

THÈSE

présentée devant
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir
le grade de DOCTEUR
SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

David MARX

SIMULATION NUMÉRIQUE D'UN RÉFRIGÉRATEUR THERMOACOUSTIQUE

Soutenue le 4 novembre 2003 devant la Commission d'Examen

JURY

Président : M. P. LE QUÉRÉ
Examineurs : M. Ph. BLANC-BENON
M. M. BRUNEAU (Rapporteur)
M. J.-N. GENGE
M. D. JUVÉ
M. L. MONGEAU (Rapporteur)
M. E. PLESKA

Remerciements

Ce travail, commencé en Novembre 2000, s'est déroulé au sein du Centre acoustique du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon, UMR CNRS 5509. Il a été cofinancé par le Centre National de La Recherche Scientifique et la Délégation Générale pour l'Armement. Je remercie ces organismes pour leur soutien.

Je remercie Daniel Juvé, Directeur du Département de Mécanique des Fluides, Acoustique et Energétique de l'Ecole de Centrale de Lyon pour m'avoir accueilli dans son équipe, et pour avoir été membre du jury.

Je tiens également à remercier Patrick Le Quéré, Directeur du Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour avoir accepté de présider le jury.

Le Professeur Michel Bruneau, du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, a suivi mon travail depuis le commencement, je le remercie de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail en qualité de rapporteur.

Ces remerciements s'associent à ceux que j'adresse au Professeur Luc Mongeau, de Purdue University, qui a lui aussi été le rapporteur de ce travail, et avec lequel j'ai pu avoir des discussions intéressantes sur un sujet qu'il connaît bien.

Je remercie le Professeur Jean-Noël Gence, de l'Université Claude Bernard Lyon I, pour avoir fait parti du jury, et pour l'enthousiasme avec lequel il a lu ce travail.

Je remercie aussi mon directeur de thèse, Philippe Blanc-Benon, Directeur de Recherche CNRS au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon, pour m'avoir proposé ce sujet intéressant et pour avoir suivi régulièrement l'avancement de mes travaux.

Je suis reconnaissant à Eric Pleska, ingénieur de la Division des Systèmes de Forces et de la Prospective (Délégation Générale pour l'Armement), d'avoir suivi le déroulement de ce travail.

J'exprime ma gratitude à Christophe Bailly et Christophe Bogey pour l'aide qu'ils m'ont apporté dans le domaine de la simulation numérique.

Plusieurs discussions utiles m'ont été permises avec des personnes invitées régulièrement au laboratoire. Parmi ces personnes, je remercie tout particulièrement Vera Khoklova pour sa gentillesse.

J'exprime enfin ma reconnaissance à l'ensemble du personnel du laboratoire pour l'ambiance conviviale qui a accompagné ces trois années. Je salue Laurent, qui a résolu un bon nombre de mes problèmes informatiques.

Résumé

L'effet thermoacoustique résulte de l'interaction entre une onde acoustique et une paroi, et il se traduit par un transport de chaleur dans la couche limite thermique, parallèlement à la paroi. Dans un réfrigérateur thermoacoustique, ce phénomène est exploité au moyen d'un empilement de plaques parallèles finement espacées, placé dans un résonateur acoustique qui crée une onde acoustique de fort niveau. L'effet thermoacoustique induit une différence de température entre les extrémités des plaques. Des échangeurs de chaleur froid et chaud, placés de part et d'autre de l'empilement, complètent le dispositif. Un des inconvénients des réfrigérateurs thermoacoustiques reste leur faible efficacité, et une amélioration nécessite une meilleure compréhension des phénomènes physiques mis en jeu. Du fait de la complexité du problème (présence de couches limites, de flux de chaleur, d'un gradient de température moyen, de non-linéarités), une approche analytique reste difficile, et un outil de calcul numérique a été développé au cours de cette thèse.

La simulation numérique se concentre sur l'étude du noyau thermoacoustique, c'est-à-dire sur l'ensemble plaque-échangeurs. Le domaine de simulation est une tranche de résonateur, incluant son fond rigide, mais pas la source. Une onde stationnaire est obtenue dans le domaine par superposition d'une onde progressive incidente, introduite par la méthode des caractéristiques, et de l'onde réfléchi sur le fond du résonateur. Le parti de ne faire aucune hypothèse simplificatrice dans les équations a été pris, et la simulation directe des équations de Navier-Stokes compressibles est faite. Elle s'appuie sur des méthodes de résolution peu dissipatives et d'ordre élevé. Une telle simulation est coûteuse. Cependant une diminution significative du coût est obtenue en simulant un réfrigérateur fonctionnant à une fréquence élevée de 20 kHz, bien supérieure à celles utilisées dans les dispositifs expérimentaux existants, mais ne modifiant pas la physique du problème.

Dans un premier temps, l'effet thermoacoustique est calculé au-dessus d'une plaque 1D. Des comparaisons sont faites avec les prédictions de la théorie linéaire, et les éventuelles divergences expliquées. Des effets non-linéaires propres à l'empilement, concernant en particulier l'oscillation de température, ainsi que des mouvements moyens, sont observés. L'influence de ces effets sur la puissance du réfrigérateur est étudiée. Dans un deuxième temps, des échangeurs de chaleur 1D modélisés par des plaques isothermes sont ajoutés, ce qui fournit un premier outil d'optimisation pour le réfrigérateur ainsi constitué. Il apparaît que le choix de la longueur des échangeurs, ainsi que celui de la distance de séparation empilement/échangeurs a des conséquences importantes sur l'efficacité du réfrigérateur. Pour terminer, une plaque 2D est simulée. L'écoulement autour de cette plaque est comparé à celui fourni par des expériences précédemment faites au laboratoire pendant la thèse de Serge Duffourd. L'influence de tourbillons formés périodiquement en bouts de plaque sur le transfert de chaleur est étudiée.

Abstract

Thermoacoustic heat pumping results from the interaction between a sound wave and a rigid boundary. A heat flux parallel to the boundary within the thermal boundary layer is generated. This phenomenon is used in thermoacoustic refrigerators, in which a stack of tightly spaced plates is immersed in an acoustic resonator. The thermoacoustic heat pumping results in a temperature difference between the extremities of the stack plates. The addition of heat exchangers at the cold and hot ends of the stack allows the device to pump heat from a cold reservoir via the cold heat exchanger while the power is supplied by an acoustic source. Among the disadvantages of thermoacoustic refrigerators is their low efficiency. To improve efficiency the physical mechanisms need to be better understood. Due to the complexity of the problem, which involves boundary layers, heat fluxes, temperature gradients, and nonlinearity, analytical models are not sufficient. Hence a numerical tool was developed and is described in the present work.

The numerical analysis focuses on the thermoacoustic stack and on the heat exchangers. The computational domain is a refrigerator slice, including its rigid end, but not the acoustic source. A stationary wave is obtained by superimposing two counterpropagating waves : one entering the domain, the other leaving the domain, after reflection on the rigid end. Two-dimensional compressible Navier-Stokes equations were solved. Low dispersive and low dissipative numerical schemes were used. The computational cost was reduced by considering a very high frequency (20 kHz). This frequency is large compared to the ones that are commonly used in experiments but the underlying physics of the problem remains unchanged.

First, the case of a single 1D stack plate was considered. Comparisons are made with linear theory predictions, and possible discrepancies between simulation results and linear theory predictions are explained. Nonlinear effects in the temperature oscillations due to the heat exchange between the fluid and the plate as well as some mean flows were observed. The impact of these effects on the heat pumping was studied. The role of heat exchangers modelled by isothermal plates was investigated, and some optimization was performed. In particular, it was found that the choice of the heat exchanger length and that of the exchanger-stack gap have an important effect on the refrigerator efficiency. Finally, the case of a 2D stack plate was considered. The flow around the plate is compared to one that was previously observed experimentally. Periodic vortices were observed at the plate extremities, and their effect on the heat transfert was assessed.

Table des matières

Nomenclature	5
Introduction	7
1 Rappels de thermoacoustique	11
1.1 Machines thermoacoustiques	11
1.1.1 Historique	11
1.1.2 Exemples de réalisations pratiques	13
1.1.3 Principe de l'effet thermoacoustique	18
1.1.4 Avantages, inconvénients et applications	23
1.2 Thermoacoustique linéaire	24
1.2.1 Notations	24
1.2.2 Equations linéarisées : ordre 1	26
1.2.3 Flux thermoacoustique : ordre 2	28
1.2.4 Empilement court	32
1.2.5 Différence de température entre les extrémités de l'empilement	36
1.2.6 Avantages et limites de la théorie linéaire	37
1.3 Axes de recherche et développements en cours	38
1.3.1 Les résonateurs	38
1.3.2 Les sources acoustiques	39
1.3.3 Le streaming	40
1.3.4 L'empilement de plaques ou "stack"	42
1.3.5 Le fluide de travail	42
1.3.6 La turbulence	43
1.3.7 Les échangeurs de chaleur	43
1.3.8 Les non-linéarités	45
1.4 Simulations numériques en thermoacoustique	46

2	Formulation du problème	49
2.1	Problème posé	49
2.2	Les équations physiques	50
2.2.1	Equation d'état pour le fluide	50
2.2.2	Equations de conservation pour le fluide	51
2.2.3	Equation de conservation pour le solide	51
2.2.4	Relations constitutives	51
2.2.5	Equation de conservation 1D pour le solide	52
2.2.6	Décomposition des variables	54
2.3	Domaine de calcul et conditions aux limites	55
3	Résolution numérique	59
3.1	Coût de calcul	59
3.2	Mise en forme numérique pratique des équations	61
3.2.1	Variables d'adimensionnalisation	61
3.2.2	Equations adimensionnalisées	62
3.2.3	Mise des équations sous forme vectorielle	63
3.3	Schémas numériques	64
3.3.1	Maillage	64
3.3.2	Méthode spatiale : schéma DRP	66
3.3.3	Méthode temporelle : méthode de Runge-Kutta	66
3.3.4	Filtrage	67
3.4	Le problème des conditions aux limites	68
3.4.1	Entrée d'une onde dans le domaine de calcul	68
3.4.2	Paroi et conditions de symétrie	69
3.4.3	Couplage entre le fluide et la plaque	71
4	Onde stationnaire dans un résonateur	73
4.1	Présentation	73
4.2	Simulation d'une onde stationnaire dans le domaine de calcul	73
4.3	Simulation d'une tranche complète de résonateur	80
4.3.1	Présentation	80
4.3.2	Rappels sur les chocs dans les résonateurs	81
4.3.3	Modélisation des pertes thermovisqueuses	81
4.3.4	Modèle pour le piston	84

4.3.5	Comparaison avec des travaux existants	84
4.3.6	Autre méthode d'excitation du résonateur	91
4.4	Comparaison entre les deux méthodes	91
4.5	Conclusion	94
5	Effet thermoacoustique au-dessus d'une plaque 1D	97
5.1	Introduction	97
5.2	Paroi isotherme	97
5.2.1	Présentation	97
5.2.2	Champs instantanés de pression et de vitesse	99
5.2.3	Champ instantané de température	101
5.2.4	Champ moyen de température	102
5.2.5	Flux moyens d'énergie	104
5.2.6	Influence de la hauteur y_0 du canal	109
5.2.7	Influence du nombre de Mach	116
5.2.8	Comparaison avec la simulation de Cao	130
5.3	Paroi régie par une équation de la chaleur 1D	133
5.3.1	Présentation	133
5.3.2	Temps de montée et épaisseur de la plaque	134
5.3.3	Echauffement visqueux de la plaque	135
5.3.4	Différence de température entre les extrémités de la plaque	137
5.4	Champ de vitesse moyen : acoustic streaming	146
5.5	Conclusion	153
6	Echangeurs de chaleur 1D	157
6.1	Présentation	157
6.2	Flux moyens d'énergie	158
6.3	Température des échangeurs de chaleur	163
6.4	Influence des paramètres géométriques	166
6.5	Conclusion	171
7	Effet thermoacoustique avec une plaque 2D	173
7.1	Présentation	173
7.2	Champ aérodynamique	174
7.3	Champ thermique	182
7.3.1	Comparaison avec la théorie linéaire	184

7.3.2	Flux d'énergie passant par la tranche de la plaque	187
7.3.3	Influence des tourbillons sur le transfert de chaleur	190
7.4	Conclusion	204
8	Conclusion et perspectives	205
A	Coefficients des schémas numériques	209
A.1	Coefficients du schéma de l'intégration de Runge-Kutta	209
A.2	Coefficients du schéma de Tam	209
A.3	Coefficients de filtrage	209
B	Symétrisation du tenseur visqueux τ	211
C	Onde stationnaire	213
D	Cas simulés	215
D.1	Plaque 1D isotherme	215
D.2	Plaque 1D non-isotherme	217
D.3	Plaque et échangeurs 1D	218
D.4	Plaque 2D	218
D.5	Caractéristiques du fluide et du solide	219
E	Influence de la taille de la maille	221

Nomenclature

Lettres romaines

c	célérité des ondes acoustiques	$[m.s^{-1}]$
c_p	capacité calorifique massique du fluide à pression constante	$[J.kg^{-1}.K^{-1}]$
c_v	capacité calorifique massique du fluide à volume constant	$[J.kg^{-1}.K^{-1}]$
c_s	capacité calorifique massique du solide	$[J.kg^{-1}.K^{-1}]$
d_a	déplacement particulaire acoustique	$[m]$
Dr	drive-ratio=pression acoustique/pression au repos	
e	énergie interne massique	$[J.kg^{-1}]$
f	fréquence de l'onde acoustique	$[s]$
G_f	distance entre la plaque et l'échangeur froid	$[m]$
G_c	distance entre la plaque et l'échangeur chaud	$[m]$
$\dot{\mathbf{h}}$	vecteur flux d'énergie dans le fluide	$[W.m^{-2}]$
\dot{h}_x	flux d'énergie dans la direction x	$[W.m^{-2}]$
\dot{h}_y	flux d'énergie dans la direction y	$[W.m^{-2}]$
\dot{h}_0	flux d'énergie utilisé pour les adimensionnalisation	$[W.m^{-2}]$
\dot{H}_x	flux total d'énergie dans la direction x	$[W.m^{-1}]$
\dot{H}_y	flux total d'énergie dans la direction y	$[W.m^{-1}]$
\dot{H}_O	flux total d'énergie utilisé pour les adimensionnalisation	$[W.m^{-1}]$
k	nombre d'onde	$[m^{-1}]$
K	conductivité thermique du fluide	$[W.m^{-1}.K^{-1}]$
K_s	conductivité thermique du solide	$[W.m^{-1}.K^{-1}]$
l	demi-épaisseur des plaques du stack	$[m]$
l_{DC}	longueur du domaine de calcul	$[m]$
l_{res}	longueur du résonateur	$[m]$
L	longueur d'une plaque du stack	$[m]$
L_f	longueur de l'échangeur de chaleur froid	$[m]$
L_c	longueur de l'échangeur de chaleur chaud	$[m]$
Ma	nombre de Mach acoustique	
p	pression dans le fluide	$[Pa=J.m^{-3}=kg.m^{-1}.s^{-2}]$
Pr	nombre de Prandtl du fluide	
\mathbf{q}	flux de chaleur dans le fluide	$[W.m^{-2}]$
\dot{Q}_f	quantité de chaleur extraite à l'échangeur froid	$[W.m^{-1}]$
\dot{Q}_c	quantité de chaleur extraite à l'échangeur chaud	$[W.m^{-1}]$

r	constante du gaz parfait considéré	$[\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}]$
$reso$	résolution ($= \delta_\nu/\Delta y$)	
t	temps	[s]
T	température dans le fluide	[K]
T_s	température dans le solide	[K]
\mathbf{u}	vecteur vitesse dans le fluide	$[\text{m.s}^{-1}]$
u	coordonnées du vecteur \mathbf{u} sur l'axe x	$[\text{m.s}^{-1}]$
v	coordonnées du vecteur \mathbf{u} sur l'axe y	$[\text{m.s}^{-1}]$
w	enthalpie massique du fluide	$[\text{J.kg}^{-1}]$
\dot{W}	flux de travail	$[\text{W.m}^{-1}]$
x	direction longitudinale du réfrigérateur	[m]
y	direction transversale du réfrigérateur	[m]
y_0	demi-distance entre deux plaques du stack (hauteur du domaine de simulation)	[m]

Lettres grecques

β	coefficient de dilatation thermique	$[\text{K}^{-1}]$
δ_ν	épaisseur de couche limite visqueuse dans le fluide	[m]
δ_κ	épaisseur de couche limite thermique dans le fluide	[m]
Δx	maille en x	[m]
Δy	maille en y	[m]
Δt	pas de temps	[t]
λ	longueur d'onde	[m]
μ	viscosité dynamique du fluide	$[\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}]$
ν	viscosité cinématique du fluide	$[\text{m}^2.\text{s}^{-1}]$
ω	pulsation de l'onde acoustique	$[\text{s}^{-1}]$
Ω	vorticité	$[\text{s}^{-1}]$
ρ	densité du fluide	$[\text{kg.m}^{-3}]$
$\boldsymbol{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses	[Pa]
τ_{ij}	composantes du tenseur des contraintes visqueuses	[Pa]
τ	période de l'onde acoustique	[s]

Indices

0	fluide au repos
1	fluctuations acoustiques
m	grandeurs moyennes en temps
s	solide
'	fluctuations totales

Symboles

$\langle X \rangle_t$	valeur moyenne de X en temps
$\langle X \rangle_x$	valeur moyenne de X en espace
\tilde{X}	valeur adimensionnelle de X

Introduction

L'effet thermoacoustique résulte de l'interaction entre une onde acoustique et un flux thermique. Un tel effet se produit en particulier lors de l'interaction d'une onde acoustique avec une paroi où il se traduit par un transport de chaleur dans la couche limite thermique, parallèlement à la paroi. Dans un réfrigérateur thermoacoustique, ce phénomène est exploité au moyen d'un empilement de plaques parallèles finement espacées, placé dans un résonateur acoustique excité à sa première fréquence de résonance. Le résonateur crée une onde acoustique de fort niveau, typiquement supérieur à 160 dB. L'effet thermoacoustique qui se produit sur les plaques de l'empilement crée une différence de température entre les extrémités de ce dernier. Elle peut atteindre plusieurs dizaines de degrés. Des échangeurs de chaleur froid et chaud, placés de part et d'autre de l'empilement, complètent le dispositif. Il est possible d'extraire de la chaleur à une source froide dont la température peut descendre jusqu'à -70°C , la température de la source chaude étant généralement celle du milieu ambiant.

Les premières réalisations de réfrigérateurs thermoacoustiques datent des années 80. Plusieurs maquettes expérimentales ont vu le jour depuis. Les principales réalisations "utiles" ont été faites aux Etats-Unis dans les domaines spatial et militaire. Les applications potentielles sont pourtant beaucoup plus nombreuses. Les systèmes thermoacoustiques présentent en effet des avantages certains. Ils possèdent peu de parties mobiles, sont robustes et continûment contrôlables. Ils fonctionnent avec des gaz neutres tels que l'hélium, et sont peu nocifs pour l'environnement, à la différence des systèmes classiques utilisant des CFC ou des HCFC. Une application possible, qui constitue la finalité de ce travail soutenu par la Délégation Générale pour l'Armement, est la réalisation de systèmes réfrigérants miniatures, qui pourraient être utilisés pour le refroidissement de composants électroniques. A l'heure actuelle un des inconvénients des réfrigérateurs thermoacoustiques reste leur faible efficacité. L'optimisation de ces systèmes nécessite une meilleure compréhension des phénomènes physiques mis en jeu et de problèmes techniques. Du fait de la complexité du système considéré (présence de couches limites, de flux de chaleurs, d'un gradient de température moyen, de non-linéarités), une approche analytique reste difficile, et pour apporter des réponses aux problèmes posés un outil de calcul numérique a été développé au cours de cette thèse. Ce travail complète celui de nature expérimentale déjà mené au laboratoire pendant

la thèse de Serge Duffourd.

L'outil numérique développé doit pouvoir permettre à terme d'inclure l'ensemble des phénomènes mis en jeu dans un réfrigérateur thermoacoustique. Ces phénomènes sont variés. Ils comprennent d'abord l'effet thermoacoustique en lui-même, qui naît de l'interaction de l'onde acoustique avec l'empilement de plaques. Cet effet est au cœur du pompage d'énergie. D'autres phénomènes interviennent autour de ce cœur et interagissent avec lui. Ainsi, l'énergie pompée par effet thermoacoustique doit être transmise à des échangeurs de chaleur, et cette transmission se fait en présence d'un écoulement oscillant. L'onde acoustique qui fournit l'énergie nécessaire pour le pompage résulte de l'interaction d'une source acoustique, d'un résonateur, d'un empilement de plaques, et d'échangeurs de chaleur. Les machines thermoacoustiques fonctionnant à de forts niveaux acoustiques, la propagation de l'onde est de plus non-linéaire. Elle est aussi inhomogène, du fait de la présence d'un gradient de température moyenne.

Dans la simulation numérique faite ici, on se concentre plus particulièrement sur l'effet thermoacoustique, et le transfert d'énergie aux échangeurs de chaleur. En particulier l'interaction source/résonateur est laissée de côté, le code étant avant tout un outil de dimensionnement pour le noyau thermoacoustique, comprenant l'empilement de plaques et les échangeurs de chaleur (modélisés eux aussi par des plaques). Toutefois, la méthode choisie, une simulation directe des équations de Navier-Stokes compressibles, permettra à terme d'inclure l'ensemble des phénomènes mentionnés ci-dessus sans modifications profondes. En contrepartie, une telle simulation est coûteuse en terme de temps de calcul.

Dans le **chapitre 1** des rappels de thermoacoustique sont faits. Un bref historique des machines thermoacoustiques est fourni, suivi de quelques exemples d'applications pratiques et d'une explication simplifiée de l'effet thermoacoustique. La théorie linéaire classique est ensuite abordée, elle sera par la suite comparée aux résultats des simulations numériques. Enfin les principaux axes de recherches actuels sont exposés. Le **chapitre 2** formule le problème posé. Il donne la géométrie du réfrigérateur considéré, l'ensemble des équations et conditions aux limites, ainsi que le domaine de simulation choisi. Dans le **chapitre 3** les méthodes de résolution numérique retenues sont exposées. Le coût de la simulation est également abordé. En particulier, il est montré que le choix d'une fréquence acoustique élevée réduit considérablement ce coût. Au **chapitre 4** la validité de la méthode des caractéristiques pour entretenir dans le domaine de simulation une onde acoustique stationnaire linéaire de fort niveau est démontrée. Cette méthode sera utilisée dans les chapitres suivants pour l'étude de l'effet thermoacoustique. Toutefois, la possibilité

d'utiliser à terme un modèle de source acoustique plus réaliste est évaluée. Dans ce contexte, la simulation d'une onde acoustique résonante non-linéaire est faite, qui inclut la présence de chocs. Au **chapitre 5** la simulation de l'effet thermoacoustique au-dessus d'une plaque 1D est faite. La plaque est soit isotherme, soit régie par une équation de la chaleur 1D. Quelques comportements classiques sont retrouvés et des comparaisons sont établies avec la théorie linéaire. D'un intérêt spécial est la différence de température qui s'établit entre les extrémités de la plaque en régime stationnaire. Un écart est observé entre la différence prédite et celle calculée. Cet écart est expliqué d'une part par la mise en défaut de certaines hypothèses de la théorie linéaire, et ce dès les faibles puissances acoustiques, et d'autre part par la présence d'effets non-linéaires aux fortes puissances. Ces effets non-linéaires sont par ailleurs détaillés. Enfin des mouvements moyens de type 'acoustic streaming' sont observés. Dans le **chapitre 6** des échangeurs de chaleur 1D sont ajoutés de part et d'autre de la plaque non-isotherme étudiée au chapitre précédent. Quelques éclaircissements quant à l'optimisation du réfrigérateur ainsi constitué sont apportés. Au **chapitre 7** les résultats obtenus avec une plaque 2D sont présentés. Une comparaison est faite entre les champs aérodynamiques simulés et des résultats expérimentaux précédemment obtenus au laboratoire. En particulier la formation périodique de tourbillons aux extrémités des plaques est mise en évidence, et sa conséquence sur le transfert de chaleur à la plaque est précisée. Les conclusions et perspectives de ce travail font enfin l'objet du **chapitre 8**.

Chapitre 1

Rappels de thermoacoustique

1.1 Machines thermoacoustiques

1.1.1 Historique

D'une manière générale la thermoacoustique concerne l'étude de l'interaction entre des phénomènes acoustiques et des phénomènes thermiques¹. A ce titre l'atténuation d'une onde acoustique dans un canal par conduction thermique à proximité des parois est un phénomène thermoacoustique simple. Dans les machines thermoacoustiques deux manifestations primordiales sont utilisées :

- L'existence d'un fort gradient de température dans un milieu peut conduire à l'établissement spontané d'une onde acoustique dans ce milieu.
- Une onde acoustique dans un milieu peut être utilisée pour créer un gradient de température dans ce milieu.

Ces deux manifestations sont l'inverse l'une de l'autre. Dans le premier cas, le gradient de température imposé induit un flux de chaleur dans le milieu. Ce flux de chaleur, sous certaines conditions, est converti en flux de travail acoustique, lequel engendre une onde acoustique. Ce phénomène est utilisé dans les moteurs thermoacoustiques. Dans le second cas l'onde acoustique est imposée par une source. Elle va céder une partie de son énergie acoustique qui va être transformée en flux de chaleur. Le gradient de température apparaît comme conséquence de ce flux. Ce phénomène est utilisé dans les réfrigérateurs thermoacoustiques. Dans les deux cas l'effet thermoacoustique repose sur un échange entre les énergies acoustiques et thermiques par l'intermédiaire des flux de chaleur et de travail.

La première manifestation est connue depuis longtemps. L'émission d'un son par un tube chauffé à

¹Dans cette thèse il ne sera question que de machines fermées utilisées pour convertir de l'énergie acoustique en énergie thermique et réciproquement. Signalons toutefois que l'interaction entre les champs thermique et acoustique existe aussi dans les tubes de Rijke ouverts (voir la synthèse de Feldman [43]) où la convection joue un rôle important, ainsi que dans les problèmes de couplage entre des ondes acoustiques et des flammes ou des sources de chaleur, dans le domaine de la combustion (voir par exemple les travaux de Dowling [38, 39]).

l'une de ses extrémités a été observée depuis des siècles par les souffleurs de verre. Ce phénomène, étudié expérimentalement par Sondhauss en 1850 [44] a été expliqué qualitativement par Lord Rayleigh en 1894 (Réf. [104], Vol. 2, Sec. 322). Dans le domaine de la cryogénie, des oscillations spontanées dans un tube creux relié à un réservoir d'hélium liquide ont été observées par Taconis en 1949 [44]. Une explication théorique a été fournie par Rott entre 1969 et 1980, bien après l'observation expérimentale du phénomène [106, 107, 110, 111, 112, 113]. Une synthèse de cette théorie linéaire est fournie par Swift [118]. Les oscillations spontanées d'un fluide soumis à un gradient de température sont à la base des moteurs thermoacoustiques à onde stationnaire, dont plusieurs prototypes ont été construits, notamment par Swift [119], Swift *et al.* [122], et Atchley *et al.* [11, 7]. Notons que des moteurs thermoacoustiques à onde progressive dans des résonateurs annulaires ont récemment été créés par Yazaki *et al.* [150], Backhaus *et al.* [12], et Job [67]. Ces moteurs atteignent des efficacités thermodynamiques plus élevées que celles des moteurs à onde stationnaire [12].

L'observation de la manifestation inverse, c'est-à-dire le pompage de chaleur par une onde acoustique, est beaucoup plus récente. En 1966, Gifford et Longworth [51] ont pu obtenir une réfrigération en utilisant une oscillation de pression à basse fréquence dans un tube. Leur observation a conduit aux machines appelées tubes pulsés ('pulse tube' en anglais) dont de nombreuses variantes ont vu le jour, et qui sont utilisées dans la réfrigération cryogénique. Une synthèse est fournie par Radebaugh [101]. Peu après Gifford et Longworth, en 1975, Merkli et Thomann [85] ont observé un refroidissement des parois d'un résonateur acoustique. En ajoutant un empilement de plaques parallèles dans le résonateur, Wheatley *et al.* [143] ont obtenu en 1983 un gradient de température entre les extrémités des plaques, donnant ainsi naissance aux réfrigérateurs thermoacoustiques. Une des différences notables entre les tubes pulsés et les réfrigérateurs est la fréquence d'utilisation : les premiers fonctionnent à basse fréquence et les derniers à haute fréquence, dans un résonateur. Bien que reposant sur des bases communes, ces deux types de machine font l'objet de littératures bien distinctes : les tubes pulsés ont des bases théoriques bien établies (voir par exemple Kittel *et al.* [71]) et sont amplement utilisés dans le génie cryogénique, tandis que les réfrigérateurs en sont encore à un stade de recherche. Les bases théoriques des réfrigérateurs thermoacoustiques sont apparues en même temps et sont globalement communes à celles des moteurs thermoacoustiques. La théorie linéaire est ainsi due à Rott [106, 110, 112] et Merkli et Thomann [85]. Elle a été approfondie par Wheatley *et al.* [143], Swift *et al.* [122], puis synthétisée par Swift en 1988 [118]. De nombreux prototypes ont vu le jour depuis celui de Wheatley *et al.* [143], principalement pour tester la théorie linéaire et ses limites. Citons ceux de Hofler [61], de Atchley *et al.* [10], de Garrett *et al.* [47], de Bailliet [13], de Poesse *et al.* [99], de Duffourd [40] et de Tijani

[130].

1.1.2 Exemples de réalisations pratiques

Réfrigérateur thermoacoustique

On s'intéresse dans cette section au cas du réfrigérateur thermoacoustique représenté à la figure 1.1.1(a). Un réfrigérateur de ce type a été étudié par S. Duffourd dans sa thèse [40]. Il fait également l'objet du présent travail. Les premiers éléments de ce réfrigérateur sont la

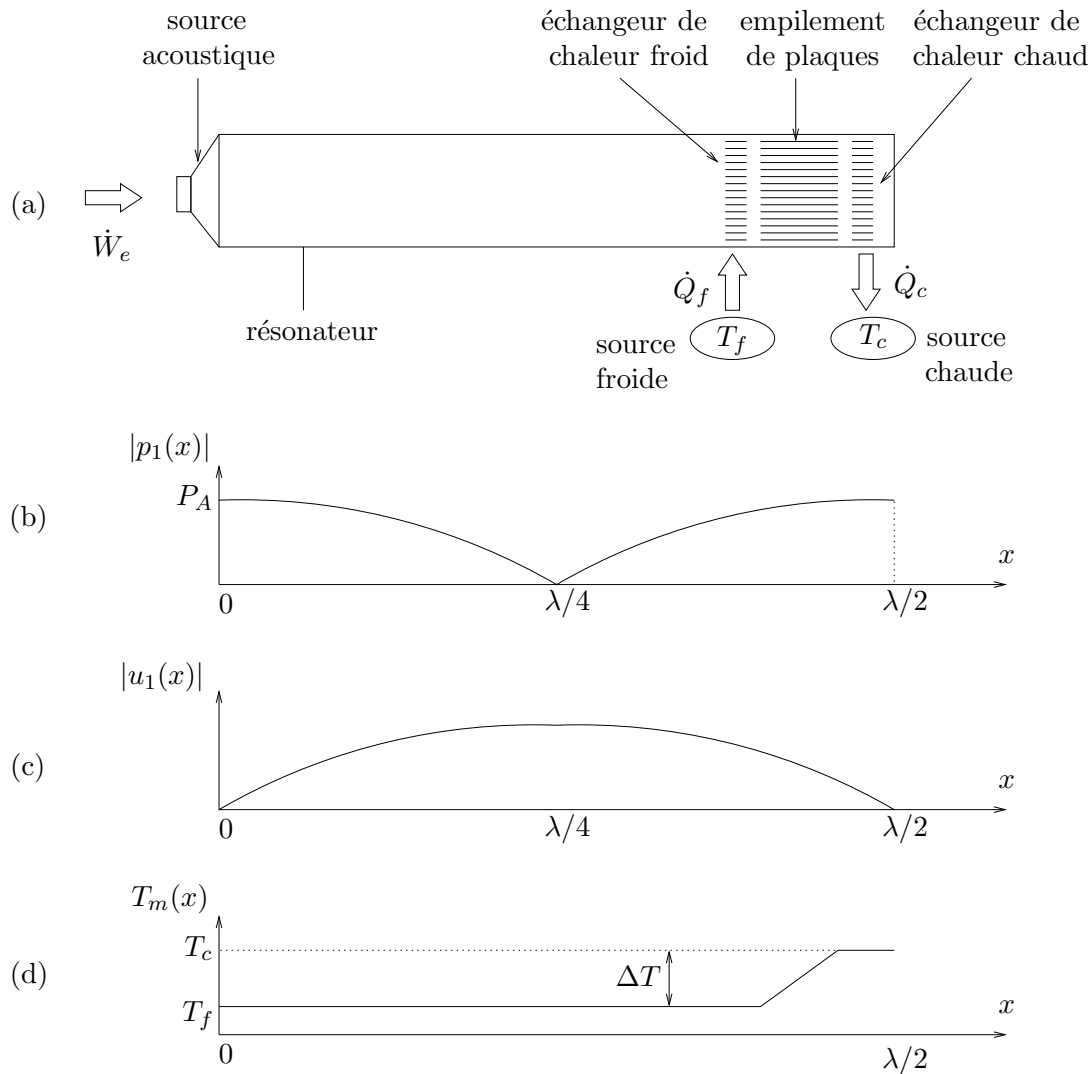


FIG. 1.1.1 – (a) Schéma d'un réfrigérateur thermoacoustique; (b) amplitude de la pression acoustique dans le résonateur; (c) amplitude de la vitesse acoustique dans le résonateur; (d) température moyenne dans le résonateur.

source acoustique (dans ce cas un haut-parleur) et le résonateur, qui permettent d'obtenir une onde acoustique de fort niveau. La longueur du résonateur vaut la moitié de la longueur d'onde λ . L'onde résonante est caractérisée par les champs stationnaires de pression p et de vitesse u

suivants :

$$\begin{aligned}
 p &= p_0 + p_1 e^{i\omega t}, \\
 u &= u_1 e^{i\omega t}, \\
 \text{avec} \quad p_1(x) &= iP_A \cos(kx), \\
 u_1(x) &= \frac{P_A}{\rho_0 c_0} \sin(kx).
 \end{aligned}
 \tag{1.1.1}$$

Dans ces expressions, l'indice 1, conforme aux notations de Swift [118] (voir l'exposé sur la théorie linéaire à la section 1.2), dénote les perturbations acoustiques d'ordre 1. L'indice 0 indique les grandeurs au repos, en l'absence d'onde. P_A est l'amplitude d'oscillation maximale de la pression dans le tube. On note ω la pulsation de l'onde, k le nombre d'onde, c la célérité du son, et ρ la densité du fluide. Les normes de p_1 et u_1 en fonction de la position x dans le résonateur sont représentées aux figures 1.1.1(b) et 1.1.1(c).

Pour avoir un effet thermoacoustique, on place dans le résonateur un empilement de plaques également appelé "stack". Cet empilement, par effet thermoacoustique, induit un flux de chaleur dirigé le long des plaques et vers le fond du résonateur (plus précisément vers le ventre de pression). Pour tirer parti de ce flux on place des échangeurs de chaleur de part et d'autre de l'empilement. L'échangeur froid est à la température T_f et l'échangeur chaud à la température T_c . L'évolution de la température moyenne le long de l'axe du résonateur est représentée à la figure 1.1.1(d). De part et d'autre du stack cette température est constante. Un gradient de température moyen ∇T_m existe au sein du stack. On a ainsi réalisé un réfrigérateur, qui pompe à la source froide une quantité de chaleur par unité de temps \dot{Q}_f et dépose à la source chaude une quantité de chaleur par unité de temps \dot{Q}_c . Pour ce faire le réfrigérateur consomme une quantité de travail électrique par unité de temps \dot{W}_e . Deux quantités sont importantes : la valeur maximale du flux de chaleur \dot{Q}_f que l'on peut extraire de la source froide pour une température fixée de cette source, et l'efficacité \dot{Q}_f/\dot{W}_e du réfrigérateur.

Il convient ici de donner quelques ordres de grandeur, correspondant aux expériences de S. Duffourd [40]. La fréquence de résonance est d'environ 200 Hz, ce qui correspond à une longueur d'onde $\lambda = 1.75\text{m}$. Le résonateur a approximativement une longueur de 80cm. Le stack est situé à un quart de résonateur du fond, position qui est optimale pour le pompage thermoacoustique. Le stack a une longueur d'environ 4cm, qui correspond approximativement à $1/40^{\text{ième}}$ de la longueur d'onde acoustique. L'épaisseur des plaques de l'empilement varie entre 0.1mm et 1mm. La distance de séparation des plaques est un paramètre important. Cette distance est un multiple de l'épaisseur de couche limite thermique δ_κ , qui vaut environ 0.19mm. Typiquement la distance de séparation des plaques est moins de 1mm. La hauteur du résonateur étant approximativement 10cm, le stack peut contenir jusqu'à une centaine de plaques. Pour caractériser la puissance de

l'onde acoustique, on utilise indifféremment le drive ratio Dr ou le nombre de Mach acoustique M_a . Le drive ratio est défini comme le quotient de l'amplitude de la pression acoustique maximale dans le résonateur par la pression statique :

$$Dr = \frac{P_A}{p_0}. \quad (1.1.2)$$

Le nombre de Mach acoustique est défini comme le quotient de la vitesse acoustique maximale dans le résonateur par la célérité du son c_0 dans le milieu au repos :

$$M_a = \frac{u_A}{c_0}, \quad (1.1.3)$$

où la vitesse acoustique maximale u_A vaut $u_A = P_A/\rho_0 c_0$. Le drive ratio et le nombre de Mach sont reliés par :

$$M_a = \frac{1}{\gamma} Dr. \quad (1.1.4)$$

Pour la maquette de laboratoire utilisée par S. Duffourd, le drive ratio reste inférieur à 2%. La différence de température qui s'établit entre les extrémités du stack vaut alors 15K. On peut estimer que la puissance pompée par le stack vaut environ 1W. Toutes ces données sont typiques d'un réfrigérateur thermoacoustique. Notons cependant que la puissance d'utilisation visée pour une application est plus élevée et correspond à un drive ratio valant entre 6 et 10%. La différence de température entre les extrémités du stack peut dans ces conditions valoir jusqu'à 100K.

Signalons qu'une maquette de taille réduite a été construite au laboratoire sur le modèle de la précédente [33]. Elle fonctionne à plus haute fréquence (500 Hz) dans un résonateur en $\lambda/4$. La source est un piézoélectrique, et un drive ratio de 6% peut être atteint.

Moteur thermoacoustique à onde stationnaire

Un exemple de moteur est montré à la figure 1.1.2. Cette configuration correspond notamment à celle étudiée par Swift *et al.* [122], Swift [119], Atchley *et al.* [8, 9, 6, 11, 7], et Arnott *et al.* [5]. Le dispositif n'est pas très éloigné du réfrigérateur traité dans la section précédente. Bien évidemment la source acoustique a été supprimée, et le sens des transferts de chaleur est inversé. Ainsi par exemple la quantité de chaleur \dot{Q}_c par unité de temps est fournie au système par l'échangeur de chaleur chaud. Une partie \dot{Q}_f de la quantité de chaleur injectée va être récupérée à l'échangeur froid. Si le rapport T_c/T_f des températures entre la source chaude et la source froide est suffisant, une onde acoustique stationnaire va spontanément s'établir dans le résonateur, due à un effet thermoacoustique au sein de l'empilement de plaques. Le stack fournit alors à l'onde une quantité de travail par unité de temps \dot{W} . L'onde a les mêmes caractéristiques que pour un réfrigérateur (figures 1.1.1(b) et 1.1.1(c) et équations (1.1.1)). Un transducteur peut être utilisé pour convertir l'énergie mécanique de l'onde en énergie électrique. La puissance électrique extraite du moteur est

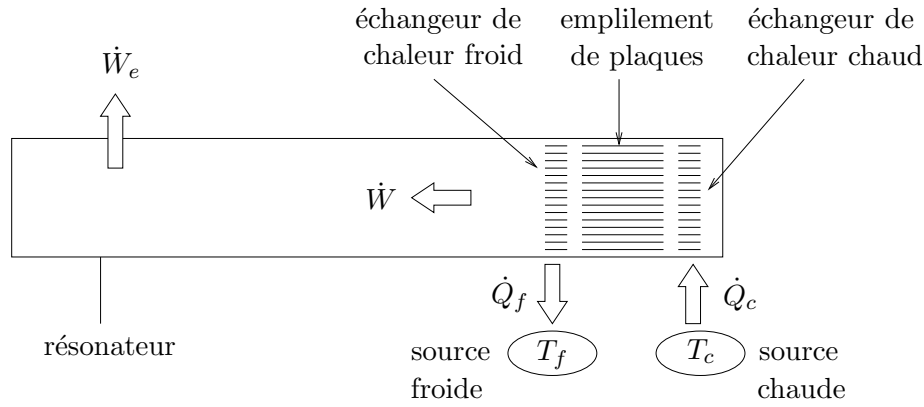


FIG. 1.1.2 – Schéma d'un moteur thermoacoustique à onde stationnaire.

notée \dot{W}_e . Pour un moteur, un rendement thermodynamique est défini comme le rapport \dot{W}_e/\dot{Q}_c . Ce rendement doit être le plus élevé possible. Une autre quantité d'intérêt est la valeur limite du paramètre T_c/T_f à partir de laquelle on observe une oscillation acoustique spontanée et qui vaut généralement au moins 2. Cette quantité doit être la plus petite possible.

Les ordres de grandeur géométriques sont les mêmes pour les moteurs que pour les réfrigérateurs. Notons cependant que les différences de température entre les extrémités du stack sont bien plus élevées pour les moteurs, où elles atteignent plusieurs centaines de Kelvin.

Moteur thermoacoustique à onde progressive

Des moteurs thermoacoustiques à onde progressive ont récemment été créés par Yazaki *et al.* [150], par Backhaus et Swift [12]. Ils ont également fait l'objet de la thèse théorique et expérimentale de Job [67]. Ces machines se basent sur une idée de Ceperley [28] selon laquelle une onde acoustique progressive peut être utilisée pour faire réaliser au fluide un cycle thermodynamique de Stirling, qui est un cycle réversible. Ils sont susceptibles de fournir des efficacités thermodynamiques plus élevées que les moteurs à onde stationnaire, qui s'appuient sur un fonctionnement intrinsèquement irréversible. La figure 1.1.3 représente un moteur de ce type, étudié par Yazaki *et al.* [150]. L'installation n'est pas très différente de celle d'un moteur à onde stationnaire à deux différences près. Tout d'abord le résonateur est annulaire, ainsi l'onde progressive fait des "tours" dans celui-ci. De plus l'empilement de plaques utilisé a une nature différente et porte le nom de régénérateur. A la différence des empilements utilisés dans les moteurs à onde stationnaire et les réfrigérateurs, le régénérateur doit établir un contact thermique aussi parfait que possible entre le gaz et les plaques. Pour ce faire, la distance de séparation entre les plaques doit être très faible, inférieure à l'épaisseur de couche limite thermique (et donc visqueuse). On rappelle que dans le stack d'un réfrigérateur ou d'un moteur à onde stationnaire cette distance

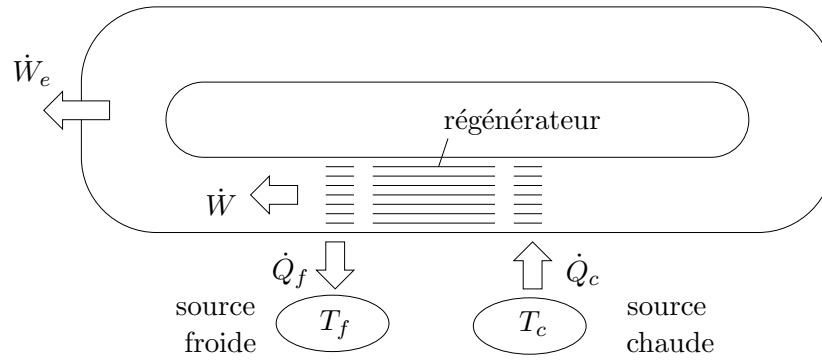


FIG. 1.1.3 – Schéma d'un moteur thermoacoustique à onde progressive.

de séparation vaut quelques épaisseurs thermiques. Dans ces conditions l'inconvénient majeur du régénérateur est l'importance des pertes d'énergie par dissipation visqueuse. Pour les réduire il est indispensable de diminuer la vitesse acoustique, sans toutefois baisser la pression acoustique pour ne pas nuire aux performances. Il faut donc avoir au niveau du régénérateur une impédance élevée, une idée proposée par Ceperley [28] et mise en application par Backhaus et Swift [12].

Réfrigérateur conduit par un moteur

Pour conclure cette section on décrit brièvement un réfrigérateur thermoacoustique conduit par un moteur. Un tel dispositif peut s'avérer utile quand on dispose d'une source de chaleur (énergie solaire par exemple) et que l'on a besoin d'une source froide. Un exemple d'un tel dispositif est le fameux "beer-cooler" décrit par Swift [118]. Le principe est simple : la partie moteur

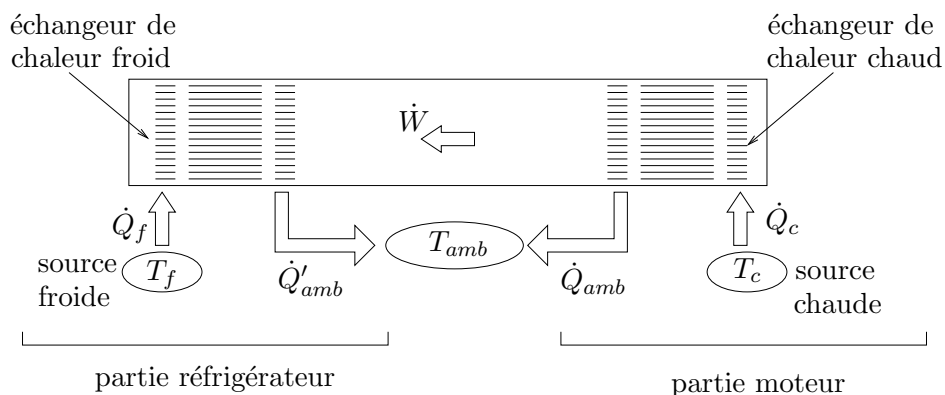


FIG. 1.1.4 – Schéma d'un réfrigérateur thermoacoustique conduit par un moteur thermoacoustique.

utilise la puissance thermique \dot{Q}_c fournie par la source chaude et rejette une puissance thermique \dot{Q}_{amb} à la température ambiante, produisant une puissance mécanique \dot{W} . Cette puissance mécanique \dot{W} est utilisée par la partie réfrigérateur pour pomper une puissance thermique \dot{Q}_f a

la source froide, rejetant au milieu ambiant une puissance \dot{Q}'_{amb} . La partie moteur sert donc dans ce cas de source acoustique pour la partie réfrigérateur.

1.1.3 Principe de l'effet thermoacoustique

Les moteurs et réfrigérateurs thermoacoustiques reposent sur l'existence d'un effet thermoacoustique. On se propose de donner une interprétation lagrangienne de cet effet, formulée par Gifford et Longworth [51] et par Swift *et al.* [122]. Cette explication simple, utilisable en particulier pour les empilements de plaques des moteurs à onde stationnaire et des réfrigérateurs, permet de déterminer la frontière entre ces deux modes de fonctionnement, en introduisant le gradient de température critique. Elle fournit en outre de premiers éléments de compréhension pour les échangeurs de chaleur. Une analyse quantitative plus précise est fournie par la théorie linéaire qui sera exposée à la section 1.2.

Considérons une plaque placée dans une onde acoustique stationnaire entre un ventre de vitesse et un ventre de pression, comme pour le réfrigérateur de la figure 1.1.1(a) et le moteur de la figure 1.1.2. La plaque et le fluide sont le siège d'un gradient de température moyen ∇T_m : on suppose simplement que ce gradient existe, il est en fait soit imposé (fonctionnement en moteur) soit créé par l'onde (fonctionnement en réfrigérateur). De plus on suppose le fluide non visqueux. Pour une particule donnée au dessus de la plaque, la présence de l'onde se traduit par une fluctuation sinusoïdale des grandeurs autour de leurs valeurs moyennes. Ainsi l'amplitude du déplacement acoustique de la particule est noté d_{a1} , l'amplitude de la pression acoustique p_1 , celle de la température acoustique T_1 . Pour simplifier l'explication, ces variations sinusoïdales sont remplacées par une fonction en créneau. Ainsi, par rapport à sa position d'équilibre, la particule est soit en $-d_{a1}$, sa pression étant alors $-p_1$ et sa température $-T_1$, soit en $+d_{a1}$, sa pression étant alors $+p_1$ et sa température $+T_1$.

Considérons d'abord le cas du réfrigérateur. Les oscillations de la particule pendant un cycle acoustique sont représentées à la figure 1.1.5(a). La particule oscille entre ses deux seules positions possibles $-d_{a1}$ et d_{a1} autour de sa position d'équilibre. En ces positions la plaque a des températures respectives fixes $-d_{a1}\nabla T_m$ et $d_{a1}\nabla T_m$. Dans sa position initiale la particule est en $-d_{a1}$ et sa température est la même que celle de la plaque, $-d_{a1}\nabla T_m$. Au cours de l'étape 1 cette particule se déplace en d_{a1} et subit une compression adiabatique. Elle absorbe une quantité de travail dW'' . Au terme de la compression sa température est $-d_{a1}\nabla T_m + 2T_1$. La particule et la plaque n'ont donc plus la même température. On suppose que $-d_{a1}\nabla T_m + 2T_1 > d_{a1}\nabla T_m$ c'est-à-dire $T_1 > d_{a1}\nabla T_m$. La particule est alors plus chaude que la plaque : elle lui cède une

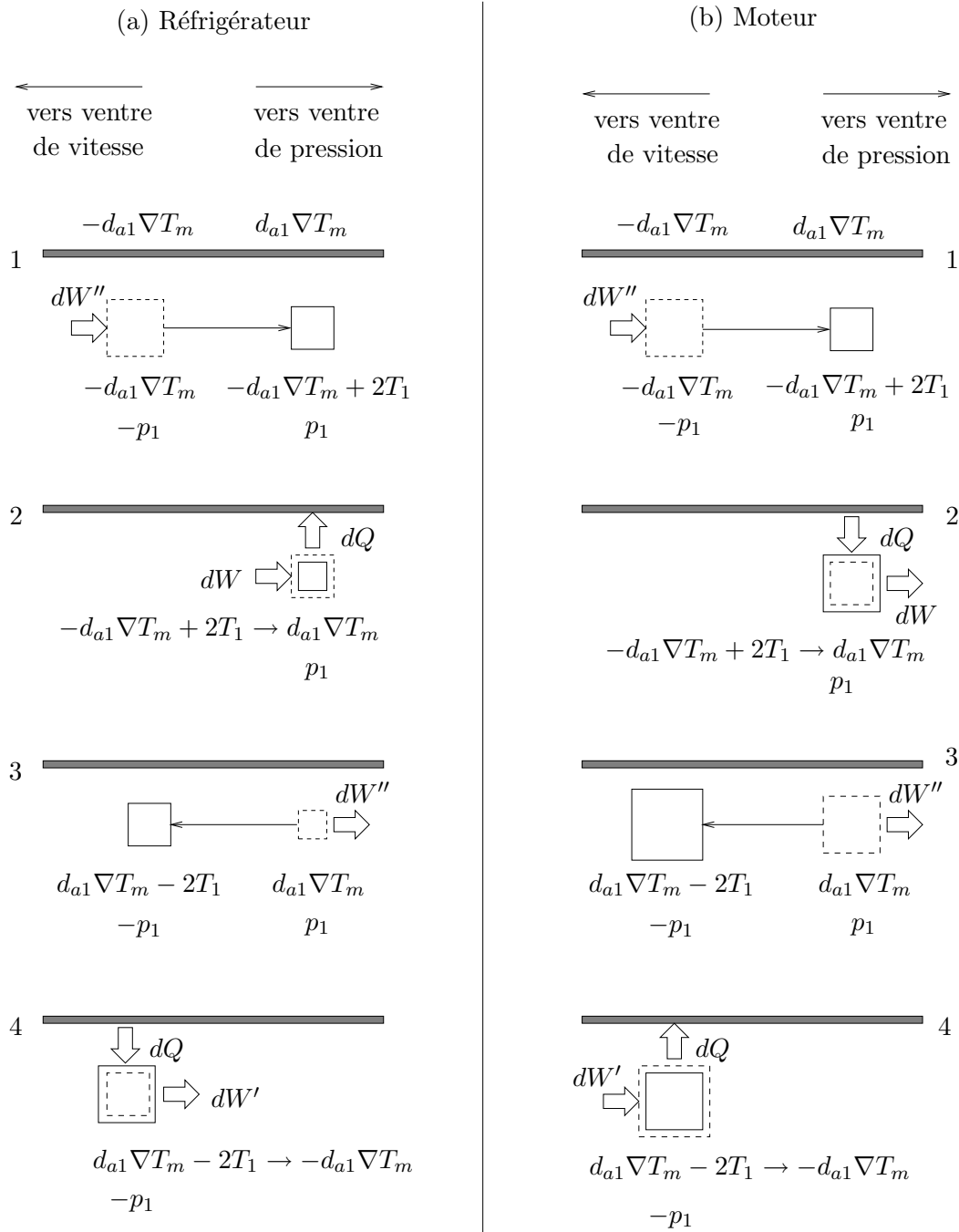


FIG. 1.1.5 – Evolution d’une particule de fluide pendant un cycle acoustique pour : (a) un réfrigérateur, et (b) un moteur. Pour chacune des quatre étapes les pointillés correspondent à l’état initial de la particule et les lignes continues à son état final. D’après Swift [118].

quantité de chaleur dQ lors de l’étape 2. Cet échange a lieu à pression constante et le volume de la particule diminue, cette dernière absorbant ainsi une quantité de travail dW . Après l’échange la température de la particule est la même que celle de la plaque $d_{a1} \nabla T_m$. Au cours de l’étape 3 la particule change à nouveau de position, elle passe en $-d_{a1}$ et subit une détente adiabatique.

Cette détente fait baisser sa température qui vaut $d_{a1}\nabla T_m - 2T_1$. De plus la particule cède une quantité de travail dW'' . La particule a maintenant une température inférieure à celle de la plaque puisqu'on a supposé $T_1 > d_{a1}\nabla T_m$. Lors de l'étape 4 elle absorbe donc une quantité de chaleur dQ et sa température se retrouve égale à celle de la plaque. De nouveau cet échange de chaleur a lieu à pression constante. Le volume de la particule augmente, cette dernière cédant une quantité de travail dW' . Au terme de l'échange la particule se retrouve dans son état initial. Le travail de compression reçu lors de l'étape 1 est égal au travail fourni pendant la détente de l'étape 4. Ainsi sur l'ensemble du cycle acoustique la particule a absorbé un travail $dW - dW'$ et transporté la quantité de chaleur dQ d'une position froide de la plaque à une position voisine plus chaude. La chaleur est donc transportée dans le sens du gradient moyen de température et vers le ventre de pression. Le gradient de température dans ce cas n'est pas imposé. Il s'est établi naturellement sous l'effet du pompage réalisé par la particule. Le travail absorbé est fourni par l'onde acoustique, et donc par une source. Ce mode de fonctionnement est bien celui d'un réfrigérateur thermoacoustique.

L'évolution de la particule pour un moteur est représentée à la figure 1.1.5(b). Elle n'est pas très différente de l'évolution pour un réfrigérateur. La différence essentielle apparaît à l'étape 2 : après la compression adiabatique la température de la particule est $-d_{a1}\nabla T_m + 2T_1$ comme pour un réfrigérateur. Mais alors que cette température était supérieure à la température de la plaque $d_{a1}\nabla T_m$ pour un réfrigérateur elle est maintenant inférieure. C'est-à-dire que l'on a maintenant $T_1 > d_{a1}\nabla T_m$. Le fluide absorbe donc la quantité de chaleur dQ et cède une quantité de travail dW . Au cours de l'étape 4, le fluide cède une quantité de chaleur dQ et absorbe une quantité de travail dW' . Sur un cycle acoustique la particule cède une quantité de travail $dW - dW'$ et transporte une quantité de chaleur dQ d'une position chaude de la plaque à une position voisine plus froide. Dans ce cas le travail cédé vient renforcer l'énergie de l'onde acoustique et le gradient de température le long de la plaque doit être imposé, sans quoi il viendrait à baisser puisque de la chaleur est transportée d'une zone chaude à une zone froide par la particule. Aucune source acoustique n'est présente, l'onde étant spontanément créée du fait de la cession de travail par la particule à son entourage.

Cette interprétation lagrangienne simplifiée permet de comprendre le fonctionnement des machines thermoacoustiques, qui incluent les réfrigérateurs et les moteurs. Elle permet en particulier de montrer que les phénomènes physiques mis en oeuvre dans ces deux types de machines sont identiques. Comme on l'a vu la différence tient au gradient de température moyen. D'après ce qui

précède, une valeur critique de ce gradient peut être définie par :

$$\nabla T_{m,crit} = \frac{T_1}{d_{a1}}. \quad (1.1.5)$$

On rappelle que T_1 est l'amplitude de la température obtenue par compression adiabatique d'une particule de fluide sous l'effet de l'onde et que d_{a1} est l'amplitude du déplacement acoustique associé. Si le gradient moyen de température qui existe dans la plaque et le fluide est inférieur à ce gradient critique, la machine est un réfrigérateur. Au contraire si le gradient de température est supérieur au gradient critique la machine est un moteur. Ainsi les réfrigérateurs thermoacoustiques font généralement intervenir des gradients de température bien inférieurs à ceux qui doivent être imposés dans les moteurs.

L'explication précédente met en jeu seulement une particule. Il faut noter qu'en fait le transport de chaleur par la plaque fait intervenir un grand nombre de particules mises en série les unes avec les autres. Ces particules assurent le transport de la chaleur d'un bout de la plaque à l'autre. Considérons le cas d'un réfrigérateur. La figure 1.1.6(1) représente une plaque de ce réfrigérateur à laquelle sont accolés deux échangeurs de chaleur. Remarquons tout d'abord que les particules

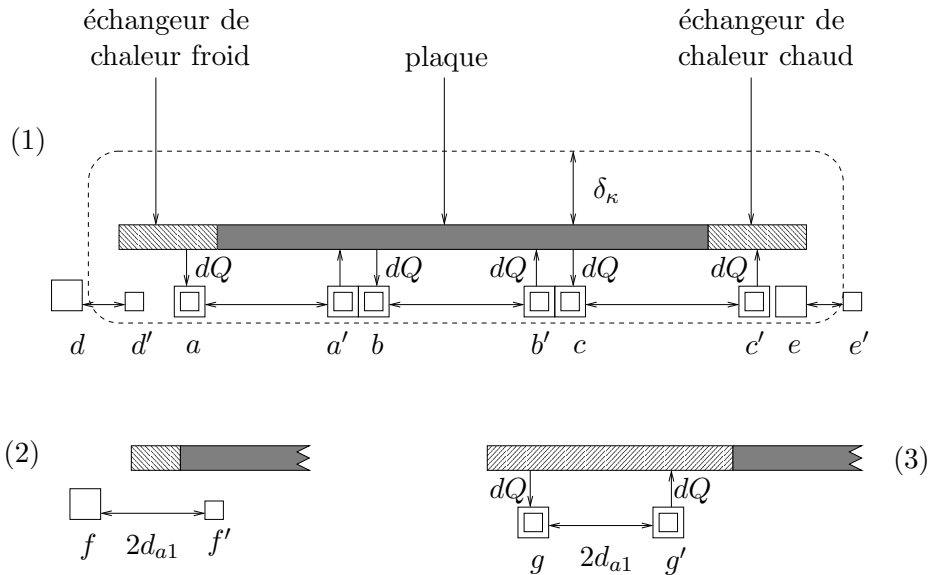


FIG. 1.1.6 – (1) Transport de chaleur d'un bout à l'autre de la plaque par des particules en série (pour un réfrigérateur) ; (2) cas d'un échangeur de chaleur froid trop petit par rapport au déplacement acoustique ; (3) cas d'un échangeur de chaleur grand par rapport au déplacement acoustique. D'après Swift [118].

participant aux échanges de chaleur avec la plaque et les échangeurs sont situées dans la couche limite thermique délimitée par la ligne en pointillés. Cette couche englobe les points du fluide situés à moins d'une épaisseur thermique δ_κ des parois. δ_κ représente la distance sur laquelle

la chaleur peut diffuser pendant une période de l'onde acoustique (voir définition (1.2.12)). En dehors de la couche limite, les particules n'échangent pas de chaleur avec les parois. Ainsi quand on parle de particule, on sous-entend que la particule à une dimension verticale de l'ordre de δ_κ . Intéressons nous tout d'abord aux particules dénotées a, b, et c en figure 1.1.6(1). Ces particules oscillent entre deux positions : a et a', b et b', c et c', où a' est en réalité confondu avec b et b' avec c. La particule a extrait une quantité de chaleur dQ à l'échangeur de chaleur en a et la cède à la plaque en a'. Cette quantité est immédiatement prise par la particule b, qui la transporte jusqu'en b'. C'est alors c qui prend le relais et dépose en bout de chaîne la quantité de chaleur dQ à l'échangeur chaud, en c'. Dans la réalité un très grand nombre de particules entre en jeu entre les positions a et c'.

Le modèle lagrangien permet de comprendre qualitativement le fonctionnement des échangeurs de chaleur. Considérons maintenant les particules d et e de la figure 1.1.6(1), qui oscillent respectivement entre d et d', e et e'. Ces particules sont situées en bout d'échangeurs. En d' par exemple la particule est située sur l'échangeur froid. Quand elle se déplace en d, elle se comprime et a un déficit de chaleur. Mais en l'absence de paroi elle ne peut combler ce déficit. Aucun échange n'a lieu et quand la particule revient en d', sa température est identique à celle qu'elle avait quand elle a quitté d'. La particule est en équilibre thermique avec l'échangeur et n'échange pas de chaleur avec lui. Elle est dite "oisive". Il en est de même pour la particule e. Les échangeurs de la figure 1.1.6(1) représentent un fonctionnement adéquat des échangeurs de chaleur. Ce fonctionnement n'est possible que si les échangeurs sont correctement dimensionnés. Considérons en effet l'échangeur froid de la figure 1.1.6(2). Ce dernier a une faible dimension, inférieure au double de l'amplitude du déplacement acoustique d_{a1} . Ainsi la particule située en f' en bout de plaque se rend en f sans échanger de chaleur avec l'échangeur. Elle joue un rôle semblable à celui de la particule d. Elle n'a aucun impact sur le plan thermique mais consomme du travail. Dans le cas opposé de la figure 1.1.6(3) l'échangeur de chaleur a une dimension grande devant le double de l'amplitude du déplacement acoustique. Dans ce cas la particule oscillant entre g et g' ne fait qu'extraire une quantité de chaleur dQ en une position de l'échangeur pour la lui rendre en une position voisine. On en déduit que les échangeurs de chaleur doivent avoir une dimension de l'ordre de grandeur du double de l'amplitude de déplacement particulaire, c'est-à-dire une dimension à peu près égale au déplacement total d'une particule. En notant L_f la longueur de l'échangeur froid, on doit donc avoir :

$$L_f \sim 2d_{a1}. \quad (1.1.6)$$

Notons que l'interprétation lagrangienne suppose que les échangeurs de chaleur sont collés à la plaque, ce qui n'est pas le cas dans les applications pratiques.

L'explication précédente, bien que simplifiée, permet de bien comprendre le mode de transport de chaleur par une plaque placée dans une onde acoustique stationnaire. En particulier elle permet de comprendre la différence entre le fonctionnement en moteur et le fonctionnement en réfrigérateur. De plus elle donne un premier ordre de grandeur pour le dimensionnement des échangeurs de chaleur.

1.1.4 Avantages, inconvénients et applications

Les machines thermoacoustiques sont attractives pour plusieurs raisons :

- Elles sont fiables et robustes : elles possèdent en effet peu de pièces mécaniques et pas de parties mobiles (en dehors des circuits d'alimentation des échangeurs de chaleur).
- Elles mettent en oeuvre des gaz neutres (hélium, argon,...). En particulier elles n'utilisent pas de CFC ou HCFC nuisibles pour l'environnement.
- Elles peuvent permettre de récupérer des quantités de chaleur perdues (cas du réfrigérateur conduit par un moteur présenté à la section 1.1.2).

En contrepartie le point faible des machines thermoacoustiques reste leur faible rendement par rapport aux machines conventionnelles, bien que des rendements élevés aient été obtenus récemment pour des moteurs thermoacoustiques à onde progressive [12].

Quelques prototypes de machines thermoacoustiques (autres que les modèles expérimentaux déjà cités) ont déjà été construites ou sont envisagées. On peut citer :

- un réfrigérateur thermoacoustique appelé STAR, qui a été embarqué dans la navette spatiale américaine *Discovery* en 1992 [47].
- un réfrigérateur thermoacoustique appelé SETAC, qui a été embarqué dans un destroyer de la marine américaine en 1995 pour refroidir les composants électroniques d'un radar [52].
- des systèmes de refroidissement conduits par énergie solaire [1, 30] (voir aussi les projets de la société CFIC, <http://www.cficinc.com/WebPages/TARrefrigeratorPage/TARrefrigeratorPage2.html>).
- des systèmes de refroidissement miniatures visant à refroidir des composants électroniques [62, 29].
- des réfrigérateurs ménagers et systèmes de climatisation [48].
- des unités réfrigérantes sont vendues par une société américaine (CFIC Inc., <http://www.cficinc.com/WebPages/TARrefrigeratorPage/TARrefrigeratorPage2.html>).

1.2 Thermoacoustique linéaire

La théorie linéaire est le seul outil analytique qui permet de prendre en compte de manière globale les phénomènes thermoacoustiques. Elle permet sous certaines hypothèses de connaître l'évolution des grandeurs acoustiques dans le stack et de prédire des quantités énergétiques telles que les flux de chaleur et de travail. Les principales lignes en sont ici rappelées. Ce rappel pose à la fois les hypothèses et les résultats principaux qui seront dans la suite confrontés aux simulations numériques. L'exposé suit la synthèse de Swift [118], qui a approfondi le travail de Rott [106, 110, 112], et celui de Swift *et al.* [122].

1.2.1 Notations

Swift [118] décrit l'effet thermoacoustique dans un canal plan limité par deux plaques d'un empilement placé dans un résonateur. La géométrie du problème traité est rappelée en figure 1.2.1. Π est le périmètre d'une plaque, L sa longueur et l sa demi-hauteur. y_0 est la demi-distance entre deux plaques. La direction x correspond à l'axe du résonateur. Dans la direction transversale à l'axe du résonateur, un point est repéré dans le fluide par son ordonnée y et dans le solide par son ordonnée y_s . La direction z est une direction d'homogénéité.

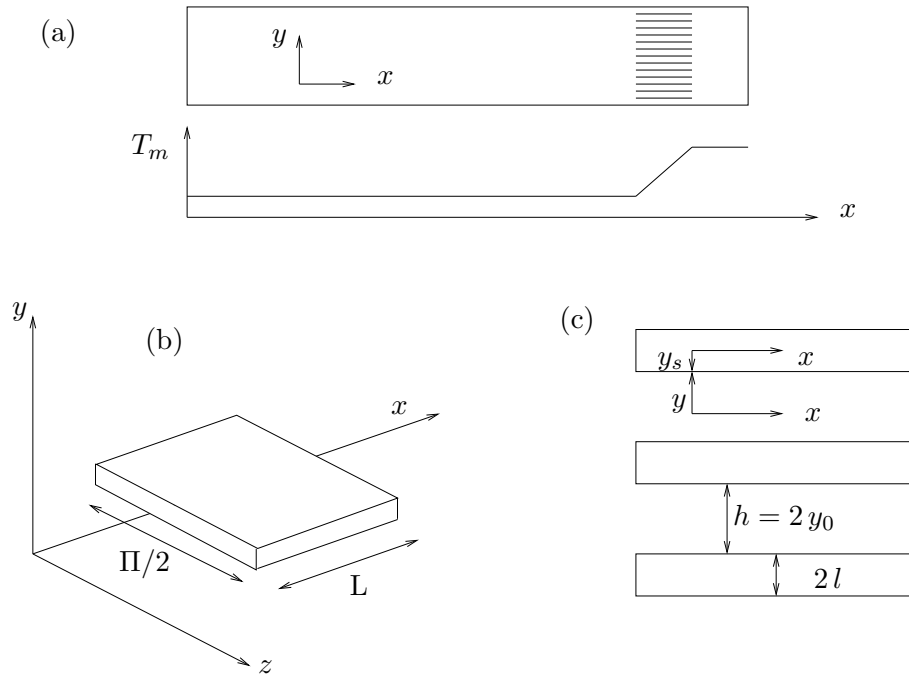


FIG. 1.2.1 – Problème traité par Swift [118] : (a) résonateur acoustique avec un empilement de plaques et évolution de la température moyenne $T_m(x)$ au niveau de l'empilement ; (b), (c) définition des géométries.

Plusieurs hypothèses sont faites dans le cadre de la théorie linéaire :

• On suppose que les variables du problème peuvent être décomposées en une partie moyenne (moyenne temporelle) et une partie oscillante de nature acoustique dénotée par un indice 1. Cet indice rappelle que ces quantités sont d'ordre 1, c'est-à-dire qu'elles sont en $O(M_a)$ où M_a est le nombre de Mach acoustique défini par (1.1.3). La notation complexe avec une dépendance temporelle en $e^{i\omega t}$ est utilisée. En notant p la pression, T la température, ρ la densité et s l'entropie du fluide, u sa vitesse dans la direction x , v sa vitesse dans la direction y et T_s la température dans le solide, on a :

$$\begin{aligned}
 p(x) &= p_m + p_1(x)e^{i\omega t}, \\
 T(x, y) &= T_m(x) + T_1(x, y)e^{i\omega t}, \\
 \rho(x, y) &= \rho_m(x) + \rho_1(x, y)e^{i\omega t}, \\
 s(x, y) &= s_m(x) + s_1(x, y)e^{i\omega t}, \\
 u(x, y) &= u_1(x, y)e^{i\omega t}, \\
 v(x, y) &= v_1(x, y)e^{i\omega t}, \\
 T_s(x, y_s) &= T_m(x) + T_{s1}(x, y_s)e^{i\omega t}.
 \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Les quantités sont complexes pour tenir compte des déphasages entre elles.

• Une hypothèse importante est que le fluide dans l'empilement est le siège d'un gradient de température moyenne T_m (dans la suite, l'indice m indiquera une moyenne temporelle). De plus cette température moyenne ne dépend que de x et est commune au fluide et au solide de la plaque. La dépendance en x de T_m est une bonne approximation, cependant Swift [119] a noté que le flux moyen de chaleur à la plaque, proportionnel à $\partial T_m / \partial y$, serait nul sans une dépendance de T_m avec y .

• La moyenne temporelle de la vitesse du fluide est nulle.

• Les dimensions caractéristiques du système en x sont supérieures aux dimensions caractéristiques en y . Cette hypothèse, introduite par Rott [106], a deux conséquences : 1) la pression ne dépend pas de y (hypothèse déjà utilisée dans la décomposition (1.2.1) pour la pression) et 2) au premier ordre la conduction de la chaleur en x est d'un ordre de grandeur inférieur à la conduction en y . De même les dérivées des composantes du tenseur visqueux par rapport à x sont négligeables devant les dérivées par rapport à y .

Les hypothèses précédentes forment la base de la théorie linéaire. Associées aux équations de la mécanique des fluides elles permettent de résoudre le problème thermoacoustique. La démarche adoptée est une méthode de perturbation. Dans un premier temps, les équations linéarisées sont résolues (section 1.2.2) permettant ainsi d'exprimer les grandeurs acoustiques d'ordre 1. Dans un deuxième temps, les grandeurs acoustiques sont utilisées pour déduire les grandeurs thermoacous-

tiques d'ordre 2 telles que le flux moyen d'énergie (section 1.2.3). Remarquons que bien que l'effet thermoacoustique soit un effet de second ordre, l'ordre 2 des variables n'apparaît pas dans la décomposition (1.2.1). Ceci est justifié par le fait que les flux d'énergie d'ordre 2 feront intervenir le produit de variables d'ordre 1.

Dans la suite on note K la conductivité du fluide, μ sa viscosité dynamique, ν sa viscosité cinématique, c_p sa capacité calorifique à pression constante, β son coefficient de dilatation thermique, γ le rapport de sa capacité thermique à pression constante à sa capacité thermique à volume constant. c est la célérité du son. On note c_s la capacité thermique du solide, K_s sa conductivité thermique, ρ_s sa masse volumique.

1.2.2 Equations linéarisées : ordre 1

Les grandeurs acoustiques d'ordre 1 sont obtenues en résolvant les équations d'état, de conservation de la masse, de Navier-Stokes et de l'entropie linéarisées et tenant compte de la décomposition (1.2.1) ainsi que des hypothèses de la section précédente. On a [118] :

$$\rho_1 = -\rho_m \beta T_1 + \frac{\gamma}{c^2} p_1, \quad (1.2.2)$$

$$i\omega \rho_1 + \frac{\partial \rho_m u_1}{\partial x} + \rho_m \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad (1.2.3)$$

$$i\omega \rho_m u_1 = -\frac{dp_1}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (1.2.4)$$

$$\rho_m c_p \left(i\omega \rho_m T_1 + u_1 \frac{dT_m}{dx} \right) - i\omega T_m \beta p_1 = K \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}. \quad (1.2.5)$$

Seule la projection sur l'axe x des équations de Navier-Stokes, (1.2.4), est retenue. La composante en y permet d'obtenir $\partial p_1 / \partial y = 0$, conformément aux hypothèses et à la dépendance de p_1 en x introduite dans la décomposition (1.2.1). Remarquons en outre que le gradient de température moyen apparaît dans le terme convectif de l'équation d'entropie.

Une équation d'énergie pour le solide est également nécessaire, elle s'écrit :

$$i\omega \rho_s T_{s1} = \frac{K_s}{\rho_s c_s} \frac{\partial^2 T_{s1}}{\partial y_s^2}. \quad (1.2.6)$$

La conduction thermique dans la direction x est négligée dans les équations (1.2.5) et (1.2.6), conformément aux hypothèses. Les conditions aux limites pour la température à l'interface fluide-solide sont classiquement la continuité de la température et du flux de chaleur. Ainsi à l'interface fluide solide on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1(y = y_0) = T_{s1}(y_s = l) \\ K \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=y_0} = K_s \frac{\partial T_{s1}}{\partial y_s} \Big|_{y_s=l} \end{array} \right. \quad (1.2.7)$$

Pour la vitesse on impose des conditions d'adhérence à la paroi :

$$u_1(y_0) = 0. \quad (1.2.8)$$

Il faut maintenant résoudre les équations (1.2.2)-(1.2.6) en utilisant les conditions aux limites (1.2.7)-(1.2.8). La résolution locale (c'est-à-dire en termes de p_1 et dp_1/dx à l'abscisse x) de l'équation (1.2.4) en utilisant la condition limite (1.2.8) donne l'expression suivante pour u_1 :

$$u_1 = \frac{i}{\omega \rho_m} \frac{dp_1}{dx} \left(1 - \frac{\cosh[(1+i)y/\delta_\nu]}{\cosh[(1+i)y_0/\delta_\nu]} \right). \quad (1.2.9)$$

Dans cette expression l'épaisseur de couche limite visqueuse δ_ν est donnée par :

$$\delta_\nu = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \quad (1.2.10)$$

δ_ν représente dans un fluide oscillant à la pulsation ω la distance de diffusion de la quantité de mouvement pendant un temps $1/\omega$.

La résolution locale de l'équation (1.2.5), couplée à l'équation (1.2.6) par l'intermédiaire des conditions aux limites (1.2.7) donne pour la fluctuation de température dans le fluide :

$$\begin{aligned} T_1 = & \frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p_1 - \frac{1}{\rho_m \omega^2} \left(1 - \frac{P_r}{P_r - 1} \frac{\cosh[(1+i)y/\delta_\nu]}{\cosh[(1+i)y_0/\delta_\nu]} \right) \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_m}{dx} \\ & - \left[\frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p_1 + \frac{(dp_1/dx)(dT_m/dx)}{(P_r - 1)\rho_m \omega^2} \left(1 + \frac{\epsilon_s f_\nu}{f_\kappa} \right) \right] \frac{1}{1 + \epsilon_s} \frac{\cosh[(1+i)y/\delta_\nu]}{\cosh[(1+i)y_0/\delta_\nu]}. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Dans cette expression on utilise l'épaisseur de couche limite thermique δ_κ qui correspond à la distance de diffusion de la chaleur pendant un temps $1/\omega$. Elle est donnée par :

$$\delta_\kappa = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}, \quad (1.2.12)$$

où $\kappa = K/\rho c_p$ est la diffusivité du fluide. Les deux distances δ_ν et δ_κ sont reliées par le nombre de Prandtl P_r . En effet,

$$\left(\frac{\delta_\nu}{\delta_\kappa} \right)^2 = P_r, \quad (1.2.13)$$

où le nombre de Prandtl est défini par :

$$P_r = \frac{c_p \nu}{K}. \quad (1.2.14)$$

Le nombre de Prandtl est une caractéristique importante du fluide pour son utilisation dans une machine thermoacoustique. Une épaisseur de couche limite thermique est définie dans le solide de la même manière que dans le fluide par :

$$\delta_{\kappa,s} = \sqrt{\frac{2\kappa_s}{\omega}}, \quad (1.2.15)$$

où $\kappa_s = K_s/\rho_s c_s$ est la diffusivité dans le solide. Les grandeurs f_ν , f_κ , et ϵ_s sont données par :

$$f_\nu = \frac{\tanh[(1+i)y_0/\delta_\nu]}{(1+i)y_0/\delta_\nu}, \quad (1.2.16)$$

$$f_\kappa = \frac{\tanh[(1+i)y_0/\delta_\kappa]}{(1+i)y_0/\delta_\kappa}, \quad (1.2.17)$$

$$\epsilon_s = \epsilon_0 \frac{\tanh[(1+i)y_0/\delta_\kappa]}{\tanh[(1+i)l/\delta_{\kappa,s}]}, \quad (1.2.18)$$

$$\text{où } \epsilon_0 = \frac{\rho_m c_p \delta_\kappa}{\rho_s c_s \delta_{\kappa,s}}. \quad (1.2.19)$$

f_ν et f_κ sont des fonctions de forme caractéristiques de la géométrie choisie (un canal plan) et dépendent de la hauteur du canal par rapport aux épaisseurs de couches limites par l'intermédiaire des paramètres y_0/δ_ν et y_0/δ_κ . Des expressions de f_ν et f_κ pour des géométries autres que planes ont été données par Arnott *et al.* [4]. Les grandeurs ϵ_0 et ϵ_s comparent les capacités thermiques du fluide et du solide. Plus leur module est petit plus la condition limite en température imposée par le solide est forte, ce qui favorise l'effet thermoacoustique. En général, pour une interaction gaz/solide $\epsilon_s \sim 0$, mais cette approximation peut ne pas être valide pour des géométries particulières [121] ou pour une interaction fluide/solide [122].

Les expressions (1.2.9) pour u_1 et (1.2.11) pour T_1 font intervenir la pression p_1 et sa dérivée. Il reste donc à résoudre une équation pour p_1 . Celle-ci s'obtient en combinant l'équation du mouvement (1.2.4) avec l'équation de conservation de la masse (1.2.3) et l'équation d'état (1.2.2), en utilisant les expressions (1.2.9) pour u_1 et (1.2.11) pour T_1 puis en intégrant par rapport à la variable y de 0 à y_0 . On obtient :

$$\frac{\rho_m c^2}{\omega^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - f_\nu}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right) - \beta \frac{c^2}{\omega^2} \frac{f_\kappa - f_\nu}{(1 - P_r)(1 + \epsilon_s)} \frac{dT_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} + \left(1 + \frac{(\gamma - 1)f_\kappa}{1 + \epsilon_s} \right) p_1 = 0. \quad (1.2.20)$$

Cette équation d'onde unidimensionnelle, donnée par Swift [118], a été d'abord obtenue par Rott [106] dans le cas où $\epsilon_s = 0$. C'est une des équations les plus importantes de la thermoacoustique. Elle régit la propagation d'une onde acoustique en présence d'un gradient de température moyen. De plus elle tient compte de la présence de parois (par l'intermédiaire de f_ν , f_κ , et ϵ_s). En l'absence de phénomènes thermovisqueux, elle se réduit à l'équation d'onde usuelle [26, 98].

1.2.3 Flux thermoacoustique : ordre 2

Jusqu'ici la résolution a visé à fournir les grandeurs acoustiques d'ordre 1 pour une onde entre deux plaques en présence d'un gradient de température. On s'intéresse maintenant au flux d'énergie moyen d'ordre 2 qui résulte de ces grandeurs acoustiques. Pour l'obtenir on part de

l'équation de conservation de l'énergie totale (voir Landau [72], et Swift [118]).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \rho e \right) = -\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + w \right) - K \nabla T - \mathbf{v} \cdot \Sigma \right], \quad (1.2.21)$$

e et w sont respectivement l'énergie interne massique et l'enthalpie massique du fluide, Σ le tenseur visqueux. Les termes $\mathbf{u}(u^2 + v^2)$ et $\mathbf{v} \cdot \Sigma$ sont du troisième ordre et peuvent être négligés [118]. Comme on s'intéresse au régime stationnaire, on prend la moyenne temporelle de l'équation précédente. On obtient :

$$\nabla \cdot (\langle \rho \mathbf{u} w \rangle_t - K \nabla T_m) = 0. \quad (1.2.22)$$

$\langle . \rangle_t$ est l'opérateur de moyenne temporelle. Une équation moyenne équivalente pour le solide donne :

$$\nabla \cdot (-K_s \nabla T_m) = 0. \quad (1.2.23)$$

Remarquons que les équations (1.2.22) et (1.2.23) font intervenir la température moyenne T_m commune au fluide et au solide, conformément à la décomposition (1.2.1). La démarche classiquement adoptée consiste à moyenner ces équations sur la demi-hauteur du canal. Ainsi l'intégration en y de (1.2.22) donne :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_0} \left[\langle \rho \mathbf{u} w \rangle_t - K \frac{\partial T_m}{\partial x} \right] dy = -K \frac{\partial T_m}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (1.2.24)$$

De même l'intégration en y_s sur une demi-épaisseur de la plaque de l'équation (1.2.22) donne :

$$\frac{d}{dx} \int_0^l \left[-K_s \frac{\partial T_m}{\partial x} \right] dy_s = -K_s \frac{\partial T_m}{\partial y_s} \Big|_{y_s=l}. \quad (1.2.25)$$

L'équation (1.2.24) signifie que le flux d'énergie moyen (par convection et conduction suivant x) dans une demi-section du canal varie en x à cause du transfert d'énergie à la paroi par conduction, qui est égal à $-K \frac{\partial T_m}{\partial y} \Big|_{y=0}$. Cette équation a été donnée par Rott [110] et Merkli *et al.* [85]. De manière identique l'équation (1.2.25) signifie que le flux d'énergie moyen (par conduction suivant x uniquement) sur une demi-épaisseur de la plaque varie en x à cause du transfert d'énergie à la paroi par conduction, qui est égal à $-K_s \frac{\partial T_m}{\partial y_s} \Big|_{y_s=l}$. Dans les hypothèses formulées à la section précédente, $T_m(x)$ ne dépend que de x et les flux à la paroi sont nuls. Ainsi on peut combiner les deux équations (1.2.24) et (1.2.25) pour obtenir :

$$\frac{d}{dx} \dot{H}_m = 0. \quad (1.2.26)$$

avec

$$\frac{\dot{H}_m}{\Pi} = \dot{E}_m + \int_0^{y_0} -K \frac{\partial T_m}{\partial x} dy + \int_0^l -K_s \frac{\partial T_m}{\partial x} dy_s, \quad (1.2.27)$$

et

$$\dot{E}_m = \int_0^{y_0} \langle \rho \mathbf{u} w \rangle_t dy. \quad (1.2.28)$$

La quantité \dot{H}_m/Π représente le flux d'énergie moyen dans la direction x par unité de périmètre Π (voir figure 1.2.1) de la plaque. La réapparition de Π est naturelle et correspond à une intégration dans la direction d'homogénéité z . Ce flux est dû au flux d'enthalpie moyen par convection dans la direction x , noté \dot{E}_m et donné par (1.2.28), et aux flux conductifs dans le fluide et dans la plaque. L'équation (1.2.26) indique qu'en l'absence de pertes latérales d'énergie le flux d'énergie \dot{H}_m est indépendant de x .

Remarque : comme souligné auparavant, la température moyenne commune au fluide et au solide devrait dépendre de y . On devrait noter la température moyenne du fluide $T_m(x, y)$ et la température moyenne du solide intervenant dans l'équation (1.2.25) devrait être notée $T_{sm}(x, y)$. Les grandeurs $-K \left. \frac{\partial T_m}{\partial y} \right)_{y=0}$ et $-K_s \left. \frac{\partial T_{sm}}{\partial y_s} \right)_{y_s=l}$ seraient non nulles. Toutefois la continuité du flux de chaleur à l'interface fluide/solide imposerait qu'elles soient égales. Ainsi les deux équations (1.2.24) et (1.2.25) se combineraient et redonneraient bien les équations (1.2.26) et (1.2.27). La dépendance en y de T_m ne changerait donc pas le résultat.

