability. Fig. 10 shows the area that guarantees asymptotic stability (18 Chebyshev polynomials and 22 Picard iterations are used). Fig. 11 shows the controlled dynamics to the periodic orbit for a typical set of k_1 and k_2 (control gains) selected from the stable area. Using the “Multipliers place-

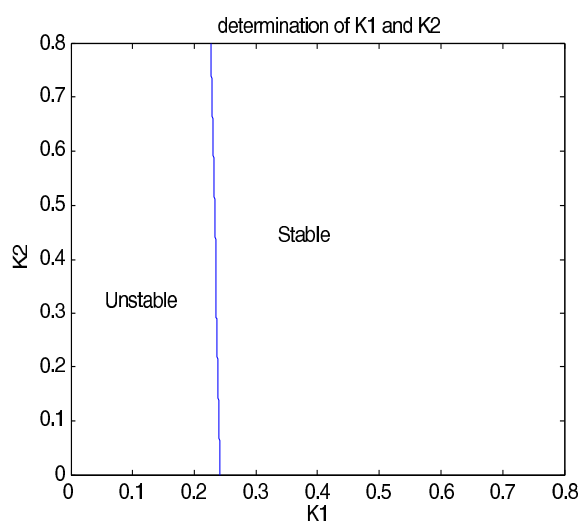


Fig. 10. Stable area guarantees asymptotic stability ($k_3=0$) for the Rossler's system.

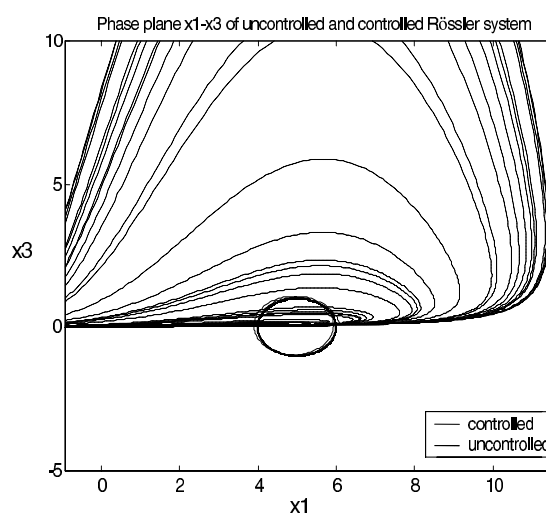


Fig. 11. The motion of the Rössler system is driven to periodic orbit: $(y_1, y_2, y_3) = (5 + \cos 2\pi t, \sin 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

ment method”, we place the desired Floquet multipliers at $\rho_1 = 0.4 + 0.8j$, $\rho_2 = 0.4 - 0.8j$ and $\rho_3 = 0.5$ and find $k_1 = 0.421$; $k_2 = 0.324$; $k_3 = -1.145$. Fig. 12 shows the controlled motion with these gains.

5.3. Controlling the dynamics of a chaotic convective flow

The dynamics of this example has been studied by Dorning et al. [19]. We consider a horizontal thermal convection layer subjected to a high temperature at the bottom boundary and a low temperature at the top boundary. Frequently, this simple geometric model provides a relevant representation of the dynamics of the natural cooling of a heat-generating component whose top

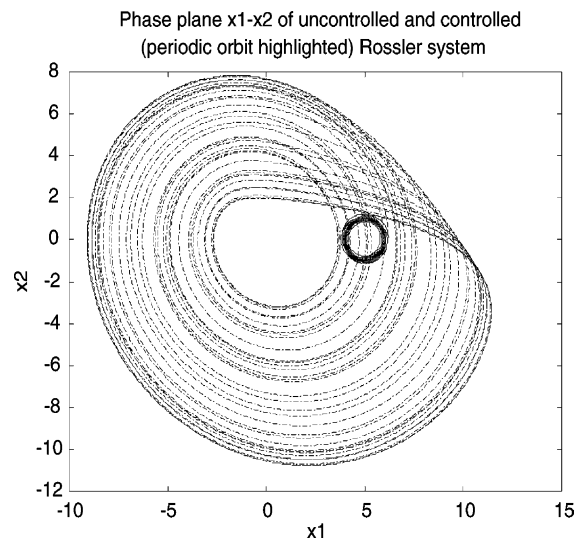


Fig. 12. Control of the Rössler system with “Multipliers placement method” to periodic orbit: $(y_1, y_2, y_3) = (5 + \cos 2\pi t, \sin 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

supplies heat to the lower boundary of the fluid layer. In many cases of technological interest, this lower surface is not retained at a constant temperature, rather varies in some time-dependant way which is generally periodic. Hence, in order to ensure the safety of those components in electrical power generating and distribution systems that are dependent upon convective cooling, it is important to be able to control those systems. We use Navier–Stokes equations for mass and momentum conversation. Then, following Lorenz method and making Fourier expansions of the stream function and temperature field and truncating them at the same low order as Lorenz did, it is straightforward to arrive at the nonautonomous parametrically forced Lorenz equations. These are given by

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ \dot{y}(t) = [\rho_0 + \rho_1 \cos \omega_1 t]x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t) - bz(t) \end{cases} \quad (31)$$

where $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ are, respectively, the time-dependent Fourier coefficients of the first term in the expansion of the stream function and the first two terms in the expansion of the temperature field. For $\rho_0 = 26.5$; $\rho_1 = 5$; $\omega_1 = 2\pi$; $\sigma = 2$; $b = 0.6$, we obtain the “Shaken butterfly”, a chaotic attractor as shown in Figs. 13 and 14 in x – z projection.

Introducing the error e between the actual and the desired trajectories, we obtain the linearized system in e and design the control gains of u_i . Thus, for the arbitrary desired periodic orbit

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin \omega_2 t \\ \sin \omega_2 t \\ 20 + \cos \omega_2 t \end{Bmatrix} \quad (32)$$

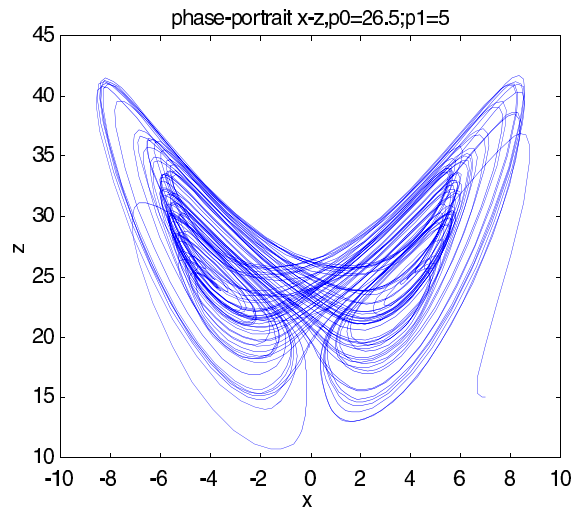


Fig. 13. The “Shaken butterfly” chaotic attractor of the nonautonomous parametrically forced Lorenz equations.

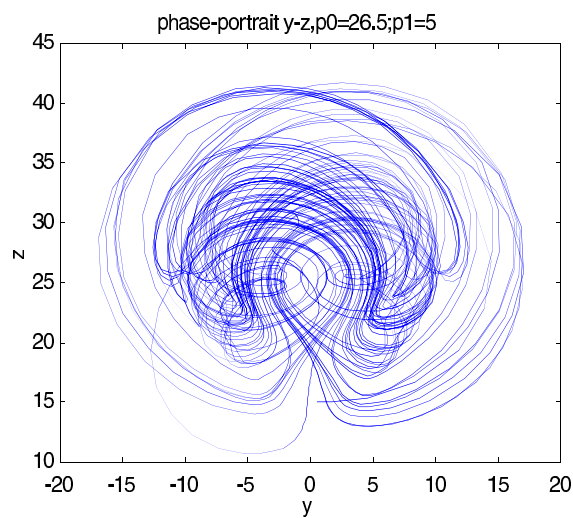


Fig. 14. The uncontrolled trajectory of the nonautonomous parametrically forced Lorenz equations.

and with $u_t = -KX$, where $K = \{k_1, k_2, k_3\}$, $X = \{x \ y \ z\}^T$, and

$$B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Eq. (31) takes the form

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\sigma x(t) + \sigma y(t) + u_{f,1} \\ \dot{y}(t) = [\rho_0 + \rho_1 \cos \omega_1 t]x(t) - y(t) - x(t)z(t) + u_{f,2} + u_t \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t) - bz(t) + u_{f,3} \end{cases} \quad (33)$$

The feedforward control is chosen as

$$\begin{cases} u_{f,1} = \dot{y}_1 - f_1(y_1, t) \\ u_{f,2} = \dot{y}_2 - f_2(y_2, t) \\ u_{f,3} = \dot{y}_3 - f_3(y_3, t) \end{cases} \quad (34)$$

where $f = \{f_1 \ f_2 \ f_3\}^T$ is the right-hand side of Eq. (31). For the desired periodic orbit, Eq. (34) becomes

$$\begin{cases} u_{f,1} = \omega_2 \cos \omega_2 t \\ u_{f,2} = \omega_2 \cos \omega_2 t + (21 - \rho_0) \sin \omega_2 t + \frac{\sin 2\omega_2 t}{2} + \frac{\rho_1}{2} [\sin(\omega_1 - \omega_2)t - \sin(\omega_1 + \omega_2)t] \\ u_{f,3} = (20b - \frac{1}{2}) + b \cos \omega_2 t - \omega_2 \sin \omega_2 t + \frac{\cos 2\omega_2 t}{2} \end{cases} \quad (35)$$

By including this feedforward control and linearizing about the goal trajectory, we can express the linearized system in e as

$$\begin{cases} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ [(\rho_0 + \rho_1 \cos \omega_1 t) - 20 - \cos \omega_2 t] & -1 & -\sin \omega_2 t \\ \sin \omega_2 t & \sin \omega_2 t & -b \end{bmatrix} \begin{cases} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{cases} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t \quad (36)$$

We select $u_t = -K\{e_1 \ e_2 \ e_3\}^T$ with $K = \{k_1 \ k_2 \ k_3\}$. We can compute the FTM for the closed-loop system if ω_1 and ω_2 are commensurate. Let $\omega_2 = 2\pi = \omega_1$ and, for simplicity, take $k_2 = k_3 = 0$, then with symbolic computation we obtain $k_1 \geq 5.18$ to guarantee the asymptotic stability. The uncontrolled as well as controlled trajectories are shown in Figs. 15 and 16. With 2 control gains k_1 and k_2 ($k_3 = 0$), we obtain conditions on k_1 and k_2 to yield asymptotic stability. Fig. 17 shows the area which guarantees the asymptotic stability using 18 Chebyshev polynomials and 22 Picard iterations. A controller with three gains for the desired periodic orbit

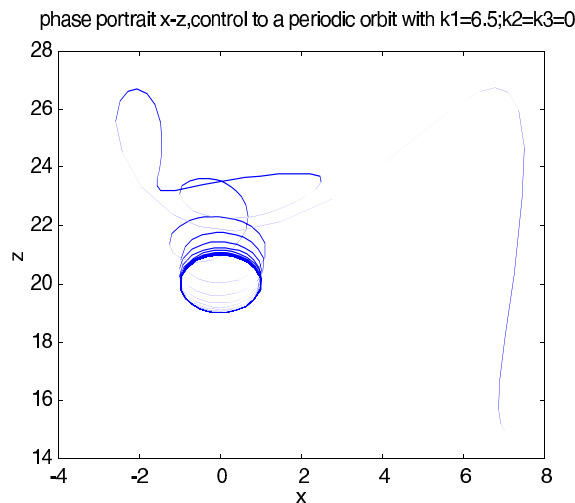


Fig. 15. Control of the nonautonomous parametrically forced Lorenz equations to the periodic orbit: $(y_1, y_2, y_3) = (\sin \omega_2 t, \sin \omega_2 t, 20 + \cos \omega_2 t)$ with $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi$.