On a pu exprimer un flux d'énergie moyen \dot{H}_m dans la direction x le long de l'empilement de plaques. Ce flux est exprimé par (1.2.27) et vérifie (1.2.26). En particulier il prend en compte le flux convectif d'enthalpie responsable de l'effet thermoacoustique. Le but est maintenant d'obtenir ce flux en fonction des grandeurs d'ordre 1 obtenues dans la section 1.2.2 précédente. En développant le flux d'enthalpie jusqu'au second ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{E}_m = \int_0^{y_0} \langle \rho \mathbf{u} w \rangle_t dy = \int_0^{y_0} (\rho_m w_m \langle u_1 \rangle_t + \rho_m w_m \langle u_2 \rangle_t \\ + w_m \langle \rho_1 u_1 \rangle_t + \rho_m \langle u_1 w_1 \rangle) dy. \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

On a $\langle u_1 \rangle_t = 0$. De plus, dans le cas d'une machine fermée à ses extrémités, le flux de masse dans une section du canal doit être nul, on a donc :

$$\int_0^{y_0} \langle \rho_m u_2 + \rho_1 u_1 \rangle_t dy = 0, \quad (1.2.30)$$

et en utilisant la relation thermodynamique $w_1 = c_p T_1 + (1 - \beta T_m) p_1 / \rho_m$ on a :

$$\dot{E}_m = \int_0^{y_0} (\rho_m c_p \langle u_1 T_1 \rangle_t + (1 - \beta T_m) \langle u_1 p_1 \rangle_t) dy. \quad (1.2.31)$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{H}_m}{\Pi} = \int_0^{y_0} (\rho_m c_p \langle u_1 T_1 \rangle_t + (1 - \beta T_m) \langle u_1 p_1 \rangle_t) dy \\ - (y_o K + l K_s) \frac{dT_m}{dx}. \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

On a donc obtenu le flux d'énergie moyen dans la direction x le long de l'empilement. Ce flux contient trois termes. Le premier terme est un flux d'enthalpie et constitue la contribution thermoacoustique. Il s'exprime en terme de grandeurs acoustiques d'ordre 1. Les deux autres termes

impliquent la conduction de la chaleur dans la direction x . Ils existent du simple fait de la présence du gradient de température moyen. Le flux \dot{H}_m est noté \dot{H}_2 par Swift [118] pour rappeler qu'il s'agit d'un flux d'ordre 2. On remarque qu'en effet $T_m - T_0$ (où T_0 est la température ambiante uniforme) est d'ordre 2. Ainsi la décomposition (1.2.1) bien qu'écrite à l'ordre 1 fait implicitement intervenir des termes d'ordre 2 dans les champs moyens.

Dans les machines thermiques on s'intéresse généralement aux quantités de travail et de chaleur.

Dans le cas présent on définit le flux de travail moyen $\dot{W}_m(x)$ par :

$$\dot{W}_m(x) = \int_{y=0}^{y=y_0} \langle p_1 u_1 \rangle_t dy, \quad (1.2.33)$$

ainsi que le flux de chaleur (d'entropie) moyen $\dot{Q}_m(x)$ par :

$$\dot{Q}_m(x) = \int_{y=0}^{y=y_0} [\rho_m c_p \langle u_1 T_1 \rangle_t - \beta T_m \langle p_1 u_1 \rangle_t] dy. \quad (1.2.34)$$

Ce flux de chaleur est d'origine thermoacoustique, il est produit par l'onde acoustique. Les termes de conduction peuvent quant à eux être mis sous la forme de flux de chaleur par conduction dans le fluide $\dot{Q}_{m,cond}(x)$, et dans le solide $\dot{Q}_{m,cond,s}(x)$, définis par

$$\dot{Q}_{m,cond}(x) = -y_o K \frac{dT_m}{dx}, \quad (1.2.35)$$

$$\dot{Q}_{m,cond,s}(x) = -l K_s \frac{dT_m}{dx}. \quad (1.2.36)$$

Au total on peut écrire \dot{H}_m sous la forme :

$$\frac{\dot{H}_m(x)}{\Pi} = \dot{Q}_m(x) + \dot{W}_m(x) + \dot{Q}_{m,cond}(x) + \dot{Q}_{m,cond,s}(x). \quad (1.2.37)$$

Cette expression fait apparaître les termes recherchés de flux de travail et de chaleur.

La connaissance du gradient moyen de température ainsi que des grandeurs acoustiques d'ordre 1 détermine complètement \dot{H}_m par utilisation de l'expression (1.2.32). Ainsi en utilisant les expressions (1.2.9) pour u_1 et (1.2.11) pour T_1 , on obtient localement (c'est-à-dire en terme de p_1 et dp_1/dx) l'expression suivante pour \dot{H}_m :

$$\begin{aligned} \dot{H}_m = & \frac{\Pi y_0}{2\omega \rho_m} \text{Im} \left[\frac{dp_1^*}{dx} p_1 \left(1 - f_\nu^* - \frac{T_m \beta (f_\kappa - f_\nu^*)}{(1 + \epsilon_s)(1 + P_r)} \right) \right] \\ & + \frac{\Pi y_0 c_p}{2\omega^3 \rho_m (1 - P_r)} \frac{dT_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} \frac{dp_1^*}{dx} \text{Im} \left[f_\nu^* + \frac{(f_\kappa - f_\nu^*)(1 + \epsilon_s f_\nu / f_\kappa)}{(1 + \epsilon_s)(1 + P_r)} \right] \\ & - \Pi (y_o K + l K_s) \frac{dT_m}{dx}. \end{aligned} \quad (1.2.38)$$

Dans cette équation on a utilisé la relation classique pour la moyenne en notation complexe, $\langle ab \rangle_t = \text{Re}(ab^*)/2$, où Re dénote la partie réelle, Im la partie imaginaire, et $*$ indique le complexe

conjugué. Le flux moyen \dot{H}_m s'exprime en terme de la géométrie, des propriétés thermophysiques du fluide et du solide, du gradient moyen de température et de la pression p_1 . Cette dernière est déterminée par l'équation (1.2.20). Les équations (1.2.20) pour p_1 et l'expression (1.2.38) pour \dot{H}_m sont donc les équations fondamentales de la théorie thermoacoustique linéaire. Bien que la géométrie décrite soit plane, la théorie linéaire peut être étendue à des géométries de pore quelconques [4]. On retrouve alors des expressions similaires à (1.2.20) et (1.2.38) où les fonctions de forme f_ν , f_κ ainsi que ϵ_s sont modifiées. L'expression de \dot{H}_m est très générale mais complexe et l'équation (1.2.20) doit généralement être résolue numériquement. Pour pouvoir étudier le problème de manière analytique, des simplifications doivent être faites. Ces simplifications et les résultats qui en résultent font l'objet de la section suivante.

1.2.4 Empilement court

L'hypothèse d'un stack de faibles dimensions ($L/\lambda \ll 1$) permet de s'affranchir de la résolution de l'équation (1.2.20) sur la pression. En effet un tel stack perturbe peu l'onde stationnaire dans le résonateur. Ainsi la pression est simplement prise égale à celle qui existerait dans un résonateur vide, soit :

$$p_1(x) = p_1^s(x). \quad (1.2.39)$$

et Swift prend p_1^s réelle. De plus on suppose un déphasage d'onde stationnaire entre la pression et la vitesse axiale moyennée dans une section du canal, $\langle u_1 \rangle_y$, donnée par :

$$\langle u_1 \rangle_y = \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} u_1 dy = i \langle u_1^s \rangle_y, \quad (1.2.40)$$

où $\langle u_1^s \rangle_y$ est prise réelle. Le calcul du flux moyen d'énergie par (1.2.38) requiert une expression pour dp_1/dx , qui s'obtient en terme de $\langle u_1 \rangle_y$ en moyennant l'équation (1.2.9) dans une section du canal. On obtient :

$$\frac{dp_1}{dx} = \frac{\omega \rho_m \langle u_1^s \rangle_y}{1 - f_\nu}. \quad (1.2.41)$$

Les expressions de p_1^s et $\langle u_1^s \rangle_y$ pour l'onde stationnaire sont données par :

$$p_1^s(x) = P_A \sin(kx), \quad (1.2.42)$$

$$\langle u_1^s \rangle_y(x) = \left(1 + \frac{l}{y_0}\right) \frac{P_A}{\rho_m c} \cos(kx). \quad (1.2.43)$$

L'expression pour $\langle u_1^s \rangle_y$ tient compte du rétrécissement de section lors du passage du résonateur au stack. Les définitions (1.2.42) et (1.2.43) données par Swift et utilisées uniquement dans cette section sont équivalentes aux définitions (1.1.1) utilisées partout ailleurs dans cette thèse, à une différence de phase près.

En plus des hypothèses ci-dessus, Swift fait l'approximation de type couche limite, qui suppose que $y_0 \gg \delta_\kappa$ et $l \gg \delta_s$. Mathématiquement cette approximation rend les tangentes hyperboliques (présentes par exemple dans les expressions (1.2.16) pour f_ν et (1.2.17) pour δ_κ) égales à l'unité. Cette approximation se vérifie bien dès que $y_0 > 2\delta_\kappa$ et $l > 2\delta_s$, des valeurs très réalistes. L'hypothèse de stack court et celle de couche limite permettent à Swift de calculer le flux d'énergie moyen ainsi que le travail $\Delta\dot{W}_m$ absorbé par le stack par unité de temps. Les expressions obtenues sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{H}_m = & -\frac{1}{4}\Pi\delta_\kappa \frac{T_m\beta p_1^s < u_1^s >_y}{(1+\epsilon_s)(1+P_r)(1-\delta_\nu/y_0 + \delta_\nu^2/2y_0^2)} \\ & * \left[\Gamma \frac{1 + \sqrt{P_r} + P_r + P_r\epsilon_s}{1 + \sqrt{P_r}} - (1 + \sqrt{P_r} - \delta_\nu/y_0) \right] \\ & - \Pi(y_0K + lK_s) \frac{dT_m}{dx}, \end{aligned} \quad (1.2.44)$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{W}_m = & \frac{1}{4}\Pi\delta_\kappa L \frac{(\gamma-1)\omega(p_1^s)^2}{\rho_m c^2(1+\epsilon_s)} \left[\frac{\Gamma}{(1+\sqrt{P_r})(1-\delta_\nu/y_0 + \delta_\nu^2/2y_0^2)} - 1 \right] \\ & - \frac{1}{4}\Pi\delta_\nu L \frac{\omega\rho_m < u_1^s >_y^2}{(1-\delta_\nu/y_0 + \delta_\nu^2/2y_0^2)}. \end{aligned} \quad (1.2.45)$$

Dans les expressions précédentes Γ est défini par :

$$\Gamma = \nabla T_m / \nabla T_{m,crit}, \quad (1.2.46)$$

où le gradient de température moyen critique est défini par :

$$\nabla T_{m,crit} = \frac{T_m\beta\omega p_1^s}{\rho_m c_p < u_1^s >_y}. \quad (1.2.47)$$

Rappelons qu'un gradient critique a déjà été défini lors de l'explication lagrangienne simplifiée de l'effet thermoacoustique pour un fluide non visqueux (section 1.1.3, expression (1.1.5)). Ce gradient était simplement le rapport entre l'amplitude de la température acoustique et l'amplitude du déplacement acoustique. C'est bien le résultat donné par l'expression (1.2.47) si l'on prend un fluide idéal (pour lequel $T_m\beta = 1$), en remarquant que $T_1^s = p_1^s/\rho_m c_p$ est l'amplitude de la température acoustique et $< u_1^s >_y / \omega$ l'amplitude du déplacement acoustique.

Les expressions précédentes peuvent encore être simplifiées en supposant que les effets visqueux sont peu importants. Dans ce cas le nombre de Prandtl P_r est faible et les expressions sont développées à l'ordre $\sqrt{P_r}$. Cette approximation est faite essentiellement pour obtenir des expressions simples mais n'est acceptable que pour des fluides à très faibles nombres de Prandtl [122]. On obtient pour le flux d'énergie moyen \dot{H}_m au-dessus de la plaque et la puissance mécanique $\Delta\dot{W}_m$ absorbée par la plaque [118] :

$$\dot{H}_m = -\frac{1}{4}\Pi\delta_\kappa \frac{T_m\beta p_1^s < u_1^s >_y}{(1+\epsilon_s)(1-\sqrt{P_r})} (\Gamma - 1) - \Pi(y_0K + lK_s) \frac{dT_m}{dx}, \quad (1.2.48)$$

$$\Delta\dot{W}_m = \frac{1}{4}\Pi\delta_\kappa L \frac{(\gamma - 1)\omega(p_1^s)^2}{\rho_m c^2(1 + \epsilon_s)}(\Gamma - 1) - \frac{1}{4}\Pi\delta_\nu L \omega \rho_m \langle u_1^s \rangle_y^2. \quad (1.2.49)$$

Ces expressions sont les plus simples que l'on puisse obtenir par la théorie linéaire. On rappelle qu'elles sont valables pour un stack court, dans l'approximation de type couche limite, et pour un fluide de très faible viscosité. Dans la suite de la discussion on suppose pour simplifier que le gradient de température est dirigé vers le ventre de pression de l'onde stationnaire. Le flux d'énergie moyen \dot{H}_m (expression (1.2.48)) contient deux termes. Le premier est le transport d'énergie par effet thermoacoustique. Il contient l'effet du gradient de température moyen sur cet effet par l'intermédiaire de Γ . Deux possibilités se présentent. Quand $\Gamma < 1$, c'est-à-dire quand le gradient de température moyen ∇T_m est inférieur au gradient critique $\nabla T_{m,crit}$, le flux moyen d'énergie est dirigé vers le ventre de pression, c'est-à-dire dans le cas présent dans le sens du gradient de température moyen. On est alors dans le cas d'une utilisation en réfrigérateur, puisque l'on pompe de l'énergie d'une zone froide vers une zone chaude. Dans le cas contraire, $\Gamma > 1$, l'énergie est transportée vers le noeud de pression et ici dans le sens inverse du gradient de température, ce qui correspond au cas du moteur. Le fonctionnement en réfrigérateur ou en moteur dépend donc de la valeur du gradient de température moyen par rapport au gradient critique, conformément aux conclusions du modèle simplifié de la section 1.1.3. Le transport thermoacoustique est aussi proportionnel au produit $p_1^s \langle u_1^s \rangle_y$, et sera donc maximal pour une plaque située entre le ventre de pression et le ventre de vitesse. Enfin le transport est proportionnel au produit $\Pi\delta_\kappa$, qui correspond à l'aire du fluide situé dans la couche limite thermique dans une section perpendiculaire à la plaque. Le second terme dans l'expression de \dot{H}_m est un terme de conduction de la chaleur le long du gradient ∇T_m dans le fluide et la plaque. Ce terme représente une perte. La puissance mécanique $\Delta\dot{W}_m$ (expression (1.2.49)) présente elle aussi deux termes. Le premier est à nouveau lié à l'effet thermoacoustique et contient le facteur $(\Gamma - 1)$. Comme on l'a vu, pour $\Gamma < 1$, on est dans le cas du réfrigérateur. Le premier terme de $\Delta\dot{W}_m$ est alors négatif, et le travail est absorbé. Dans le cas du moteur, $\Gamma > 1$, du travail est produit. On note de nouveau la présence du facteur $\Pi\delta_\kappa$, surface caractéristique de l'effet thermoacoustique. On observe aussi une dépendance en L , la longueur de la plaque, que l'on ne trouvait pas dans l'expression du flux d'énergie. Cette différence peut aisément s'expliquer en se reportant au modèle simplifié de la section 1.1.3. Dans ce modèle, une quantité de chaleur est transportée d'un bout à l'autre de la plaque par des particules mises en série. Chaque particule a un rôle de transmission, pas de création. Ainsi la quantité de chaleur transportée d'un bout à l'autre de la plaque, et donc le flux d'énergie, ne dépend pas du nombre de particules, donc de la longueur de la plaque. En revanche, pour jouer son rôle de transmetteur, chaque particule absorbe ou crée du travail. La quantité de travail absorbé ou créé dépend donc du nombre total de particules mises en jeu dans la transmission, c'est-à-dire de la longueur de la

plaque. Globalement la puissance mécanique absorbée ou créée dépend du volume de fluide $\Pi\delta_\kappa L$ situé à une épaisseur thermique de la plaque. Le deuxième terme dans l'expression de $\Delta\dot{W}_m$ est un terme de perte dû à la dissipation visqueuse, il est donc proportionnel au carré de la vitesse $\langle u_1^s \rangle_y^2$ et au volume de fluide $\Pi\delta_\nu L$ situé dans une épaisseur visqueuse autour de la plaque.

En résumé les expressions (1.2.48) et (1.2.49) montrent que si $\Gamma < 1$, c'est-à-dire si le gradient moyen de température est inférieur au gradient critique, la plaque se comporte comme un réfrigérateur : elle absorbe du travail et transporte de la chaleur dans le sens du gradient de température. Le travail est fourni par l'onde acoustique maintenue par une source. Si $\Gamma > 1$ au contraire la plaque se comporte comme un moteur, elle transporte de la chaleur dans le sens opposé au gradient de température, et produit du travail. Dans ce cas c'est le gradient de température qui doit être maintenu par une source de chaleur. On rappelle également la présence de deux facteurs de perte : la conduction thermique dans le fluide et la plaque, parallèlement à la plaque, qui limite le flux d'énergie, et la dissipation visqueuse, qui dissipe de l'énergie mécanique. Notons que l'effet thermoacoustique est proportionnel à $\Pi\delta_\kappa$. La conduction thermique du fluide représente donc un élément indispensable pour réaliser cet effet : si la conductivité thermique du fluide est nulle, c'est-à-dire si $K = 0$, alors $\delta_\kappa = 0$ et l'effet est nul. Ainsi de manière inévitable plus l'effet thermoacoustique est important, plus les pertes par conduction thermique sont elles aussi importantes. Par contre la viscosité apparaît uniquement comme un facteur de perte à travers le terme $\Pi\delta_\nu$: une viscosité aussi faible que possible, et donc un nombre de Prandtl P_r petit, sont donc souhaités.

Pour conclure cette section il est intéressant de calculer l'efficacité de la machine thermoacoustique que constitue la plaque et l'onde stationnaire. Dans ce calcul on néglige les termes de perte, c'est-à-dire les seconds membres des expressions (1.2.48) et (1.2.49). On suppose donc aussi $P_r = 0$, ainsi que $\epsilon_s = 0$. Pour un réfrigérateur l'efficacité est définie par :

$$\eta = \frac{\dot{Q}_m}{-\Delta\dot{W}_m} \sim \frac{\dot{H}_m}{-\Delta\dot{W}_m}. \quad (1.2.50)$$

Avec les simplifications retenues elle vaut :

$$\eta = -\frac{T_m\beta \langle u_1^s \rangle_y \rho_m c^2}{(\gamma - 1)\omega p_1^s L}. \quad (1.2.51)$$

En remarquant que $\gamma - 1 = T_m\beta^2 c^2 / c_p$ et en utilisant la définition du gradient de température critique (1.2.47), on obtient :

$$\eta = \Gamma\eta_C, \quad (1.2.52)$$

où

$$\eta_C = \frac{T_m}{\nabla T_m L} = \frac{T_m}{\Delta T}, \quad (1.2.53)$$

est la valeur maximale de l'efficacité pour un cycle de Carnot réversible qui fonctionnerait entre deux sources de chaleur dont la différence vaudrait $\Delta T = L\nabla T_m$ et la température froide serait approximativement T_m . Puisque pour un réfrigérateur on a $\Gamma < 1$, l'efficacité η est bien inférieure à η_C . Dans le cas d'un moteur, l'efficacité η' vérifie $\eta' = \eta'_C/\Gamma$, où η'_C est l'efficacité de Carnot pour un moteur. Dans ce cas, $\Gamma > 1$, et η' est bien inférieure à η'_C . Ainsi quand on se situe à la frontière du fonctionnement entre un réfrigérateur et un moteur ($\Gamma = 1$), l'efficacité vaut l'efficacité de Carnot. Cependant les premiers termes des équations (1.2.48) et (1.2.49) indiquent qu'il n'y a alors pas de processus thermoacoustique, car dans ce cas la particule qui oscille au-dessus de la paroi est en permanence en équilibre thermique avec la paroi. Quand il y a un processus de réfrigérateur ($\Gamma < 1$) ou de moteur ($\Gamma > 1$) l'efficacité est inférieure à celle de Carnot, et ce d'autant plus que $|\Gamma|$ s'éloigne de 1, c'est-à-dire que la puissance de la machine est grande. Rappelons de plus que le calcul de l'efficacité a été fait en négligeant les pertes par conduction et dissipation visqueuse. Cette efficacité idéale étant malgré cela inférieure à celle de Carnot, on en déduit que les machines basées sur l'effet thermoacoustiques sont intrinsèquement irréversibles dans leur fonctionnement.

1.2.5 Différence de température entre les extrémités de l'empilement

On considère ici le cas d'un réfrigérateur thermoacoustique. Quand une plaque, initialement en équilibre avec le milieu ambiant, est soumise à une onde stationnaire, il existe un flux d'énergie thermoacoustique dans le fluide parallèlement à la plaque. Le flux est dirigé vers le noeud de pression le plus proche. Sous l'effet de ce flux, un gradient de température moyen ∇T_m va progressivement se créer dans la plaque et le fluide au-dessus d'elle. En l'absence de pertes ce gradient augmenterait jusqu'à la valeur limite que constitue le gradient critique. Mais en réalité la valeur de ∇T_m est limitée par les pertes, et particulièrement par le flux de chaleur par conduction thermique qui s'oppose au flux thermoacoustique. Ainsi, il est possible d'évaluer le gradient de température, ou encore la différence de température $\Delta T = L\nabla T_m$ entre les extrémités de la plaque, quand on atteint l'état d'équilibre. Pour cela, Wheatley *et al.* [143], ainsi que Atchley *et al.* [10], supposent qu'à l'équilibre le flux de chaleur par effet thermoacoustique est balancé par le flux de chaleur inverse par conduction thermique. De manière équivalente on peut poser, à l'équilibre :

$$\dot{H}_m = 0. \quad (1.2.54)$$

On résout l'équation précédente pour la variable ∇T_m en utilisant pour \dot{H}_m l'expression (1.2.38). Pour obtenir une expression analytique, on se place de nouveau dans l'hypothèse d'un empilement court, on utilise donc pour la pression et sa dérivée les expressions suivantes :

$$p_1(x) = iP_A \cos(kx), \quad (1.2.55)$$

$$\frac{dp_1}{dx}(x) = \frac{1 + l/y_0}{1 - f_\nu} (-iP_A k \sin(kx)). \quad (1.2.56)$$

Ces expressions diffèrent de celles données à la section précédente, ((1.2.39) et (1.2.41)), uniquement par un terme de phase. En effet on fixe ici la pression imaginaire plutôt que la vitesse, une convention plus adaptée aux notations (1.1.1) généralement utilisées dans cette thèse. Après calcul on obtient :

$$\Delta T = L\nabla T_m = \frac{\frac{-Ly_0}{4\rho_m c_0} P_A^2 \sin(2kx) \left(1 + \frac{l}{y_0}\right) A_1}{y_0 K + lK_s - \frac{y_0 c_p (1 + l/y_0)^2}{4\omega \rho_m c^2 (1 - P_r)} P_A^2 (1 - \cos(2kx)) A_2}, \quad (1.2.57)$$

où les coefficients A_1 et A_2 sont donnés par :

$$A_1 = \text{Im} \left[\left(1 - f_\nu^* - \frac{f_\kappa - f_\nu^*}{(1 + \epsilon_s)(1 + P_r)} \right) \frac{1}{1 - f_\nu^*} \right], \quad (1.2.58)$$

$$A_2 = \text{Im} \left[\left(f_\nu^* + \frac{(f_\kappa - f_\nu^*)(1 + \epsilon_s f_\nu / f_\kappa)}{(1 + \epsilon_s)(1 + P_r)} \right) \frac{1}{(1 - f_\nu)(1 - f_\nu^*)} \right]. \quad (1.2.59)$$

Une autre approximation qui avait été faite à la section précédente était celle de couche limite pour laquelle on peut écrire $f_\nu \sim (1 - i)\delta_\nu/2y_0$, $f_\kappa \sim (1 - i)\delta_\kappa/2y_0$, ainsi que $\epsilon_s = \epsilon_0$. Dans cette hypothèse la différence de température ΔT_{cl} s'écrit :

$$\Delta T_{cl} = \frac{\frac{-Ly_0}{4\rho_m c_0} P_A^2 \sin(2kx) \left(1 + \frac{l}{y_0}\right) A_{1,cl}}{y_0 K + lK_s - \frac{y_0 c_p (1 + l/y_0)^2}{4\omega \rho_m c^2 (1 - P_r)} P_A^2 (1 - \cos(2kx)) A_{2,cl}}, \quad (1.2.60)$$

où les nouveaux coefficients $A_{1,cl}$ et $A_{2,cl}$ sont donnés par :

$$A_{1,cl} = \frac{\delta_\kappa}{2y_0} \frac{1 - \frac{\delta_\nu}{y_0} + \sqrt{P_r}}{(1 + \epsilon_0)(1 + P_r) \left(1 - \frac{\delta_\nu}{y_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_\nu}{y_0} \right)^2 \right)}, \quad (1.2.61)$$

$$A_{2,cl} = - \frac{1 + \sqrt{P_r} + P_r + P_r \epsilon_0}{(1 + \sqrt{P_r})(1 + \epsilon_0)(1 + P_r) \left(1 - \frac{\delta_\nu}{y_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_\nu}{y_0} \right)^2 \right)}. \quad (1.2.62)$$

L'expression (1.2.60) est une très bonne approximation de (1.2.57) pour une hauteur de canal vérifiant $y_0 > 2\delta_\nu$. Elle est aussi donnée par Worlikar *et al.* [148]. Worlikar confronte cette formule à ses prédictions numériques, ainsi qu'aux expériences d'Atchley *et al.* [10]. Des comparaisons entre une formule équivalente et des résultats expérimentaux ont été faites par Wheatley *et al.* [143], Atchley *et al.* [10], Kim *et al.* [70] et Duffourd [40].

1.2.6 Avantages et limites de la théorie linéaire

La théorie linéaire donne une explication qualitative et quantitative des flux moyens d'énergie dans une machine thermoacoustique. En faisant quelques hypothèses simplificatrices, elle permet d'obtenir des formules analytiques simples qui permettent de premiers dimensionnements.

En particulier Wetzell et Herman [141], ainsi que Minner *et al.* [87] ont pu faire des calculs d'optimisation en utilisant les résultats de cette théorie. Dans le cas où aucune hypothèse n'est faite, l'équation pour la pression (1.2.20), couplée à l'expression du flux d'énergie moyen (1.2.38), doit être intégrée numériquement dans le stack et dans le résonateur en choisissant des conditions aux limites. Un outil numérique appelé DELTAE (pour Design Environment for Low-amplitude Thermoacoustic Engines, disponible sur le site internet du laboratoire de Los Alamos, à l'adresse www.lanl.gov/thermoacoustics), présenté par Ward *et al.* [137], accomplit cette intégration. L'avantage d'un tel code est d'une part que l'intégration des équations 1D n'est pas coûteuse en terme de temps de calcul, et d'autre part qu'il permet d'intégrer divers phénomènes acoustiques ainsi que des éléments mis en série (stack, échangeurs, morceaux de résonateurs, changements de section, pertes de charge, rugosité...). Des prévisions de systèmes complexes peuvent ainsi être faites [12].

Pourtant la théorie linéaire reste un outil 1D, et bien évidemment, ignore tout phénomène non-linéaire qui pourrait apparaître dans les machines thermoacoustiques. De plus elle ne tient pas compte des effets de bord, tels que les lâchers tourbillonnaires en bouts de plaque. Elle s'intéresse au flux de chaleur moyen dans la direction des plaques, mais ne décrit pas les flux de chaleur transverses entre la plaque et le fluide, bien que des développements aient été faits dans ce sens par Mozurkewich [91, 90]. Elle ne décrit pas non plus de manière théorique l'interaction entre les plaques du stack et les échangeurs de chaleur, et Gusev *et al.* [55] ont montré qu'elle n'est pas adaptée pour ce traitement à cause de sa modélisation du terme convectif de l'équation d'entropie. Enfin elle ne prend pas en compte les mouvements moyens dans le fluide connus sous le nom d'acoustic streaming.

1.3 Axes de recherche et développements en cours

On présente ici les principaux axes de recherche liés à l'étude des machines thermoacoustiques, ainsi que les avancées récentes qui ont enrichi la compréhension des phénomènes physiques et permis des gains d'efficacité dans les réalisations pratiques.

1.3.1 Les résonateurs

Les résonateurs sont utilisés dans les réfrigérateurs et les moteurs à onde stationnaire. Leur but est d'obtenir une onde de forte intensité. Un des phénomènes souvent liés aux ondes résonantes est la création d'harmoniques, voire l'apparition de chocs. La thermoacoustique fait ainsi renaître un intérêt ancien pour les ondes résonantes. Citons les travaux de Chester [31], et ceux de Coppens et Sanders [34, 35]. Une première étude théorique sur l'influence des chocs dans un résonateur sur

l'effet thermoacoustique a été fournie par Rott [108]. Des oscillations fortement non-linéaires ont été observées dans un moteur thermoacoustique à onde stationnaire par Atchley *et al.* [10], qui ont pu relier leurs observations à la théorie de Coppens *et al.* [34]. Swift [119], dans son étude d'un moteur fonctionnant à amplitude élevée, a montré que l'apparition d'harmoniques correspondante nuit aux performances de la machine. A la différence des résonateurs vides harmoniques, les résonateurs équipés d'un dispositif thermoacoustique sont anharmoniques, comme l'ont montré Gaitan *et al.* [45]; cela signifie que les fréquences de résonance des différents modes ne sont pas un multiple entier de la fréquence de résonance associée au premier mode. Cette anharmonicité est bénéfique puisqu'elle défavorise la déformation non-linéaire d'une onde excitée sur le premier mode. Gaitan *et al.* [45] ont montré que l'anharmonicité des résonateurs peut être augmentée en introduisant des changements de section, et ont comparé leurs résultats expérimentaux à la théorie de Coppens *et al.* [35]. Des études faites par Lawrenson *et al.* [74], par Ilinskii *et al.* [64], par Chun *et al.* [32] ainsi que par Hamilton *et al.* [58], ont porté sur des résonateurs anharmoniques par modification de leur forme et ont permis d'obtenir des ondes acoustiques de très forte intensité et à faible taux d'harmoniques. Ces résonateurs pourraient trouver une application dans le domaine de la thermoacoustique. Des résonateurs radiaux ont également été utilisés par Lightfoot *et al.* [77] et par Chen *et al.* [29] dans leur réfrigérateur miniature, et un de leurs avantages est d'être anharmonique [77].

1.3.2 Les sources acoustiques

Les sources électrodynamiques les plus couramment utilisées dans les réfrigérateurs thermoacoustiques sont des haut-parleurs commerciaux. Construits pour fonctionner dans un espace libre, ils ont une faible impédance et ne sont pas adaptés au fonctionnement dans des résonateurs. Ainsi la partie centrale de la membrane est parfois remplacée par un cône pour augmenter l'impédance [129]. Pour des dispositifs de petites dimensions fonctionnant à haute fréquence, des transducteurs piézoélectriques ont été utilisés [29]. Des piézoélectriques ont également été utilisés comme source par Lihoreau [78]. Des études sur les piézoélectriques ont été faites au laboratoire, et font encore le sujet de recherches [33]. D'une manière générale, les sources posent plusieurs problèmes. D'abord, des problèmes de couplage entre la source et le résonateur : la résonance est en effet imposée d'une part par les caractéristiques du résonateur et d'autre part par celles de la source. Ainsi Bailliet *et al.* [15], Li *et al.* [76], et Tijani *et al.* [131] ont montré que les deux éléments doivent être choisis simultanément pour obtenir une efficacité électro-acoustique aussi élevée que possible. Li *et al.* [76] ont de plus proposé un système de contrôle qui permet de maintenir une efficacité électroacoustique optimale lors d'un changement des conditions d'opération de leur réfrigérateur. Les sources, utilisées à de fortes puissances, posent ensuite des problèmes de fiabilité, spécialement

les piézoélectriques. Le piézoélectrique utilisé par Chen *et al.* [29] dans leur réfrigérateur miniature rompt au bout d'une demi-heure d'utilisation. Une des possibilités pour s'affranchir du problème des sources est de secouer le résonateur entier [74]. De plus, comme on l'a vu, un moteur thermoacoustique peut créer une oscillation acoustique et être lui-même utilisé comme une source pour un réfrigérateur thermoacoustique. Cette utilisation est particulièrement intéressante d'un point de vue économique pour récupérer les chaleurs perdues ou utiliser l'énergie solaire [1, 30].

1.3.3 Le streaming

L' "acoustic streaming" désigne les flux moyens de masse induits par les oscillations acoustiques. Sa présence dans les machines thermoacoustiques en dégrade les performances. Les premières observations de streaming ont été faites au 19^{ième} siècle dans un tube de Kundt et la première explication quantitative a été donnée par Rayleigh [105] (voir aussi Réf. [104], Vol. 2, Sec. 352), qui s'est intéressé au streaming causé par une onde acoustique stationnaire dans un résonateur. Une des hypothèses utilisées est que le résonateur est large par rapport à l'épaisseur de couche limite visqueuse. Les lignes de courant correspondantes sont représentées à la figure 1.3.1. Les

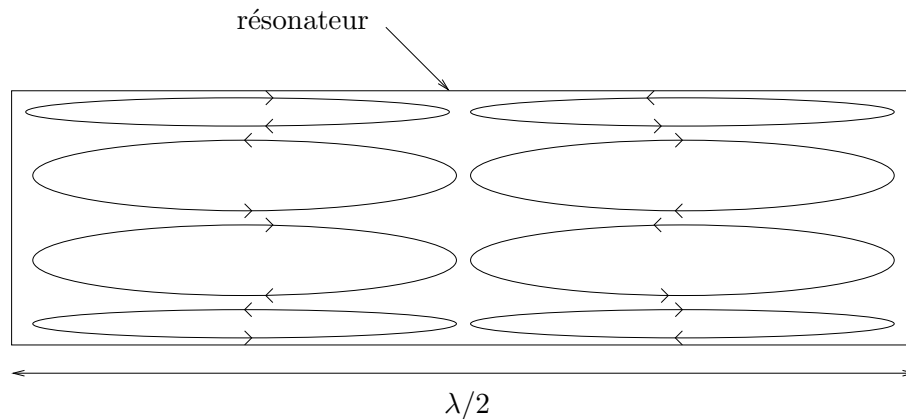


FIG. 1.3.1 – Lignes de courant correspondant à l'acoustic streaming dans un résonateur acoustique.

principales caractéristiques sont la présence de mouvements vorticaux centraux, entraînés par des mouvements vorticaux plus petits situés dans la couche limite près des parois. La méthode de calcul utilisée par Rayleigh consiste à trouver une solution d'ordre 1 pour les perturbations acoustiques et utiliser cette solution comme terme source pour les perturbations d'ordre 2, ces dernières incluant le streaming. Cette méthode est devenue classique. Remarquons qu'elle est aussi utilisée dans la théorie linéaire de la thermoacoustique pour déduire les flux d'énergie moyens, comme on l'a vu dans la section 1.2. Le streaming traité par Rayleigh, souvent appelé "Rayleigh streaming", est causé par l'interaction de l'onde avec les parois du résonateur. Il existe une autre forme de

streaming, appelé "Eckart streaming", qui est causé par l'absorption d'un faisceau acoustique, généralement sur de longues distances de propagation, loin de toute paroi [42]. De nombreux travaux ont été faits depuis, une synthèse étant fournie par Nyborg [92, 93]. Des corrections au travail de Rayleigh ont notamment été apportées par Westervelt [140] et Nyborg [92]. En liaison avec la thermoacoustique, une première étude sur l'influence d'un gradient de température moyen a été faite par Rott [109]. L'étude de l'impact du streaming sur les machines thermoacoustiques est beaucoup plus récente. Gedeon [49] a calculé le flux de masse moyen dans un tube pulsé, et le terme "Gedeon streaming" désigne depuis un flux moyen de masse dans un système présentant une boucle. Ce flux est néfaste aux performances de tels systèmes, comme les moteurs à onde progressive qui utilisent un résonateur annulaire, de l'énergie est directement transportée par un courant continu de l'échangeur chaud vers l'échangeur froid. Pour le supprimer, Backhaus *et al.* [12] ont utilisé un orifice asymétrique qui crée un gradient de pression moyen s'opposant au streaming. Une étude théorique du streaming dans un moteur annulaire a été faite par Gusev *et al.* [54], qui ont montré que la quantité d'énergie transportée dans l'empilement par le streaming peut être d'importance égale à celle transportée par le flux thermoacoustique. Le streaming de type Rayleigh est lui aussi responsable de pertes dans les tubes pulsés et l'utilisation d'une forme de tubes pulsés conique, proposée par Olson *et al.* [96], permet des gains d'efficacité. Des observations de streaming dans des machines à onde stationnaire ont également été reportées [46, 117]. Un problème important est de connaître l'influence du streaming non seulement dans le volume du résonateur mais aussi à proximité du stack et dans le stack qui est le lieu d'un gradient de température important. Ainsi les études théoriques récentes faites par Olson et Swift [96], par Waxler [139] et par Bailliet *et al.* [14] incluent l'existence d'un gradient de température moyen. Un grand nombre d'études sur le streaming, à commencer par celle de Rayleigh, supposent que la hauteur du canal (ou du résonateur) est large par rapport à l'épaisseur visqueuse, ce qui n'est pas adapté aux pores du stack. Les théories récentes faites par Waxler [139], Bailliet *et al.* [14], et Hamilton *et al.* [60], étendent donc aussi la théorie classique de Rayleigh [105, 92] à des canaux de hauteur quelconque. Soulignons enfin qu'étant donné les fortes puissances d'utilisation des machines thermoacoustiques il n'est pas impossible que le streaming y devienne non-linéaire, voire instationnaire ou turbulent. Des travaux analytiques sur le streaming non-linéaire ont été présentés par Menguy et Gilbert [84], et des simulations numériques récentes s'y sont intéressées [23]. Des résultats numériques sur les streaming instationnaires et turbulents ont été donnés par Yano [149] et Alexeev *et al.* [3].

1.3.4 L'empilement de plaques ou "stack"

L'empilement de plaque ou "stack" est une partie importante puisqu'il est le cœur de l'effet thermoacoustique. De nombreuses formes de stack et différents matériaux ont été utilisés. La conductivité thermique du matériau du stack doit être aussi faible que possible, le Mylar, par exemple, étant approprié. La théorie linéaire concerne des plaques parallèles mais elle a été étendue à des géométries quelconques [4] et les résultats ont montré que les plaques parallèles sont très efficaces pour le pompage thermoacoustique. Un stack constitué d'épingles ("pin-array stack"), en augmentant l'importance des phénomènes thermiques par rapport à l'importance des effets visqueux, présente une efficacité encore supérieure à celles des plaques parallèles [121]. Pourtant de tels stacks posent a priori des difficultés de réalisation pratique. La réalisation pratique devient également difficile pour des plaques parallèles de faible épaisseur. Ainsi des structures rigides en nid d'abeille [119], ou des monolithes de céramique présentant une structure régulière de canaux carrés parallèles [5] peuvent être utilisés. Ces structures ont l'avantages d'être disponibles dans le commerce. De plus la disparité dans la taille des pores peut être prise en compte de manière théorique [77]. A côté des stacks à structure régulière, des stacks à structure aléatoire, de type matériaux poreux, ont été testés [2]. Ces stacks diminuent la conduction thermique mais augmentent la dissipation visqueuse. Notons pour terminer que la possibilité de construire des machines thermoacoustiques sans stack a été étudiée [136].

1.3.5 Le fluide de travail

Les machines thermoacoustiques mettent généralement en œuvre des gaz rares sous pression. Une des caractéristiques les plus importantes du fluide de travail est son nombre de Prandtl. Ce nombre doit être le plus bas possible pour minimiser les phénomènes visqueux. Une possibilité est d'utiliser un liquide, ce qui a été fait pour un moteur [122], une autre est d'utiliser des mélanges de gaz rares [17, 133]. Un phénomène intéressant mis en évidence par Swift *et al.* [120], et par Geller *et al.* [50], qui illustre la richesse des phénomènes qui peuvent apparaître dans des couches limites oscillantes, est alors la possible séparation des composants du mélange au niveau du stack. L'incidence de cette séparation sur le transport thermoacoustique n'a pas encore été évaluée. Une possibilité récemment envisagée par Raspet *et al.* [102, 103] est d'utiliser un stack mouillé par un liquide en équilibre avec un mélange gaz/vapeur de liquide. La vapeur du liquide convecte de l'énergie d'une extrémité du stack à l'autre, effet qui agit dans le même sens que l'effet thermoacoustique et le renforce, puis retourne à l'autre extrémité sous forme de liquide.

1.3.6 La turbulence

La turbulence est souvent invoquée pour expliquer des différences entre la théorie linéaire et les expériences. En particulier elle est traitée dans le code de calcul linéaire DELTAE à travers la rugosité des parois. Toutefois le rôle de la turbulence dans les machines thermoacoustiques reste très flou et à préciser. Généralement les études de transition à la turbulence concernent des écoulements permanents. Quelques études expérimentales de transition pour des écoulements oscillants dans des tubes ont toutefois été faites, notamment par Merkli et Thomann [86], et Ohmi *et al.* [94, 95]. Il apparaît qu'au-delà d'un nombre de Reynolds critique l'écoulement oscillant n'est plus laminaire mais est constitué d'une succession de bouffées turbulentes et de phases de relaminarisation. En définissant le nombre de Reynolds A basé sur la vitesse acoustique et l'épaisseur visqueuse par $A = \sqrt{2}u\delta_\nu/\nu$, où u est l'amplitude de la vitesse acoustique, une valeur critique $A_c = 400$ a été trouvée expérimentalement par Merkli et Thomann [86]. D'autres auteurs trouvent une valeur valant entre 150 et 800. Pour de l'air et à une fréquence de 200Hz, on calcule $A \sim 500$ pour un nombre de Mach acoustique élevé, $M_a = 0.1$. En tenant compte des valeurs précédentes, on voit que la turbulence créée dans le résonateur semble pouvoir jouer un rôle mais à des niveaux d'amplitude extrêmement élevés. Remarquons que la valeur critique A_c n'est a priori valable que pour l'écoulement dans le résonateur et pas pour l'écoulement à proximité du stack. Une étude numérique de l'écoulement entre le stack et les échangeurs de chaleur faite par Besnoin montre que cette zone peut générer un écoulement instationnaire localisé [18].

1.3.7 Les échangeurs de chaleur

Les échangeurs de chaleur sont des éléments très importants puisque ce sont eux qui permettent d'exploiter les machines thermoacoustiques. La compréhension des mécanismes de transfert de chaleur aux échangeurs est peut-être aussi importante que celle de l'effet thermoacoustique en lui-même pour l'amélioration des performances et du rendement de ces machines. En effet la conception des échangeurs et de leur couplage avec le stack doit permettre à l'intégralité de l'énergie pompée par le stack par effet thermoacoustique d'être prélevée à l'échangeur froid. Pourtant les échangeurs de chaleur demeurent très mal connus. Notons que comme dans le cas de la transition à la turbulence, les études sur les échanges thermiques concernent classiquement les écoulements permanents. L'échange de chaleur entre une paroi et un fluide s'écoulant autour de la paroi est caractérisé par le nombre de Nusselt N_u , qui compare les échanges thermiques par convection et par conduction. Typiquement les écoulements permanents internes sont soit laminaires, dans quel cas le nombre de Nusselt N_u est indépendant du nombre de Reynolds R_e (pour une conduite circulaire, le nombre de Nusselt vaut 3.66 si l'échange de chaleur a lieu pour

une température de la paroi fixée, et 4.36 si c'est le flux de chaleur à la paroi qui est fixé), soit turbulents, et alors le nombre de Nusselt N_u est une fonction complexe des nombres de Reynolds R_e et de Prandtl P_r , déterminée expérimentalement. Une introduction complète est donnée par De Witt et Incropera [37]. Des études ont toutefois été faites sur des transferts de chaleur en régime oscillant, notamment par Vainshtain *et al.* [134], et Mozurkewich [89]. Mozurkewich [89] montre que le transfert de chaleur d'un barreau au fluide qui l'entoure en présence d'une onde stationnaire connaît une augmentation marquée lorsque l'amplitude acoustique dépasse une valeur critique. Contrairement à des études précédentes, Mozurkewich utilise un diamètre de barreau approximativement égal au déplacement acoustique, se plaçant ainsi dans une situation réaliste pour une application aux échangeurs de chaleur d'une machine thermoacoustique. Il établit un lien avec les notations classiques et donne ses résultats sous la forme d'une courbe $N_u = f(R_e)$, où R_e est calculé en utilisant la vitesse acoustique (et non plus celle d'un écoulement permanent). Sur cette courbe N_u est constant et vaut un peu moins de 1 pour $R_e < 88$. Pour $R_e > 88$ le Nusselt croît comme la racine carrée de R_e et atteint 10 pour $R_e = 1000$. La valeur $R_{e,c} = 88$ est donc une valeur critique et l'augmentation du transfert de chaleur au delà de cette valeur est attribuée au streaming qui se développe à proximité du barreau sous l'influence de l'onde.

Dans le cadre de la thermoacoustique les travaux portant sur les échangeurs de chaleur sont assez rares. Comme on l'a vu, la théorie linéaire s'intéresse à l'effet thermoacoustique le long d'une plaque du stack mais ne s'intéresse pas aux échanges transversaux d'énergie. En particulier elle ignore les échangeurs. Mozurkewich, utilisant ses résultats sur le transfert de chaleur transversal [91], propose un modèle 1D pour l'échange thermique transverse entre le fluide et une plaque et des échangeurs de chaleur [90]. Ce modèle est un modèle à temps de relaxation puisqu'il suppose que le transfert de chaleur entre le fluide et la paroi est proportionnel à leur différence de température et inversement proportionnel à un temps caractéristique pour le transfert, dit temps de relaxation. Un modèle équivalent a été proposé par Gusev *et al.* [55] et a permis dans un cas simple d'étudier l'influence de paramètres tels que la distance entre la plaque et les échangeurs de chaleur sur l'évolution axiale de la température moyenne et le transfert de chaleur. Le problème dans de tels modèles reste le choix du temps de relaxation qui est indéterminé. Au niveau expérimental et numérique, peu de travaux s'attachent de manière systématique aux échangeurs de chaleur. Notons l'exception notable que constitue la simulation numérique de Besnoin [18]. Citons également les expériences de Brewster *et al.* [25], qui se sont intéressés à la différence de température moyenne qui existe entre les extrémités du stack et les échangeurs de chaleur. Cette différence peut en effet être importante dans une modélisation analytique simplifiée d'une machine thermoacoustique, nécessitant une description assez réaliste du champ de

température moyenne dans la machine, et en particulier dans le noyau thermoacoustique.

1.3.8 Les non-linéarités

La théorie linéaire reste l'approche la plus utilisée de la thermoacoustique. Toutefois des non-linéarités ont été observées aux fortes amplitudes acoustiques par Atchley *et al.* [8], par Swift [119], ainsi que par Poese *et al.* [99], et les prédictions de la théorie linéaire cessent parfois d'être exactes à des amplitudes moyennes voire faibles, comme l'ont montré les expériences d'Atchley *et al.* [10] et les simulations numériques de Worlikar [144]. Certains écarts peuvent être a posteriori justifiés, mais en partie seulement, et la prédiction d'un système fonctionnant à forte puissance est, pour l'heure, très difficile. A priori deux types de non-linéarités sont possibles : des non-linéarités dues à la propagation de l'onde dans le résonateur, et des non-linéarités dans la zone du stack et des échangeurs de chaleur, où le rôle du gradient de température moyenne est important. Les premières sont liées en grande partie au problème des résonateurs, déjà évoqué à la section 1.3.1. Des efforts sont nécessaires dans les deux cas. L'extension de la théorie linéaire semble toutefois difficile, ne serait-ce que parce qu'elle résout les équations dans le domaine fréquentiel alors que le problème non-linéaire nécessite une résolution dans le domaine temporel. Quelques travaux se sont malgré tout intéressés à ce problème, principalement dans le cas des moteurs. La première observation d'états non-linéaires couplés et chaotiques a été faite par Yazaki *et al.* [151] pour des oscillations de Taconis. Des observations de même type ont été faites par Atchley *et al.* [11] pour un moteur. Les courbes de stabilité de chaque mode pris séparément sont bien prédites par la théorie linéaire mais leur couplage est un fait qui sort du cadre de cette théorie. Les observations de Swift [119] sont d'une nature différente puisque dans son cas seul le mode fondamental est instable, ses harmoniques étant générés à forte puissance par le résonateur. Dans le domaine théorique, Gusev *et al.* [53] ont dans un moteur séparé la zone du stack traitée linéairement et le reste du résonateur, montrant que les non-linéarités qui se développent dans ce dernier peuvent être responsables de la saturation de l'onde acoustique. Cette conclusion peut aussi être tirée de la modélisation non-linéaire de Watanabe *et al.* [138], Yuan *et al.* [153] et Karpov *et al.* [69]. Le problème de la saturation dans un moteur est en effet important et peut être a priori du à de multiples phénomènes, tels que la création de vorticités dans la couche limite [73], la transition à la turbulence, ou le transport d'énergie par l'onde acoustique [152]. La saturation non-linéaire de l'instabilité thermoacoustique dans un prime mover a aussi été traitée par Karpov *et al.* [68] par utilisation d'une méthode multi-échelles. De manière intéressante, Gusev *et al.* [56] prévoient une génération d'harmoniques pour l'oscillation de température aux bords des plaques du stack, non-linéarité qui est indépendante de la propagation, et est due au passage d'une zone adiabatique à une zone isotherme. Des mesures de températures par fil froid faites récemment par Sauvage[115]

lors de son stage au laboratoire ont confirmé ces prédictions. Un modèle 2D non-linéaire a été résolu numériquement par Hamilton *et al.* [59], où l'influence de la forme du résonateur sur la propagation de l'onde acoustique dans une machine thermoacoustique a été montrée.

1.4 Simulations numériques en thermoacoustique

Un dispositif thermoacoustique est un système complexe : on est en présence d'un écoulement compressible et visqueux, faisant intervenir des échelles de longueur variées allant de la longueur d'onde acoustique aux épaisseurs de couche limite visqueuse et thermique, et mettant en jeu des transferts de chaleur. De plus les effets non-linéaires sont importants [10, 119, 45]. Les théories existantes, qu'elles soient linéaires [118] ou non-linéaires [68, 69] sont difficilement maniables et ne rendent compte qu'insuffisamment des complexités du problème. Une prise en compte exacte de tous les phénomènes requiert une simulation numérique directe, l'inconvénient majeur d'une telle simulation étant l'importance du temps de calcul. Peu de simulations numériques ont été entreprises en thermoacoustique. Elles ont néanmoins nettement amélioré la compréhension des phénomènes, essentiellement dans le domaine de la réfrigération.

Le première simulation numérique a été faite en 1996 par Cao *et al.* [27]. Cette simulation résout les équations de Navier-Stokes 2D complètes dans un domaine de calcul contenant une plaque isotherme 1D. La méthode numérique utilisée est une méthode d'ordre 2 en espace et en temps. La simulation a pour la première fois mis en évidence des flux de chaleur concentrés en bouts de plaque dans une zone longue de quelques déplacements acoustiques. D'autres simulations, faites par Worlikar [144], par Worlikar *et al.* [145, 148, 146, 147], puis par Besnoin [18] utilisent un modèle à faible nombre de Mach pour simuler l'écoulement à proximité d'une plaque 2D. Ces simulations ont mis en évidence l'existence de tourbillons en bouts de plaque et ont permis l'ajout d'échangeurs de chaleur. La simulation d'une plaque 1D isotherme dans un domaine de calcul comprenant le fond d'un résonateur a été faite par Ishikawa [66]. Plus récemment un résonateur comportant un rétrécissement brusque de section a été simulé par Morris et Boluriaan [88, 22] qui ont utilisé une méthode de Runge-Kutta pour l'intégration en temps et des différences finies optimisées pour l'intégration en espace (schémas DRP). La simulation a principalement eu pour objet les pertes ('minor losses') qui peuvent apparaître dans un résonateur thermoacoustique en présence d'un changement de section (tel que la jonction résonateur/stack). Dans cette simulation l'intégralité du résonateur est prise en compte mais aucun effet thermoacoustique n'est calculé. Les auteurs ont également présenté des calculs de streaming dans un canal avec des parois adiabatiques ou isothermes en présence d'une onde acoustique de fort niveau [23]. D'autres simu-

lations numériques ont tenu compte de l'influence du changement de section dans les machines thermoacoustiques. Karpov *et al.* ont combiné une modélisation théorique 1D et une résolution numérique [69] pour simuler un réfrigérateur ou un moteur en tenant compte des non-linéarités du problème. L'influence du changement de section sur le comportement non-linéaire de l'onde dans une tranche de résonateur en présence d'une plaque 1D a été étudiée par Hamilton *et al.* [59]. Signalons également que Chen *et al.* [29] ont utilisé le code commercial *Fluent* pour simuler un réfrigérateur fonctionnant à haute fréquence. Pour terminer, une approche complètement différente de celles mentionnées ci-dessus a été essayée par Bretagne *et al.* [24]. Ces auteurs utilisent en effet un code résolvant les équations de Navier-Stokes linéarisées, l'état de base pour la linéarisation incluant un champ moyen de température. Cette méthode, valable pour un moteur thermoacoustique, permet de saisir le début de la croissance (linéaire) de l'instabilité.

Le présent travail a pour objectif de permettre à terme la simulation de l'intégralité d'une tranche de réfrigérateur. Aucune simplification, comme par exemple l'approximation "faible Mach" de Worlikar [144], n'est donc utilisée. Une simulation directe des équations de Navier-Stokes compressibles est préférée, comme dans les travaux de Cao *et al.* [27], et Ishikawa [65]. L'inconvénient d'une telle simulation est le coût de calcul. Le coût peut toutefois être réduit si le réfrigérateur simulé fonctionne à une fréquence suffisamment élevée. Les méthodes numériques utilisées, d'ordre élevé, sont très proches de celles utilisées par Morris et Boluriaan [88, 22]. Le domaine de calcul est identique à celui choisi par Ishikawa [65], c'est-à-dire qu'il comprend le fond du résonateur. Par contre l'onde n'est pas imposée par une condition aux limites oscillante en vitesse, mais via la méthode des caractéristiques. Les équations, domaines de calcul, et méthodes numériques seront données plus précisément aux chapitres 2 et 3 suivants.

Chapitre 2

Formulation du problème

2.1 Problème posé

Le système considéré est le réfrigérateur de la figure 2.1.1. Un réfrigérateur de ce type a déjà été présenté dans les applications pratiques de la section 1.1.2 et a fait l'objet de la thèse expérimentale de S. Duffourd [40]. On rappelle que le réfrigérateur comporte 3 parties principales :

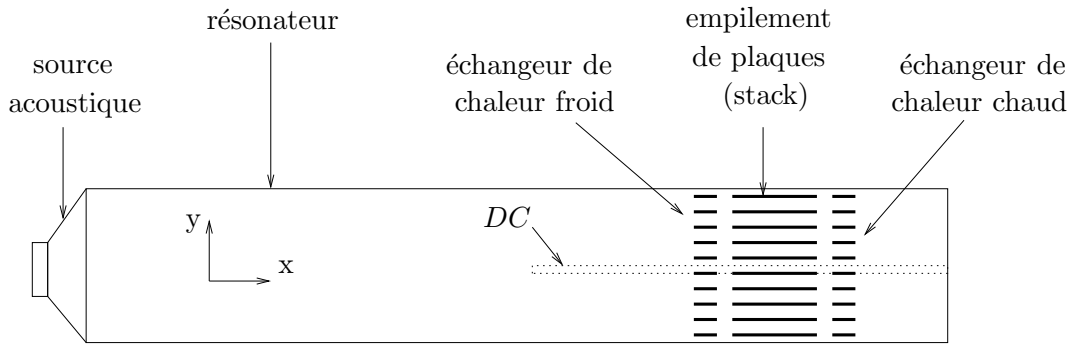


FIG. 2.1.1 – Schéma du réfrigérateur considéré.

une source, un résonateur acoustique, et des éléments thermiques, c'est-à-dire un empilement de plaques également appelé stack, et des échangeurs de chaleur. Chacun de ces éléments doit, d'une manière ou d'une autre, être traité dans la simulation. La source, associée au résonateur, a pour but de créer une onde stationnaire de fort niveau. Deux possibilités se présentent pour une simulation numérique : ou bien obtenir une onde stationnaire résonante en simulant le résonateur et modélisant la source, ou bien créer l'onde stationnaire par une autre méthode. C'est cette dernière solution qui est retenue, la méthode en question étant présentée plus loin. Le stack est le coeur du noyau thermoacoustique, puisque c'est lui qui réalise le transport de chaleur de l'une de ses extrémités à l'autre. Comme on l'a vu, de nombreuses géométries sont possibles, mais on se limitera à un stack constitué de plaques parallèles, cette géométrie étant au demeurant efficace comme on l'a vu à la section 1.3.4. Les échangeurs de chaleur permettent de tirer profit du flux de chaleur créé par le stack. De nouveau les géométries envisageables sont nombreuses. Dans ce

travail les échangeurs de chaleur sont constitués, comme le stack, de plaques parallèles, mais très courtes. Le problème considéré est un problème 2D, la direction perpendiculaire au plan (x,y) étant une direction d'homogénéité. Dans la réalité les plaques du stack et les échangeurs ont une épaisseur finie, c'est-à-dire qu'elles doivent être représentées par des éléments 2D, ayant une longueur L et une épaisseur $2l$. Dans l'hypothèse réaliste où les plaques sont fines, on peut en première approximation les représenter par des éléments 1D. Les résultats des simulations faites avec des éléments 1D font l'objet des chapitres 5 et 6, ceux des simulations faites avec des éléments 2D l'objet du chapitre 7.

Dans le réfrigérateur on cherche à simuler l'onde acoustique et les transferts de chaleur entre le fluide et les parois que constituent les plaques du stack et des échangeurs. Pour cela on a besoin d'équations de conservation pour le fluide et pour le solide. Les phénomènes visqueux étant importants, on utilise pour le fluide les équations de Navier-Stokes, qui sont associées à l'équation de conservation de la masse et de l'énergie. Dans ces équations, les non-linéarités sont conservées. Pour les plaques du stack on utilise l'équation de la chaleur pour un solide. L'équation est soit 1D, soit 2D suivant le modèle de plaque considéré. Les plaques des échangeurs sont supposées isothermes et leur température sera imposée. Le fluide est supposé être un gaz parfait newtonien et les flux de chaleurs sont exprimés avec la loi de Fourier. Toutes les équations correspondantes sont rappelées dans la section 2.2 suivante. Le domaine de calcul, ainsi que les conditions aux limites associées sont donnés à la section 2.3. Les méthodes numériques pour résoudre les équations associées aux conditions aux limites feront l'objet du chapitre 3 suivant.

2.2 Les équations physiques

La dénomination des grandeurs est généralement la même que celle utilisée par Swift, et qui a été introduite à la section 1.2. Ainsi on note p , ρ , T , et e , respectivement la pression, la densité, la température, et l'énergie interne du fluide. De même T_s et ρ_s dénotent respectivement la température du solide et sa masse volumique. \mathbf{x} est le vecteur position, de composantes x et y (éventuellement x_1 et x_2 dans les notations indicielles). \mathbf{u} est le vecteur vitesse du fluide, de composantes u suivant x , et v suivant y (éventuellement u_1 et u_2 dans les notations indicielles).

2.2.1 Equation d'état pour le fluide

Le fluide est un gaz parfait, ce qui nous permet d'écrire l'équation d'état :

$$p = \rho r T, \quad (2.2.1)$$

ainsi que les relations suivantes :

$$c_v = \frac{r}{\gamma - 1}, \quad c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad \beta T_m = 1. \quad (2.2.2)$$

On rappelle que c_v et c_p sont les capacités calorifiques massiques du fluide à volume constant et à pression constante, r la constante du gaz considéré, γ son coefficient polytropique, et β son coefficient de dilatation thermique.

2.2.2 Equations de conservation pour le fluide

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie pour le fluide s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T + (\gamma - 1)T \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{(\gamma - 1)}{\rho r} (\Phi - \nabla \cdot \mathbf{q}). \quad (2.2.5)$$

Dans ces expressions $\mathbf{u} \mathbf{u}$ représente le produit tensoriel de \mathbf{u} par \mathbf{u} : $\mathbf{u} \mathbf{u}$ est donc une matrice \mathbf{M} de terme générique $M_{ij} = u_i u_j$. Et $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u})$ est le vecteur de i -ème composante $\partial(\rho u_i u_j)/\partial x_j$. La gravité \mathbf{g} a été négligée dans l'équation de quantité de mouvement. Cette approximation devrait peut-être être reconsidérée dans le cas d'un tube vertical qui peut être le siège d'instabilités de type Rayleigh-Bénard. \mathbf{q} est le flux de chaleur dans le fluide. Φ est la fonction de dissipation visqueuse définie par :

$$\Phi = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}, \quad (2.2.6)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuses. En notation indicielle, on a :

$$\Phi = \tau_{ij} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

2.2.3 Equation de conservation pour le solide

L'équation d'énergie à utiliser pour le solide constituant les plaques du stack est l'équation de la chaleur :

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_s, \quad (2.2.7)$$

\mathbf{q}_s est le flux de chaleur dans le solide et c_s est la capacité calorifique massique du solide.

2.2.4 Relations constitutives

Le fluide est pris newtonien. En notant μ la viscosité dynamique et en négligeant la viscosité de volume, on a :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}, \quad (2.2.8)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité. En notation indicielle, on a :

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} - \frac{2}{3}\mu d_{kk} \delta_{ij}, \quad (2.2.9)$$

$$\text{avec } d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.2.10)$$

On peut expliciter ces relations dans le cas bidimensionnel :

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.2.11)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.2.12)$$

$$\tau_{yy} = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.2.13)$$

La dissipation visqueuse définie par (2.2.6) a alors pour expression :

$$\Phi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (2.2.14)$$

Les flux de chaleur dans le fluide et le solide s'expriment suivant la loi de Fourier. En notant K et K_s les conductivités thermiques respectives du fluide et du solide, on a :

$$\mathbf{q} = -K\nabla T, \quad (2.2.15)$$

$$\mathbf{q}_s = -K_s\nabla T_s. \quad (2.2.16)$$

Remarques :

- On rappelle que la viscosité du fluide est reliée à sa conductivité thermique par le nombre de Prandtl P_r , défini par la relation (1.2.14), qui relie également les épaisseurs des couches limites thermique et visqueuse par la relation (1.2.13).
- K , K_s et μ dépendent de la température. Du fait du gradient moyen de température qui existe dans une machine thermoacoustique, ces trois grandeurs dépendent de l'espace et l'opérateur gradient leur est normalement applicable. Cependant dans le cas d'un réfrigérateur thermoacoustique les écarts de température sont faibles par rapport à la température moyenne et la dépendance en température de ces grandeurs est négligée.

2.2.5 Equation de conservation 1D pour le solide

L'équation de la chaleur pour un solide (2.2.7) est utilisée pour simuler une plaque du stack 2D. Ici on établit l'équation qui sera utilisée pour la simulation d'une plaque 1D. Cette dernière s'obtient simplement en moyennant l'équation 2D sur l'épaisseur de la plaque et en utilisant les conditions aux limites à l'interface solide/fluide. Une plaque du stack en deux dimensions est représentée en figure 2.2.1, on note $2l$ son épaisseur et L sa longueur. L'axe x correspond à l'axe longitudinal du résonateur et y_s à l'axe transversal dans la plaque. Les surfaces $y_s = l$ et $y_s = -l$

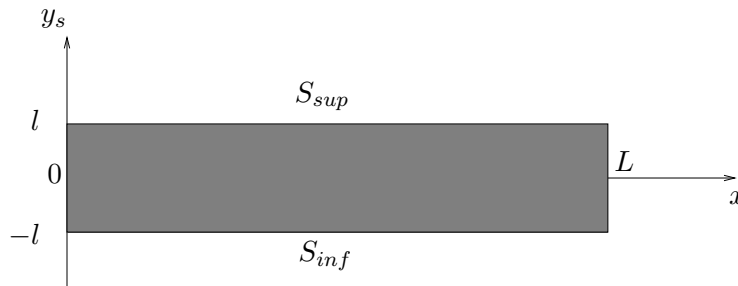


FIG. 2.2.1 – Schéma de la plaque.

sont les surfaces de contact avec le fluide.

Considérons l'équation (2.2.7) bidimensionnelle de l'énergie dans un solide :

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_s.$$

Pour se ramener à une équation monodimensionnelle en x , on calcule une température moyenne en intégrant la température sur l'épaisseur de la plaque :

$$\langle T_s \rangle_{y_s}(x, t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l T_s(x, y_s) dy_s.$$

En intégrant sur l'épaisseur de la plaque l'équation (2.2.7) on obtient une équation pour la température moyenne :

$$\rho_s c_s \frac{\partial \langle T_s \rangle_{y_s}}{\partial t} = -\nabla \cdot \langle \mathbf{q}_s \rangle_{y_s} + \left. \frac{K_s}{2l} \frac{\partial T_s}{\partial y_s} \right|_l - \left. \frac{K_s}{2l} \frac{\partial T_s}{\partial y_s} \right|_{-l}, \quad (2.2.17)$$

où $\langle \mathbf{q}_s \rangle_{y_s}$ est le flux de chaleur moyen suivant x défini par :

$$\langle \mathbf{q}_s \rangle_{y_s}(x, t) = -K_s \frac{\partial \langle T_s \rangle_{y_s}}{\partial x}.$$

Les gradients en y_s qui interviennent dans le membre de droite de l'équation (2.2.17) sont calculés avec les relations de continuité du flux de chaleur à l'interface fluide/solide (voir les conditions aux limites à la section 2.3) :

$$\begin{cases} -K_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial y_s} \right|_{y_s=l} = -K \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y_s=l}, \\ -K_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial y_s} \right|_{y_s=-l} = -K \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y_s=-l}. \end{cases} \quad (2.2.18)$$

L'équation (2.2.17) devient :

$$\rho_s c_s \frac{\partial \langle T_s \rangle_{y_s}}{\partial t} = -\nabla \cdot \langle \mathbf{q}_s \rangle_{y_s} + \frac{K}{2l} \left[\left. \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right|_{y_s=l} - \left. \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right|_{y_s=-l} \right].$$

Dans la suite le symbole de moyenne est abandonné, et l'équation s'écrit plus simplement :

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_s + \frac{K}{2l} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{S_{sup}} - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{S_{inf}} \right]. \quad (2.2.19)$$

S_{inf} et S_{sup} sont respectivement les surfaces inférieures et supérieures de la plaque. L'équation (2.2.19) est l'équation monodimensionnelle cherchée. Le deuxième terme du second membre traduit l'échange d'énergie avec le fluide à la paroi et apparaît ici comme un terme source dans l'équation d'énergie pour le solide. Cette équation donnera des résultats d'autant plus proches des résultats de l'équation bidimensionnelle que l'épaisseur $2l$ sera petite devant l'épaisseur thermique $\delta_{\kappa,s}$ dans le solide. Remarquons que les équations (2.2.17) et (2.2.19) ne tiennent pas compte de l'échange de chaleur sur la tranche de la plaque en $x = 0$ et $x = L$.

2.2.6 Décomposition des variables

Toutes les variables du calcul sont décomposées en une partie correspondant à un état de base et une partie fluctuante. Ainsi toute grandeur ϕ scalaire ou vectorielle s'écrit :

$$\phi = \phi_0 + \phi'. \quad (2.2.20)$$

L'indice 0 correspond à l'état de base ou de repos. Cet état est très simple puisqu'il est uniforme (pression p_0 , température T_0 , densité ρ_0 , avec $p_0 = \rho_0 r T_0$) et sans écoulement ($\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$). Le prime représente la fluctuation de la quantité ϕ . La décomposition (2.2.20) est valable même pour les grandes amplitudes et revient essentiellement à faire un changement d'origine (l'état de base étant uniforme). Pour établir un lien avec la théorie linéaire, on peut écrire :

$$\phi' = \phi_1 + \phi_2 + \dots$$

ϕ' contient la fluctuation acoustique ϕ_1 dénotée par l'indice 1 conformément aux notations de Swift[118] introduites à la section 1.2, ainsi que tous les termes d'ordre supérieur, en particulier le terme d'ordre 2, ϕ_2 , qui contient la moyenne temporelle des variables. La température moyenne notée T_m par Swift[118] est ainsi la somme de T_0 et T_2 . Ainsi quand le système thermoacoustique est mis en marche un gradient moyen de température apparaît : ce gradient est pris en compte dans les termes T' et T'_s , représentant respectivement les fluctuations de la température du fluide et du solide.

En tenant compte de la décomposition (2.2.20), les équations d'état (2.2.1) et de conservation pour le fluide (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5) s'écrivent :

$$p' = r\rho'T_0 + r\rho_0T' + r \underbrace{T'\rho'}_{tnl}, \quad (2.2.21)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}' + \underbrace{\rho' \mathbf{u}'}_{tnl}) = 0, \quad (2.2.22)$$

$$\frac{\partial (\rho_0 \mathbf{u}' + \underbrace{\rho' \mathbf{u}'}_{tnl})}{\partial t} + \nabla \cdot (\underbrace{(\rho_0 + \rho') \mathbf{u}' \mathbf{u}'}_{tnl}) + \nabla p' = \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}_{ttv}, \quad (2.2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} + \nabla \cdot ((\gamma - 1)T_0 \mathbf{u}') + \underbrace{\nabla \cdot (T' \mathbf{u}') + (\gamma - 2)T' \nabla \cdot \mathbf{u}'}_{tnl} \\ = \underbrace{\frac{(\gamma - 1)}{(\rho_0 + \rho')r}}_{ttv} (\Phi - \nabla \cdot \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Dans ces équations on a séparé les termes linéaires et les termes non-linéaires (*tnl*). Ainsi le membre de gauche de ces équations représente la propagation linéaire ou non-linéaire d'une onde acoustique. Le terme non-linéaire de l'équation d'énergie contient en particulier le flux d'énergie thermoacoustique. Les membres de droite contiennent les termes thermovisqueux (*ttv*). Le terme de dissipation visqueuse est également non-linéaire. Les équations 1D et 2D de conservation pour le solide (2.2.7) et (2.2.19), ainsi que les relations constitutives ne sont pas décomposées puisqu'elles ne font intervenir que des termes linéaires.

2.3 Domaine de calcul et conditions aux limites

La simulation de l'intégralité du réfrigérateur thermoacoustique représenté à la figure 2.1.1 est impossible pour des raisons de coût de calcul. Les raisons de ce coût seront exposées au chapitre suivant, à la section 3.1. Etant donné le grand nombre de plaques dans le stack et les échangeurs, ces éléments peuvent être considérés comme périodiques dans la direction y . Tirant parti de cette périodicité, on choisit comme domaine de calcul le domaine nommé *DC* à la figure 2.1.1. Ce domaine est représenté avec des éléments 1D à la figure 2.3.1. Sur les limites latérales notées S_{sym} ,

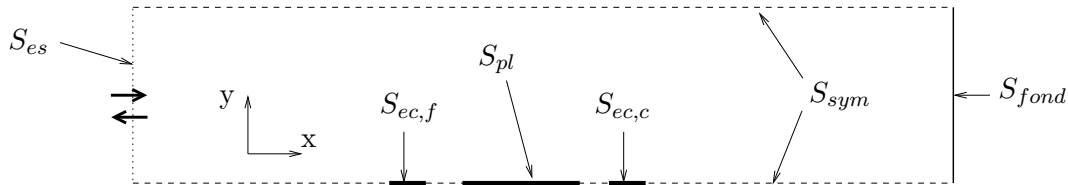


FIG. 2.3.1 – Domaine de calcul correspondant au domaine noté DC à la figure 2.1.1 avec des éléments 1D.

des conditions de symétries sont imposées. Le domaine comprend le fond du résonateur S_{fond} . La source acoustique n'est pas incluse. Une onde acoustique peut toutefois être injectée dans le domaine sur la surface d'entrée/sortie S_{es} . Le domaine contient en outre une plaque 1D, S_{pl} , un

échangeur de chaleur froid 1D, $S_{ec,f}$, et un échangeur de chaleur chaud 1D, $S_{ec,c}$. Le domaine de calcul correspondant à une plaque du stack 2D (les échangeurs ne seront pas inclus dans la simulation d'éléments 2D) est représenté à la figure 2.3.2. Les frontières sont les mêmes que pour le domaine de la figure 2.3.1 mais la plaque, délimitée par la surface S_{pl} , a une hauteur finie. Du fait des conditions de symétrie, seule une demi-hauteur l de plaque a besoin d'être simulée.

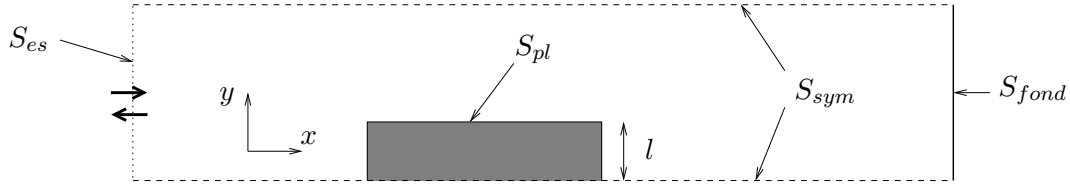


FIG. 2.3.2 – Domaine de calcul correspondant au domaine noté DC à la figure 2.1.1 avec une plaque du stack 2D.

Il reste à donner les conditions aux limites sur les surfaces des domaines de calcul considérés aux deux figures précédentes. On note n la normale locale à une paroi, qui correspond à $\pm x$ pour une paroi parallèle à y , et à $\pm y$ pour une paroi parallèle à x . Les conditions à imposer sont :

- Sur S_{pl} :

On a adhérence du fluide à la paroi, ainsi que continuité des températures et des flux de chaleur à l'interface fluide/solide. D'où :

$$u = v = 0, \quad (2.3.1)$$

$$T = T_s, \quad (2.3.2)$$

$$K \frac{\partial T}{\partial n} = K_s \frac{\partial T_s}{\partial n}. \quad (2.3.3)$$

Remarquons que la dernière condition, ayant déjà été intégrée dans l'équation (2.2.19) pour une plaque 1D, n'est utile que pour une plaque 2D.

- Sur S_{fond} :

On a de nouveau adhérence du fluide à la paroi. De plus le fond du résonateur est supposé adiabatique. D'où :

$$\begin{aligned} u = v = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Remarquons qu'une autre possibilité serait d'envisager un fond isotherme. On aurait alors des pertes d'énergie par conduction thermique sur le fond, non prises en compte ici. Quoiqu'il en soit, l'influence de la condition en température au fond du résonateur sur les phénomènes au voisinage du noyau thermoacoustique est faible.

- Sur $S_{ec,f}$ et $S_{ec,c}$:

On a toujours adhérence à la paroi. De plus on a un comportement isotherme, les échangeurs étant en première approximation des plaques à température constante. On a donc égalité des températures du fluide et du solide :

$$\begin{aligned} u &= v = 0, \\ T &= T_f && \text{sur } S_{ec,f}, \\ T &= T_c && \text{sur } S_{ec,c}, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

où T_f est la température de l'échangeur froid et T_c la température de l'échangeur chaud.

- Sur S_{es} :

La surface S_{es} permet de créer une onde stationnaire dans le domaine et tient en quelque sorte lieu de source acoustique. On utilise sur cette surface la méthode des caractéristiques qui sera détaillée au chapitre suivant (voir section 3.4.1). Pour pouvoir appliquer cette méthode il faut que le champ sur la surface S_{es} soit acoustique, c'est-à-dire que la surface doit être située loin des perturbations introduites par les plaques du stack et les échangeurs, typiquement à une distance de quelques déplacements acoustiques. L'onde stationnaire est obtenue de la façon suivante. Une onde acoustique progressive est continuellement injectée au niveau de la surface S_{es} . Cette onde se propage dans la direction x^+ jusqu'au fond du résonateur où elle se réfléchit, donnant naissance à une onde acoustique progressive qui se propage dans la direction x^- . Cette onde réfléchie quitte le domaine de calcul par la surface S_{es} . Dans le domaine coexistent deux ondes progressives de sens opposés dont la superposition donne l'onde acoustique stationnaire recherchée. Cette onde n'est pas une onde résonante qui résulterait d'une infinité d'allers et retours d'une même onde entre la source et le fond du résonateur. La méthode utilisée présente plusieurs avantages : 1) aucune modélisation de la source n'est nécessaire 2) l'onde acoustique stationnaire s'établit rapidement dans le domaine 3) la longueur parcourue par l'onde lors de sa traversée du domaine est inférieure à une longueur d'onde, on peut donc utiliser une onde de forte intensité sans qu'elle ait le temps de subir une déformation non-linéaire.

Remarquons qu'une autre possibilité pour créer une onde stationnaire dans le domaine de calcul serait d'utiliser en remplacement de la surface S_{fond} une deuxième surface S'_{es} . Une onde progressive issue de S_{es} se propagerait dans la direction x^+ et sortirait du domaine par S'_{es} . Une deuxième onde, issue de S'_{es} , se propagerait dans la direction x^- et sortirait par la surface S_{es} . De nouveau la superposition des deux ondes progressives fournirait une onde stationnaire. Le problème serait alors de régler les amplitudes et phases des deux ondes injectées dans le domaine, un problème qui a été rencontré par Cao *et al.* [27]. La méthode pourrait cependant être particulièrement adaptée à un système où l'on voudrait imposer une superposition d'ondes stationnaires et progressives.

Pour terminer mentionnons que plusieurs autres solutions ont été utilisées par d'autres auteurs

pour imposer la présence d'une onde au-dessus d'un stack thermoacoustique. Cao *et al.* [27] prennent deux surfaces situées de part et d'autres de la plaque, et imposent sur ces surfaces un champ acoustique. Le même principe est utilisé par Worlikar [144] qui impose lui le potentiel acoustique sur ces surfaces. Ishikawa [65] utilise un domaine de calcul identique à celui de cette thèse mais impose une vitesse acoustique sur la surface S_{es} . Morris et Boluriaan [88, 22] créent une onde stationnaire dans un résonateur fermé à ses deux extrémités en utilisant un terme source en densité. Enfin la technique retenue par Boluriaan *et al.* [23] pour créer une onde stationnaire linéaire de fort niveau dans le domaine de calcul utilise des termes sources en densité, couplés à des conditions non-réfléchissantes. L'idée est de créer une onde stationnaire par la superposition de deux ondes progressives qui parcourent une distance inférieure à la longueur d'onde dans le domaine. On voit que dans le principe cette méthode est peu différente de celle utilisée dans cette thèse.

Chapitre 3

Résolution numérique

3.1 Coût de calcul

Un point important de la simulation d'un système thermoacoustique est le coût de calcul. Ce coût est précisément un des inconvénients majeurs de l'utilisation d'une simulation numérique pour le calcul d'un réfrigérateur thermoacoustique. Il s'explique :

- par la disparité des échelles de longueur.
- par l'importance du régime transitoire.

Dans ce qui suit, on précise l'influence de ces deux facteurs sur le coût de calcul. Pour réduire ce coût, on montre qu'outre une simulation sur un domaine spatial réduit, la simulation d'un système de petite taille, c'est-à-dire fonctionnant à haute fréquence, est avantageuse.

Pour simuler numériquement le problème posé, on discrétise les équations données au chapitre précédent en espace et en temps. On utilise alors un maillage cartésien dont les plus petites mailles en x et en y sont respectivement Δx_0 et Δy_0 (voir section 3.3.1), et un pas de temps Δt . La résolution nécessite n_x points dans la direction x , n_y points dans la direction y , et n_t itérations temporelles. Le coût de calcul est alors proportionnel au produit $n_x n_y n_t$.

La plus grande échelle est la longueur l_{res} du résonateur, où $l_{res} = \lambda/2$. La plus petite échelle est l'épaisseur visqueuse δ_ν dont on rappelle l'expression :

$$\delta_\nu = \sqrt{\frac{\nu\lambda}{\pi c}}, \quad (3.1.1)$$

où c est la célérité des ondes acoustiques et ν la viscosité cinématique du fluide. Pour une bonne résolution de la couche limite visqueuse, on doit utiliser un nombre suffisant de points de calcul par épaisseur visqueuse. Notons $reso$ ce nombre de points, qui vaut au minimum 6, et sera pris entre 6 et 23 dans les simulations présentées dans cette thèse. Cette résolution fixe Δy_0 par la relation :

$$reso = \frac{\delta_\nu}{\Delta y_0}. \quad (3.1.2)$$

De plus Δx_0 est proportionnel à Δy_0 pour des raisons de stabilité et de précision. Prenons pour simplifier $\Delta x_0 = \Delta y_0$. La maille Δx_0 est petite, et par conséquent le nombre de points de calcul n_x dans la direction x pour mailler la plus grande échelle l_{res} est grand. On a :

$$n_x = \frac{l_{res}}{\delta_\nu} \sim reso \frac{\lambda}{\delta_\nu}. \quad (3.1.3)$$

La hauteur du domaine de calcul est la demi-distance qui sépare deux plaques adjacentes du stack, et vaut donc quelques épaisseurs thermiques δ_κ , c'est-à-dire aussi quelques épaisseurs visqueuses δ_ν dans le cas où le nombre de Prandtl P_r a une valeur proche de l'unité. Ainsi le nombre de points dans la direction y est simplement donné par :

$$n_y \sim \frac{\delta_\nu}{\Delta y_0} \sim reso. \quad (3.1.4)$$

Pour des raisons de stabilité, le pas de temps Δt dépend de la plus petite maille Δy_0 utilisée par l'intermédiaire du nombre CFL (pour Courant-Friedrich-Levy). Il vérifie :

$$\Delta t \leq \text{CFL} \frac{\Delta y_0}{c}.$$

Avant l'apparition d'un gradient de température stationnaire entre les extrémités des plaques du stack, il existe un régime transitoire dont la durée est de quelques centaines de fois la période de l'onde acoustique. Le temps de calcul physique vaudra donc plusieurs centaines de périodes acoustiques. Le nombre d'itérations temporelles pour calculer une seule période τ de l'onde vérifie :

$$n_t^\tau = \frac{\tau}{\Delta t} \sim reso \frac{\lambda}{\delta_\nu}. \quad (3.1.5)$$

Le coût de calcul par période acoustique est proportionnel à n_x , n_y , et n_t^τ donnés respectivement par (3.1.3), (3.1.4), et (3.1.5). n_y ne dépend que de la résolution, c'est-à-dire du nombre de points de calcul par épaisseur visqueuse. n_x et n_t^τ dépendent eux aussi de la résolution, mais surtout du rapport λ/δ_ν , qui a une valeur très élevée. En outre le nombre de périodes acoustiques calculées est important à cause du régime transitoire long. Le coût de calcul est donc important, bien que le domaine de calcul soit réduit au maximum (il ne comprend qu'une plaque pour le stack et chacun des échangeurs de chaleur). On remarque toutefois que le facteur λ/δ_ν qui rend n_x et n_t^τ élevés, est, en tenant compte de l'expression (3.1.1) de δ_ν , proportionnel à $\sqrt{\lambda}$ c'est-à-dire à $\sqrt{1/f}$ où f est la fréquence. Le coût de la simulation est lui proportionnel à $1/f$ et peut donc être abaissé en simulant des systèmes de petite taille, à haute fréquence. Duffourd [40] utilise une fréquence de 200 Hz. Une simulation à cette fréquence est très coûteuse. La simulation d'un réfrigérateur ayant globalement les mêmes proportions géométriques mais fonctionnant à 20 kHz sera 100 fois moins coûteuse. Dans la suite on utilisera donc principalement la fréquence de simulation $f = 20$ kHz. Cette fréquence est élevée, et bien supérieure aux fréquences utilisées jusqu'ici

dans des expériences. Néanmoins, Chen *et al.* [29] ont envisagé dans leurs calculs numériques une fréquence de 25 kHz pour des réfrigérateurs miniatures. Remarquons qu'à une telle fréquence, l'épaisseur de couche limite visqueuse δ_ν vaut $15.5 \mu\text{m}$. On rappelle que cette valeur est caractéristique de la taille du canal situé entre deux plaques du stack. On se rapproche donc du domaine micrométrique. A une telle échelle on se situe encore dans le domaine de validité des équations de Navier-Stokes. Toutefois pour des fréquences plus élevées, qui conduiraient à des espacements de l'ordre du micromètre, les conditions aux limites de type adhérence à la paroi, ou continuité de la température à l'interface fluide-solide, devraient être revues [57].

3.2 Mise en forme numérique pratique des équations

Numériquement, on ne résout pas directement les équations données au paragraphe 2.2.6. Les équations sont d'abord mises sous une forme adimensionnelle puis, pour le fluide, réécrites sous forme d'une équation vectorielle.

3.2.1 Variables d'adimensionnalisation

On définit ici les grandeurs de référence servant à l'adimensionnalisation des équations. Les densité, longueur, et vitesse de référence sont :

$$\begin{aligned} \rho_{ref} &= \rho_0, \\ l_{ref} &= \delta_\nu, \\ v_{ref} &= c_0 = \sqrt{\gamma r T_0}. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Ces variables permettent de définir un temps, une pression, et une température de référence de la façon suivante :

$$\begin{aligned} t_{ref} &= l_{ref}/v_{ref} = \delta_\nu/c_0, \\ p_{ref} &= \rho_{ref} v_{ref}^2 = \rho_0 c_0^2 = \gamma p_0, \\ T_{ref} &= p_{ref}/(r \rho_{ref}) = \gamma T_0. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Ces variables permettent de définir les nombres adimensionnels suivants :

$$R_e = \frac{\rho_{ref} l_{ref} v_{ref}}{\mu}, \quad (3.2.3)$$

$$P_e = \frac{l_{ref} v_{ref}}{K/(\rho_{ref} c_p)}, \quad (3.2.4)$$

$$P_{es} = \frac{l_{ref} v_{ref}}{K_s/(\rho_s c_s)}. \quad (3.2.5)$$

En utilisant le nombre de Prandtl (1.2.14) on peut aussi écrire :

$$P_e = R_e P_r. \quad (3.2.6)$$

On peut également écrire un Reynolds basé sur la hauteur H du domaine de simulation, c'est à dire la distance entre deux plaques du stack :

$$Re_H = \frac{\rho_{ref} H v_{ref}}{\mu} = \frac{H}{l_{ref}} Re. \quad (3.2.7)$$

Les nombres de Reynolds Re et Re_H compare les effets convectifs et visqueux. Le nombre de Peclet Pe comparent les transferts de chaleur convectifs et conductifs. Par analogie on construit un nombre de Peclet pour le solide Pe_s qui compare les effets convectifs dans le fluide et les effets conductifs dans le solide.

3.2.2 Equations adimensionnalisées

On note par un tilde $\tilde{\cdot}$ les variables adimensionnalisées par leur grandeur de référence. Ainsi pour toute grandeur G , on note $\tilde{G} = G/G_{ref}$. Les équations à résoudre sont les équations d'état (2.2.21), de la masse (2.2.22), de la conservation de la quantité de mouvement (2.2.23), et de l'énergie (2.2.24) pour le fluide, ainsi que l'équation de la chaleur (2.2.7) pour le solide. Ces équations sont mises sous les formes adimensionnelles suivantes :

$$\tilde{p}' = \tilde{\rho}' \tilde{T}_0 + \tilde{\rho}_0 \tilde{T}' + \tilde{T}' \tilde{\rho}', \quad (3.2.8)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}_0 \tilde{\mathbf{u}}' + \tilde{\rho}' \tilde{\mathbf{u}}') = 0, \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial (\tilde{\rho}_0 \tilde{\mathbf{u}}' + \tilde{\rho}' \tilde{\mathbf{u}}')}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}') \tilde{\mathbf{u}}' \tilde{\mathbf{u}}') + \tilde{\nabla} \tilde{p}' = \frac{1}{Re} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}'}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot ((\gamma - 1) \tilde{T}_0 \tilde{\mathbf{u}}') + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{T}' \tilde{\mathbf{u}}') + (\gamma - 2) \tilde{T}' \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}}' \\ = \frac{(\gamma - 1)}{Re} \frac{\tilde{\Phi}}{(\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}')} - \frac{\gamma}{Pe} \frac{\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{q}}}{(\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}')}, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}'_s}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{Pe_s} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_s. \quad (3.2.12)$$

Cette dernière équation, dans le cas 1D devient :

$$\frac{\partial \tilde{T}'_s}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{Pe_s} \left(-\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_s + \frac{K}{K_s} \frac{1}{2\tilde{l}} \left[\left(\frac{\partial \tilde{T}'}{\partial \tilde{y}} \right)_{S_{sup}} - \left(\frac{\partial \tilde{T}'}{\partial \tilde{y}} \right)_{S_{inf}} \right] \right). \quad (3.2.13)$$

On a de plus :

$$\tilde{\mathbf{q}} = -\tilde{\nabla} \tilde{T}' \quad , \quad \tilde{\mathbf{q}}_s = -\tilde{\nabla} \tilde{T}'_s \quad (3.2.14)$$

$$\tilde{\tau}_{xx} = \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{x}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{y}} \quad , \quad \tilde{\tau}_{xy} = \tilde{\tau}_{yx} = \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{x}} \quad , \quad \tilde{\tau}_{yy} = \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{y}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{x}}, \quad (3.2.15)$$

$$\tilde{\Phi} = 2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{x}} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right]. \quad (3.2.16)$$

3.2.3 Mise des équations sous forme vectorielle

Les équations adimensionnalisées sont mises sous forme vectorielle pour faciliter la résolution numérique. Pour le fluide, les variables se mettent sous la forme du vecteur $\tilde{\mathbf{U}}$ suivant :

$$\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}' \\ (\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}')\tilde{u}' \\ (\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}')\tilde{v}' \\ \tilde{T}' \end{bmatrix}. \quad (3.2.17)$$

L'équation vérifiée par $\tilde{\mathbf{U}}$ est alors :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_{\text{nl}}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_1}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{nl}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}_1}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\mathbf{C}}_1 + \tilde{\mathbf{D}}_{\text{nl}}. \quad (3.2.18)$$

Les vecteurs $\tilde{\mathbf{E}}_1$ et $\tilde{\mathbf{F}}_1$ représentent les flux linéaires suivant x et y et les vecteurs $\tilde{\mathbf{E}}_{\text{nl}}$ et $\tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}}$ représentent les flux non-linéaires. Ils ont pour expression :

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_0 \tilde{u}' \\ \tilde{p}' \\ 0 \\ (\gamma - 1)\tilde{T}_0 \tilde{u}' \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_0 \tilde{v}' \\ 0 \\ \tilde{p}' \\ (\gamma - 1)\tilde{T}_0 \tilde{v}' \end{bmatrix}, \quad (3.2.19)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{nl}} = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}' \tilde{u}' \\ (\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}')\tilde{u}'^2 \\ (\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}')\tilde{u}'\tilde{v}' \\ \tilde{T}' \tilde{u}' \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}' \tilde{v}' \\ (\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}')\tilde{u}'\tilde{v}' \\ (\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}')\tilde{v}'^2 \\ \tilde{T}' \tilde{v}' \end{bmatrix}. \quad (3.2.20)$$

$\tilde{\mathbf{G}}_1$, $\tilde{\mathbf{H}}_1$, $\tilde{\mathbf{C}}_1$ sont les flux visqueux suivant x et y, et le terme de conduction thermique, qui sont tous des termes linéaires. Ils ont pour expression :

$$\tilde{\mathbf{G}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_e} \tilde{\tau}_{xx} \\ \frac{1}{R_e} \tilde{\tau}_{yx} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_e} \tilde{\tau}_{xy} \\ \frac{1}{R_e} \tilde{\tau}_{yy} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\gamma}{P_e} \frac{\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{q}}}{(\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}')} \end{bmatrix}. \quad (3.2.21)$$

$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{nl}}$ est un terme non-linéaire qui ne peut pas être mis sous forme conservative. $\tilde{\mathbf{D}}_{\text{nl}}$ représente le terme non-linéaire de dissipation visqueuse. On a :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{nl}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\gamma - 2)\tilde{T}' \left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{y}} \right) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}}_{\text{nl}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma - 1}{R_e} \frac{\tilde{\Phi}}{(\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}')} \end{bmatrix}. \quad (3.2.22)$$

Une simulation linéaire peut être faite en ne retenant dans le système (3.2.18) que les termes linéaires et en prenant comme variable le nouveau vecteur :

$$\tilde{\mathbf{U}}_1(x, y, t) = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}' \\ \tilde{\rho}_0 \tilde{u}' \\ \tilde{\rho}_0 \tilde{v}' \\ \tilde{T}' \end{bmatrix}. \quad (3.2.23)$$

On obtient le système suivant :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_1}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}_1}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\mathbf{C}}_1. \quad (3.2.24)$$

L'équation (3.2.18) (éventuellement (3.2.24)) est l'équation résolue numériquement conjointement avec l'équation d'état (3.2.8) et l'équation de conservation de l'énergie pour le solide (3.2.12) ou sa forme monodimensionnelle (3.2.13).

3.3 Schémas numériques

On veut résoudre le système d'équations (3.2.18) ou (3.2.24). Il faut pour cela se donner un maillage ainsi que deux méthodes de discrétisation : une pour l'espace et une pour le temps. Ayant à calculer des ondes acoustiques on choisit d'utiliser un schéma peu dispersif DRP (Dispersion Relation Preserving) qui a pour particularité de préserver la relation de dispersion de l'onde qui se propage. Pour l'intégration temporelle la méthode de Runge-Kutta est utilisée. Ces schémas étant peu dissipatifs, un filtrage sélectif est nécessaire pour supprimer les oscillations parasites. Ces méthodes, peu dissipatives et peu dispersives, sont classiquement utilisées dans des simulations numériques en aéroacoustique, entre autres par Bailly *et al.* [16], et les simulations de résonateurs thermoacoustiques faites par Morris *et al.* [88] les utilisent.

3.3.1 Maillage

Un maillage cartésien est utilisé, il est représenté schématiquement à la figure 3.3.1. Chaque

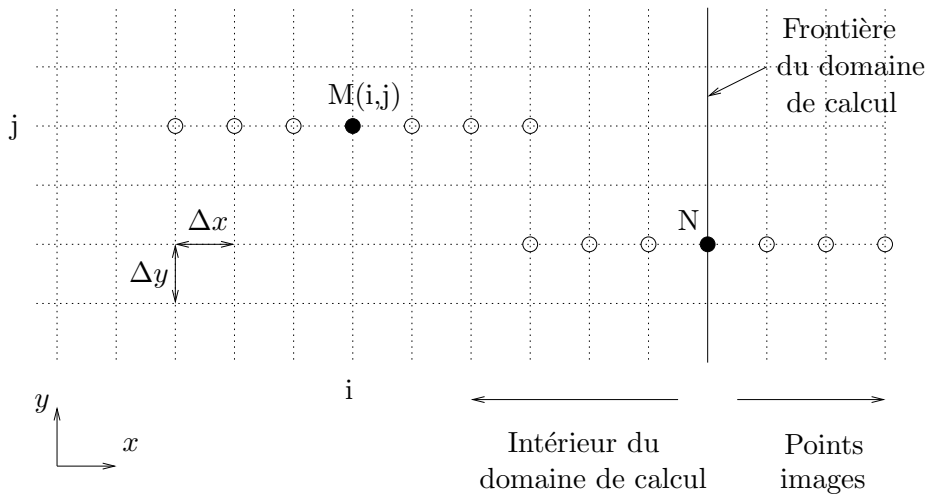


FIG. 3.3.1 – Schéma du maillage cartésien utilisé.

point du maillage est repéré par des coordonnées (i,j) avec $1 \leq i \leq n_x$ et $1 \leq j \leq n_y$, où n_x et n_y sont respectivement les nombres de points de maillage dans les directions x et y . Sur la

figure 3.3.1 est aussi représentée la taille de la maille locale, Δx dans la direction x , et Δy dans la direction y . Une frontière du domaine de calcul est aussi représentée. Comme on le verra dans la section suivante, avec le schéma spatial utilisé, le calcul d'une dérivée en un point nécessite l'utilisation de trois points voisins de part et d'autre du point considéré. Le point M situé au cœur du domaine de calcul possède dans la direction x les trois voisins requis sur chacun de ses côtés. Le point N, situé sur la frontière, ne possède des voisins appartenant à l'intérieur du domaine de calcul que sur un de ses côtés. Pour assurer des voisins sur l'autre côté, des points images sont utilisés au niveau des frontières. Ces points images sont au nombre de trois et seront considérés à la section 3.4.2.

Le maillage utilisé pour les domaines de calcul des figures 2.3.1 et 2.3.2 est représenté à la figure 3.3.2. Sur cette figure on n'a représenté qu'une plaque 1D, mais elle peut être remplacée par une plaque 2D, ou une plaque 1D et deux échangeurs 1D. On distingue trois zones sur le maillage :

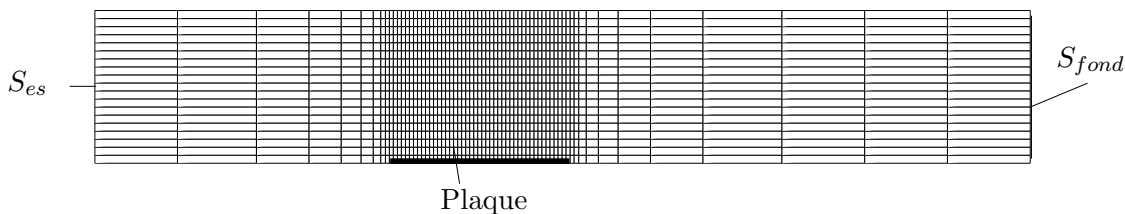


FIG. 3.3.2 – Maillage utilisé pour la simulation des domaines de calcul représentés aux figures 2.3.1 et 2.3.2.

la première zone est située au-dessus de la plaque (le cas échéant au-dessus de la plaque et des échangeurs de chaleur). Dans cette zone la taille des mailles dans la direction x et dans la direction y est constante. On peut écrire $\Delta x = \Delta x_0$ et $\Delta y = \Delta y_0$. Les dénominations Δx_0 et Δy_0 désignent respectivement les plus petites mailles en x et en y du maillage. Δy_0 est fixé de façon à bien résoudre les couches limites visqueuses et thermiques. Ainsi en notant $reso = \delta_\nu / \Delta y_0$ la résolution, des tests ont montré que l'on doit prendre au minimum $reso = 6$ (voir annexe E), et dans les simulations présentées ici, $reso$ vaudra entre 6 et 23. $reso = 8$ (8 points par épaisseur visqueuse, c'est-à-dire près de 10 points par épaisseur thermique étant donné le nombre de Prandtl utilisé ici) semble être un choix raisonnable. Pour minimiser le temps de calcul, la maille Δx_0 doit être aussi grande que possible. Des tests ont montré cependant qu'avec les méthodes utilisées Δx_0 ne peut excéder $4\Delta y_0$ pour assurer une bonne résolution du transfert de chaleur entre la plaque et le fluide. On prendra dans la suite $\Delta x_0 = \Delta y_0$, ce qui favorise la résolution au détriment du coût de calcul. Ce choix assure également dans tous les cas de figure un nombre suffisant de points de maillage par déplacement acoustique. Ainsi, en résumé, on a dans la première zone $\Delta x = \Delta y = \Delta y_0 = \delta_\nu / reso$. De part et d'autre de la plaque (le cas échéant des échangeurs de

chaleur) on trouve deux zones où le maillage est étiré dans la direction x . La première zone est située entre la plaque (le cas échéant l'échangeur froid) et la surface S_{es} , et la deuxième entre la plaque (le cas échéant l'échangeur chaud) et le fond du résonateur S_{fond} . En partant de la plaque le maillage est étiré géométriquement dans la direction x avec un facteur 1.05. L'étirement est éventuellement stoppé dès que $\Delta x = 20\Delta x_0$, la maille gardant alors cette valeur limite. Dans les deux zones la maille dans la direction y vaut toujours $\Delta y = \Delta y_0$.

3.3.2 Méthode spatiale : schéma DRP

Dans la résolution des systèmes (3.2.18) et (3.2.24), on a besoin de calculer des dérivées spatiales d'ordre 1 en x et en y pour des grandeurs acoustiques. Le schéma DRP, construit par Tam et Webb [124] pour préserver la relation de dispersion des ondes, est donc spécialement bien adapté. Le schéma est construit sur 7 points de maillage. Une dérivée dans la direction x au point (i,j) s'écrit alors :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-N}^{k=M} a_k f_{i+k,j}. \quad (3.3.1)$$

Pour simplifier la relation est donnée dans le cas d'une maille Δx constante. On doit avoir $N + M = 7$ et dans le cas de différences centrées $N=M=3$. Pour trouver les 7 coefficients a_i , on a besoin de 7 relations. 6 proviennent de l'annulation des termes du développement de Taylor de f jusqu'à l'ordre Δx^3 inclus et la 7^{ième} est une relation de minimisation entre le nombre d'onde réel et le nombre d'onde effectif du schéma. Ceci permet d'avoir un ordre formel élevé tout en s'attachant à préserver les caractéristiques de l'onde. Le schéma ainsi obtenu permet de bien propager les ondes acoustiques en ayant 5 points de maillage par longueur d'onde. Ici le nombre de points par longueur d'onde sera bien évidemment supérieur à 5, spécialement pour le fondamental. Le schéma paraît néanmoins avantageux, en particulier dans le cas où une grande quantité d'harmoniques est générée. Les coefficients a_i sont donnés en annexe A.2.

3.3.3 Méthode temporelle : méthode de Runge-Kutta

L'équation (3.2.18) à résoudre est du type :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{U}, t). \quad (3.3.2)$$

La présence de t dans le second membre est nécessaire pour traiter les conditions aux limites quand elles dépendent explicitement du temps, comme c'est le cas par exemple pour une entrée d'onde. Pour les points intérieurs, résolus par les équations (3.2.18) ou (3.2.24) le temps n'intervient pas explicitement.

Pour un noeud de coordonnées (i,j) on veut passer du vecteur $U_{i,j}^n$ au temps $n\Delta t$ au vecteur

$U_{i,j}^{n+1}$ au temps $(n+1)\Delta t$. On utilise pour cela un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 à faible stockage dont les quatre étapes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j}^1 &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_1 \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}_{i,j}^n, t^n), \\ \mathbf{U}_{i,j}^2 &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_2 \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}_{i,j}^1, t^n + c_2 \Delta t), \\ \mathbf{U}_{i,j}^3 &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_3 \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}_{i,j}^2, t^n + c_3 \Delta t), \\ \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_4 \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}_{i,j}^3, t^n + c_4 \Delta t). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Les coefficients α_i et c_i utilisés sont les coefficients classiques. Ils sont donnés en annexe A.1. Comme pour le schéma spatial il existe des schémas temporels optimisés qui minimisent l'erreur faite sur la fréquence angulaire [63], mais les coefficients correspondant n'ont pas fourni pas de réelle différence avec les coefficients classiques.

Le vecteur $\mathbf{L}(\mathbf{U}_{i,j}^k)$ dépend des flux \mathbf{E} , \mathbf{F} , \mathbf{G} et \mathbf{H} et du schéma de discrétisation spatiale. Avec un schéma de Tam et Webb centré, pour le système d'équations linéaires (3.2.24) sans conduction thermique, et avec des mailles Δx et Δy constantes, il vaut :

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}_{i,j}^k) = \sum_{l=-3}^{l=3} a_l \left(\frac{\mathbf{G}_{i+l,j}^k}{\Delta x} + \frac{\mathbf{H}_{i+l,j}^k}{\Delta y} - \frac{\mathbf{E}_{i+l,j}^k}{\Delta x} - \frac{\mathbf{F}_{i+l,j}^k}{\Delta y} \right). \quad (3.3.4)$$

3.3.4 Filtrage

Lors de la simulation numérique des oscillations maille à maille parasites apparaissent. Il est alors nécessaire de filtrer la solution obtenue. On utilise pour cela un filtre sélectif construit par Bogey [21]. Les filtres sélectifs sont nécessaires quand des schémas peu dissipatifs sont utilisés (voir Tam [123]). Le filtrage est appliqué à la fin de chaque pas de temps Δt . Au temps $t = n\Delta t$, le calcul fournit le vecteur $\mathbf{U}_{i,j}^n$ non filtré. Ce vecteur est filtré avant de débiter le pas de temps suivant, dans la direction x puis dans la direction y de la manière suivante :

$$\mathbf{U}_{i,j}^p = \mathbf{U}_{i,j}^n - c_f \sum_{l=-N}^{l=N} d_l \mathbf{U}_{i+l,j}^n, \quad (3.3.5)$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^n = \mathbf{U}_{i,j}^n - c_f \sum_{l=-N}^{l=N} d_l \mathbf{U}_{i,j+l}^p. \quad (3.3.6)$$

Le nouveau vecteur $\mathbf{U}_{i,j}^n$ est alors filtré. Dans ces expressions c_f indique la force du filtrage. Les filtres sont construits pour éliminer sélectivement les composantes haute fréquence dans la solution $\mathbf{U}_{i,j}^n$: le but est de supprimer uniquement les oscillations maille à maille sans altérer la solution. Cependant le filtrage n'est pas parfait et il atténue une partie du signal physique en même temps que les oscillations parasites. Ainsi plus c_f est grand meilleur est le filtrage mais plus forte est l'atténuation subie par le signal physique et donc moins précise est la solution calculée. La valeur de N doit être suffisante pour que le filtrage soit d'ordre élevé, et donc précis. Quand cela est possible on retient $N=4$. Toutefois sur les bords du domaine de calcul on ne dispose pas

toujours de 4 points voisins. On diminue alors l'ordre du filtrage près de la paroi en utilisant successivement $N=3$, $N=2$, et $N=1$. Dans les coins et sur les bords, les valeurs de N pour le filtrage dans la direction x et le filtrage dans la direction y seront donc différentes.

Les coefficients de filtrage d_l sont donnés en annexe A.3.

3.4 Le problème des conditions aux limites

Plusieurs conditions aux limites sont nécessaires pour traiter notre problème. Il faut pouvoir introduire une onde dans le domaine de calcul sur une surface S_{es} (voir section 2.3). Il faut aussi pouvoir traiter des conditions de symétrie ainsi que des parois adiabatiques ou isothermes. Il faut enfin coupler les équations du fluide et du solide.

3.4.1 Entrée d'une onde dans le domaine de calcul

Comme on l'a vu dans la section 2.3, il faut être capable d'entrer une onde dans le domaine de calcul sur une surface de type S_{es} (voir figures 2.3.1 et 2.3.2). Pour cela on utilise la méthode des caractéristiques, développée par Thompson [128], et Poinso *et al.* [100]. Cette méthode a l'avantage de pouvoir dissocier l'information rentrante dans le domaine de calcul de l'information sortante. Ceci nous permet d'injecter une onde à travers la surface S_{es} dans la direction x^+ tout en laissant sortir l'onde qui vient de l'intérieur du domaine et se propage dans la direction x^- vers l'extérieur du domaine de calcul. Cette dernière correspond à l'onde entrée qui ressort après avoir traversé le domaine de calcul et s'être réfléchi sur le fond du résonateur (voir section 2.3). D'un point de vue numérique, la méthode revient à imposer sur la surface S_{es} des équations sur l'avancement en temps des variables. L'avancement en temps sur les points de la surface S_{es} est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0(L_3 + L_4), \\ \frac{\partial u'}{\partial t} = -c_0(L_3 - L_4), \\ \frac{\partial v'}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} = -(\gamma - 1)T_0(L_3 + L_4). \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

où les termes L_3 et L_4 sont donnés par :

$$L_3 = c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{2\gamma p_0} + \frac{u'}{2c_0} \right), \quad (3.4.2)$$

$$L_4 = -c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{2\gamma p_0} - \frac{u'}{2c_0} \right). \quad (3.4.3)$$

L'avancement en temps de la solution dépend alors de 2 termes L_3 et L_4 . L_3 correspond à une onde acoustique se propageant avec la célérité c_0 dans la direction x^+ . C'est donc ce terme qui est utilisé pour injecter une onde à travers S_{es} . Il faut le calculer en utilisant pour p' et u' des expressions théoriques correspondant à une onde acoustique progressive, c'est-à-dire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} p' &= \frac{1}{2} P_A \sin(kx - \omega t), \\ u' &= \frac{1}{2} \frac{P_A}{\rho_0 c_0} \sin(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Conformément aux notations introduites dans (1.1.1), P_A représente l'amplitude maximale de la pression acoustique de l'onde stationnaire. Cette onde stationnaire s'obtient par la superposition d'une onde incidente d'amplitude $P_A/2$ et d'une onde réfléchie d'amplitude $P_A/2$, ce qui justifie la présence du facteur $1/2$ dans les expressions précédentes. Avec ces expressions on obtient

$$L_3 = \frac{1}{2} \frac{P_A}{\gamma p_0} \omega \cos(kx - \omega t). \quad (3.4.5)$$

D'après les définitions (1.1.2) du drive ratio et (1.1.3) du nombre de Mach acoustique, on a aussi :

$$\begin{aligned} L_3 &= \frac{1}{2} \frac{Dr}{\gamma} \omega \cos(kx - \omega t), \\ &= \frac{1}{2} M_a \omega \cos(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

L_4 correspond à une onde acoustique se propageant dans le sens x^- , c'est à dire à l'onde qui vient de l'intérieur du domaine. Ce terme est calculé en utilisant les dérivées calculées avec les valeurs de p' et u' sur les points intérieurs du domaine avec des schémas décentrés.

En résumé, pour tous les points du domaine de calcul situés sur la surface S_{es} on utilise le système d'équations (3.4.1) que l'on intègre avec le même schéma temporel que les autres points du domaine. On utilise pour L_3 l'expression (3.4.6), L_4 étant calculé numériquement en utilisant l'expression (3.4.3).

3.4.2 Paroi et conditions de symétrie

Pour simuler la présence d'une paroi ou imposer des conditions de symétrie, on utilise des points images. On considère la frontière du domaine de calcul représentée en figure 3.4.1. Si l'on souhaite utiliser le même schéma spatial pour la frontière que pour les points intérieurs, on a besoin de 3 points de chaque côté de la frontière : 3 points physiques qui appartiennent au domaine de calcul et 3 points images qui leur correspondent symétriquement par rapport à la frontière. Ces points images n'ont pas de réalité physique, ce sont seulement des outils de calcul. Pour chacun des 3 points images, il faut donner une valeur pour les quatre variables usuelles ρ', u', v', T' et aussi pour les composantes du tenseur visqueux $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$. Les images dépendent de la nature

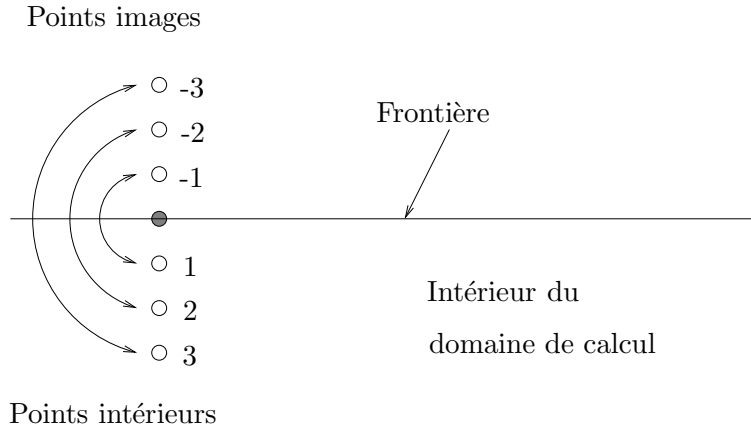


FIG. 3.4.1 – Utilisation des points images à une frontière du domaine de calcul

de la frontière (conditions de symétrie/paroi), et, pour une paroi, de la nature de cette paroi (glissante/adhérente, adiabatique/isotherme).

Conditions de symétrie

Le point i $(\rho'_i, u'_i, v'_i, T'_i)$ a pour symétrique le point $-i$ $(\rho'_i, u'_i, -v'_i, T'_i)$, avec $i = 1, 2, 3$. Le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ de composantes $(\tau_{xx,i}, \tau_{xy,i}, \tau_{yy,i})$ au point i a pour composante $(\tau_{xx,i}, -\tau_{xy,i}, \tau_{yy,i})$ au point $-i$.

Paroi glissante ou adhérente

Selon que l'on tient compte de la viscosité ou non la paroi est adhérente ou glissante. Les points images en vitesse qui correspondent à ces deux cas sont différents. Si la paroi est glissante, les points images en vitesse sont symétriques, et si elle est adhérente les points images en vitesse sont antisymétriques.

Pour une paroi glissante selon Ox, le point i $(\rho'_i, u'_i, v'_i, T'_i)$ a pour symétrique le point $-i$ $(\rho'_i, u'_i, -v'_i, T'_i)$, avec $i = 1, 2, 3$. La transformation de v'_i en $-v'_i$ permet d'assurer un gradient normal de pression nul à la paroi et d'annuler la vitesse v normale à la paroi. Pour une paroi Oy les symétrisations de u_i et v_i sont inversées. La symétrisation pour les variables densité et température dépendent de la nature thermique de la paroi et sont données au paragraphe suivant.

Pour une paroi adhérente, le point i $(\rho'_i, u'_i, v'_i, p'_i)$ a pour symétrique le point $-i$ $(\rho'_i, -u'_i, -v'_i, p'_i)$. Les deux vitesses u'_i et v'_i sont maintenant inversées pour imposer la condition d'adhérence à la paroi. Il faut aussi symétriser le tenseur visqueux $\boldsymbol{\tau}$. Pour cela on impose des relations entre les $\tau_{kl,-i}$ au point $-i$ et les $\tau_{kl,i}$ au point i , avec $i = 1, 2, 3$. Ces relations sont déduites de la symétrisation

sur la vitesse, et sont calculées en annexe B. Pour une paroi suivant Ox, ces relations sont :

$$\begin{aligned}\tau_{xx,-i} &= -\frac{5}{3}\tau_{xx,i} - \frac{4}{3}\tau_{yy,i}, \\ \tau_{xy,-i} &= \tau_{xy,i}, \\ \tau_{yy,-i} &= \frac{4}{3}\tau_{xx,i} + \frac{5}{3}\tau_{yy,i}.\end{aligned}\tag{3.4.7}$$

Pour une paroi suivant Oy, elles deviennent :

$$\begin{aligned}\tau_{xx,-i} &= \frac{5}{3}\tau_{xx,i} + \frac{4}{3}\tau_{yy,i}, \\ \tau_{xy,-i} &= \tau_{xy,i}, \\ \tau_{yy,-i} &= -\frac{4}{3}\tau_{xx,i} - \frac{5}{3}\tau_{yy,i}.\end{aligned}\tag{3.4.8}$$

Paroi adiabatique ou isotherme

Pour une paroi adiabatique on peut imposer des gradients de température et de densité nuls à la paroi. Le point i ($\rho'_i, u'_i, v'_i, T'_i$) a pour symétrique le point $-i$ ($\rho'_i, \times, \times, T'_i$). La symétrisation pour les composantes de la vitesse dépend de la nature glissante/adhérente de la paroi et a été traitée précédemment.

Pour une paroi isotherme, ou par extension une plaque du stack, le traitement des points images est moins naturel. En effet on connaît la valeur de la fluctuation de température sur la paroi, qui vaut T'_{paroi} , mais on n'a aucune relation évidente sur les gradients. La méthode la plus naturelle consisterait à utiliser plutôt que des schémas centrés avec des points images, des schémas décentrés n'utilisant pour le calcul des dérivées que les points intérieurs du domaine de calcul. On choisit toutefois ici de conserver l'utilisation des points images. On doit donc donner des images pour les variables ρ' et T' en ces points. On fait en sorte que ces images assurent une continuité du gradient de ρ' et T' à la paroi, de telle sorte que le point i ($\rho'_i, u'_i, v'_i, T'_i$) a pour image le point $-i$ ($\rho_{paroi} - (\rho'_i - \rho_{paroi}), \times, \times, T'_{paroi} - (T'_i - T'_{paroi})$). L'utilisation des points images fournit des résultats identiques à ceux donnés par l'utilisation de schémas décentrés. Toutefois, dans le cas d'une plaque de stack 2D (domaine de calcul de la figure 2.3.2), les points symétriques engendrent moins d'oscillations numériques, spécialement quand le nombre de Mach acoustique M_a est augmenté.

3.4.3 Couplage entre le fluide et la plaque

Le couplage entre la paroi et le fluide revient simplement à appliquer les conditions aux limites données à la section 2.3.

Dans le cas d'une plaque 1D (domaine de calcul de la figure 2.3.1), si on connaît toutes les

variables au pas de temps n , les variables au pas de temps $n + 1$ sont données par les étapes suivantes :

- 1) on calcule l'avancement en temps de toutes variables du fluide par utilisation de (3.2.18),
- 2) on calcule l'expression du gradient de température dans le fluide intervenant dans l'expression (3.2.13) et on utilise cette expression pour calculer la température des points de la plaque,
- 3) la température des points du fluide en contact avec la plaque est rendue égale à celle des points de la plaque par application de (2.3.2). On connaît ainsi toutes les variables au pas de temps $n + 1$.

Pour une plaque du stack 2D (domaine de calcul de la figure 2.3.2) la méthode n'est pas très différente :

- 1) on calcule l'avancement en temps de toutes variables du fluide par utilisation de (3.2.18) et de la température de la plaque par (3.2.12), excepté aux points de l'interface fluide/solide,
- 2) la nouvelle température de l'interface fluide/solide est obtenue par l'utilisation simultanée des conditions aux limites (2.3.2) et (2.3.3). En utilisant ces deux relations, et en se référant aux

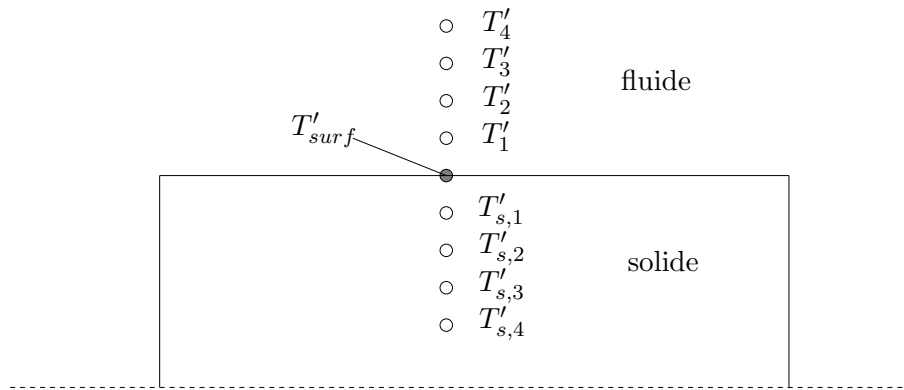


FIG. 3.4.2 – Calcul de la température des points à l'interface fluide/solide dans le cas d'une plaque du stack 2D.

notations de la figure 3.4.2, la température T'_{surf} d'un point à l'interface fluide/solide est donnée par :

$$T'_{surf} = \frac{-1}{(1 + K/K_s)} \sum_{i=1}^4 \frac{b_i}{b_0} \left(\frac{K}{K_s} T'_i + T'_{s,i} \right), \quad (3.4.9)$$

où les coefficients b_i utilisés dans le calcul des dérivées à la paroi correspondent à des différences finies décentrées d'ordre 4 ($b_0 = -25/12, b_1 = 48/12, b_2 = -36/12, b_3 = 16/12, b_4 = -3/12$). Les valeurs de T'_i et T_i utilisées sont celles issues de l'étape 1). Une fois la température de l'interface calculée, on connaît toutes les variables au pas de temps $n + 1$.

Chapitre 4

Onde stationnaire dans un résonateur

4.1 Présentation

Le résonateur est une partie importante d'un réfrigérateur thermoacoustique. Associé à la source acoustique, son rôle est de créer une onde stationnaire de forte intensité. Comme on l'a signalé auparavant la méthode de simulation utilisée doit permettre d'obtenir cette onde stationnaire de fort niveau dans le domaine de calcul. La méthode retenue et qui sera utilisée dans les chapitres suivants est la méthode des caractéristiques (voir section 3.4.1). Un des buts de ce chapitre est de vérifier la validité de cette méthode (section 4.2). Toutefois la méthode des caractéristiques n'est pas la seule qui permette d'entretenir une onde stationnaire dans un résonateur. Une autre alternative consiste à se rapprocher de la physique du problème en simulant une tranche du résonateur sur toute sa longueur, en incluant le fond rigide et un modèle de source, par exemple un piston. Une telle simulation doit à terme être envisagée pour le calcul d'un système thermoacoustique complet. En effet seule la simulation d'une tranche entière de résonateur permet de tenir compte des non-linéarités acoustiques de propagation. C'est pourquoi on se propose ensuite dans ce chapitre de tester la capacité du code à simuler une tranche complète du résonateur avec comme modèle de source d'abord un piston, puis un terme source volumique d'accélération (section 4.3). La différence entre les deux méthodes exposées précédemment sera enfin commentée (section 4.4).

4.2 Simulation d'une onde stationnaire dans le domaine de calcul

Dans cette section on teste la méthode des caractéristiques présentée à la section 3.4.1 pour simuler une onde stationnaire dans le domaine de calcul présenté à la figure 4.2.1. La source acoustique physique qui maintiendrait une onde stationnaire dans le résonateur est située en dehors du domaine de calcul, à l'abscisse $x = 0$. L'onde est ici injectée dans le domaine de calcul sur la frontière S_{es} à l'abscisse $x = x_E$. Le fond du résonateur est situé à $x = \lambda/2$. Dans la configuration étudiée ici, la longueur du domaine de calcul l_{DC} vaut environ 0.36λ . La hauteur y_0 est arbitraire

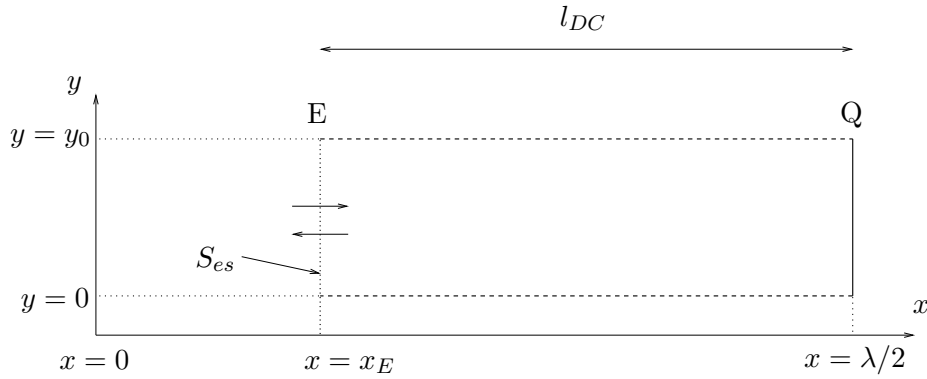


FIG. 4.2.1 – Domaine de calcul et notations.

car en l'absence de paroi latérale ou de plaque les variables ne dépendent pas de la direction y . De plus la viscosité joue ici un rôle mineur. Dans cette section les termes visqueux ne seront donc pas inclus.

Dans un premier temps une simulation est faite sans les termes non-linéaires. Cela vient à résoudre le système d'équations linéaires (3.2.24). On omet de plus le terme de conduction $\tilde{\mathbf{C}}_1$ ainsi que les termes de viscosité $\tilde{\mathbf{G}}_1$ et $\tilde{\mathbf{H}}_1$. Une solution analytique simple peut être alors trouvée pour l'onde stationnaire dans le domaine de calcul. Celle-ci est donnée par l'expression (C.0.1) obtenue à l'annexe C. Une simulation est faite en injectant en x_E une onde progressive d'amplitude en vitesse $M_a c_0/2$, où le nombre de Mach vaut $M_a = 0.5\%$. On utilise les paramètres suivants : $f = 20$ kHz, $\Delta x = \Delta y = \delta_\nu$, $n_x = 400$, et $n_y = 21$. Le nombre de points n_y est, comme la hauteur y_0 , arbitraire. Les figures 4.2.2 et 4.2.3 montrent les courbes de pression et de vitesse axiale calculées et théoriques (expression (C.0.1)), en huit sous-instants d'une période τ . L'accord est excellent, l'erreur entre une courbe calculée et la courbe théorique correspondante étant inférieure au centième de pourcent. Une des questions importantes est de savoir combien de temps l'onde stationnaire met pour s'établir dans le domaine. La réponse est donnée à la figure 4.2.4 où l'on trace l'évolution temporelle de l'amplitude de la pression au fond du résonateur (point Q). On constate que l'amplitude se stabilise en deux périodes acoustiques, qui est un temps court.

La simulation faite dans le paragraphe précédent ne contenait que les termes linéaires dans les équations. Si la même simulation est faite avec des termes non-linéaires (équations (3.2.18) sans $\tilde{\mathbf{C}}_1$, $\tilde{\mathbf{G}}_1$, et $\tilde{\mathbf{H}}_1$), le résultat n'est pas changé. Ceci est dû au faible nombre de Mach, qui vaut seulement $M_a = 0.5\%$. Des modifications vont pourtant apparaître pour des nombres de Mach plus importants. Si l'on prend les mêmes paramètres que précédemment, mais un nombre de Mach aussi élevé que $M_a = 8\%$, on obtient le long du domaine de calcul la pression et la vitesse données aux figures 4.2.5 et 4.2.6. Les résultats sont comparés à l'expression linéaire (C.0.1). On constate que les effets non-linéaires ne sont plus négligeables. Toutefois, l'écart par rapport à une

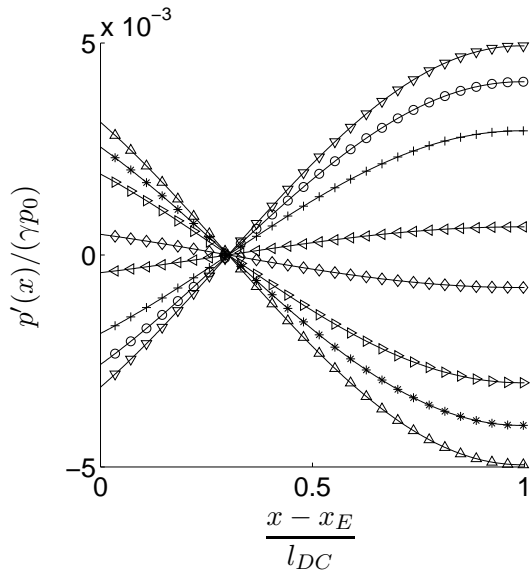


FIG. 4.2.2 – Profils de pression obtenus le long du domaine de calcul à plusieurs instants t pendant une période τ : \circ $t=0$, ∇ $t=\tau/8$, $+$ $t=2\tau/8$, \diamond $t=3\tau/8$, $*$ $t=4\tau/8$, \triangle $t=5\tau/8$, \triangleright $t=6\tau/8$, \triangleleft $t=7\tau/8$, — courbes théoriques. $M_a = 0.5\%$.

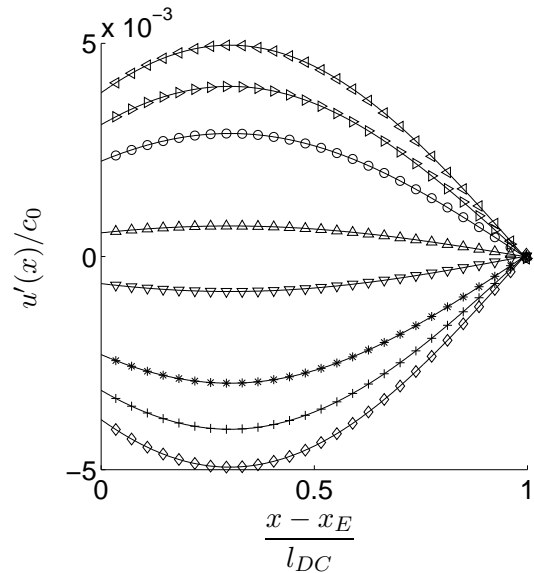


FIG. 4.2.3 – Profils de vitesse obtenus le long du domaine de calcul à plusieurs instants t pendant une période τ : \circ $t=0$, ∇ $t=\tau/8$, $+$ $t=2\tau/8$, \diamond $t=3\tau/8$, $*$ $t=4\tau/8$, \triangle $t=5\tau/8$, \triangleright $t=6\tau/8$, \triangleleft $t=7\tau/8$, — courbes théoriques. $M_a = 0.5\%$.

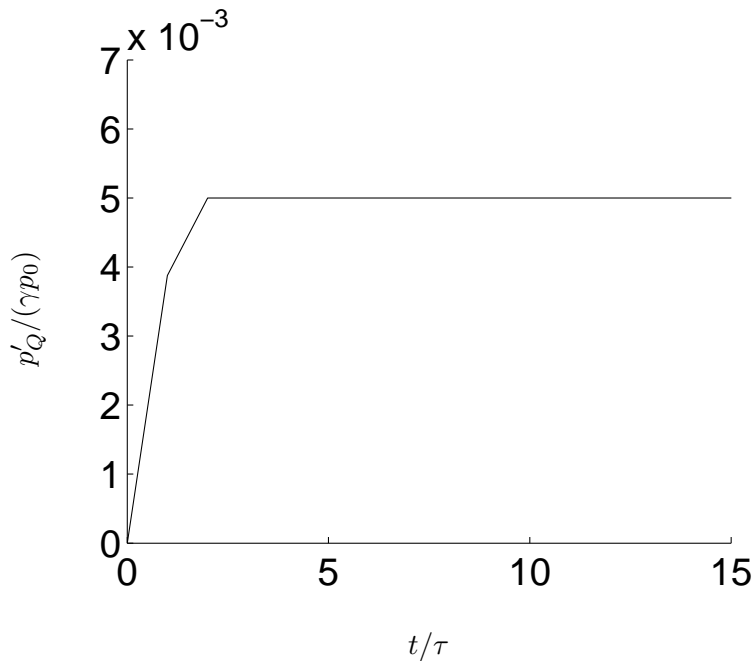


FIG. 4.2.4 – Evolution de l'amplitude de la pression p'_Q au point Q du domaine en fonction du temps de calcul adimensionné par la période acoustique τ .

onde linéaire est relativement faible étant donné l'importance du nombre de Mach utilisé. La variation temporelle de la pression au point Q du domaine de calcul situé au fond du résonateur est

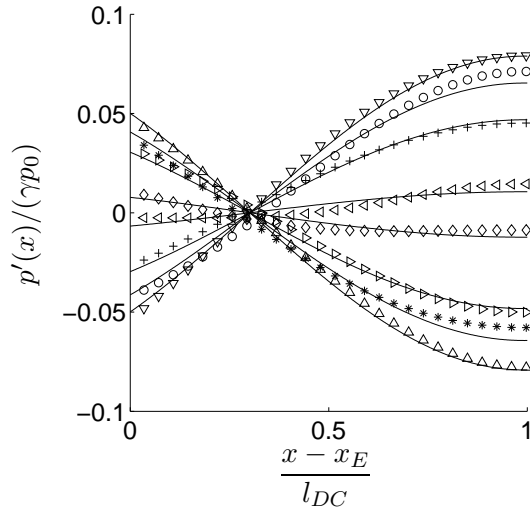


FIG. 4.2.5 – Profils de pression obtenus le long du domaine de calcul à plusieurs instants t pendant une période τ : \circ $t=0$, ∇ $t=\tau/8$, $+$ $t=2\tau/8$, \diamond $t=3\tau/8$, $*$ $t=4\tau/8$, \triangle $t=5\tau/8$, \triangleright $t=6\tau/8$, \triangleleft $t=7\tau/8$, — courbes théoriques. $M_a = 8\%$.

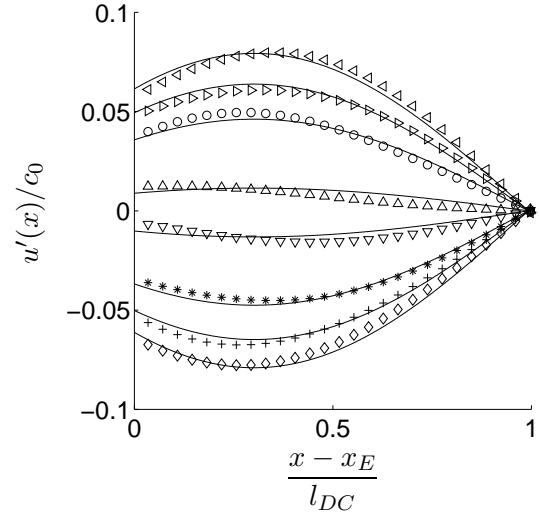


FIG. 4.2.6 – Profils de vitesse obtenus le long du domaine de calcul à plusieurs instants t pendant une période τ : \circ $t=0$, ∇ $t=\tau/8$, $+$ $t=2\tau/8$, \diamond $t=3\tau/8$, $*$ $t=4\tau/8$, \triangle $t=5\tau/8$, \triangleright $t=6\tau/8$, \triangleleft $t=7\tau/8$, — courbes théoriques. $M_a = 8\%$.

représenté à la figure 4.2.7 pour le même cas. Sur la figure est également représenté une courbe

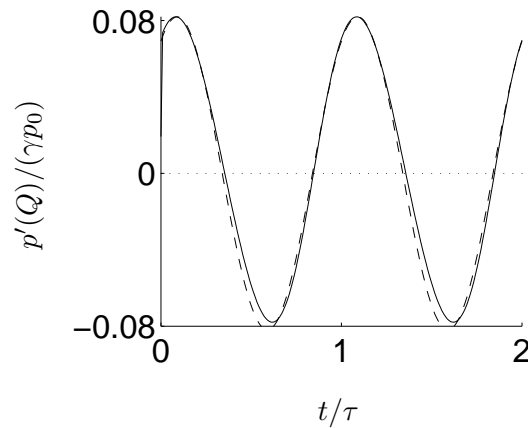


FIG. 4.2.7 – Variation temporelle (—) de la pression $p'(Q)$ au point Q du domaine de calcul, dans le cas d'un calcul fait avec la méthode des caractéristiques, pour $M_a = 8\%$. La courbe en tirets (--) est une sinusoïde suivant cette variation. Deux périodes acoustique τ sont représentées.

sinusoïdale. On constate que la pression au point Q n'est pas très éloignée de cette sinusoïde, même si l'on remarque un raidissement du profil traduisant un impact des non-linéarités, qui reste toutefois faible. En effet, un des avantages de la méthode des caractéristiques est que l'onde ne passe que peu de temps dans le domaine de calcul, puisqu'elle en ressort avant d'avoir parcouru une longueur d'onde. Elle n'a donc pas le temps de se déformer non-linéairement, et l'onde

stationnaire reste quasiment une onde linéaire, même à des niveaux très élevés. Si un résonateur (résonateur harmonique courant) était utilisé, un choc apparaîtrait bien avant que $M_a = 8\%$ soit atteint. En quelque sorte la méthode utilisée ici permet dans un domaine de calcul rectangulaire de simuler une onde harmonique de fort niveau, qui serait physiquement obtenue dans un résonateur anharmonique de section variable (voir section 1.3.1).

On vient de voir comment la méthode des caractéristiques peut être utilisée pour établir une onde stationnaire de fréquence pure (ou presque pure lorsque de forts niveaux sont considérés) dans le domaine de calcul. La présence d'harmoniques est toutefois fréquente en thermoacoustique (voir section 1.3.8), et il peut éventuellement être intéressant d'introduire dans le domaine de calcul une onde possédant, en plus de la fréquence fondamentale, un ou plusieurs harmoniques. L'ajout d'harmoniques est possible avec la méthode des caractéristiques introduite à la section 3.4.1. Il suffit en effet d'injecter à travers la section S_{es} une onde incidente possédant les harmoniques désirés. Un exemple est ici donné lorsque le premier harmonique est pris en compte, avec une amplitude égale à la moitié de celle du fondamental. Ainsi la pression et la vitesse correspondant à l'onde incidente introduite à travers S_{es} sont données par :

$$\begin{aligned} p' &= \frac{1}{2}P_A \left(\sin(k(x - x_E) - \omega t) + 0.5 \sin(k(x - x_E) - 2\omega t) \right), \\ u' &= \frac{1}{2} \frac{P_A}{\rho_0 c_0} \left(\sin(k(x - x_E) - \omega t) + 0.5 \sin(k(x - x_E) - 2\omega t) \right). \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Ces expressions sont utilisées à la place des expressions (3.4.4) et évaluées en $x = x_E$ (sur la surface d'entrée S_{es}) pour le calcul de L_3 , donné par l'expression (3.4.2). La valeur $f = \omega/2\pi = 20$ kHz est conservée. De plus l'amplitude P_A choisie pour la pression correspond à un nombre de Mach acoustique $M_a = 0.65\%$. La pression obtenue au point Q du domaine de calcul en fonction du temps est alors donnée à la figure 4.2.8. Etant donné l'importance de l'amplitude du premier harmonique injecté, la variation temporelle au point Q diffère largement d'une sinusoïde. Comme on l'a fait pour une onde harmonique (figures 4.2.2 et 4.2.5), on peut tracer la pression le long du domaine de calcul en plusieurs instants du cycle acoustique. Pour éviter une confusion dans les courbes, ces dernières sont tracées séparément à la figure 4.2.9 pour chacun des huit sous-instants d'une période acoustique. Les courbes calculées sont comparées à l'expression théorique suivante :

$$\begin{aligned} p' &= P_A \cos(k(x - x_Q)) \left(\sin(k(x_Q - x_E) - \omega t) \right. \\ &\quad \left. + 0.5 \sin(k(x_Q - x_E) - 2\omega t) \right). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Cette expression est déduite de la partie réelle de l'expression (C.0.1) donnée pour une onde de pulsation ω , en lui ajoutant une expression équivalente pour le premier harmonique de pulsation 2ω , mais avec une amplitude réduite de moitié. Cette addition simple d'harmoniques sans tenir

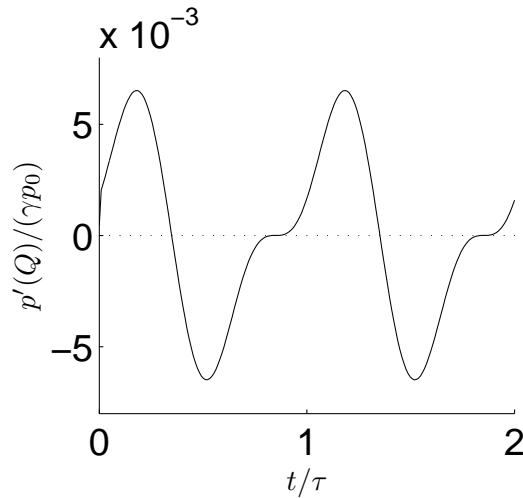


FIG. 4.2.8 – Variation temporelle (—) de la pression $p'(Q)$ au point Q du domaine de calcul. Un harmonique superposé au fondamental a été introduit par la méthode des caractéristiques, dont l'amplitude est la moitié de celle du fondamental. Deux périodes acoustique τ sont représentées. $M_a=0.65\%$.

compte de leur interaction n'est rigoureusement valable que dans le cadre de l'acoustique linéaire. On constate à la figure 4.2.9 que les résultats de la simulation sont en accord avec l'expression (4.2.2). Cet accord est obtenu pour un nombre de Mach acoustique faible ($M_a = 0.65\%$) pour lequel les distorsions dues à la propagation non-linéaire de l'onde dans le domaine de calcul sont peu importantes. L'accord devient bien sûr moins bon si un nombre de Mach acoustique élevé ($M_a=8\%$) est utilisé. Les résultats précédents montrent qu'il est possible d'introduire avec la méthode des caractéristiques des harmoniques superposés à la fréquence fondamentale dans le domaine de calcul.

En conclusion l'utilisation de la méthode des caractéristiques pour créer une onde acoustique stationnaire dans le domaine de calcul est validée, de même que l'utilisation des points images pour traiter la réflexion de l'onde sur le fond du résonateur. Deux avantages sont apparus : le temps d'établissement de l'onde est très faible, et des ondes quasi-linéaires de très fort niveau peuvent être obtenues simplement. Il est également possible, si on le souhaite, d'inclure la présence d'harmoniques. Les modifications de l'onde dues à la présence d'une plaque dans le domaine de calcul seront étudiées au chapitre suivant.

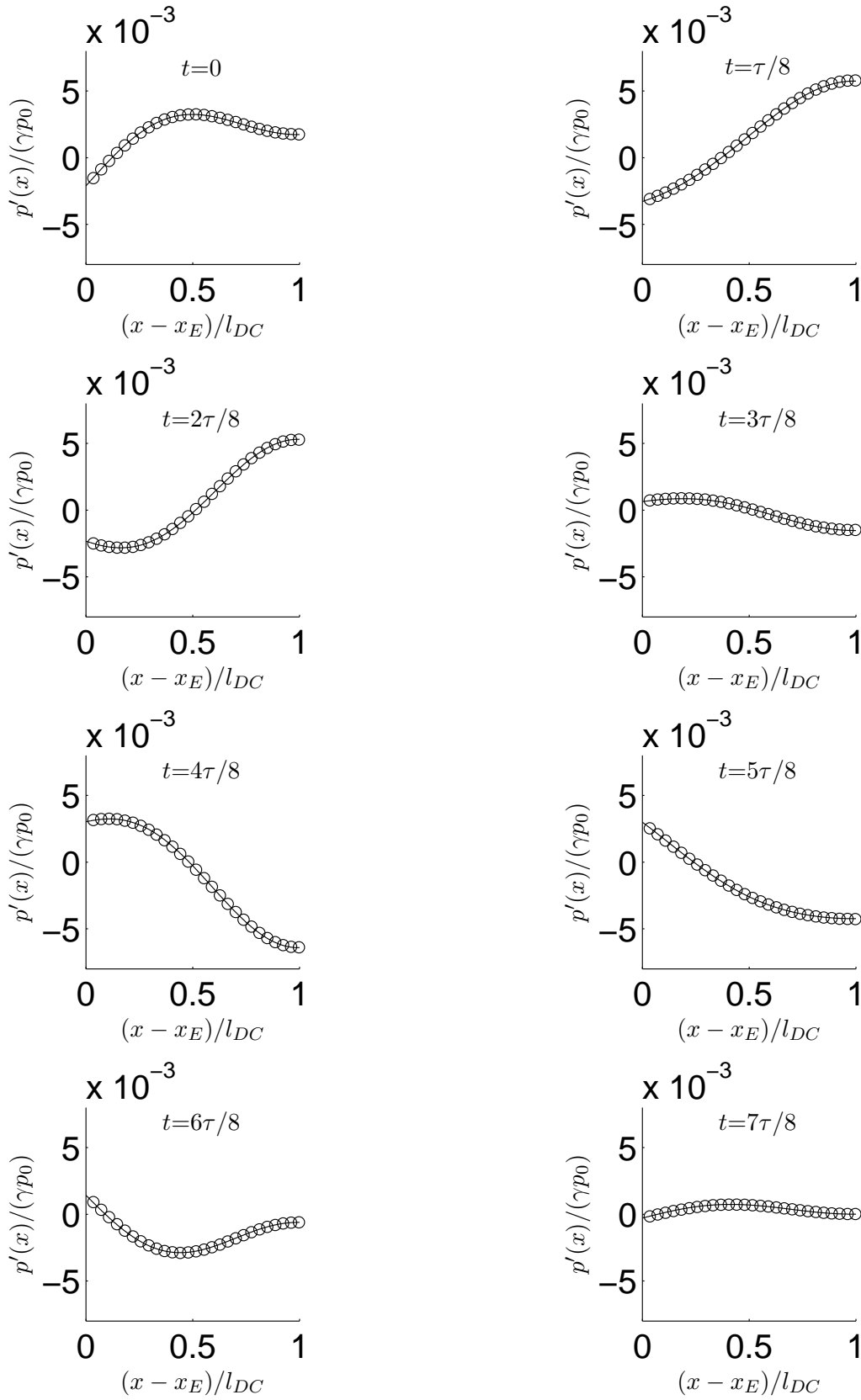


FIG. 4.2.9 – Variation de la pression p' le long du résonateur, en huit sous-instants pendant une période τ : \circ calcul, — théorie (expression (4.2.2)). Un harmonique superposé au fondamental a été introduit par la méthode des caractéristiques. $M_a = 0.65\%$.

4.3 Simulation d'une tranche complète de résonateur

4.3.1 Présentation

Dans cette section on étudie la capacité de notre code à simuler une tranche de résonateur sur toute sa longueur. Une telle simulation est nécessaire si l'on veut tenir compte des non-linéarités dues à la propagation de l'onde acoustique (lesquelles ne sont pas prises en compte par la méthode des caractéristiques de la section 4.2 précédente) et devra à terme être utilisée dans la simulation complète d'un réfrigérateur thermoacoustique.

Le point d'intérêt étant ici la présence de non-linéarités, les simulations sont faites pour simplifier sur un domaine de calcul 1D, c'est-à-dire une rangée de points dans la direction x . Ce domaine est représenté à la figure 4.3.1. Contrairement au cas de la figure 4.2.1, le domaine de

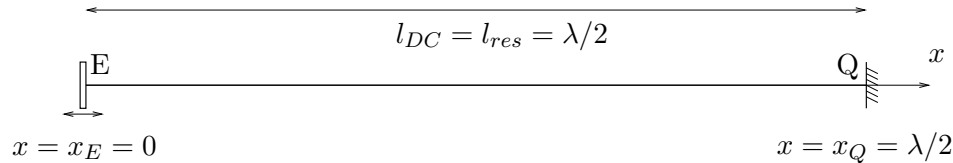


FIG. 4.3.1 – Domaine de calcul et notations dans le cas du résonateur 1D.

calcul s'étend désormais dans la direction x de $x = 0$ à $x = \lambda/2$. La longueur du domaine est celle du résonateur, on a donc $l_{DC} = l_{res} = \lambda/2$. Pour résoudre le problème on utilise le système (3.2.18) en omettant l'équation pour la composante radiale v de la vitesse ainsi que tous les termes faisant intervenir la variable y . L'équation de conservation de la quantité de mouvement de ce système doit être légèrement modifiée pour tenir compte de la dissipation thermovisqueuse de paroi, laquelle n'est pas incluse dans une simulation 1D. Après quelques rappels sur les chocs dans les résonateurs à la section 4.3.2, la modélisation des pertes thermovisqueuses à la paroi fera donc l'objet de la section 4.3.3. Quelques remarques utiles d'un point de vue numérique seront faites sur la différence entre la dissipation dans la couche limite et celle dans le volume du résonateur, en présence ou non d'un choc. Une fois la modélisation thermovisqueuse faite, les équations du problème sont connues, et il ne reste pour résoudre ce dernier qu'à donner les conditions aux limites en $x = 0$, c'est-à-dire à donner un modèle pour le piston, ce qui sera fait à la section 4.3.4. La validité de notre approche est ensuite évaluée à la section 4.3.5 par comparaison à des travaux expérimentaux et numériques. Pour terminer, la section 4.3.6 présente une alternative au modèle de piston pour l'excitation du résonateur.

4.3.2 Rappels sur les chocs dans les résonateurs

Des chocs dans un tube rigide excité à une de ses extrémité par un piston ont été observés par plusieurs expérimentateurs, parmi lesquel Lettau, Saenger et Hudson [114], Temkin [125], et Cruikshank [36], qui compare ses résultats avec la théorie de Chester [31]. Il ressort de tous ces travaux que quand la vitesse du piston est suffisante, un choc se forme et effectue des allers-retours entre le piston et le fond du résonateur. Des études théoriques ont parallèlement vu le jour, comme celles de Betchov [19], de Saenger et Hudson [114], de Chester [31], ou de Temkin [125, 126]. Betchov, en supposant que la solution est constituée d'une partie continue et d'une partie discontinue, a pour la première fois montré que même en l'absence de viscosité et de conduction thermique, le choc peut être responsable de la saturation de l'amplitude de l'onde. Temkin traite lui aussi le choc comme une discontinuité, et se base sur des bilans énergétiques, notamment pour conclure que la dissipation d'énergie par le choc est proportionnelle au cube de l'amplitude. Le choc dissipe en effet la majeure partie de l'énergie fournie à l'onde par le piston. Alors que dans une oscillation linéaire, ce sont les pertes par viscosité à la paroi qui dominant la dissipation d'énergie, dans le cas du choc la dissipation est due à la viscosité dans le volume du fluide, dans le choc. La solution donnée par Chester ne présuppose pas l'existence d'une discontinuité a priori. Les études théoriques précédentes prennent comme point de départ les équations de la mécanique des fluides. Une autre approche est de partir des équations de l'acoustique non-linéaire [64]. Deux études numériques ont également traité des chocs dans un résonateur : celle de Lee et Wang [75] et celle de Vanhille et Campos-Pozuelo [135]. Ces deux simulations partent d'une forme lagrangienne de l'équation du mouvement monodimensionnelle dans laquelle les termes dissipatifs sont pris en compte. Notons que par contraste la présente simulation utilise trois équations de conservation (l'équation de la masse, celle du mouvement et celle de l'énergie) et que ces trois équations sont écrites en variables eulériennes. Concernant l'excitation, Vanhille et Campos-Pozuelo imposent à une extrémité le déplacement, qui est celui du piston, alors que Lee et Wang préfèrent utiliser un terme d'accélération dans l'équation du mouvement. Vanhille et Campos-Pozuelo se comparent aux expériences de Saenger et Hudson [114].

4.3.3 Modélisation des pertes thermovisqueuses

Pour donner une description exacte et complète des pertes thermovisqueuses dans le résonateur, une simulation numérique 2D devrait être faite, résolvant en particulier l'écoulement dans les couches limites près des parois. Notre simulation étant monodimensionnelle, un terme modélisant la dissipation thermovisqueuse dans ces couches limites doit être inclus dans l'équation de la

quantité de mouvement. La forme dimensionnelle de l'équation de conservation du mouvement qui doit remplacer celle du système (3.2.24) est la suivante :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \nabla p = \beta_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha_{cl} u, \quad (4.3.1)$$

β_c est un terme de perte dans le centre du résonateur. Si aucune équation pour l'énergie n'est résolue, β_c doit inclure deux types de pertes : celles dues à la viscosité et celles dues à la conduction de la chaleur. Aussi β_c est-il usuellement relié au coefficient classique d'absorption de l'énergie, dit coefficient de Stokes-Kirchhoff (voir référence [127], page 389). Comme on résoud ici une équation pour l'énergie qui inclut les termes de conduction, β_c ne tient compte que de la viscosité. On a :

$$\beta_c = \rho_0 \frac{4}{3} \nu. \quad (4.3.2)$$

Le coefficient est dans ce cas obtenu très simplement par utilisation de la composante en x de l'équation (2.2.4) et du premier terme du second membre de l'expression (2.2.11). Le terme α_{cl} est un terme de perte dans les couches limites. Il inclut les pertes visqueuses et thermiques. Ce coefficient ne peut en toute rigueur être déduit que pour une oscillation harmonique. Dans les simulations qui suivent, l'oscillation est pourtant hautement non-harmonique, particulièrement en présence d'un choc. Toutefois, par manque d'autre possibilité, on choisit de conserver pour α_{cl} son expression dans le régime harmonique, où il est relié au coefficient de perte aux parois, dit de Helmholtz-Kirchhoff (voir référence [127], page 417). On peut écrire :

$$\alpha_{cl} = \rho_0 c_0 \alpha_{HK}, \quad (4.3.3)$$

où α_{HK} est le coefficient de Helmholtz-Kirchhoff donné par :

$$\alpha_{HK} = \frac{\pi \delta_\nu}{\lambda y_0} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{P_r}} \right), \quad (4.3.4)$$

y_0 est de rayon du résonateur. Par l'intermédiaire de δ_ν (donné par (1.2.10)), α_{cl} dépend de $\sqrt{\omega}$ et doit être évalué à une fréquence bien particulière. On prendra la fréquence de résonance du résonateur.

L'équation de quantité de mouvement (4.3.7) fait intervenir deux coefficients, β_c et α_{cl} , un modèle harmonique étant utilisé pour ce dernier. Un ordre de grandeur pour ces deux coefficients est maintenant donné. Pour ce faire on écrit l'équation (4.3.5) en régime harmonique :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \nabla p = -\alpha_c u - \alpha_{cl} u, \quad (4.3.5)$$

α_{cl} est toujours donné par (4.3.3) et α_c est donné par :

$$\alpha_c = \rho_0 \frac{4\nu \omega^2}{3 c_0^2}. \quad (4.3.6)$$

Avant toute chose notons un résultat classique : α_{cl} , qui représente l'absorption d'énergie par la couche limite est proportionnelle à $\sqrt{\omega}$, c'est-à-dire à la racine carré de la fréquence, alors que α_c , qui représente l'absorption dans le cœur du résonateur, est proportionnel à ω^2 , soit au carré de la fréquence. Pour calculer les coefficients, on prend les valeurs qui seront utilisées dans la section 4.3.5. La fréquence de résonance vaut $f_0 = 100.7$ Hz, qui correspond à une longueur d'onde $\lambda = 3.4$ m. Pour de l'air dans les conditions normales on a : $\nu = 1.510^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, et $\rho_0 = 1.2 \text{kgm}^{-3}$, $P_r = 0.70$, $\gamma = 1.4$. Le rayon du résonateur vaut $y_0 = 2.4 \text{cm}$. Avec ces données, on calcule : $\alpha_c = 8.2 \cdot 10^{-5} \text{kgm}^{-3} \text{s}^{-1}$ et $\alpha_{cl} = 5.1 \text{kgm}^{-3} \text{s}^{-1}$. En régime harmonique, la dissipation dans la couche limite (α_{cl}) est donc bien supérieure à la dissipation dans le centre du résonateur (α_c), et le coefficient α_c peut être négligé. Lorsqu'un choc est présent la situation est inversée puisque l'énergie est dissipée dans le choc, au centre du résonateur. Dans ces conditions le coefficient α_c devient très important et c'est α_{cl} qui est alors négligeable. Ces remarques présentent un intérêt pratique pour la simulation. En effet, en présence d'un choc, la simulation n'a une bonne résolution que si un nombre suffisant de mailles est utilisé pour décrire le choc. L'épaisseur du choc étant extrêmement petite, la maille l'est aussi, ce qui conduit à un nombre de points de maillage énorme. La réduction de ce nombre n'est possible que si l'épaisseur du choc (et donc la maille) est augmentée. Or cette épaisseur ne dépend que de la viscosité dans les coefficients α_c et β_c . Par chance, si la forme du choc, c'est-à-dire son épaisseur, dépend de la viscosité, il n'en va pas de même de la hauteur du choc, c'est-à-dire du saut de pression associé. Ainsi on peut avantageusement utiliser une viscosité supérieure à la viscosité réelle dans le calcul du coefficient α_c pour diminuer le nombre de points de calcul. Le coefficient α_c voit donc sa valeur augmenter. Cette modification est utile lorsqu'un choc est présent. Elle ne doit toutefois pas affecter la simulation quand le choc disparaît et que la dissipation de paroi est prépondérante. Ainsi, en régime harmonique, la valeur de α_c doit rester inférieure à celle de α_{cl} . En résumé, pour réduire le nombre de points de la simulation, la valeur de la viscosité doit être augmentée dans le calcul de α_c , en assurant toutefois que α_c reste faible devant α_{cl} pour ne pas modifier le comportement en régime harmonique. Pour remplir ces conditions on utilise une viscosité mille fois supérieure à sa valeur réelle dans l'expression (4.3.6) pour α_c , et dans celle (4.3.2) pour β_c , qui est utilisée dans le programme. Dans ces conditions, on a : $\alpha_c = 8.2 \cdot 10^{-2} \text{kgm}^{-3} \text{s}^{-1}$ et $\alpha_{cl} = 5.1 \text{kgm}^{-3} \text{s}^{-1}$. Avec ces valeurs, on peut considérer qu'en régime harmonique la dissipation au centre du résonateur (α_c) reste négligeable devant celle en paroi (α_{cl}). L'erreur introduite est de l'ordre du pourcent, et permet une réduction par mille du nombre de points de calcul.

4.3.4 Modèle pour le piston

La source est prise en compte de la manière la plus simple qui soit : elle est modélisée par un piston, qui impose la vitesse axiale. Idéalement, un maillage variable devrait être introduit. Le premier point du maillage, en $x = 0$, suivrait le piston dans son déplacement et aurait la même vitesse que lui. Pour simplifier le maillage reste ici fixe. De plus ce n'est pas la vitesse qui est imposée en $x = 0$ mais la quantité de mouvement, par la relation $\rho u = \rho_0 u_0 \sin(\omega t)$. Cette condition est d'une part plus adaptée aux variables utilisées dans le code qu'une condition en vitesse, et elle permet d'autre part de ne pas introduire de masse dans le système. En effet, en un point de maillage fixe, si ρ et u varient de manière harmonique, la moyenne temporelle $\langle \rho u \rangle_t$ est non nulle et représente un flux de masse à travers la frontière du domaine de calcul. A l'inverse, en imposant au produit ρu d'être harmonique, la moyenne temporelle $\langle \rho u \rangle_t$ est obligatoirement nulle, assurant la conservation de la masse dans le domaine de calcul.

4.3.5 Comparaison avec des travaux existants

Dans cette section la validité des méthodes présentées dans les deux sections 4.3.3 et 4.3.4 précédentes est évaluée par comparaison aux expériences de Saenger et Hudson [114], ainsi qu'aux simulations numériques faites par Vanhille et Campos-Pozuelo [135] avec la même configuration. Le résonateur est un cylindre de longueur 1.7 m, et de diamètre 4.8 cm. La fréquence de résonance est 100.7 Hz. L'amplitude du déplacement du piston est de 3.18 mm et correspond à un nombre de Mach acoustique pour le piston $M_p = u_p/c_0 = 0.0059$, où u_p est l'amplitude de la vitesse du piston. Les variations temporelles mesurées par Saenger et Hudson à l'extrémité fermée du résonateur pour plusieurs fréquences d'excitation sont données à la figure 4.3.2. A la résonance un choc apparaît, et le saut de pression associé est de 216 mmHg, soit 28798 Pa. Un choc apparaît également dans une plage de fréquence autour de la fréquence de résonance, approximativement entre 97 Hz et 108 Hz. Dans cette plage, pour une fréquence inférieure à la fréquence de résonance, une forme en N est obtenue pour la variation temporelle de pression. Pour une fréquence supérieure, une courbe en forme de U est obtenue. Si la fréquence est trop éloignée de la fréquence de résonance la variation temporelle de pression se rapproche d'une courbe sinusoïdale. Le point sur les courbes indique les instants où la position du piston est au maximum de sa position rentrée dans le résonateur. A la résonance, le piston atteint cette position au moment où le choc atteint de fond du résonateur. Des résultats issus des simulations numériques de Vanhille et Campos-Pozuelo [135] sont donnés à la figure 4.3.3. Sont représentées l'évolution temporelle de la pression au fond du résonateur pour plusieurs fréquences, ainsi que l'évolution temporelle de la pression en régime transitoire et la pression rms dans le résonateur, pour la fréquence de résonance.

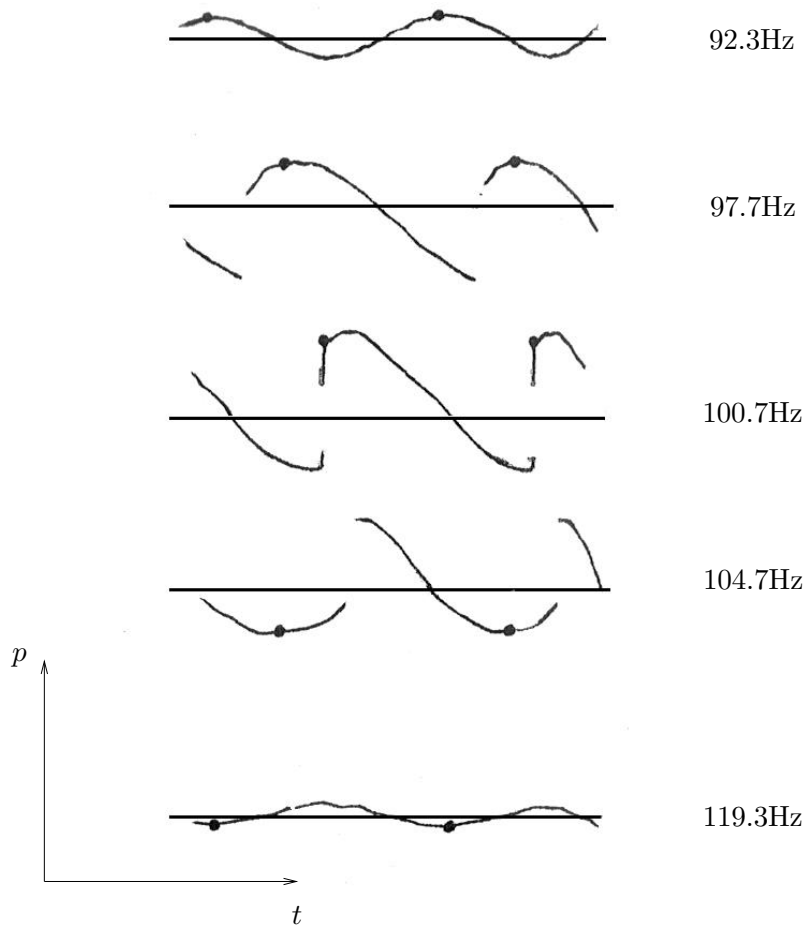


FIG. 4.3.2 – Variations temporelles de la pression obtenues à l'extrémité fermée du résonateur par Saenger et Hudson [114]. Les courbes sont paramétrées par la fréquence d'oscillation du piston. La fréquence de résonance est 100.7 Hz. Le point sur les courbes indique les instants où la position du piston est au maximum de sa position rentrée dans le résonateur.

Des simulations sont faites en utilisant la modélisation exposée dans les deux précédentes sections. En particulier, la viscosité dans le centre du résonateur est multipliée par un facteur 1000. Un nombre de points $n_x = 4000$ est utilisé pour simuler le résonateur. Dans leur simulation, Vanhille *et al.* [135] utilisent seulement 100 points. Bien que cela ne soit pas précisé, on peut penser qu'au moins en présence de choc, ils ont utilisé une viscosité bien supérieure à la valeur physique. En effet les variations temporelles qu'ils obtiennent présentent davantage une pente forte qu'un véritable choc (voir figure 4.3.3). Les variations temporelles obtenues au fond du résonateur dans notre simulation sont données à la figure 4.3.4, pour plusieurs fréquences du piston. Les symboles + indiquent l'instant où le piston est dans sa position la plus rentrée dans le résonateur. Plus précisément cet instant est celui pour lequel la quantité de mouvement ρu imposée au niveau du point de maillage en $x = 0$ s'annule en passant d'une valeur positive à une valeur négative. Un

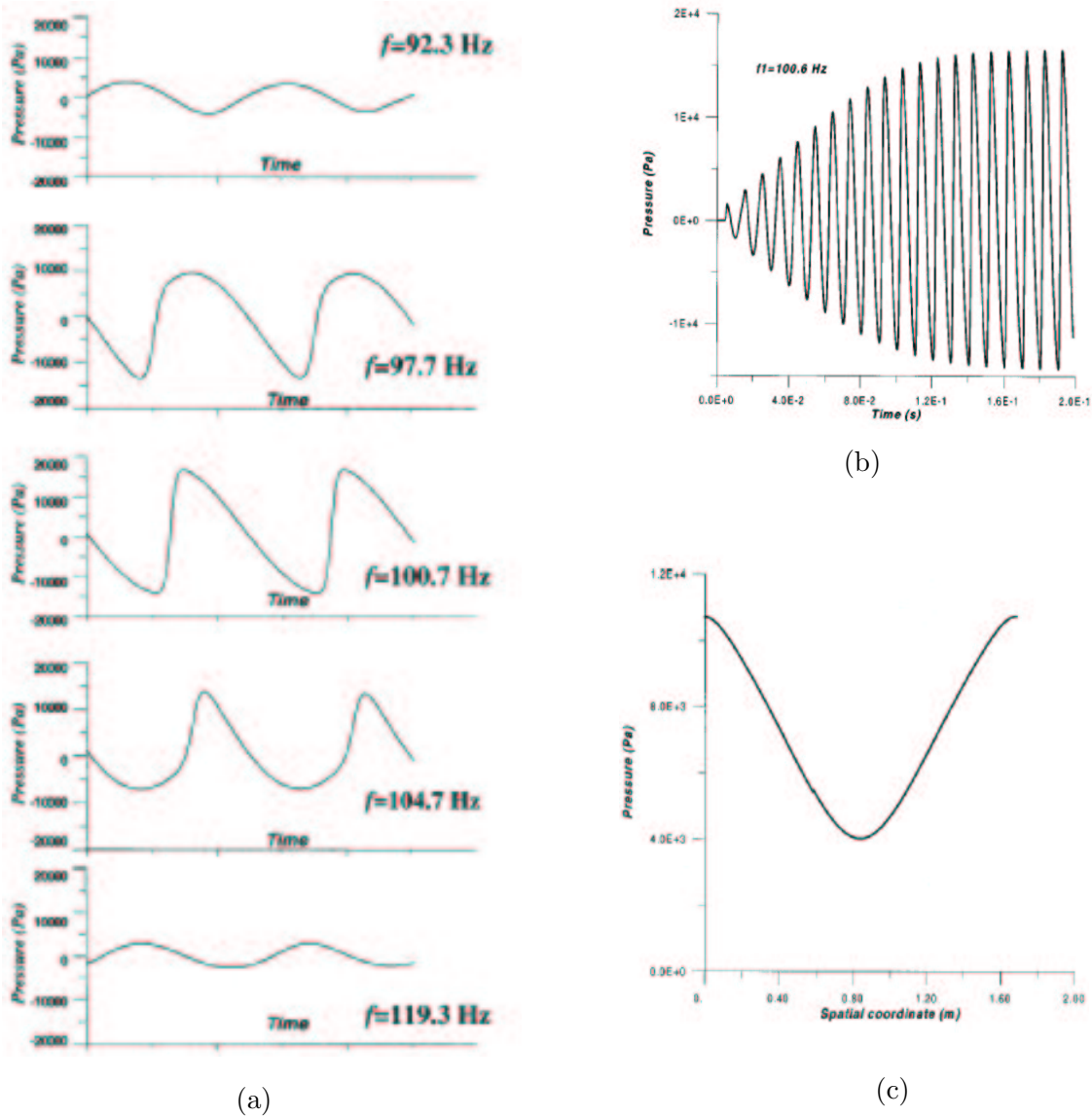


FIG. 4.3.3 – Résultats numériques obtenus par Vanhille et Campos-Pozuello [135] avec une configuration identique à celle utilisée par Saenger et Hudson [114]. (a) pression obtenue à l'extrémité fermée du résonateur en fonction du temps en régime stationnaire, pour plusieurs fréquences, (b) pression obtenue à l'extrémité fermée du résonateur en fonction du temps en régime transitoire (20 périodes acoustiques sont représentées) pour $f=100.6$ Hz, (c) pression rms obtenue en régime stationnaire le long de l'axe du résonateur pour $f=100.6$ Hz.

choc est observé dans la plage de fréquence 96 Hz / 105 Hz. Cette plage est assez proche de celle donnée par Saenger et Hudson. Pour une fréquence d'excitation $f = 100.7$ Hz égale à la fréquence de résonance, la hauteur du choc est maximale. Le saut de pression vaut 30160 Pa. Saenger et Hudson trouvent une valeur de 28978 Pa et Vanhille et Campos-Pozuelo une valeur de 30940 Pa. Notre résultat est situé entre ces deux valeurs. De plus, comme Saenger et Hudson, nous trouvons que le choc arrive au fond du résonateur quand le piston est dans sa position la plus rentrée

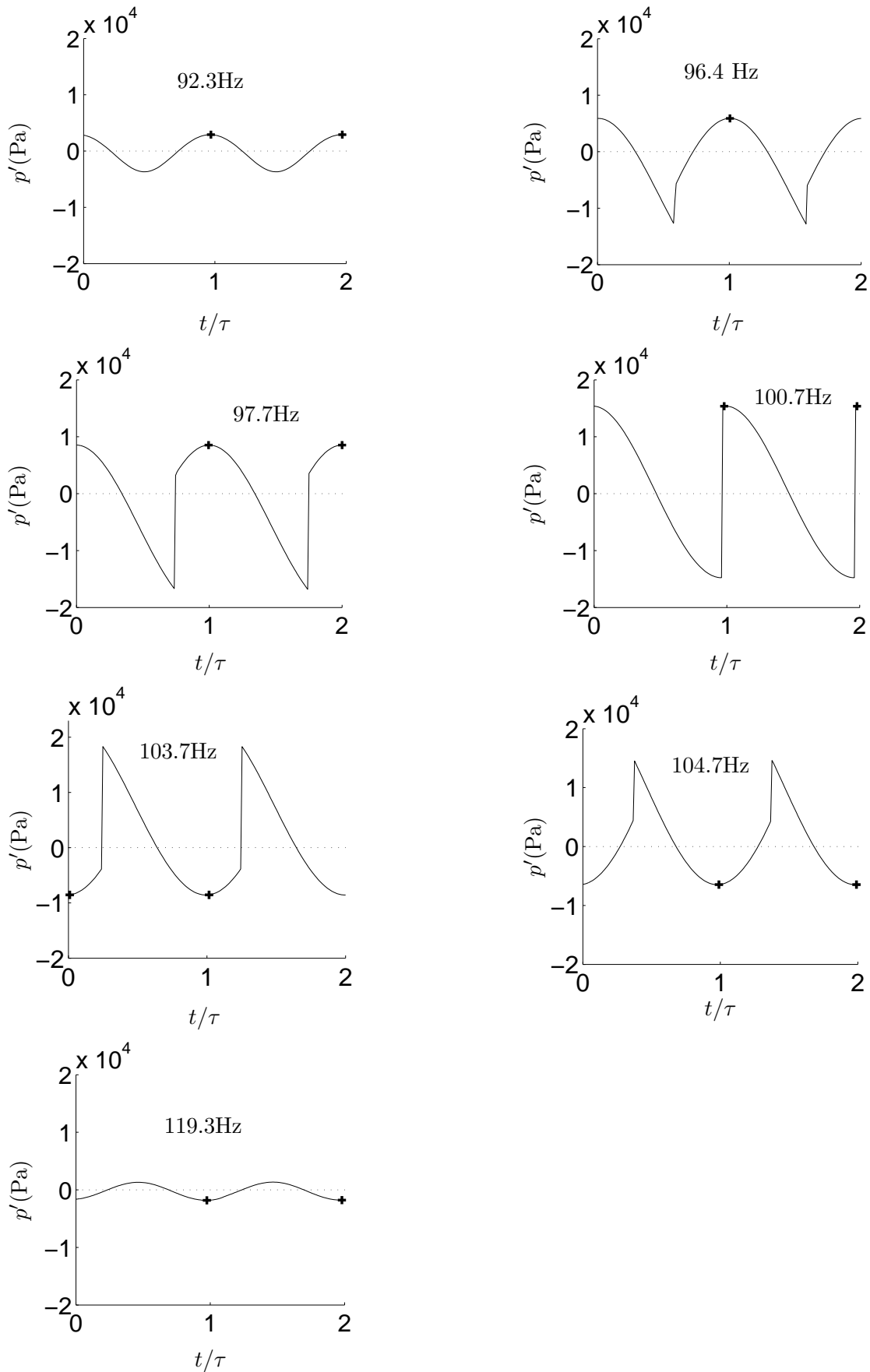


FIG. 4.3.4 – Variations temporelles de la pression p' obtenue à l'extrémité fermée du résonateur pour plusieurs fréquences du piston. Deux périodes τ sont représentées. Les symboles + indiquent l'instant où le piston est dans sa position la plus rentrée dans le résonateur.

dans le résonateur. La pression rms dans le résonateur pour cette fréquence est représentée à la figure 4.3.5. Elle est comparée à celle obtenue par Vanhille et Campos-Pozuello. Un bon accord

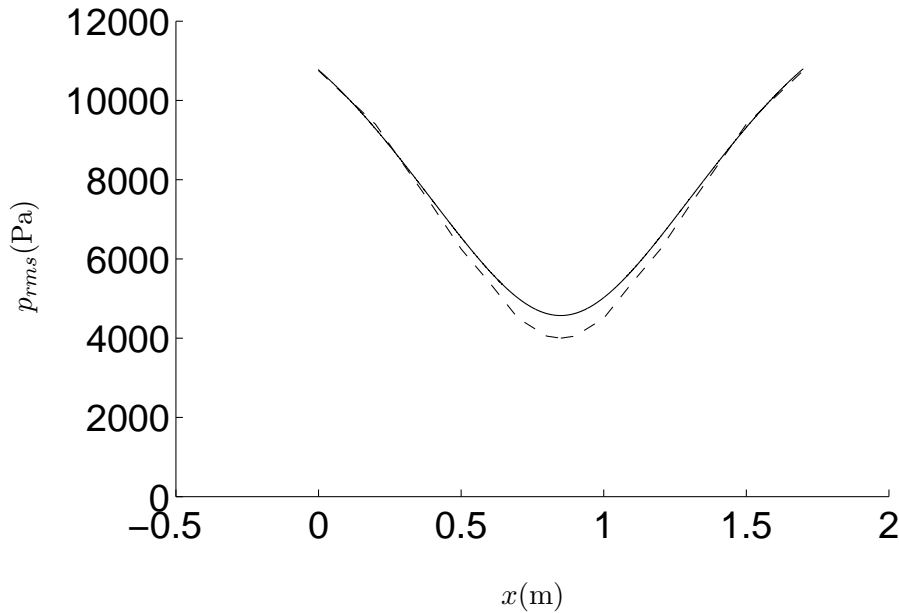


FIG. 4.3.5 – Pression rms (—) dans le résonateur. Le piston est situé en $x=0$, et le fond du résonateur en $x=1.7$ m. La fréquence vaut la fréquence de résonance, $f=100.7$ Hz. La ligne interrompue (---) représente la pression rms obtenue par Vanhille et Campos-Pozuello [135].

est obtenu, bien qu'un décalage existe au milieu du résonateur. Pour les fréquences $f = 96.4$ Hz et $f = 97.7$ Hz situées au-dessous de la fréquence de résonance, on observe une onde en N, un choc est de nouveau présent mais le saut de pression est d'autant plus faible que l'on s'éloigne de la fréquence de résonance. Pour les fréquences 103.7 Hz et 104.7 Hz situées au-dessus de la fréquence de résonance, l'onde a une forme en U, et des chocs sont de nouveau présents, le saut de pression associé diminuant au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la résonance. Pour $f = 97.7$ Hz, la forme de la variation de pression est tout à fait conforme à celle de Saenger et Hudson (voir figure 4.3.2), et les amplitudes d'oscillation (de - 16790 Pa à 8540 Pa) sont proches de celles données par Vanhille et Campos-Pozuello. Pour $f = 104.7$ Hz, la forme de la variation de pression est proche de celle donnée par Saenger et Hudson, bien que le saut de pression soit inférieur. Les amplitudes d'oscillation (de - 6470 Pa à 14600 Pa) sont proches de celles données par Vanhille et Campos-Pozuello (voir figure 4.3.3). Les deux fréquences $f=92.3$ Hz et $f = 119.3$ Hz sont situées assez loin de la fréquence de résonance, en dehors de la zone de choc. L'oscillation est pratiquement sinusoïdale. Pour $f = 92.3$ Hz, l'amplitude de la pression évolue entre -4000 Pa et 3000 Pa. Vanhille et Campos-Pozuello donnent une évolution approximativement entre -4000 Pa et 4000 Pa. Pour $f = 119.3$ Hz, l'amplitude de la pression évolue entre -1800 Pa et 1300 Pa,

tandis que Vanhille et Campos-Pozuelo donnent approximativement une évolution entre -1500 Pa et 3000 Pa. En conclusion, à quelques divergences près, un accord satisfaisant a été obtenu entre les résultats de la présente simulation et les expériences de Saenger et Hudson d'une part, et les simulations de Vanhille et Campos-Pozuelo d'autre part. L'accord est meilleur dans la zone où les chocs sont présents qu'en dehors de cette zone. Deux raisons peuvent expliquer ces divergences : la modélisation simplifiée de la source, et celle de la dissipation thermo-visqueuse. Cette dernière est particulièrement importante loin de la résonance. La modélisation des termes thermovisqueux ne présente que peu d'intérêt ici si ce n'est pour effectuer une comparaison. En effet, pour une application en thermoacoustique, les pertes thermovisqueuses ne seront pas modélisées mais calculées, la source de ces pertes étant la plaque et les échangeurs de chaleur. Le but de cette étude est avant tout de démontrer la capacité du code à prendre en compte les non-linéarités dans le résonateur en utilisant un modèle simple de piston. Ainsi, bien que ne faisant pas l'objet du présent travail, une simulation complète d'une tranche de résonateur, incluant la source, une plaque du stack, et des échangeurs, est envisageable avec notre code.