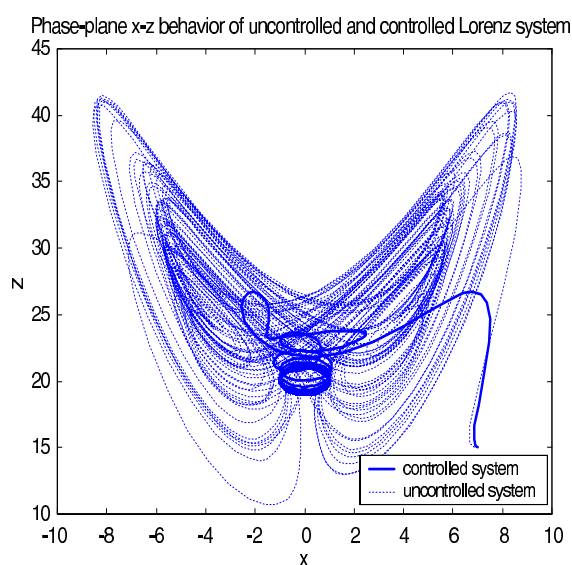


Fig. 16. Controlled motion of the nonautonomous parametrically forced Lorenz equations to the periodic orbit: $(y_1, y_2, y_3) = (\sin \omega_2 t, \sin \omega_2 t, 20 + \cos \omega_2 t)$ with $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi$.

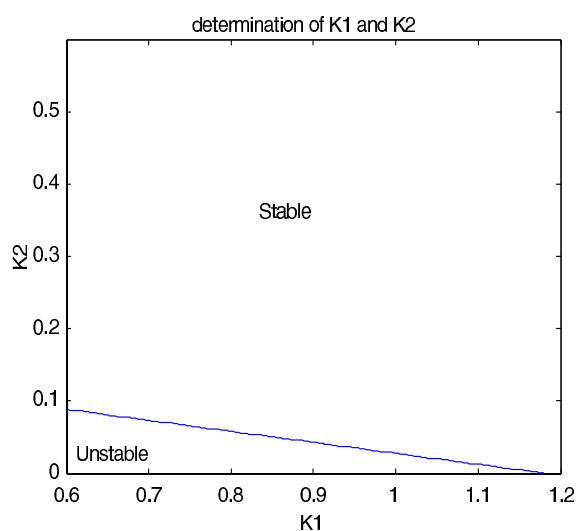


Fig. 17. Stable area guarantees asymptotic stability for the nonautonomous parametrically forced Lorenz equations ($\omega_1 = \omega_2 = 2\pi$) and $k_3 = 0$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \omega_2 t \\ \sin \omega_2 t \\ 24 + \cos \omega_2 t \end{pmatrix}$$

was also designed and the simulation results are shown in Fig. 18. We can also drive the system to a periodic orbit which does not have the same period as the original system. For example, we can choose $2\omega_2 = \omega_1 = 2\pi$ (period 2) and the desired periodic orbit as

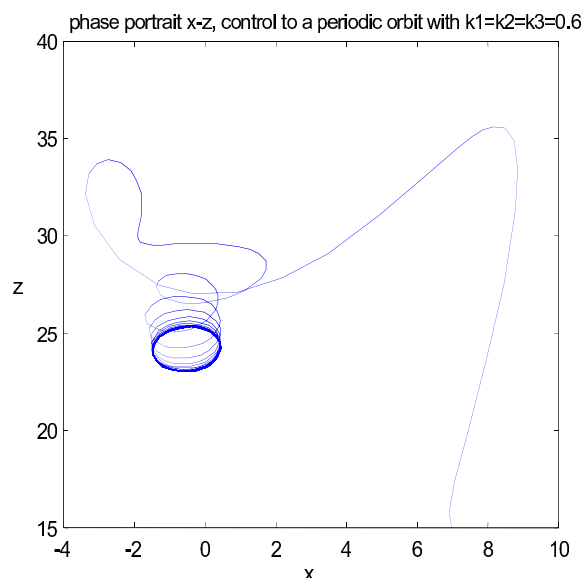


Fig. 18. Controlled trajectory of the nonautonomous parametrically forced Lorenz equations to the periodic orbit: $(y_1, y_2, y_3) = (\sin \omega_2 t, \sin \omega_2 t, 24 + \cos \omega_2 t)$; $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi$ with three control gains.

$$\begin{cases} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{cases} = \begin{cases} \sin \omega_2 t \\ \sin \omega_2 t \\ 20 + \cos \omega_2 t \end{cases}, \quad \text{with } u_t = -KX$$

$$\left(K = \{k_1, k_2, k_3\}, \quad X = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}, \quad B = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \right)$$

a controller is designed following the same methodology as before and the response is shown in Fig. 19.

6. Conclusions

A symbolic computational procedure for designing controllers for linear systems with time periodic coefficients has been suggested. Apart from its applicability to the linear systems, the method is found to be useful in the local control of general nonlinear, nonautonomous systems to a desired periodic orbit. In particular, it has been shown that the method can be successfully applied to design active controllers for nonlinear systems exhibiting chaos where the chaotic motion needs to be driven to a periodic orbit. The desired periodic motion need not be embedded in the chaotic attractor and may have any commensurate period as compared to the original time periodic system.

The control vector consists of two parts, viz., a feedforward component and a feedback component. The linearization about the desired periodic orbit leads to a set of linear equations with periodic coefficients and the symbolic computation of the control gains can be achieved using the

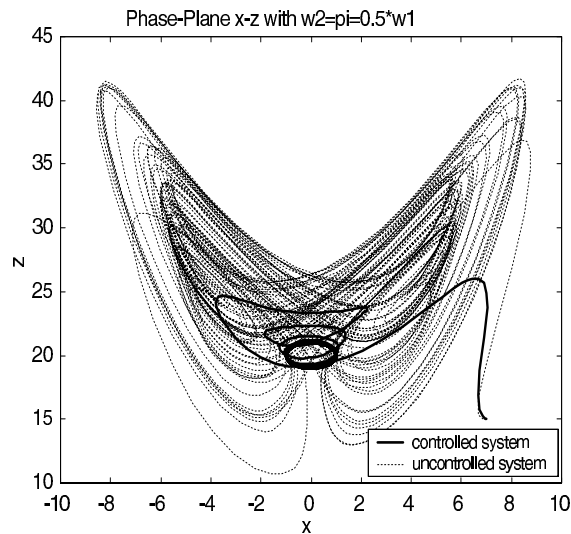


Fig. 19. Controlled motion of the nonautonomous parametrically forced Lorenz equations to the periodic orbit: $(y_1, y_2, y_3) = (\sin \omega_2 t, \sin \omega_2 t, 20 + \cos \omega_2 t)$; $2T_2 = T_1 = 2B$ (period 2).

Chebyshev polynomials and Picard Iteration. Classical techniques, such as Routh–Hurwitz criterion, can be used to stabilize the system once the Floquet transition matrix for the closed-loop system is computed in the symbolic form using a commercially available software such as Mathematica, Maple, etc. Similar to the idea of “Pole placement technique”, a “Multiplier placement method” has been suggested to place the Floquet multipliers inside the unit circle at the desired locations in order to determine the control gains. Numerical results are presented for the Duffing’s oscillator, the Rössler system and the nonautonomous parametrically forced Lorenz equations to show the effectiveness of the technique.

It must be pointed out that this method does not require a lot of computation effort since the algorithm for the symbolic computation, introduced by Sinha and Butcher [15] is based on only simple matrix multiplications and additions. Moreover, this technique guarantees the desired stability which is not the case with the least square minimization method used by Sinha and Joseph [7]. Although this approach provides an approximate symbolic form of the FTM, it is found to be very accurate when compared to the numerical (Runge–Kutta) results assuming that sufficient number of polynomials and iterations are used in the computation. If necessary, one can compute the solution to any desired accuracy. However, the symbolic computation can become very time-consuming for a large number of parameters (a large number of control gains) and for high dimensional systems. Even though we have not used optimal control and we do not design controllers by minimizing the effort, the results are quite good. The convergence appears to be slow as compared to the numerical techniques but it is expected since the approach presented here is symbolic in nature.

Acknowledgement

Financial support provided by the National Science Foundation under the grant number CMS 0114571 is gratefully acknowledged.