Dans le paragraphe précédent, les variations temporelles de la pression ont été données une fois l'état stationnaire atteint dans le résonateur. C'est le régime transitoire qui est maintenant brièvement étudié. Les figures 4.3.6 et 4.3.7 donnent l'évolution temporelle des amplitudes maximales et minimales de la pression au point Q situé au fond du résonateur, pour plusieurs valeurs de la fréquence. Ces deux amplitudes donnent pour chaque fréquence considérée l'enveloppe de l'oscillation de pression. Pour $f = 100.7$ Hz, à la résonance, la norme des amplitudes augmente,

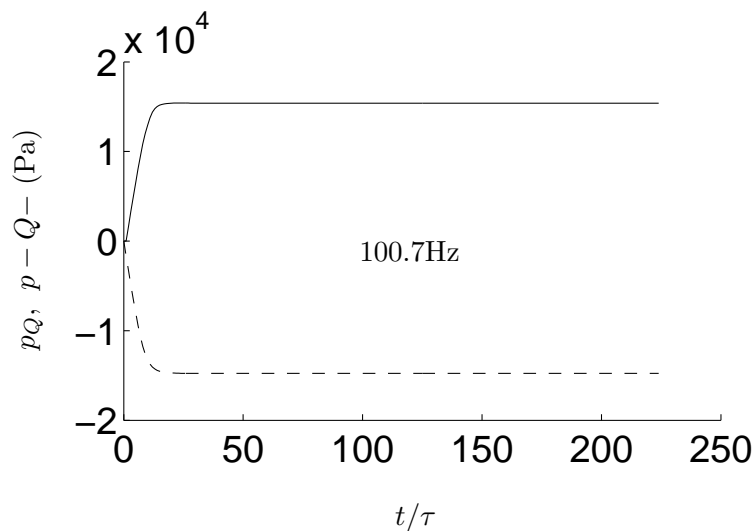


FIG. 4.3.6 – Evolution des amplitudes maximales p_Q (—), et minimales p_{Q-} (---), de la pression au fond du résonateur (point Q) en fonction du temps.

et sature en une vingtaine de périodes. Une telle évolution est donnée par Vanhille et Campos-

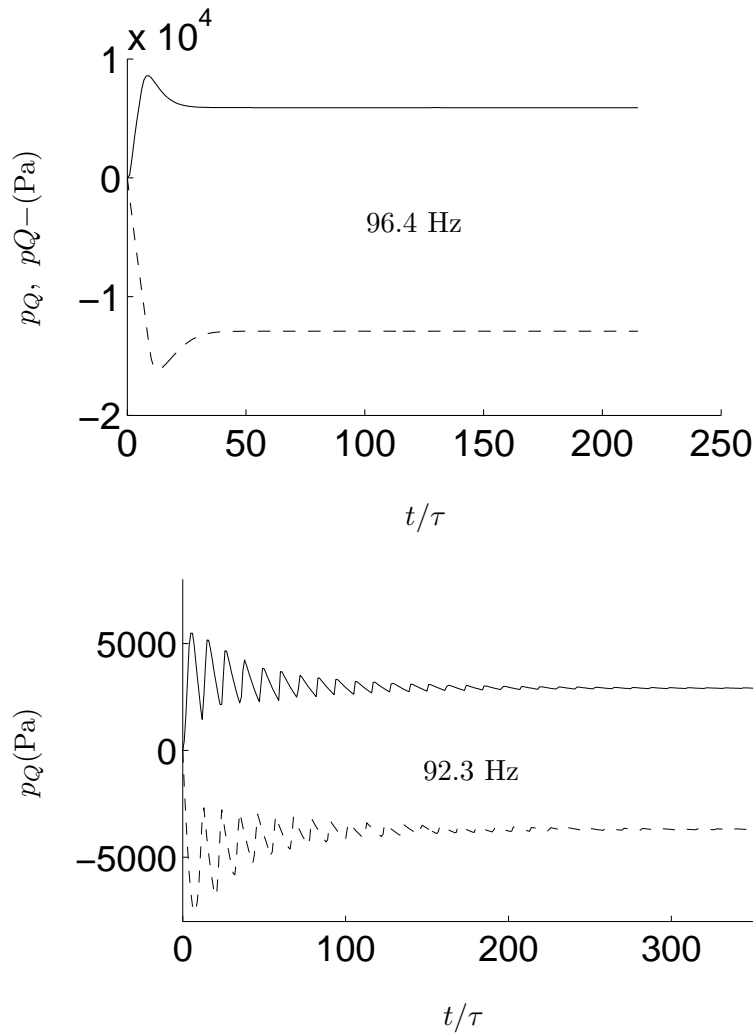


FIG. 4.3.7 – Evolution des amplitudes maximales p_Q (—) et du minimales p_{Q-} (---) de la pression au fond du résonateur (point Q) en fonction du temps.

Pozuello. Si l'on s'éloigne de la résonance, tout en restant dans la zone de choc, on obtient une évolution similaire à celle observée pour $f = 96.4$ Hz. La norme des amplitudes augmente, dépasse sa valeur finale, avant de diminuer et de se stabiliser. Le dépassement est d'autant plus important que l'on est loin de la résonance. Enfin, pour $f = 92.3$ Hz, on est loin de la résonance, et hors de la zone de choc. La norme des amplitudes oscille avant de se stabiliser. Une telle oscillation n'est pas due aux termes non-linéaires des équations et apparaît également dans la simulation linéaire d'un résonateur, dès que l'on s'éloigne de la résonance. Des oscillations mettent d'autant plus de temps à s'amortir que la dissipation de paroi (coefficient α_{cl}) est faible. La question de savoir si ce transitoire correspond à une réalité physique n'est pas résolue. Il ne serait de toute façon observable que pour une dissipation très faible. Dans le cas présent les oscillations disparaissent en 200 cycles acoustiques, soit un temps de deux secondes.

4.3.6 Autre méthode d'excitation du résonateur

Ci-dessus une onde a été entretenue dans le résonateur en utilisant un modèle de piston. Ce modèle de source a permis d'établir des comparaisons avec les expériences de Saenger et Hudson [114]. Un autre moyen simple de créer une onde stationnaire dans une cavité rigide est de la secouer harmoniquement. Ce moyen a été utilisé par plusieurs auteurs, tant expérimentalement par Lawrenson *et al.* [74], que numériquement par Lee *et al.* [75] et Boluriaan *et al.* [22], et même théoriquement par Hamilton *et al.* [60]. D'un point de vue numérique, le résonateur est désormais fermé par une paroi rigide à chacune de ses deux extrémités, E et Q. Dans le référentiel fixe du résonateur, l'agitation se traduit par un terme source d'accélération dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement. Cette dernière s'écrit :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial^2 \rho u}{\partial x^2} + \nabla p = \beta_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha_{cl} u + \rho a(t) \quad (4.3.7)$$

β_c et α_{cl} représentent les termes de pertes thermovisqueuses déjà définis ci-dessus. L'accélération $a(t)$ vérifie

$$a(t) = a_0 \sin(\omega t) \quad (4.3.8)$$

Les résultats obtenus avec cette méthode sont très proches de ceux obtenus avec un piston. En particulier pour une configuration identique à celle de Saenger et Hudson, l'accélération à imposer pour la fréquence de résonance $f = 100.7$ Hz pour avoir un choc avec un saut de pression associé de 29330 Pa (à peu près égal à celui obtenu par Saenger et Hudson) est $a_0 = 118 \text{ ms}^{-2}$. Avec cette valeur de l'amplitude de l'accélération, la variation temporelle de la pression à l'extrémité Q du résonateur est donnée à la figure 4.3.8 pour plusieurs fréquences. Dans les trois cas, les variations sont semblables en forme (voir figure 4.3.4) et en niveau à celles obtenues dans les mêmes conditions avec un modèle de piston. Les deux moyens d'excitation sont donc tout à fait semblables. Notons pour terminer que le choc atteint l'extrémité Q du résonateur quand l'accélération est maximale. De même il atteint l'extrémité E quand elle est minimale (au maximum de sa valeur négative).

4.4 Comparaison entre les deux méthodes

Pour établir une onde stationnaire dans le domaine de calcul, deux moyens ont été présentés : l'utilisation de la méthode des caractéristiques (section 4.2) et celle d'un modèle de source, piston ou terme d'accélération volumique (section 4.3). La méthode des caractéristiques permet comme on l'a vu d'obtenir une onde quasi-linéaire de fort niveau. Un nombre de Mach $M_a = 8\%$ est atteint alors que la variation de pression au fond du résonateur reste sinusoïdale (voir figure 4.2.7). Le but de cette section est de montrer qu'il n'en va pas de même si l'onde est entretenue avec un piston. L'étude porte donc sur un résonateur fonctionnant à la fréquence $f = 20$ kHz, celle qui a

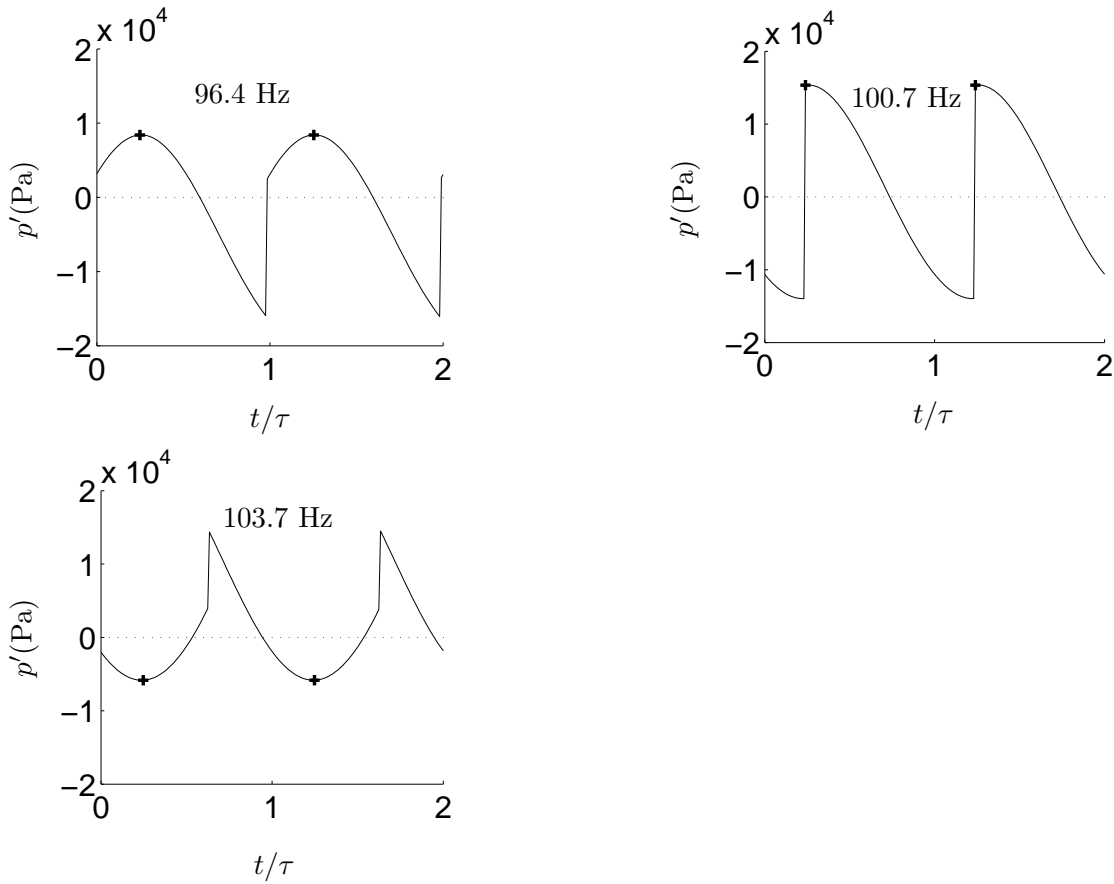


FIG. 4.3.8 – Variations temporelles de la pression p' obtenue à l'extrémité Q du résonateur pour plusieurs fréquences. Un terme source d'accélération $a(t) = a_0 \sin(\omega t)$ est utilisé pour maintenir l'onde. $a_0 = 118 \text{ ms}^{-2}$. Deux périodes τ sont représentées. Les symboles + indiquent l'instant où l'accélération est maximale.

été utilisée dans la section 4.2 pour la méthode des caractéristiques. Dans les calculs qui suivent un nombre de Mach au piston $M_p = 0.1\%$ est utilisé. Des simulations sont faites dans lesquelles la géométrie et les paramètres de contrôle restent fixés mais des termes dans les équations sont pris, ou non, en compte. Ces simulations permettent de comprendre le fonctionnement du résonateur et la raison de saturation de l'amplitude de l'onde. L'amplitude (positive) de la pression au fond du résonateur est représentée en fonction du temps à la figure 4.4.1 pour chacune des simulations :

- Simulation (a) : la première simulation est faite en ne tenant compte dans les équations utilisées que des termes linéaires. On résout pour cela le système d'équations (3.2.24) dans sa version 1D. L'amplitude de la pression croît linéairement en fonction du temps. L'énergie acoustique croît, elle, comme le carré du temps. Aucun mécanisme physique ne vient limiter cette croissance (du moins jusqu'à ce que l'amplitude de la pression acoustique soit égale à la pression au repos, dans quel cas du vide se crée).
- Simulation (b) : dans la deuxième simulation, on ajoute la viscosité au centre du résonateur

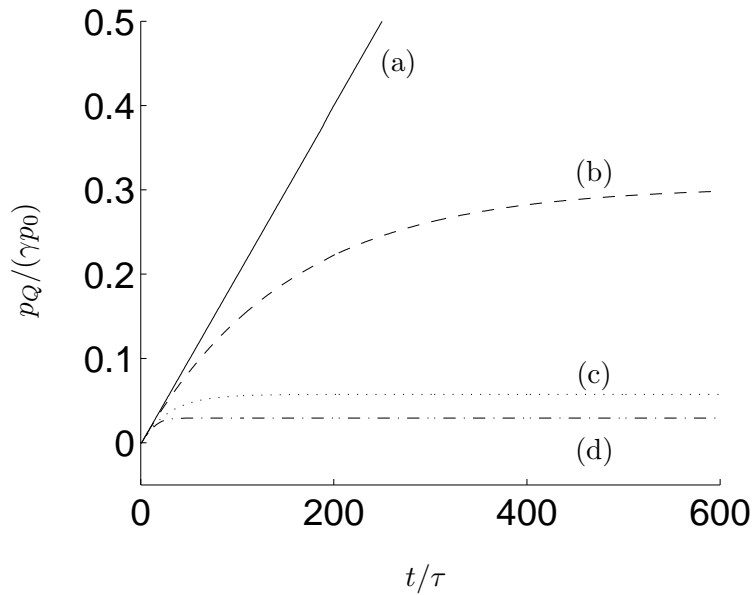


FIG. 4.4.1 – Evolution de l’amplitude maximale p_Q de la pression au fond du résonateur (point Q) en fonction du temps : (a) simulation avec des termes linéaires des équations ; (b) simulation avec des termes linéaires et la viscosité au centre du résonateur ; (c) simulation linéaire avec la viscosité au centre et la viscosité de paroi ; (d) simulation non-linéaire avec la viscosité au centre du résonateur et la viscosité de paroi.

(coefficient β_c). Cette viscosité présente un facteur limitant et l’amplitude de la pression sature. La valeur de saturation est supérieure à la pression atmosphérique, et correspond à un nombre de Mach acoustique M_a supérieur à 43%.

- Simulation (c) : la troisième simulation inclut la viscosité de paroi. La paroi dont on tient compte ici n’est plus celle du résonateur, mais celle d’une plaque du stack. Pour une plaque, on calcule le coefficient α_{cl} donné pour un résonateur par (4.3.3), puis on en prend une fraction, qui est simplement le quotient de la longueur de la plaque considérée par la longueur du résonateur, et qui vaut typiquement $1/20^e$. De plus on se place dans le cadre d’une application en thermoacoustique et on prend pour hauteur de résonateur une distance représentative de l’espace inter-plaques dans le stack, soit six épaisseurs visqueuses. Et donc on prend $y_0 = 3\delta_\nu$. Ce modèle est bien sûr extrêmement simplifié mais convient aux ordres de grandeur cherchés ici. Avec un tel modèle, on constate que l’amplitude de la pression pour la simulation (c) sature bien plus rapidement qu’avec la simulation (b). Le nombre de Mach acoustique correspondant à cette saturation vaut environ 8%, bien moins que pour la simulation (b). Dans les deux simulations (b) et (c), la saturation est due à des termes d’amortissement linéaires (de la forme $-\alpha_{cl}u$) et malgré la saturation, l’oscillation temporelle de la pression au fond du résonateur est une courbe sinusoïdale.

- Simulation (d) : la quatrième simulation inclut les pertes par viscosité, mais en plus les non-

linéarités. On constate que la valeur de saturation de l'amplitude diminue encore, elle vaut 4%. De plus, parmi les mécanismes de saturation, le plus important est la déformation non-linéaire de l'onde résonante. En effet, une simulation (non montrée) faite en l'absence de viscosité et avec les seuls termes non-linéaires conduit à une valeur de l'amplitude de 6%, moins que les 8% obtenus pour la simulation (c) en prenant en compte toutes les pertes par viscosité. L'oscillation temporelle de la pression pour la simulation (d) présente des chocs. Pour ne pas avoir de choc, le nombre de Mach acoustique doit rester inférieur à 2%, ce qui correspond à un nombre de Mach au piston M_p inférieur à 0.05%.

En conclusion, la simulation d'une tranche de résonateur avec un modèle de piston a été faite. Les pertes thermovisqueuses dues à la présence d'une plaque ont été calculées approximativement. Il apparaît que l'onde résonante obtenue devient rapidement non-linéaire et qu'un choc apparaît pour un nombre de Mach supérieur à 2%. Il n'est pour l'instant pas clair de savoir si le choc est simplement dû au piston, et s'il apparaîtrait à des nombres de Mach aussi faibles également avec un modèle expérimental fonctionnant avec un piston d'une part, et avec une source plus réaliste telle qu'un transducteur piézoélectrique d'autre part. Notons que des éléments n'ont pas été pris en compte ici, comme la dissipation sur les parois du résonateur. De plus le stack a été modélisé sommairement, et il n'est pas exclu qu'avec la présence du stack thermoacoustique, et les inhomogénéités de température moyenne qu'il induit, la distribution des modes du tube soit suffisamment modifiée pour que l'apparition du choc soit entravée. Ce point demande un approfondissement. Pour l'heure la méthode des caractéristiques semble avantageuse pour créer une onde acoustique de fort niveau dans le domaine de calcul.

4.5 Conclusion

On a étudié dans ce chapitre les différentes possibilités pour établir une onde stationnaire dans le domaine de calcul. La méthode des caractéristiques, qui sera utilisée dans la suite de cette thèse, a été validée. Cette méthode présente plusieurs avantages : d'abord elle permet d'établir une onde stationnaire dans un domaine de longueur inférieure à la demi-longueur d'onde. De plus l'onde stationnaire est établie en un temps très court, de l'ordre de quelques périodes acoustiques. Enfin, elle permet de simuler une onde acoustique linéaire de très forte intensité, dont on a souligné qu'elle serait obtenue physiquement dans un résonateur anharmonique de section variable. Cet avantage empêche toutefois d'étudier les non-linéarités qui proviennent de la propagation de l'onde dans le résonateur, bien que la méthode permette d'*imiter* cette propagation en introduisant des harmoniques, en imposant toutefois *a priori* une phase et une amplitude pour chacun d'eux. Pour étudier l'influence des non-linéarités, la possibilité d'établir une véritable onde

résonante dans le domaine de calcul a été étudiée. Deux moyens ont été testés, qui se sont avérés équivalents : l'utilisation d'un modèle de piston, et celle d'un terme source d'accélération dans l'équation de la quantité de mouvement. Les résultats trouvés avec le modèle de piston associé à celui pour les pertes thermovisqueuses sont en bon accord avec les expériences de Saenger et Hudson [114] et les simulations de Vanhille et Campos-Pozuello [135]. Ainsi la simulation d'un résonateur avec des chocs est possible avec le présent code. Les résultats sont encourageants en ce qui concerne la faisabilité de la simulation d'une tranche complète de résonateur, incluant une plaque du stack, des échangeurs de chaleur, et un modèle de source. Toutefois il a été mis en avant qu'avec l'utilisation d'un piston (ou d'un terme source d'accélération) à 20kHz les non-linéarités de propagation deviennent importantes et conduisent à la formation d'un choc à partir de nombres de Mach acoustique relativement faibles. Ce point demande un approfondissement.

Chapitre 5

Effet thermoacoustique au-dessus d'une plaque 1D

5.1 Introduction

Après avoir vu au chapitre précédent le moyen d'établir une onde stationnaire dans le domaine de calcul, nous passons maintenant à l'étude de l'effet thermoacoustique. Pour ce faire une plaque est ajoutée dans le domaine de calcul. Sous l'effet de l'onde un flux de chaleur moyen va apparaître le long de cette plaque, et induire dans le domaine de calcul un gradient de température moyenne. Ces phénomènes, et les paramètres qui les influencent sont étudiés dans ce chapitre. Dans la réalité, une plaque a deux dimensions, une longueur, et une épaisseur. Cette épaisseur est cependant faible et dans un premier temps la plaque peut être considérée comme étant monodimensionnelle, caractérisée par sa seule longueur. Cette hypothèse permet de garder un code de calcul relativement simple, tout en correspondant à la géométrie des modèles analytiques. A la section 5.2 une plaque monodimensionnelle et isotherme sera étudiée. Un modèle plus précis consiste à utiliser pour la plaque une équation de la chaleur monodimensionnelle. Ce modèle sera présenté à la section 5.3. La simulation d'une plaque 2D ayant une épaisseur finie sera faite au chapitre 7.

5.2 Paroi isotherme

5.2.1 Présentation

Pour étudier l'effet thermoacoustique, dans un premier temps un problème simplifié est résolu. Un élément de l'empilement (stack) est modélisé par une plaque isotherme monodimensionnelle. La plaque isotherme, bien que ne pouvant pas stocker d'énergie, impose les conditions aux limites en vitesse et en température nécessaires à l'obtention d'un effet thermoacoustique. La méthode est à rapprocher de celle utilisée par Cao *et al.* [27] et Ishikawa *et al.* [66]. Nous verrons dans la suite que cette simplification permet de capturer l'effet thermoacoustique et d'étudier l'influence

de paramètres tels que la distance entre deux plaques du stack ou l'amplitude de l'onde. De plus elle permet d'obtenir des premiers résultats avec un coût de calcul raisonnable.

Le domaine de simulation utilisé est celui de la figure 2.3.1 sans les échangeurs de chaleur. Le maillage a été présenté à la section 3.3.1. Les notations utilisées dans la suite sont précisées à la figure 5.2.1. La plaque est repérée par les points F et C (F pour froid et C pour chaud).

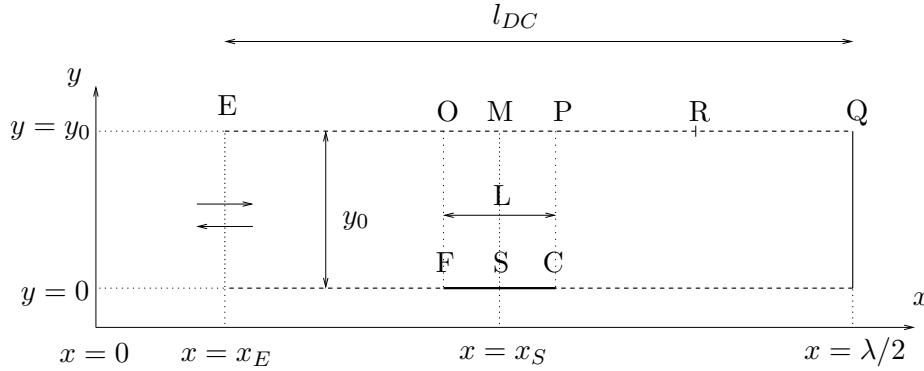


FIG. 5.2.1 – Domaine de calcul et notations.

Sa position dans le résonateur sera repérée par l'abscisse x_S de son point médian S, ou par kx_S , abscisse adimensionnée par le nombre d'onde. L'origine $x = 0$ est située au niveau de la source acoustique, laquelle n'est pas modélisée et se trouve hors du domaine de calcul. La frontière du domaine de calcul sur laquelle l'onde acoustique est injectée est située en $x = x_E$. La hauteur du domaine de calcul est notée y_0 conformément aux notations de Swift [118] et du fait des conditions de symétrie imposées, elle représente la demi-distance entre deux plaques dans le stack. La plaque a une longueur $L = x_C - x_F$. l_{DC} est la longueur du domaine de calcul.

Dans la suite plusieurs paramètres seront variés pour chaque simulation, tels que l'amplitude de l'onde, la position de la plaque. Ces paramètres seront regroupés pour chaque calcul sous la forme d'un numéro de cas. L'ensemble des cas est donné sous forme de tableau à l'annexe D. Dans les sections 5.2.2 et 5.2.3, les champs instantanés de vitesse, de pression, et de température dans le domaine de calcul sont d'abord étudiés, et plus particulièrement au-dessus de la plaque. Dans la section 5.2.4 une étude est faite de la température moyenne dans le domaine. Cette température résulte de flux moyens d'énergie, d'origine thermoacoustique, qui seront étudiés à la section 5.2.5. Dans ces sections des comparaisons seront établies avec la théorie linéaire. L'étude de l'influence de deux paramètres importants, la hauteur du domaine de calcul, et le nombre de Mach acoustique, est entreprise aux sections 5.2.6 et 5.2.7. En particulier la section 5.2.7 contient les résultats concernant les effets non-linéaires. Enfin la section 5.2.8 apporte une comparaison

entre le présent travail et celui de Cao *et al.* [27].

5.2.2 Champs instantanés de pression et de vitesse

Dans le chapitre précédent, les champs de pression et de vitesse correspondant à une onde stationnaire dans le domaine de calcul sans la plaque ont été donnés. Ces champs sont modifiés du fait de la présence de la plaque. Ici, une étude succincte des champs instantanés de pression et de vitesse est faite pour comprendre la modification introduite. Les paramètres de la simulation correspondent au cas 1-1 de l'annexe D. La plaque est située à $kx_S = 2.35$ (aux trois quarts du résonateur) et a une longueur $L = \lambda/40$. Le nombre de Mach est faible, $M_a = 0.5\%$.

Les figures 5.2.2 et 5.2.3 montrent l'évolution axiale de la pression $p'(x, y_0)$ et de la vitesse $u'(x, y_0)$ instantanées sur la limite supérieure du domaine de calcul, en $y = y_0$, en plusieurs instants pendant une période acoustique τ . Le choix de l'instant initial est arbitraire. Huit sous-périodes

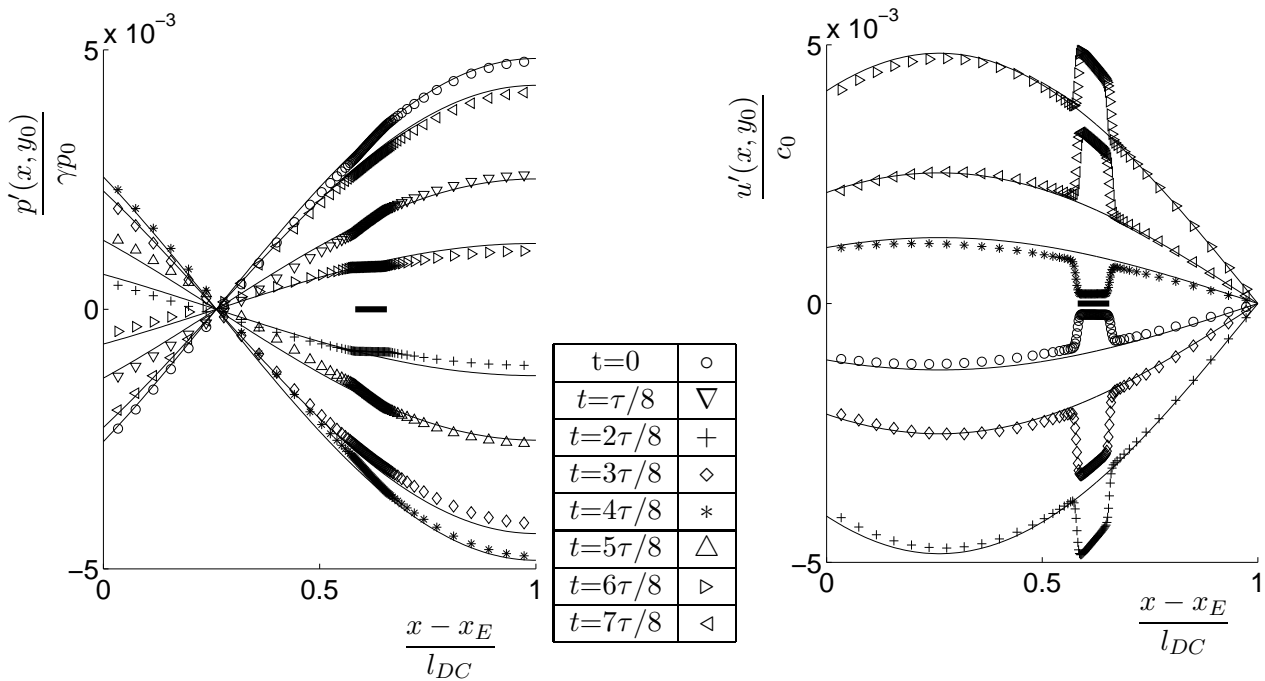


FIG. 5.2.2 – Pression instantanée le long du domaine et en $y = y_0$ en plusieurs instants dans une période τ : \circ $t=0$, ∇ $t=\tau/8$, $+$ $t=2\tau/8$, \diamond $t=3\tau/8$, $*$ $t=4\tau/8$, \triangle $t=5\tau/8$, \triangleright $t=6\tau/8$, \triangleleft $t=7\tau/8$, — courbes théoriques. La position axiale de la plaque est indiquée par une ligne épaisse noire. Cas 1-1.

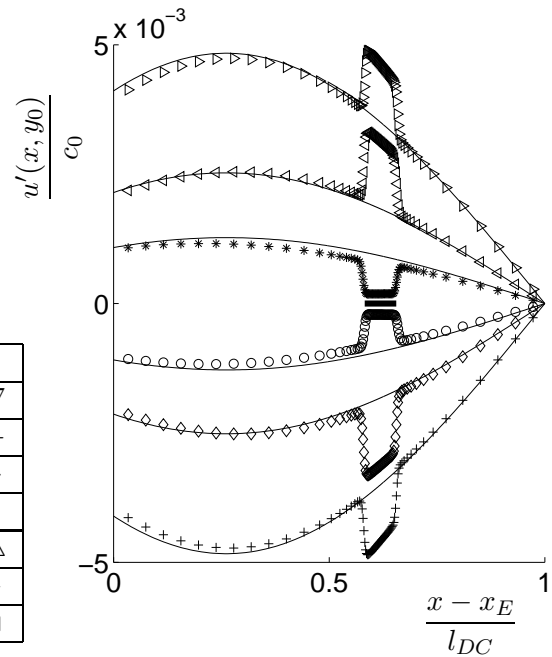


FIG. 5.2.3 – Vitesse axiale instantanée le long de l'axe du domaine et en $y = y_0$ en plusieurs instants dans une période τ : \circ $t=0$, $+$ $t=2\tau/8$, \diamond $t=3\tau/8$, $*$ $t=4\tau/8$, \triangleright $t=6\tau/8$, \triangleleft $t=7\tau/8$, — courbes théoriques. La position axiale de la plaque est indiquée par une ligne épaisse noire. Cas 1-1.

sont représentées pour la pression, et seulement six pour la vitesse, pour plus de clarté dans les courbes. Ces courbes sont comparées aux expressions théoriques (1.1.1) qui correspondent à l'onde stationnaire qui serait obtenue en l'absence de viscosité et de plaque. On constate que la pression

est très proche de celle qui existerait dans le résonateur idéal. Les courbes se croisent au nœud de pression situé au milieu du résonateur. La plaque est toutefois responsable d'un changement de pente de la courbe de pression, spécialement aux instants $t = \tau/8$ (∇) et $t = 2\tau/8$ ($+$), ainsi que $t = 5\tau/8$ (Δ) et $t = 6\tau/8$ (\triangleright), qui correspondent à des instants où le module de la vitesse est maximal. Le changement de pente à l'instant $t = \tau/8$ (∇) est montré plus nettement sur la figure 5.2.4. La vitesse de part et d'autre de la plaque est assez proche de son expression dans le cas

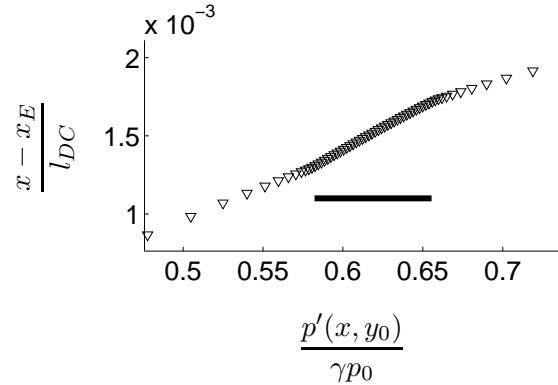


FIG. 5.2.4 – Pression instantanée dans le domaine à l'instant $t=\tau/8$. La position axiale de la plaque est indiquée par une ligne épaisse noire. Cas 1-1. Vue agrandie de la figure 5.2.2.

idéal (figure 5.2.3). Au-dessus de la plaque, la vitesse est affectée par la condition d'adhérence. A l'exception des instants $t = 0$ (o) et $t = 4\tau/8$ ($*$), qui correspondent à une vitesse faible, la vitesse en $y = y_0$ présente une survitesse par rapport au cas idéal. Celle-ci est due au "rétrécissement de section" au passage de la plaque. Ce rétrécissement est dû à un effet de blocage par la couche limite visqueuse, et est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur visqueuse δ_ν . La conservation du débit à travers la section réduite est à l'origine de la survitesse.

L'évolution transversale de la pression et de la vitesse est maintenant étudiée. Les profils transversaux de pression $p'(x_S, y)$ dans la section SM (voir figure 5.2.1) en huit instants pendant une période τ sont tracés à la figure 5.2.5. On vérifie que les fronts de pression sont plans, c'est-à-dire que l'on a effectivement $\partial p'/\partial y = 0$, comme on l'espère en faisant une analyse de type couche limite (voir Schlichting [116], ainsi que Waxler [139]), et comme le suppose la théorie linéaire. Les profils transversaux de vitesse $u'(x_S, y)$ dans la section SM en huit instants pendant une période τ sont tracés à la figure 5.2.6. Ces profils sont caractéristiques d'une couche limite dans un écoulement oscillant. En particulier les profils à $t = \tau/8$ et à $t = 5\tau/8$ montrent que la vitesse près de la paroi peut être de sens opposé à la vitesse au centre du canal. Les profils obtenus sont comparés à ceux donnés par la théorie linéaire. L'expression théorique utilisée pour

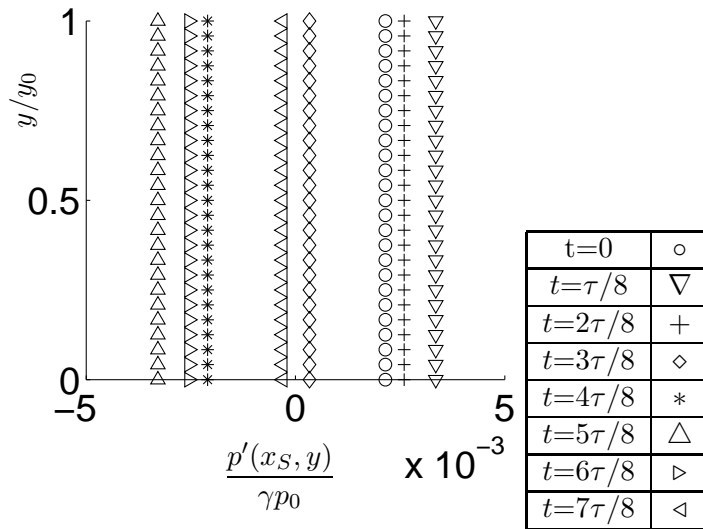


FIG. 5.2.5 – Profils de pression obtenus au-dessus du milieu de la plaque à plusieurs instants t pendant une période τ : \circ $t=0$, ∇ $t=\tau/8$, $+$ $t=2\tau/8$, \diamond $t=3\tau/8$, $*$ $t=4\tau/8$, \triangle $t=5\tau/8$, \triangleright $t=6\tau/8$, \triangleleft $t=7\tau/8$, — courbes théoriques. Cas 1-1.

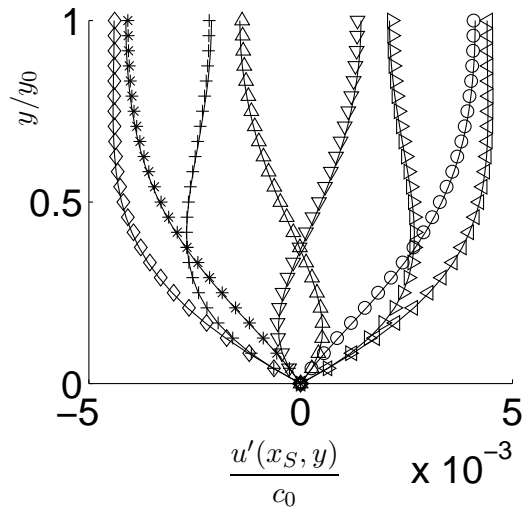


FIG. 5.2.6 – Profils de vitesse obtenus au-dessus du milieu de la plaque à plusieurs instants t pendant une période τ : \circ $t=0$, ∇ $t=\tau/8$, $+$ $t=2\tau/8$, \diamond $t=3\tau/8$, $*$ $t=4\tau/8$, \triangle $t=5\tau/8$, \triangleright $t=6\tau/8$, \triangleleft $t=7\tau/8$, — courbes théoriques. Cas 1-1.

la comparaison est issue de (1.2.9) et s'écrit :

$$u' = \text{Re} \left\{ u'_{Mc} \left[1 - \frac{\cosh((1+i)(y-y_0)/\delta_\nu)}{\cosh((1+i)y_0/\delta_\nu)} \right] e^{i\omega t} \right\}. \quad (5.2.1)$$

où u'_{Mc} est l'amplitude complexe de u' au point M qui est ici fournie par le code. Soulignons que le nombre de Mach utilisé est faible, $M_a=0.5\%$, ce qui rend cette comparaison possible. L'accord est très satisfaisant et montre en particulier que la couche limite visqueuse est bien résolue avec 6 points de maillage.

Les résultats précédents montrent que les champs de pression et de vitesse instantanés sont bien calculés. Ils montrent de plus que les hypothèses de la théorie linéaire sont globalement vérifiées, du moins au nombre de Mach acoustique considéré ici ($M_a = 0.5\%$).

5.2.3 Champ instantané de température

A l'étude des champs instantanés de vitesse et de pression faite ci-dessus, succède maintenant celle du champ instantané de température au-dessus de la plaque. Les calculs correspondent au cas 1-1. A la figure 5.2.7 les profils de température instantanés dans la section SM sont tracés sur une période acoustique τ , et à 8 instants séparés de $\tau/8$. Les courbes théoriques utilisées pour la comparaison sont de nouveau issues de la théorie linéaire. Dans le cas d'une plaque isotherme et à très faible nombre de Mach (ici $M_a = 0.5\%$) l'effet du gradient moyen de température dT_m/dx

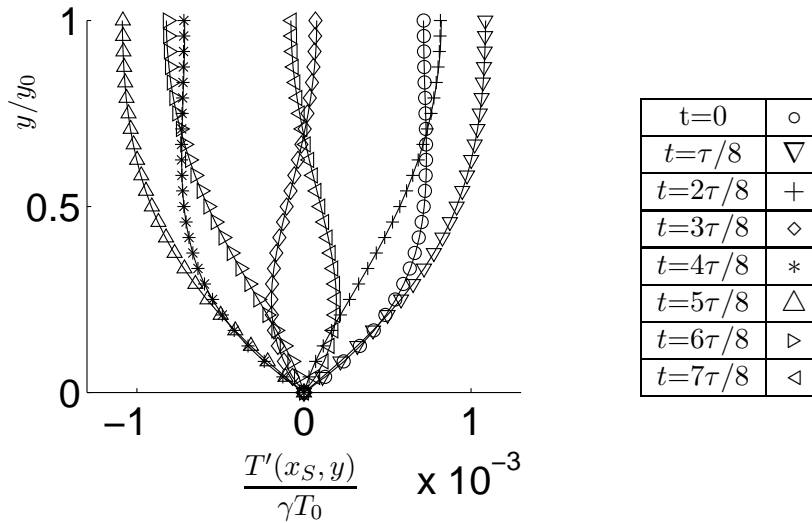


FIG. 5.2.7 – Profils de température obtenus au-dessus du milieu de la plaque à plusieurs instants t pendant une période τ : \circ $t=0$, ∇ $t=\tau/8$, $+$ $t=2\tau/8$, \diamond $t=3\tau/8$, $*$ $t=4\tau/8$, \triangle $t=5\tau/8$, \triangleright $t=6\tau/8$, \triangleleft $t=7\tau/8$, — courbes théoriques. Cas 1-1.

au-dessus de la plaque peut être négligé. Dans ces conditions l'oscillation de température donnée par l'expression (1.2.11) peut s'écrire :

$$T' = \text{Re} \left\{ T'_{Mc} \left[1 - \frac{\cosh((1+i)(y-y_0)/\delta_\kappa)}{\cosh((1+i)y_0/\delta_\kappa)} \right] e^{i\omega t} \right\}. \quad (5.2.2)$$

T'_{Mc} est l'amplitude complexe de T' au point M qui est ici donnée par la simulation. Cette expression est très proche de celle (5.2.1) pour la vitesse, mais l'épaisseur visqueuse δ_ν a été remplacée par l'épaisseur thermique δ_κ . De nouveau un très bon accord est trouvé entre les courbes théoriques et les résultats numériques.

5.2.4 Champ moyen de température

Une des principales manifestations de l'effet thermoacoustique est bien sûr l'apparition d'un gradient de température dans les plaques qui constituent le stack. Ce n'est pas le cas ici puisque les plaques sont isothermes. Cependant il apparaît un gradient de température moyenne dans le fluide au-dessus des plaques. La figure 5.2.8 montre la cartographie du champ de température moyenne obtenue dans le domaine de calcul après 200 périodes acoustiques pour le cas 1-1. Il y a aux extrémités de la plaque un côté chaud et un côté froid. Le côté chaud est situé vers le fond du résonateur, c'est-à-dire vers le nœud de pression. Les zones de température extrême sont situées juste en dehors de la plaque. Afin de connaître le temps d'établissement de cette différence de température, on représente à la figure 5.2.9 l'évolution de T_m en fonction du temps aux points O et P, représentant respectivement les points froid et chaud au centre du canal, en $y = y_0$, dont les positions axiales correspondent aux extrémités de la plaque. On constate que les courbes se stabilisent en un temps de quelques dizaines de périodes. Après un temps de calcul de 50 périodes

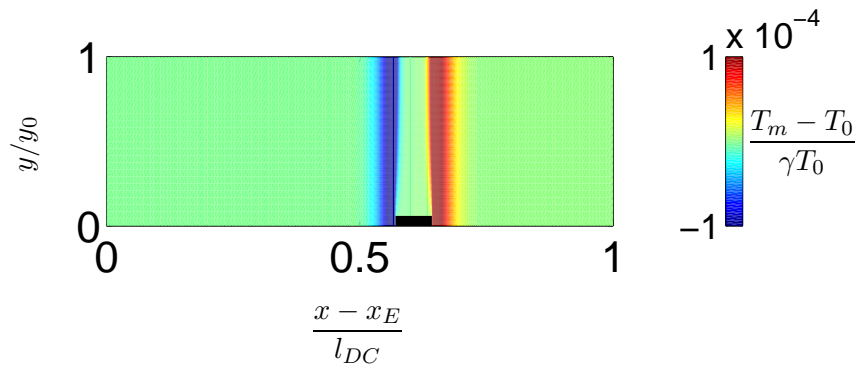


FIG. 5.2.8 – Cartographie du champ de température moyenne dans le domaine de calcul après 200 périodes acoustiques. Cas 1-1.

les courbes ont atteint à 5% près leur valeur au bout de 200 périodes. Le taux de convergence atteint après n périodes de calcul pour la grandeur G est défini par $(G_n - G_{n-1})/G_{n-1}$. Après les 200 périodes de calcul ce taux est de 0.01% pour la température moyenne aux points O et P. Cette valeur de 0.01% pour le taux de convergence sera généralement utilisée comme critère d'arrêt pour le calcul. Notons que dans des études paramétriques, où l'on s'intéresse plus à l'influence d'une variable qu'à la valeur précise du résultat final, un taux de convergence moindre peut être choisi. Dans cette optique, et dans le cas d'une plaque isotherme, 50 périodes de calcul peuvent parfois être suffisantes. Notons toutefois que si les phénomènes peuvent être considérés comme stabilisés

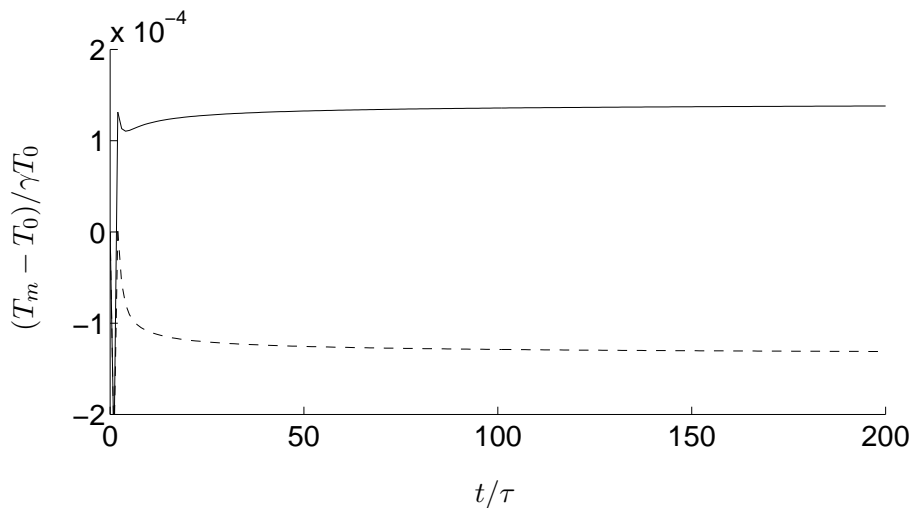


FIG. 5.2.9 – Evolution de la température moyenne du fluide en fonction du temps de calcul en deux points du domaine de calcul : -- point O, — point P. Cas 1-1.

au-dessus de la plaque après 50 périodes de calcul, ils ne le sont pas dans le reste du résonateur. En effet, considérons à présent le champ de température moyen $T_m(x)$ en $y = y_0$ pour deux

temps de calcul différents : 50 périodes et 200 périodes. Ce champ est donné au-dessus de la plaque seulement à la figure 5.2.10 et sur toute la longueur du domaine de calcul à la figure 5.2.11. Au-dessus de la plaque (figure 5.2.10), la température moyenne est très peu différente

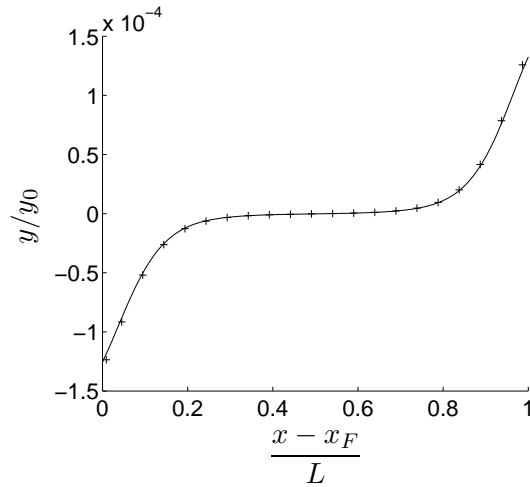


FIG. 5.2.10 – Température moyenne du fluide au-dessus de la plaque en $y = y_0$ pour deux temps de calcul différents : + 200 périodes τ , — 50 périodes τ . Cas 1-1.

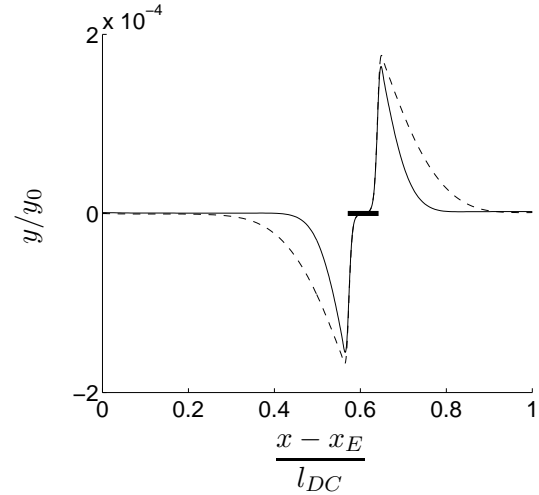


FIG. 5.2.11 – Température moyenne du fluide sur toute la longueur du domaine de calcul en $y = y_0$ après deux temps de calcul différents : -- 200 périodes τ , — 50 périodes τ . La position axiale de la plaque isotherme est indiquée par la ligne épaisse noire. Cas 1-1.

entre les deux temps de calcul. De part et d'autre de la plaque en revanche (figure 5.2.11) la température est plus élevée et plus étalée au bout de 200 périodes, ce qui est dû à la conduction de la chaleur dans le fluide. Ce phénomène ayant des temps caractéristiques longs, l'établissement d'un régime stationnaire dans la partie du résonateur comprise entre la plaque et le fond sera très long. Atteindre un tel état n'est cependant pas nécessaire pour caractériser les échanges d'énergie entre la plaque et le fluide, qui eux se stabilisent au bout de 50 périodes de calcul.

5.2.5 Flux moyens d'énergie

L'apparition d'une différence de température moyenne entre les points du domaine de calcul observée dans la section précédente est le résultat de flux moyens d'énergie dans le fluide, et entre le fluide et la plaque. Ces flux moyens sont reliés à l'effet thermoacoustique et font l'objet de la présente section.

Rappelons que pour caractériser le flux d'énergie dans le fluide on utilise d'après l'équation (1.2.21) le vecteur flux d'énergie \mathbf{h} de composantes \dot{h}_x et \dot{h}_y définies par :

$$\dot{h}_x = \rho u \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w \right) - K \frac{\partial T}{\partial x} - (u\tau_{xx} + v\tau_{xy}), \quad (5.2.3)$$

$$\dot{h}_y = \rho v \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w \right) - K \frac{\partial T}{\partial y} - (u\tau_{xy} + v\tau_{yy}). \quad (5.2.4)$$

$\dot{\mathbf{h}}$ a pour unité le W.m^{-2} et sera adimensionnalisé par le flux d'énergie \dot{h}_0 défini par :

$$\dot{h}_0 = \rho_0 c_0^3. \quad (5.2.5)$$

La moyenne temporelle de $\dot{\mathbf{h}}$, calculée sur une période du cycle acoustique, est notée $\dot{\mathbf{h}}_m$ de composantes \dot{h}_{xm} et \dot{h}_{ym} . Son unité est de nouveau le W.m^{-2} . Les composantes \dot{h}_{xm} et \dot{h}_{ym} s'obtiennent en prenant la moyenne temporelle de \dot{h}_x et \dot{h}_y , respectivement. On obtient :

$$\dot{h}_{xm} = \left\langle \rho u \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\rangle_t + \left\langle \rho u w \right\rangle_t - \left\langle K \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle_t - \left\langle (u\tau_{xx} + v\tau_{xy}) \right\rangle_t, \quad (5.2.6)$$

$$\dot{h}_{ym} = \left\langle \rho v \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\rangle_t + \left\langle \rho v w \right\rangle_t - \left\langle K \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_t - \left\langle (u\tau_{xy} + v\tau_{yy}) \right\rangle_t. \quad (5.2.7)$$

D'après les simplifications introduites par la théorie linéaire menant à l'équation (1.2.22), le flux d'énergie moyen donné par cette théorie a pour composantes :

$$\dot{h}_{xm}^{lin} = \left\langle \rho_0 c_p u' T' \right\rangle_t - K \frac{\partial T_m}{\partial x}, \quad (5.2.8)$$

$$\dot{h}_{ym}^{lin} = \left\langle \rho_0 c_p v' T' \right\rangle_t - K \frac{\partial T_m}{\partial y}. \quad (5.2.9)$$

Dans ces deux expressions, les premiers membres représentent le flux d'enthalpie d'origine thermoacoustique, et le second membre la conduction de la chaleur le long du gradient de température moyenne. Une quantité importante est le flux d'énergie moyen au niveau de la plaque, pour $x_F \leq x \leq x_C$ et $y = 0$. Aux points de la plaque, la vitesse étant nulle, la contribution est due au seul terme de conduction. Ainsi dans la direction y on a :

$$\dot{h}_{ym}^{plaque}(x) = -K \left. \frac{\partial T_m}{\partial y} \right|_{plaque}, \quad (5.2.10)$$

où \dot{h}_{ym}^{plaque} est le flux d'énergie moyen dans le fluide au niveau de la plaque, obtenu indifféremment par (5.2.7) et (5.2.9). Il représente le transfert d'énergie entre la plaque et le fluide, qui se fait par conduction thermique.

Pour visualiser de manière globale le flux moyen d'énergie on trace à la figure 5.2.12 le champ vectoriel $\dot{\mathbf{h}}_m$ sur une zone du domaine de calcul située au voisinage du stack. On considère de nouveau le cas 1-1. A gauche de la plaque (plan $(x - x_F)/L = -1$ par exemple) $\dot{\mathbf{h}}_m$ est principalement dirigé dans la direction x . C'est un flux d'énergie qui provient de la source et qui est disponible pour le pompage thermoacoustique. A droite de la plaque (plan $(x - x_F)/L = 1.5$) le flux d'énergie est quasiment nul. L'énergie qui était disponible a été absorbée au niveau de la plaque. Au-dessus de la plaque les phénomènes sont bidimensionnels. On voit qu'un flux d'énergie

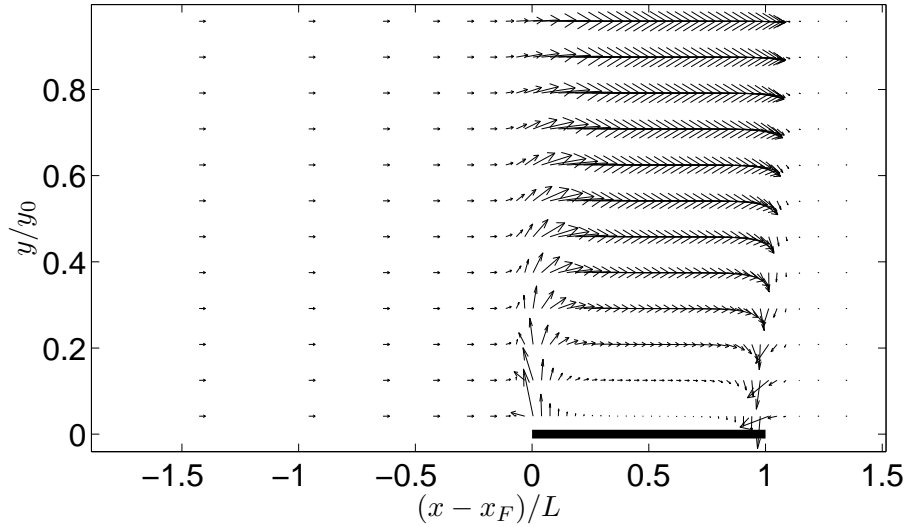


FIG. 5.2.12 – Cartographie du champ vectoriel $\dot{\mathbf{h}}_{\mathbf{m}}$ sur une zone du domaine de calcul aux environs de la plaque. La longueur des flèches est proportionnelle à la norme du vecteur $\dot{\mathbf{h}}_{\mathbf{m}}$. La valeur maximale de cette norme $|\dot{\mathbf{h}}_{\mathbf{m}}|$ vérifie $|\dot{\mathbf{h}}_{\mathbf{m}}|/\dot{h}_0 = 10^{-7}$. Cas 1-1.

quitte la plaque en $x = x_F$. Ce côté de la plaque correspond au 'côté froid'. Ce flux s'enroule et s'ajoute au flux issu de la source. En milieu de plaque (plan $(x - x_F)/L = 0.5$) le flux résulte donc de la somme de celui issu de la source et de celui issu de la plaque. Il est de nouveau dirigé dans la direction x et se déplace donc le long de la plaque. En bout de plaque (plan $(x - x_F)/L = 1$), ce flux s'enroule et est transmis intégralement à la plaque, au niveau du 'côté chaud'. Globalement, sous l'effet de l'énergie incidente, de la chaleur est pompée à l'extrémité de la plaque située en $x = x_F$ et cédée à l'extrémité située en $(x - x_F)/L = 1$.

On s'intéresse maintenant aux composantes en x et en y de $\dot{\mathbf{h}}_{\mathbf{m}}$. La figure 5.2.13 montre le flux moyen d'énergie $\dot{h}_{ym}(x)$ en $y = 0$, qui se confond pour $x_F \leq x \leq x_C$ avec \dot{h}_{ym}^{plaque} donné par l'équation (5.2.10). Il apparaît deux pics de signes opposés aux extrémités de la plaque. A l'extrémité gauche ($x = x_F$) \dot{h}_{ym} est positif, ce qui signifie que de l'énergie sort de la plaque et rentre dans le fluide. A l'extrémité droite de la plaque ($x = x_C$) \dot{h}_{ym} est négatif, et le fluide cède de l'énergie à la plaque. En dehors de la plaque $\dot{h}_{ym}(x, 0)$ est nul, ce qui est conforme aux conditions de symétrie imposées. Ce comportement correspond bien à celui observé à la figure 5.2.12. Les flux d'énergie au niveau de la plaque sont extrêmement localisés. La longueur L de la plaque est d'environ 5 déplacements acoustiques d_a , et celle des zones concernées par l'échange intense de chaleur est de l'ordre du déplacement acoustique d_a . Cette observation rejoint celle de Cao *et al.* [27] et sera précisée à la section 5.2.7 concernant l'influence du nombre de Mach. La figure 5.2.14 donne le temps d'établissement de ces pics, en montrant l'évolution de \dot{h}_{ym}^{plaque} aux

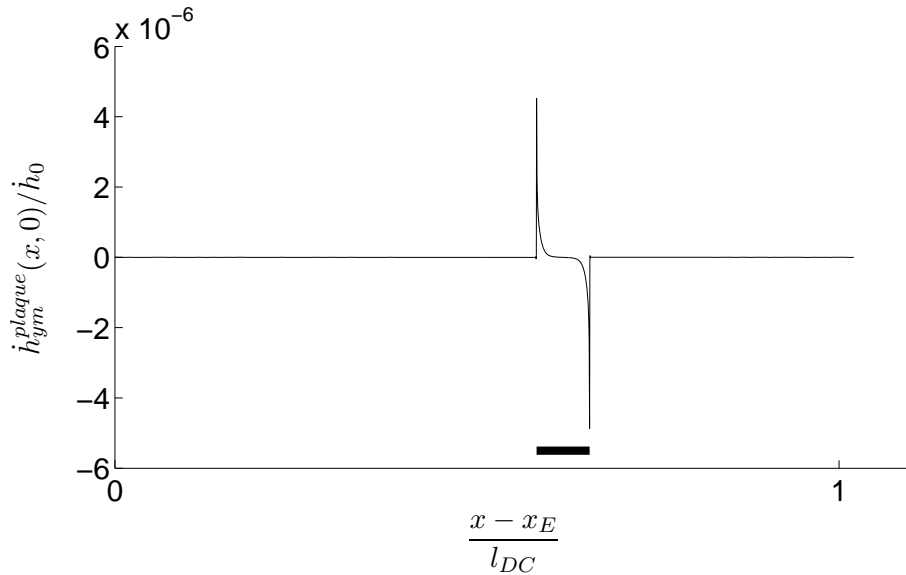


FIG. 5.2.13 – Flux de chaleur moyen dans la direction y en $y = 0$. La position axiale de la plaque est représentée par une ligne épaisse noire. Cas 1-1.

points F et C du domaine de calcul. L'évolution est très semblable à celle obtenue à la figure

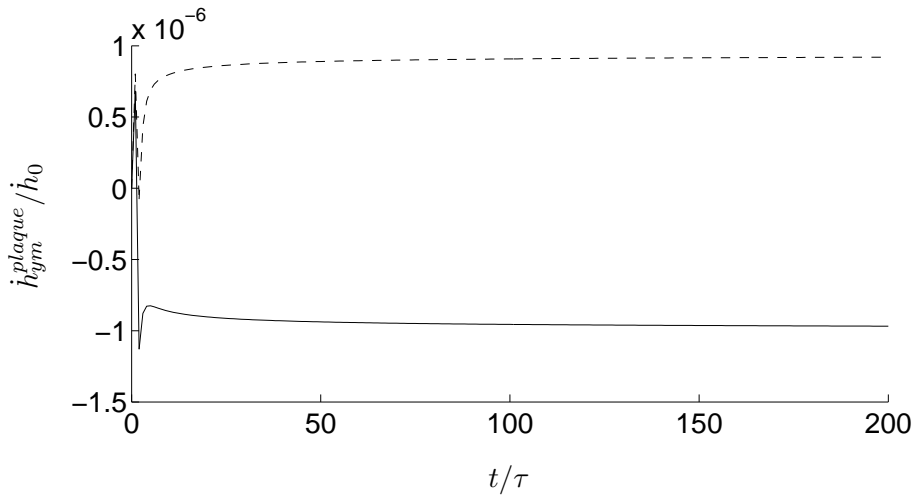


FIG. 5.2.14 – Evolution du flux moyen d'énergie \dot{h}_{ym}^{plaque} en deux points du fluide en contact avec la plaque : -- point F, — point C. Cas 1-1

5.2.9 pour la température moyenne. Elle confirme que le flux de chaleur à la plaque s'établit en quelques dizaines de périodes acoustiques.

La théorie linéaire classique [118] ne parvient pas à donner une forme bien déterminée de la courbe $\dot{h}_{ym}^{plaque}(x)$. La localisation du flux en bouts de plaque indiquée à la figure 5.2.13 a été montrée numériquement pour la première fois par Cao *et al.* [27]. La théorie linéaire ne prend en effet pas en compte les phénomènes de bord. Notons que malgré tout une expression

théorique (compliquée) a été donnée par Mozurkewich [91], qui fait l'hypothèse qu'aucune énergie ne s'échappe du stack en bouts de plaque.

Contrairement au cas du flux d'énergie dans la direction y , la théorie linéaire décrit le flux d'énergie qui est transporté le long des plaques. On s'intéresse donc désormais à la composante en x du flux moyen d'énergie, et plus précisément à sa valeur $\dot{h}_{xm}(x = x_s, y)$ dans la section SM située dans le plan médian de la plaque. La présente simulation montre que dans le cas de la plaque isotherme simulée, le gradient de température moyenne qui s'établit dans le fluide au-dessus de la plaque reste peu important, de telle sorte que la conduction de la chaleur au-dessus du stack suivant x peut être négligée. Dans ces conditions, le flux \dot{h}_{xm}^{lin} défini par l'équation (5.2.8) se réduit à :

$$\dot{h}_{xm}^{lin} \sim \langle \rho_0 c_p u' T' \rangle_t . \quad (5.2.11)$$

Il dépend à la fois des amplitudes de u' et de T' et de la différence de phase entre ces deux grandeurs. Au faible nombre de Mach considéré, et en négligeant le gradient de température moyenne, les expressions (5.2.1) et (5.2.2) pour la vitesse et la température sont utilisables. Ainsi une expression théorique simple est obtenue pour \dot{h}_{xm}^{lin} :

$$\begin{aligned} \dot{h}_{xm}^{lin}(y) &= \frac{1}{2} \dot{H}_x Re \left\{ \left[1 - \frac{\cosh((1-i)(y-y_0)/\delta_\nu)}{\cosh((1-i)y_0/\delta_\nu)} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[1 - \frac{\cosh((1+i)(y-y_0)/\delta_\kappa)}{\cosh((1+i)y_0/\delta_\kappa)} \right] e^{i\phi_M} \right\} . \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Dans cette expression ϕ_M est la différence de phase entre la température et la vitesse. On a de plus $\dot{H}_x = \rho_m c_p |u'_{Mc}| |T'_{Mc}|$, où $|u'_{Mc}|$ et $|T'_{Mc}|$ sont les modules des amplitudes complexes u'_{Mc} et T'_{Mc} . Les trois grandeurs $|u'_{Mc}|$, $|T'_{Mc}|$ et ϕ_M sont données par la simulation numérique. La figure 5.2.15 confronte le profil $\dot{h}_{xm}(x_s, y)$ donné par le calcul et la courbe théorique correspondant à (5.2.12). L'accord est très bon et n'est pas surprenant étant donné les accords obtenus pour la vitesse et la température aux sections 5.2.2 et 5.2.3. Rappelons que cet accord est permis par l'utilisation d'un faible nombre de Mach M_a , et que l'expression théorique (5.2.12) est particulièrement simple car on a pu négliger le gradient moyen de température. La figure 5.2.15 montre ainsi qu'il existe un flux de chaleur moyen dans la direction x au-dessus de la plaque, qui est dirigé vers le fond du résonateur (puisque positif). C'est ce flux moyen qui est à l'origine de l'effet thermoacoustique.

Tous les éléments précédents permettent de comprendre l'effet thermoacoustique. Le pompage de chaleur d'un côté de la plaque à l'autre est dû au flux \dot{h}_{xm} . L'énergie thermique ainsi transportée reste localisée aux extrémités de la plaque dans une zone large de quelques déplacements acoustiques, créant dans ces zones un gradient de température moyenne au niveau de la paroi.

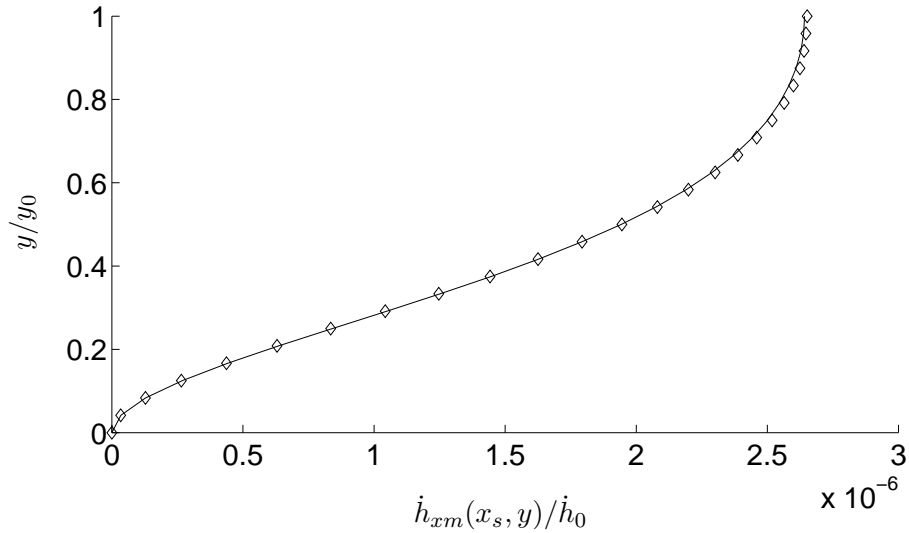


FIG. 5.2.15 – Flux de chaleur moyen $\dot{h}_{xm}(x_s, y)$ dans la direction x dans la section SM de la figure 5.2.1. Cas 1-1.

Ce gradient entraîne alors un échange de chaleur \dot{h}_{ym} avec la paroi. Cet échange de chaleur sera pris en compte de manière plus réaliste par l'utilisation d'une équation d'énergie pour la plaque.

5.2.6 Influence de la hauteur y_0 du canal

Une des variables d'un réfrigérateur thermoacoustique est l'espacement $2y_0$ entre deux plaques du stack. D'après l'analyse de Swift [118] cette hauteur doit être de l'ordre de l'épaisseur thermique δ_κ . Une étude plus précise reste cependant à faire quant à l'influence de cette variable. Dans cette partie on utilise un domaine de calcul de longueur fixe approximativement égale à $\lambda/3$ et de hauteur y_0 variable. Le nombre de Mach reste fixé à $M_a = 0.02$. On considère les cas 1-2 à 1-8, pour lesquels le paramètre δ_κ/y_0 varie de 0.19 à 1.45. La figure 5.2.16 montre le profil de \dot{h}_{xm} , donné par l'expression (5.2.6), au centre de la plaque (section SM de la figure 5.2.1) pour plusieurs valeurs de δ_κ/y_0 . Pour une valeur $\delta_\kappa/y_0 = 0.19$, on constate que le flux d'énergie connaît un maximum pour $y/y_0 \sim 0.3$, c'est-à-dire pour $y \sim 1.5\delta_\kappa$. Le flux de chaleur reste donc localisé à un peu plus d'une épaisseur thermique du bord de la plaque. Pour les valeurs de δ_κ/y_0 supérieures, la hauteur du canal devient inférieure à cette valeur de $1.5\delta_\kappa$ et le flux d'énergie est alors maximum au centre du canal pour toutes les valeurs de δ_κ/y_0 . De plus quand on augmente la valeur de δ_κ/y_0 , la valeur maximum de \dot{h}_{xm} croît jusqu'à ce que $\delta_\kappa/y_0 \sim 0.75$ puis décroît de nouveau. Cette constatation suit celle d'Ishikawa [65]. Au total le flux est maximisé dans le stack quand la distance $2y_0$ entre deux plaques vérifie $2y_0/\delta_\kappa = 2.6$. Dans leur étude expérimentale, Tijani *et al.* [132] donnent une valeur optimale $2y_0/\delta_\kappa \sim 3$. La valeur optimale de $2y_0/\delta_\kappa$ est susceptible de dépendre de la configuration étudiée (géométrie, nombre de Mach...) mais aucune

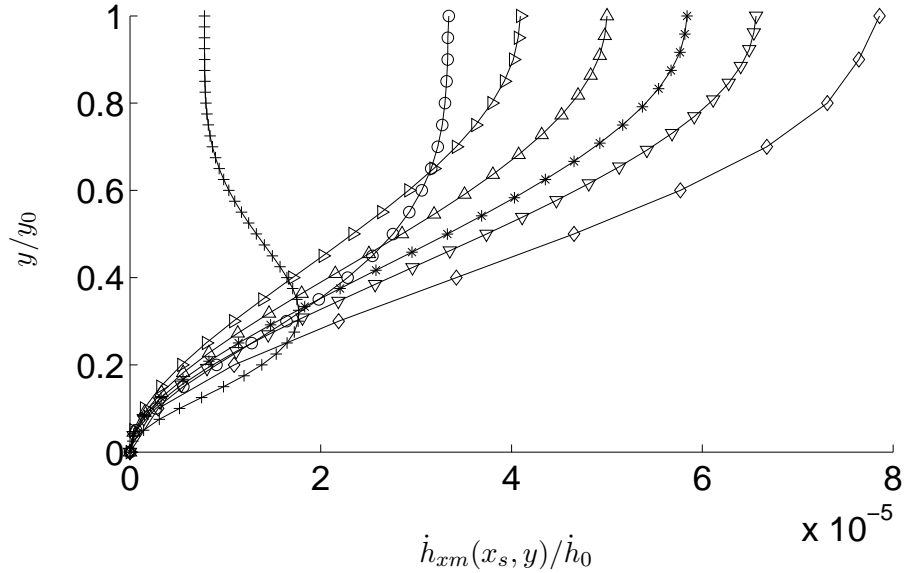


FIG. 5.2.16 – Profil du flux moyen d'énergie \dot{h}_{xm} dans la section SM de la figure 5.2.1 pour différentes valeurs de δ_κ/y_0 : + $\delta_\kappa/y_0=0.19$, o $\delta_\kappa/y_0=0.37$, \diamond $\delta_\kappa/y_0=0.75$, ∇ $\delta_\kappa/y_0=1.1$, * $\delta_\kappa/y_0=1.2$, \triangle $\delta_\kappa/y_0=1.3$, \triangleright $\delta_\kappa/y_0=1.45$. Cas 1-2 à 1-8.

étude paramétrique supplémentaire ne sera faite ici dans le cadre de la plaque isotherme.

Il est également intéressant de regarder la phase des diverses fluctuations quand l'espace inter-plaques diminue. Pour deux points M et R du domaine de calcul on donne aux figures 5.2.17 à 5.2.22 les fluctuations de vitesse, de température, et de pression. Trois valeurs de δ_κ/y_0 sont utilisées : 0.19, 0.75, et 1.45, correspondant aux cas 1-1, 1-4, et 1-8. Le point M est situé en $y = y_0$ à une abscisse correspondant au milieu de la plaque, et le point R en $y = y_0$ entre la plaque et le fond du résonateur (voir figure 5.2.1). Les fluctuations de vitesse, de pression et de température au point M sont notées $u'(M)$, $p'(M)$, et $T'(M)$, respectivement. Elles sont adimensionnalisées par leurs valeurs maximales respectives en ce point, u'_M , p'_M et T'_M . Des notations équivalentes sont utilisées au point R. Sur ces figures est également tracée la fluctuation de vitesse déphasée de $\pi/2$. En effet, pour une onde stationnaire idéale, la pression et la température sont déphasées de $\pi/2$ par rapport à la vitesse. Pour les trois valeurs de δ_κ/y_0 , on constate que ce déphasage est respecté au point R (figures 5.2.18, 5.2.20, et 5.2.22). De plus les fluctuations y sont sinusoïdales. On a donc une onde stationnaire "idéale" dans le résonateur assez loin de la plaque, quel que soit l'espacement entre les plaques du stack. Au point M en revanche (figures 5.2.17, 5.2.19, et 5.2.21), on observe un comportement différent pour les différentes valeurs de δ_κ/y_0 . Quand on diminue ce paramètre, la pression et la température se déphasent par rapport au retard idéal de $\pi/2$ sur la vitesse. La pression se décale dans des proportions raisonnables, tout en restant sinusoïdale. La

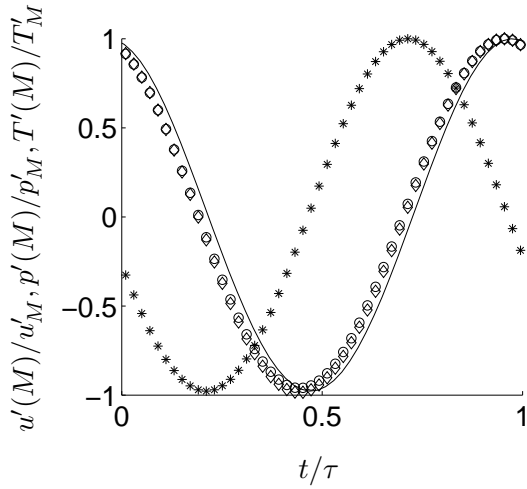


FIG. 5.2.17 – Evolution temporelle de la pression, de la température et de la vitesse au **point M** pour $\delta_\kappa/y_0 = 0.19$: * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \circ pression. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales au point M.

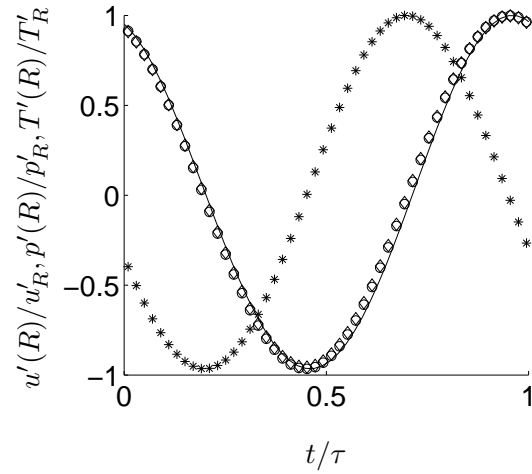


FIG. 5.2.18 – Evolution temporelle de la pression, de la température et de la vitesse au **point R** pour $\delta_\kappa/y_0 = 0.19$: * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \circ pression. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales au point R.

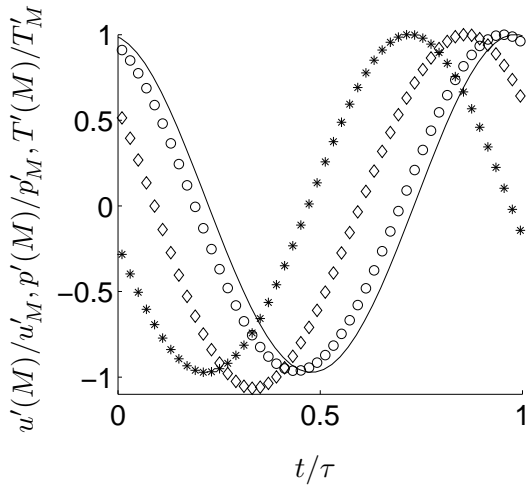


FIG. 5.2.19 – Evolution temporelle de la pression, de la température et de la vitesse au **point M** pour $\delta_\kappa/y_0 = 0.75$: * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \circ pression. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales au point M.