854 S.C. Sinha et al. / *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 10 (2005) 835–854

References

- [1] Kwakernaak H, Sivan R. Linear optimal control systems. Wiley Interscience; 1972.
- [2] Bittani S, Colaneri P, Nicolao G. The periodic Riccati equation. Berlin: Springer; 1991.
- [3] Calico RA, Wiesel WE. Control of time-periodic systems. *J Guidance* 1984;7(6):671–6.
- [4] Calise AJ, Wasikowski ME, Schrage DP. Optimal output feedback for linear time-periodic systems. *J Guidance, Contr Dyn* 1992;15:416–23.
- [5] Kabamba PT. Monodromy eigenvalue assignment in linear periodic systems. *IEEE Trans Automat Contr* 1996;31:950–2.
- [6] Torambe A, Valigi P. Asymptotic stabilization of a class of continuous-time linear periodic systems. *Syst Contr Lett* 1996;28:189–96.
- [7] Sinha SC, Joseph P. Control of general dynamic systems with periodically varying parameters via Liapunov–Floquet transformation. *ASME J Dyn Syst Measur Contr* 1994;116:650–8.
- [8] Sinha SC, Marghitu DB, Boghiu D. Stability and control of parametrically excited rotating beam. *J Dyn Syst Measur Contr* 1998;120:462–70.
- [9] Boghiu D, Sinha SC, Marghitu DB. Stability and control of a parametrically excited rotating system. Part II: Controls. *Dyn Contr* 1998;8(1):19–35.
- [10] Sinha SC, Henrichs JT, Ravindra B. A general approach in the design of active controllers for nonlinear systems exhibiting chaos. *Int J Bifurc Chaos* 2000;10(1):165–78.
- [11] Deshmukh V, Sinha SC, Joseph P. Order reduction and control of parametrically excited dynamical systems. *J Vibrat Contr* 1999;6:1017–28.
- [12] Butcher EA, Sinha SC. A hybrid formulation for the analysis of time periodic linear systems via Chebyshev polynomials. *J Sound Vibrat* 1996;95(3):518–27.
- [13] Lee YJ, Balas MJ. Controller design of periodic time-varying systems via time invariant methods. *J Guidance Contr Dyn* 1998;22(3):486–8.
- [14] Montagnier P, Spiteri RJ, Angeles J. Pitfalls of a least-square equivalent controller for linear, time-periodic systems. *Int J Contr* 2001;74(2):199–204.
- [15] Sinha SC, Butcher EA. Symbolic computation of fundamental solution matrices for time-periodic dynamical systems. *J Sound Vibrat* 1997;206(1):61–85.
- [16] Ott E, Grebogi C, Yorke JA. Controlling chaos. *Phys Lett A* 1990;64:1169–99.
- [17] Shinbrot T, Grebogi C, Yorke JA. Using small perturbations to control chaos. *Nature* 1993;65:3211–4.
- [18] Sinha SC, Wu D-H. An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems. *J Sound Vibrat* 1991;151:91–117.
- [19] Dorning JJ, Decker WJ, Holloway JP. Controlling the dynamics of chaotic convective flows. In: Kim JH, Stringer J, (Eds). *Applied chaos*. p.189.

Table des figures

Vibrations/Absorbeurs de Vibrations	7
1.1 Un objet peut être représenté par un ensemble de particules (masses ponctuelles) liées entre elles par des ressorts (voire des ressorts/amortisseurs). C'est un modèle masses-ressorts.	9
1.2 Ressort simple linéaire.	13
1.3 Système linéaire en dynamique.	13
1.4 Système masse-ressort-amortisseur.	14
1.5 Nonlinéarités régulières et non-régulières.	15
1.6 Matériaux élasto-plastiques.	15
1.7 Matériaux élastiques non linéaires.	16
1.8 Alliages à mémoire de forme.	16
1.9 Ressort purement non linéaire.	17
1.10 Contact localisé : loi de Hertz.	17
1.11 Frottement sec.	18
1.12 Contacts intermittents, chocs.	18
1.13 Phénomène de saut non linéaire dans la résonance fondamentale d'un mode avec une nonlinéarité cubique durcissante.	22
1.14 Phénomène de saut non linéaire dans la résonance sous-harmonique d'un mode avec une nonlinéarité cubique raidissante.	23
1.15 Systèmes discrets conservatifs.	27
1.16 Exemple élémentaire.	27
1.17 Mouvements libres du système linéaire associé.	28
1.18 Mouvements libres du système non linéaire.	29
1.19 Lignes modales.	30
1.20 Mouvements libres du système non linéaire sur le mode non linéaire 2.	30
1.21 Mode non linéaire.	32
1.22 Amortisseur inertiel actif (AMD).	35
1.23 Kyobashi Siewa Building, 1989, Kajima Corporation, Tokyo, Japan (AMD).	36
1.24 Les deux AMD de Kyobashi Siewa Building.	36
1.25 Amortisseur à masse linéaire (TMD).	39
1.26 Jardin de 3650t situé sur le toit pour protéger le Keyakizaka de Roppongi Hills.	40
1.27 Le Keyakizaka et le fonctionnement de son jardin anti-vibrations.	40
1.28 Amortisseur à masse non linéaire (NTMD).	42
1.29 Système semi-actif.	44
1.30 Le dispositif du Ando Nishikicho Building.	44

Principe et Premiers Exemples du Pompage Énergétique	47
2.1 Principe de la modélisation.	49
2.2 Simulation numérique du déplacement de la structure initiale linéaire sans et avec pompage énergétique.	51
2.3 Réponses transitoires numériques $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour différentes valeurs de $\dot{x}_1(0) = \sqrt{2h}$	53
2.4 Système considéré avec 2 degrés de liberté.	56
2.5 Réponses des oscillateurs avec $F = 0.09$	58
2.6 Analyse en ondelettes avec $F = 0.09$	59
2.7 Réponses des oscillateurs avec $F = 0.15$	60
2.8 Analyse en ondelettes avec $F = 0.15$	61
2.9 Géométrie des déformations du ressort.	61
2.10 Conception pratique du ressort non linéaire.	62
2.11 a) Pont avec câbles à haubans. b) Poutre suspendue par un câble.	62
2.12 Vibrations locales a) du câble (normales au plan vertical), b) de la poutre (horizontales), c) de la poutre (verticales).	63
2.13 Banc d'essai du pompage énergétique avec un système à deux degrés de liberté.	64
2.14 Système général à deux degrés de liberté	66
2.15 Réponses numériques transitoires du système (2.11) pour a) $h = 0.01$, b) $h = 0.15$	68
2.16 Conception d'un système linéaire par morceaux.	69
2.17 Vérification de l'apparition du pompage énergétique ($\delta = 0.4$, $k_1 = 0.016$ et $k_3 = 0.096$) : a) oscillateur linéaire avec et sans couplage, b) résonance de l'oscillateur non linéaire.	70
2.18 Transition de l'énergie pendant le phénomène de pompage énergétique.	71
2.19 Efficacité du pompage énergétique dans le plan des paramètres (m, γ) avec $\gamma = 0.05$, $k_2 = 0.9$, $M = 1$, $h = 0.15$, $\lambda_1 = 0.01$, $\lambda_2 = 0.05$, $\delta = 0.4$, $k_1 = 0.02$ et $k_3 = 0.1$	71
2.20 Possibilités d'apparition du chaos ($\lambda_1 = 0.2$).	75
2.21 Le plus grand exposant de Lyapunov est positif : chaos ($\lambda_1 = 0.2$, $y_2(0) = 0.48$).	76
2.22 Le plus grand exposant de Lyapunov avec du "chaos transitoire" ($\lambda_2 = 0.05$, $\dot{y}_2(0) = 1$).	76
2.23 Pompage énergétique (avec du "chaos transitoire") ($\lambda_2 = 0.05$, $\dot{y}_2(0) = 1$).	77
2.24 Système considéré pour des applications.	78
2.25 Modèle de bâtiment considéré.	78
2.26 Caractéristiques du bâtiment.	79
2.27 Analyse modale.	79
2.28 Pompage énergétique du bâtiment ($m = 0.01M$).	80
2.29 Système considéré avec huit degrés de liberté pour la structure linéaire, et deux degrés de liberté pour la structure non linéaire.	81
2.30 Pompage énergétique du bâtiment ($m + m_s = M/30$).	81
2.31 Modèle de bâtiment	82
2.32 Pompage énergétique du bâtiment flexible continu ($m = M/20$).	84
2.33 Pompage énergétique avec du bruit blanc : deux processus différents sont réalisés.	88
2.34 L'écart-type : un bon indicateur pour l'efficacité du pompage énergétique.	89
2.35 L'écart-type de $x_a(L, t)$ pour des couplages différents.	89
Pompage Énergétique en Régime Instationnaire	91
3.1 Système considéré.	92
3.2 Mode localisé et mode non localisé.	95

3.3	Zone d'instabilité (en noir) du mode de vibration non-localisé.	97
3.4	Mode de vibration non-localisé instable : transfert vers le mode de vibration localisé quand un faible amortissement est ajouté.	98
3.5	Mode de vibration localisé instable : transfert vers le mode de vibration non-localisé quand un faible amortissement est ajouté.	99
3.6	Système général à deux degrés de liberté.	101
3.7	Moyennes et écart-types des oscillateurs sans et avec couplage en utilisant un chaos d'ordre 2 et avec C incertain.	105
3.8	Développement en polynômes de chaos d'ordre 2 (ligne solide -) : comparaison avec une simulation Monte-Carlo (ligne pointillée ..).	107
3.9	Moyennes et écart-types des oscillateurs sans et avec couplage et ratio d'énergie (moyenne et écart-type) dans l'oscillateur non linéaire en utilisant un chaos d'ordre 2 et avec c_1 incertain.	108
3.10	Calcul analytique global des modes normaux non linéaires : conversion inverse stable de localisation de mode avec $F_0 = 20$, $F_1 = 0.1F_0$ ou $F_1 = 0.3F_0$	110
3.11	Courbes avec deux bifurcations points-selles dans certains cas ($a_{1_0} = 1.5$ ou $a_{1_0} = 4.5$ et $a_{1_1} = 40\% \times a_{1_0}$).	113
3.12	Apparition ou non de la bifurcation ($a_{1_0} = 2.4$ et $a_{1_1} = 0$ ou $a_{1_1} = 40\% \times a_{1_0}$).	114
3.13	Système considéré.	115
3.14	Etude d'une migration de fréquence grâce à la Transformée de Hilbert.	117
3.15	Phénomène de pompage énergétique grâce à une résonance 1 : 1.	117
3.16	Modélisation du système considéré avec deux degrés de liberté au moyen d'un circuit électronique.	118
3.17	Résultats obtenus avec la modélisation au moyen d'un circuit électronique.	118
3.18	Spectre (i.e. le spectre de réponse en accélération) d'un tremblement de terre réel à Friule (Italie).	119
3.19	Pompage énergétique avec un tremblement de terre réel à Friule (Italie). a) Structure primaire sans couplage (i.e. le cas où il n'y a pas d'absorbeur). b) Structure primaire avec couplage (i.e. le cas où un absorbeur est présent). c) Structure attachée avec couplage.	120
3.20	Pompage énergétique avec un tremblement de terre réel à Friule (Italie).	120
3.21	Intensité d'Arias I_a avec et sans couplage. La structure primaire sans couplage est représentée par une ligne pointillée --, la structure primaire avec couplage correspond à une ligne épaisse $\overline{\quad}$ et la structure attachée avec couplage est représentée par une ligne fine -.	121
3.22	Deux amplitudes différentes de \ddot{x}_g sont considérées. a) Amplitude = 1m.s^{-2} . b) Amplitude = 3m.s^{-2} . Dans a) et b), la ligne pointillée -- représente le déplacement de x_1 sans couplage, la ligne épaisse $\overline{\quad}$ représente le déplacement de x_1 avec couplage et la ligne fine - le déplacement de x_2 avec couplage.	122
3.23	Analyse en ondelettes avec $\lambda_2 = 8$ ($h = 0.6$).	125
3.24	Analyse en ondelettes avec $\lambda_2 = 22$ ($h = 0.6$).	125
3.25	Système expérimental.	127
3.26	I) Modèle de bâtiment. II) Nonlinéarité expérimentale.	128
3.27	Conception de la nonlinéarité cubique.	129
3.28	Caractéristique force-déplacement du ressort non linéaire. Les points correspondent aux résultats expérimentaux et la ligne correspond à une approximation cubique.	129
3.29	Schéma du système considéré à deux degrés de liberté.	130
3.30	Evaluation de l'approximation cubique dans l'Equation (3.90) : la ligne continue représente la solution exacte et la ligne pointillée représente l'approximation.	131