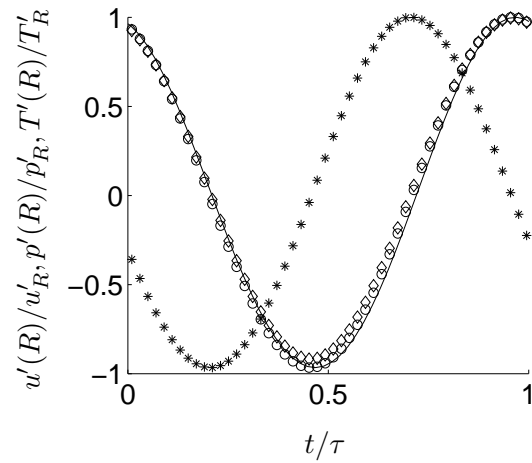


FIG. 5.2.20 – Evolution temporelle de la pression, de la température et de la vitesse au **point R** pour $\delta_\kappa/y_0 = 0.75$: * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \circ pression. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales au point R.

température est en revanche plus affectée : elle n'est plus sinusoidale, et sa phase par rapport à la vitesse diminue très fortement. L'évolution de cette phase $\phi_{u'/T',M}$ avec le paramètre δ_κ/y_0 est représentée sur la figure 5.2.23. Quand le canal devient très étroit (figure 5.2.21) la température devient en phase avec la vitesse, et non plus avec la pression. Cette diminution de la phase entre la

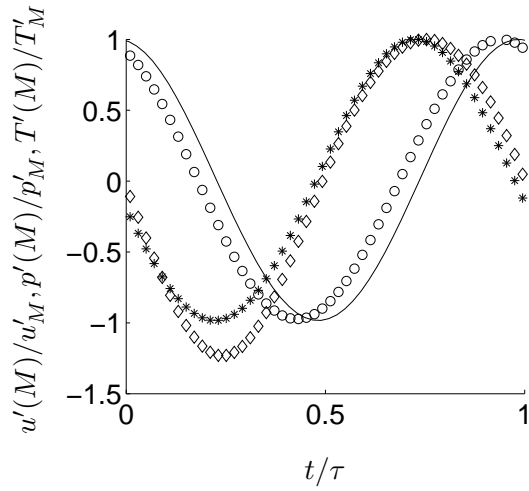


FIG. 5.2.21 – Evolution temporelle de la pression, de la température et de la vitesse au **point M** pour $\delta_\kappa/y_0 = 1.45$: * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, ◇ température, o pression. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales au point M.

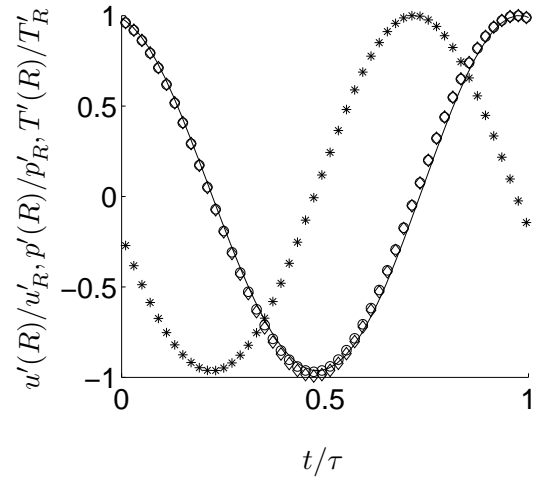


FIG. 5.2.22 – Evolution temporelle de la pression, de la température et de la vitesse au **point R** pour $\delta_\kappa/y_0 = 1.45$: * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, ◇ température, o pression. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales au point R.

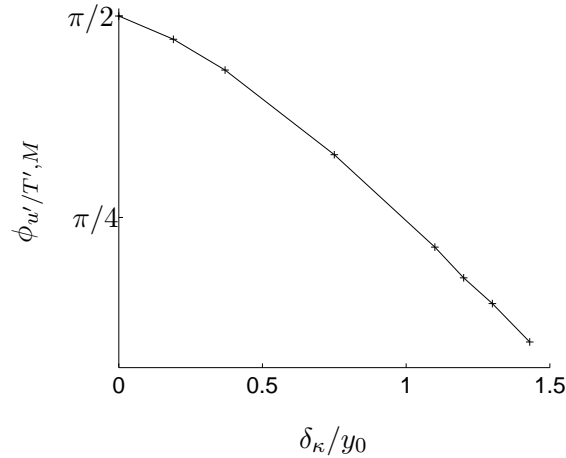


FIG. 5.2.23 – Phase $\phi_{u'/T',M}$ entre la vitesse et la température au point M en fonction du paramètre δ_κ/y_0 .

vitesse et la température lorsque l'on augmente la valeur de δ_κ/y_0 peut s'expliquer en considérant l'équation d'énergie linéarisée. Celle-ci peut en effet s'écrire :

$$\rho_0 c_p i \omega T_1 = i \omega p_1 + K \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}. \quad (5.2.13)$$

L'équation (5.2.13) est équivalente à celle (1.2.5) donnée au chapitre 1 dans laquelle le gradient moyen de température est négligé, ce qui est légitime dans le cas d'une plaque isotherme. On constate que pour une très faible valeur de K , qui conduit à une faible valeur de δ_κ et δ_κ/y_0 , le deuxième terme du second membre est négligeable, laissant T_1 et p_1 en phase. Le déphasage entre

u_1 et T_1 vaut alors $\pi/2$. Au contraire, lorsque la valeur de K augmente, c'est-à-dire quand δ_κ et δ_κ/y_0 sont importants, le deuxième terme du second membre, le terme de diffusion thermique, domine l'unique terme du premier membre. T_1 et p_1 sont alors déphasées de $\pi/2$, et u_1 et T_1 sont en phase. Une démonstration plus rigoureuse est obtenue en considérant directement la solution de l'équation (5.2.13), associée aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} T_1(y=0) &= 0, \\ \left. \frac{\partial T_1}{\partial y} \right|_{y=y_0} &= 0. \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Cette solution est donnée par :

$$T_1 = \frac{p_1}{\rho_0 c_p} \left[1 - \frac{\cosh((1+i)(y-y_0)/\delta_\kappa)}{\cosh((1+i)y_0/\delta_\kappa)} \right]. \quad (5.2.15)$$

L'évolution de la température au point M est obtenue en $y = y_0$, et vaut :

$$T_1(M) = \frac{p_1(M)}{\rho_0 c_p} \left[1 - \frac{1}{\cosh((1+i)y_0/\delta_\kappa)} \right]. \quad (5.2.16)$$

Quand δ_κ/y_0 tend vers zero, le module du $\cosh((1+i)y_0/\delta_\kappa)$ tend vers l'infini, et la solution donne $T_1(M) = p_1(M)/(\rho_0 c_p)$. $T_1(M)$ et $p_1(M)$ sont en phase, comme lors d'une propagation adiabatique. La vitesse u_1 est en avance de phase de $\pi/2$ sur la température T_1 . Si maintenant la distance entre deux plaques du stack est réduite, δ_κ/y_0 tend vers l'infini, et un équivalent du \cosh en 0 donne : $\cosh((1+i)y_0/\delta_\kappa) - 1 \sim (1/2)[(1+i)y_0/\delta_\kappa]^2 \sim i(y_0/\delta_\kappa)^2$. La solution pour la température s'écrit alors :

$$T_1(M) = i \left(\frac{y_0}{\delta_\kappa} \right)^2 \frac{p_1}{\rho_0 c_p}. \quad (5.2.17)$$

Pour une valeur importante de δ_κ/y_0 , soit un espace inter-plaques $2y_0$ très inférieur à l'épaisseur thermique δ_κ , la température est donc en avance de phase de $\pi/2$ par rapport à la pression, et elle est en phase avec la vitesse. Cette analyse est en accord avec le résultat montré à la figure (5.2.23) issu de la simulation numérique. Remarquons aussi que l'expression (5.2.17) varie en $1/\delta_\kappa^2$, c'est-à-dire en $1/K$. Ce résultat n'est pas étonnant : l'augmentation de la conductivité thermique K a en effet tendance à diminuer l'amplitude de la fluctuation de température T_1 . Une dernière remarque peut être faite : dans l'explication de l'effet thermoacoustique, c'est la différence de phase entre la vitesse et la température qui est importante, ou de manière équivalente la différence de phase entre le déplacement acoustique et la température. On constate que la diminution de l'espace inter-plaques modifie radicalement cette différence de phase. Ainsi, pour une propagation isotherme, on est en réalité davantage dans le cas d'une onde progressive (température et vitesse en phase) que dans celui d'une onde stationnaire (température et vitesse déphasées de $\pi/2$), bien que le déphasage de $\pi/2$ entre la vitesse et la pression demeure. Ainsi, l'explication lagrangienne

usuelle exprimée par la figure 1.1.5(a) n'est plus valide en propagation isotherme, lorsque l'espace inter-plaques est petit devant l'épaisseur de couche limite thermique δ_κ . On peut donc s'attendre dans la limite $y_0/\delta_\kappa \rightarrow 0$ à une modification de l'effet thermoacoustique (du flux de chaleur thermoacoustique).

On étudie à présent les échanges d'énergie entre la plaque et le fluide. Pour cela on trace à la figure 5.2.24 le flux d'énergie \dot{h}_{ym}^{plaque} à la plaque pour plusieurs valeurs de δ_κ/y_0 , correspondant de nouveau aux cas 1-2 à 1-8. On constate que la réduction de la hauteur y_0 du canal a plusieurs

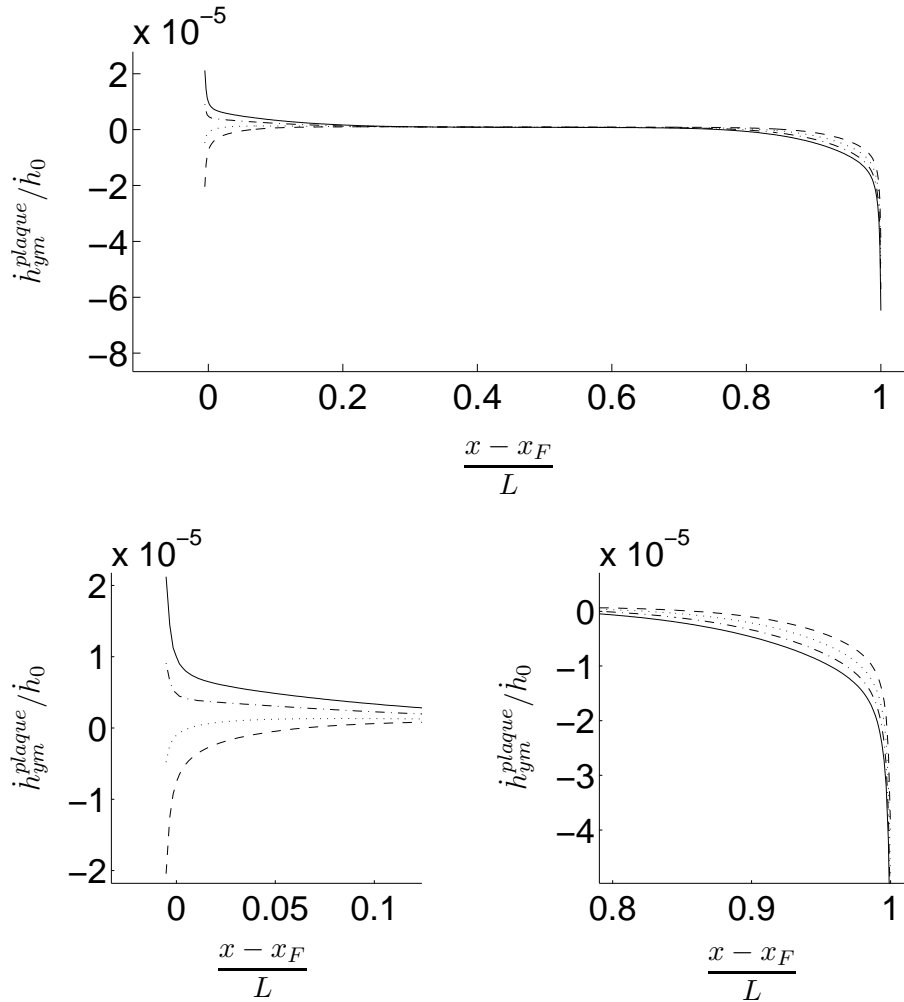


FIG. 5.2.24 – Flux de chaleur moyen au niveau de la plaque pour plusieurs valeurs de δ_κ/y_0 . Origine $x=0$ au bord de la plaque situé du côté de la source. — $\delta_\kappa/y_0=1.1$, — — $\delta_\kappa/y_0=1.2$, \cdots $\delta_\kappa/y_0=1.3$, - - $\delta_\kappa/y_0=1.45$. Les deux figures du bas sont un zoom de la figure du haut à chacune des deux extrémités de la plaque.

effets. D'une part l'intensité des pics diminue. D'autre part l'échange se concentre de plus en plus aux extrémités des plaques. Enfin au-dessus d'une certaine valeur de δ_κ/y_0 , on constate que les deux pics sont tous les deux de signe négatif, ce qui signifie que les deux extrémités de la plaque

s'échauffent : l'effet thermoacoustique a alors en partie disparu. La valeur de δ_κ/y_0 pour laquelle se produit cette transition vaut à peu près 1.3. Cette valeur est en accord avec celle trouvée par Ishikawa *et al.* [65]. Ces auteurs attribuent ce phénomène à la dissipation visqueuse, en remarquant que plus la taille du canal diminue plus la dissipation visqueuse a un poids relatif important. On peut alors pourtant se demander pourquoi l'échauffement n'est pas uniforme sur toute la plaque, dans quel cas la valeur de \dot{h}_{ym}^{plaque} devrait alors être négative au milieu de la plaque également. La figure 5.2.25 montre le flux de chaleur moyen à la plaque pour $\delta_\kappa/y_0 = 1.45$ pour deux exécutions du programme : une prenant en considération la dissipation visqueuse, l'autre la négligeant. On

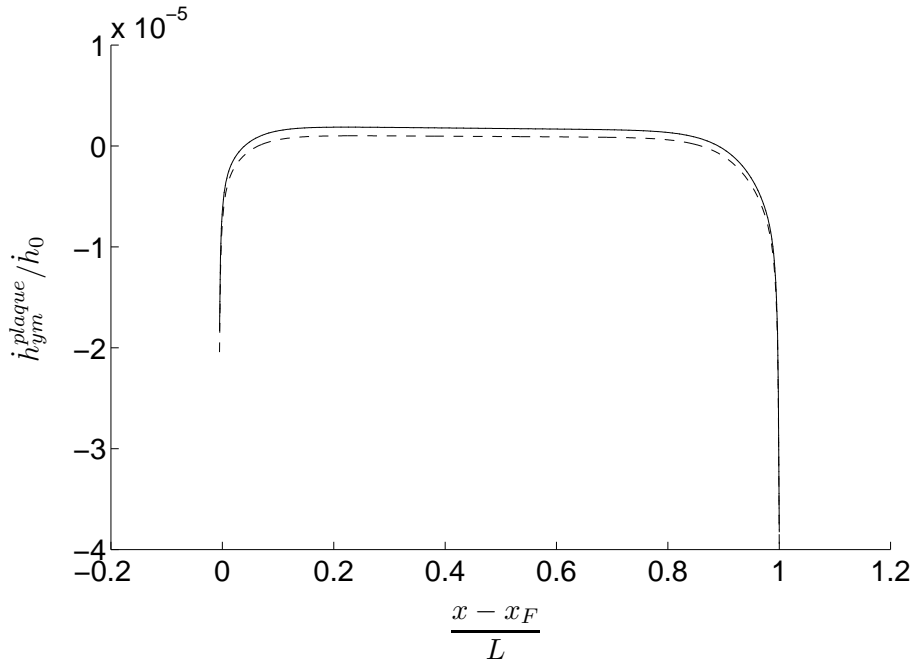


FIG. 5.2.25 – Flux de chaleur moyen au niveau de la plaque pour $\delta_\kappa/y_0=1.45$: -- avec dissipation visqueuse, — sans dissipation visqueuse.

constate un léger décalage vertical entre les deux courbes, ce qui signifie que la dissipation, quand elle est présente, échauffe uniformément toute la plaque. Mais le décalage reste faible et n'est pas responsable du changement de signe de \dot{h}_{ym}^{plaque} au point F de la plaque, qui se produit même en l'absence de dissipation visqueuse. On peut éclaircir le phénomène en considérant l'évolution de la température moyenne quand on diminue la taille du canal. Les figures 5.2.26 et 5.2.27 comparent la température moyenne $T_m(x)$ dans le fluide à $y = \Delta y$ pour $\delta_\kappa/y_0 = 1.1$ et $\delta_\kappa/y_0 = 1.45$. On observe que la différence essentielle réside au niveau du point F de la plaque au niveau duquel on aperçoit pour $\delta_\kappa/y_0 = 1.45$ un petit pic positif de température qui est à associer à la valeur négative de \dot{h}_{ym}^{plaque} en ce point. Malgré cela une zone de température négative existe sur la gauche de la plaque. L'effet thermoacoustique n'a donc pas complètement disparu, et la plaque continue à transporter de l'énergie de l'une de ses extrémités à l'autre. L'inversion du signe de \dot{h}_{ym}^{plaque} au

point F de la plaque quand on diminue la hauteur du canal est donc vraisemblablement un effet de bord, dont la nature exacte n'est pas encore déterminée.

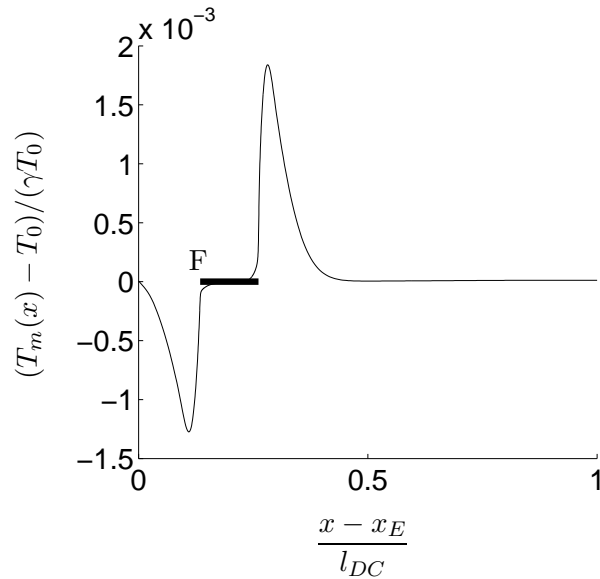


FIG. 5.2.26 – Température moyenne du fluide à $y = \Delta y$ pour $\delta_\kappa/y_0 = 1.1$.

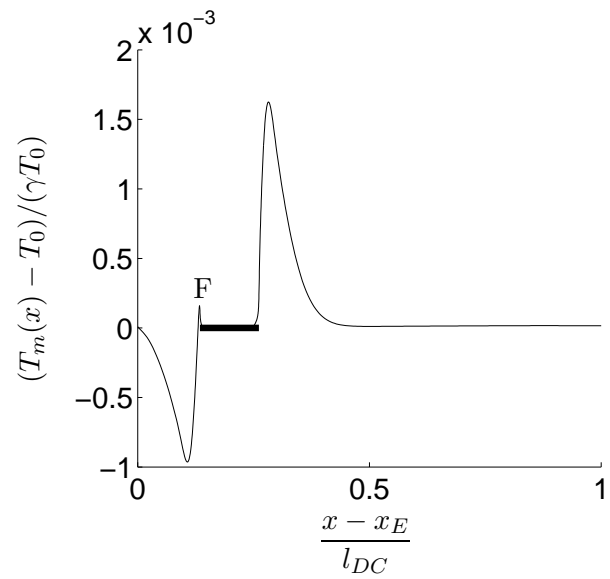


FIG. 5.2.27 – Température moyenne du fluide à Δy pour $\delta_\kappa/y_0 = 1.45$.

5.2.7 Influence du nombre de Mach

Comme il l'a été signalé en introduction, une étude de réfrigérateur dans le domaine non-linéaire est nécessaire. Pour faire une étude non-linéaire complète, il faudrait simuler le résonateur sur toute sa longueur pour tenir compte de la propagation non-linéaire de l'onde acoustique (voir section 1.3.1). En effet Atchley *et al.* [8], et Swift [119], ont montré qu'une partie des non-linéarités est due à la propagation d'une onde acoustique de fort niveau dans le résonateur. Toutefois des déviations par rapport à la théorie linéaire apparaissent dès les faibles puissances dans les expériences de Atchley *et al.* [10], dans celles de Piccolo *et al.* [97], ainsi que dans celles faites au laboratoire [33]. De plus ces déviations sont également obtenues par Worlikar [144] dans sa simulation numérique bien que celle-ci, faite au voisinage du stack, ne prenne pas en compte le résonateur. Ainsi on conserve ici un domaine de simulation restreint n'incluant pas la source. Pour étudier le domaine non-linéaire, on utilise une onde de fort niveau. La force de l'onde sera mesurée par le nombre de Mach acoustique M_a défini dans l'expression (1.1.3) par $M_a = u_A/c_0$. Dans ce qui suit on fera donc varier M_a pour une géométrie fixée du résonateur, et trois valeurs différentes de la longueur L de la plaque seront considérées : $L = \lambda/40$ (cas 1-8 à 1-18), $L = 2\lambda/40$ (cas 1-19 à 1-29), et $L = 3\lambda/40$ (cas 1-30). La valeur du paramètre δ_κ/y_0 est fixée à 0.37. Le distance

d_{EF} entre la surface S_{es} et la plaque est telle qu'au plus haut Mach utilisé elle soit égale à huit fois le déplacement acoustique. En effet on a supposé l'existence d'un champ acoustique sur la surface S_{es} . Cette hypothèse n'est valable que si cette surface est assez loin de la plaque, soit à une distance de quelques déplacements acoustiques.

Fluctuations de température et de vitesse

Un comportement non-linéaire se traduit par l'apparition d'harmoniques dans les signaux temporels mesurés, comme c'est par exemple le cas dans les observations de Atchley *et al.* [8] et Duffourd [40]. On choisit donc en premier lieu de s'intéresser à la forme de la variation temporelle des fluctuations de température et de vitesse, ces quantités étant mesurées au point M du domaine de calcul (voir figure 5.2.1). Les variations sont données aux figures 5.2.28 à 5.2.33, pour une plaque de longueur $L = \lambda/40$ et pour différents nombres de Mach. Pour une onde stationnaire la différence de phase entre la température et la vitesse vaut $\pi/2$. Dans le cas présent cette différence de phase est inférieure à $\pi/2$, même à faible nombre de Mach. Comme on l'a vu à la section précédente, ceci est dû à la présence de la plaque et à la faible épaisseur du canal. Signalons que la différence de phase entre la vitesse et la température qui existe à faible nombre de Mach ne varie pas quand ce dernier est augmenté. Pour faciliter l'explication, des courbes parfaitement sinusoidales suivant les variations de vitesse et de température ont été représentées en pointillés sur ces figures. Aux faibles valeurs du nombre de Mach, $M_a = 0.005$ et $M_a = 0.03$, les deux fluctuations suivent ces courbes sinusoidales (figures 5.2.28 et 5.2.29). Quand le nombre de Mach est plus important (figures 5.2.30 à 5.2.33) la courbe de vitesse est peu modifiée, tandis que la courbe de température subit de forts changements : elle se raidit pour $M_a = 0.04$ (figure 5.2.30) et $M_a = 0.06$ (figure 5.2.31) et des bosses apparaissent pour $M_a \sim 0.08$ (figure 5.2.32). La modification de l'oscillation de température pour $M_a = 0.10$ (figure 5.2.33) est fortement marquée. Pour tester l'influence de la longueur de la plaque on trace en figures 5.2.34 et 5.2.35 les variations temporelles de vitesse et de température pour $M_a = 0.08$ et deux nouvelles valeurs de la longueur de la plaque : $L = 2\lambda/40$ et $L = 3\lambda/40$. Pour $L = 2\lambda/40$ la courbe de température ne présente pas de bosse, elle est simplement raidie ; pour $L = 3\lambda/40$, la courbe reste sinusoidale. Pour la plaque de longueur $L = \lambda/40$ au même nombre de Mach (figure 5.2.32) la courbe de température était fortement déformée. Ainsi plus la plaque est longue, plus le nombre de Mach devra être élevé avant d'observer une modification des fluctuations. La longueur de la plaque, lorsque la position de la plaque dans le domaine de calcul (c'est-à-dire kx_s) est fixée a donc un rôle dans la déformation non-linéaire du profil de l'oscillation de température. Un autre facteur est, pour une longueur de plaque fixée, la position de la plaque dans le résonateur. Les figures 5.2.36 et 5.2.37 représentent les oscillations de vitesse et de température au point M pour $M_a = 0.08$ et deux

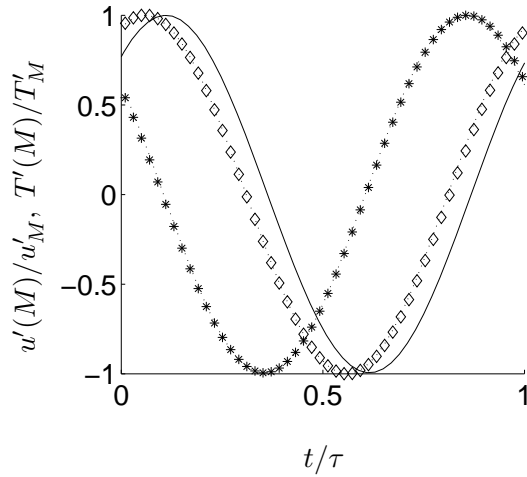


FIG. 5.2.28 – Evolution temporelle de la température $T'(M)$ et de la vitesse $u'(M)$ au point M : * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \cdots sinusoides suivant les courbes de vitesse et de température. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales u'_M et T'_M au point M. $Ma = 0.005$, $L = \lambda/40$, et $kx_S = 2.13$.

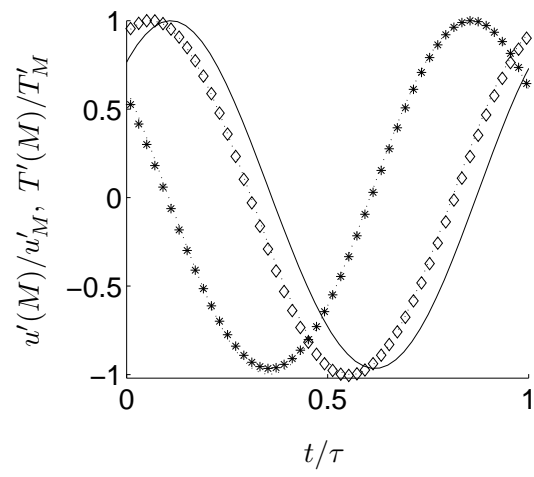


FIG. 5.2.29 – Evolution temporelle de la température $T'(M)$ et de la vitesse $u'(M)$ au point M : * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \cdots sinusoides suivant les courbes de vitesse et de température. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales u'_M et T'_M au point M. $Ma = 0.03$, $L = \lambda/40$, et $kx_S = 2.13$.

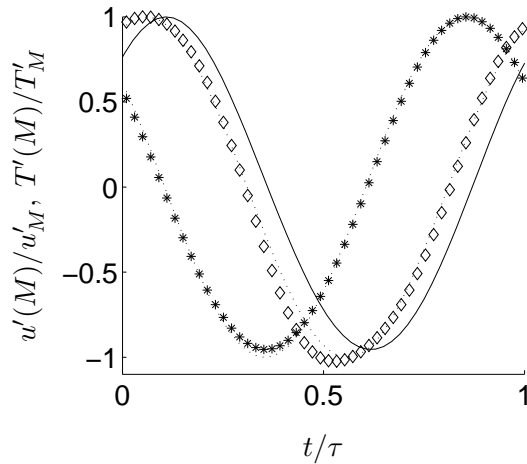


FIG. 5.2.30 – Evolution temporelle de la température $T'(M)$ et de la vitesse $u'(M)$ au point M : * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \cdots sinusoides suivant les courbes de vitesse et de température. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales u'_M et T'_M au point M. $Ma = 0.04$, $L = \lambda/40$, et $kx_S = 2.13$.

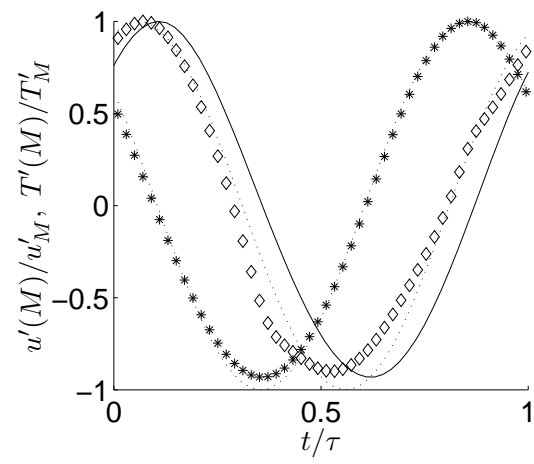


FIG. 5.2.31 – Evolution temporelle de la température $T'(M)$ et de la vitesse $u'(M)$ au point M : * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \cdots sinusoides suivant les courbes de vitesse et de température. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales u'_M et T'_M au point M. $Ma = 0.06$, $L = \lambda/40$, et $kx_S = 2.13$.

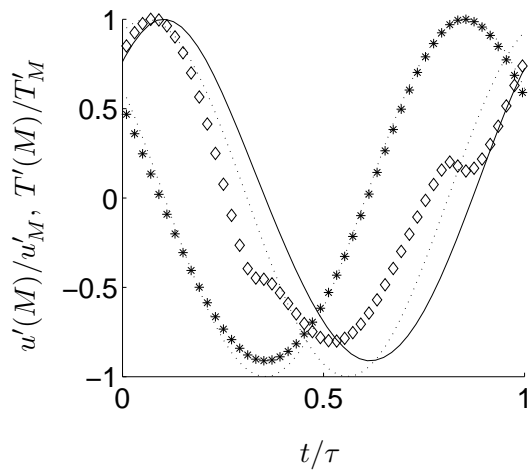


FIG. 5.2.32 – Evolution temporelle de la température $T'(M)$ et de la vitesse $u'(M)$ au point M : * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \cdots sinusoides suivant les courbes de vitesse et de température. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales u'_M et T'_M au point M. $Ma = 0.08$, $L = \lambda/40$, et $kx_S = 2.13$.

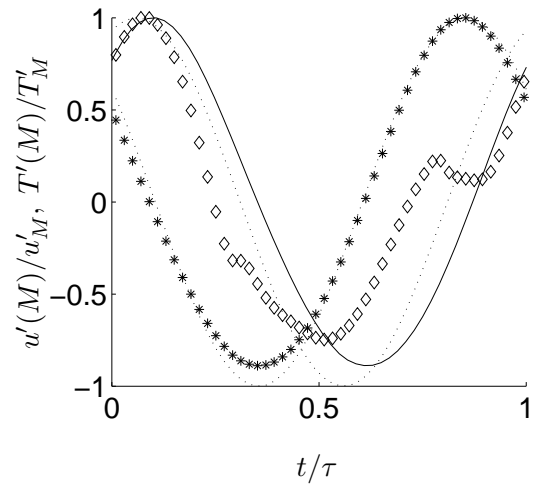


FIG. 5.2.33 – Evolution temporelle de la température $T'(M)$ et de la vitesse $u'(M)$ au point M : * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \cdots sinusoides suivant les courbes de vitesse et de température. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales u'_M et T'_M au point M. $Ma = 0.10$, $L = \lambda/40$, et $kx_S = 2.13$.

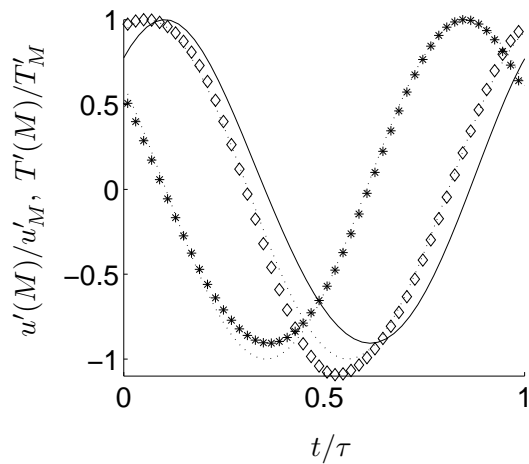


FIG. 5.2.34 – Evolution temporelle de la température $T'(M)$ et de la vitesse $u'(M)$ au point M : * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \cdots sinusoides suivant les courbes de vitesse et de température. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales u'_M et T'_M au point M. $Ma = 0.08$, $L = 2\lambda/40$, et $kx_S = 2.13$.

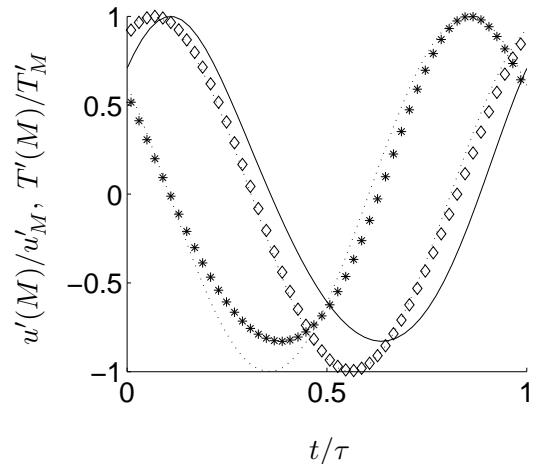


FIG. 5.2.35 – Evolution temporelle de la température $T'(M)$ et de la vitesse $u'(M)$ au point M : * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \cdots sinusoides suivant les courbes de vitesse et de température. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales u'_M et T'_M au point M. $Ma = 0.08$, $L = 3\lambda/40$, et $kx_S = 2.13$.

nouvelles positions de la plaque : $kx_S = 2.35$ et $kx_S = 2.81$. Ces figures sont à comparer à la figure

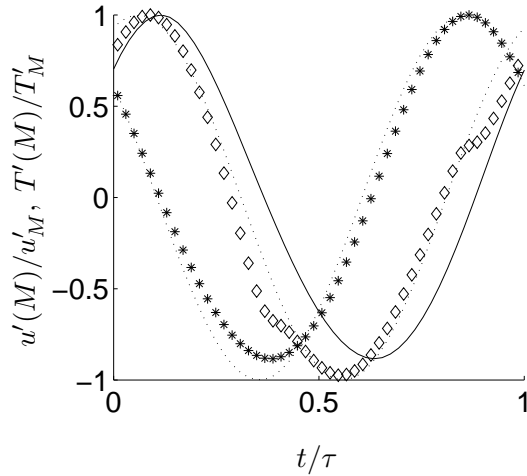


FIG. 5.2.36 – Evolution temporelle de la température $T'(M)$ et de la vitesse $u'(M)$ au point M : * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \cdots sinusoides suivant les courbes de vitesse et de température. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales u'_M et T'_M au point M. $Ma = 0.08$, $L = \lambda/40$, et $kx_S = 2.35$.

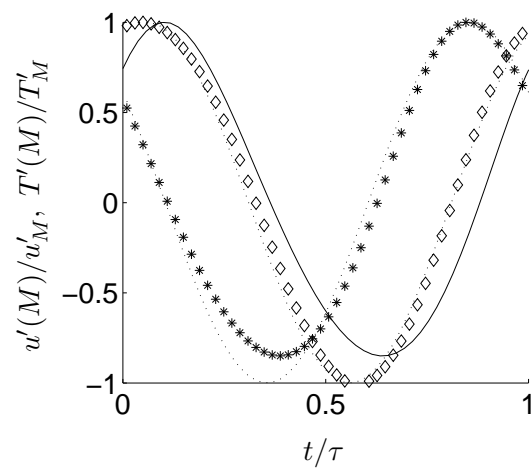


FIG. 5.2.37 – Evolution temporelle de la température $T'(M)$ et de la vitesse $u'(M)$ au point M : * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \cdots sinusoides suivant les courbes de vitesse et de température. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales u'_M et T'_M au point M. $Ma = 0.08$, $L = \lambda/40$ et $kx_S = 2.81$.

5.2.32 pour laquelle $kx_S = 2.13$. On constate que pour $kx_S = 2.13$ (figure 5.2.32) la déformation de la température est importante. Cette déformation diminue pour $kx_S = 2.35$ (figure 5.2.36) et disparaît quasiment pour $kx_S = 2.81$ (figure 5.2.37). Ainsi pour une plaque donnée et un nombre de Mach fixé, il est parfois possible de diminuer puis de supprimer la déformation de température en rapprochant la plaque du fond du résonateur, loin du ventre de vitesse, et proche du ventre de pression. L'ensemble des observations faites précédemment permet d'attribuer les non-linéarités de température au terme convectif non-linéaire $\mathbf{u} \cdot \nabla T$ de l'équation d'énergie. Gusev *et al.* [56] ont en effet montré que ce terme est responsable d'une génération d'harmoniques pour la température aux bords de la plaque, et ce à une distance des bords de deux amplitudes du déplacement acoustique (cette amplitude est notée d_a). On met ici en évidence le fait que lorsque la plaque est suffisamment courte, c'est-à-dire lorsque sa longueur est de l'ordre de grandeur de quatre déplacements acoustiques, soit :

$$L \sim 4d_a, \quad (5.2.18)$$

la zone de génération d'harmoniques atteint le centre de la plaque, et donc le point M. Or l'amplitude du déplacement acoustique est liée à la fois au nombre de Mach Ma et à la position axiale x_S du stack dans le résonateur. En effet, en rappelant que $d_a = u_1/\omega$ et en utilisant

l'expression (1.1.1), on obtient :

$$d_a = M_a \frac{\lambda}{2\pi} \sin(kx_S). \quad (5.2.19)$$

Ainsi, en utilisant les expressions (5.2.18) et (5.2.19), on déduit que les non-linéarités de température sont susceptibles d'apparaître au point M quand

$$M_a \frac{\lambda}{2\pi} \sin(kx_S) \sim L/4. \quad (5.2.20)$$

Ceci a tendance à se produire lorsqu'on augmente le nombre de Mach et lorsque $kx_S \rightarrow \pi/2$ (c'est-à-dire lorsque la plaque est rapprochée du ventre de vitesse). De plus, pour kx_S fixé, l'égalité sera vérifiée à un nombre de Mach d'autant moins important que la valeur de L sera faible. Ces attentes sont en accord avec les observations précédentes. De plus on vérifie numériquement que les valeurs des paramètres permettant d'observer les non-linéarités de températures au point M vérifient bien (5.2.18). Pour terminer ce paragraphe, remarquons que seules les oscillations de température et de vitesse au point M ont été montrées jusqu'ici. Un autre point intéressant dans le domaine de calcul est le point R (voir figure 5.2.1), qui peut être considéré comme étant au cœur du résonateur, loin du stack. En ce point, à tous les nombre de Mach considérés et pour toutes les plaques, toutes les oscillations restent sinusoïdales. La figure donne un exemple des variations au point R pour un nombre de Mach élevé, $M_a = 0.08$. Cette figure est à comparer à la figure

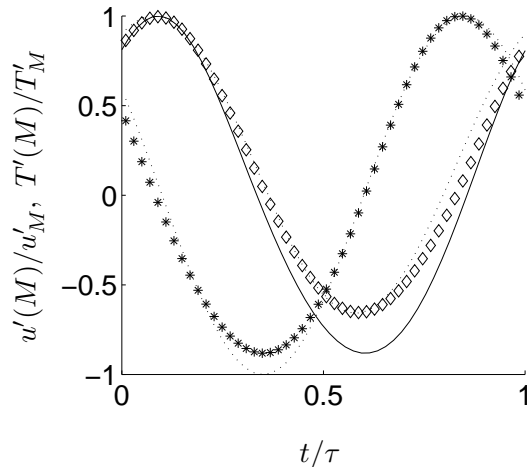


FIG. 5.2.38 – Evolution temporelle de la température $T'(R)$ et de la vitesse $u'(R)$ au point R : * vitesse, — vitesse déphasée de $\pi/2$, \diamond température, \cdots sinusoides suivant les courbes de vitesse et de température. Fluctuations adimensionnalisées par leurs valeurs maximales u'_R et T'_R au point R. $M_a = 0.08$, $L = \lambda/40$, et $kx_S = 2.13$.

équivalente 5.2.32 au point M, pour laquelle la variation de la température est déformée. En R (figure 5.2.38), la température ne présente pas de telle déformation. La vitesse et la température ne sont certes pas tout à fait des sinusoides, mais cet effet est dû à la propagation non-linéaire

(qui est réduite autant que possible par la méthode utilisée ici, voir chapitre 4) de l'onde dans le domaine, qui affecte aussi bien la vitesse que la température. Cette déformation est à rapprocher de celle observée à la figure 4.2.7, obtenue pour un résonateur sans plaques. Remarquons pour finir que l'oscillation de température n'est pas centrée en zero, elle a une valeur moyenne non nulle positive, car au point R la température moyenne est chaude.

Les observations sur la forme des variations temporelles ont une incidence sur l'amplitude des fluctuations de température. On étudie donc l'amplitude de la température T'_M au point M en fonction du nombre de Mach. Le résultat est fourni à la figure 5.2.39. La plaque a une position fixée mais trois valeurs de sa longueur $L = \lambda/40$, $L = 2\lambda/40$, et $L = 3\lambda/40$ sont à nouveau considérées. Les variations observées sur cette figure sont cohérentes avec les conclusions du pa-

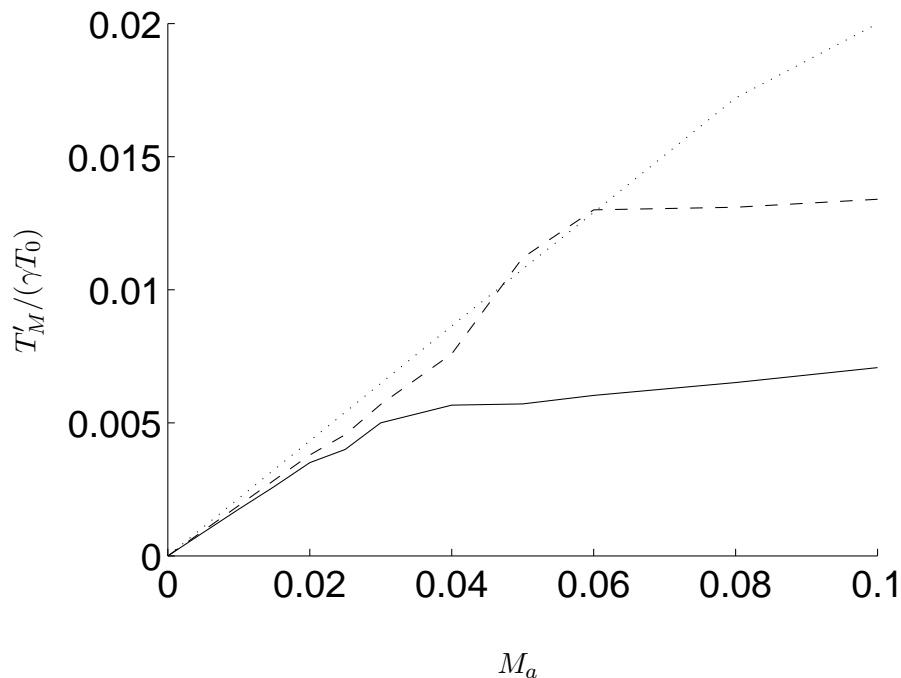


FIG. 5.2.39 – Amplitude de la fluctuation de température T'_M au point M en fonction du nombre de Mach M_a pour trois valeurs de la longueur de la plaque : — $L = \lambda/40$, -- $L = 2\lambda/40$, \cdots $L = 3\lambda/40$.

ragraphe précédent. En effet, considérons d'abord la plaque $L = \lambda/40$. Aux faibles nombres de Mach ($M_a \leq 0.02$) l'amplitude de température T'_M est proportionnelle à M_a . Cette proportionnalité est attendue en régime linéaire et cesse progressivement d'être valable pour M_a variant entre 0.02 et 0.04. Au-delà on observe une quasi saturation de l'amplitude de température. Le Mach de saturation pour $L = \lambda/40$ vaut environ $M_{sat} \sim 0.04$. Cette valeur est cohérente avec les observations faites sur les variations temporelles de la fluctuation de température. C'est en effet

pour cette valeur du nombre de Mach que l'on commence à avoir une déformation non-linéaire de la fluctuation. Comme on l'a vu la déformation non-linéaire est d'autant moins importante que la plaque est longue. Ainsi la zone linéaire est plus grande pour la plaque de longueur $L = 2\lambda/40$ et le Mach de saturation plus élevé, de l'ordre de 0.06. Enfin, pour la plaque de longueur $L = 3\lambda/40$, aucune saturation n'est visible (pour $M_a < 0.1$), ce qui est de nouveau conforme aux observations du paragraphe précédent. Notons que si du point de vue de la suppression des non-linéarités, une plaque longue est avantageuse, elle ne le sera pas du point de vue de la dissipation d'énergie.

En conclusion on constate un changement de comportement des oscillations quand on augmente le nombre de Mach. Ce sont avant tout les variations de température qui sont affectées. Ces dernières subissent nettement une déformation non-linéaire, responsable d'une saturation de leur amplitude. On rappelle qu'étant donné les méthodes utilisées dans ce calcul, la déformation n'est pas due au résonateur, qui a habituellement lui aussi un comportement non-linéaire. C'est la raison pour laquelle les non-linéarités ne sont pas présentes dans le cœur du domaine de calcul (point R), mais seulement au-dessus du stack (point M). La déformation non-linéaire pour la température est due au terme $\mathbf{u} \cdot \nabla T$ dans l'équation d'énergie. Ce terme est important au-dessus de la plaque. Au contraire le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ dans l'équation de la quantité de mouvement reste faible, et l'oscillation de la vitesse ne connaît pas de déformation non-linéaire. Toutefois la vitesse joue au travers du déplacement acoustique $d_a = u_1/\omega$ un rôle important sur le renforcement de la déformation de température quand on se rapproche du ventre de vitesse, et quand on diminue la longueur de la plaque. La déformation de l'oscillation de température a une influence sur le flux moyen d'énergie transporté par la plaque qui sera précisée à la fin de cette section.

Génération d'harmoniques de température aux bords de la plaque

Dans le paragraphe ci-dessus on a observé une déformation non-linéaire de la fluctuation de température au point M. Dans Gusev *et al.* [56], une analyse théorique montre que les bords F et C de la plaque sont un lieu privilégié de la formation d'harmoniques pour la température¹. Cette génération est due au passage d'une zone adiabatique à une zone isotherme au bord de la plaque. On se propose de vérifier numériquement ce résultat en comparant les fluctuations temporelles de température aux points F situé au bord de de la plaque et M situé au centre du canal pour différents nombres de Mach. Ces fluctuations sont montrées aux figures 5.2.40 et 5.2.41. On constate que pour $M_a = 0.005$ les variations aux points F et M sont toutes les deux sinusoïdales. Pour $M_a = 0.01$ la variation au point M reste sinusoïdale. La variation au point F en

¹L'origine de la génération d'harmoniques, quand elle existe, n'est toutefois pas différente au point M et aux points F et C. C'est le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla T$ dans l'équation d'énergie qui en est responsable.

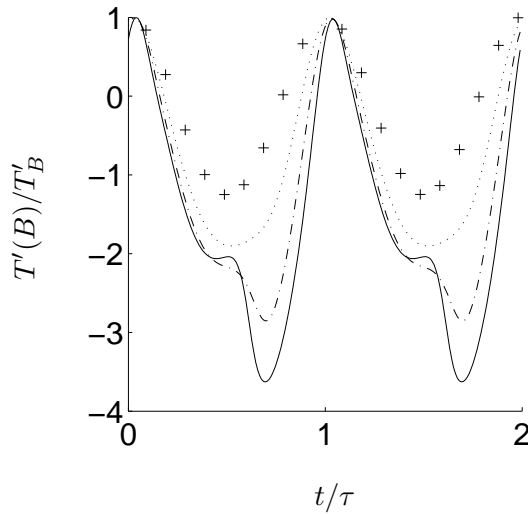


FIG. 5.2.40 – Fluctuation de température $T'(F)$ au point F situé au bord de la plaque (côté froid), adimensionnée par sa valeur maximale T'_F , pour différents nombres de Mach : + $M_a = 0.005$, \cdots $M_a = 0.01$, $-\cdot-$ $M_a = 0.04$, $—$ $M_a = 0.08$.

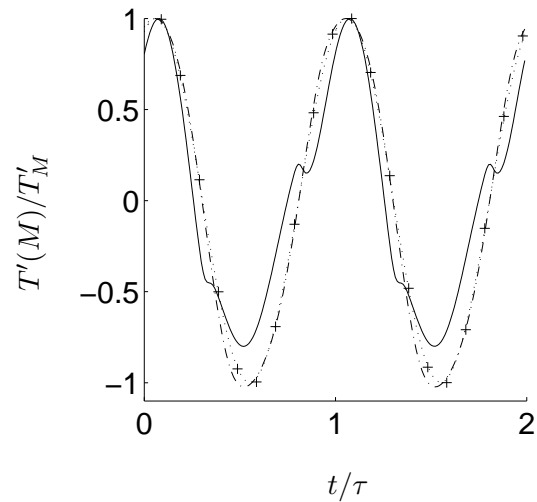


FIG. 5.2.41 – Fluctuation de température $T'(M)$ au point M, adimensionnée par sa valeur maximale T'_M , pour différents nombres de Mach : + $M_a = 0.005$, \cdots $M_a = 0.01$, $-\cdot-$ $M_a = 0.04$, $—$ $M_a = 0.08$.

revanche prend une forme en U. Pour des nombres de Mach supérieurs la déformation non-linéaire se poursuit pour les deux fluctuations, mais bien plus vite au point F qu'au point M. Ainsi le point F semble bien être un lieu de génération d'harmoniques pour la température, et ce à des nombres de Mach aussi faibles que 1%.

Flux moyens de chaleur

L'intérêt d'un réfrigérateur est dans la puissance qu'il peut extraire de la source froide, qui est liée au flux de chaleur thermoacoustique que peut pomper la plaque. La théorie linéaire prévoit que ce flux est proportionnel à M_a^2 . Ainsi, pour obtenir les températures les plus basses possibles on cherche à avoir des systèmes fonctionnant à fort nombre de Mach (ou drive ratio), en espérant que la puissance de réfrigération sera proportionnelle à M_a^2 . Aux fortes valeurs de M_a , on sort pourtant du domaine d'application de la théorie linéaire. Dans ce paragraphe on cherche donc à comprendre l'effet du nombre de Mach sur le transport de chaleur thermoacoustique. On s'intéresse à la fois au flux de chaleur dans la direction y au niveau de la plaque et au flux de chaleur dans la direction x au-dessus de la plaque.

Considérons d'abord le flux moyen d'énergie dans la direction y et à la plaque, \dot{h}_{ym}^{plaque} , défini par la formule (5.2.10). On rappelle que ce flux est le flux d'énergie passant de la plaque au fluide

et qu'il est dû à la conduction de la chaleur le long du gradient moyen de température. Une forme typique a été montrée à la figure 5.2.13. La variation de $\dot{h}_{ym}^{plaque}(x)$ le long de la plaque est donnée à la figure 5.2.42 pour différents nombres de Mach. La plaque a une longueur $L = 2\lambda/40$ et les cas considérés appartiennent à la série 1-20 à 1-30. On constate d'abord que le flux de chaleur en

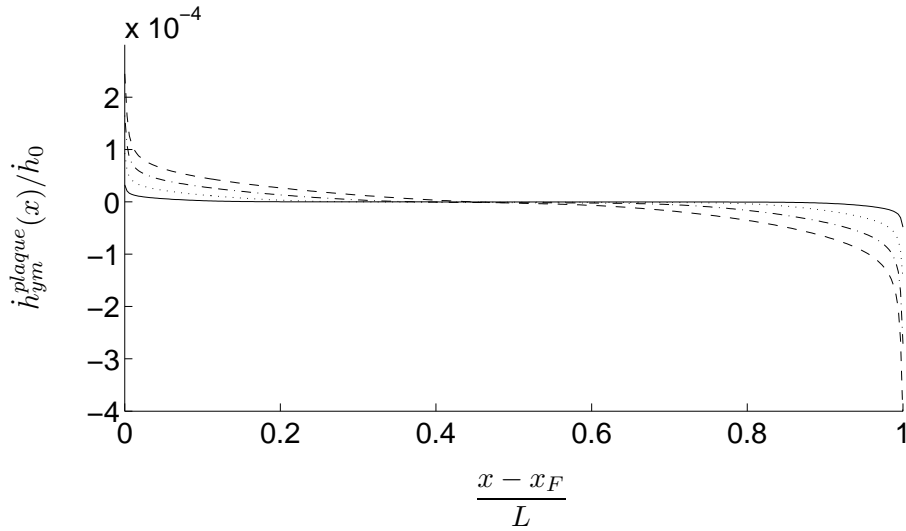


FIG. 5.2.42 – Flux de chaleur moyen à la plaque pour plusieurs nombres de Mach : — $M_a = 0.02$, \cdots $M_a = 0.04$, — · — $M_a = 0.06$, — — $M_a = 0.08$. Cas faisant partie de la série 1-20 à 1-30.

chacune des extrémités de la plaque augmente avec le nombre de Mach. On montre que les valeurs $\dot{h}_{ym}^{plaque}(x_F)/\dot{h}_0$ et $\dot{h}_{ym}^{plaque}(x_C)/\dot{h}_0$ aux extrémités de la plaque présentent une dépendance en M_a^2 . Dans Cao *et al.* [27] la dépendance est en M_a . Cette différence sera étudiée à la section 5.2.8 suivante. Par ailleurs le flux est d'autant plus localisé en bout de plaque que le Mach est petit. Comme l'ont montré Cao *et al.* [27], la zone d'échange est en effet proportionnelle au déplacement acoustique et donc au nombre de Mach. Pour le confirmer, le flux de chaleur \dot{h}_{ym}^{plaque} est tracé à la figure 5.2.43 à proximité de l'extrémité chaude de la plaque. L'abscisse a été normalisée par l'amplitude du déplacement acoustique $d_a(M)$ calculée au point M. On observe que la zone d'échange vaut de l'ordre de 1.5 fois cette amplitude $d_a(M)$. Le déplacement acoustique apparaît donc bien comme la distance importante de l'échange de chaleur entre la plaque et le fluide. L'influence du nombre de Mach sur le flux de chaleur en y n'est pas étudiée plus précisément ici ; elle sera étudiée plus profondément à la section 5.2.8 suivante, consacrée à des comparaisons entre la présente simulation et celle faite par Cao *et al.* [27].

On se tourne maintenant vers le flux d'énergie moyen dans la direction x . Considérons d'abord le flux local d'énergie $\dot{h}_{xm}(y)$. Ce flux est donné par l'expression (5.2.6), qui se réduit à (5.2.8) dans le cadre de la théorie linéaire. Dans le cas d'une plaque isotherme, le gradient de température

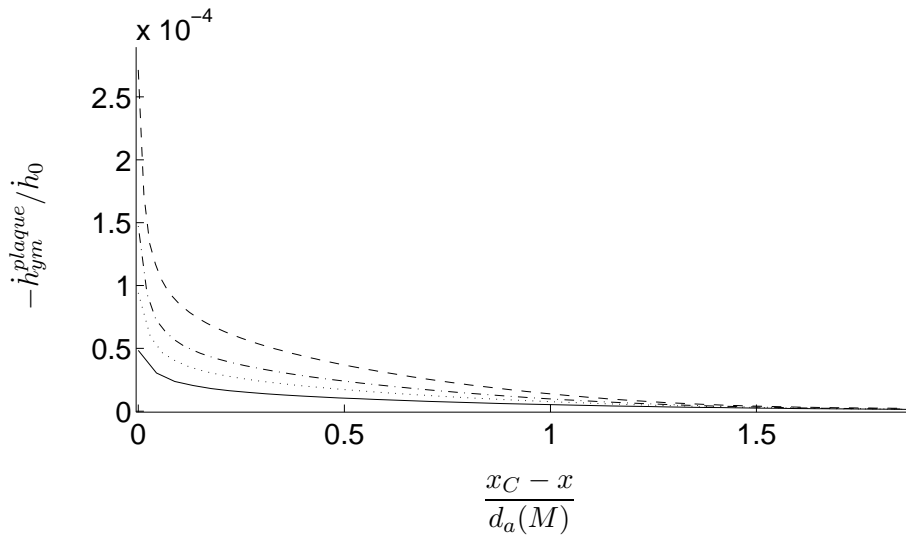


FIG. 5.2.43 – Inverse du flux de chaleur moyen à la plaque du côté de l'extrémité chaude pour plusieurs nombres de Mach. — $M_a = 0.02$, \cdots $M_a = 0.04$, $-\cdot-$ $M_a = 0.06$, $--$ $M_a = 0.08$. L'abscisse a été adimensionnée par le déplacement acoustique $d_a(M)$ calculé au point M. Cas faisant partie de la série 1-20 à 1-30.

moyenne est de plus négligeable, et le flux s'exprime simplement par (5.2.12). Pour plusieurs cas de la série 1-9 à 1-19, correspondant à plusieurs nombres de Mach et à une plaque de longueur $L = \lambda/40$, $\dot{h}_{xm}(y)$ est calculé dans la section SM et représenté à la figure 5.2.44. La même quan-

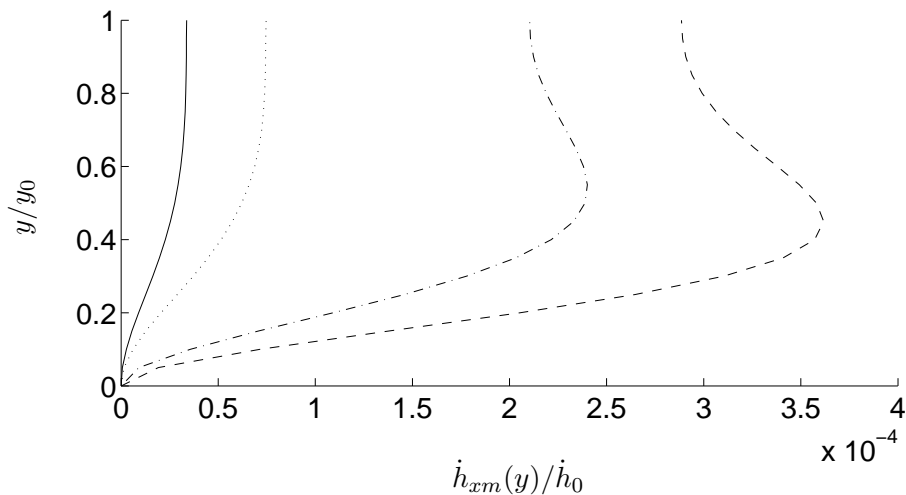


FIG. 5.2.44 – Flux de chaleur moyen $\dot{h}_{xm}(y)$ dans la direction x et dans la section SM au-dessus de la plaque pour plusieurs valeurs du nombre de Mach : — $M_a = 0.02$, \cdots $M_a = 0.03$, $-\cdot-$ $M_a = 0.06$, $--$ $M_a = 0.08$. $L = \lambda/40$. Cas faisant partie de la série 1-9 à 1-19.

tité, mais adimensionnée par sa valeur maximale dans la section SM, est représentée à la figure 5.2.45. D'après l'expression (5.2.12) la forme des profils dans une section au-dessus de la plaque ne dépend que du rapport δ_κ / y_0 qui est ici fixé. Ainsi à la figure 5.2.44 les profils montrés de-

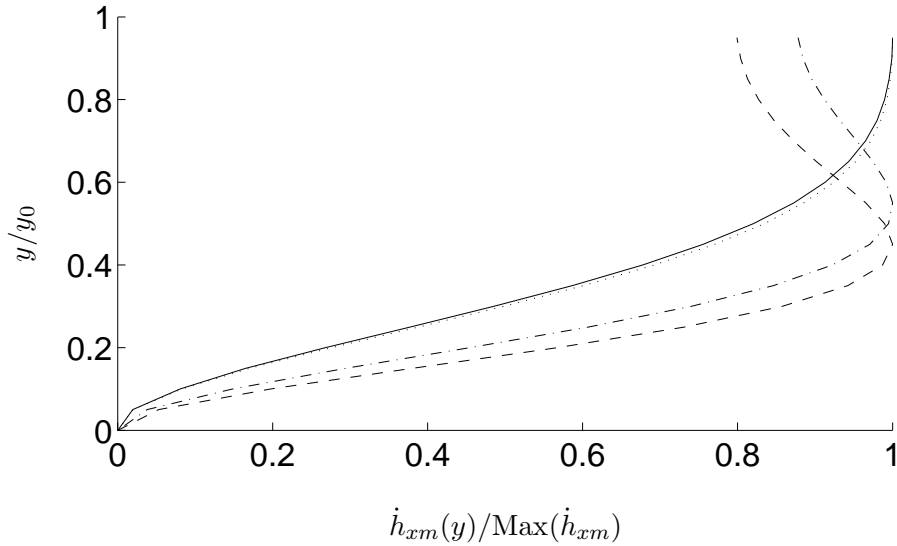


FIG. 5.2.45 – Flux de chaleur moyen $\dot{h}_{xm}(y)$ dans la direction x et dans la section SM, adimensionné par sa valeur maximale dans cette section : — $M_a = 0.02$, \cdots $M_a = 0.03$, —·— $M_a = 0.06$, — — $M_a = 0.08$. $L = \lambda/40$. Cas faisant partie de la série 1-9 à 1-19.

vraient avoir une forme unique. Pour les valeurs $M_a = 0.02$ et $M_a = 0.03$ on constate qu'il en est bien ainsi, les deux courbes différant par leur amplitude (figure 5.2.44), mais pratiquement pas par leur forme (figure 5.2.45). En revanche pour $M_a = 0.06$ et $M_a = 0.08$, la forme est altérée. En particulier le maximum n'est plus situé en $y/y_0 = 1$. L'expression (5.2.12) n'est donc plus vérifiée à des nombres de Mach importants. Or cette expression s'obtient en prenant la moyenne temporelle $\langle u'T' \rangle_t$, u' étant donné par (5.2.1) et T' par (5.2.2). Une inspection des profils de vitesse et de température calculés dans la section SM montre que ce sont en fait ces derniers qui ne correspondent pas à leur forme théorique (5.2.2). Ainsi, à la perturbation de l'évolution temporelle de T' au-dessus de la plaque déjà observée, s'ajoute une perturbation 'spatiale' du profil.

Considérons maintenant le flux total d'énergie transportée dans la direction x , \dot{H}_{xm} , qui représente la puissance pompée thermoacoustiquement par la plaque. \dot{H}_{xm} s'obtient en calculant l'intégrale sur la section SM du flux moyen d'énergie local $\dot{h}_{xm}(y)$:

$$\dot{H}_{xm} = \int_0^{y_0} \dot{h}_{xm}(y) dy \quad (5.2.21)$$

On rappelle que l'unité de \dot{h}_{xm} est le Wm^{-2} . L'unité de \dot{H}_{xm} est donc le Wm^{-1} , le m^{-1} indiquant que le flux (la puissance) thermoacoustique passant au-dessus de la plaque s'exprime par unité d'envergure de la plaque dans la direction z perpendiculaire au plan de la feuille. \dot{H}_{xm} peut être

adimensionnalisé par la grandeur \dot{H}_0 définie par :

$$\dot{H}_0 = \rho_0 c_0^3 \delta_\nu = \dot{h}_0 \delta_\nu, \quad (5.2.22)$$

où \dot{h}_0 est donné par l'expression (5.2.5). La quantité \dot{H}_{xm} correspond à celle notée \dot{H}_m/Π par la théorie linéaire (voir expressions (1.2.38) et (1.2.48)).

L'évolution de \dot{H}_{xm} en fonction du nombre de Mach pour la plaque de longueur $L = \lambda/40$ (cas 1-9 à 1-19) est représentée à la figure 5.2.46. Comme on l'a souligné précédemment, la théorie

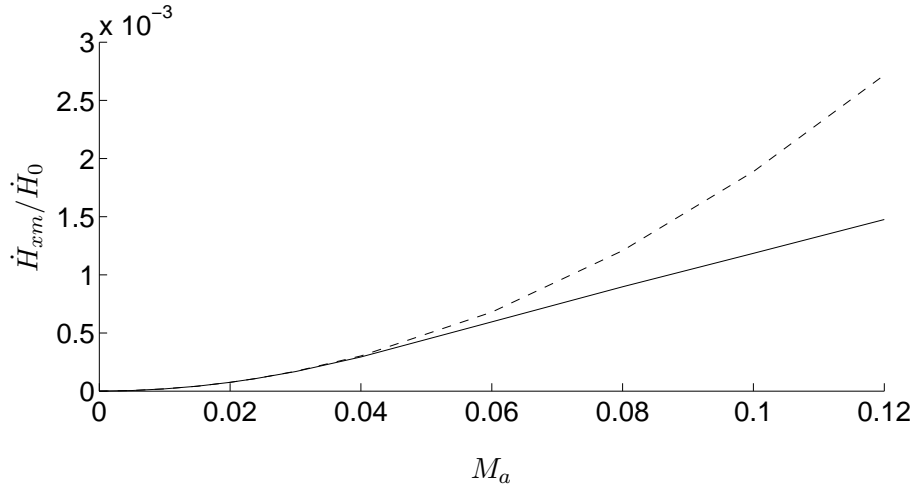


FIG. 5.2.46 – Flux de chaleur moyen total dans la direction x au-dessus de la plaque (section SM) en fonction du nombre de Mach : — \dot{H}_{xm} , -- courbe en M_a^2 . $L = \lambda/40$. $kx_s = 2.13$.

linéaire prévoit pour \dot{H}_{xm} une évolution en M_a^2 (voir par exemple (1.2.48)). Sur la figure est donc tracée une courbe en M_a^2 qui suit l'évolution de \dot{H}_{xm} aux faibles nombres de Mach. Il apparaît que l'évolution de \dot{H}_{xm} suit la loi en M_a^2 jusqu'à $M_a \sim 0.04$. Au-dessus de cette valeur, la courbe \dot{H}_{xm} est proportionnelle à M_a . Cette observation est une conséquence directe de la quasi saturation de la valeur de l'amplitude de l'oscillation de température observée en figure 5.2.39. En effet on a :

$$\dot{H}_{xm} \sim \int_0^H \langle u'T' \rangle dy \sim u'_M T'_M, \quad (5.2.23)$$

u'_M et T'_M sont les amplitudes maximales de la vitesse et de la température. u'_M est toujours proportionnel à M_a . A faible nombre de Mach, c'est-à-dire pour $M_a \leq 0.04$, T'_M est proportionnelle à M_a (voir figure (5.2.39)). Par conséquent \dot{H}_{xm} est proportionnel à M_a^2 aux faibles nombres de Mach d'après (5.2.23). Pour des nombres de Mach plus élevés, $M_a \geq 0.04$, T'_M sature, il ne reste donc pour \dot{H}_{xm} qu'une dépendance en M_a due à la vitesse. Ainsi le changement d'une loi en M_a^2 à une loi en M_a pour la puissance thermoacoustique pompée par la plaque lorsque le nombre de Mach est augmenté provient du comportement non-linéaire de la température et de la quasi-saturation de son amplitude T'_M .

Comme on l'a vu, plusieurs facteurs influencent le comportement non-linéaire de la température. En particulier plus la plaque est courte, et plus elle est rapprochée du ventre de vitesse, plus ce comportement sera marqué et conduira à la quasi-saturation de l'amplitude. Ces observations se retrouvent pour la puissance. Pour une plaque de longueur $L = 2\lambda/40$ la courbe de \dot{H}_{xm} suit une courbe en M_a^2 jusqu'à un nombre de Mach de 0.06 (contre 0.04 pour la plaque de longueur $L = \lambda/40$). Pour une plaque de longueur $L = 3\lambda/40$ la puissance suit pour tous les nombres de Mach utilisés une loi en M_a^2 . Si l'on déplace la plaque de longueur $L = \lambda/40$ de sa position $kx_s = 2.13$ (figure (5.2.46)) à une position $kx_s = 2.43$ plus éloignée du ventre de vitesse, les non-linéarités de la température sont défavorisées, et le flux de chaleur total au-dessus de la plaque suit une loi en M_a^2 jusqu'à un Mach 0.06 plus élevé, comme le montre la figure 5.2.47. Elle est obtenue avec les cas 1-42 à 1-52.

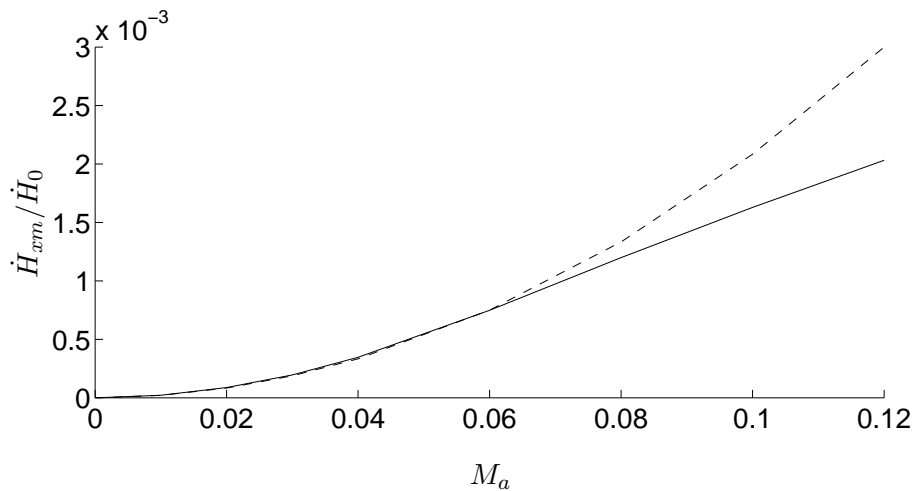


FIG. 5.2.47 – Flux de chaleur moyen total dans la direction x au-dessus de la plaque (section SM) en fonction du nombre de Mach : — \dot{H}_{xm} , -- courbe en M_a^2 . $L = \lambda/40$. $kx_s = 2.43$.

En conclusion, cette section nous a permis d'étudier l'influence du nombre de Mach sur l'évolution du flux de chaleur. Plusieurs conclusions ont été tirées. La quantité de chaleur transportée le long de la plaque dans la direction x suit une loi en M_a^2 à faible nombre de Mach, puis une loi en M_a aux nombres de Mach plus élevés. La transition d'une loi à l'autre a lieu pour un Mach qui correspond à celui à partir duquel l'oscillation de température au-dessus de la plaque devient non-linéaire et sature en amplitude. Cette oscillation non-linéaire se traduit par une génération d'harmoniques dans le signal temporel et une perturbation du profil dans une section perpendiculaire à la plaque. On insiste de nouveau sur le fait que ces non-linéarités ne sont pas générées par le résonateur acoustique du fait de la méthode numérique utilisée. Ainsi elles n'apparaissent qu'au-dessus de la plaque. Quand elle apparaissent elles ont un rôle néfaste puisqu'elles diminuent la puissance pompée par la plaque. De plus étant dues à la plaque et non

au résonateur, elles sont susceptibles d'apparaître même lorsque le résonateur est anharmonique (voir section 1.3.1) et ne génère lui-même aucune non-linéarité. Dans le cas d'une plaque sans échangeurs de chaleur, l'intégralité de l'énergie pompée par la plaque sans la direction x est en régime stationnaire retirée (dans la direction y) d'une extrémité de la plaque et déposée à l'autre extrémité. On a vu qu'alors la longueur de la zone concernée par l'échange d'énergie entre la plaque et le fluide est de l'ordre du déplacement acoustique.

5.2.8 Comparaison avec la simulation de Cao

Dans la section précédente l'évolution générale du flux de chaleur à la plaque \dot{h}_{ym}^{plaque} en fonction du nombre de Mach M_a a été discutée. La première simulation faite en thermoacoustique par Cao *et al.* [27] s'est déjà intéressée à cette évolution. Une comparaison est maintenant faite entre leurs résultats et ceux fournis par la présente simulation. Comme on l'a déjà souligné, si la théorie linéaire fournit une expression du flux d'énergie le long de la plaque dans la direction x elle ne précise pas la forme de ce flux quand il pénètre dans la plaque. La comparaison faite ici est donc intéressante puisque le travail de Cao traite justement du flux dans la direction y .

La géométrie adoptée dans cette section est la même que celle de Cao, et plusieurs nombres de Mach sont testés, de $M_a = 0.01$ à $M_a = 0.05$. Les cas étudiés sont numérotés 1-53 à 1-57. Un des paramètres manquant dans la simulation de Cao est la fréquence. Ainsi la simulation est ici faite pour trois fréquences différentes : 20 kHz (la fréquence généralement adoptée dans ce travail), 2kHz, et 200 Hz. On rappelle que le temps de calcul pour une résolution identique de la couche limite est inversement proportionnel à la fréquence. Un des résultats importants de Cao est qu'en adimensionnalisant le flux de chaleur à la plaque \dot{h}_{ym}^{plaque} par le flux $\dot{h}_{ym}^{norm} = \dot{H}_{xm}/d_a$, et l'abscisse x par le déplacement acoustique d_a , la courbe $\dot{h}_{ym}^{plaque}/\dot{h}_{ym}^{norm} = f(x/d_a)$ ne dépend que très légèrement du nombre de Mach. Cao utilise pour d_a le déplacement acoustique moyen au-dessus de la plaque, ce dernier étant approximativement égal à celui qui existe dans leur onde stationnaire en l'absence de plaque. Dans notre cas on prendra donc $d_a = M_a(c_0/\omega)\sin(kx_s)$ où x_s est la position de la plaque. De plus Cao utilise pour \dot{H}_{xm} une formule issue de la théorie linéaire. Cette formule donne des résultats peu différents de ceux qui ont été obtenus numériquement par la présente simulation. Ainsi dans les résultats présentés ici, la valeur de \dot{H}_{xm} pour le calcul de \dot{h}_{ym}^{norm} est issue du calcul, plutôt que de la formule de Cao. Plus précisément \dot{H}_{xm} est obtenu dans le calcul en utilisant l'expression (5.2.21).

Les courbes $\dot{h}_{ym}^{plaque}/\dot{h}_{ym}^{norm} = f(x/d_a)$ au niveau du bord froid de la plaque sont données à la figure 5.2.48 pour $f=20\text{kHz}$, à la figure 5.2.49 pour $f=2\text{kHz}$, et à la figure 5.2.50 pour $f=200\text{Hz}$. Cinq nombres de Mach sont testés. Dans Cao, les courbes obtenues aux différents nombres de Mach sont très proches les unes des autres, sauf celle pour $M_a = 0.01$ qui est située un peu sous les autres.

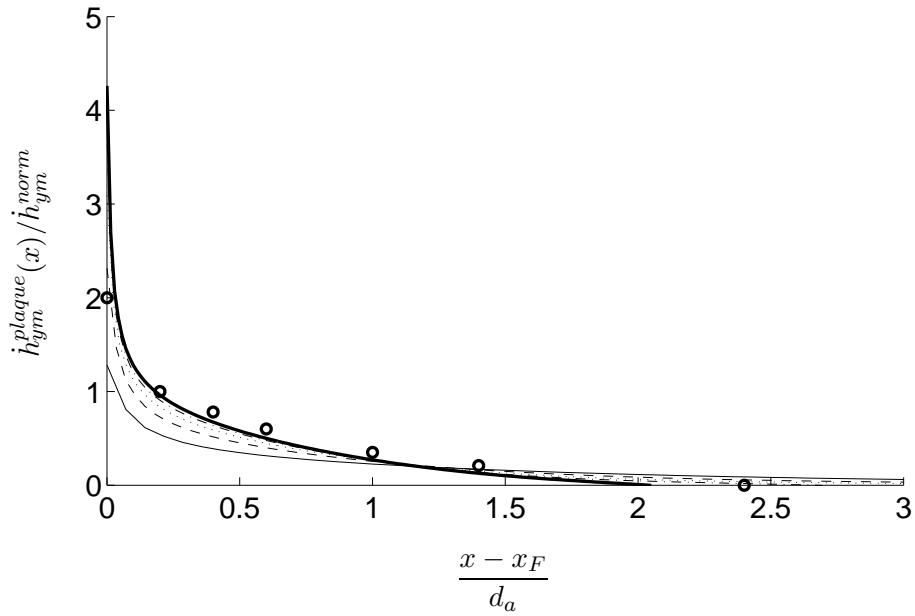


FIG. 5.2.48 – Flux de chaleur moyen au niveau du bord froid de la plaque adimensionné par $\dot{h}_{ym}^{norm} = \dot{H}_{xm}/d_a$ pour plusieurs nombres de Mach : — $M_a = 0.01$, -- $M_a = 0.02$, ... $M_a = 0.03$, — · — $M_a = 0.04$, — $M_a = 0.05$. La fréquence est $f=20\text{kHz}$. Les symboles o donnent le résultat de la simulation de Cao *et al.* [27] pour $M_a = 0.05$.

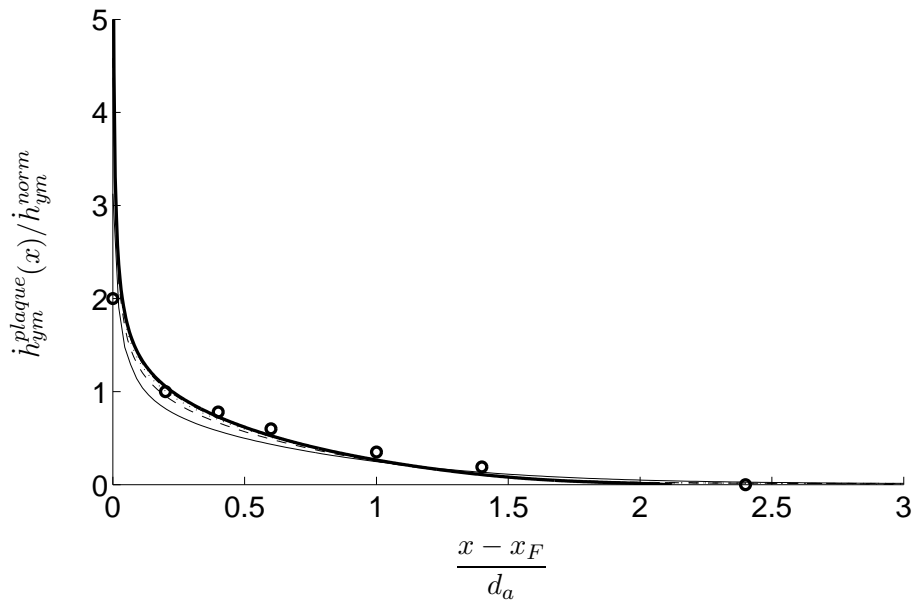


FIG. 5.2.49 – Flux de chaleur moyen au niveau du bord froid de la plaque adimensionné par $\dot{h}_{ym}^{norm} = \dot{H}_{xm}/d_a$ pour plusieurs nombres de Mach : — $M_a = 0.01$, -- $M_a = 0.02$, ... $M_a = 0.03$, — · — $M_a = 0.04$, — $M_a = 0.05$. La fréquence est $f=2\text{kHz}$. Les symboles o donnent le résultat de la simulation de Cao *et al.* [27] pour $M_a = 0.05$.

Sur les figures données ici, on ne trace donc que la courbe de Cao correspondant à $M_a = 0.05$. Pour la fréquence $f=20\text{kHz}$ (figure 5.2.48), on remarque que contrairement au cas de Cao *et*

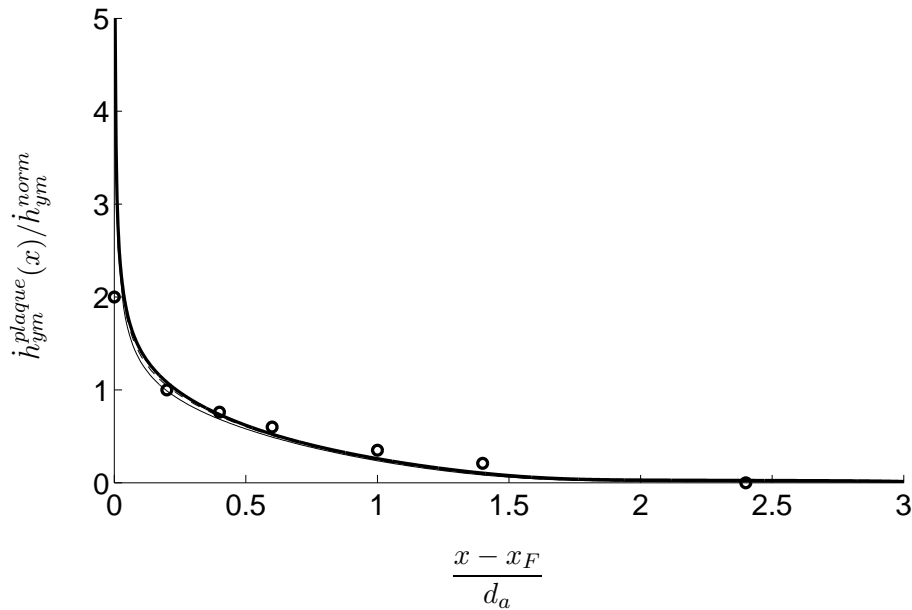


FIG. 5.2.50 – Flux de chaleur moyen au niveau du bord froid de la plaque adimensionnalisé par $\dot{h}_{ym}^{norm} = \dot{H}_{xm}/d_a$ pour plusieurs nombres de Mach : — $M_a = 0.01$, - - $M_a = 0.02$, ... $M_a = 0.03$, - · - $M_a = 0.04$, — $M_a = 0.05$. La fréquence est $f=200\text{Hz}$. Les symboles o donnent le résultat de la simulation de Cao *et al.* [27] pour $M_a = 0.05$.

al., les courbes correspondant à différents nombres de Mach ne sont pas confondues. Pour une fréquence $f=2\text{kHz}$ (figure 5.2.49) les courbes se rapprochent les unes des autres. Pour $f=200\text{Hz}$ (figure 5.2.50), les courbes obtenues à différents nombres de Mach sont confondues, exceptée celle pour $M_a = 0.01$ qui est légèrement sous les autres. La courbe calculée pour $f=200\text{Hz}$ à $M_a = 0.05$ n'est pas très éloignée de la courbe calculée par Cao mais plusieurs remarques peuvent être faites : en $x = x_F$ le pic obtenu par la présente simulation est beaucoup plus prononcé que dans celle de Cao. Cependant cet écart n'est présent qu'à l'extrême bout de la plaque. Quand on s'éloigne du bout de la plaque, au contraire, la courbe de Cao est légèrement au-dessus de la courbe calculée ici. D'une manière globale, les résultats indiquent qu'à quantités de chaleur extraite du bord froid de la plaque égales, la présente simulation prévoit que l'échange sera légèrement plus localisé en bout de plaque par rapport aux prévisions de Cao. Remarquons que plusieurs éléments peuvent expliquer les différences observées. Au niveau même de l'exploitation des résultats, un écart existe entre le déplacement acoustique calculé ici et celui utilisé par Cao. Une réduction de 10% de notre déplacement acoustique rendent nos résultats plus proches de ceux de Cao, excepté à l'extrême bout de la plaque. De plus la fréquence utilisée par Cao est inconnue et les résultats montrent que celle-ci a une influence sur les résultats. Au niveau de la méthode numérique même, Cao utilise une maille étirée $\Delta x \sim 4\Delta y$, alors qu'ici $\Delta x = \Delta y$ au-dessus de la plaque. Des tests ont montré que l'étirement de la maille a tendance à abaisser la hauteur du pic en $x = x_F$. Enfin Cao utilise

un schéma d'ordre 2 en espace et en temps, la présente méthode utilisant un schéma d'ordre 4 en espace.

D'après la normalisation utilisée par Cao, la courbe $\dot{h}_{ym}^{plaque}/\dot{h}_{ym}^{norm} = f(x/d_a)$ ne dépend pas du nombre de Mach. On en déduit que la valeur de $\dot{h}_{ym}^{plaque}/\dot{h}_{ym}^{norm}$ en un point fixé de plaque est constante. En particulier,

$$\dot{h}_{ym}^{plaque}(x_F) \sim \dot{h}_{ym}^{norm},$$

Or

$$\dot{h}_{ym}^{norm} = \frac{\dot{H}_{xm}}{d_a} \sim \frac{M_a^2}{M_a} \sim M_a.$$

Ainsi la hauteur du pic $\dot{h}_{ym}^{plaque}(x_F)$ est proportionnelle au nombre de Mach. Dans nos simulations, et comme on l'a signalé à la section précédente, $\dot{h}_{ym}^{plaque}(x_F)$ varie en M_a^2 à 20kHz, et non en M_a . Cependant quand on diminue la fréquence, on a approximativement $\dot{h}_{ym}^{plaque}(x_F) \sim M_a$ à $f=2$ kHz, et exactement $\dot{h}_{ym}^{plaque}(x_F) \sim M_a$ à $f=200$ Hz. Ceci est cohérent avec le fait que la normalisation de Cao (c'est-à-dire la coïncidence des courbes aux différents nombres de Mach) donne pour nos simulations de meilleurs résultats à 200Hz qu'à 20kHz.

En conclusion malgré les quelques différences observées, les résultats obtenus sont très proches de ceux de Cao *et al.* [27] et apportent une validation pour les méthodes utilisées dans ce travail.

5.3 Paroi régie par une équation de la chaleur 1D

5.3.1 Présentation

Jusqu'à présent seul un modèle de plaque isotherme a été considéré. Ce modèle a permis malgré sa simplicité de faire une étude assez précise de l'effet thermoacoustique. Il sera de plus utilisé pour représenter les échangeurs de chaleur 1D au chapitre suivant. Pour les plaques du stack, un modèle plus réaliste est développé ici. Dans ce modèle la température de la plaque n'est plus imposée mais calculée. Pour cela on utilise l'équation (2.2.19), c'est-à-dire une équation d'énergie 1D pour la plaque. Du fait des conditions de symétrie imposées cette équation peut s'écrire plus simplement :

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_s + \left. \frac{K}{l} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (5.3.1)$$

Cette équation revient à simuler une demi-plaque, comme on simule un demi-canal entre deux plaques. Le deuxième terme du second membre est le gradient de température calculé dans le fluide. Il assure le couplage entre le fluide et la plaque. La plaque devient par ailleurs le siège d'un gradient de température moyen, et d'un flux de chaleur par conduction. Le modèle reste monodimensionnel mais la plaque possède une épaisseur équivalente $2l$, qui traduit avant tout

son inertie thermique.

Dans la section 5.3.2 suivante l'importance du choix de la demi-épaisseur l est expliquée. Le gradient de température moyenne qui s'établit au-dessus de la plaque est ensuite étudié. Tout d'abord la présence d'un échauffement par dissipation visqueuse est commenté à la section 5.3.3, puis des comparaisons quantitatives avec la théorie linéaire sont faites dans la section 5.3.4.

5.3.2 Temps de montée et épaisseur de la plaque

L'une des différences entre la plaque régie par une équation de la chaleur et une plaque isotherme est le nombre de périodes de calcul nécessaires pour atteindre un état thermique stationnaire. Pour une plaque isotherme, il fallait une cinquantaine de périodes pour atteindre un tel état dans le fluide. Maintenant il faut atteindre un état stationnaire à la fois dans le fluide et dans la plaque. Celle-ci ayant désormais une inertie thermique, on peut s'attendre à ce que le nombre de périodes de calcul requises augmente. De plus il dépendra de l'épaisseur de la plaque. La figure 5.3.1 donne un exemple de l'évolution de la différence de température $\Delta T = T_{sm}(C) - T_{sm}(F)$ entre les extrémités chaudes et froides de la plaque en fonction du temps pour trois épaisseurs différentes : $l/\delta_\nu = 0.5$ (cas 2-1), $l/\delta_\nu = 0.05$ (cas 2-2) et $l/\delta_\nu = 0.005$ (cas 2-3). La géométrie est par ailleurs la même que celle du cas 1-1 considéré précédemment pour une plaque isotherme ($L = \lambda/40$, $kx_S = 2.35$) et le nombre de Mach est relativement élevé, $M_a = 0.04$. Comme on s'y

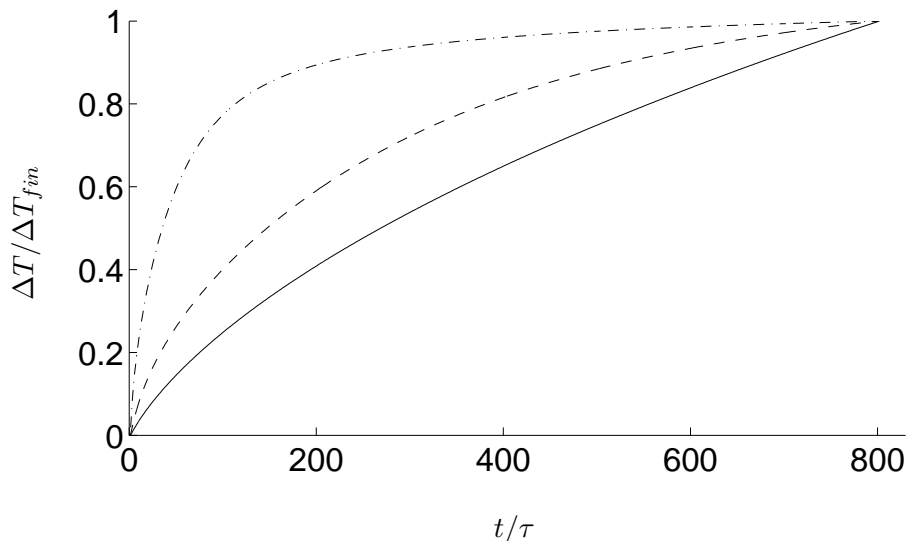


FIG. 5.3.1 – Evolution temporelle de la différence de température entre les extrémités de la plaque. — $l/\delta_\nu = 0.5$, -- $l/\delta_\nu = 0.05$, —·— $l/\delta_\nu = 0.005$. La différence de température ΔT est adimensionnalisée avec la différence de température à la fin du calcul ΔT_{fin} pour chaque cas considéré. Cas 2-1 à 2-3. $kx_S = 2.35$, $M_a = 0.04$.

attendait, la différence de température s'établit d'autant moins vite que la valeur de l est importante. De plus on constate que le temps de calcul nécessaire pour atteindre un régime stationnaire peut valoir jusqu'à plus de 1000 périodes acoustiques.

Une épaisseur de la plaque vérifiant $l = 0.5\delta_\nu$ correspond aux valeurs les plus faibles qui soient utilisées dans des configurations expérimentales. Les valeurs $l = 0.05\delta_\nu$ et $l = 0.005\delta_\nu$ sont très petites et ne sont pas utilisées dans les modèles expérimentaux existants principalement à cause de difficultés de miniaturisation. Dans les simulations, un compromis doit être fait entre d'une part un temps de calcul minimal (qui nécessite l petit), et d'autre part la nécessité de garder ϵ_s faible (qui nécessite l grand), où ϵ_s est défini par l'expression (1.2.18). En effet une valeur de ϵ_s faible garantit que la plaque présente une condition aux limites robuste pour l'oscillation de température. Dans la suite on utilisera souvent une valeur $l = 0.5\delta_\nu$ bien qu'une telle valeur aboutisse à un coût de calcul élevé. Pour réduire ce coût une solution consiste à imposer un gradient de température initial dans le fluide et dans la plaque, la réduction n'étant sensible que si un bon choix est fait. Dans la suite, une différence de température moyenne initiale dans la plaque et le fluide au-dessus de la plaque seront généralement imposés, cette différence valant 75% de celle prédite par la théorie linéaire. Précisons enfin que pour $l/\delta_\nu = 0.5$ le rapport $l/\delta_{\kappa,s}$ vaut entre 0.02 et 10 suivant les caractéristiques choisies pour le matériau constituant la plaque.

5.3.3 Echauffement visqueux de la plaque

Duffourd [40, 41] met en évidence dans ses expériences un échauffement global de la plaque superposé aux variations de températures dues à l'effet thermoacoustique. Des résultats extraits de son travail sont représentés à la figure 5.3.2. On constate que l'échauffement se traduit par une augmentation de la température de la plaque à la fois du côté chaud et du côté froid. De plus l'échauffement est dû à la dissipation visqueuse. L'effet est ainsi maximum à proximité du noeud de vitesse (courbes de droite), où même le côté "froid" de la plaque s'échauffe. A cette position l'effet thermoacoustique est en effet très faible et la dissipation visqueuse maximale.

Pour observer ce comportement de manière numérique, deux exécutions du code pour le cas 2-4 ont été faites : l'une incluant la dissipation visqueuse, et l'autre non. Sur la figure 5.3.3 l'évolution de la température moyenne aux extrémités froides et chaudes de la plaque est tracée pour ces deux exécutions. Quand la dissipation visqueuse est présente, on remarque que les deux côtés F et C de la plaques s'échauffent. Ainsi la température du côté froid baisse du fait de l'effet thermoacoustique puis remonte à cause de l'échauffement visqueux. Si l'on ne tient pas compte de la dissipation visqueuse, on constate que les courbes se stabilisent et ne connaissent plus de dérive au cours du temps.

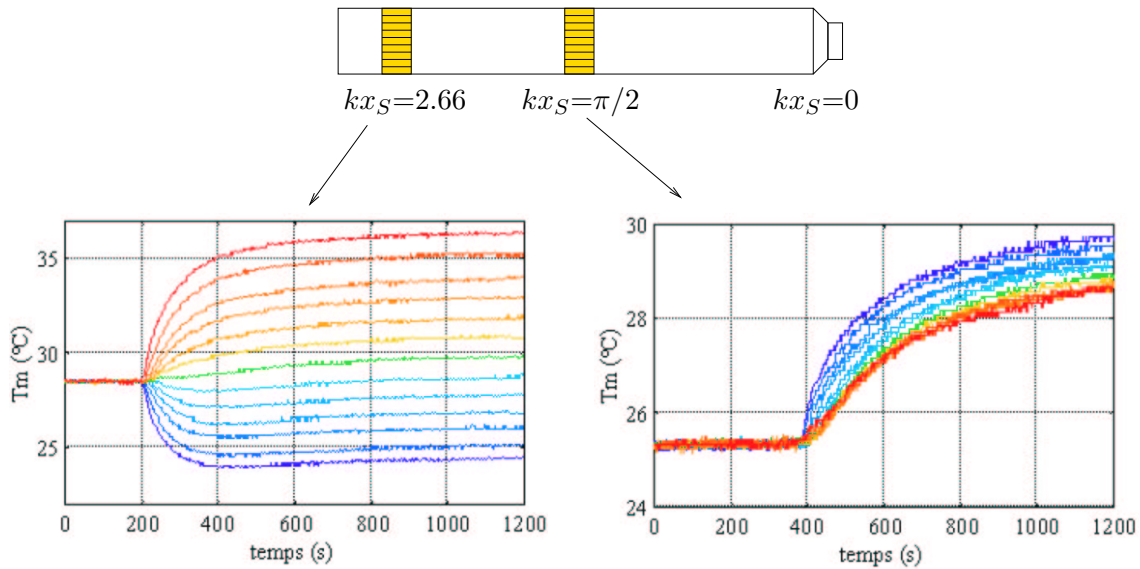


FIG. 5.3.2 – Courbes extraites de Duffourd [40] représentant la température moyenne obtenue avec des thermocouples disposés le long d’une plaque de l’empilement. La courbe rouge est donnée par le thermocouple situé le plus à l’extrémité chaude, la bleue par celui situé le plus à l’extrémité froide. A gauche : plaque située en $kx_S = 2.66$, proche du fond du résonateur. A droite, plaque située en $kx_S = \pi/2$, au milieu du résonateur, c’est-à-dire au ventre de vitesse (pour cette position, il devient difficile de dire quel est le côté chaud, et quel est le côté froid, la plaque étant située entre deux ventres de pression. Ceci explique l’inversion des courbes rouges et bleues). $f = 200$ Hz, $Dr = 1\%$.

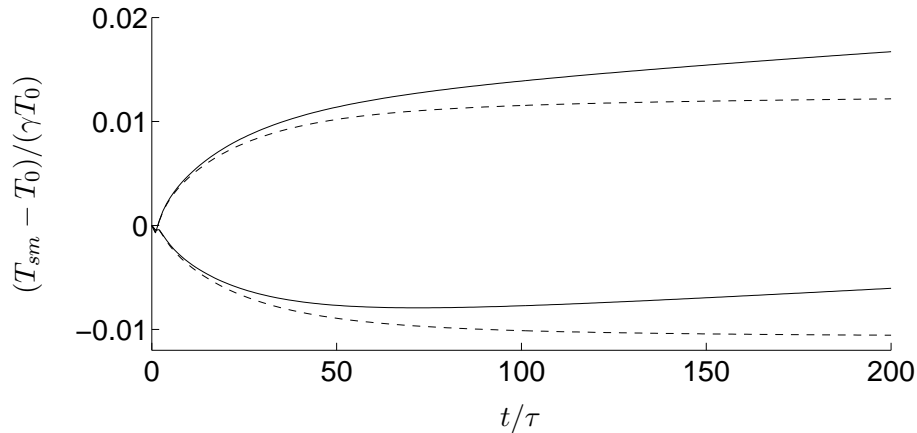


FIG. 5.3.3 – Température moyenne de la plaque aux extrémités de la plaque en fonction du nombre de périodes de calcul : — $T_{sm}(F)$ et $T_{sm}(C)$ pour le calcul complet avec dissipation visqueuse, \cdots $T_{sm}(F)$ et $T_{sm}(C)$ pour le calcul sans dissipation visqueuse. Les températures négatives correspondent au point F, les températures positives au point C. Cas 2-4.

A la figure 5.3.4 on s’intéresse à la différence de température moyenne $\Delta T = T_{sm}(C) - T_{sm}(F)$ entre les extrémités de la plaque : on constate que ΔT se stabilise et atteint une valeur identique que la simulation tienne compte ou non de la dissipation. L’effet de la dissipation est donc bien une

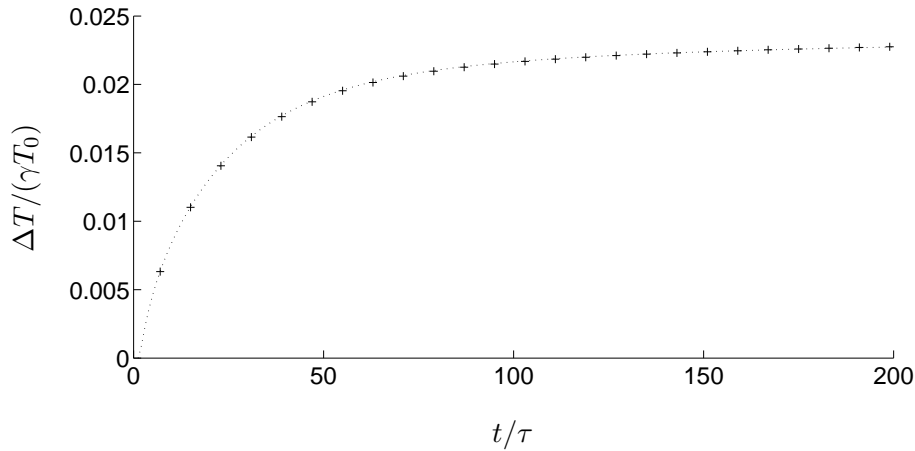


FIG. 5.3.4 – Différence de température moyenne $\Delta T = T_{sm}(C) - T_{sm}(F)$ entre les extrémités de la plaque en fonction du nombre de périodes de calcul : + calcul complet avec dissipation visqueuse, \dots calcul sans dissipation visqueuse. Cas 2-4.

dérive globale de la température sur laquelle se superpose l'effet thermoacoustique qui maintient une différence de température fixe entre les extrémités de la plaque. L'épaisseur des plaques utilisées pour ces simulations est faible puisque l'on a $l/\delta_\nu = 0.01$. La capacité calorifique est alors elle-même faible ce qui explique la rapidité de l'échauffement de la plaque observé.

Cette dérive est importante pour une plaque seule. Elle a aussi été observée numériquement par Karpov *et al.* [69] pour un échangeur de chaleur de température dont la température était laissée libre. En présence d'échangeurs isothermes de températures fixes cependant, aucune dérive de ce type n'est attendue, tout surplus de chaleur pouvant être cédé à ces derniers.

5.3.4 Différence de température entre les extrémités de la plaque

Dans cette section on s'intéresse de nouveau à la différence de température moyenne ΔT qui s'établit entre les extrémités de la plaque en régime stationnaire. En particulier des comparaisons sont faites avec la théorie linéaire. L'intérêt de cette comparaison est multiple. D'abord, en l'absence d'échangeurs de chaleur, la température moyenne n'est forcée en aucun point du domaine. Ainsi le bon établissement de la différence de température est un test important pour notre outil de simulation. De plus la comparaison permet de tester la théorie linéaire et ses limites. Enfin, parmi les travaux qui ont comparé leurs résultats à la théorie linéaire, plusieurs tendances existent. Certains travaux affichent un bon accord entre leurs résultats et les prédictions de la théorie linéaire. C'est le cas des expériences de Atchley *et al.* [10] et des simulations numériques de Worlikar [144]. L'accord est obtenu pour une onde de faible intensité mais se dégrade quand l'intensité augmente, typiquement pour nombre de Mach supérieur à 1.5 %. Dans d'autres travaux, les valeurs obtenues pour ΔT sont inférieures, d'un facteur qui peut valoir jusqu'à 3, aux prédictions théoriques, même

à faible niveau. C'est le cas pour les expériences de Duffourd [40], de Kim *et al.* [70], ou encore de Piccolo *et al.* [97]. L'étude de Piccolo *et al.* [97] montre par ailleurs qu'à faible nombre de Mach, si la différence de température atteinte dans l'état stationnaire est très différente de celle prédite par la théorie linéaire, le flux thermoacoustique, mesuré au début du régime transitoire, est lui bien prédit par cette théorie. Ce résultat montre en particulier que la différence entre les résultats obtenus et la théorie linéaire ne sont pas dus à des effets non-linéaires, mais à des effets thermiques existant à l'état stationnaire. Une nouvelle étude semble donc importante. Cette étude a plusieurs buts : d'une part effectuer une comparaison avec la théorie linéaire, et d'autre part comprendre les phénomènes (non-linéaires ou autres) responsables d'éventuels écarts. Dans cette étude, deux paramètres sont importants : le nombre de Mach M_a et la valeur de kx_S représentant la position de la plaque dans le résonateur. Les cas considérés dans cette section sont numérotés 2-5 à 2-25.

Une première comparaison est faite pour la plaque des cas 2-5 à 2-9. La plaque choisie est assez courte ($L = 0.35\lambda/40$) pour satisfaire les hypothèses de la théorie linéaire. La différence de température $\Delta T = T_{sm}(C) - T_{sm}(F)$ obtenue à faibles nombres de Mach est représentée à la figure 5.3.5. Elle est comparée à celle prédite par la théorie linéaire, qui est donnée par

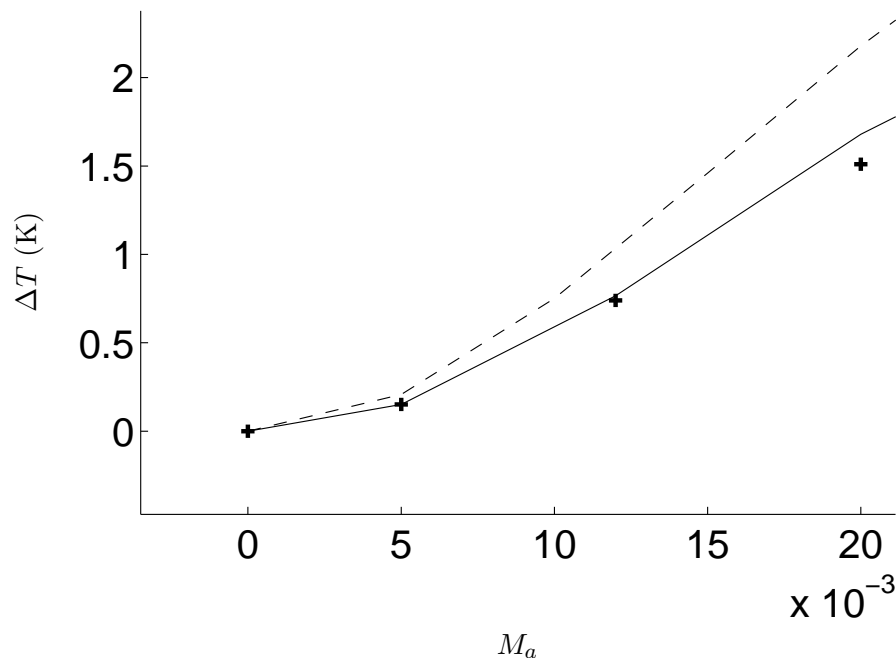


FIG. 5.3.5 – Evolution de la différence de température entre les extrémités de la plaque en fonction du nombre de Mach : + calcul, -- théorie linéaire (expression 1.2.57) — théorie linéaire modifiée (expression 5.3.2) pour tenir compte de la différence des gradients de température moyenne dans le fluide et dans la plaque. Cas 2-5 à 2-7.

l'expression (1.2.57). On constate que si l'accord n'est pas mauvais, il n'est pas parfait, même aux faibles nombres de Mach, $M_a = 0.5\%$ et $M_a = 1.2\%$. En particulier l'écart est de 25% pour $M_a = 0.5\%$. Une raison possible pour ce désaccord a été mise en avant par Kim *et al.* [70]. Il remarque que le gradient de température moyenne est constant sur la partie centrale de la plaque mais que ce gradient chute aux extrémités. Cette chute a été mise en évidence par plusieurs expérimentateurs, dont Duffourd [40]. Elle est aussi observée dans la présente simulation comme le montre la figure 5.3.6, qui représente la température moyenne obtenue dans la plaque pour le cas 2-5. On constate que la différence de température ΔT qui existe entre les extrémités de la plaque

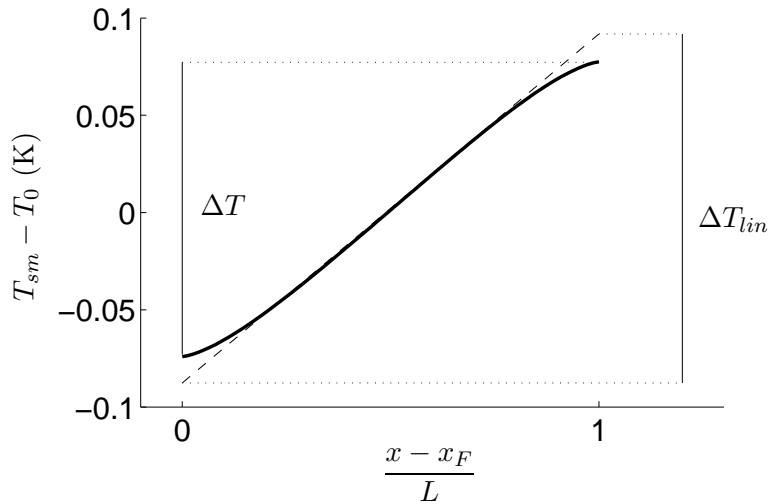


FIG. 5.3.6 – Température moyenne dans la plaque (—) correspondant au cas 2-5. Sont représentées la différence de température ΔT entre les extrémités de la plaque, et celle ΔT_{lin} qui existerait si le gradient de température moyenne était constant, même en bouts de plaque. Cas 2-5.

est inférieure à celle $\Delta T_{lin} = L\nabla T_m$ qui existerait si le gradient de température moyenne ∇T_m était constant sur toute la plaque. Pour tenir compte de cette observation, l'expression (1.2.57) doit être multipliée par un coefficient correctif. Ce coefficient vaut simplement $\Delta T/\Delta T_{lin}$. Cette correction explique une partie de l'écart observé à la figure 5.3.5. Un autre élément explique cet écart : la théorie linéaire suppose que les gradients moyens de température dans le fluide et dans la plaque sont égaux, ce qui suppose en particulier que la température moyenne soit constante dans une section du canal. La figure 5.3.7 représente la température moyenne dans une section du canal obtenue dans le cas 2-5, pour plusieurs positions axiales au-dessus de la plaque. En $y = 0$ la température du fluide $T_m(x, 0)$ est aussi celle de la plaque $T_{sm}(x)$. On constate que la température moyenne dépend de y . Cette dépendance est faible dans la partie centrale mais devient importante aux extrémités, ce à quoi on s'attend puisque c'est en bouts de plaque qu'a lieu l'échange de chaleur, et que cet échange vaut $\dot{h}_{ym}^{plaque} = -K\partial T_m/\partial y$. Une conséquence

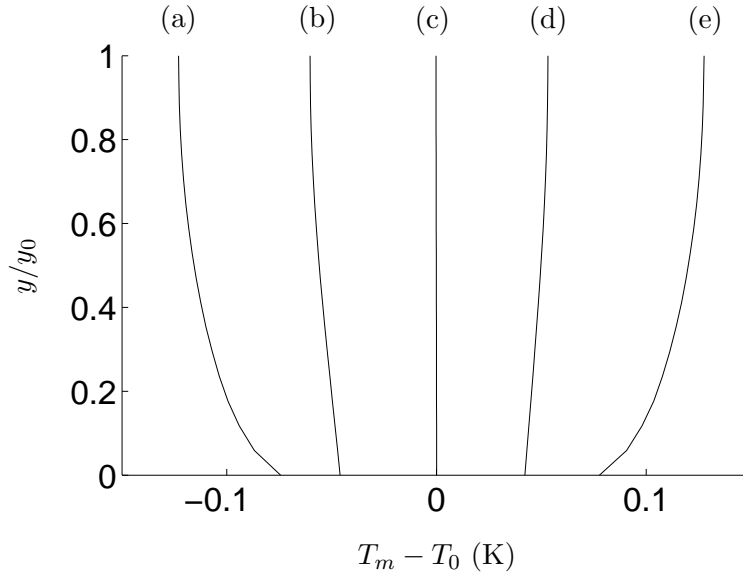


FIG. 5.3.7 – Température moyenne dans le fluide dans une section du canal en plusieurs positions axiales : (a) $x = x_F$, (b) $x - x_F = L/4$, (c) $x - x_F = L/2$ (milieu de la plaque), (d) $x - x_F = 3L/4$, (e) $x = x_C$. Cas 2-5.

de la non-uniformité de la température moyenne dans une section est que le gradient axial de température moyenne dans le fluide n'est pas égal au gradient axial de température moyenne dans la plaque. L'expression (1.2.57) ne tient pas compte de cette différence. Pour tenir compte des deux observations précédentes, on se propose de modifier légèrement l'expression (1.2.57). La différence de température peut être calculée par [79] :

$$\Delta T = Corr_1 \frac{\frac{-Ly_0}{4\rho_m c_0} P_A^2 \sin(2kx) A_1}{Corr_2 y_0 K + lK_s - \frac{y_0 c_p}{4\omega \rho_m c^2 (1 - P_r)} P_A^2 (1 - \cos(2kx)) A_2}. \quad (5.3.2)$$

Les coefficients A_1 et A_2 sont donnés par (1.2.58) et (1.2.59). Les coefficients $Corr_1$ et $Corr_2$ sont des coefficients correctifs qui tiennent compte des deux effets discutés ci-dessus. Le coefficient $Corr_1$ est donné par :

$$Corr_1 = \frac{\Delta T}{\Delta T_{lin}}. \quad (5.3.3)$$

Le coefficient $Corr_2$ est calculé par :

$$Corr_2 = \frac{\Delta T_{moy, fluide}}{\Delta T}, \quad (5.3.4)$$

où $\Delta T_{moy, fluide}$ est la différence de température moyenne dans le fluide au-dessus de la plaque. Elle est obtenue en faisant une moyenne spatiale sur la hauteur du domaine de calcul :

$$\Delta T_{moy, fluide} = \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} T_m(x_C, y) - T_m(x_F, y) dy \quad (5.3.5)$$

Les coefficients $Corr_1$ et $Corr_2$ sont obtenus par la simulation. L'expression (5.3.2) peut être évaluée avec les résultats de la simulation puis comparée à cette dernière. La comparaison est faite pour le cas 2-5 à la figure 5.3.5. On constate qu'avec les modifications introduites, les résultats de (5.3.2) sont en accord avec ceux de la simulation numérique aux faibles nombres de Mach. Pour ce cas (2-5), les valeurs suivantes, données par la simulation, ont été utilisées : $Corr_1 = 0.86$ et $Corr_2 = 1.57$.

La valeur des coefficients $Corr_1$ et $Corr_2$ dépend du cas considéré. Néanmoins quelques observations générales peuvent être faites. Les coefficients sont représentés en fonction du nombre de Mach à la figure 5.3.8 pour deux longueurs de plaque. Une plaque de longueur $L = 0.35\lambda/40$ (cas 2-5 à 2-9) et une plaque plus longue de longueur $L = \lambda/40$ (cas 2-26 à 2-29), ces deux plaques étant à une position fixe $kx_S = 2.35$ (aux trois quarts du résonateur). D'une manière générale

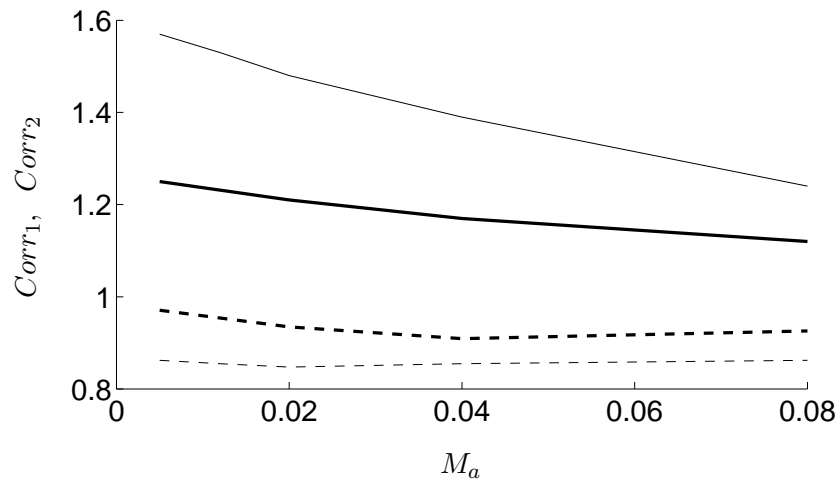


FIG. 5.3.8 – Evolution des coefficients $Corr_1$ et $Corr_2$ en fonction du nombre de Mach, et pour deux longueurs de plaque. Pour la plaque de longueur $L = 0.35 * \lambda/40$ (cas 2-5 à 2-9) : -- $Corr_1$, — $Corr_2$. Pour la plaque de longueur $L = \lambda/40$ (cas 2-26 à 2-29) : - - $Corr_1$, — $Corr_2$. $kx_S = 2.35$.

le coefficient $Corr_1$ est inférieur à 1, alors que le coefficient $Corr_2$ est supérieur à 1. De plus, plus ces coefficients sont proches de 1, et plus la théorie linéaire modifiée donnée par l'expression (5.3.2) est proche de la théorie linéaire brute donnée par l'expression (1.2.57). Sur la figure 5.3.8, plusieurs remarques peuvent être faites. Le coefficient $Corr_1$ est approximativement constant. De plus ce coefficient est plus proche de 1 que le coefficient $Corr_2$. $Corr_2$ est donc la source d'écart la plus importante entre la théorie linéaire et la théorie linéaire modifiée. Pour les deux plaques considérées, $Corr_2$ décroît avec le nombre de Mach. Enfin, les coefficients $Corr_1$ et $Corr_2$ sont plus proches de 1 pour la plaque de longueur $L = \lambda/40$ que pour celle de longueur $L = 0.35\lambda/40$, c'est-à-dire plus proches de 1 pour la plaque la plus longue. Pour deux nombres de Mach fixés,

$M_a = 0.005$ et $M_a = 0.04$, les coefficients $Corr_1$ et $Corr_2$ sont représentés en fonction de kx_S à la figure 5.3.9 pour la plaque de longueur $L = 0.35\lambda/40$. On constate que le coefficient $Corr_1$ est

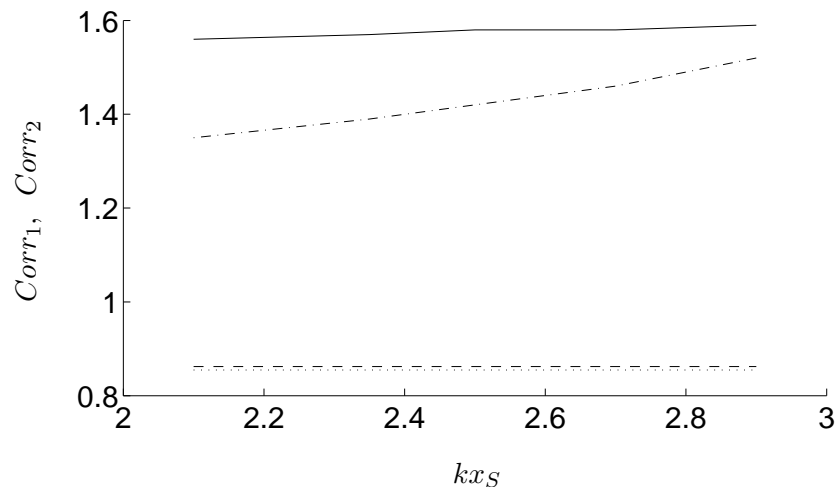


FIG. 5.3.9 – Evolution des coefficients $Corr_1$ et $Corr_2$ en fonction de la position kx_S de la plaque. Pour $M_a = 0.005$ (cas 2-15 à 2-19) : -- $Corr_1$, — $Corr_2$. Pour $M_a = 0.04$ (cas 2-20 à 2-25) : ... $Corr_1$, —·— $Corr_2$.

approximativement constant lorsque kx_S varie, alors que $Corr_2$ augmente légèrement avec kx_S pour $M_a = 0.005$ et un peu plus pour $M_a = 0.04$. En résumé, $Corr_1$ vaut typiquement 0.9, et $Corr_2$ 1.4, cette valeur diminuant avec le nombre de Mach. Les deux coefficients se rapprochent de 1 quand on augmente la longueur de la plaque, ce qui signifie que les effets physiques qui y sont associés sont des effets de bord. L'écart entre la théorie linéaire et la théorie linéaire modifiée est principalement due au coefficient $Corr_2$, c'est-à-dire à la variation de la température moyenne dans la direction y . Dans les cas considérés ici, cet écart est typiquement de 20%. Les valeurs obtenues semblent bien plus faibles que la valeur $Corr_1 = 1/3$ utilisée par Kim [70] pour obtenir un agrément entre ses expériences et la théorie linéaire. Notons toutefois que pour une plaque de géométrie fixée le coefficient $Corr_2$ est susceptible d'augmenter fortement si la conductivité thermique K_s de la plaque est augmentée. En effet, si la conductivité est importante, le retour par conduction dans cette dernière est important, et il est compensé par un échange important en bouts de plaque entre la plaque et le fluide. Cet échange a lieu dans la direction y , et favorise l'inhomogénéité de la température moyenne dans la direction y , augmentant ainsi le coefficient $Corr_2$. Si la conductivité thermique de la plaque du cas 2-5 est multipliée par 5, c'est-à dire est augmentée de $K_s = 0.237 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ à $K_s = 1.19 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ (une valeur réaliste pour certaines céramiques utilisées en thermoacoustique) la valeur de $Corr_2$ passe de 1.57 à 3.38. Cette dernière valeur est très importante et induit un écart important entre la théorie linéaire et ce que l'on peut espérer attendre avec la théorie linéaire modifiée. Dans la suite, nos résultats seront comparés aux

expressions (1.2.57) donnée par la théorie linéaire, et (5.3.2) correspondant à la théorie linéaire corrigée a posteriori par $Corr_1$ et $Corr_2$.

Dans un premier temps on s'intéresse à l'influence du nombre de Mach sur la différence de température ΔT . Un exemple a été donné à la figure 5.3.5. On reprend cet exemple (cas 2-5 à 2-9), pour lequel la plaque est située en $kx_S = 2.35$. La figure 5.3.10 donne l'évolution de ΔT en fonction du nombre de Mach, jusqu'à $M_a = 0.08$. A faible nombre de Mach, les résultats de

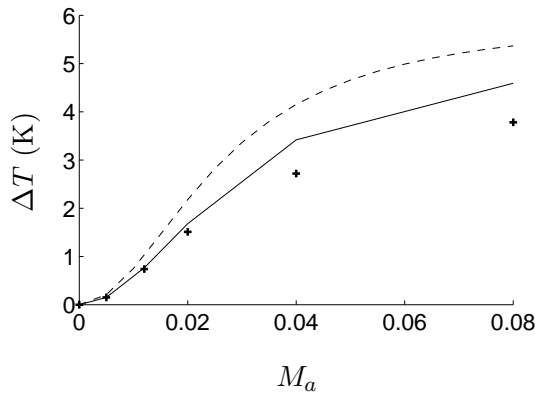


FIG. 5.3.10 – Evolution de la différence de température entre les extrémités de la plaque en fonction du nombre de Mach : + calcul, -- théorie linéaire (expression 1.2.57) — théorie linéaire modifiée (expression 5.3.2). Cas 2-5 à 2-9. $kx_S = 2.35$.

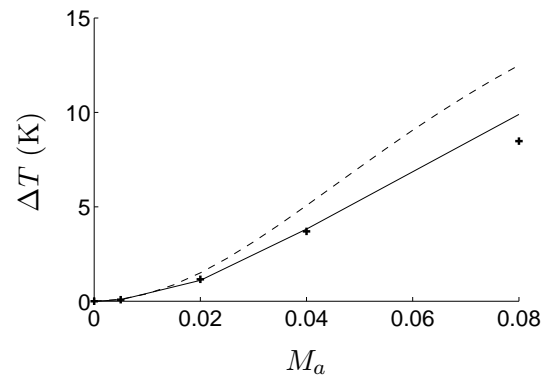


FIG. 5.3.11 – Evolution de la différence de température entre les extrémités de la plaque en fonction du nombre de Mach : + calcul, -- théorie linéaire (expression 1.2.57) — théorie linéaire modifiée (expression 5.3.2). Cas 2-10 à 2-14. $kx_S = 2.9$.

la simulation numérique sont en accord avec l'expression (5.3.2). Lorsque le nombre de Mach est supérieur à 0.02 la valeur prédite est inférieure à la valeur trouvée. A partir de cette valeur les effets non-linéaires ne sont donc plus négligeables. Comme on l'a vu à la section 5.2.7 les non-linéarités qui apparaissent ici sont dues à la déformation de l'oscillation de température au-dessus du stack. Ce sont ces mêmes déformations qui sont responsables des écarts observés pour la différence de température. Pour les valeurs $M_a = 0.005$ et $M_a = 0.012$ la variation temporelle de la température est sinusoïdale, elle commence à se déformer pour $M_a = 0.02$, cette déformation augmentant ensuite en même temps que le nombre de Mach. Il est intéressant de noter que l'écart entre l'expression (5.3.2) et les simulations n'augmente pas énormément entre $M_a = 0.04$ et $M_a = 0.08$.

A la section 5.2.7 on a remarqué que la déformation non-linéaire de la température dépend de la position de la plaque dans le résonateur et qu'elle diminue lorsqu'on se rapproche du fond du résonateur. Une évolution identique à celle de la figure 5.3.10 est donnée à la figure 5.3.11 pour les cas 2-10 à 2-14, qui correspondent à $kx_S = 2.9$, une position proche du fond du résonateur. On

remarque que les résultats sont en accord avec la théorie linéaire modifiée jusqu'à des nombres de Mach beaucoup plus élevés ($M_a \geq 0.04$) que dans le cas précédent. Pour une valeur du Mach très importante ($M_a \sim 0.08$) la déformation de température finit par apparaître. Cette observation confirme à nouveau le rôle de l'apparition des non-linéarités de température dans l'existence d'un écart avec la théorie linéaire (modifiée).

Pour une plaque donnée, la différence de température ΔT dépend de la position de la plaque kx_S dans le résonateur. De plus des études faites par Wheatley *et al.* [143], et par Atchley *et al.* [10], ont montré que la position optimale de la plaque, c'est-à-dire celle pour laquelle la différence de température est maximale, dépend du nombre de Mach et se décale vers le fond du résonateur quand le nombre de Mach augmente. La différence de température obtenue à faible nombre de Mach, $M_a = 0.005$, pour les cas 2-15 à 2-19, est donnée à la figure 5.3.12. Les résultats

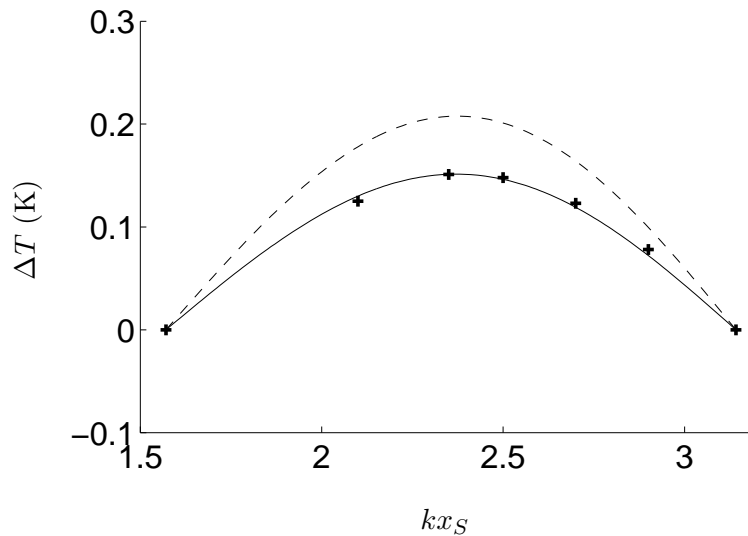


FIG. 5.3.12 – Evolution de la différence de température entre les extrémités de la plaque en fonction de la position de la plaque dans le résonateur : + calcul, -- théorie linéaire (expression 1.2.57) — théorie linéaire modifiée (expression 5.3.2). cas 2-15 à 2-19. $M_a = 0.005$.

obtenus sont ceux prévus par l'expression (5.3.2), la théorie linéaire modifiée étant valide à un nombre de Mach aussi faible. En particulier ΔT varie comme $\sin(2kx_S)$, et la position optimale est située en $kx_S = 3\pi/4$, c'est-à-dire aux 3/4 du résonateur. On donne maintenant à la figure 5.3.13 la variation de ΔT avec kx_S pour un nombre de Mach $M_a = 0.04$ beaucoup plus élevé. Les cas correspondants sont numérotés 2-20 à 2-25. La première observation est que le maximum de la différence de température s'est effectivement décalé par rapport au cas précédent. On peut estimer que la position optimale se situe vers $kx_S = 2.8$, alors que la théorie linéaire (modifiée) prévoit $kx_S = 2.7$. Dans sa simulation Worlikar [144] obtient lui aussi une déviation de la position

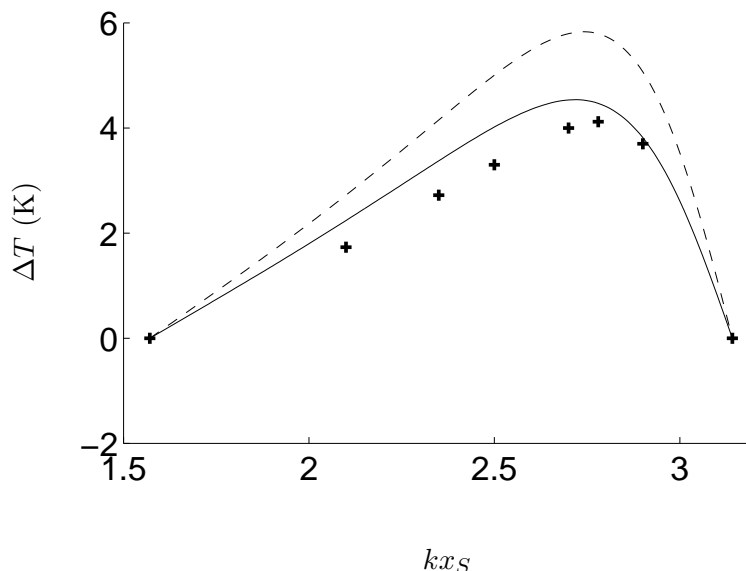


FIG. 5.3.13 – Evolution de la différence de température entre les extrémités de la plaque en fonction de la position de la plaque dans le résonateur : + calcul, -- théorie linéaire (expression 1.2.57) — théorie linéaire modifiée (expression 5.3.2). cas 2-20 à 2-25. $M_a = 0.04$.

optimale vers le fond du résonateur par rapport à la théorie linéaire. Au niveau quantitatif on voit que la courbe obtenue se situe sous la courbe théorique. Au nombre de Mach utilisé, les effets non-linéaires sont en effet importants. Toutefois on remarque à nouveau que pour une position proche du fond du résonateur ($kx_S = 2.9$), le point de mesure est sur la courbe théorique. Ce point de mesure est en effet le seul pour lequel la déformation non-linéaire de la température est très peu marquée. Cette observation rejoint celle de Atchley *et al.* [10] qui ont remarqué un meilleur agrément entre la théorie linéaire et leurs mesures lorsque la plaque est proche du nœud de vitesse.

En conclusion, les résultats de la simulation concernant la différence de température entre les extrémités de la plaque ont pu être comparés à la théorie linéaire. La théorie est légèrement modifiée pour prendre en compte les effets de bord et la différence entre la température moyenne dans la plaque et le fluide. Cette modification de la théorie n'est faite qu'a posteriori, c'est-à-dire en utilisant les résultats de la simulation. A faible nombre de Mach, $M_a \leq 0.02$, la théorie modifiée est en accord avec les résultats numériques. A ces faibles nombres de Mach, la théorie linéaire brute (non modifiée) surestime la différence de température. Cette surestimation est due non pas à des effets non-linéaires, mais à un non respect des hypothèses de la théorie. En particulier la température moyenne dans le fluide n'est pas (systématiquement) égale à celle dans la plaque. Il convient de noter que les divergences observées à faible nombre de Mach entre les simulations et la théorie linéaire (non modifiée) ne signifient pas que le flux thermoacoustique pompé par la

plaque est mal prédit par cette théorie. Ce flux est en réalité bien prédit. C'est le poids relatif des flux conductifs retour dans la plaque et dans le fluide, qui balancent ce flux thermoacoustique, qui est mal calculé, conduisant ainsi à une erreur sur l'estimation de la différence de température. Le coefficient $Corr_2$ a précisément pour rôle de calculer plus justement ce poids relatif. Cette remarque est cohérente avec les résultats de Piccolo *et al.* [97] mentionnés plus haut. A des nombres de Mach supérieurs à 0.02, des divergences apparaissent entre les simulations et la théorie linéaire modifiée. Ces divergences sont dues aux effets non-linéaires. Elles sont d'autant plus marquées que la plaque est proche du ventre de vitesse, un fait également constaté par Atchley *et al.* [10] dans leurs résultats expérimentaux. La cause de la divergence a ici été identifiée : il s'agit de la non-linéarité de température discutée à la section 5.2.7. On retiendra que la différence entre les calculs et la théorie linéaire brute peut être décomposée en :

- 1) une différence entre la théorie linéaire brute et la théorie linéaire modifiée, qui traduit le non-respect des hypothèses de la théorie linéaire (en particulier celle d'uniformité de la température moyenne dans la direction y), et
- 2) une différence entre les calculs et la théorie linéaire modifiée, qui traduit la présence d'effets non-linéaires, ces effets étant dus à la présence du stack.

Dans les résultats présentés dans cette section, on constate que la différence 1) est égale voire supérieure à la différence 2). Il ne faut cependant pas perdre de vue le fait que la méthode utilisée ici n'introduit pas de non-linéarités de propagation dans le domaine. Dans le cas d'un résonateur ordinaire, des non-linéarités dues à la propagation de l'onde dans le résonateur viendraient encore s'ajouter à celles dues au stack. Bien que cela ne soit pas fait ici, une première estimation de l'impact de ces non-linéarités pourrait être étudiée en injectant un ou plusieurs harmoniques avec la méthode des caractéristiques (voir section 4.2 à ce sujet).

5.4 Champ de vitesse moyen : acoustic streaming

Pour conclure ce chapitre, on s'intéresse aux mouvements moyens dans le fluide. Le champ moyen de vitesse peut s'avérer être important puisqu'il est lui aussi susceptible de transporter de l'énergie. Comme on l'a vu à la section 1.3.3, les mouvements moyens peuvent être nuisibles aux performances des machines thermoacoustiques, particulièrement quand une boucle est présente. L'impact sur les machines à onde stationnaire telle que celle étudiée ici demeure inconnu. Remarquons cependant que la théorie linéaire pour ces machines néglige cet impact. En effet dans l'analyse il apparaît dans l'expression du flux moyen d'énergie le terme suivant (qui s'obtient en développant l'expression (1.2.29) et en prenant $u_2 = u_m$) :

$$\int_0^{y_0} (\langle \rho_1 u_1 \rangle_t + \rho_0 u_m) T_m dy. \quad (5.4.1)$$

La théorie linéaire faisant l'hypothèse que T_m ne dépend pas de y , ce terme vaut simplement :

$$T_m \int_0^{y_0} (\langle \rho_1 u_1 \rangle_t + \rho_0 u_m) dy. \quad (5.4.2)$$

Conformément à (1.2.30) l'intégrale dans cette expression est nulle puisqu'elle représente le flux moyen de masse, qui est nul pour une machine ne possédant pas de boucle ouverte. Toutefois ce raisonnement ne tient que si T_m ne dépend effectivement pas de y . Dans le cas contraire le terme (5.4.1) représente un flux moyen d'énergie d'ordre 4. Il vient s'ajouter au flux thermoacoustique $\langle \rho_0 c_p u_1 T_1 \rangle_t$ d'ordre 2, et sa contribution n'est attendue que pour des niveaux très élevés de l'onde acoustique. Dans cette section on s'intéressera avant tout à la description des mouvements moyens, et pas à leur influence sur le flux moyen d'énergie.

Les résultats de la simulation ont montré l'existence de deux zones de vitesse moyenne. La première correspond aux extrémités de la plaques, et la deuxième au canal entre deux plaques. La figure 5.4.1 montre le champ de vorticité aux alentours du stack pour le cas 1-1. La figure 5.4.2 montre l'évolution correspondante de la vitesse axiale moyenne u_m dans une section du canal pour trois position axiales : le bord froid de la plaque ($x = x_F$), le milieu de la plaque ($x - x_F = L/2$), et le bord chaud de la plaque ($x = x_C$). Sur la figure 5.4.1 on distingue clairement les zones de

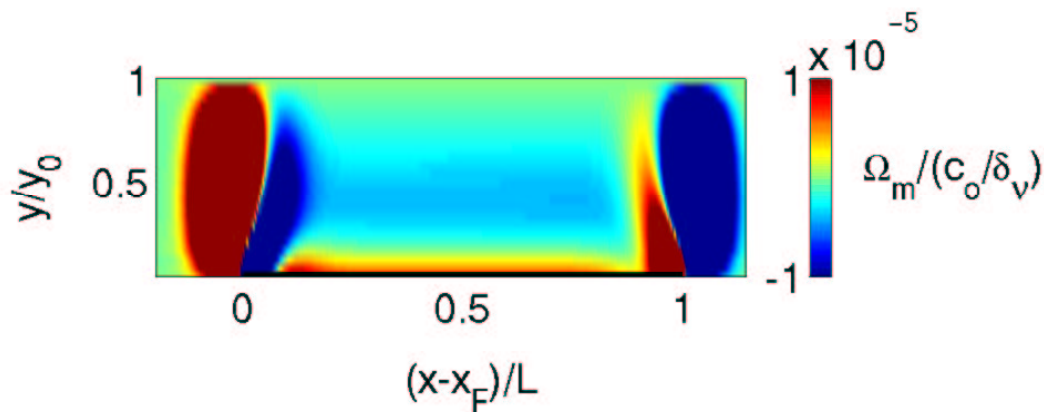


FIG. 5.4.1 – Champ moyen de vorticité Ω_m à proximité de la plaque. Cas 1-1.

vorticité moyenne en bouts de plaque. Elles sont à l'origine de mouvements circulaires moyens, et proviennent probablement du passage d'une zone glissante à une zone adhérente aux bords de la plaque. Les modules de la vorticité et de la vitesse moyenne dans cette zone sont proportionnels au nombre de Mach. Au-dessus de la plaque et dans la partie centrale de celle-ci existe une deuxième zone. Dans cette zone la vorticité moyenne et la vitesse moyenne sont plus faibles que dans la précédente et dépendent fortement de y . Le module de la vorticité et de la vitesse sont proportionnels au carré du nombre de Mach. Ces mouvements moyens d'ordre 2 correspondent

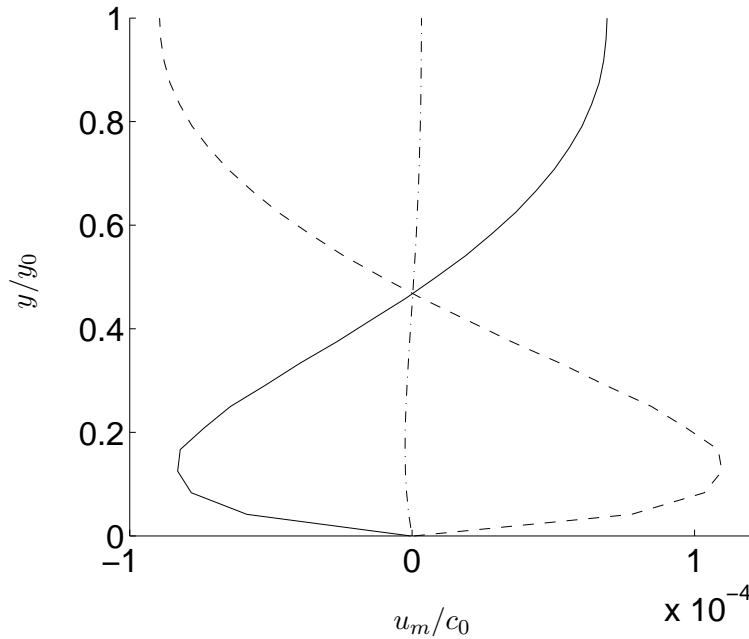


FIG. 5.4.2 – Vitesse axiale moyenne u_m dans la section du canal pour plusieurs position axiales : — $x = x_C$, - · - $x = x_F = L/2$ (milieu de la plaque), - - $x = x_F$. Cas 1-1.

à ce qu'on désigne généralement sous le nom d'"acoustic streaming". On constate de plus sur le champ de vorticité que les deux zones ont des points de contact et ne sont pas indépendantes. Dans la suite on s'intéressera seulement à la deuxième zone, c'est-à-dire aux mouvements moyens de type acoustic streaming.

Les mouvements moyens de type acoustic streaming ont été présentés à la section 1.3.3. On rappelle que la méthode usuelle pour les calculer est de résoudre les champs acoustiques, d'ordre 1, et d'en déduire les mouvements moyens, d'ordre 2. Les premiers calculs de streaming dans des résonateurs, dus à Rayleigh [105, 92], font l'hypothèse que le résonateur est large par rapport à l'épaisseur de couche limite. Motivés par une application aux machines thermoacoustiques, et plus particulièrement par une étude de leur stack, des travaux théoriques récents se sont placés dans le cadre de canaux de hauteur quelconque par rapport à l'épaisseur de la couche limite ou/et ont inclu la présence d'un gradient de température moyenne. C'est le cas des travaux de Rott [109], de Waxler [139], de Bailliet *et al.* [14], et de Hamilton *et al.* [60]. Des points de contact sont établis entre les résultats obtenus ici et certains de ces travaux.

Une comparaison directe avec les travaux récents reste pourtant relativement difficile, ces derniers étant difficilement exploitables, ceux de Hamilton *et al.* [60] incluant la source dans la solution, et ceux de Bailliet *et al.* [14] requérant eux mêmes une résolution numérique. Dans un premier temps une comparaison est faite avec les résultats classiques dans les résonateurs. L'expression

donnée par Nyborg [92] pour la vitesse axiale moyenne eulérienne d'ordre 2 dans un résonateur est la suivante :

$$u_m(x) = \frac{u_A^2}{8c_0} \sin(2kx)(F_1(y) + 3 - 18F_2(y)), \quad (5.4.3)$$

où $F_1(y)$ et $F_2(y)$ sont donnés par :

$$F_1(y) = - \left(e^{-2y/\delta_\nu} + 2e^{-y/\delta_\nu} \cos(y/\delta_\nu) + 6e^{-y/\delta_\nu} \sin(y/\delta_\nu) \right), \quad (5.4.4)$$

$$F_2(y) = \frac{y}{2y_0} \left(1 - \frac{y}{2y_0} \right). \quad (5.4.5)$$

Dans ces expressions, u_A représente l'amplitude maximale de la vitesse dans le résonateur, conformément aux notations (1.1.1), et y_0 est la demi-hauteur du résonateur. L'expression (5.4.3) n'est valide que pour $y_0/\delta_\nu \gg 1$ et décrit la composante axiale du mouvement représenté à la figure 1.3.1. Une expression de même nature décrit la composante radiale v_m . Remarquons tout d'abord que u_m est proportionnelle à u_A^2 , le streaming étant bien du second ordre. La présence du facteur $\sin(2kx)$ montre que u_m a une période spatiale qui vaut le double de celle de l'onde acoustique, dont la dépendance est en $\sin(kx)$. La dépendance en y contient deux termes : le terme F_1 ne dépend que de y/δ_ν et vient de la présence d'une couche limite, le terme F_2 ne dépend lui que de y/y_0 . Il représente une forme parabolique qui apparaît lorsque y/δ_ν devient supérieure à quelques unités. Enfin pour $y = y_0$ la vitesse axiale moyenne est donnée par $u_m = -u_R \sin(2kx)$ où $u_R = 3u_A^2/16c_0$ est la vitesse moyenne maximale dans le résonateur, obtenue en $y = y_0$ et $x = 3\pi/4$, c'est-à-dire sur l'axe du résonateur, entre le ventre et le nœud et le ventre de vitesse de l'onde acoustique. Cette vitesse u_R a été obtenue pour la première fois par Rayleigh [105]. Elle sera utilisée dans ce qui suit pour adimensionnaliser la vitesse moyenne.

Dans le but d'établir une comparaison avec l'expression (5.4.3), la simulation d'une plaque dans un canal est faite pour une hauteur du domaine de calcul plus importante que celles utilisées jusqu'ici. On prend en effet $y_0/\delta_\nu = 32$. Cette hauteur vérifie la condition $y_0/\delta_\nu \gg 1$. La plaque est une plaque isotherme de longueur $L = 2\lambda/40$ positionnée en $kx_S = 2.43$. Le nombre de Mach est faible, $M_a = 0.001$. La vitesse moyenne est donnée dans la section SM du domaine de calcul à la figure 5.4.3. Elle est comparée à l'expression (5.4.3). Remarquons que cette comparaison n'est pas pleinement justifiée. La formule de Nyborg est en effet valable pour un résonateur acoustique. La solution pour le streaming d'ordre 2 dépend du champ acoustique d'ordre 1. Or ce champ n'est pas le même au-dessus de la plaque que celui qui existerait dans le résonateur à la même position axiale, en partie en raison des effets de bord qui existent pour la plaque. Néanmoins, on constate que la courbe trouvée par la simulation n'est pas très différente de la courbe attendue de l'expression (5.4.3). Remarquons en particulier que la vitesse change de signe deux fois, ce qui indique la présence de deux tourbillons par demi-hauteur y_0 de canal, soit quatre tourbillons dans

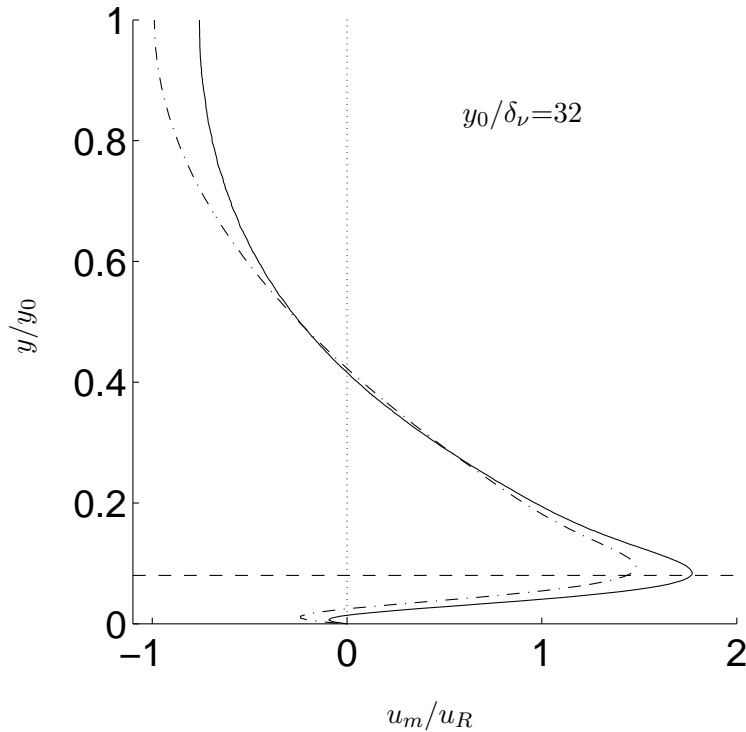


FIG. 5.4.3 – Vitesse axiale moyenne dans la section du domaine de calcul SM située en $kx_S = 2.43$. — calcul, — · — courbe donnée par l'expression (5.4.3). La vitesse est adimensionnée par la vitesse de Rayleigh $u_R = 3u_A^2/16c_0$. La ligne interrompue horizontale (— —) représente la limite entre le 'tourbillon' intérieur et le 'tourbillon' extérieur.

la hauteur du résonateur, comme c'est le cas à la figure 1.3.1. Le mot tourbillon est à prendre au sens large, il s'agirait plutôt de zones de vorticité. En effet si des tourbillons de longueur $\lambda/4$ sont clairement visibles quand le streaming se développe dans l'intégralité du résonateur (voir figure 1.3.1), ils le sont moins lorsqu'il se développe au-dessus de la plaque dont la longueur est seulement $L = 2\lambda/40$. De plus les zones vorticales en milieu de plaque sont reliées à celles en bouts de plaques, comme on l'a vu à la figure 5.4.1. Néanmoins la dénomination 'tourbillon' est conservée. Sur la figure 5.4.3 la ligne interrompue horizontale marque la limite entre les deux tourbillons. Le premier tourbillon, appelé tourbillon intérieur, est localisé au niveau de la couche limite et occupe moins de 10% de la hauteur du domaine. Le second, appelé tourbillon extérieur, occupe toute la zone centrale du canal. Dans cette zone le profil de vitesse moyenne a une forme parabolique. Une deuxième remarque concerne la vitesse négative dans la couche limite, pour $y/y_0 < 0.03$. On constate que la vitesse y est supérieure à celle prédite par l'expression (5.4.3). Ce décalage peut être du aux différences de configuration déjà signalées mais il n'est pas impossible qu'il provienne du gradient thermique qui se développe au-dessus de la plaque isotherme par effet thermoacoustique. Rott a en effet prédit que l'effet d'un tel gradient serait d'augmenter la vitesse moyenne dans la couche limite [109]. Aucune comparaison quantitative avec ce travail

n'est pourtant tentée ici. Signalons toutefois que si la condition limite simulée au niveau de la plaque pour la température n'est plus une condition isotherme mais une condition adiabatique, la vitesse trouvée dans la couche limite est très proche de celle fournie par (5.4.3).

On s'intéresse maintenant non plus à un canal large, pour lequel y_0/δ_ν est grand, mais à un canal pour lequel y_0/δ_ν est de l'ordre de l'unité. Ainsi on se place dans une géométrie qui correspond à l'espace inter-plaques dans un stack thermoacoustique. On utilise une plaque isotherme et des conditions réalistes pour un stack : $L = \lambda/40$, $M_a = 0.01$, $kx_S = 2.43$. La hauteur du domaine est progressivement diminuée de $y_0/\delta_\nu = 8$ à $y_0/\delta_\nu = 0.5$. La vitesse axiale moyenne dans la section SM au-dessus de la plaque est représentée aux figures 5.4.4 et 5.4.5. Pour le canal

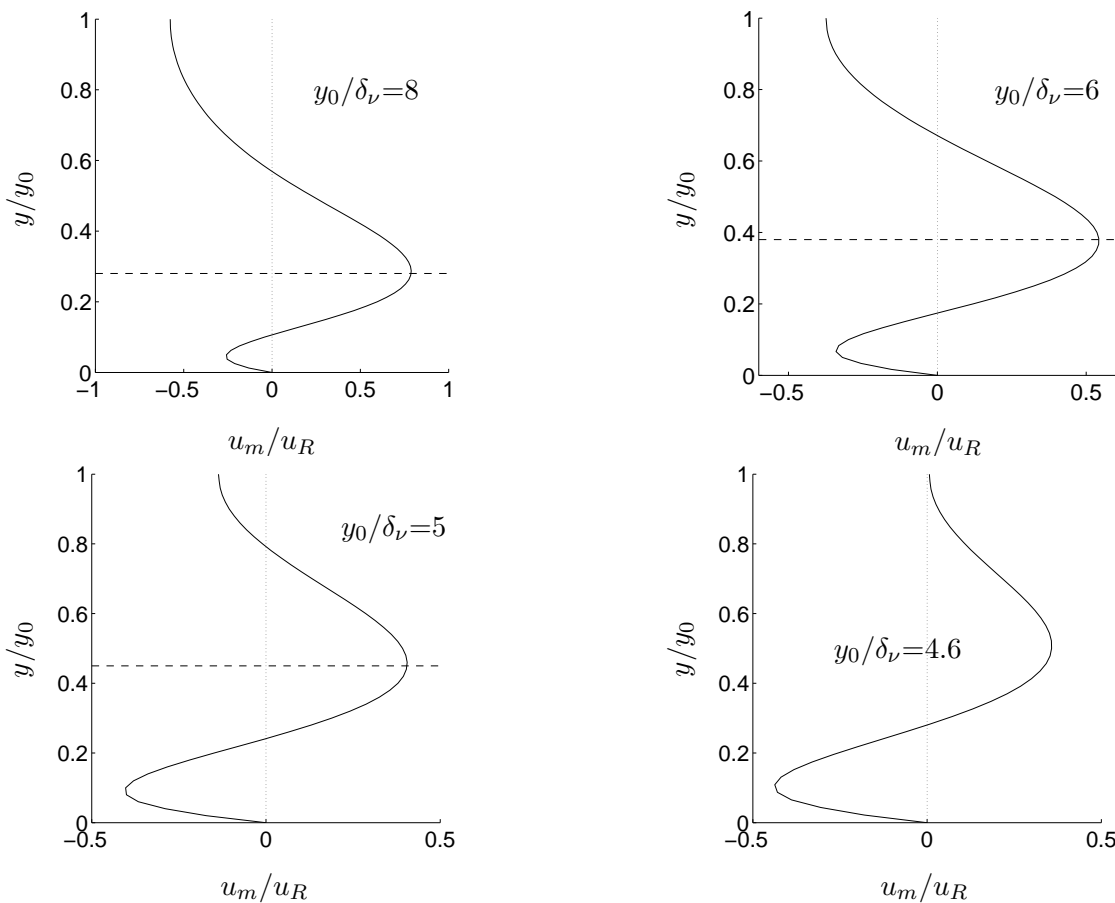


FIG. 5.4.4 – Profil de la vitesse axiale moyenne u_m dans la section SM du domaine au-dessus de la plaque, pour plusieurs valeurs de y_0/δ_ν . La ligne interrompue, quand elle est présente, représente la limite entre le 'tourbillon' intérieur (de couche limite) et le tourbillon extérieur. u_m est adimensionnée par la vitesse de Rayleigh $u_R = 3u_A^2/16c_0$.

le plus large, $y_0/\delta_\nu = 8$, on retrouve un profil semblable à celui trouvé précédemment à la figure 5.4.3. On observe deux changements de signe pour la vitesse moyenne. Ceci signifie que deux 'tourbillons' sont présents dans la hauteur du domaine de calcul (et donc quatre 'tourbillons'

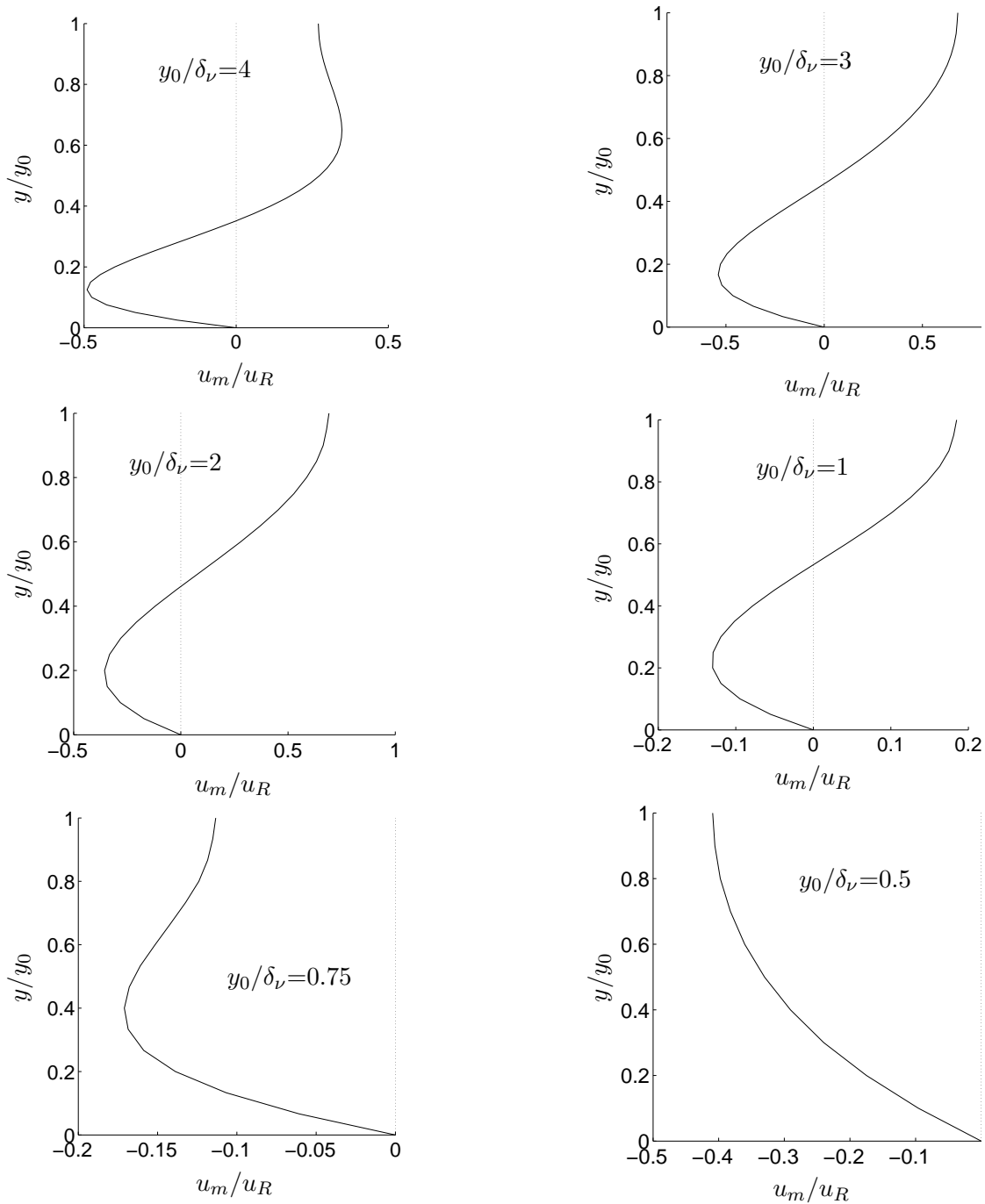


FIG. 5.4.5 – Profil de la vitesse axiale moyenne u_m dans la section SM du canal au-dessus de la plaque, pour plusieurs valeurs de y_0/δ_ν . u_m est adimensionnée par la vitesse de Rayleigh $u_R = 3u_A^2/16c_0$.

entre deux plaques du stack en tenant compte de la conditions de symétrie). La limite entre ces deux tourbillons est marquée par une ligne interrompue. L'importance du tourbillon intérieur est cependant plus grande que précédemment. Il occupe presque un tiers de la hauteur du domaine. Si l'on diminue la hauteur du domaine ($y_0/\delta_\nu = 6$), on remarque que l'importance du tourbillon intérieur augmente encore. Ce dernier occupe maintenant plus du tiers de la hauteur du domaine.

Cette augmentation se fait bien sûr au détriment du tourbillon extérieur. Cette tendance se poursuit quand on diminue encore la hauteur du canal. Pour la valeur limite $y_0/\delta_\nu = 4.6$, la vitesse moyenne ne change de signe qu'une seule fois. Le tourbillon intérieur occupe l'intégralité de la hauteur du domaine et le tourbillon extérieur a disparu. En tenant compte des conditions de symétrie sur la frontière du domaine, cela signifie qu'il y a entre deux plaques du stack deux tourbillons contrarotatifs. Si la taille du canal diminue encore la forme du profil de vitesse moyenne se modifie progressivement, puis, pour une valeur de y_0/δ_ν entre 1 et 0.75, une nouvelle transition se produit et le tourbillon interne disparaît à son tour. La vitesse moyenne ne change plus de signe pour les faibles valeurs de y_0/δ_ν .

Les résultats trouvés ici se comparent d'un point de vue qualitatif très favorablement avec les travaux théoriques récents faits par Bailliet *et al.* [14], et par Hamilton *et al.* [60], qui ont traité du streaming dans des canaux de hauteur quelconque. La valeur de y_0/δ_ν pour laquelle le tourbillon extérieur disparaît trouvée ici est 4.6. Si l'on utilise à la place d'une plaque isotherme une plaque adiabatique, cette valeur change et passe à 5.1. Dans leurs travaux sur le streaming se développant dans l'intégralité du résonateur (et de plus en l'absence d'effets thermiques), Hamilton *et al.* [60] trouve une valeur de 5.7. La présente simulation donne une description satisfaisante du streaming dans le stack d'un réfrigérateur thermoacoustique. L'impact de ce streaming sur les flux d'énergie restera à étudier.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre on s'est intéressé à la simulation d'une tranche de résonateur acoustique comprenant une plaque 1D. La majeure partie des résultats a porté sur l'effet thermoacoustique au-dessus de la plaque. Les résultats obtenus avec une plaque isotherme ont été comparés à la théorie linéaire, ainsi qu'à la simulation de Cao *et al.* [27]. Un intérêt particulier a été porté à l'étude de non-linéarités. Il s'est avéré que pour un nombre de Mach important seule la température subit une déformation non-linéaire. Cette déformation tire son origine du terme $\mathbf{u} \cdot \nabla T$ de l'équation d'énergie, qui est important au-dessus de la plaque. Cette déformation est d'autant plus marquée que la plaque est courte et située près du ventre de vitesse. Ainsi, bien que la vitesse ne connaisse pas de déformation non-linéaire (car le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ reste faible), cette dernière joue un rôle important dans la déformation non-linéaire de la température, en particulier par l'intermédiaire du déplacement acoustique. La non-linéarité observée ici n'est pas le fait du résonateur mais est liée à la plaque elle-même. En particulier il a été noté qu'elle est susceptible de se produire même dans un résonateur anharmonique. L'impact sur le flux moyen d'énergie a été évalué : ce flux qui varie comme le carré du nombre de Mach à faible niveau, conformément

aux attentes de la théorie linéaire, n'est plus proportionnel qu'au nombre de Mach à des niveaux plus élevés.

La suite du travail a consisté à utiliser pour la plaque une équation de la chaleur 1D. Ce modèle a permis de mettre en évidence le rôle de la dissipation visqueuse. De plus la différence de température apparaissant entre les extrémités de la plaque a pu être comparée aux prédictions de la théorie linéaire. Cette dernière a été légèrement modifiée pour tenir compte des effets de bord, ainsi que de la différence entre la température moyenne dans le fluide et celle dans la plaque. La comparaison entre les résultats numériques et la théorie linéaire modifiée a été favorable aux faibles nombres de Mach. Toutefois un écart est apparu à des nombres de Mach plus élevés. Cet écart a pu être attribué à la non-linéarité de température déjà observée avec une plaque isotherme. En particulier, l'écart entre la théorie linéaire modifiée et les simulations est apparu plus important à proximité du ventre de vitesse que du ventre de pression, venant confirmer et expliquer les observations expérimentales faites par Atchley *et al.* [10]. Dans tous les cas, les prédictions de la théorie linéaire étaient supérieures à celles de la théorie linéaire modifiée. Ainsi, dans une comparaison de résultats numériques ou expérimentaux avec la théorie linéaire (non modifiée), les écarts peuvent être dissociés en deux parties : une première due à un non respect des hypothèses de la théorie linéaire (en particulier celle d'uniformité de la température moyenne dans la direction y), et une deuxième, due à la présence d'effets non-linéaires. La première partie correspond à l'écart entre la théorie linéaire et la théorie linéaire modifiée.

Pour terminer, une étude des mouvements moyens à proximité du stack a été entreprise. Deux zones ont été distinguées. En bouts de plaque, des tourbillons dus aux effets de bord voient leur amplitude varier comme le nombre de Mach. Au centre de la plaque des mouvements moyens d'ordre 2 (leur amplitude varie comme le carré du nombre de Mach) correspondent à l'acoustic streaming. L'influence de la hauteur du domaine de calcul sur ce streaming a été étudiée, en particulier pour des hauteurs de l'ordre de l'épaisseur visqueuse, rejoignant une problématique actuelle. Il a été observé qu'à une hauteur du canal importante correspondent 2 tourbillons au-dessus d'une plaque du stack, un tourbillon extérieur, et un tourbillon intérieur de couche limite. Quand la hauteur du canal diminue, le tourbillon intérieur croît au détriment du tourbillon extérieur, lequel finit par disparaître. Si la diminution se poursuit c'est enfin le tourbillon intérieur qui disparaît à son tour. Il a aussi été signalé que la nature de la condition thermique à la plaque (adiabatique/isotherme) semble avoir une importance non négligeable sur les caractéristiques du streaming. L'impact des mouvements moyens sur le flux d'énergie reste à étudier.

Les éléments 1D étudiés dans ce chapitre, isothermes et non-isothermes, mis en série, permettent de construire un outil de calcul 1D comprenant un noyau thermoacoustique complet, composé

d'une plaque et d'échangeurs de chaleur. Il fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 6

Echangeurs de chaleur 1D

6.1 Présentation

Les échangeurs de chaleur font partie des éléments essentiels des réfrigérateurs thermoacoustiques. Une méthodologie de dimensionnement fait pourtant défaut, malgré l'intérêt croissant qui leur est porté (voir section 1.3.7). Il est communément admis que la longueur d'un échangeur de chaleur ainsi que la distance entre un échangeur de chaleur et une plaque du stack doivent être de l'ordre de grandeur du déplacement acoustique. Cette prédiction issue du modèle lagrangien simple donné à la section 1.1.3 (voir en particulier l'expression (1.1.6)) a été vérifiée expérimentalement par Duffourd [40] et numériquement par Worlikar [144], Besnoin [18], et Marx *et al.* [81, 82, 80]. Toutefois, le déplacement acoustique ne fournit qu'un ordre de grandeur et il convient de fournir une estimation plus précise pour optimiser le réfrigérateur. En effet nous verrons dans la suite qu'une erreur de dimensionnement peut entraîner des pertes importantes d'efficacité.

Le domaine de simulation utilisé est celui de la figure 2.3.1 et le maillage a été présenté à la section 3.3.1. Les notations utilisées dans la suite sont précisées à la figure 6.1.1. La plaque FC est

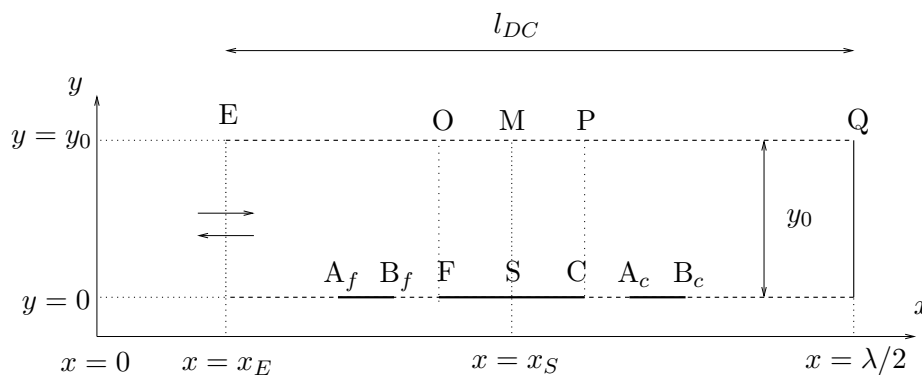


FIG. 6.1.1 – Domaine de calcul incluant des échangeurs de chaleur 1D.

modélisée par une équation de la chaleur 1D. Les échangeurs froid, $A_f B_f$, et chaud, $A_c B_c$, sont des plaques isothermes dont les températures sont imposées et valent respectivement T_f et T_c . En prenant comme référence l'état au repos, on notera $T_f = T_0 + T'_f$ et $T_c = T_0 + T'_c$. La géométrie à proximité de l'empilement est précisée à la figure 6.1.2. Comme auparavant, L est la longueur

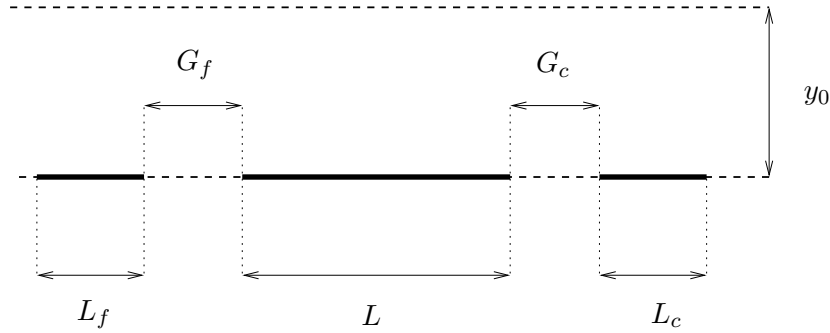


FIG. 6.1.2 – Définition de la géométrie à proximité du stack et des échangeurs.

d'une plaque du stack et y_0 la hauteur du domaine de simulation, c'est-à-dire la demi-distance entre deux plaques du stack. On note L_f la longueur de l'échangeur froid, L_c celle de l'échangeur chaud, G_f la distance entre l'échangeur froid et la plaque, et G_c la distance entre l'échangeur chaud et la plaque.

Dans la section 6.2 suivante, une description des flux moyens d'énergie dans le domaine de calcul est donnée. Ensuite, l'influence des paramètres importants (la température des échangeurs à la section 6.3 et les paramètres géométriques à la section 6.4) sur la puissance et l'efficacité du réfrigérateur sont étudiées. De premières conclusions quant au dimensionnement des échangeurs de chaleur peuvent être tirées.

6.2 Flux moyens d'énergie

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux flux d'énergie dans le domaine de calcul. Rappelons qu'en un point (x, y) du fluide on peut définir un vecteur flux d'énergie $\dot{\mathbf{h}}(x, y, t)$ et sa moyenne temporelle $\dot{\mathbf{h}}_m(x, y)$ dont les unités sont le W.m^{-2} . Les composantes de ces vecteurs sont données par (5.2.3) et (5.2.4), ainsi que (5.2.6) et (5.2.7). Ces vecteurs tiennent compte de contributions d'origines diverses, comme les transferts d'énergie par conduction de la chaleur ou ceux par convection d'enthalpie. On pourrait tracer le champ de ces vecteurs comme on l'a fait pour une plaque isotherme (figure 5.2.12). Mais ici on considère les flux d'énergie globaux. Par exemple le flux total moyen d'énergie dans la direction x noté $\dot{H}_{xm}(x)$ s'obtient en intégrant $\dot{h}_{xm}(x, y)$ sur une section du canal. On rappelle la définition (5.2.21) de \dot{H}_{xm} :

$$\dot{H}_{xm}(x) = \int_0^{y_0} \dot{h}_{xm}(x, y) dy. \quad (6.2.1)$$

Il s'exprime en W.m^{-1} , c'est à dire en Watt par unité de longueur de la plaque dans la direction perpendiculaire au plan de la feuille. Comme on l'a fait à la section 1.2.3 on décompose ce flux d'énergie en flux de travail et de chaleur. On considère ainsi les flux suivants :

- le flux moyen de travail sur une section $\dot{W}_m(x)$ qui vaut :

$$\dot{W}_m(x) = \int_0^{y_0} \langle p(x, y)u(x, y) \rangle_t dy. \quad (6.2.2)$$

$\dot{W}_0 = \dot{W}_m(x = 0)$ est la puissance acoustique fournie au domaine de calcul, c'est-à-dire celle qui est absorbée par le réfrigérateur pour fonctionner.

- la quantité de chaleur moyenne $\dot{Q}_{f,m}$ échangée avec la source froide par unité de temps (c'est donc une puissance moyenne), qui s'obtient en intégrant $\dot{h}_{ym}(x, y)$ sur la longueur de l'échangeur froid :

$$\dot{Q}_{f,m} = \int_{\text{échangeur froid}} \dot{h}_{ym}(x, y = 0) dx. \quad (6.2.3)$$

Du fait de la condition d'adhérence sur l'échangeur, seule la conduction thermique dans la direction y contribue à $\dot{h}_{ym}(x, y = 0)$, comme c'était également le cas pour le flux d'énergie à la plaque h_{ym}^{plaque} (voir expression (5.2.10)).

- la quantité de chaleur moyenne $\dot{Q}_{c,m}$ échangée avec la source chaude, qui se calcule d'une manière analogue à $\dot{Q}_{f,m}$:

$$\dot{Q}_{c,m} = \int_{\text{échangeur chaud}} -\dot{h}_{ym}(x, y = 0) dx. \quad (6.2.4)$$

Le signe $-$ dans l'expression précédente assure que $\dot{Q}_{c,m}$ est positive quand l'énergie passe du fluide vers l'échangeur chaud. De nouveau seule la conduction thermique contribue à $\dot{h}_{ym}(x, y = 0)$ et à $\dot{Q}_{c,m}$.

- les quantités de chaleur transportées le long de la plaque par conduction dans le fluide $\dot{Q}_{m,cond}(x)$ et dans le solide $\dot{Q}_{m,cond,s}(x)$:

$$\dot{Q}_{m,cond}(x) = \int_0^{y_0} K \langle \frac{\partial T}{\partial x} \rangle_t dy. \quad (6.2.5)$$

Puisque la plaque du stack est une plaque 1D, on a simplement

$$\dot{Q}_{m,cond,s}(x) = K_s \langle \frac{\partial T_s}{\partial x} \rangle_t, \quad (6.2.6)$$

T_s étant déjà la moyenne de la température sur l'épaisseur d'une plaque 2D.