3.31	Evaluation de l'erreur relative en utilisant l'approximation cubique dans l'Equation (3.90).	131
3.32	Système expérimental et identification linéaire.	132
3.33	Identification linéaire avec masses ajoutées/retirées.	133
3.34	I) Montage expérimental. II) Système d'acquisition.	133
3.35	Modèle éléments finis du modèle de bâtiment.	133
3.36	Fréquences naturelles du modèle de bâtiment à l'aide du modèle éléments finis après calages.	134
3.37	Formes des modes linéaires de la structure à quatre étages.	134
3.38	Système expérimental et design du NES.	135
3.39	Oscillations libres avec un déplacement initial non nul de la structure primaire (impulsion sur la plus haute plaque). a) Oscillations libres sans couplage. b) Atténuation avec couplage. c) Résonance de la masse secondaire.	136
3.40	Analyse en ondelettes de la réponse expérimentale avec un déplacement initial non nul.	136
3.41	Résultats expérimentaux avec un forcing de tremblement de terre réel (Friule en Italie). a) Structure primaire (x_1) sans couplage. b) Structure primaire (x_1) avec couplage. c) Structure attachée (x_2) avec couplage.	137
3.42	Résultats expérimentaux pour l'Intensité d'Arias.	138
3.43	Résultats expérimentaux avec un forcing de tremblement de terre réel (Annecy en France). a) Accélération de x_g (en $m.s^{-2}$). b) Accélération de x_1 (en $m.s^{-2}$) sans couplage. c) Accélération de x_1 (en $m.s^{-2}$) avec couplage. d) Accélération de x_2 (en $m.s^{-2}$) avec couplage.	139
3.44	Spectre de réponse en déplacement (la pulsation naturelle ω_1 du bâtiment varie) avec le séisme d'Annecy. La ligne continue représente le pic de déplacement de x_1 (i.e. le maximum de la valeur absolue du déplacement $Max x_1 $) avec couplage (i.e. le cas où l'absorbeur est présent) et la ligne pointillée le pic du déplacement de x_1 (i.e. le maximum de la valeur absolue du déplacement $Max x_1 $) sans couplage.	139
3.45	Résultats expérimentaux avec un forcing de tremblement de terre réel (Alkion en Greece). a) Accélération de x_g (en $m.s^{-2}$). b) Accélération de x_1 (en $m.s^{-2}$) sans couplage. c) Accélération de x_1 (en $m.s^{-2}$) avec couplage. d) Accélération de x_2 (en $m.s^{-2}$) avec couplage.	140
3.46	I) Résultats expérimentaux avec une impulsion. II) Comparaison des résultats expérimentaux et numériques.	141
3.47	Phénomène de capture de résonance.	142
3.48	Excitation de type pulse Gaussien avec une fréquence centrée à 4.87Hz.	143
3.49	Comparaison des réponses temps/fréquence de la structure excitée avec un pulse gaussien centré sur la fréquence 4.87Hz quand l'attache non linéaire est soit enlevée, soit activée. (a) Accélération du quatrième étage quand l'attache est active (en bleu)/ enlevée (en rouge). (b) Spectre de réponse du quatrième étage. (c) Accélération du NES. (d) Spectre du NES.	143
3.50	Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excité par un pulse gaussien (4.87Hz) quand le pompage énergétique n'est pas actif.	143
3.51	Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excité par un pulse gaussien (4.87Hz) quand le pompage énergétique est actif.	144
3.52	Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération de l'attache non linéaire avec un pulse gaussien (4.87Hz) quand le pompage énergétique est actif.	144

3.53	Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excité par le tremblement de terre de Friule à 25% quand le pompage énergétique est actif.	145
3.54	Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excité par le tremblement de terre de Friule à 25% quand le pompage énergétique est inactif.	145
3.55	Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excité par le tremblement de terre de Rethimnon à 30% quand le pompage énergétique est inactif.	146
3.56	Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excité par le tremblement de terre de Rethimnon à 30% quand le pompage énergétique est actif.	146
3.57	Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du NES par le tremblement de terre de Rethimnon à 30% quand le pompage énergétique est actif.	147
3.58	Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du quatrième étage excité par le tremblement de terre de Rethimnon à 80% quand le pompage énergétique est actif.	147
3.59	Cartographie en ondelettes / réponse de l'accélération du NES par le tremblement de terre de Rethimnon à 80% quand le pompage énergétique est actif.	147
Pompage Énergétique en Régime Stationnaire		149
4.1	Système considéré à deux degrés de liberté.	151
4.2	Pompage énergétique avec un régime vibratoire quasi-périodique. La ligne pointillée - - représente le déplacement de x_1 sans couplage (i.e. le cas où l'absorbeur n'est pas présent), la ligne épaisse — représente le déplacement de x_1 avec couplage (i.e. le cas où l'absorbeur est présent) et la ligne fine – représente le déplacement de x_2 avec couplage.	152
4.3	Sections de Poincaré montrant un régime vibratoire quasi-périodique (les deux figures sont tracées lorsque l'attache non linéaire est couplée à la structure primaire; celle du haut est pour la structure primaire et celle du bas pour l'attache non linéaire).	152
4.4	Déformation interne $x_1 - x_2$ du NES. Les lignes horizontales correspondent aux valeurs critiques de $\tilde{\varphi}_{20}$ (liées à la déformation interne) calculées à partir du dénominateur de l'Equation (4.27). La ligne pointillée - - correspond à la frontière la plus haute et la ligne continue – à la frontière la plus basse.	158
4.5	Diagramme de bifurcations (en fonction du paramètre λ_2).	159
4.6	Diagramme de bifurcations (en fonction du paramètre $\omega_1^2 G$).	159
4.7	Spectre de réponse en déplacement (la fréquence naturelle ω_1 du bâtiment varie) avec une excitation externe $2.5 \cos(29.2t)$. La ligne continue représente le déplacement de x_1 avec couplage (i.e. le cas où l'absorbeur est présent) et la ligne pointillée le déplacement de x_1 sans couplage.	160
4.8	Réponse quasipériodique du Système (4.4) pour le jeu de paramètres : $\varepsilon = 0.05$, $\omega_2^2 = 8$, $\omega_1^2 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.2$, $F = 0.2$. La ligne pointillée représente le déplacement de l'oscillateur linéaire et la ligne continue représente le déplacement du NES en fonction du temps.	160
4.9	Tracé de la déformation interne du NES $x_1 - x_2$ en fonction du temps pour le jeu de paramètres : $\varepsilon = 0.05$, $\omega_2^2 = 8$, $\omega_1^2 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.2$, $F = 0.2$. La ligne horizontale correspond aux singularités des Equations (4.28), décrites par l'Equation (4.29). La ligne pointillée correspond à N_2 et la ligne continue à N_1	161

4.10	Circuit électronique type utilisé.	161
4.11	Détail d'un circuit électronique utilisé.	162
4.12	Détail de l'ensemble des dispositifs électroniques.	162
4.13	Schéma du circuit électronique.	163
4.14	Résultats obtenus avec des circuits électroniques. (A) Résultats expérimentaux. (B) Résultats numériques.	164
4.15	Comparaison de l'énergie emmagasinée dans le système pour l'absorbeur non linéaire de vibrations (ligne continue) et pour l'absorbeur linéaire de vibrations proprement conçu (ligne pointillée). Les paramètres utilisés sont $\varepsilon = 0.1$, $\omega_2^2 = 8$, $\omega = 0.95$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.2$, $F = 0.2$ (absorbeur non linéaire) et $\omega = 0.85$, $k = 0.9$ (absorbeur linéaire). Les valeurs ont été choisies pour fournir la plus grande amplitude de réponse dans chaque cas.	165
4.16	Evolution de $(\lambda_2 \dot{v} - \omega_1^2 u - \omega_1^2 v + \omega_2^2 v^3)$ par intégration numérique ($\varepsilon = 0.07215$).	167
4.17	FrFs tracées grâce à une analyse en échelles multiples.	168
4.18	Comparaison entre les échelles multiples et les solutions numériques.	169
4.19	Evolution de la FrF tracée grâce à une analyse en échelles multiples.	169
4.20	Comparaison entre la méthode de complexification et l'analyse en échelles multiples.	171
4.21	<i>Comparaison avec un Tuned Mass Damper (TMD) en calculant les régimes stationnaires stables. a) Amplitude de $x_1(t)$. b) Amplitude de $x_2(t)$. La ligne épaisse — représente les amplitudes avec le couplage non linéaire et la ligne fine - représente les amplitudes avec le TMD linéaire, la ligne pointillée - - représente les amplitudes de x_1 sans couplage.</i>	172
4.22	Comparaison avec un tuned mass damper linéaire classique.	173
4.23	Courbes de résonances et régions de réponses quasi-périodiques.	178
4.24	Formes des oscillations quasi-périodiques avec des simulations numériques.	178
4.25	Région de réponses quasi-périodiques et frontière de l'instabilité de type combinaison de la solution harmonique.	179
4.26	Formes des oscillations quasi-périodiques à une valeur constante de la pulsation $\omega = 1.85$ et pour plusieurs valeurs du paramètre de forcing F	179
4.27	Formes des oscillations et résultats de l'analyse harmonique.	180
4.28	Forcing périodique transitoire à une fréquence proche de la fréquence interne de résonance. La ligne pointillée - - représente les vibrations sans couplage et la ligne fine - représente les vibrations avec couplage.	181
4.29	Réponses quasi-périodiques des deux masses. a) Accélération de x_1 (en m/s^2). b) Accélération de x_2 (en m/s^2).	182
4.30	Réponses quasi-périodiques obtenues.	182
4.31	Analyse en ondelettes des réponses quasi-périodiques ($F=0.03$). a) Oscillations de x_2 . b) Analyse en ondelettes de x_2 . c) Oscillations de x_1	183
4.32	Forcing périodique transitoire à une fréquence proche de la fréquence interne de résonance sans une amplitude de forcing suffisante. La ligne pointillée - - représente les vibrations sans couplage et la ligne fine - représente les vibrations avec couplage.	183
4.33	Application de premier retour expérimentale. a) Mouvement périodique. b) Mouvement quasi-périodique.	184
4.34	Cartographie en ondelettes du déplacement du quatrième étage et réponse temporelle à une excitation de type sinus à une fréquence $f = 4.87$ Hz.	185
4.35	Résultats expérimentaux avec une excitation périodique.	185
4.36	Analyse en ondelettes avec une excitation périodique.	186