- la quantité de chaleur \dot{Q}_m transportée le long de la plaque par le mécanisme thermoacoustique

(le flux moyen d'entropie convecté par l'onde). En régime stationnaire, conformément à (1.2.37), on peut simplement écrire :

$$\dot{Q}_m(x) = \dot{H}_{xm}(x) - \dot{W}_m(x) - \dot{Q}_{m,cond}(x) - \dot{Q}_{m,cond,s}(x). \quad (6.2.7)$$

Les différents flux sont représentés de manière schématique à la figure 6.2.1. \dot{Q}_m et $\dot{Q}_{m,cond,s}$ sont présents dans tout le domaine de calcul et dépendent de x mais ne sont représentés sur cette figure qu'au-dessus de la plaque, là où leur valeur est la plus importante. On rappelle que la

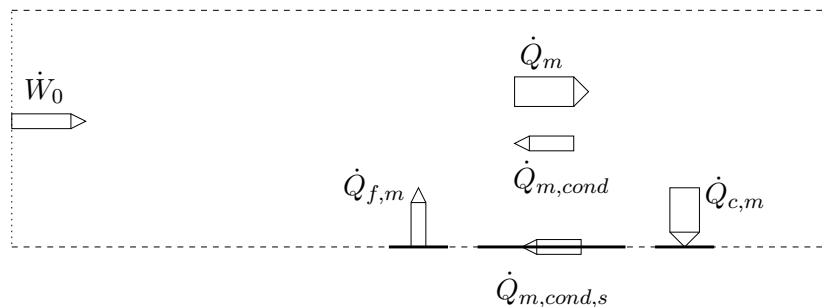


FIG. 6.2.1 – Représentation schématique des flux d'énergie moyens dans le domaine de calcul.

quantité \dot{H}_0 définie par $\dot{H}_0 = \rho_{ref} v_{ref} v_{ref}^2 l_{ref} = \rho_0 c_o^3 \delta_\nu$ s'exprime en W.m^{-1} et sert de flux moyen de référence pour l'adimensionnalisation des différents flux.

Tous ces flux vont maintenant être calculés et représentés dans le domaine de calcul en fonction de l'abscisse x . On considère la configuration correspondant au cas 3-2. Pour la plaque on a $L = \lambda/40$ et $kx_S = 2.13$. La longueur d'un échangeur est cinq fois plus faible que celle de la plaque, et la distance plaque/échangeurs vaut un dixième de cette longueur. Le nombre de Mach au-dessus de la plaque vaut $M_a = 0.04$. Les moyennes sont calculées sur les deux dernières périodes du calcul. La figure 6.2.2 représente le flux de travail $\dot{W}_m(x)$ et le flux de chaleur thermoacoustique $\dot{Q}_m(x)$ en fonction de x sur toute la longueur du domaine de calcul. La figure 6.2.3 représente le flux d'énergie total $\dot{H}_{xm}(x)$, ainsi que le flux d'énergie $\dot{H}_{xm}(x) - \dot{Q}_{m,cond}(x)$ qui existerait s'il n'y avait pas de conduction dans le fluide. Sur ces figures sont aussi représentées par des flèches les quantités $\dot{Q}_{f,m}$, $\dot{Q}_{c,m}$, et \dot{W}_0 .

Entre la source et l'échangeur de chaleur froid, le flux de travail est constant et égal à sa valeur d'entrée dans le domaine de calcul, \dot{W}_0 . Jusqu'à l'échangeur de chaleur en effet l'onde n'est pratiquement pas modifiée et aucune énergie n'est absorbée par le milieu. A partir du début de l'échangeur froid le flux de travail chute linéairement. Le travail est en effet absorbé par la plaque pour être converti en flux de chaleur. Après l'échangeur chaud le flux de travail est nul. Tout le travail disponible en entrée a été absorbé. En terme d'onde ceci signifie qu'entre l'échangeur

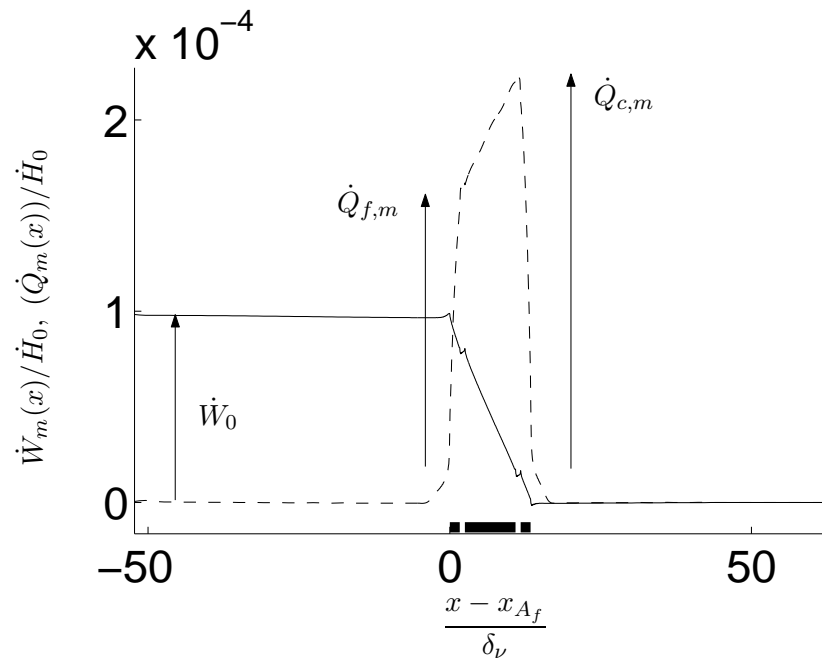


FIG. 6.2.2 – Flux de travail et flux de chaleur d’origine thermoacoustique dans le fluide. — $\dot{W}_m(x)$ – – $\dot{Q}_m(x)$. Les traits en gras représentent la position axiale de l’ensemble plaque/échangeurs de chaleur. Cas 3-2.

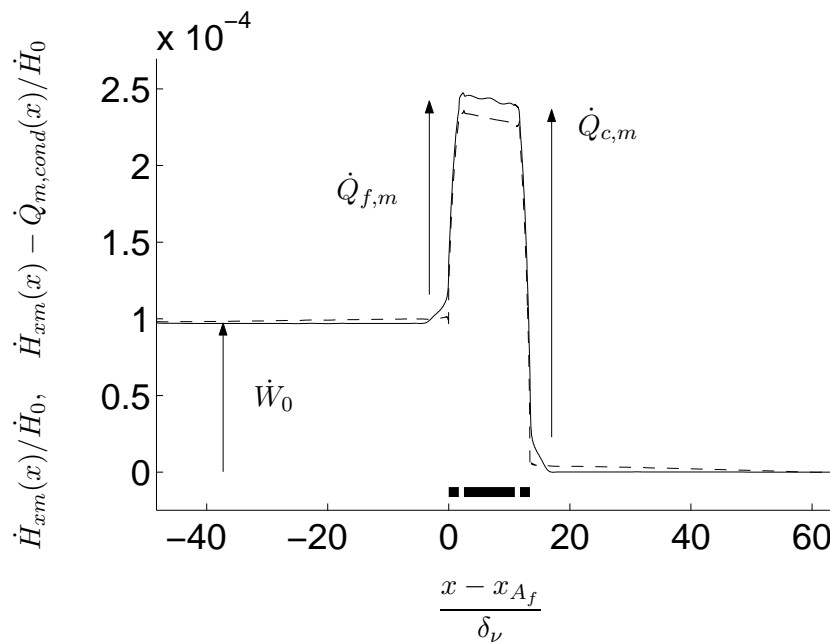


FIG. 6.2.3 – Flux d’énergie total $\dot{H}_{xm}(x)$ dans le fluide, et flux d’énergie total auquel on a soustrait la conduction thermique dans le fluide $\dot{H}_{xm}(x) - \dot{Q}_{m,cond}(x)$. – – $\dot{H}_{xm}(x)$ — $(\dot{H}_{xm}(x) - \dot{Q}_{m,cond}(x))$. Les traits en gras représentent la position axiale de l’ensemble plaque/échangeurs de chaleur. Cas 3-2.

chaud et le fond du résonateur on a une onde acoustique purement stationnaire : le déphasage entre la pression et la vitesse vaut $\pi/2$, ce qui rend la moyenne temporelle du produit de ces deux

quantités nulle. Au contraire, entre la source et l'échangeur froid, on a approximativement une onde stationnaire mais qui contient une composante d'onde progressive, ce qui permet au flux de travail d'être non nul.

Entre la source et l'échangeur froid, le flux de chaleur transporté par effet thermoacoustique est nul. Ce flux connaît une discontinuité au passage de l'échangeur froid, où il augmente de $\dot{Q}_{f,m}$, la chaleur extraite à cet échangeur. Puis il augmente linéairement jusqu'à l'échangeur chaud. L'augmentation du flux de chaleur provient de la diminution du flux de travail, les plaques du stack étant présentes pour effectuer la conversion. A la traversée de l'échangeur chaud le flux connaît une nouvelle discontinuité. Il chute de $\dot{Q}_{c,m}$, quantité de chaleur qui est cédée à l'échangeur chaud. Entre l'échangeur chaud et le fond du résonateur il n'y a à nouveau pas de flux de chaleur d'origine thermoacoustique.

L'évolution du flux d'énergie total est cohérente avec celle du flux de travail et de chaleur transporté par effet thermoacoustique. Entre la source et l'échangeur froid, le flux d'énergie est constant. Il est égal au flux de travail et représente le flux d'énergie convertible en pompage thermoacoustique. A la traversée de l'échangeur froid, le flux d'énergie augmente de la quantité d'énergie $\dot{Q}_{f,m}$ cédée par l'échangeur froid. Entre les deux échangeurs le flux est pratiquement constant. En négligeant les flux conductifs on peut en effet approximativement écrire $\dot{H}_{xm}(x) \sim \dot{W}_m(x) + \dot{Q}_m(x)$. \dot{W}_m diminue pendant que \dot{Q}_m augmente, leur somme \dot{H}_{xm} restant elle constante. Au passage de l'échangeur de chaleur chaud le flux chute de la quantité $\dot{Q}_{c,m}$. Toute l'énergie est alors cédée à l'échangeur. Entre l'échangeur chaud et le fond du résonateur, le flux est quasiment nul. La petite contribution vient du flux conductif. De la chaleur diffuse en effet de l'échangeur chaud vers le fond du résonateur. Sur la figure 6.2.3 on a également représenté le flux d'énergie en lui soustrayant le flux de chaleur par conduction. On constate que l'effet principal de la conduction est d'abaisser le flux d'énergie entre les deux échangeurs, ce qui a bien évidemment un effet néfaste sur le réfrigérateur.

Les évolutions trouvées ci-dessus sont bien celles prévues par Swift (réf. [118], figure 29).

Un bilan précis des échanges d'énergie peut être fait en considérant le volume de contrôle représenté en gris sur la figure 6.2.4. Cette figure représente également les flux entrant et sortant de ce domaine de contrôle. Le flux $\dot{H}_{e,m}$ est le flux en provenance de la source entrant dans le domaine de contrôle. Il est essentiellement égal au flux de travail \dot{W}_0 (à un flux de conduction près). Le flux $\dot{Q}_{fond,m}$ est un flux de chaleur par conduction dirigé vers le fond du résonateur. Comme on l'a signalé auparavant, la zone située entre l'échangeur chaud et le fond du résonateur n'est pas dans un état stationnaire (à la différence de la zone située au-dessus de la plaque), ce

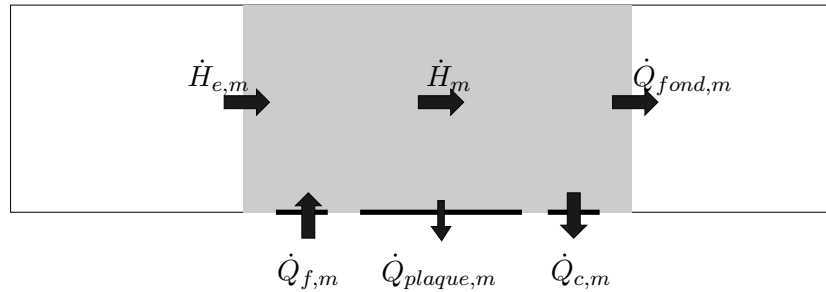


FIG. 6.2.4 – Flux d'énergie pénétrant ou sortant du domaine de contrôle représenté en gris.

$\frac{\dot{H}_{e,m}}{\dot{H}_0} \sim \frac{\dot{W}_0}{\dot{H}_0}$	$\frac{\dot{Q}_{f,m}}{\dot{H}_0}$	$\frac{\dot{H}_m}{\dot{H}_0}$	$\frac{\dot{Q}_{c,m}}{\dot{H}_0}$	$\frac{\dot{Q}_{fond,m}}{\dot{H}_0}$	$\frac{\dot{Q}_{plaque,m}}{\dot{H}_0}$
$1.00 \cdot 10^{-4}$	$1.33 \cdot 10^{-4}$	$2.31 \cdot 10^{-4}$	$2.11 \cdot 10^{-4}$	$0.10 \cdot 10^{-4}$	$0.003 \cdot 10^{-4}$

TAB. 6.2.1 – Valeur des différents flux entrant et sortant du domaine de contrôle représenté à la figure 6.2.4.

qui explique l'existence de $\dot{Q}_{fond,m}$. $\dot{Q}_{plaque,m}$ est le flux d'énergie total échangé avec la plaque. Les autres flux ont déjà été donnés. Le tableau 6.2.1 donne la valeur de ces différents flux. La somme des flux entrant et des flux sortant n'est pas tout à fait égale, l'erreur étant d'environ 5%. Cette erreur peut être expliquée par le fait que le fluide situé dans le volume de contrôle n'est pas encore parvenu à un état stationnaire. Malgré cette petite erreur on remarque que les échanges vérifient $\dot{Q}_{c,m} \sim \dot{Q}_{f,m} + \dot{W}_0$, comme le résume la figure 6.2.3, conformément au premier principe de la thermodynamique. On constate également que le flux de chaleur échangé avec la plaque est négligeable par rapport à $\dot{Q}_{f,m}$ et $\dot{Q}_{c,m}$. La plaque est indispensable pour réaliser l'effet thermoacoustique mais n'intervient que très peu dans le bilan des échanges.

6.3 Température des échangeurs de chaleur

Dans une application pratique la température de l'échangeur chaud est la température ambiante, et la température de l'échangeur froid la température de réfrigération désirée. Dans ce paragraphe on cherche à étudier pour une configuration donnée l'influence de ces températures. On fixe la géométrie ainsi que l'intensité de l'onde et on fait varier l'excès de température de la source froide T'_f , en prenant simplement pour la source chaude $T'_c = -T'_f$. Les cas concernés sont les cas 3-1 à 3-6.

La figure 6.3.1 montre la quantité de chaleur extraite de l'échangeur froid en fonction du rapport T_f/T_c entre les températures des deux échangeurs de chaleur. On constate que la quantité de froid extraite de l'échangeur froid croît linéairement avec T_f/T_c , ce qui est confirmé par

les mesures de Hofler [61]. Quand cette différence est trop importante (autrement dit quand la température de l'échangeur froid est trop basse), $\dot{Q}_{f,m}$ devient négative : le pompage thermoacoustique n'est plus assez important pour s'opposer au sens "naturel" des transferts de chaleur, c'est-à-dire du fluide vers l'échangeur froid et de l'échangeur chaud vers le fluide. Pour une puissance de l'onde donnée il y a une température minimale fixée pour la source froide. La figure 6.3.2

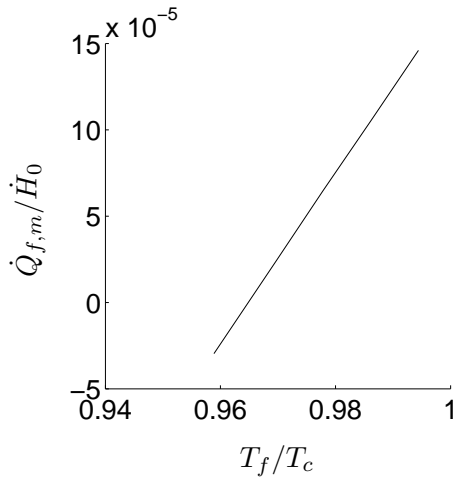


FIG. 6.3.1 – Quantité de chaleur $\dot{Q}_{f,m}$ extraite à l'échangeur froid en fonction du rapport des températures des deux échangeurs.

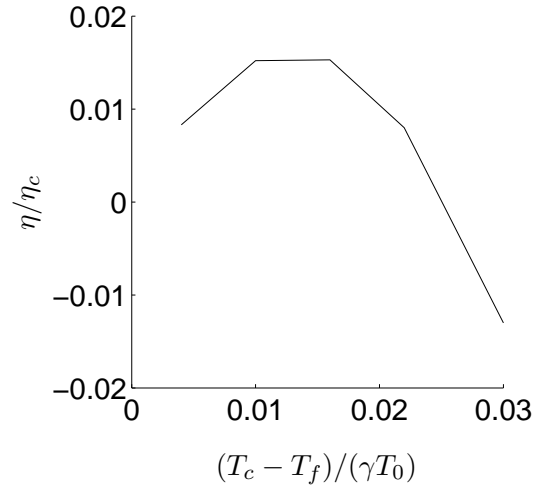


FIG. 6.3.2 – Efficacité du réfrigérateur thermoacoustique normalisée par l'efficacité de Carnot en fonction de la différence de température entre les deux échangeurs.

montre l'efficacité du réfrigérateur, en fonction de la différence de température $T_c - T_f$ imposée entre les extrémités du stack. L'efficacité $\eta = \dot{Q}_{f,m}/\dot{W}_0$ est adimensionnalisée par l'efficacité de Carnot $\eta_C = T_f/(T_c - T_f)$. L'efficacité adimensionnalisée admet un maximum aux alentours de $(T_c - T_f)/(\gamma T_0) \sim 0.016$. Pour une configuration identique la plaque seule sans échangeurs de chaleur développe une différence de température entre ses extrémités égale à $\Delta T/(\gamma T_0) \sim 0.02$. La différence de température optimale à imposer est donc dans ce cas légèrement inférieure à la différence qui apparaît naturellement pour une plaque seule. Pour une différence de température imposée $T_c - T_f$ trop importante, l'efficacité devient négative, ce qui est cohérent avec les observations faites ci-dessus pour $\dot{Q}_{f,m}$.

Afin de comprendre les phénomènes liés aux échanges locaux d'énergie au niveau des échangeurs on représente sur les figures 6.3.3 et 6.3.4 le flux de chaleur moyen $\dot{h}_{ym}(x, y = 0)$ dans la direction y à proximité du stack pour deux températures différentes de la source froide : $(T_f - T_0)/(\gamma T_0) = -0.005$ et $(T_f - T_0)/(\gamma T_0) = -0.008$. On remarque que la distribution de \dot{h}_{ym} sur l'échangeur froid n'est pas uniforme. La plus grande partie de la chaleur est retirée du côté de l'échangeur

opposé à la plaque (c'est-à-dire du côté A_f). De plus pour $(T_f - T_0)/(\gamma T_0) = -0.008$, sur une

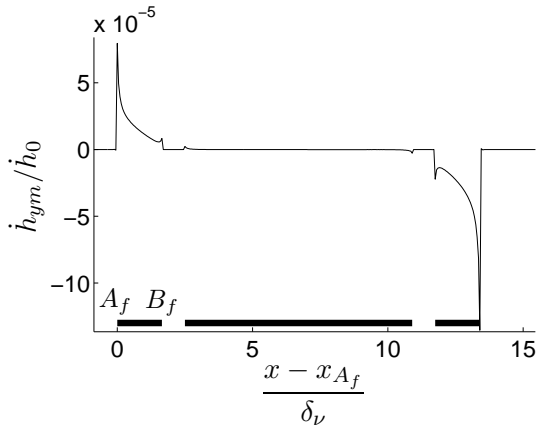


FIG. 6.3.3 – Flux de chaleur \dot{h}_{ym} en $y=0$ à proximité du stack et des échangeurs pour $(T_f - T_0)/(\gamma T_0) = -0.005$. Les traits en gras représentent la position axiale de l'ensemble plaque/échangeurs de chaleur.

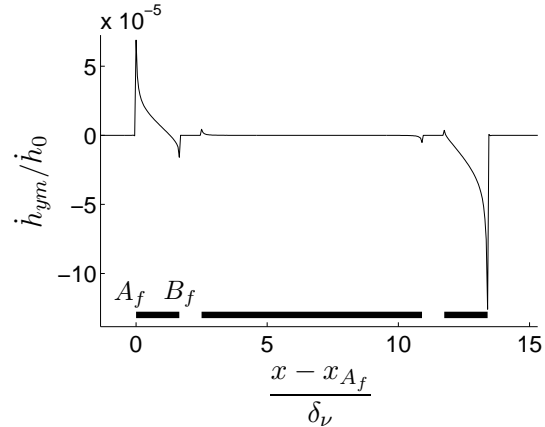


FIG. 6.3.4 – Flux de chaleur \dot{h}_{ym} en $y=0$ à proximité du stack et des échangeurs pour $(T_f - T_0)/(\gamma T_0) = -0.008$. Les traits en gras représentent la position axiale de l'ensemble plaque/échangeurs de chaleur.

portion de l'échangeur froid située du côté du stack (c'est-à-dire du côté B_f), \dot{h}_{ym} est négatif. Sur cette portion de la chaleur est cédée par le fluide à l'échangeur, ce qui va à l'encontre du fonctionnement espéré. On souhaite en effet qu'en tous les points de l'échangeur de la chaleur soit retirée à ce dernier. Pour caractériser ce phénomène, on introduit deux nouvelles quantités, $\dot{Q}_{f,m}^+$ et $\dot{Q}_{f,m}^-$, qui sont respectivement les parties positive et négative de $\dot{Q}_{f,m}$. Elles sont définies par :

$$\dot{Q}_{f,m}^+ = \int_{\text{portion de l'échangeur froid où } \dot{h}_{ym} > 0} \dot{h}_{ym}(x, y = 0) dx, \quad (6.3.1)$$

$$\dot{Q}_{f,m}^- = \int_{\text{portion de l'échangeur froid où } \dot{h}_{ym} < 0} \dot{h}_{ym}(x, y = 0) dx. \quad (6.3.2)$$

On a $\dot{Q}_{f,m}^+ > 0$, $\dot{Q}_{f,m}^- < 0$ et bien sûr $\dot{Q}_{f,m} = \dot{Q}_{f,m}^+ + \dot{Q}_{f,m}^-$. Le rapport $|\dot{Q}_{f,m}^-/\dot{Q}_{f,m}^+|$ est donné au tableau 6.3.1 en fonction de la température froide T_f . Pour des températures froides pas trop

$(T_f - T_0)/(\gamma T_0)$	-0.002	-0.005	-0.008	-0.011	-0.015
$ \dot{Q}_{f,m}^-/\dot{Q}_{f,m}^+ $	0 %	0 %	9.8 %	51 %	200 %

TAB. 6.3.1 – Rapport de la partie négative de $\dot{Q}_{f,m}$ à la partie positive en fonction de T_f .

froides ($(T_f - T_0)/(\gamma T_0) = -0.002$ ou -0.005) le rapport $|\dot{Q}_{f,m}^-/\dot{Q}_{f,m}^+|$ est nul, ce qui signifie que le flux de chaleur est dirigé du fluide vers l'échangeur sur toute la surface de ce dernier, comme c'est la cas à la figure 6.3.3. Pour les autres températures, plus basses, $|\dot{Q}_{f,m}^-/\dot{Q}_{f,m}^+|$ n'est plus nul, ce

qui correspond à la situation de la figure 6.3.4. De plus, plus la température de l'échangeur froid est basse et plus la composante "indésirable" $\dot{Q}_{f,m}^-$ est importante. Ceci explique le mécanisme de diminution de $\dot{Q}_{f,m}$ et son changement de signe observés à la figure 6.3.1 quand T_f/T_c diminue. En effet le changement de signe apparaît au moment où la partie négative $\dot{Q}_{f,m}^-$ prend le dessus sur la partie positive $\dot{Q}_{f,m}^+$.

Un dernier point d'intérêt à étudier est la température moyenne du fluide dans la zone située entre l'échangeur froid et la plaque. La température moyenne est tracée aux figures 6.3.5 et 6.3.6 respectivement pour $(T_f - T_0)/(\gamma T_0) = -0.003$ et $(T_f - T_0)/(\gamma T_0) = -0.008$. Dans le premier cas on remarque que la température de l'extrémité de la plaque située vers l'échangeur froid est à peine plus élevée que la température de l'échangeur froid. La température entre l'échangeur et la plaque est même inférieure à la température de l'échangeur. La situation est différente dans le second cas où la différence de température entre la plaque et l'échangeur est plus importante. En fait plus on diminue la température de l'échangeur froid, plus la différence est marquée. De plus cette différence croît linéairement avec le rapport T_f/T_c , comme le montre la figure 6.3.7.

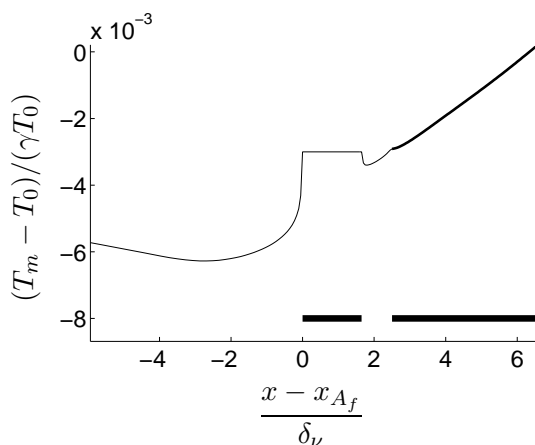


FIG. 6.3.5 – Température moyenne : — dans le fluide en $y=0$, — dans la plaque (confondue avec celle du fluide). $(T_f - T_0)/(\gamma T_0) = -0.003$.

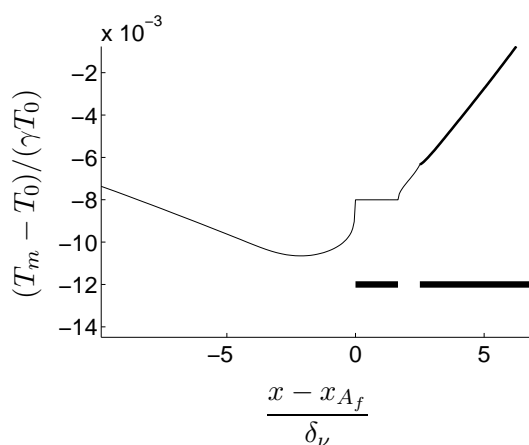


FIG. 6.3.6 – Température moyenne : — dans le fluide en $y=0$, — dans la plaque (confondue avec celle du fluide). $(T_f - T_0)/(\gamma T_0) = -0.008$.

6.4 Influence des paramètres géométriques

Plusieurs paramètres géométriques sont très importants pour caractériser les échangeurs de chaleur : il s'agit de leurs longueurs L_f et L_c , et de leurs positions G_f et G_c par rapport à la plaque. Comme on l'a souligné ces grandeurs sont classiquement de l'ordre du déplacement acoustique d_a . Le déplacement acoustique est la distance séparant la particule au maximum de son oscillation de sa position au repos. Il dépend de la position de repos de la particule dans le

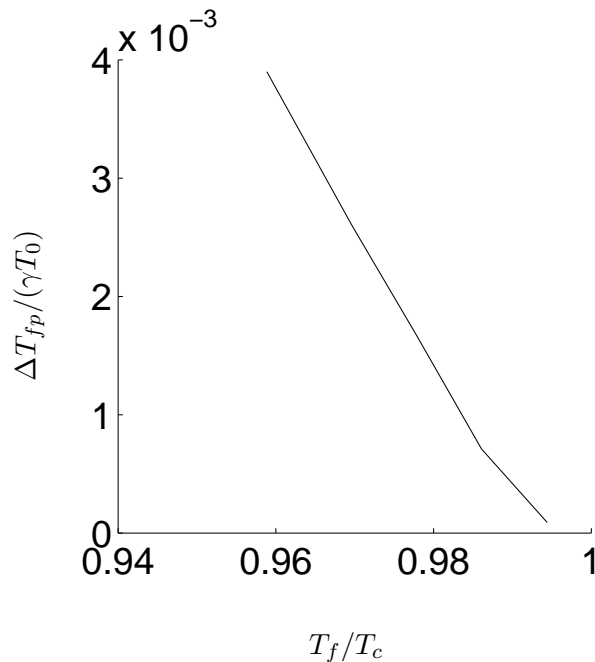


FIG. 6.3.7 – Différence ΔT_{fp} entre la température moyenne du bord froid F de la plaque et celle de l'échangeur froid (en particulier celle de son extrémité A_f), en fonction du rapport T_f/T_c .

résonateur. Il est ici mesuré au-dessus du centre de la plaque, et au centre du canal ($y = y_0$), c'est-à-dire au point M. Comme dans le cas d'une plaque seule, un autre paramètre influence de manière importante le flux thermoacoustique, il s'agit du rapport y_0/δ_κ entre la hauteur du canal et l'épaisseur de couche limite thermique. L'influence de ces différents paramètres sur la puissance du réfrigérateur et son efficacité font l'objet de la présente section.

Pour étudier l'influence du paramètre G_f , on fait varier ce paramètre en fixant le paramètre L_f . Les cas concernés sont numérotés 3-7 à 3-11. On trace sur la figure 6.4.1 la quantité de chaleur $\dot{Q}_{f,m}$ extraite de l'échangeur froid en fonction de la distance G_f/d_a entre cet échangeur et la plaque. La longueur de l'échangeur est maintenue fixe à $L_f/d_a = 0.72$. L'efficacité correspondante η , normalisée par l'efficacité de Carnot η_C , est donnée à la figure 6.4.2. La quantité de froid $\dot{Q}_{f,m}$ extraite de l'échangeur froid admet un maximum pour $G_f/d_a \sim 0.3$. L'efficacité relative maximale admet elle aussi un maximum mais pour une valeur $G_f/d_a \sim 0.2$ inférieure. Un compromis entre la puissance et l'efficacité est donc nécessaire. La diminution de $\dot{Q}_{f,m}$ observée à la figure 6.4.1 pour des valeurs élevées de G_f/d_a est attendue. En effet si l'échangeur est trop loin de la plaque, il n'y aura pas de couplage entre ces deux éléments, et donc pas de transfert à l'échangeur. La distance maximale attendue à partir de laquelle il n'y a plus de couplage est l'ordre de $2d_a + \delta_\kappa \sim 2d_a$. En revanche la diminution de $\dot{Q}_{f,m}$ quand G_f/d_a tend vers zero est

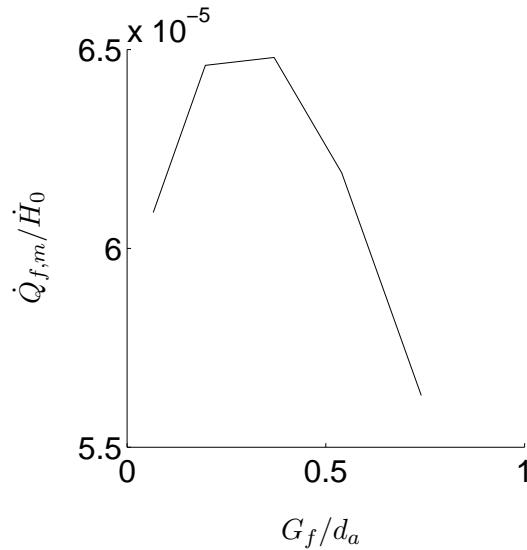


FIG. 6.4.1 – Quantité de chaleur extraite de l'échangeur froid en fonction de la distance entre l'échangeur froid et la plaque. $L_f/d_a = 0.72$.

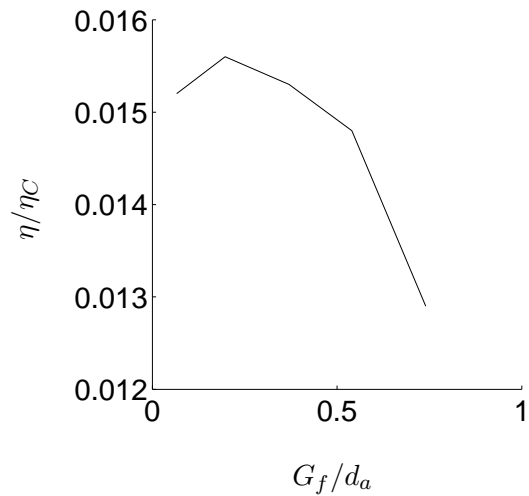


FIG. 6.4.2 – Efficacité normalisée par l'efficacité de Carnot en fonction de la distance entre l'échangeur froid et la plaque. $L_f/d_a = 0.72$.

une surprise. Elle s'explique par la distribution du flux de chaleur moyen \dot{h}_{ym} dans le fluide au niveau de l'échangeur froid, tracée à la figure 6.4.3. Comme l'a constaté Besnoin [18] \dot{h}_{ym} est

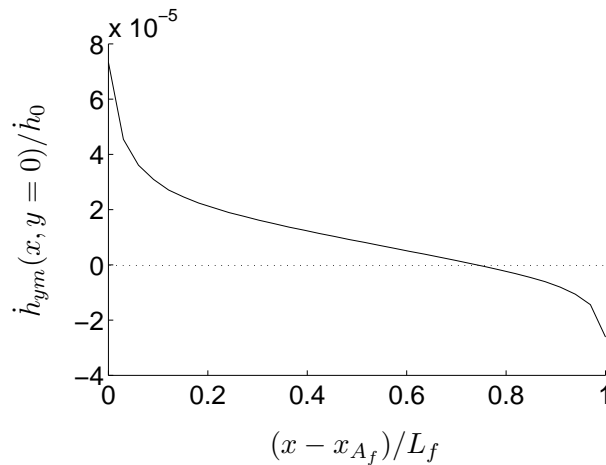


FIG. 6.4.3 – Flux de chaleur moyen à l'échangeur froid.

négatif sur une partie de l'échangeur froid faisant face au stack, située ici entre $x - x_{A_f} = 0.75L_f$ et $x - x_{A_f} = L_f$. Ce phénomène avait déjà été observé à la figure 6.3.4 pour une température T_f trop basse. A cette occasion on avait défini $\dot{Q}_{f,m}^+$ et $\dot{Q}_{f,m}^-$, cette dernière étant la partie négative non désirée de $\dot{Q}_{f,m}$ (voir équations (6.3.1) et (6.3.2)). Le rapport $|\dot{Q}_{f,m}^-/\dot{Q}_{f,m}^+|$ est donné au tableau 6.4.1. Il se trouve que plus G_f/d_a est faible, plus $\dot{Q}_{f,m}^-$ est importante par rapport à $\dot{Q}_{f,m}^+$,

G_f/d_a	0.07	0.2	0.37	0.54	0.74
$ \dot{Q}_{f,m}^-/\dot{Q}_{f,m}^+ $	17,1 %	12.4 %	9.8 %	9.1 %	10 %

TAB. 6.4.1 – Rapport de la partie négative de $\dot{Q}_{f,m}$ à la partie positive en fonction de G_f/d_a .

ce qui fait baisser la valeur de $\dot{Q}_{f,m}$. Ainsi un échangeur collé à la plaque n'offre ni un rendement optimal, ni une puissance optimale, même dans le cas où l'interface plaque/échangeur ne permettrait aucun flux de chaleur par conduction. Une telle conclusion est peu intuitive et a été atteinte par Gusev *et al.* [55] dans un modèle théorique simplifié. Concernant le tableau 6.4.1, une autre remarque peut être faite : la valeur de $|\dot{Q}_{f,m}^-/\dot{Q}_{f,m}^+|$ ne s'annule pas et remonte même quand la valeur de G_f/d_a passe de 0.54 à 0.74. Cette augmentation quand G_f croît a une explication simple. L'échangeur de chaleur n'est rien d'autre qu'une plaque isotherme : quand elle est trop éloignée du stack, c'est-à-dire pour G_f grand, elle a un comportement autonome : de la chaleur est pompée par effet thermoacoustique à l'une de ses extrémités pour être cédée à l'autre. En particulier on peut prévoir que l'on aura $|\dot{Q}_{f,m}^-/\dot{Q}_{f,m}^+| \sim 100\%$ pour une valeur assez grande de G_f/d_a .

On s'intéresse maintenant à l'influence de l'autre paramètre géométrique, c'est-à-dire la longueur de l'échangeur froid. On étudie pour cela les cas 3-12 à 3-18. Sur la figure 6.4.4 on trace $\dot{Q}_{f,m}$ en fonction de L_f/d_a en ayant cette fois-ci fixé $G_f/d_a = 0.37$. L'efficacité correspondante est donnée à la figure 6.4.5. Les tendances sont les mêmes pour la variation de L_f/d_a que pour la

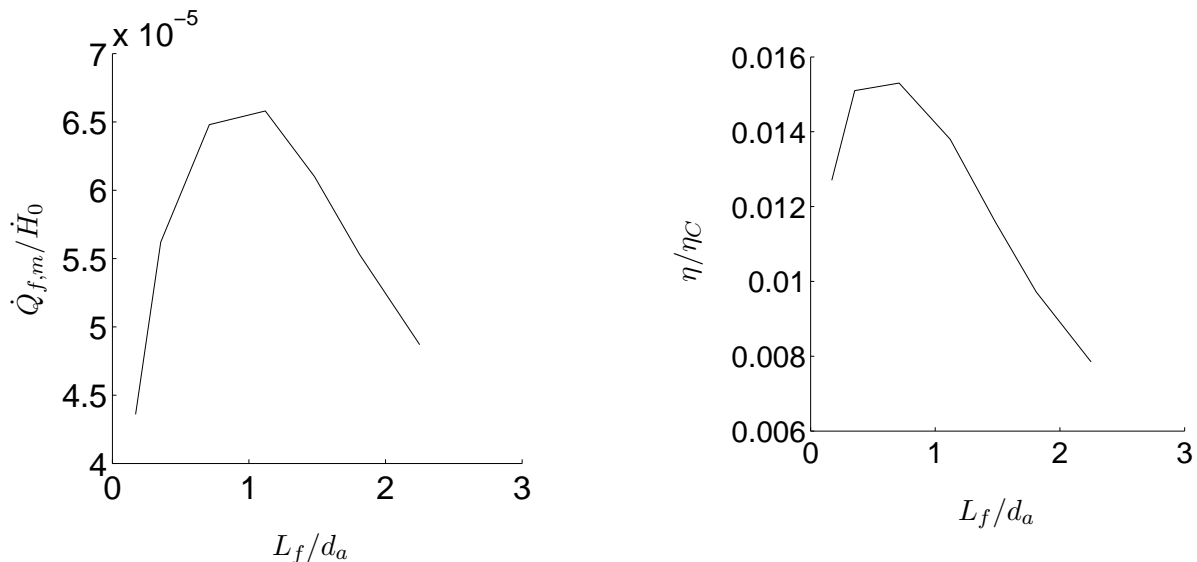


FIG. 6.4.4 – Quantité de chaleur extraite de l'échangeur froid en fonction de la longueur de l'échangeur froid. $G_f/d_a = 0.37$.

FIG. 6.4.5 – Efficacité normalisée par l'efficacité de Carnot en fonction de la longueur de l'échangeur froid. $G_f/d_a = 0.37$.

variation de G_f/d_a . La quantité de chaleur extraite de l'échangeur froid admet un maximum pour $L_f/d_a \sim 1$. L'efficacité relative admet elle aussi un maximum mais pour une valeur $L_f/d_a \sim 0.75$ inférieure. De nouveau un compromis doit être fait entre la puissance et l'efficacité dans le choix de la longueur de l'échangeur. La diminution de $\dot{Q}_{f,m}$ pour des faibles valeurs de L_f/d_a est attendue, puisqu'alors l'échangeur n'est pas assez grand pour remplir au mieux sa fonction. On peut toutefois s'étonner de la chute si brutale de $\dot{Q}_{f,m}$ quand L_f/d_a est élevée. L'explication vient de nouveau de la présence d'un transfert de chaleur non souhaité du fluide vers la plaque sur une partie de l'échangeur faisant face au stack. Le rapport $|\dot{Q}_{f,m}^-/\dot{Q}_{f,m}^+|$ est donné au tableau 6.4.2. Pour des valeurs importantes de L_f/d_a c'est l'augmentation de $\dot{Q}_{f,m}^-$ qui fait chuter $\dot{Q}_{f,m}$, de

L_f/d_a	0.17	0.35	0.71	1.12	1.48	1.81	2.25
$ \dot{Q}_{f,m}^-/\dot{Q}_{f,m}^+ $	0 %	0 %	9.8 %	29 %	44 %	55 %	63 %

TAB. 6.4.2 – Rapport de la partie négative de $\dot{Q}_{f,m}$ à la partie positive en fonction de L_f/d_a .

nouveau parce que l'échangeur a le comportement d'une plaque isotherme isolée.

Pour conclure cette section, on fait varier le dernier paramètre géométrique important de l'étude, δ_κ/y_0 . On fixe pour cela les valeurs de G_f/d_a à 0.37 et de L_f/d_a à 0.72, deux valeurs qui ont donné des efficacités élevées aux paragraphes précédents. On étudie les cas 3-19 à 3-23. Les variations de $\dot{Q}_{f,m}$ et η_C en fonction de δ_κ/y_0 sont données aux figures 6.4.6 et 6.4.7. De nouveau

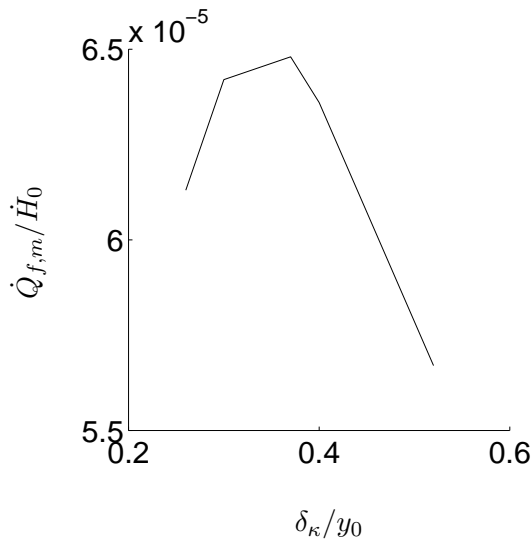


FIG. 6.4.6 – Quantité de chaleur extraite de l'échangeur froid en fonction du paramètre δ_κ/y_0 . $G_f/d_a = 0.37$, $L_f/d_a = 0.72$.

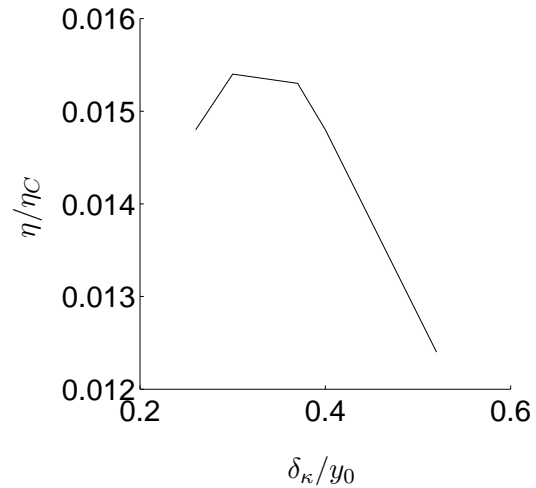


FIG. 6.4.7 – Efficacité normalisée par l'efficacité de Carnot en fonction du paramètre δ_κ/y_0 . $G_f/d_a = 0.37$. $L_f/d_a = 0.72$.

des maxima sont obtenus pour chacune de ces grandeurs, et les valeurs du paramètre δ_κ/y_0 pour ces deux maxima sont différentes, quoique pratiquement égales ici. En particulier la valeur de δ_κ/y_0 pour laquelle la puissance $\dot{Q}_{f,m}$ est maximale est 0.37. Elle correspond à une distance de 5.4 δ_ν entre les plaques du stack. Cette valeur est très différente de la valeur 2.6 qui a été trouvée au chapitre précédent pour la même plaque, à la même position, mais à un nombre de Mach plus faible (cas 1-4). Cette observation traduit le fait que l'optimisation d'une grandeur ou d'un élément ne peut se faire que conjointement avec l'optimisation des autres grandeurs et éléments.

6.5 Conclusion

On a pu simuler l'intégralité d'un système plaque/échangeurs de chaleur monodimensionnels. Les résultats font apparaître une valeur optimale de T_f pour une configuration géométrique et une puissance fixées. Dans une application réelle, on chercherait davantage à déterminer, pour une température de source froide donnée, la puissance à imposer, ce qui est également possible avec la présente simulation. Il existe aussi des valeurs optimales en terme d'efficacité et de puissance pour chacun des paramètres géométriques suivants : la longueur de l'échangeur froid, la distance entre cet échangeur et la plaque, et la hauteur du canal entre deux plaques (ou deux échangeurs). Il faut remarquer que chacun des paramètres optimaux est déterminé avec une configuration fixe pour les autres paramètres. Comme l'a remarqué Besnoin [18], il faudrait optimiser ces paramètres simultanément. Ceci requiert un très grand nombre d'exécutions du programme et ne semble pas être justifié dans le cadre d'une étude 1D.

Lors de l'étude il a été constaté que sur une partie de l'échangeur froid faisant face au stack le transfert de chaleur peut être de sens inverse à celui attendu. Dans ce cas de la chaleur est localement cédée plutôt que retirée à l'échangeur froid. Ce transfert inverse apparaît quand la température de l'échangeur froid est trop basse, quand l'échangeur de chaleur est long, ou quand la séparation entre la plaque et l'échangeur est faible. On constate que pour les configurations optimales trouvées, ce transfert inverse est toujours présent et apparaît comme inévitable.

Pour finir signalons l'importance du choix des paramètres étudiés : on constate qu'un choix inapproprié peut faire diminuer la quantité de chaleur extraite à l'échangeur froid de 30 % et l'efficacité du réfrigérateur de 50 %. Dans les exemples de ce chapitre, les efficacités obtenues ne sont pas très importantes. Cela tient du fait qu'aucune démarche d'optimisation systématique n'a pas été faite pour choisir simultanément tous les paramètres ($y_0, L, L_f, G_f, M_a, kx_S$) d'une part, et d'autre part que la plaque n'est pas à une position optimale pour le pompage thermoacoustique. En gardant la plaque à cette position non optimale, et pour des paramètres non optimaux, mais en utilisant des nombres de Mach plus élevés, des efficacités valant jusqu'à 6% ont été obtenues.

Chapitre 7

Effet thermoacoustique avec une plaque 2D

7.1 Présentation

Jusqu'à présent, seuls des éléments 1D, plaques et échangeurs de chaleur, ont été considérés. Ces éléments, et la plaque en particulier, s'ils ont une "épaisseur thermique" (voir section 5.3.1), n'ont pas d'épaisseur géométrique. L'existence d'une épaisseur finie est pourtant importante. D'un point de vue aérodynamique tout d'abord, des tourbillons sont périodiquement créés aux extrémités de la plaque. Ces tourbillons ont été calculés pour la première fois dans les simulations numériques de Worlikar [144] puis Besnoin [18]. Ils ont ensuite été observés expérimentalement par Duffourd [40] avec une technique de vélocimétrie par images de particules ("Particle Image Velocimetry" ou PIV). Expérimentalement, la présence de tourbillons a également été mise en évidence par Wetzel et Herman [142], qui ont utilisé une méthode d'interférométrie holographique. D'un point de vue thermique, un flux de chaleur non négligeable est susceptible de passer par la tranche de la plaque, et Besnoin [18] a montré que les effets aérodynamiques et les flux thermiques ne sont pas indépendants. Dans ce chapitre, la simulation d'une plaque 2D du stack est entreprise, et les points précédents étudiés. Comme pour la plaque 1D, des comparaisons sont faites avec la théorie linéaire, et l'apparition de non-linéarités est observée.

Le domaine de simulation utilisé est celui de la figure 2.3.2. Le maillage a été présenté à la section 3.3.1. Les notations utilisées dans la suite sont précisées à la figure 7.1.1. Une partie de ces notations est commune à celles utilisées pour une plaque 1D. Ainsi la plaque est repérée par les points F et C (F pour froid et C pour chaud), d'abscisses respectives x_F et x_C . Sa position dans le résonateur sera repérée par l'abscisse x_S de son point médian S, ou par kx_S , abscisse adimensionnée par le nombre d'onde. L'origine $x = 0$ est située au niveau de la source acoustique, laquelle n'est pas modélisée et se trouve hors du domaine de calcul. La frontière du domaine de calcul sur laquelle l'onde acoustique est injectée est située en $x = x_E$. La différence majeure avec

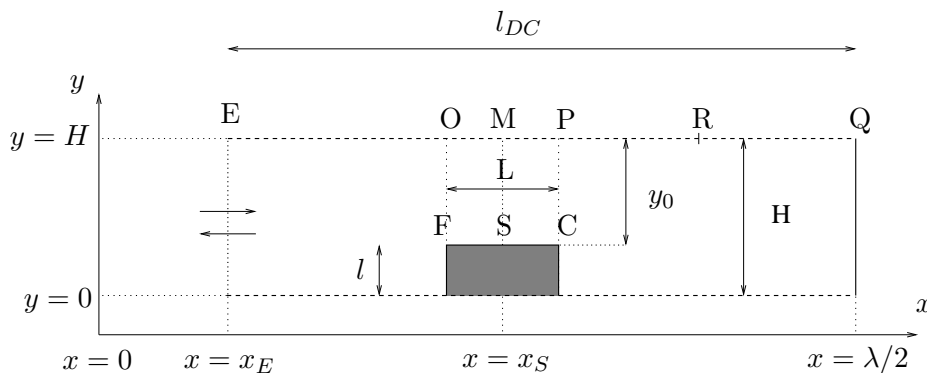


FIG. 7.1.1 – Domaine de calcul pour la simulation d’une plaque 2D et notations.

le cas de la plaque 1D est que la demi-distance y_0 entre les plaques du stack n’est plus la hauteur du domaine de simulation. La hauteur du domaine de simulation est notée H . On a $H = y_0 + l$, où l est la demi-épaisseur d’une plaque. La plaque a une longueur $L = x_C - x_F$. l_{DC} est la longueur du domaine de calcul.

A la section 7.2 suivante une description du champ aérodynamique est présentée. La formation de tourbillons aux extrémités des plaques est mise en évidence et des comparaisons sont faites avec les mesures PIV de Duffourd [40]. Les phénomènes thermiques sont présentés à la section 7.3.

7.2 Champ aérodynamique

Dans cette section, on s’intéresse exclusivement au champ aérodynamique aux alentours des plaques du stack. Des comparaisons sont effectuées avec les mesures PIV faites par S. Duffourd [40], qui ont par ailleurs été comparées aux simulations numériques de Besnoin, à la fois par Besnoin [18], et par Blanc-Benon *et al.* [20]. La maquette de Duffourd fonctionne à une fréquence de 200 Hz. On rappelle que cette fréquence conduit à un coût de calcul par cycle acoustique élevé. Ce coût est prohibitif pour des mesures thermiques pour lesquelles il faut attendre plusieurs centaines de périodes pour atteindre un état stationnaire. Néanmoins, lorsqu’on ne s’intéresse qu’au champ aérodynamique, dont la convergence est bien plus rapide (quelques périodes acoustiques suffisent), le coût de calcul reste très raisonnable.

Dans ses mesures, Duffourd utilise un résonateur de section carrée et de longueur égale à la demi-longueur d’onde. A la fréquence $f = 200$ Hz, cette longueur vaut 85 cm. Le fluide utilisé est de l’air à pression et température ambiantes. Deux types d’empilements de plaques parallèles ont été utilisés pour les mesures. Les caractéristiques géométriques de ces empilements sont données dans le tableau 7.2.1. Les plaques sont typiquement de longueur $L = \lambda/40$ et sont positionnées aux

	L (mm)	y_0 (mm)	l (mm)	y_0/δ_ν	l/δ_ν	kx_s
Empilement A	25.8	1	0.5	6.5	3.2	2.36
Empilement B	24.0	0.5	0.075	3.4	0.5	2.36

TAB. 7.2.1 – Caractéristiques géométriques des empilements utilisés par S. Duffourd [40].

trois quarts du résonateur. Les plaques de l'empilement A sont beaucoup plus épaisses que celles de l'empilement B. Les paramètres de l'écoulement sont donnés dans le tableau 7.2.2. L'amplitude

	M_a	Dr	u_M (ms ⁻¹)	d_a (mm)	$u_{M, retr}$ (ms ⁻¹)	R_{e, y_0}	R_{e, δ_ν}	A
Empilement A	0.71	0.01	1.76	1.4	2.86	385	30	42
Empilement B	1.07	0.015	2.57	2.1	3.5	162	36	51

TAB. 7.2.2 – Caractéristiques de l'écoulement pour chacun des deux empilements utilisés par S. Duffourd [40].

de la vitesse u_M au point M (voir figure 7.1.1) est calculée en utilisant les relations (1.1.1), qui donnent ici :

$$u_M = M_a c_o \sin(kx_S). \quad (7.2.1)$$

Cette relation ne tient pas compte du rétrécissement de section au passage du stack. Ce rétrécissement est dû à l'épaisseur des plaques ainsi qu'à la présence de la couche limite visqueuse qui réduit elle aussi la section utile. Le rétrécissement géométrique, celui dû à l'épaisseur des plaques, est généralement caractérisé par le coefficient d'obstruction BR (pour "Blockage Ratio") défini par :

$$BR = \frac{y_0}{y_0 + l} = \frac{y_0}{H}. \quad (7.2.2)$$

Un autre facteur qui induit une obstruction supplémentaire est la présence de la couche limite. En première approximation, on peut considérer que l'obstruction par la couche limite se fait sur une distance $\delta_\nu/2$. On peut définir un deuxième coefficient d'obstruction tenant compte de ce phénomène par :

$$BR' = \frac{y_0 - \delta_\nu/2}{y_0 + l} = \frac{y_0 - \delta_\nu/2}{H}. \quad (7.2.3)$$

L'obstruction par la couche limite a d'autant plus de poids que le rapport y_0/δ_ν est faible. La vitesse $u_{M, retr}$ tenant compte du rétrécissement peut ainsi être estimée par : $u_{M, retr} = u_M/BR'$. On constate au tableau 7.2.2 que l'effet du rétrécissement n'est pas négligeable. Le déplacement acoustique d_a est calculé au niveau du stack par $d_a = u_M/\omega$. Cette valeur est représentative du déplacement juste à l'extérieur des plaques. Au-dessus des plaques le déplacement particulière est supérieur du fait du rétrécissement de section et peut être estimé par d_a/BR' . Pour terminer, le tableau 7.2.2 fournit pour chacun des empilements plusieurs nombres de Reynolds. Le premier

nombre, R_{e,y_0} , est basé sur la distance inter-plaques, $2y_0$. Il est donné par :

$$R_{e,y_0} = \frac{(2y_0)u_{M, retr}}{\nu}. \quad (7.2.4)$$

Le deuxième nombre, R_{e,δ_ν} est construit sur l'épaisseur de couche limite. Il est donné par :

$$R_{e,\delta_\nu} = \frac{\delta_\nu u_{M, retr}}{\nu}. \quad (7.2.5)$$

Enfin, le nombre A vaut simplement $A = \sqrt{2}R_{e,\delta_\nu}$. Ce nombre est particulièrement important puisqu'il a été signalé à la section 1.3.6 qu'au delà d'une valeur critique $A_c = 400$, de la turbulence est susceptible de se déclencher. Les valeurs de A données au tableau 7.2.2 sont bien inférieures à cette valeur critique, et aucune turbulence n'est attendue.

Une simulation numérique correspondant à l'empilement de type A a été faite [83]. Les champs de vorticité et de vecteur vitesse en huit instants  qui-répartis pendant une période τ de l'onde sont représentés à la figure 7.2.1. La vorticité Ω est définie par :

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (7.2.6)$$

Pour plus de clarté les résultats sont présentés, après utilisation des propriétés de symétrie, sur un domaine dont l'étendue dans la direction y est le double de celle du domaine de calcul. L'instant initial t_i correspondant au début de l'enregistrement des données est aléatoire. L'échelle de vitesse est donnée par la vitesse u_P au point P (voir figures 7.1.1 et 7.2.1) du domaine. L'origine des abscisses est le coin F de la plaque. Le coin C est donc situé à l'abscisse 26 mm. Les premiers instants représentés sur la figure 7.2.1, de $t = t_i + \tau/16$ à $t = t_i + 5\tau/16$, correspondent à une vitesse négative pendant laquelle le fluide passe du résonateur dans l'espace interplaque. Les zones de vorticité au-dessus de la plaque indiquent la présence des couches limites visqueuses. A partir de $t = t_i + \tau/7$ le fluide a une vitesse positive et la plaque représente une marche descendante pour l'écoulement. De la vorticité se crée en aval de la plaque et mène à la création de tourbillons pour $t = t_i + 11\tau/16$ et $t = t_i + 13\tau/16$. Pour $t = t_i + 15\tau/16$ la vitesse est négative et les tourbillons sont aspirés dans l'espace inter-plaques. Ces tourbillons reaspir s sont encore visibles à l'instant $t = t_i + \tau/16$. L'étendue spatiale maximale des tourbillons est d'environ 1.5 mm, ce qui correspond à la valeur du déplacement acoustique d_a donnée au tableau 7.2.2. De plus l'amplitude d'oscillation de la vitesse au point M fournie par le programme est 2.8 ms^{-1} , très proche de la valeur 2.86 ms^{-1} donnée pour $u_{M, retr}$ au tableau 7.2.2.

La figure 7.2.2 donne une vue plus globale du champ de vorticité au voisinage de la plaque pendant une moitié de période acoustique, des instants $t_i + \tau/16$ à $t_i + 7\tau/16$. A l'instant $t_i + \tau/16$ le tourbillon qui a été crée au côté chaud ($x=26\text{mm}$) de la plaque lors du cycle précédent est aspiré

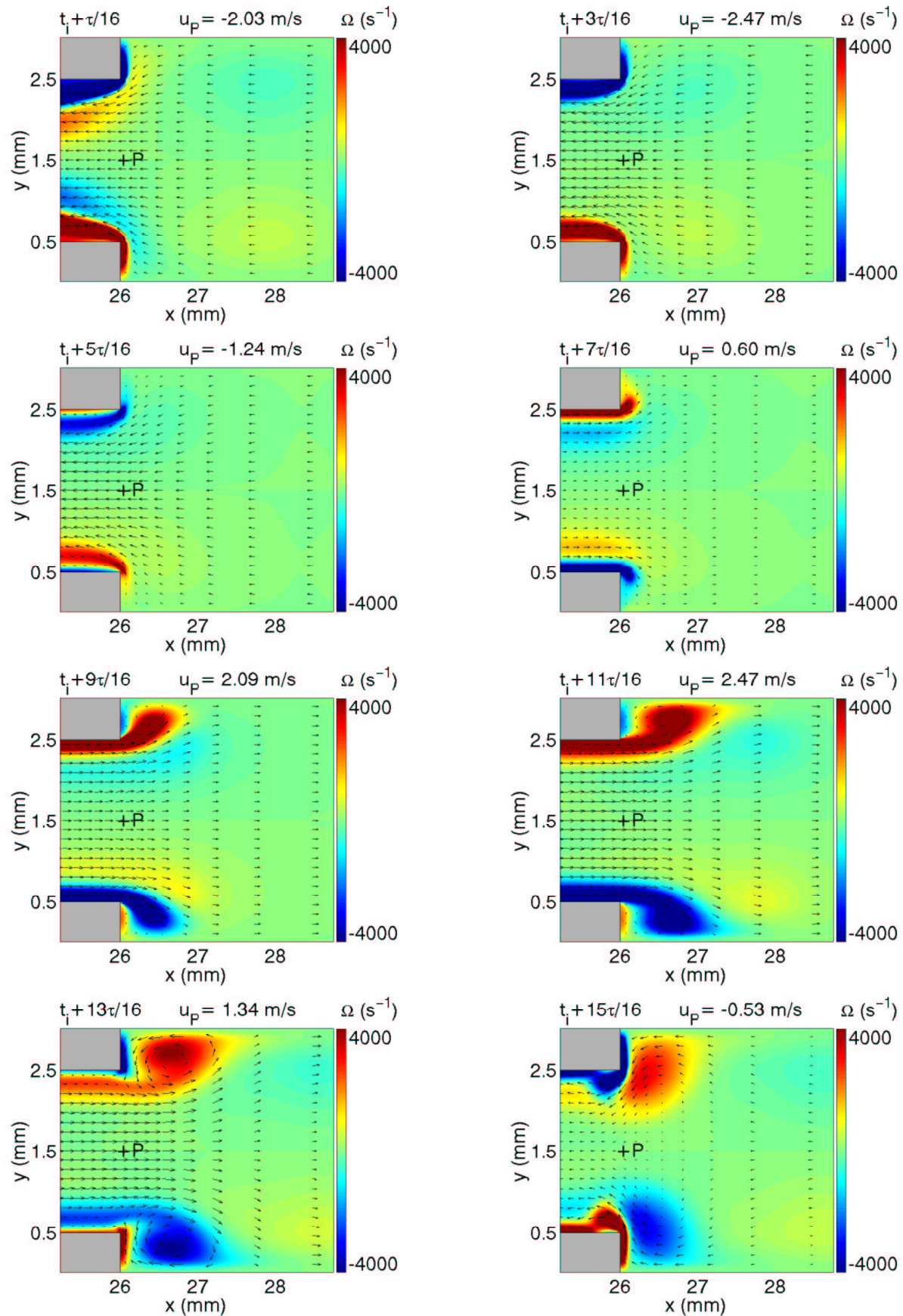


FIG. 7.2.1 – Champs de vorticité et de vecteur vitesse obtenus pour la plaque A, en huit instants d'une période acoustique τ . L'échelle de vitesse est donnée par la valeur de celle-ci au point P. L'origine des abscisses correspond au coin F de la plaque.

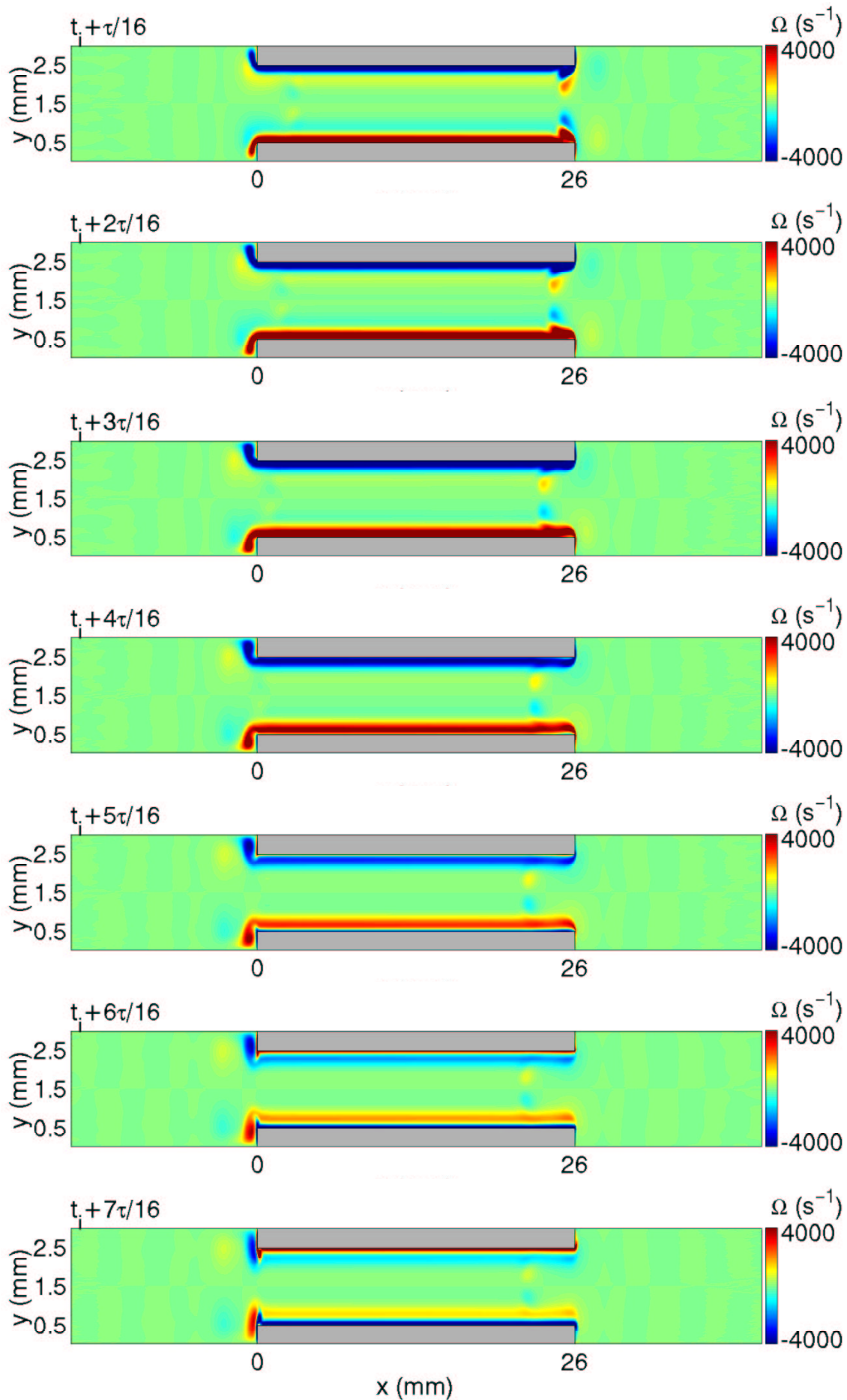


FIG. 7.2.2 – Champs de vorticité obtenus pour la plaque A, en plusieurs instants correspondant à une moitié du cycle acoustique τ . L'origine des abscisses correspond au bord F de la plaque.

dans le stack, tandis qu'un tourbillon est en train de naître au côté froid ($x=0$). De $t_i + 2\tau/16$ à $t_i + 6\tau/16$, le tourbillon du côté froid continue de se former, tandis que celui aspiré au côté chaud se déplace dans le stack, son intensité chutant fortement. A $t_i + 7\tau/16$, le tourbillon créé au côté froid est à son tour aspiré. Sur la moitié de cycle suivante, un tourbillon se forme au côté chaud, cependant que le tourbillon aspiré au côté froid se déplace dans le stack. Notons qu'aucun détachement de tourbillon n'est observé à la figure 7.2.2, et aucune des simulations faites, avec des nombres de Mach valant jusqu'à 10%, n'a montré de tel détachement.

Les champs de pression et de vorticité aux instants $t = t_i + 13\tau/16$ et $t = t_i + 15\tau/16$ obtenus par la simulation sont comparés à ceux obtenus expérimentalement par S. Duffourd à la figure 7.2.3. L'échelle de vorticité donnée par Duffourd s'exprime en s^{-1} et les chiffres indiqués doivent

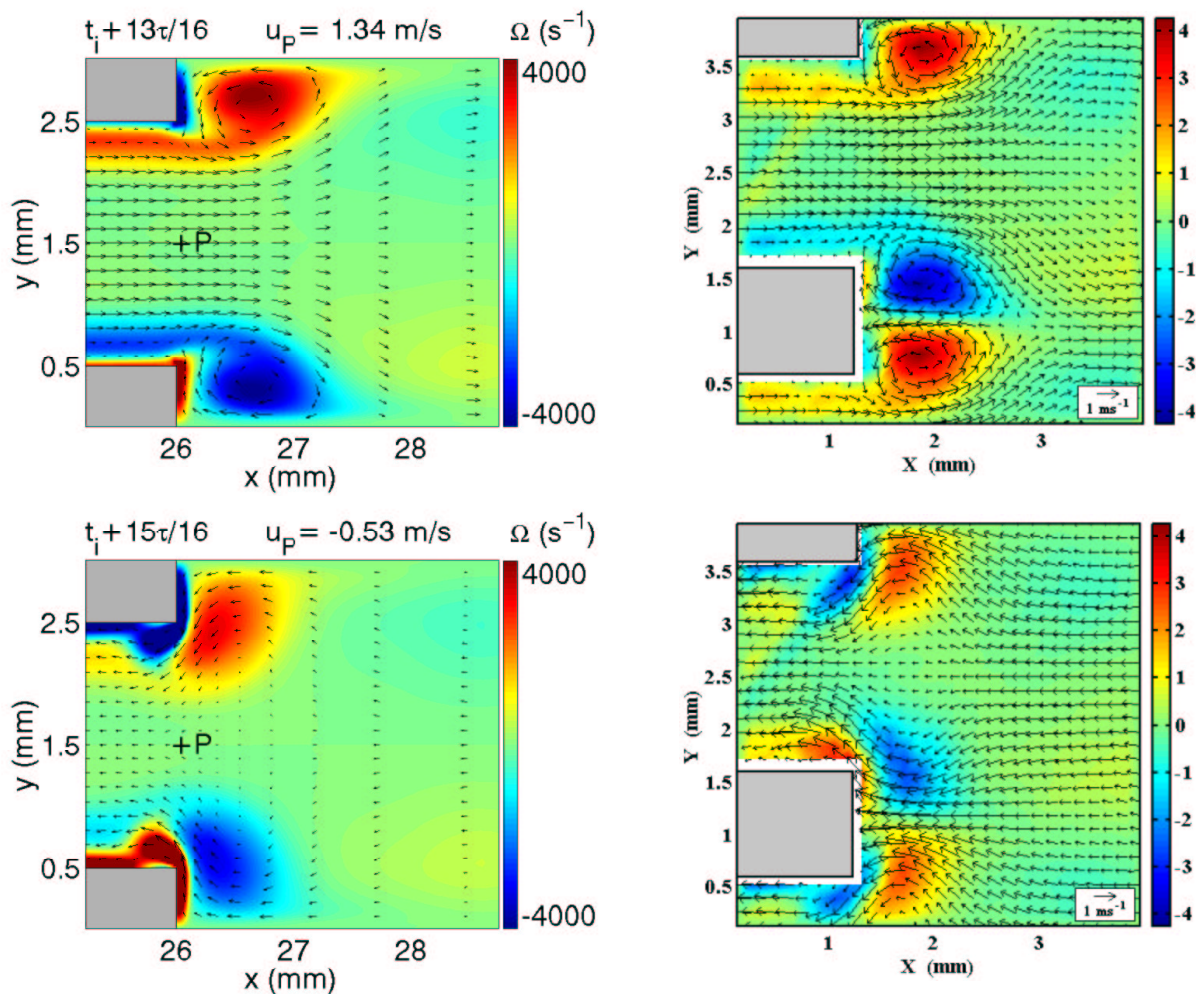


FIG. 7.2.3 – Comparaison des champs de vorticité et de vecteur vitesse obtenus pour l'empilement A par la présente simulation (gauche) et les expériences de Duffourd (droite) [40], en deux instants séparés de $\tau/8$. L'échelle de vorticité de Duffourd s'exprime en s^{-1} et les chiffres indiqués doivent être multipliés par un facteur 10^3 .

être multipliés par un facteur 10^3 . Les résultats expérimentaux et numériques sont en très bon

accord qualitatif et quantitatif. Les résultats sont aussi en accord avec ceux de Besnoin [18].

Une simulation est maintenant faite pour l'empilement B. Les résultats en trois instants du calcul sont donnés à la figure 7.2.4. Les champs de vorticité obtenus par Duffourd pour trois instants identiques sont également représentés. Contrairement au cas précédent, on n'observe pas

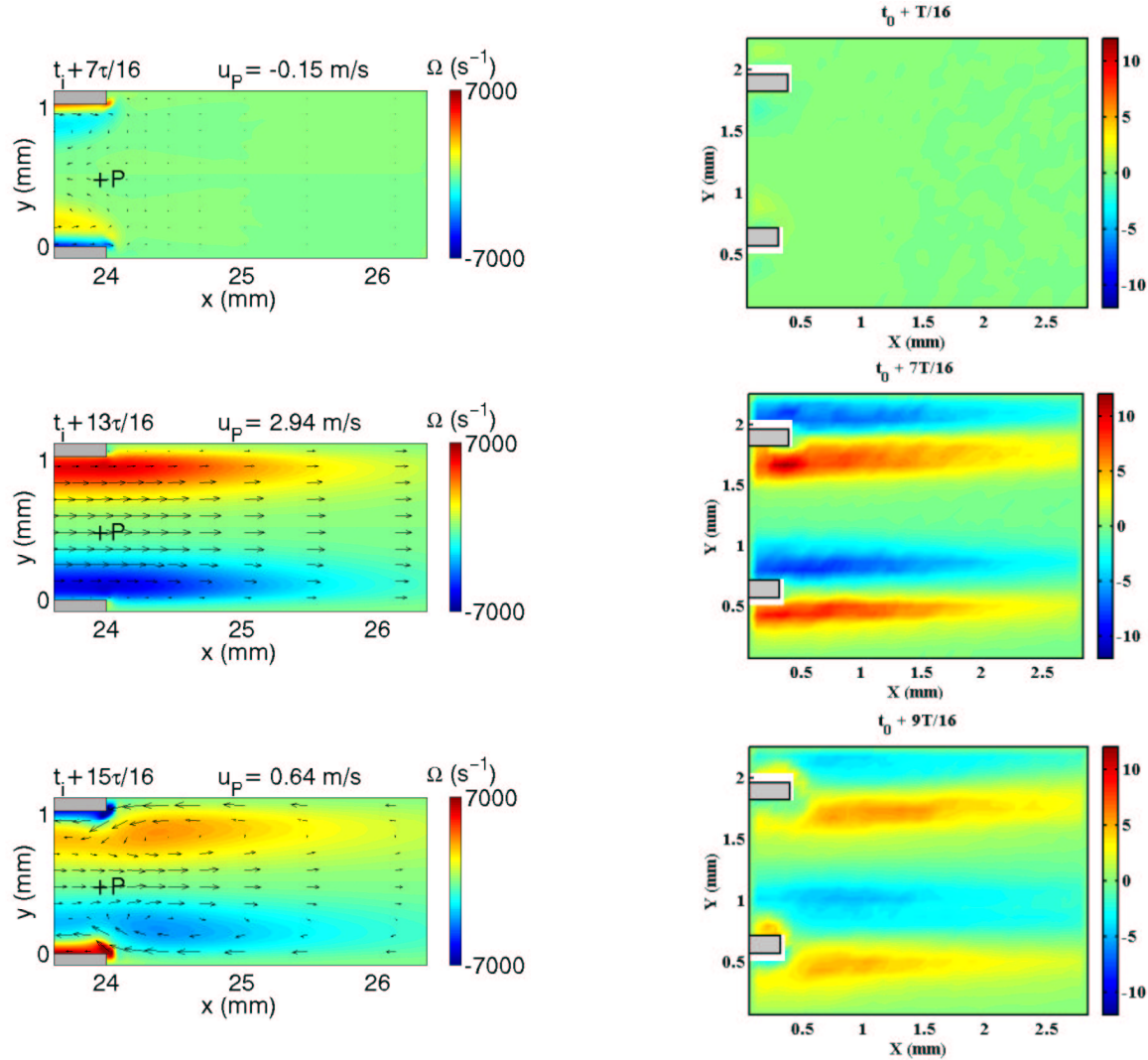


FIG. 7.2.4 – Champs de vorticité et de vecteur vitesse obtenus pour l'empilement B par la présente simulation, en trois instants (gauche). Champs de vorticité correspondant trouvés expérimentalement par Duffourd [40] (droite). L'échelle de vorticité de Duffourd s'exprime s^{-1} et les chiffres indiqués doivent être multipliés par un facteur 10^3 .

de tourbillons très marqués en aval des plaques, du fait de la faible épaisseur de ces dernières. On observe toutefois des zones vorticales, dont la longueur un peu supérieure à 2 mm est très proche de la valeur 2.1mm du déplacement acoustique donnée au tableau 7.2.2. La valeur fournie par le programme de l'amplitude de la vitesse au point M vaut 3.81 ms^{-1} . Cette valeur est supérieure à la valeur de $u_{M, retr}$ de 3.5 ms^{-1} trouvée au tableau 7.2.2. En particulier l'accord est moins bon

que celui trouvé précédemment pour l'empilement A (pour lequel on avait obtenu 2.8 ms^{-1} pour une prévision de 2.86 ms^{-1}). Ceci n'est pas surprenant étant donné que la distance inter-plaque $2y_0$ a diminué. En effet comme on l'a souligné, l'estimation pour $u_{M, retr} = u_M / BR'$ est d'autant meilleure que le rapport y_0 / δ_ν est grand. Or ce rapport est supérieur dans le cas de l'empilement A que dans celui de l'empilement B. Pour l'empilement B, la prédiction de 3.5 ms^{-1} inférieure à la valeur trouvée de 3.81 ms^{-1} indique que la distance de blocage induite par la couche limite est en réalité supérieure à la valeur $\delta_\nu / 2$ utilisée dans BR' , tout en restant inférieure à δ_ν , valeur qui donnerait une prédiction de 4.3 ms^{-1} pour $u_{M, retr}$. On remarque sur la figure 7.2.4 que la valeur trouvée pour la vorticité est inférieure de plus d'un facteur un tiers à celle trouvée par Duffourd dans ses expériences. De plus la valeur de l'amplitude de la vitesse trouvée par Duffourd en des points de l'espace inter-plaques (points équivalents au point noté ici P) dépasse 5 ms^{-1} , une valeur supérieure à notre valeur de 3.8 ms^{-1} et à la prédiction de 3.5 ms^{-1} . Ainsi pour l'empilement B un bon accord qualitatif est obtenu, mais pas un accord quantitatif. Besnoin, à propos de l'empilement B, parle également d'un accord qualitatif et ses valeurs de l'amplitude de vitesse semblent rester inférieures à 4 ms^{-1} [18]. Les valeurs importantes de la vitesse trouvées par Duffourd peuvent peut-être s'expliquer par la géométrie de l'empilement de plaques B, qui est représenté à la figure 7.2.5. Cette figure montre que le support qui maintient les plaques dans le résonateur occupe une grande partie de sa section, plus précisément 45% ($= 2 \cdot 1.8 / 8$) de cette section. Un effet de blocage dû au support vient donc s'ajouter à celui déjà commenté qui est dû à l'épaisseur des plaques. Ainsi au passage du support le fluide voit sa vitesse augmenter fortement. Autrement dit, les "lignes de courant" (voir figure 7.2.5(b)) se ressèrent au passage du support. Après le support, les "lignes de courant" s'écartent de nouveau, et la vitesse diminue. Toutefois, la distance entre le support et l'extrémité d'une plaque valant seulement deux fois l'amplitude de déplacement acoustique, on peut prévoir qu'à l'extrémité de la plaque, le fluide a une vitesse supérieure à celle qu'il aurait si les supports n'obstruaient pas la section. Cet effet peut expliquer que la vitesse trouvée expérimentalement soit supérieure à celle trouvée numériquement, la simulation ne prenant pas en compte la présence du support. Notons que dans le cas de l'empilement A, pour lequel un bon accord a été obtenu entre les expériences et la simulation, le support (non montré) a des dimensions réduites, et son effet est négligeable.

Pour conclure, deux types d'empilement ont été testés. Pour l'empilement A de plaques épaisses, un accord quantitatif est obtenu avec les expériences de Duffourd. Pour l'empilement B de plaques fines, l'accord avec les expériences de Duffourd est qualitatif seulement, des divergences apparaissant au niveau des valeurs numériques de la vitesse et de la vorticité, avec un écart de

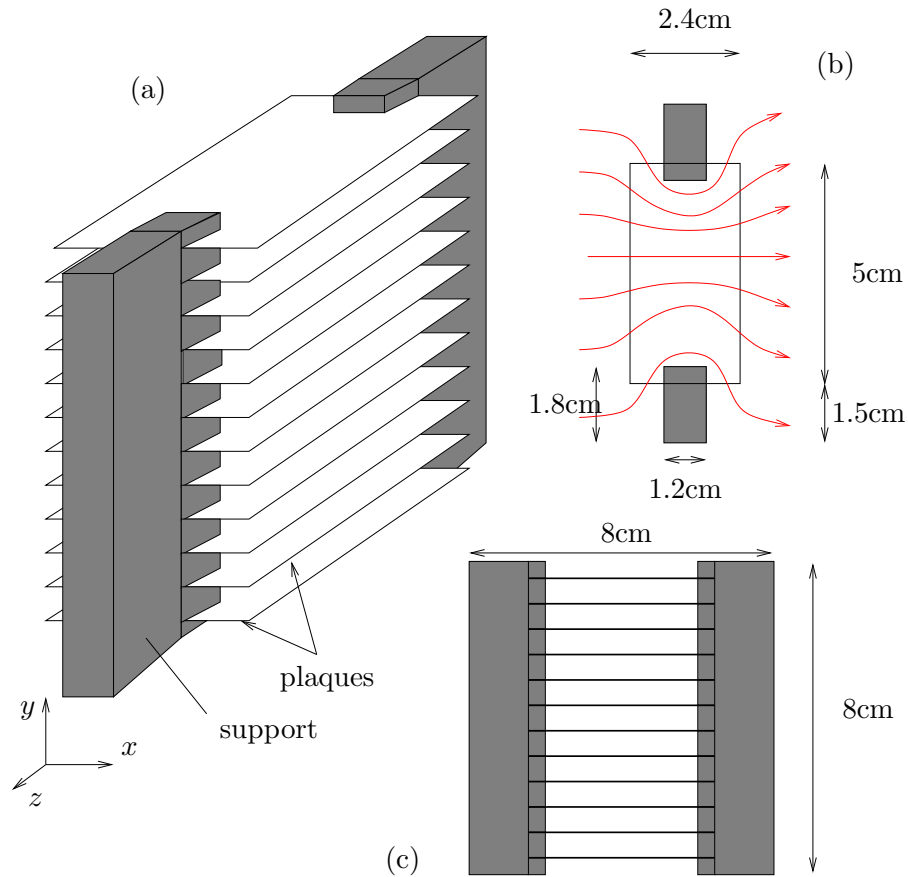


FIG. 7.2.5 – Représentation de l’empilement B. Une plaque sur dix environ est représentée (l’empilement contenant en fait plus de cent plaques). Les plaques sont maintenues par un support dans le résonateur. (a) vue 3D, (b) vue de dessus, (c) vue de face. Les lignes fléchées rouges du schéma (b) représentent les ”lignes de courant” lorsque le fluide se déplace dans la direction x .

l’ordre de 25%. Ces différences peuvent très raisonnablement être attribuées à la présence dans les expériences d’un support de plaques très volumineux, qui n’est pas pris en compte dans les simulations numériques.

7.3 Champ thermique

Les effets thermiques sont maintenant étudiés. Les simulations sont faites à une fréquence élevée de 20 kHz pour garder un coût de calcul raisonnable. La température dans la plaque est régie par l’équation de la chaleur (2.2.7) et le couplage avec le fluide se fait de la façon indiquée à la section 3.4.3. L’épaisseur $2l$ de la plaque, bien que faible, est bien supérieure à l’épaisseur thermique $\delta_{\kappa,s}$ dans le solide. Ceci est particulièrement vrai lorsque le matériau est peu conducteur de la chaleur (K_s faible), comme c’est souvent le cas pour minimiser les pertes par conduction. Les dimensions de la plaque étant importantes par rapport à la distance de diffusion de la chaleur, le temps d’établissement des phénomènes dans la plaque est susceptible d’être long. Pour éviter

cet inconvénient, on augmente artificiellement la conduction de la chaleur dans la direction y . L'équation (2.2.7) devient :

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = K_{sx} \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + K_{sy} \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2}, \quad (7.3.1)$$

K_{sx} est la conductivité dans la direction x et K_{sy} la conductivité dans la direction y . On prend :

$$K_{sx} \ll K_{sy}.$$

Cette condition permet d'équilibrer très rapidement la température dans l'épaisseur de la plaque.

Comme on l'a dit en introduction de ce chapitre, une partie importante de l'échange de chaleur entre la plaque et le fluide est susceptible de se produire sur la tranche de la plaque. On définit ici deux quantités : la quantité de chaleur passant par unité de temps par la tranche de la plaque (plus exactement par la demi-tranche simulée de la plaque), \dot{Q}_{tr} , et celle passant par la paroi latérale, \dot{Q}_{lat} . Ces deux quantités sont représentées à la figure 7.3.1 à l'extrémité chaude de la plaque. Leur unité est le Wm^{-1} , ces puissances s'exprimant par unité de longueur dans la direction

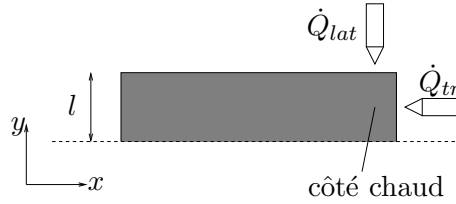


FIG. 7.3.1 – Echanges de chaleur entre la plaque et le fluide. \dot{Q}_{tr} est la puissance passant par la tranche, \dot{Q}_{lat} celle passant par la partie latérale de la plaque.

perpendiculaire au plan (x,y) . Plus précisément \dot{Q}_{tr} et \dot{Q}_{lat} sont définis par :

$$\dot{Q}_{tr} = \int_0^l -\dot{h}_x(x_C, y) dy, \quad (7.3.2)$$

$$\dot{Q}_{lat} = \int_{\text{extrémité latérale}} -\dot{h}_y(x, l) dy, \quad (7.3.3)$$

de la plaque

où \dot{h}_x et \dot{h}_y sont les flux d'énergie définis respectivement par (5.2.3) et (5.2.4). Les signes $-$ dans les expressions précédentes tiennent compte du fait que les quantités \dot{Q}_{tr} et \dot{Q}_{lat} sont positives quand de la chaleur passe du fluide vers la plaque.