Optimisation	189
5.1 Fonction $H(t)$. Comparaison entre la solution numérique de (5.14) et l'expression analytique (5.15) pour différents ordres des séries de Taylor.	195
5.2 Fonction $H(t)$. La ligne solide décrit la solution (5.15) en prenant en compte des séries de Taylor jusqu'aux termes du cinquième ordre en τ_1 . La ligne pointillée décrit la solution numérique du Système (5.1).	195
5.3 Réponses avec intégration numérique de (5.1) avec et sans couplage.	196
5.4 Fonctions $H(t)$, $\text{Imag}(\varphi_{10}(t))$, $\text{Re}(\varphi_{10}(t))$, $\text{Re}(\varphi_{20}(t))$, comparées avec les résultats de l'intégration du Système initial (5.1).	196
5.5 Fonction $H(t)$. La ligne solide décrit la solution (5.15) en prenant en compte des séries de Taylor jusqu'aux termes d'ordre 5 en τ_1 . La ligne pointillée décrit la solution numérique du Système (5.1).	197
5.6 Comparaison de la fonction $H(t)$ en considérant le signe + ou - dans les Equations (5.1).	197
5.7 Comparaison des réponses avec intégration numérique de (5.1) en considérant le signe + ou - dans les Equations (5.1).	198
5.8 Comparaison de $H(t)$ pour différentes valeurs de n	198
5.9 Section de Poincaré pour $N = 0.08$ (système conservatif).	199
5.10 Section de Poincaré pour $N = 0.18$ (système conservatif).	200
5.11 Section de Poincaré pour $N = 0.98$ (système conservatif).	201
5.12 Phénomène de battements non linéaires pour $N = 0.16$ (système conservatif).	201
5.13 Influence de $\tilde{\eta}$ sur $H(t)$	202
5.14 Comportement de $H(t)$ pour différentes valeurs des coefficients d'amortissement.	203
5.15 Diagrammes de bifurcations : solutions stationnaires de l'Equation (5.28).	204
5.16 Battements non linéaires dans le plan $(\theta - \Delta)$ pour $N = 0.25$	205
5.17 Solutions des Equations (5.25, 5.26) dans le plan $(\theta - \Delta)$ avec $-\frac{\delta - 1}{2} \pm \frac{\alpha\delta}{2} > 0$ pour $N=0.4$	206
5.18 Solutions des Equations (5.25, 5.26) dans le plan $(\theta - \Delta)$ avec $-\frac{\delta - 1}{2} \pm \frac{\alpha\delta}{2} < 0$ pour $N=0.15$	206
5.19 Solutions des Equations (5.25,5.26) dans le plan $(\theta - \Delta)$ avec $-\frac{\delta - 1}{2} \pm \frac{\alpha\delta}{2} < 0$ pour $N=0.38$	207
5.20 Battements non linéaires sans amortissement pour $N = 0.25$	207
5.21 Déclenchement du pompage énergétique avec amortissement).	208
5.22 Résultats expérimentaux avec une impulsion et comparaison avec les résultats numériques.	209
5.23 Comparaison des résultats expérimentaux avec l'intégration numérique et l'expression analytique (5.15).	209
5.24 Comparaison des résultats expérimentaux avec l'intégration numérique des Equations (5.10, 5.11).	210
5.25 I) Résultats expérimentaux avec une impulsion. II) Comparaison des résultats expérimentaux avec les résultats numériques.	211
5.26 Comparaison des résultats expérimentaux avec l'intégration numérique et l'expression analytique (5.15).	212
5.27 Comparaison des résultats expérimentaux avec l'intégration numérique.	212
5.28 Système considéré avec un mode normal non linéaire.	214

5.29	Capture de résonance au-dessus d'une valeur spécifique de l'énergie injectée h . Avec $h = 5$, <i>a</i>) oscillations libres amorties de l'oscillateur non linéaire $y_1(t)$ et <i>b</i>) le pompage énergétique ne se produit pas pour l'oscillateur linéaire $x_1(t)$: la ligne pointillée - - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire sans couplage et la ligne solide - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire avec couplage. Avec $h = 14$, il y a <i>c</i>) résonance de l'oscillateur non linéaire $y_1(t)$ et <i>b</i>) le pompage énergétique se produit : la ligne pointillée - - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire sans couplage et la ligne solide - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire avec couplage.	215
5.30	Capture de résonance du mode normal non linéaire $h = 14$ étudiée avec une analyse Temps-Fréquences : l'IF de $y_1(t)$ est représentée par une ligne solide - et l'IF du mode linéaire est représentée par une ligne solide $\overline{\quad}$ plus épaisse.	216
5.31	Système considéré avec des oscillateurs non linéaires multiples.	217
5.32	Principe des modes normaux non linéaires multiples.	217
5.33	Capture de résonance du mode normal non linéaire $w_3(t)$ avec $h = 20$. <i>a</i>) Une analyse temps-fréquences est considérée : l'IF de $w_2(t)$ est représentée par une ligne solide - , l'IF de $w_3(t)$ est représentée par une fine ligne pointillée - - et l'IF de l'oscillateur linéaire est représentée par une ligne solide épaisse $\overline{\quad}$. <i>b</i>) Résonance de $w_3(t)$. <i>c</i>) Vibrations de l'oscillateur linéaire (la ligne pointillée - - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire sans couplage et la ligne solide - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire avec couplage).	219
5.34	Capture de résonance du mode normal non linéaire $w_2(t)$ avec $h = 1.6$. <i>a</i>) Une analyse temps-fréquences est considérée : l'IF de $w_2(t)$ est représentée par une ligne solide - , l'IF de $w_3(t)$ est représentée par une fine ligne pointillée - - et l'IF de l'oscillateur linéaire est représentée par une ligne solide épaisse $\overline{\quad}$. <i>b</i>) Résonance de $w_2(t)$. <i>c</i>) Vibrations de l'oscillateur linéaire (la ligne pointillée - - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire sans couplage et la ligne solide - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire avec couplage).	220
5.35	Capture de résonance des deux modes normaux non linéaires $w_2(t)$ et $w_3(t)$ avec $h = 5.2$. <i>a</i>) Une analyse temps-fréquences est considérée : l'IF de $w_2(t)$ est représentée par une ligne solide - , l'IF de $w_3(t)$ est représentée par une fine ligne pointillée - - et l'IF de l'oscillateur linéaire est représentée par une ligne solide épaisse $\overline{\quad}$. <i>b</i>) Résonance de $w_3(t)$. <i>c</i>) Résonance de $w_2(t)$. <i>d</i>) Vibrations de l'oscillateur linéaire (la ligne pointillée - - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire sans couplage et la ligne solide - représente le déplacement de l'oscillateur linéaire avec couplage).	221
5.36	<i>a</i>) Analyse Temps-Fréquences en ondelettes de $w_3(t)$. <i>b</i>) Analyse Temps-Fréquences en ondelettes de $w_2(t)$. <i>c</i>) Vibrations de l'oscillateur linéaire.	222
5.37	Modèle de bâtiment à quatre étages avec un double NES attaché sur le dernier étage. <i>a</i>) Vue de face ; <i>b</i>) double NES ; <i>c</i>) zoom sur les ressorts et les glissières.	223
5.38	Dispositif du double NES. <i>a</i>) Schéma du comportement non linéaire. <i>b</i>) Glossaire.	224
5.39	Système masse-ressort non linéaire réduit à trois degrés de liberté.	225
5.40	Réponse linéaire (sans NES) du bâtiment à quatre étages : <i>a</i>) excitation de la table vibrante ; <i>b</i>) analyse en ondelettes de la réponse du dernier étage.	226
5.41	Atténuation des vibrations induites par une excitation de type pulse gaussien à $f = 4.39$ Hz : <i>a</i>) rôle simultané des NNMs ; <i>b-d</i>) comparaison entre les mouvements linéaires et non linéaires : haut-gauche) réponse du dernier étage u , milieu-gauche) réponse du NNM 1 $u_b - u$, bas-gauche) réponse du NNM2 $u_a - \frac{1}{2}u_b - \frac{1}{2}u$, droite) densités de pouvoir spectral correspondantes ; <i>b</i>) 0.08 g , <i>c</i>) 0.15 g et <i>c</i>) 0.3 g	227

5.42	Comparaison des réponses linéaires (sans NES) et non linéaires (avec NES) du bâtiment à quatre étages forcé avec une excitation de type pulse 0.07 g à $f = 4.39$ Hz.	228
5.43	Comparaison des réponses linéaires (sans NES) et non linéaires (avec NES) du bâtiment à quatre étages forcé avec un excitation de type pulse 0.1 g à $f = 4.39$ Hz.	228
5.44	Comparaison des réponses linéaires (sans NES) et non linéaires (avec NES) du bâtiment à quatre étages forcé avec un excitation de type pulse 0.13 g à $f = 4.39$ Hz.	229
5.45	Influence de l'amortissement spécifique du NES $\xi_a = \xi_b = \xi$ sur le comportement des NNMs : simulations numériques ; haut) réponse linéaire contre non linéaire du quatrième étage ; milieu) réponse du NNM1 ($u_b - u$) ; bas) réponse du NNM2 ($u_a - \frac{1}{2}u_b - \frac{1}{2}u$).	230
5.46	Courbes amplitudes-fréquences avec une excitation de type balayage sinus $2 \rightarrow 20$ Hz : comparaison entre le comportement linéaire, l'optimal TMD de Frahm et la structure couplée avec le double NES.	231
5.47	Comparaison des réponses linéaires (sans NES) et non linéaires (avec NES) du bâtiment excité par un pulse grâce à un marteau de 2.4 kgF sur le dernier étage.	232

Bibliographie

- [Agnes, 1997] Agnes, G. S. (1997). *Performance of Nonlinear Mechanical, Resonant-Shunted Piezoelectric, and Electronic Vibration Absorbers for Multi-Degree-of-Freedom Structures*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- [Ahmadi et Fan, 1990] Ahmadi, G. et Fan, F. (1990). Nonstationary Kanai-Tajimi models for El Centro 1940 and Mexico City 1985 earthquake. *Prob Eng Mech*, 5 :171–81.
- [Anand, 1972] Anand, G. (1972). Natural modes of a coupled nonlinear system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 7 :81–91.
- [Anderson et al., 1982] Anderson, R., Harnad, J., et Winternitz, P. (1982). Systems of ordinary differential equations with nonlinear superposition techniques. *Physica D*, 4 :164–182.
- [Arias, 1970] Arias, A. (1970). A Measure of Earthquake Intensity. *Seismic Design for Nuclear Power Plants*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts :438–483.
- [Arnold, 1955] Arnold, F. R. (1955). Steady-state behavior of systems provided with nonlinear dynamic vibration absorbers. *Journal of Applied Mechanics*, 22 :487–92.
- [Arnold, 1988] Arnold, V. (1988). *Dynamical Systems III, Encyclopedia of Mathematical Sciences*. Springer Verlag, Berlin and New York edition.
- [Awrejcewicz et al., 1998] Awrejcewicz, J., Andrianov, I., et Manevitch, L. (1998). *Asymptotic Approaches in Nonlinear Dynamics : New Trends and Applications*. Springer, Heidelberg edition.
- [Azeez et Vakakis, 2001] Azeez, M. et Vakakis, A. (2001). Proper orthogonal decomposition of a class of vibro-impact oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, 240 :859–889.
- [Azrar et al., 1992] Azrar, L., Cochelin, B., Damil, N., et Potier-Ferry, M. (1992). *An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches, New advances in Computational Structural Mechanics*, Amsterdam, Ladevèze P. and Zienkiewicz O.C. Elsevier science publishers edition.
- [Azrar et al., 1993] Azrar, L., Cochelin, B., Damil, N., et Potier-Ferry, M. (1993). An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behavior of elastic plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 :1251–1277.
- [Babitsky et Krupenin, 2001] Babitsky, V. et Krupenin, V. (2001). *Vibrations of Strongly Non-linear Discontinuous Systems*. Springer, Berlin.
- [Bellizzi et Cochelin, 2003] Bellizzi, S. et Cochelin, B. (2003). (Eds) *Quelques aspects des modes non-linéaires en vibrations*. Publication LMA, N 156, Janvier 2003, ISBN : 2909669-20-3.
- [Benaroya et Rehak, 1988] Benaroya, H. et Rehak, M. (1988). Finite element methods in probabilistic structural analysis : A selective review. *Appl Mech Rev, ASME*, 41(5) :201–213.

- [Berlioz et al., 2001] Berlioz, A., Lamarque, C.-H., et Malasoma, J.-M. (2001). Non Linear Behavior of an Inclined Cable. Experimental and Analytical Investigations. *18th ASME Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, DETC2001/VIB-21557, New York, NY.*
- [Blazejczyk-Okolewska, 2001] Blazejczyk-Okolewska, B. (2001). Analysis of an impact damper of vibrations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 12 :1983–1988.
- [Boivin et al., 1995] Boivin, N., Pierre, C., et Shaw, S. (1995). Non-linear normal modes, invariance, and modal dynamics approximations of non-linear systems. *Nonlinear Dynamics*, 8 :315–346.
- [Boutin et al., 1999] Boutin, C., Ibraim, E., et Hans, S. (19-21 octobre 1999). Auscultation de bâtiments réels en vue de l'estimation de la vulnérabilité. *Vème Colloque National AFPS, Cachan*, pages 298–305.
- [Bykhovsky, 1980] Bykhovsky, I. (1980). Fundamentals of Vibration Engineering, Robert E. Krieger Publishing, New York.
- [Cadou et al., 1998] Cadou, J., Cochelin, B., Damil, N., et Potier-Ferry, M. (1998). Anm for stationary navier-stokes equations and with petrov-galerkin formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5, N°1 :31–50.
- [Casciati et al., 2003] Casciati, F., Stefano, A., et Matta, E. (2003). Simulating a conical tuned liquid damper. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 11 :353–370.
- [Caughey, 1963] Caughey, T. (1963). Equivalent linearisation techniques. *Journal of the Acoustical Society of America*, pages 1706–1711.
- [Cépa, 1995] Cépa, E. (1995). Equations différentielles stochastiques multivoques. *Lectures Notes in Mathematics, Séminaire de Probabilités XXIX*, pages 86–107.
- [Chan et al., 1996] Chan, H., Chung, K., et Xu, Z. (1996). A perturbation-incremental method for strongly non-linear oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 31 :59–72.
- [Chen et al., 1997] Chen, Q., Manson, G., et Worden, K. (1997). *New Advances in Modal Synthesis of Large Structures*. Higher-order FRFs for multi-input nonlinear systems : a case study, Balkema, Rotterdam, L. Jézéquel éd. n.
- [Chen et Cheung, 1996] Chen, S. et Cheung, Y. (1996). A modified Lindstedt-Poincaré method for a strongly nonlinear two degree-of-freedom system. *Journal of Sound and Vibration*, 193 :751–762.
- [Cheng et Xu, 2006] Cheng, J. et Xu, H. (2006). Inner mass impact damper for attenuating structure vibration. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :5355–5369.
- [Cochelin, 1994] Cochelin, B. (1994). A path-following technique via an asymptotic-numerical method : an efficient perturbation technique for non-linear structural mechanics. *Revue Européenne des Eléments finis*, 3(2) :281–297.
- [Cochelin, 2005] Cochelin, B. (2005). Définition des modes non-linéaires. *Modes non-linéaires : définitions et applications, Journée Nationale, CNAM Paris* :18 Novembre.
- [Cochelin et al., 1994] Cochelin, B., Damil, N., et Potier-Ferry, M. (1994). Asymptotic-numerical method and Padé approximants for nonlinear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :1187–1213.
- [Cooke et Strubble, 1996] Cooke, C. et Strubble, R. (1996). Non-linear normal modes, invariance, and modal dynamics approximations of non-linear systems. *Quarterly of Applied Mathematics*, XXIV :177–193.

- [Cuscumano et al., 1994] Cuscumano, J., Sharkady, M., et Kimble, B. (1994). Experimental measurements of dimensionality and spatial coherence in the dynamics of a flexible-beam impact oscillator. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 347 :421–438.
- [Cuvalci et Ertas, 1996] Cuvalci, O. et Ertas, A. (1996). Pendulum as vibration absorber for flexible structures : experiments and theory. *Trans. of the ASME. Journal of Vibrations and Acoustics*, 118 :558–566.
- [Damil et Potier-Ferry, 1990] Damil, N. et Potier-Ferry, M. (1990). A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal for Engineering Science*, 28, N°9 :943–957.
- [Daubechies, 1998] Daubechies, I. (1998). Orthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communication on pure and applied mathematics*, vol. XLV :909–996. AT T Bell Laboratories.
- [Dermott et Murray, 1983] Dermott, S. et Murray, C. (1983). Nature of the Kirkwood gaps in the asteroid belt. *Nature*, 301 :201–205.
- [Dessombz, 2000] Dessombz, O. (2000). *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon 2000-36.
- [Duncan et al., 2005] Duncan, M., Wassgren, C., et Krousgrill, C. (2005). The damping performance of a single particle impact damper. *Journal of Sound and Vibration*, 286 :123–144.
- [Elhage-Hussein et al., 2000] Elhage-Hussein, A., Potier-Ferry, M., et Damil, N. (2000). A numerical continuation method based on Padé approximants. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :6981–7001.
- [Fujino et al., 1993] Fujino, Y., Warnitchai, P., et Pacheco, B. (1993). An Experimental and Analytical Study of Autoparametric Resonance in a 3DOF Model of Cable-Stayed-Beam. *Nonlinear Dynamics*, 4 :111–138.
- [Gendelman, 2001] Gendelman, O. (2001). Transition of Energy to a Nonlinear Localized Mode in a Highly Asymmetric System of Two Oscillators. *Nonlinear Dynamics*, 25 :237–253.
- [Gendelman, 2004] Gendelman, O. (2004). Bifurcations of Nonlinear Normal Modes of Linear Oscillator with Strongly Nonlinear Damped Attachment. *Nonlinear Dynamics*, 37(2) :115–128.
- [Gendelman et al., 2005] Gendelman, O., Gorlov, D., Manevitch, L., et Moussienko, A. (2005). Dynamics of coupled linear and essentially nonlinear oscillators with substantially different masses. *Journal of Sound and Vibration*, 286, Issues 1-2 :1–19.
- [Gendelman et al., 2006] Gendelman, O., Gourdon, E., et Lamarque, C.-H. (2006). Quasiperiodic Energy Pumping in Coupled Oscillators under Periodic Forcing. *Journal of Sound and Vibration*, 294 :651–662.
- [Gendelman et Lamarque, 2005] Gendelman, O. et Lamarque, C.-H. (2005). Dynamics of linear oscillator coupled to strongly nonlinear attachment with multiple states of equilibrium. *Chaos, Solitons and Fractals*, 24 :501–509.
- [Gendelman et Manevitch, 2000] Gendelman, O. et Manevitch, L. (2000). Reflection of short rectangular pulses in the ideal string attached to strongly nonlinear oscillator. *Chaos, Solitons and Fractals*, 11 :2473–2477.
- [Gendelman et al., 2003] Gendelman, O., Manevitch, L., Vakakis, A., et Bergman, L. (2003). A Degenerate Bifurcation Structure in the Dynamics of Coupled Oscillators with Essential Stiffness Nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, 33 :1–10.
- [Gendelman et al., 2001] Gendelman, O., Manevitch, L., Vakakis, A., et Closkey, R. (2001). Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators : Part I-Dynamics of the Underlying Hamiltonian Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 68 :34–41.

- [Gendelman et Starosvetsky, 2006] Gendelman, O. et Starosvetsky, Y. (2006). Quasiperiodic response regimes of strongly nonlinear vibration absorber. *Journal of Applied Mechanics*, in press.
- [Gendelman et Vakakis, 2000] Gendelman, O. et Vakakis, A. (2000). Transitions from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*, 11 :1535–1542.
- [Gerasimov et al., 1986] Gerasimov, A., Izrailev, F., et Temnykh, J. (1986). The dynamics of the beam-beam interaction. *Springer Lecture Notes in Physics*, 247 :154–175.
- [Gourdon et Lamarque, 2005a] Gourdon, E. et Lamarque, C.-H. (2005a). Energy Pumping for a larger span of Energy. *Journal of Sound and Vibration*, 285, Issue 3 :711–720.
- [Gourdon et Lamarque, 2005b] Gourdon, E. et Lamarque, C.-H. (2005b). Energy Pumping with Various Nonlinear Structures : Numerical Evidences. *Nonlinear Dynamics*, 40 :281–307.
- [Gourdon et Lamarque, 2006] Gourdon, E. et Lamarque, C.-H. (2006). Nonlinear Energy Sink with Uncertain Parameters. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, July, volume 1, Issue 3 :187–195.
- [Gourdon et al., 2006a] Gourdon, E., Lamarque, C.-H., et Pernot, S. (2006a). Contribution to Efficiency of Irreversible Passive Energy Pumping with a Strong Nonlinear Attachment. *Nonlinear Dynamics*, in press.
- [Gourdon et al., 2006b] Gourdon, E., Taylor, C., Alexander, N., Lamarque, C.-H., et Pernot, S. (2006b). Nonlinear Energy Pumping under Transient Forcing with Strongly Nonlinear Coupling : Theoretical and Experimental Results. *Journal of Sound and Vibration*, doi :10.1016/j.jsv.2006.06.074 (in press).
- [Guckenheimer et Holmes, 1983] Guckenheimer, J. et Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York.
- [Hagedorn, 1988] Hagedorn, P. (1988). Non-linear oscillations. *Clarendon Press*, Oxford.
- [Hartog, 1947] Hartog, J. D. (1947). *Mechanical Vibration*. Mcgraw-hill, New York edition.
- [Holmes, 1982] Holmes, P. (1982). The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table. *Journal of Sound and Vibration*, 84 :173–189.
- [Hsiau, 1983] Hsiau, L. (1983). Analysis of critical and post-critical behavior of non linear dynamical systems by the normal form method-part i. normalization formulae, part ii. divergence and flutter. *Journal of Sound and Vibration*, 89 :169–194.
- [Hunt et Nissen, 1982] Hunt, J. B. et Nissen, J. (1982). The broadband dynamic vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 83 :573–8.
- [Ibrahim, 1987] Ibrahim, R. (1987). Structural dynamics with parameter uncertainties. *Appl Mech Rev, ASME*, 40(3) :309–328.
- [Itô, 1980] Itô, K. (1980). *Methods Other than Difference Methods*. Encyclopedic Dictionary of Mathematics, Cambridge, MA : MIT Press Vol. 2, 2nd edition.
- [Iwan, 1973] Iwan, W. (1973). A generalization of the concept of equivalent linearization. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 8 :279–287.
- [Jackson, 1990] Jackson, A. (1990). *Perspectives of Nonlinear Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [Jackson, 1994] Jackson, E. (Cambridge University Press, 1994). *Perspectives of nonlinear dynamics, v.1*.
- [Jang et al., 2003] Jang, X., McFarland, D., Bergman, L., et Vakakis, A. (2003). Steady State Passive Nonlinear Energy Pumping in Coupled Oscillators : Theoretical and Experimental Results. *Nonlinear Dynamics*, 33 :87–102.

- [Johnson et rand, 1979] Johnson, T. et rand, R. (1979). On the existence and bifurcation of minimal normal modes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 14 :1–12.
- [Joly, 2005] Joly, E. (2005). Les nouvelles technologies du bâtiment. *Dépêche - Chargé de Mission Transport Génie Civil au Service pour la Science et la Technologie*, Numéro SMM05-042.
- [Jézéquel et Lamarque, 1991a] Jézéquel, L. et Lamarque, C.-H. (1991a). Analysis of Nonlinear Structural Vibrations by Normal Form Theory. *Journal of Sound and Vibrations*, 149 (3) :429–459.
- [Jézéquel et Lamarque, 1991b] Jézéquel, L. et Lamarque, C.-H. (1991b). Nonlinear modal synthesis based on normal form theory. *Proceedings of the IX-th International Modal Analysis Conference, Florence, Italy*, pages 101–108.
- [Kanai, 1957] Kanai, K. (1957). Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground motion. *Bull Earthq Res Inst Univ Tokyo*, 35 :309–25.
- [Karyeaclis et Caughey, 1989a] Karyeaclis, M. et Caughey, T. (1989a). Stability of a Semi-active Impact Damper : Part I-Global Behavior. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 56 :926–929.
- [Karyeaclis et Caughey, 1989b] Karyeaclis, M. et Caughey, T. (1989b). Stability of a Semi-active Impact Damper : Part II-Global Behavior. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 56 :930–9240.
- [Kershen et al.,] Kershen, G., Lee, Y., Vakakis, A., McFarland, D., et Bergman, L. Irreversible Passive Energy Transfer in Coupled Oscillators with Essential Nonlinearity. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 66, N°2 :648–679.
- [Kevorkian et Cole, 1996] Kevorkian, J. et Cole, J. (1996). *Multiple Scales and Singular Perturbation Methods*. Springer, New York.
- [King et Vakakis, 1996] King, M. et Vakakis, A. (1996). An energy-based approach to computing resonant nonlinear normal modes. *Journal of Applied Mechanics*, 63 :810–819.
- [Kloeden et Platen, 1992] Kloeden, P. et Platen, E. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, volume 23. Applications of Mathematics, Springer-Verlag edition.
- [Lamarque, 1992] Lamarque, C.-H. (1992). Contribution à la Modélisation et à l'Identification des Systèmes Mécaniques Non-Linéaires. *Thèse de Doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon*, Numéro d'ordre : 92-32.
- [Lamarque et Jézéquel, 1992] Lamarque, C.-H. et Jézéquel, L. (1992). Introduction of Nonlinear Complex Modes by Using Normal Form Theory. *Proceedings of the Conference on Experimental and Numerical Methods in Structural Dynamics, Louvain, Belgique*, pages 937–946.
- [Lee et al., 2005] Lee, Y., Kershen, G., Vakakis, A., Panagopoulos, D., Bergman, L., et McFarland, D. (2005). Complicated Dynamics of a Linear Oscillator with a Light, Essentially Nonlinear Attachment. *Physica D*, 204, No 1-2 :41–69.
- [Loeve, 1977] Loeve, M. (1977). *Probability Theory, Fourth edition*. Springer-Verlag edition.
- [MacKay et Meiss, 1987] MacKay, R. et Meiss, J. (1987). *Hamiltonian Dynamical Systems : A Reprint Selection*. Adam Hilger, Bristol, Philadelphia.
- [Malatkar et Nayfeh, 2003] Malatkar, P. et Nayfeh, A. (2003). On the transfer of energy between widely spaced modes in structures. *Nonlinear Dynamics*, 31 :225–242.
- [Mallat, 1989] Mallat, S. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(1989) :674–693.

- [Manevitch, 1999] Manevitch, L. (1999). Complex representation of dynamics of coupled nonlinear oscillators. *Mathematical Models of Nonlinear Excitations, Transfer, Dynamics, and Control in Condensed Systems and other media*, Kluwer Academic Press, Plenum Publishers, NY, 269-300.
- [Manevitch, 2001] Manevitch, L. (2001). The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables. *Nonlinear Dynamics*, 25 :95–109.
- [Manevitch et al., 2003] Manevitch, L., Gendelman, O., Musienko, A., Vakakis, A., et Bergman, L. (2003). Dynamic Interaction of a Semi-infinite Linear Chain of Coupled Oscillators with a Strongly Nonlinear End Attachment. *Physica D*, 178 :1–18.
- [Manevitch et al., 2006a] Manevitch, L., Gourdon, E., et Lamarque, C.-H. (2006a). Towards the design of an optimal energetic sink in a strongly inhomogeneous two-degree-of-freedom system. *Journal of Applied Mechanics, in press*.
- [Manevitch et al., 2007] Manevitch, L., Gourdon, E., et Lamarque, C.-H. (2007). Parameters optimization for energy pumping in strongly nonhomogeneous 2dof system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 31 :900–911.
- [Manevitch et al., 1989] Manevitch, L., Mikhlin, Y., et Pilipchuk, V. (1989). The Method of Normal Oscillation for Essentially Nonlinear Systems. *Moscow, Nauka*.
- [Manevitch et al., 2006b] Manevitch, L., Musienko, A., et Lamarque, C.-H. (2006b). New analytical approach to energy pumping problem in strongly nonhomogeneous 2dof systems. *Mechanica*, ISSN 0025-6455 (Print) 1572-9648 (Online), DOI 10.1007/s11012-006-9021-y.
- [McFarland et al., 2005] McFarland, D., Bergman, L., et Vakakis, A. (2005). Experimental study of non-linear energy pumping occurring at a single fast frequency. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40 :891–899.
- [McFarland et al., 2002a] McFarland, D., Bergman, L., Vakakis, A., Manevitch, L., et Gendelman, O. (2002a). Energy pumping into passive nonlinear energy sinks attached to forced linear substructures : analytical and experimental results. *Ninth Conference on Nonlinear Vibrations, Stability, and Dynamics of Structures, Session 3, Virginia Polytechnic Institute and State University*.
- [McFarland et al., 2002b] McFarland, D., Gipson, D., Vakakis, A., et Bergman, L. (2002b). Characterization of an essentially nonlinear 2-DOF vibration test apparatus. *15th ASCE Engineering Mechanics Conference, Columbia University, New York, NY*. Proceedings.
- [McFarland et al., 2002c] McFarland, D., Vakakis, A., et Bergman, L. (2002c). Experimental verification of the performance of a nonlinear energy sink. *15th ASCE Engineering Mechanics Conference, Columbia University, New York, NY*. Proceedings.
- [Mikhlin, 1996] Mikhlin, Y. (1996). Normal vibrations of a general class of conservative oscillators. *Nonlinear Dynamics*, 11 :1–16.
- [Minorsky, 1983] Minorsky, N. (1983). *Nonlinear Oscillations*. Krieger Publishing Co., Florida.
- [Moon et Holmes, 1979] Moon, F. et Holmes, P. (1979). A Magnetoelastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 65, Issue 2 :275–296.
- [Natsiavas, 1992] Natsiavas, S. (1992). Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorbers. *Journal of Sound and Vibration*, 156 (2) :227–245.
- [Nayfeh, 1981] Nayfeh, A. (1981). *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley-Interscience, New York.
- [Nayfeh et Mook, 1979] Nayfeh, A. et Mook, D. (1979). *Nonlinear Oscillations*. Wiley-Interscience, New York.

- [Nayfeh et Mook, 1995] Nayfeh, A. et Mook, D. (1995). Energy transfer from high-frequency to low-frequency modes in structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 117 :186–195.
- [Nayfeh et Nayfeh, 1994a] Nayfeh, A. et Nayfeh, S. (1994a). On nonlinear modes of continuous systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116 :129–136.
- [Nayfeh et Nayfeh, 1995] Nayfeh, A. et Nayfeh, S. (1995). Nonlinear normal modes of a continuous systems with quadratic nonlinearities. *Journal of Vibration and Acoustics*, 117 :199–205.
- [Nayfeh, 1973] Nayfeh, A. H. (1973). Perturbation methods. *Wiley-Interscience*, NY.
- [Nayfeh et Nayfeh, 1994b] Nayfeh, S. et Nayfeh, A. (1994b). Energy Transfer From High to Low-Frequency modes in a Flexible Structure via Modulation. *ASME J. Vibr. Acoust.*, 116 :203–207.
- [O'Malley, 1991] O'Malley, R. (1991). *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*. Springer, New York.
- [Oppenheim et Schafer, 1975] Oppenheim, A. et Schafer, R. (1975). Digital Signal Processing. *Englewood Cliffs, NJ*.
- [Ormondroyd et Hartog, 1928] Ormondroyd, J. et Hartog, J. D. (1928). The theory of the dynamic vibration absorber. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 50 :A9–A22.
- [Panayotounakos et al., 2002] Panayotounakos, D., Panayotounakou, A., et Vakakis, A. (2002). On the solution of the unforced duffing oscillator with damping. *Nonlinear Dynamics*, 28 :1–16.
- [Parker et Chua, 1989] Parker, T. et Chua, L. (1989). *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York, Inc. edition.
- [Pernot, 2000] Pernot, S. (2000). Méthodes ondelettes pour l'étude des vibrations et de la stabilité des systèmes dynamiques. *Thesis in Civil Engineering, Institut National des Sciences Appliquées, Lyon, France*, Isal no.0071 :441p.
- [Pesheck et al., 2001] Pesheck, E., Boivin, N., Pierre, C., et Shaw, S. (2001). Nonlinear Modal Analysis of Structural Systems Using Multi-Mode Invariant Manifolds. *Nonlinear Dynamics*, 25 :183–205.
- [Pilipchuck, 1985] Pilipchuck, V. (1985). The Calculation of Strongly Nonlinear Systems Close to Vibration-Impact Systems. *Prikl. Mat. Meck. (PMM)*, 49, No.6 :572–578.
- [Qaisi et Kilani, 2000] Qaisi, M. et Kilani, A. (2000). A power-series solution for a strongly non-linear two-degree-of-freedom system. *Journal of Sound and Vibration*, 233 :489–494.
- [Quinn, 1997] Quinn, D. (1997). Resonance capture in a three degree of freedom mechanical system. *Nonlinear Dynamics*, 14 :309–333.
- [Rand, 1974] Rand, R. (1974). A direct method for nonlinear normal modes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 9 :363–368.
- [Rivin, 1999] Rivin, E. (1999). *Stiffness and Damping in Mechanical Design*. Marcel Dekker, New York, Inc. edition.
- [Roberti, 1994] Roberti, V. (1994). Contrôle de Structures : Théories et Applications. *Doctorat de Mécanique de l'Ecole Centrale de Lyon*, Numéro d'ordre : 94-19.
- [Rosenberg, 1961] Rosenberg, R. (1961). On normal vibrations of a general class of nonlinear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, 28 :275–283.
- [Rosenberg, 1962] Rosenberg, R. (1962). The normal modes of nonlinear n -dof systems. *Journal of Applied Mechanics*, 30 :7–14.

- [Rosenberg, 1966] Rosenberg, R. (1966). On nonlinear vibrations of systems with many dof. *Advances in Applied Mechanics*, 9 :155–242.
- [Shaw et Holmes, 1983] Shaw, S. et Holmes, P. (1983). A periodically forced linear oscillator with impacts : chaos and long period motions. *Physical Review Letters*, 51 :623–626.
- [Shaw et Pierre, 1991] Shaw, S. et Pierre, C. (1991). Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150 :170–173.
- [Shaw et Pierre, 1993] Shaw, S. et Pierre, C. (1993). Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164 :85–124.
- [Shaw et Wiggins, 1988] Shaw, S. et Wiggins, S. (1988). Chaotic Motions of a Torsional Vibration Absorber. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 55 :952–958.
- [Sinha et al., 2005] Sinha, S., Gourdon, E., et Zhang, Y. (2005). Control of time-periodic systems via symbolic computation with application to chaos control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 10, Issue 8 :835–854.
- [Smith, 1986] Smith, H. (1986). Normal forms for periodic systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 113 :578–590.
- [Szemplińska-Stupnicka, 1983] Szemplińska-Stupnicka, W. (1983). Nonlinear normal modes and the generalized Ritz method in the problems of vibrations of non linear elastic continuous systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 18 :149–165.
- [Szemplińska-Stupnicka et Bajkowski, 1980] Szemplińska-Stupnicka, W. et Bajkowski, J. (1980). Multi-harmonic response in the regions of instability of harmonic solution in multi-degree-of-freedom non-linear systems. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 15 :1–11.
- [Tajimi, 1960] Tajimi, H. (1960). A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake. *Proc 2nd WCEE*, vol. II. Tokyo : Science Council of Japan :781–98.
- [Timoshenko, 1954] Timoshenko, S. (1954). *Théorie des Vibrations*. Librairie Polytechnique CH. Béranger, Paris et Liège.
- [Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959] Timoshenko, S. et Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, New York, 2nd edition.
- [Tri et al., 1996] Tri, A., Cochelin, B., et Potier-Ferry, M. (1996). Résolution des équations de Navier-Stokes et détection des bifurcations stationnaires par une méthode asymptotique numérique. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 5(4) :415–442.
- [Vakakis, 1992] Vakakis, A. (1992). Nonlinear normal oscillations in a strongly nonlinear discrete system. *Journal of Sound and Vibration*, 158 :341–361.
- [Vakakis, 1997] Vakakis, A. (1997). Non-linear normal modes and their applications in vibration theory : an overview. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11 :3–22.
- [Vakakis, 2001] Vakakis, A. (2001). Inducing Passive Nonlinear Energy Sinks in Vibrating Systems. *ASME Transactions, Journal of Vibration and Acoustics*, 123 :3, pages 324–332.
- [Vakakis, 2003] Vakakis, A. (2003). Shock Isolation Through the Use of Nonlinear Energy Sinks. *Journal of Vibration and Control*, 9 :79–93.
- [Vakakis et Gendelman, 2001] Vakakis, A. et Gendelman, O. (2001). Energy Pumping in Non-linear Mechanical Oscillators : Part II-Resonance Capture. *Journal of Applied Mechanics*, 68 :42–48.
- [Vakakis et al., 1999] Vakakis, A., Kounadis, A., et Raftoyiannis, I. (1999). Use of nonlinear localization for isolating structures from earthquake-induced motions. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28 :21–36.

-
- [Vakakis et al., 2003] Vakakis, A., Manevitch, L., Gendelman, O., et Bergman, L. (2003). Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments. *Journal of Sound and Vibration*, 264 :559–577.
- [Vakakis et al., 1996] Vakakis, A., Manevitch, L., Mikhlin, Y., Pilipchuk, V., et Zevin, A. (1996). Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. *Wiley Interscience, New York*.
- [Vakakis et al., 2004a] Vakakis, A., Manevitch, L., Musienko, A., Kerschen, G., et Bergman, L. (2004a). Transient dynamics of a dispersive elastic wave guide weakly coupled to an essentially nonlinear end attachment. *Wave Motion*, 41 :109–132.
- [Vakakis et al., 2004b] Vakakis, A., McFarland, D., Bergman, L., Manevitch, L., et Gendelman, O. (2004b). Isolated resonance captures and resonance capture cascades leading to single- or multi-mode passive energy pumping in damped coupled oscillators. *Journal of Vibration and Acoustics*, 126 :235–244.
- [Vakakis et Rand, 1992] Vakakis, A. et Rand, R. (1992). Normal modes and global dynamics of a two degree-of-freedom nonlinear system, ii : high energies. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 27 :875–888.
- [Ville, 1948] Ville, J. (1948). Théorie et application de la notion de signal analytique. *Câbles et Transmissions*, 2A(1) :61–74.
- [Wiggins, 1990] Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, New York.
- [Wolf et al., 1985] Wolf, A., Swift, J., Swinney, H., et Vastano, J. (1985). *Physica 16D*, page 285.
- [Xiu et Karniadakis, 2002] Xiu, D. et Karniadakis, G. (2002). The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2) :619–644.
- [Yakubovich et Starzhinskii, 1975] Yakubovich, V. et Starzhinskii, V. (1975). *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients I and II*. Wiley, New York.
- [Zniber et Quinn, 2003] Zniber, A. et Quinn, D. (2003). Frequency shifting in nonlinear resonant systems with damping. *Proceedings of the 203 ASME Design Engineering technical conferences, Chicago*, DETC2003/VIB-48444.