Dans ce qui suit des comparaisons sont de nouveau établies avec la théorie linéaire et la théorie linéaire modifiée. Ensuite la quantité d'énergie passant par la tranche de la plaque est évaluée. Enfin l'influence des tourbillons observés précédemment sur le transfert de chaleur à la plaque

est examinée. Trois plaques différentes seront utilisées. Leurs caractéristiques sont données au tableau 7.3.1, et correspondent aux cas 4-1 à 4-16 de l'annexe D. Les trois plaques sont de même

	l/δ_ν	H/δ_ν	L/λ	L/δ_ν	kx_s
plaque 1	0.25	2.13	$8.75 \cdot 10^{-3}$	~ 10	2.35
plaque 2	0.5	2.13	$8.75 \cdot 10^{-3}$	~ 10	2.35
plaque 3	1.25	3.75	$8.75 \cdot 10^{-3}$	~ 10	2.35

TAB. 7.3.1 – Différentes plaques utilisées dans les calculs de cette section (cas 4-1 à 4-16).

longueur, situées à la même position. Leur épaisseur varie, la plaque 1 étant la plaque la plus fine, la plaque 3 la plaque la plus épaisse.

7.3.1 Comparaison avec la théorie linéaire

La différence de température qui existe en régime stationnaire entre les extrémités de la plaque peut être calculée par la théorie linéaire et est donnée par l'expression (1.2.57). Une correction (5.3.2) a été donnée et expliquée au chapitre précédent pour une plaque 1D. Dans le cas d'une plaque 2D, cette correction s'écrit :

$$\Delta T = Corr_1 \frac{\frac{-Ly_0}{4\rho_m c_0} P_A^2 \sin(2kx) \left(1 + \frac{l}{y_0}\right) A_1}{Corr_2 y_0 K + lK_s - \frac{y_0 c_p (1 + l/y_0)^2}{4\omega \rho_m c^2 (1 - P_r)} P_A^2 (1 - \cos(2kx)) A_2}. \quad (7.3.4)$$

A_1 et A_2 sont donnés respectivement par (1.2.58) et (1.2.59), et $Corr_1$ et $Corr_2$ sont définis par les expressions (5.3.3) et (5.3.4). L'expression (7.3.4) diffère de celle (5.3.2) pour une plaque 1D seulement par la présence des facteurs en $(1 + l/y_0)$ qui tiennent compte du rétrécissement de section au passage de la plaque.

La différence de température obtenue pour les trois plaques du tableau 7.3.1 est donnée en fonction du nombre de Mach M_a à la figure 7.3.2. On constate qu'à faible nombre de Mach et pour les trois plaques simulées, la différence de température est bien prédite par la théorie linéaire modifiée, comme c'était le cas pour une plaque 1D. Pour un nombre de Mach supérieur à environ 0.7%, la courbe calculée s'écarte de la prédiction. Cet écart est d'autant plus marqué que la plaque est épaisse et que le rétrécissement qu'elle engendre est important. Pour la troisième plaque, pour $M_a = 0.06$, le rapport de la différence de température prédite à la différence de température obtenue vaut 1.7, un rapport important. Comme dans le cas d'une plaque 1D, les divergences apparaissant entre la théorie modifiée et les simulations sont dues aux effets non-linéaires, qui se traduisent de nouveau par une oscillation non-linéaire de la température au-dessus des plaques du stack. Considérons en effet les oscillations de température et de vitesse pour les simulations

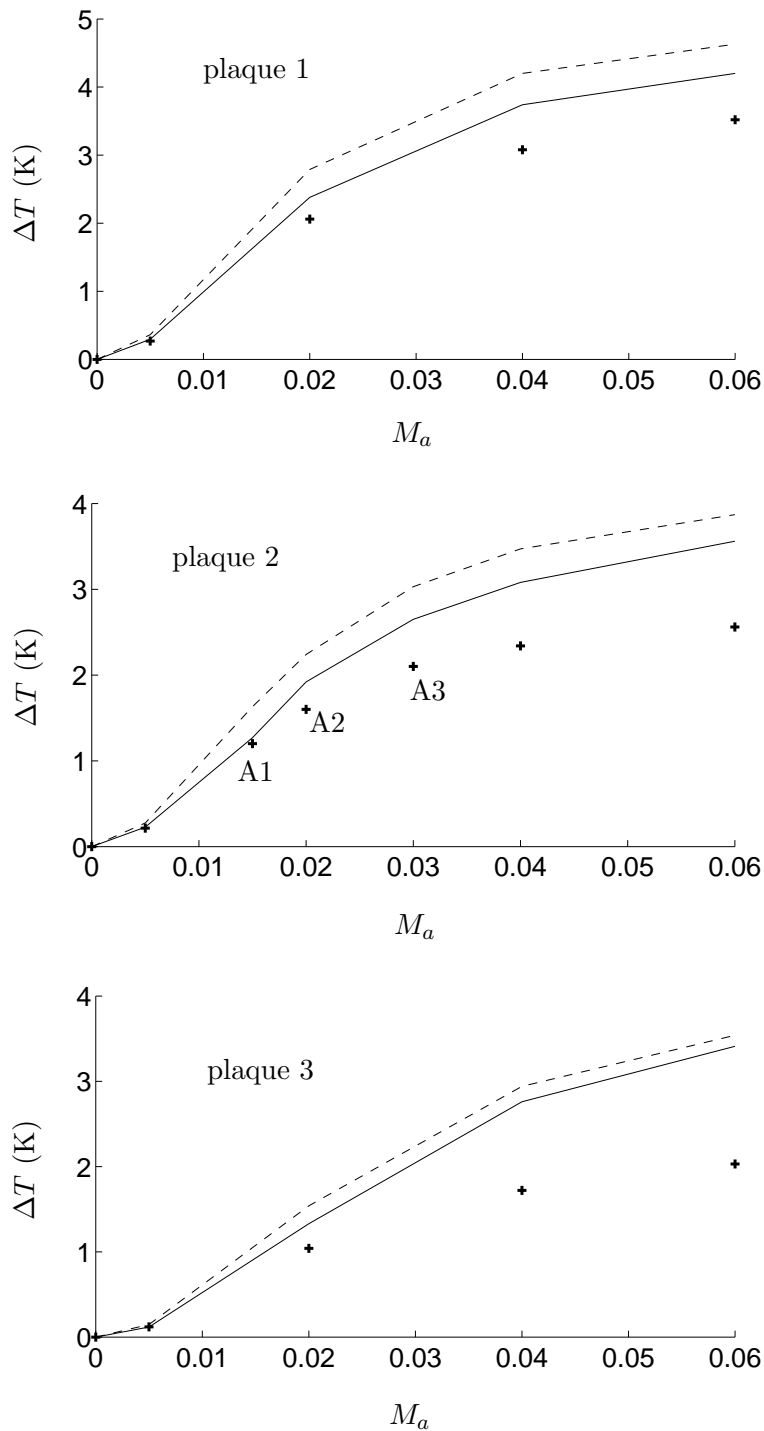


FIG. 7.3.2 – Différence de température entre les extrémités de la plaque en fonction du nombre de Mach M_a . -- théorie linéaire (expression (1.2.57)), — théorie linéaire modifiée (expression (7.3.4)), + calcul.

correspondant aux points notés A1, A2, et A3 à la figure 7.3.2. Ces oscillations sont données aux figures 7.3.3 pour le point A1, 7.3.4 pour le point A2, et 7.3.5 pour le point A3. Pour chacune de ces figures, deux points du domaine de calcul sont utilisés : le point M situé au-dessus du stack,

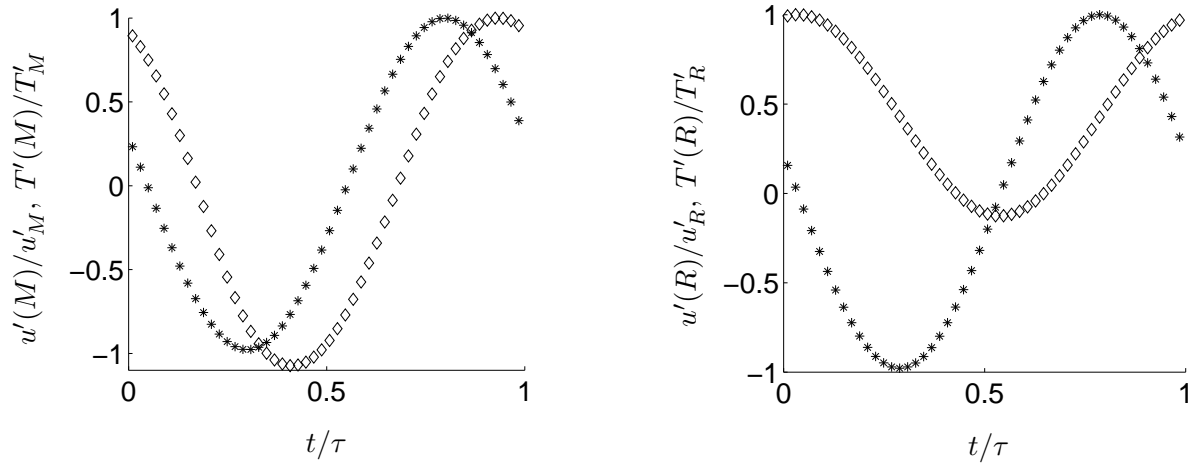


FIG. 7.3.3 – Evolution temporelle des température $T'(M)$ et vitesse $u'(M)$ au point M (gauche), ainsi que des températures $T'(R)$ et vitesse $u'(R)$ au point R (droite) : * vitesse, \diamond température. Les fluctuations en M sont adimensionnalisées par leurs valeurs maximales u'_M et T'_M . De même les fluctuations en R sont adimensionnalisées par u'_R et T'_R . Ces courbes correspondent au **point A1** de la figure 7.3.2, correspondant à la plaque 2, pour $M_a=0.015$.

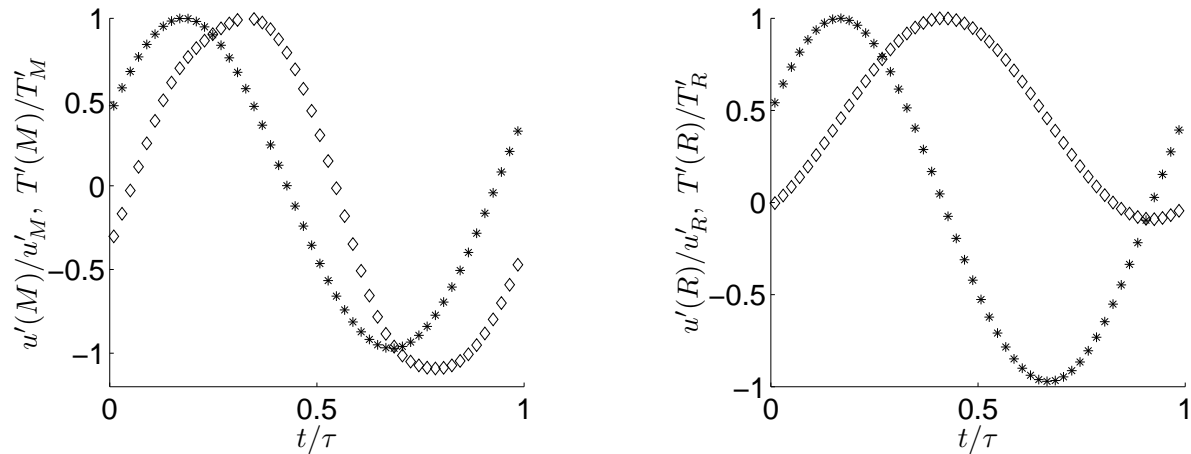


FIG. 7.3.4 – Mêmes grandeurs que pour les figures ci-dessus mais pour le **point A2** de la figure 7.3.2, correspondant à la plaque 2, pour $M_a=0.02$.

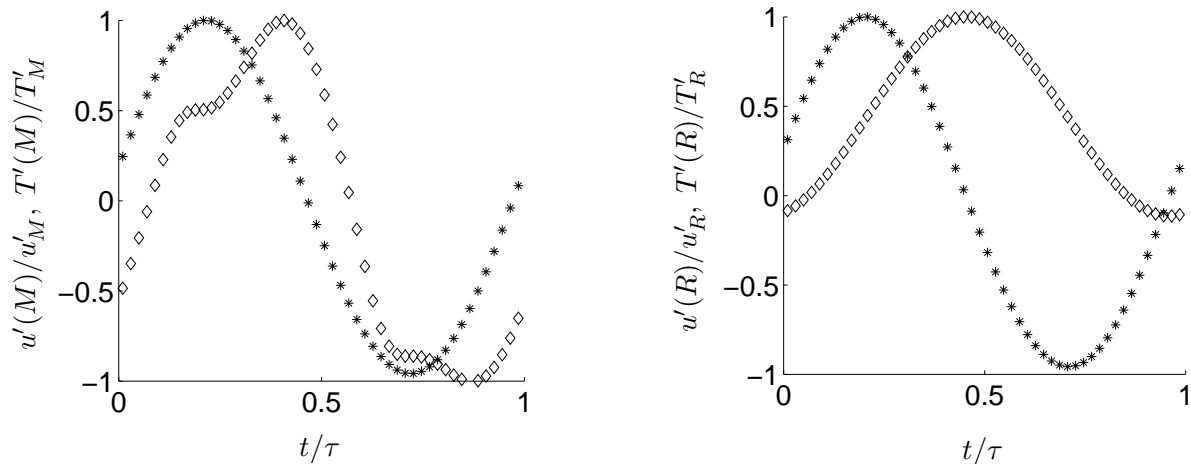


FIG. 7.3.5 – Mêmes grandeurs que pour les figures ci-dessus mais pour le **point A3** de la figure 7.3.2, correspondant à la plaque 2, pour $M_a=0.03$.

et le point R, situé loin du stack et au centre du résonateur (voir figure 7.1.1). Le point A1 sur la figure 7.3.2 est un point pour lequel la simulation et la théorie linéaire modifiée sont en accord. On constate sur la figure 7.3.3 qu'alors les variations de température et de vitesse sont toutes deux sinusoïdales, tant au point M qu'au point R. La variation de température au point R n'est pas centrée du fait de l'existence d'une température moyenne chaude en ce point du résonateur. Pour le point A2 de la figure 7.3.2 la théorie linéaire modifiée et les simulations commencent à diverger. Dans ce cas, on constate à la figure 7.3.4 que la variation de température au point M commence à être déformée, alors que la vitesse n'est pas affectée. Au point R, les deux oscillations restent sinusoïdales. Enfin au point A3 de la figure 7.3.2 l'écart entre la théorie linéaire modifiée et la simulation a encore augmenté. A la figure 7.3.5, on constate qu'alors l'oscillation de température au point M est très déformée, la vitesse n'étant toujours pas affectée. De nouveau au point R, les variations de température et de vitesse restent sinusoïdales, indiquant que le comportement non-linéaire reste localisé au niveau du stack. Ces comportements sont tout à fait semblables à ceux observés pour une plaque 1D (voir section 5.2.7).

7.3.2 Flux d'énergie passant par la tranche de la plaque

Dans cette section, une comparaison des flux d'énergie passant par la tranche de la plaque et par son côté est établie. Avant de comparer les flux totaux (c'est-à-dire intégrés sur les surfaces appropriées), une représentation du flux local est donnée à titre d'illustration. Le vecteur flux moyen d'énergie $\dot{\mathbf{h}}_{\mathbf{m}}$ (de composantes \dot{h}_{xm} et \dot{h}_{ym} , données respectivement par les expressions (5.2.6) et (5.2.7)) est représenté à proximité du bord chaud de la plaque 3 (voir tableau 7.3.1) aux figures 7.3.6 pour $M_a = 0.5\%$, et 7.3.7 pour $M_a = 1.5\%$. Le vecteur $\dot{\mathbf{h}}_{\mathbf{m}}$ pointe dans la

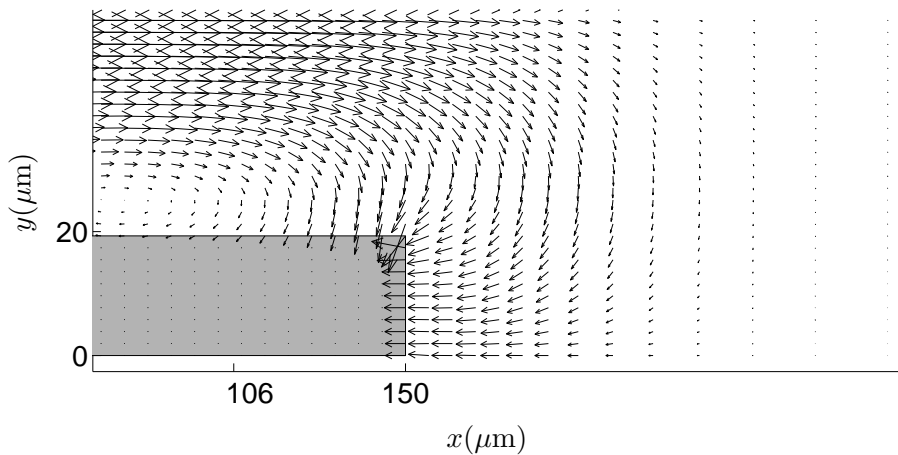


FIG. 7.3.6 – Carte représentant le vecteur flux d'énergie moyen $\dot{\mathbf{h}}_{\mathbf{m}}$ à proximité du bord chaud de la plaque 3. L'origine $x = 0$ des abscisses est fixée au bord froid de la plaque. $M_a = 0.5\%$.

direction de la plaque, l'énergie passant en moyenne du fluide vers la plaque. Pour le plus petit

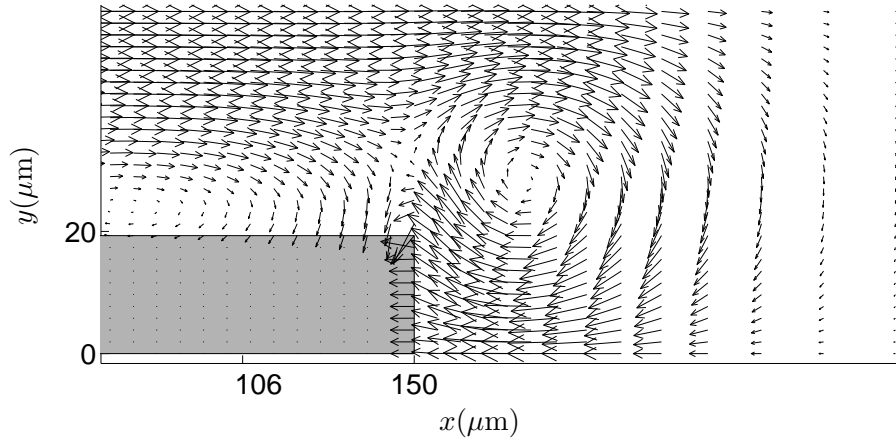


FIG. 7.3.7 – Carte représentant le vecteur flux d'énergie moyen $\dot{\mathbf{h}}_m$ à proximité du bord chaud de la plaque 3. L'origine $x = 0$ des abscisses est fixée au bord froid de la plaque. $M_a = 1.5\%$.

nombre de Mach, le flux convecté dans la direction x le long de la plaque rejoint la plaque assez directement (figure 7.3.6). Pour un nombre de Mach plus élevé, le vecteur flux d'énergie s'enroule avant de rejoindre la plaque (figure 7.3.7). Dans les deux cas, le flux passant par la tranche a un poids important.

On s'intéresse maintenant au flux d'énergie total passant par la tranche de la plaque, \dot{Q}_{tr} , et à celui passant par la surface latérale, \dot{Q}_{lat} . Ces flux sont définis respectivement par les expressions (7.3.2) et (7.3.3). Pour les comparer, on utilise ici leurs moyennes temporelles, notées $\dot{Q}_{tr,m}$ et $\dot{Q}_{lat,m}$. La somme de ces flux moyens est notée $\dot{Q}_{tot,m}$, elle représente le flux moyen d'énergie total pénétrant dans la plaque à l'extrémité chaude de cette dernière. Ces différents flux sont représentés à la figure 7.3.8 en fonction du nombre de Mach, pour chacune des trois plaques du tableau 7.3.1. Avant de commenter cette figure, une comparaison est donnée quant aux surfaces de la plaque disponibles pour les échanges $\dot{Q}_{lat,m}$ et $\dot{Q}_{tr,m}$ entre le fluide et le côté chaud de la plaque. Pour $\dot{Q}_{tr,m}$, cette surface est caractérisée par la hauteur l de la plaque, qui vaut entre $0.25\delta_\nu$ et $1.25\delta_\nu$ (voir tableau 7.3.1). Pour $\dot{Q}_{lat,m}$, cette surface est caractérisée par le déplacement acoustique d_a , comme on l'a vu à la section 5.2.8. Ce déplacement acoustique vaut environ $0.5\delta_\nu$ au plus faible nombre de Mach considéré (0.5%). Au nombre de Mach le plus élevé le déplacement acoustique devient supérieur à la demi-longueur de la plaque, soit environ $5\delta_\nu$, et dans ce cas, c'est cette demi-longueur qui caractérise la surface disponible pour l'échange $\dot{Q}_{lat,m}$. Au total, excepté pour les faibles nombres de Mach et pour des plaques épaisses, la surface disponible pour l'échange latéral est en général supérieure à la surface disponible pour l'échange sur la tranche de la plaque. La figure 7.3.8 montre que pour la plaque 1 le flux $\dot{Q}_{lat,m}$ passant par la surface latérale est supérieur au flux $\dot{Q}_{tr,m}$ passant par la tranche et vaut moins du double de ce dernier. De plus

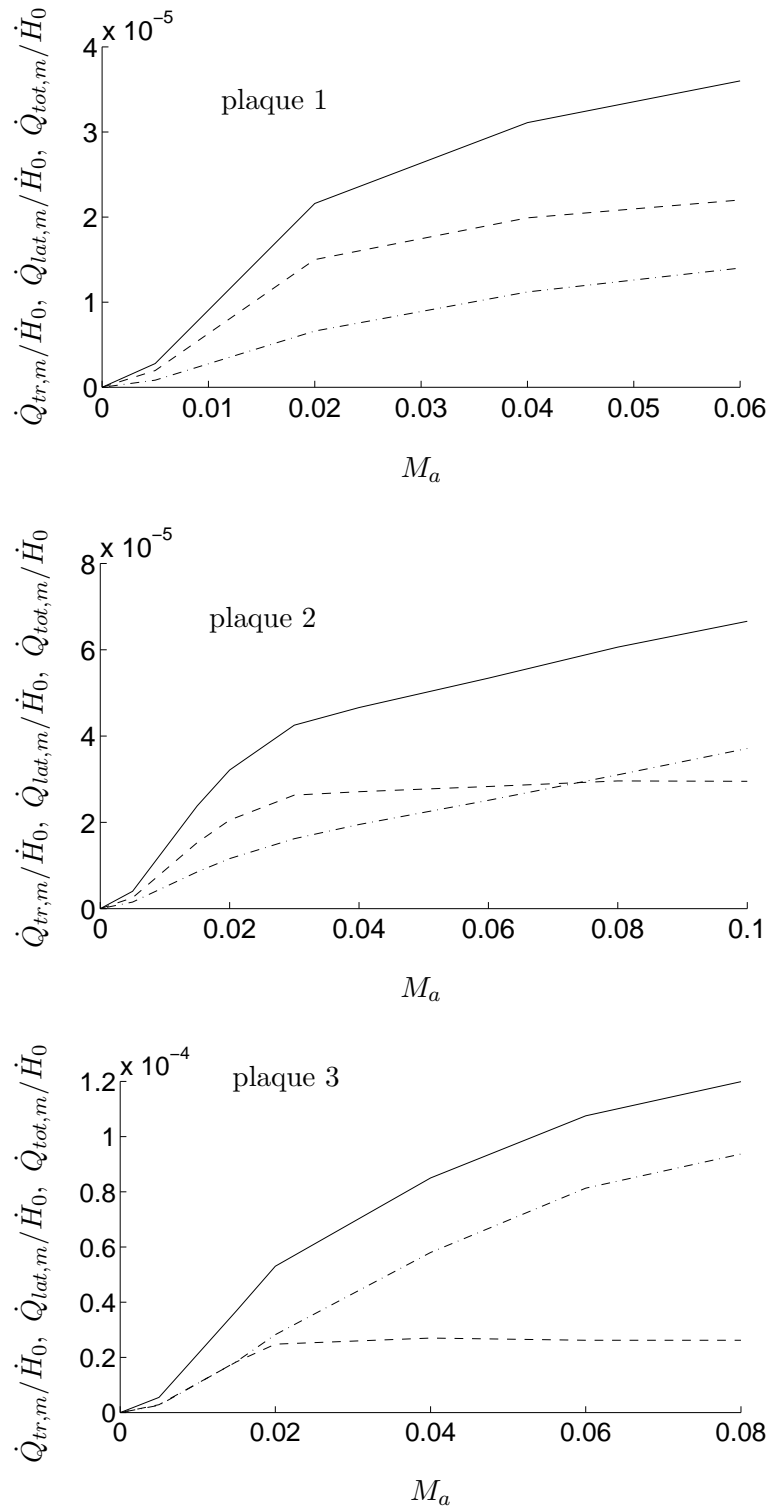


FIG. 7.3.8 – Flux de chaleur moyens pénétrant à l'extrémité de la plaque en fonction du nombre de Mach Ma . — flux total $\dot{Q}_{tot,m}$, -- flux latéral $\dot{Q}_{lat,m}$, -·- flux par la tranche $\dot{Q}_{tr,m}$.

$\dot{Q}_{tr,m}$ augmente plus vite avec le nombre de Mach que $\dot{Q}_{lat,m}$. Cette tendance se retrouve pour les plaques 2 et 3, où elle est encore plus nette. Pour la plaque 2, $\dot{Q}_{tr,m}$ est inférieur à $\dot{Q}_{lat,m}$ aux

faibles nombres de Mach mais devient supérieur à ce dernier aux forts nombres de Mach. Pour la plaque 3, $\dot{Q}_{tr,m}$ et $\dot{Q}_{lat,m}$ sont sensiblement égaux pour M_a inférieur à 2%. Pour des nombres de Mach plus élevés, $\dot{Q}_{tr,m}$ augmente, alors que de manière intéressante $\dot{Q}_{lat,m}$ reste pratiquement constant. Pour des nombres de Mach élevés, le flux passant par la tranche domine le flux latéral. En conclusion, le flux passant par la tranche de la plaque est une composante importante du flux d'énergie moyen total pénétrant dans la plaque à son extrémité chaude. Ceci est le cas même pour une plaque peu épaisse pour laquelle la surface d'échange pour le flux sur la tranche est bien inférieure à la surface disponible pour l'échange latéral. Toutefois le flux passant par la tranche est d'autant plus important que la plaque est épaisse, comme on peut s'y attendre. Enfin le rapport $\dot{Q}_{tr,m}/\dot{Q}_{lat,m}$ ne dépend pas que de l'épaisseur de la plaque. En particulier, pour une épaisseur fixée, ce rapport augmente fortement avec le nombre de Mach, et ce d'autant plus vite que la plaque est épaisse. Cette augmentation sera partiellement expliquée à la section suivante.

7.3.3 Influence des tourbillons sur le transfert de chaleur

Dans cette section, on s'intéresse aux transferts instantanés de chaleur à l'extrémité chaude de la plaque, et l'on relie ces transferts aux champs aérodynamiques et thermiques. Les champs de vitesse et de vorticité, ainsi que les champs de température en plusieurs instants pendant un cycle acoustique sont donnés pour la plaque 3 des figures 7.3.9 à 7.3.12 pour $M_a=0.5\%$, et des figures 7.3.13 à 7.3.16 pour $M_a=4\%$. Comme auparavant, l'instant initial t_i est aléatoire et l'origine des abscisses est au bord froid de la plaque. La vitesse est indiquée au point P du domaine. Les distances sont données en micromètres. En particulier, on remarque que la plaque est longue d'environ $150 \mu\text{m}$, soit 10 épaisseurs visqueuses δ_ν . Sa demi-largeur l vaut un peu moins de $20 \mu\text{m}$, soit un peu plus d'une épaisseur visqueuse. Ces données sont conformes à celles du tableau 7.3.1. Pour le nombre de Mach le plus faible ($M_a=0.5\%$), on distingue des zones de vorticité au-dessus de la plaque, qui se déplacent dans une direction pendant une moitié de cycle acoustique, puis dans l'autre pendant l'autre moitié du cycle. Le déplacement acoustique étant faible, peu de vorticité est présente à l'extérieur de la plaque. De plus aucun tourbillon n'est présent. Pour le nombre de Mach le plus élevé ($M_a=4\%$), les zones de vorticité occupent une grande partie de l'espace inter-plaques. De plus le déplacement acoustique est important et la vorticité apparaît loin à l'extérieur des plaques. On distingue des tourbillons qui se forment du côté chaud de la plaque, puis du côté froid au demi-cycle plus tard, avant d'être réaspirés dans l'espace inter-plaques.

Pour étudier les transferts de chaleur, on trace les flux de chaleur instantanés \dot{Q}_{tr} et \dot{Q}_{lat} en 16 instants pendant une période τ de l'onde acoustique. Ces flux de chaleurs sont tracés en

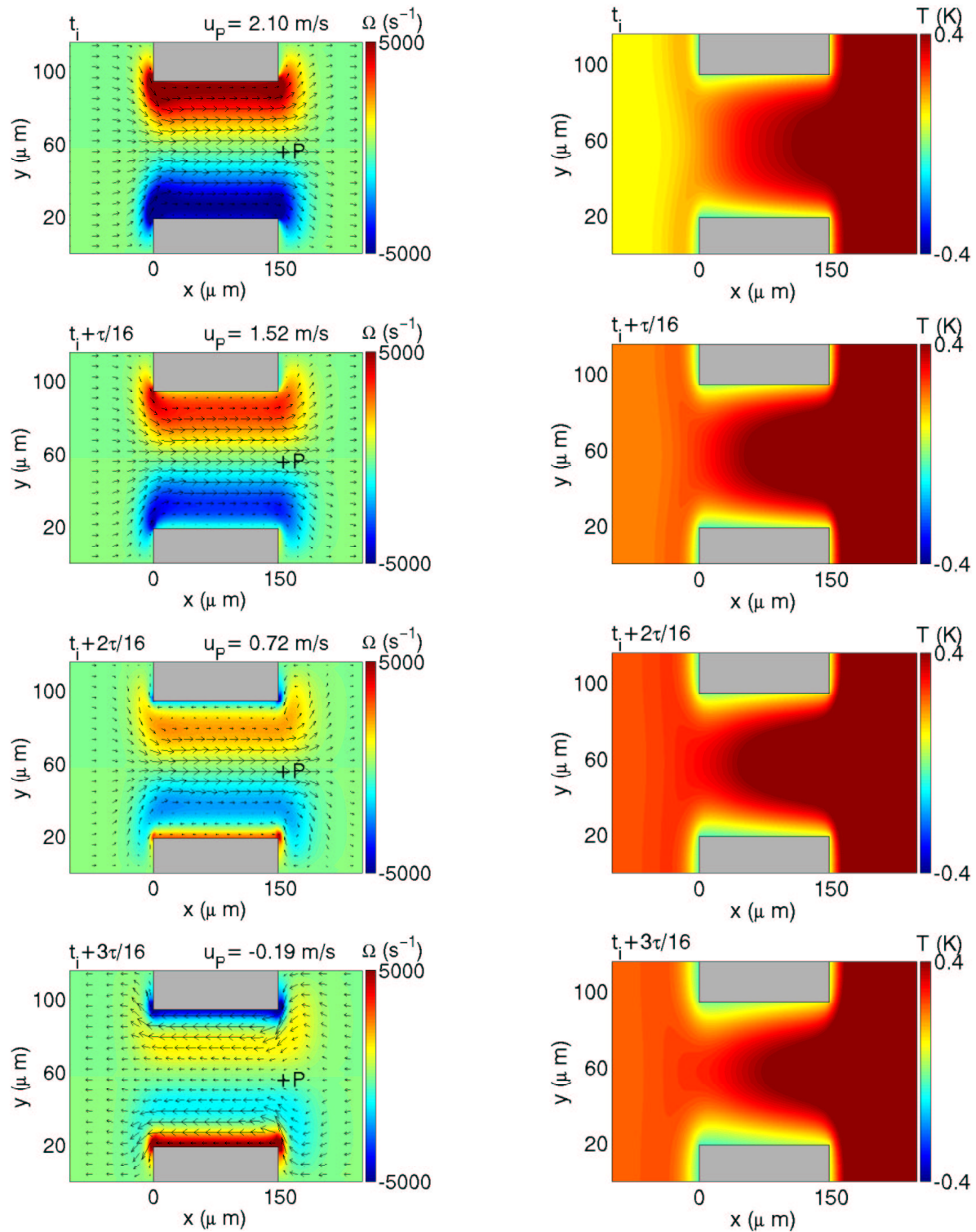


FIG. 7.3.9 – Champs de vorticité et de vecteur vitesse, et champs de température obtenus pour la plaque 3, en plusieurs instants pendant une période acoustique τ . L'échelle de vitesse est donnée par la valeur de celle-ci au point P. L'origine des abscisses correspond au coin F de la plaque. $M_a=0.5\%$.

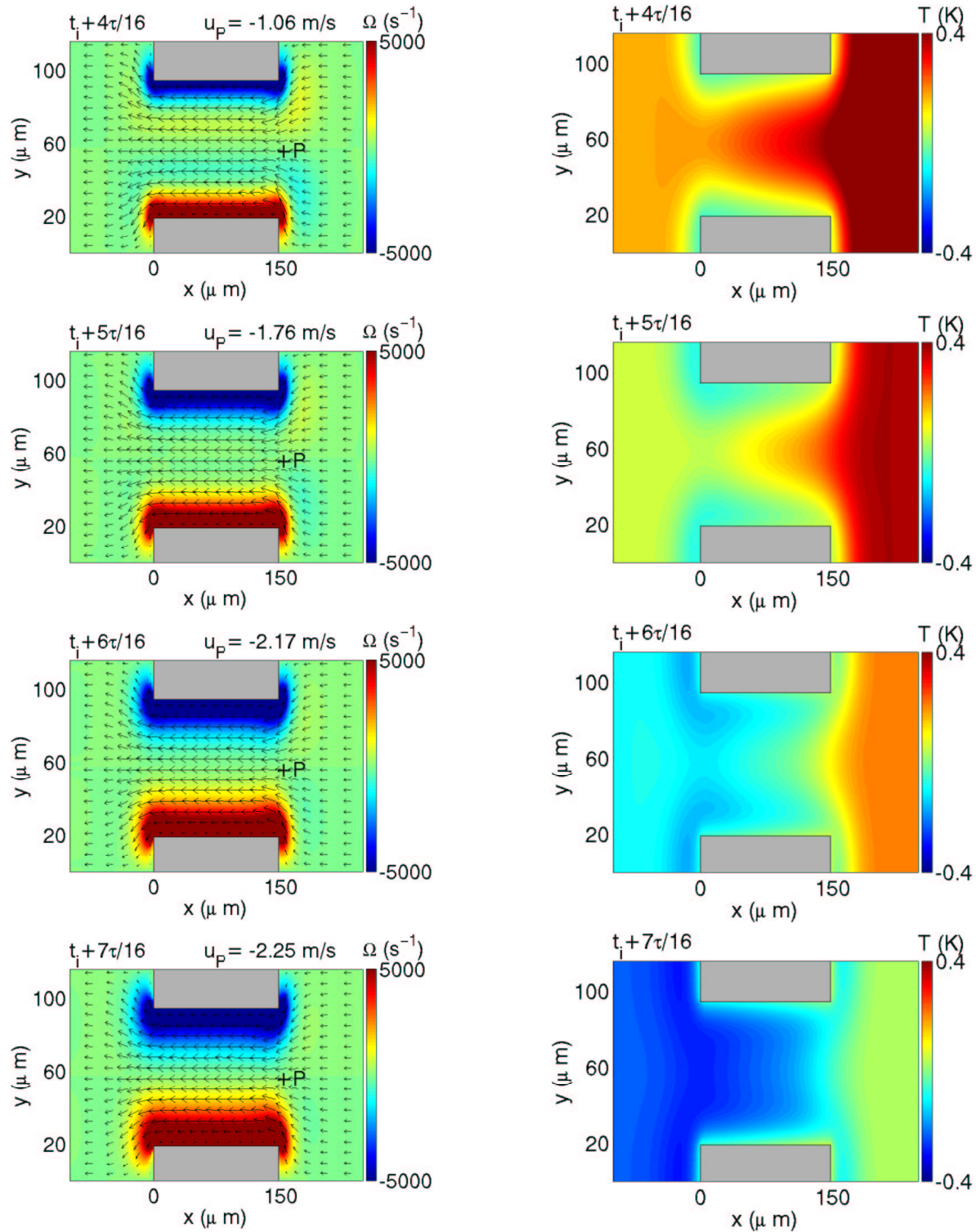


FIG. 7.3.10 – Champs de vorticité et de vecteur vitesse, et champs de température obtenus pour la plaque 3, en plusieurs instants pendant une période acoustique τ . L'échelle de vitesse est donnée par la valeur de celle-ci au point P. L'origine des abscisses correspond au coin F de la plaque. $M_a=0.5\%$.

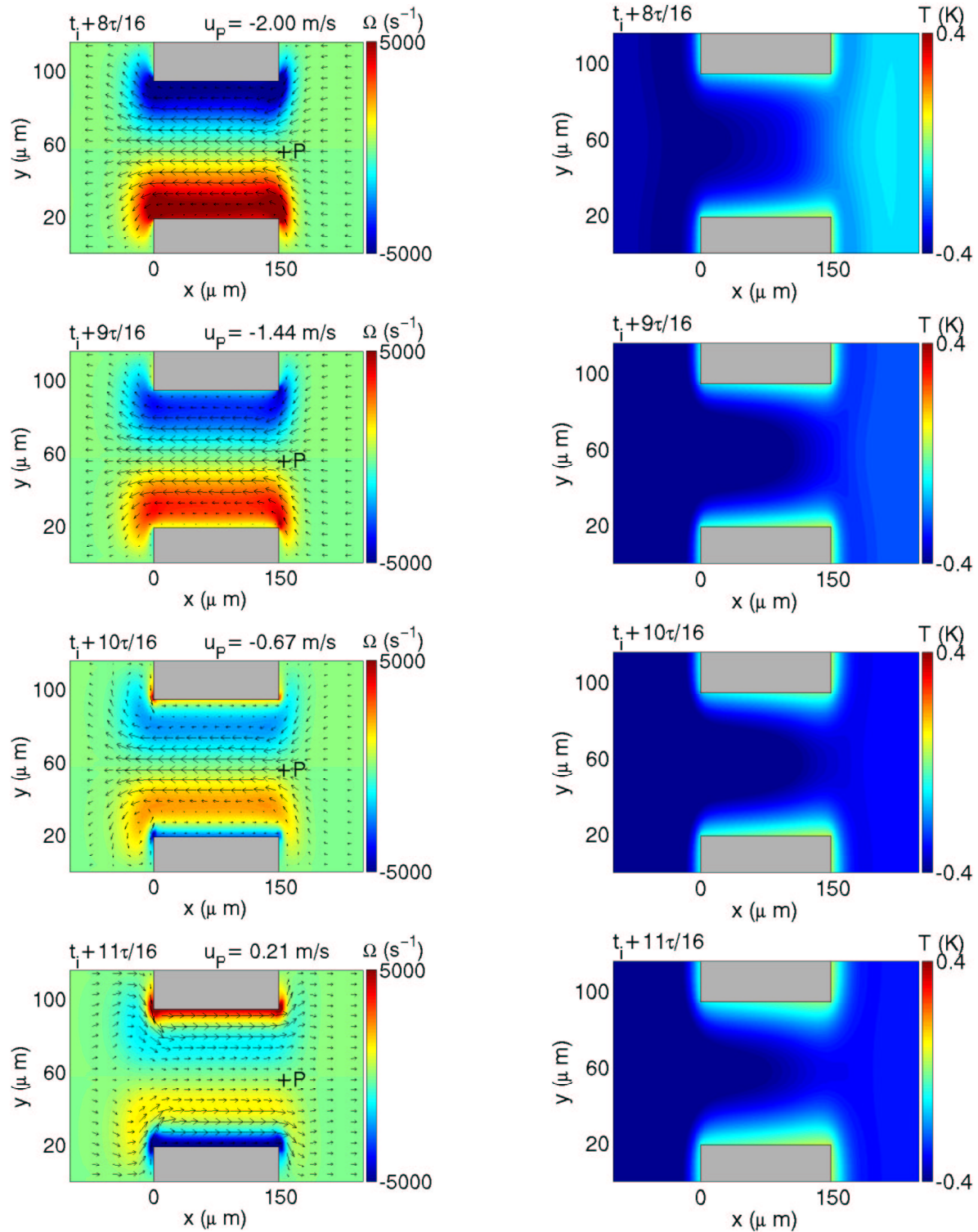


FIG. 7.3.11 – Champs de vorticité et de vecteur vitesse, et champs de température obtenus pour la plaque 3, en plusieurs instants pendant une période acoustique τ . L'échelle de vitesse est donnée par la valeur de celle-ci au point P. L'origine des abscisses correspond au coin F de la plaque. $M_a=0.5\%$.

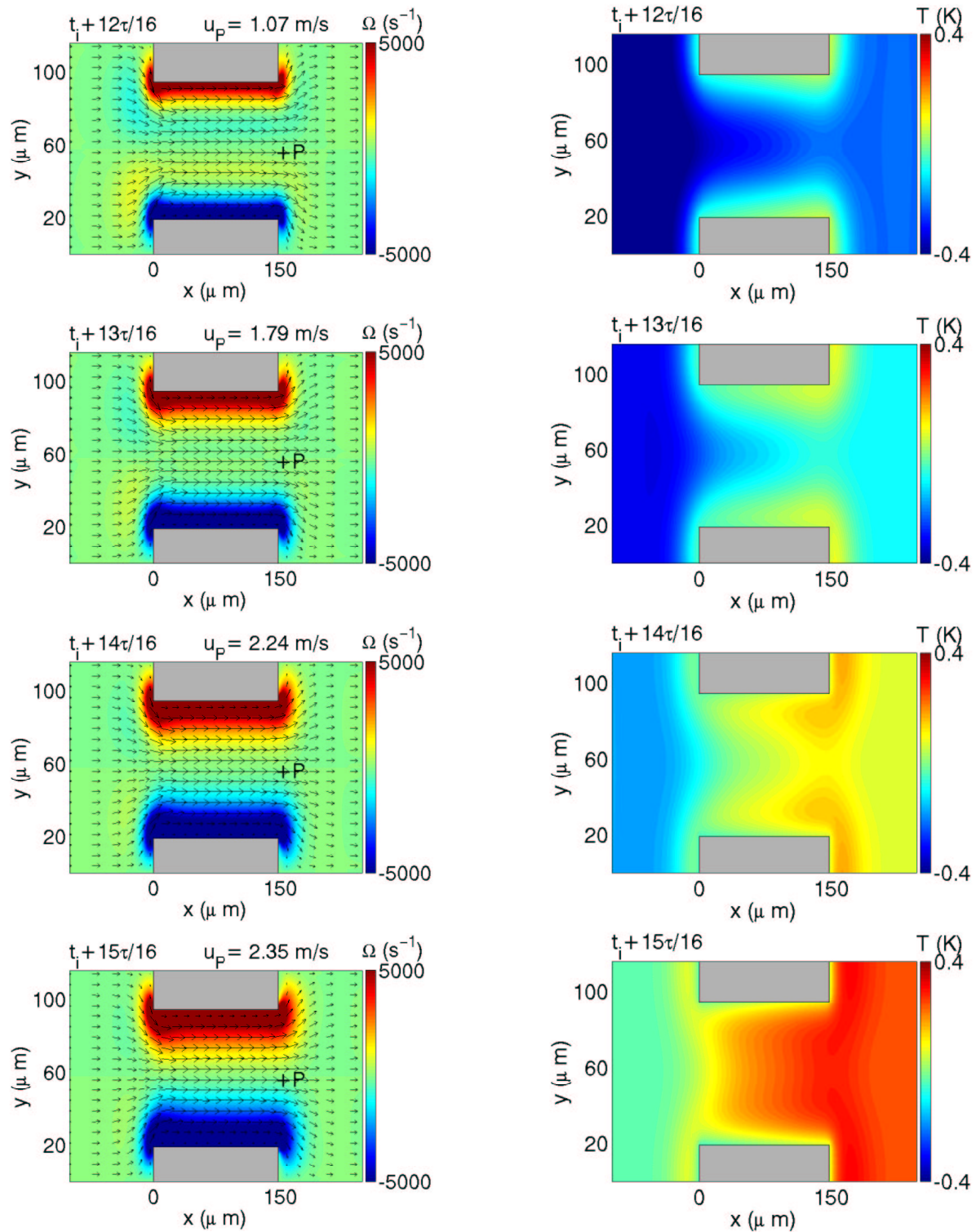


FIG. 7.3.12 – Champs de vorticité et de vecteur vitesse, et champs de température obtenus pour la plaque 3, en plusieurs instants pendant une période acoustique τ . L'échelle de vitesse est donnée par la valeur de celle-ci au point P. L'origine des abscisses correspond au coin F de la plaque. $M_a=0.5\%$.

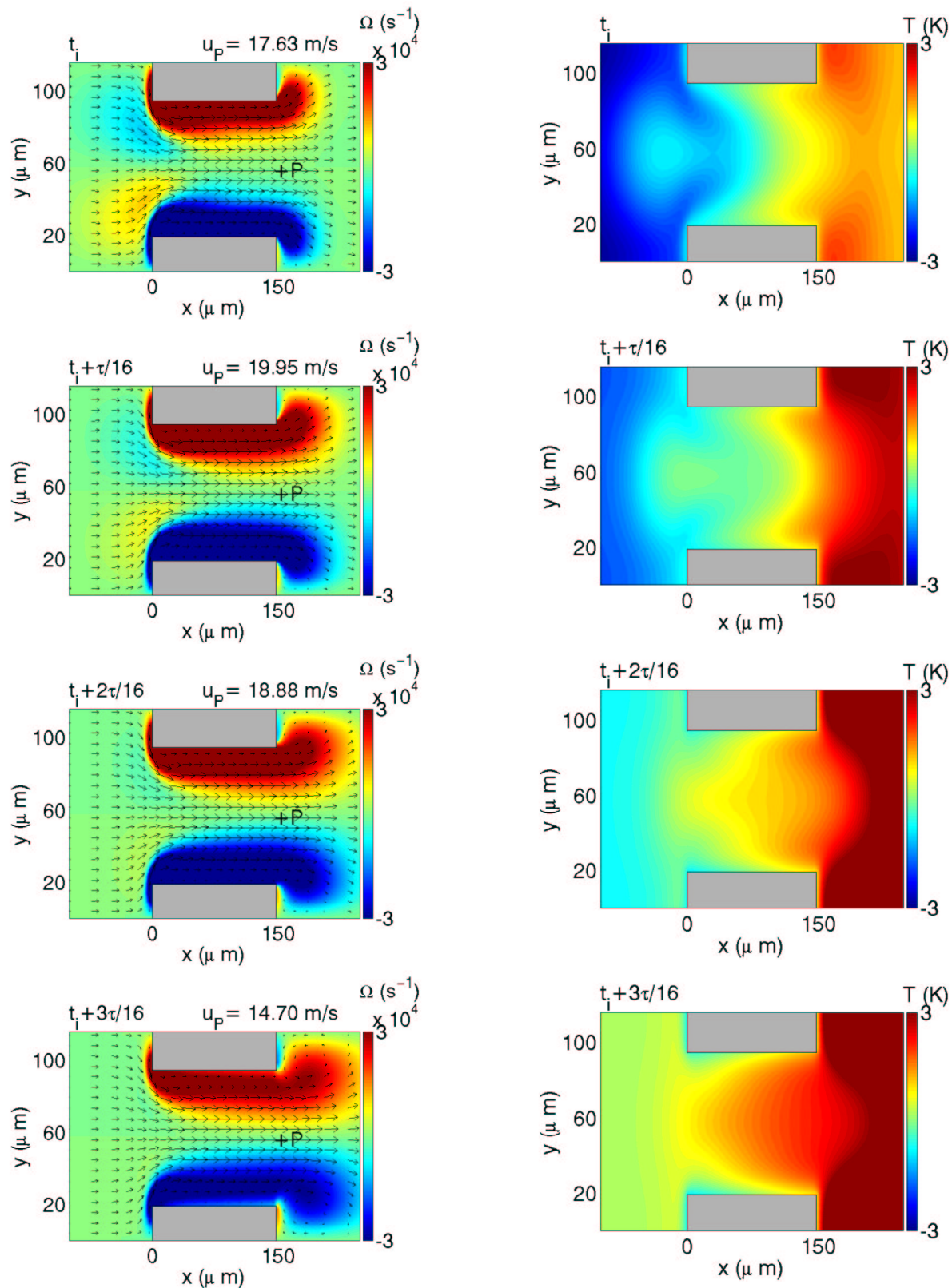


FIG. 7.3.13 – Champs de vorticité et de vecteur vitesse, et champs de température obtenus pour la plaque 3, en plusieurs instants pendant une période acoustique τ . L'échelle de vitesse est donnée par la valeur de celle-ci au point P. L'origine des abscisses correspond au coin F de la plaque. $M_a=4\%$.

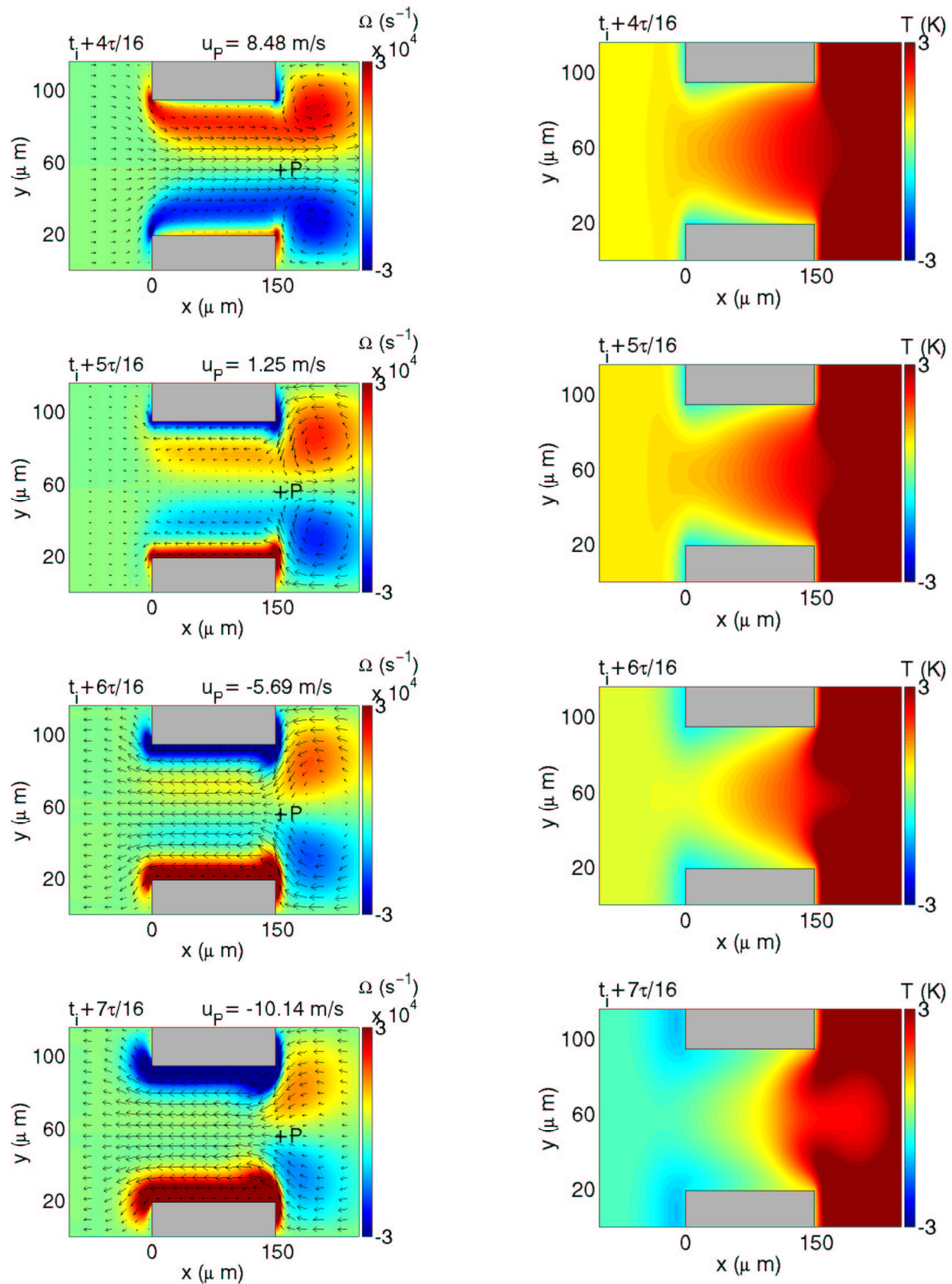


FIG. 7.3.14 – Champs de vorticité et de vecteur vitesse, et champs de température obtenus pour la plaque 3, en plusieurs instants pendant une période acoustique τ . L'échelle de vitesse est donnée par la valeur de celle-ci au point P. L'origine des abscisses correspond au coin F de la plaque. $M_a=4\%$.

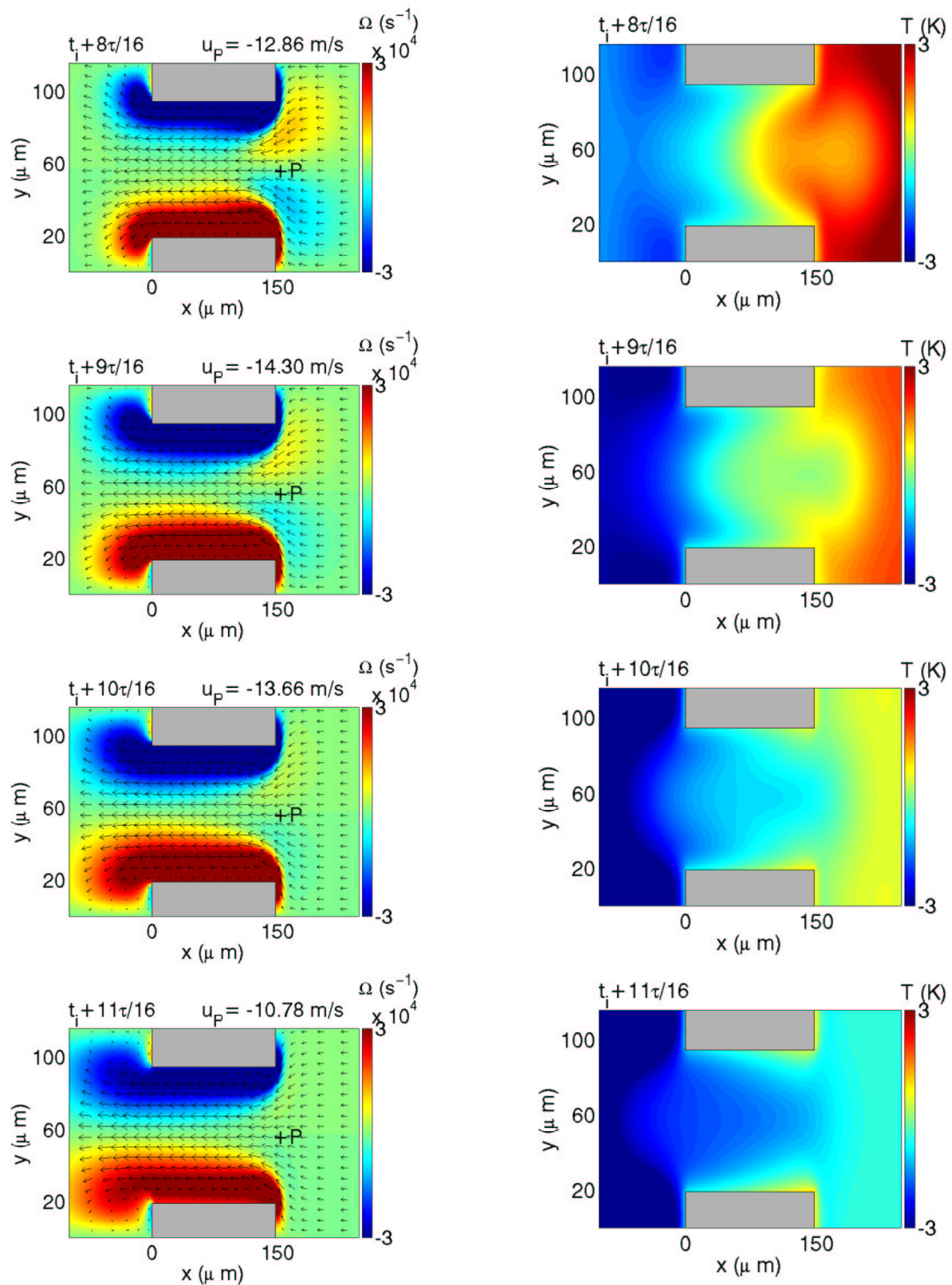


FIG. 7.3.15 – Champs de vorticité et de vecteur vitesse, et champs de température obtenus pour la plaque 3, en plusieurs instants pendant une période acoustique τ . L'échelle de vitesse est donnée par la valeur de celle-ci au point P. L'origine des abscisses correspond au coin F de la plaque. $M_a=4\%$.

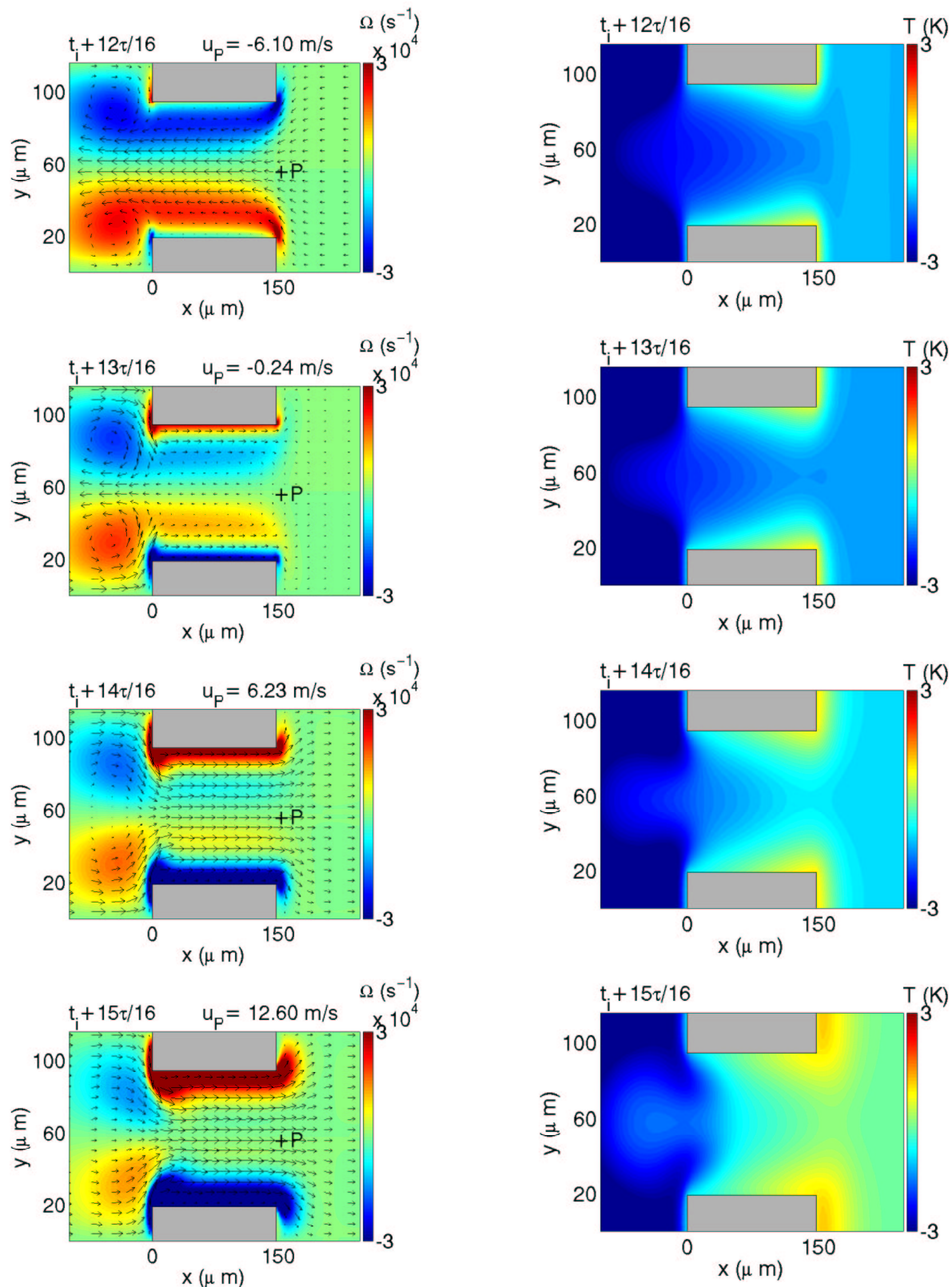


FIG. 7.3.16 – Champs de vorticité et de vecteur vitesse, et champs de température obtenus pour la plaque 3, en plusieurs instants pendant une période acoustique τ . L'échelle de vitesse est donnée par la valeur de celle-ci au point P. L'origine des abscisses correspond au coin F de la plaque. $M_a=4\%$.

même temps que la vitesse au point P aux figures 7.3.17 pour $M_a=0.5\%$, et 7.3.18 pour $M_a=4\%$. Pour $M_a=0.5\%$ (figure 7.3.17), les variations des flux de chaleur \dot{Q}_{tr} et \dot{Q}_{lat} ont toutes les deux une forme sinusoïdale, l'amplitude du flux de chaleur transversal étant plus importante que celle du flux passant par la tranche. La moyenne des courbes sur une période fournit les flux moyens précédemment notés $\dot{Q}_{tr,m}$ et $\dot{Q}_{lat,m}$, et dont on a vu qu'ils étaient approximativement égaux pour cette configuration (voir figure 7.3.8 pour la plaque 3). La figure 7.3.17 montre aussi que les flux instantanés sont en phase, et ont tous les deux un retard de phase d'environ $2\tau/16$ sur la vitesse u_P . Ainsi le maximum de transfert de chaleur se fait à l'instant $t_i + \tau/16$, peu après le début de la phase de décélération du fluide. Les instants auxquels ont lieu les transferts de chaleur du fluide vers la plaque sont les instants $t_i + 15\tau/16$, t_i , $t_i + \tau/16$, $t_i + 2\tau/16$, et $t_i + 3\tau/16$, pour lesquels la température du fluide dans la zone jouxtant la plaque est maximale (voir figures 7.3.9 et 7.3.12). Pour $M_a=4\%$, (figure 7.3.18), on note plusieurs changements. Les variations temporelles des flux instantanés \dot{Q}_{tr} et \dot{Q}_{lat} n'ont plus une forme sinusoïdale, et leurs amplitudes sont maintenant peu différentes. De plus on constate que l'intervalle de temps pendant lequel les flux sont positifs s'est étalé au détriment de l'intervalle de temps pendant lequel ils sont négatifs. Ceci est particulièrement vrai pour le flux \dot{Q}_{tr} passant par la tranche de la plaque. Pour $M_a=0.5\%$, les flux de chaleur avaient un maximum bien marqué $2\tau/16$ après le début de la décélération. Ici la phase de décélération commence à $t_i + \tau/16$ (figure 7.3.18). Le flux est bien maximum approximativement $2\tau/16$ après cet instant, c'est-à-dire en $t_i + 3\tau/16$, mais il reste également maximum sur la plage de temps qui suit et s'étend de $t_i + 3\tau/16$ à $t_i + 6\tau/16$. Les figures (7.3.13) et (7.3.14) montrent que ces instants correspondent à la formation d'un tourbillon en aval de la plaque, et au début de son aspiration dans le stack. De tels tourbillons n'étaient pas présents pour $M_a=0.5\%$ (instants $t_i + 2\tau/16$ à $t_i + 5\tau/16$ aux figures 7.3.9 et 7.3.10). Les tourbillons correspondent aussi au moment où la température du fluide jouxtant la plaque est maximale. Ainsi le tourbillon a pour effet d'augmenter le transfert de chaleur du fluide alors chaud vers la plaque. Cet effet augmente à la fois le transfert de chaleur latéral, \dot{Q}_{lat} , et le transfert de chaleur par la tranche, \dot{Q}_{tr} . Toutefois, en moyenne l'effet profite plus au flux de chaleur par la tranche. En effet comme on l'a vu, le flux moyen $\dot{Q}_{tr,m}$ est supérieur au flux moyen $\dot{Q}_{lat,m}$ pour $M_a=4\%$ (figure 7.3.8, plaque 3). Ces remarques sont cohérentes avec l'observation faite précédemment que $\dot{Q}_{tr,m}$ a une croissance plus rapide que $\dot{Q}_{lat,m}$ quand le nombre de Mach augmente (voir figure 7.3.8). Il apparaît donc que quand le nombre de Mach augmente, le champ aérodynamique est couplé au champ thermique et a un fort impact sur le transfert de chaleur à la plaque. Seul les transferts au côté chaud ont été étudiés ici, mais une situation symétrique existe au côté froid de la plaque, où le tourbillon favorise l'extraction de chaleur de cette dernière. Les résultats précédents

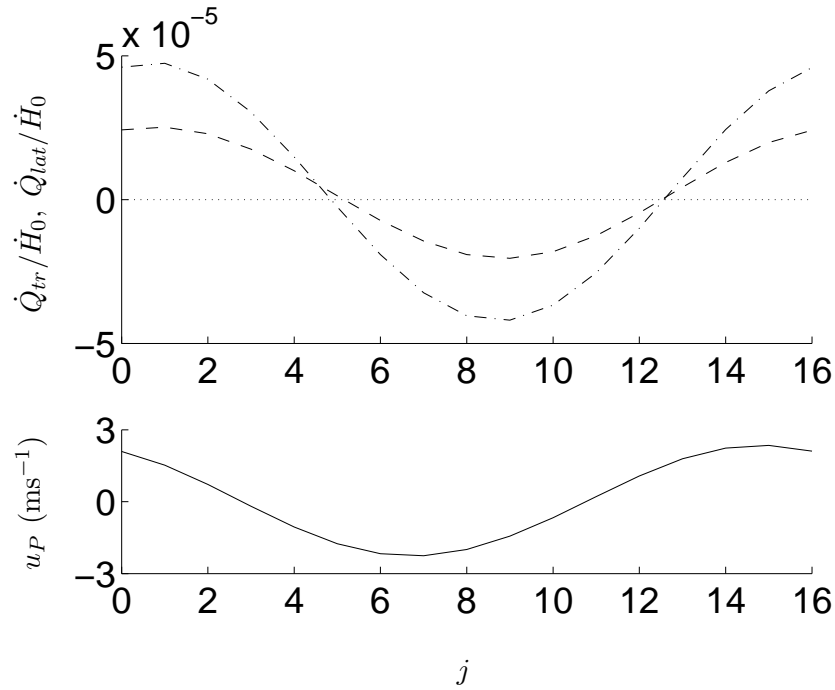


FIG. 7.3.17 – Evolution du flux \dot{Q}_{tr} passant par la tranche (---), de celui \dot{Q}_{lat} passant par la surface latérale (-·-·-), ainsi que de la vitesse u_P au point P(—) pendant une période acoustique. L'abscisse j correspond à l'instant $t_i + j\tau/16$ des figures 7.3.9 à 7.3.12. Plaque 3, $M_a=0.5\%$.

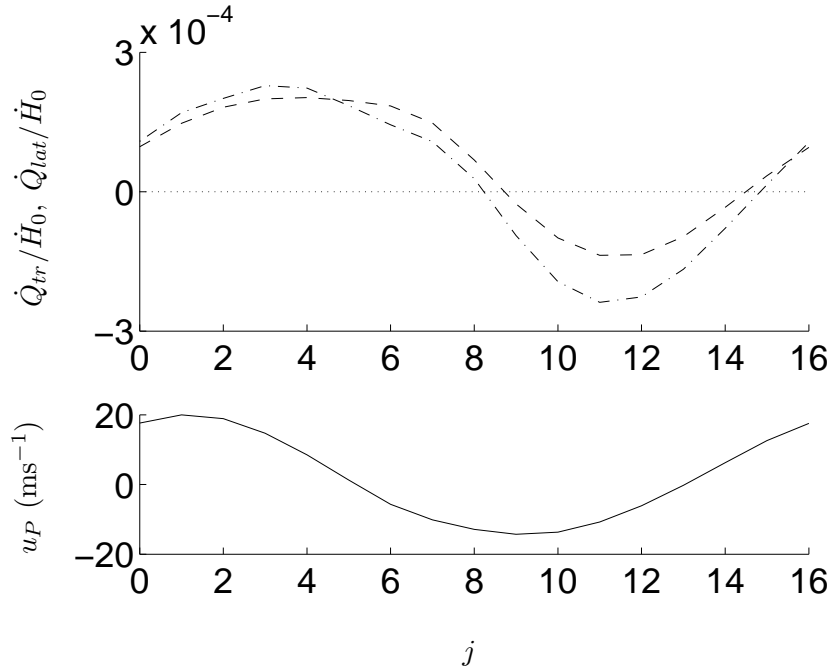


FIG. 7.3.18 – Evolution du flux \dot{Q}_{tr} passant par la tranche (---), de celui \dot{Q}_{lat} passant par la surface latérale (-·-·-), ainsi que de la vitesse u_P au point P(—) pendant une période acoustique. L'abscisse j correspond à l'instant $t_i + j\tau/16$ des figures 7.3.13 à 7.3.16. Plaque 3, $M_a=4\%$.

correspondent à la plaque 3, qui est la plaque la plus épaisse étudiée. Les comportements sont très proches pour les autres plaques. Pour la plaque 1 la plus fine, la présence de tourbillons quand on augmente le nombre de Mach est moins nette que pour la plaque 3, comme le montre la figure 7.3.19, qui représente 4 instants de la phase de décélération pour $M_a=4\%$. Sur cette figure aucun tourbillon n'est présent même à ce nombre de Mach élevé. Toutefois des zones de vorticités importantes sont présentes en dehors de la plaque. Malgré l'absence de tourbillons, l'évolution du transfert de chaleur à la plaque suit les observations précédentes. En effet l'évolution des flux de chaleur instantanés pendant une période acoustique est représentée pour cette plaque à la figure 7.3.20, toujours pour $M_a=4\%$. On constate que l'intervalle de temps sur lequel \dot{Q}_{tr} est maximum est de nouveau très étalé, de $t_i + 10\tau/16$ à $t_i + 16\tau/16$. Cet étalement est moins important pour \dot{Q}_{lat} , ce qui constitue une petite différence avec la plaque 3. Au final on peut donc s'attendre à ce que pour un nombre de Mach élevé l'écoulement bidimensionnel influence les transferts de chaleur entre la plaque et le fluide, même pour une plaque fine.

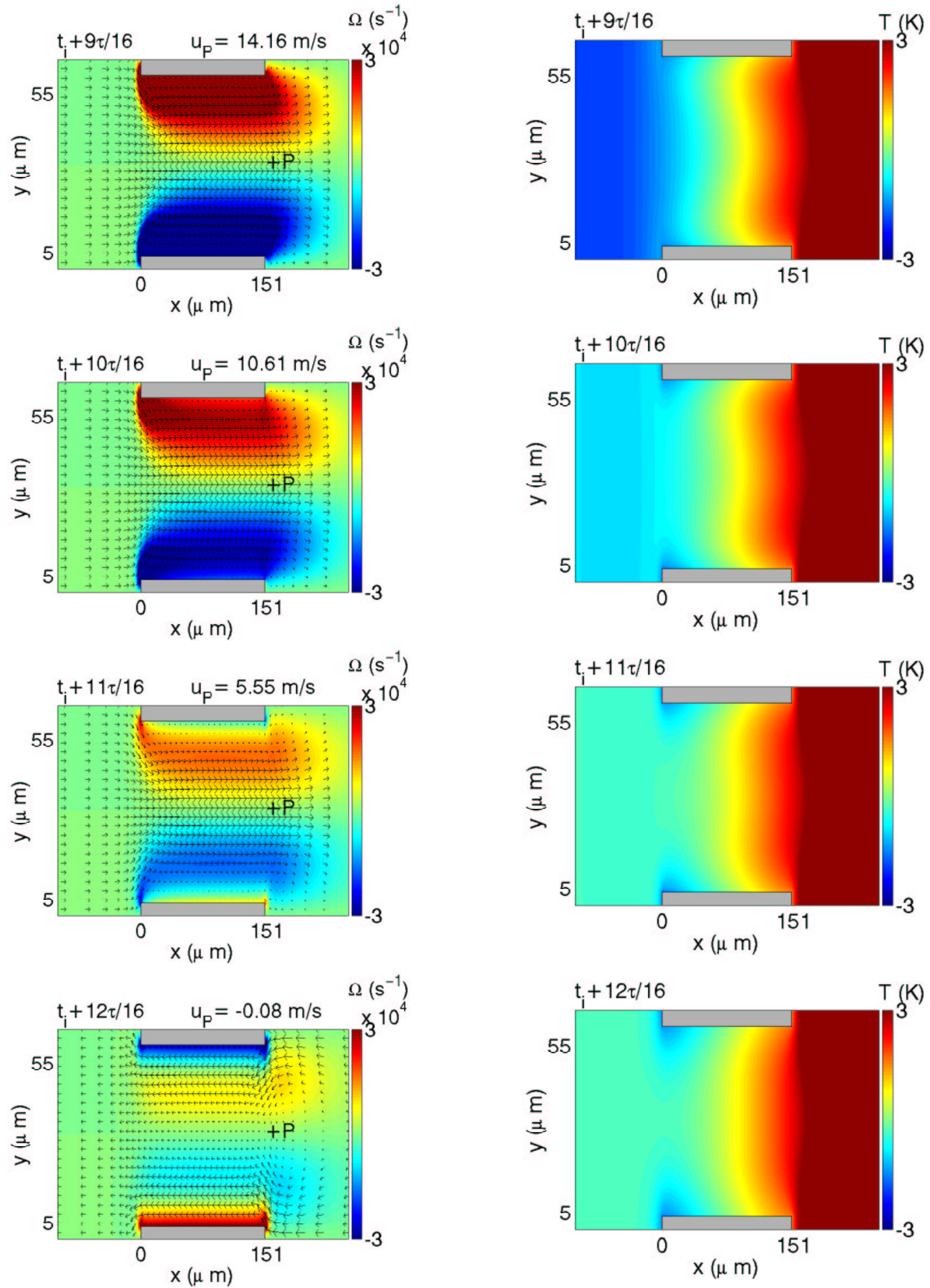


FIG. 7.3.19 – Champs de vorticité et de vecteur vitesse, et champs de température obtenus pour la plaque 1, en plusieurs instants pendant une période acoustique τ . L'échelle de vitesse est donnée par la valeur de celle-ci au point P. L'origine des abscisses correspond au coin F de la plaque. $M_a=4\%$.

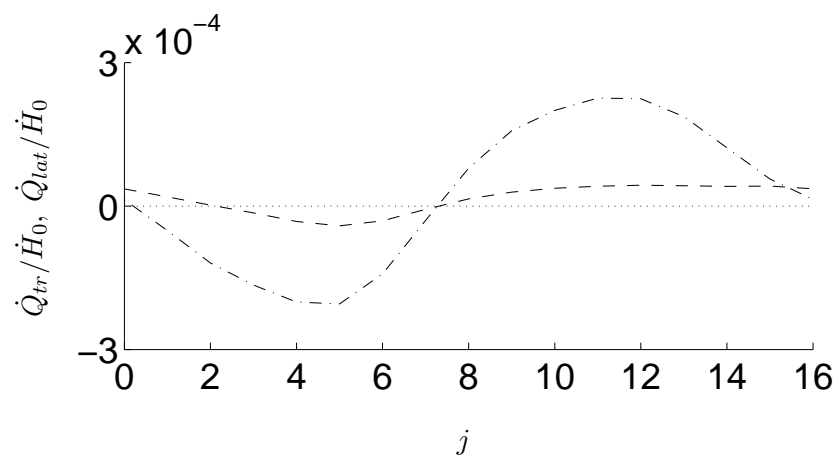


FIG. 7.3.20 – Evolution du flux \dot{Q}_{tr} passant par la tranche de la plaque (---) et de celui \dot{Q}_{lat} passant par sa surface latérale (— · —). L'abscisse j correspond à l'instant $t_i + j\tau/16$, $t_i + 9\tau/16$ correspondant au début de la phase de décélération. Plaque 1, $M_a=4\%$.

7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la simulation d'une plaque 2D a été faite. Les résultats obtenus sur les champs de vitesse et de vorticité à 200 Hz ont été comparés à des mesures expérimentales faites par PIV pour deux types d'empilement. Pour l'empilement constitué de plaques épaisses (A), un très bon accord qualitatif et quantitatif a été obtenu. Pour l'empilement de plaques fines (B) un accord qualitatif a été obtenu, des différences quantitatives apparaissant. Ces différences ont été attribuées aux effets de la présence du support volumineux portant les plaques de l'empilement dans les expériences. La comparaison est globalement jugée satisfaisante. Le comportement thermique de la plaque a été étudié à 20 kHz. Des comparaisons avec la théorie linéaire ont montré que cette dernière donne des résultats satisfaisants à faible nombre de Mach, mais qu'à des nombres de Mach élevés des écarts importants avec les simulations apparaissent, et ce d'autant plus que la plaque est épaisse. Il a été montré qu'une partie importante du flux de chaleur échangé entre la plaque et le fluide se fait par la tranche de la plaque, même lorsque l'épaisseur de celle-ci est faible. La contribution du flux passant par la tranche augmente de plus avec le nombre de Mach. Enfin, à des nombres de Mach suffisamment élevés, les zones de vorticité créées aux extrémités des plaques influencent fortement les transferts de chaleur. Pour une plaque seule, les tourbillons ont un effet positif, puisqu'ils favorisent le transfert de chaleur de la plaque vers le fluide au bord froid, et du fluide vers la plaque au bord chaud. On peut prévoir que ces tourbillons auront une forte influence sur le transfert de chaleur au niveau des échangeurs de chaleur.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, un outil de calcul numérique a été développé pour la simulation d'un réfrigérateur thermoacoustique. Les machines thermoacoustiques fonctionnant avec une onde acoustique résonante de forte intensité, les phénomènes compressibles et non-linéaires sont importants. C'est la raison pour laquelle il a été choisi de faire une simulation numérique directe résolvant les équations de Navier-Stokes compressibles, sans aucune approximation, dans l'optique de pouvoir simuler à terme une tranche entière du réfrigérateur. L'inconvénient d'une telle simulation est le coût de calcul. Pour diminuer ce coût, la grande majorité des simulations a concerné une machine fonctionnant à une fréquence élevée de 20 kHz. Les méthodes utilisées pour la résolution sont des méthodes d'ordre élevé, peu dispersives, et peu dissipatives. L'intégration temporelle est faite avec une méthode de Runge-Kutta à quatre étapes, et les dérivées spatiales sont calculées avec des différences finies optimisées d'ordre quatre. Un filtrage spatial est utilisé pour supprimer les éventuelles oscillations maille à maille. La thèse s'est en grande partie concentrée sur l'étude du noyau thermoacoustique (plaque et échangeurs de chaleur). La source étant alors exclue du domaine de calcul, l'onde résonante a été établie par utilisation de la méthode des caractéristiques. Cette méthode a l'avantage de pouvoir créer une onde acoustique de fort niveau à faible taux d'harmoniques.

Les résultats majeurs de ce travail concernent :

- l'étude de non-linéarités de température propres à l'empilement de plaques, tirant leur origine dans le terme convectif non-linéaire de l'équation d'énergie, ainsi que la mise en évidence de l'impact de ces non-linéarités sur le transport de chaleur par l'empilement,
- l'étude de la différence de température entre les extrémités d'une plaque, et celle sous-jacente de la limite de validité des hypothèse de la théorie linéaire,
- l'étude de mouvements moyens dans le voisinage du stack,
- l'étude d'échangeurs de chaleur,
- l'étude de l'influence de l'épaisseur de la plaque sur l'échange de chaleur entre la plaque et le

fluide.

Ces résultats ont été obtenus au cours de plusieurs séries de simulations. La première série a calculé l'effet thermoacoustique au-dessus d'une plaque 1D isotherme. L'avantage d'une telle simulation est double. Elle a permis d'une part de se comparer à la théorie linéaire et à d'autres travaux numériques, et d'autre part d'obtenir des résultats importants avec un temps de calcul réduit. Une partie importante de l'étude a porté sur les phénomènes non-linéaires. En particulier il a été montré que lorsque le nombre de Mach atteint une valeur suffisante, des harmoniques apparaissent dans l'oscillation de température dans la zone de l'empilement (stack), mais pas dans le reste du résonateur. La présence de ces harmoniques est particulièrement marquée aux bords de la plaque. L'origine de ces harmoniques est le terme non-linéaire convectif de l'équation d'énergie, qui est important au-dessus de la plaque du fait de l'échange d'énergie entre la plaque et le fluide. Au contraire le terme non-linéaire convectif de l'équation de conservation de la quantité de mouvement reste faible et la vitesse n'a pas un comportement non-linéaire. Toutefois, la vitesse, au travers du déplacement acoustique, influence la non-linéarité de température et augmente cette dernière pour un stack court, et pour une position de ce stack proche du ventre de vitesse. Une des conséquences de l'apparition des non-linéarités est une modification de la loi régissant la quantité totale d'énergie transportée le long de la plaque. Ainsi la puissance du réfrigérateur, qui dépend du carré du nombre de Mach aux faibles niveaux (conformément aux attentes de la théorie linéaire), ne dépend plus que linéairement de ce nombre lorsque les non-linéarités apparaissent. Un autre effet non-linéaire observé est la présence de mouvements moyens de type 'acoustic streaming' entre les plaques du stack. Il a été montré que quand la séparation entre les plaques du stack diminue, les 'tourbillons' moyens extérieurs, puis intérieurs (au sens de Rayleigh), disparaissent pour laisser place à un écoulement moyen dont la vitesse est de signe constant dans l'espace inter-plaques.

Une deuxième série de simulations a concerné non plus une plaque isotherme, mais une plaque 1D de température non imposée, régie par une équation de la chaleur 1D couplée aux équations de conservation pour le fluide par l'intermédiaire des conditions aux limites. Des comparaisons ont pu être établies entre la théorie linéaire et les simulations. Les comparaisons ont en particulier porté sur la différence de température qui apparaît entre les extrémités de la plaque du fait de l'effet thermoacoustique. Cette comparaison a en partie été motivée par des résultats divergents obtenus par plusieurs auteurs ayant effectué une comparaison analogue, les uns trouvant un accord aux faibles nombres de Mach, les autres non. Il a été montré que même à faible nombre de Mach, un

désaccord peut survenir lors d'une comparaison avec la théorie linéaire. Ce désaccord n'est pas dû aux effets non-linéaires, mais à une mise en défaut de certaines hypothèses de la théorie. En particulier l'hypothèse qui néglige la variation de la température moyenne dans la direction perpendiculaire aux plaques conduit à une erreur importante. La prise en compte de cette variation par l'intermédiaires de coefficients correctifs, qui a mené à une théorie dite modifiée, a permis un accord entre cette théorie et les simulations, du moins à des nombres de Mach faibles. La valeur des coefficients correctifs dépend de plusieurs facteurs, dont la géométrie de la plaque, sa position dans le résonateur, ses caractéristiques (conductivité...), et les caractéristiques du fluide. Cette dépendance complexe peut éventuellement expliquer les divergences observées par les différents auteurs lors de leurs comparaisons. Il est souligné que l'éventuel désaccord trouvé entre la théorie linéaire (non modifiée) et les simulations sur la valeur de la différence de température n'est pas du à une mauvaise prédiction par la théorie linéaire du flux d'énergie thermoacoustique pompé. Ce dernier est en effet bien calculé ; c'est la répartition des flux conductifs retour dans le solide et le fluide, qui balancent le flux thermoacoustique, qui est elle mal estimée, conduisant à une erreur sur la valeur de la différence de température. Aux forts nombres de Mach les simulations sont en désaccord avec la théorie linéaire modifiée, du fait de la présence de non-linéarités. Ces non-linéarités sont celles qui ont été observées avec une plaque isotherme, et concernent l'oscillation de température. Elles sont moins importantes à proximité du nœud de vitesse. Par conséquent l'écart entre la différence de température prédite par les théories linéaire et linéaire modifiée, et celle donnée par les simulations, diminue lorsque la plaque est rapprochée du nœud de vitesse.

Une troisième série de simulations a inclu un noyau thermoacoustique complet, comprenant une plaque 1D et deux échangeurs de chaleur 1D, ces derniers étant modélisés par des plaques isothermes. La simulation de ce noyau a permis des calculs d'efficacité et une première étude d'optimisation. Cette étude a principalement porté sur l'influence de la longueur des échangeurs de chaleur, ainsi que sur la distance de séparation plaque/échangeurs. Il a été trouvé que ces deux paramètres, proches de l'amplitude du déplacement acoustique, doivent être choisis de manière précise pour maximiser l'efficacité du réfrigérateur.

Pour terminer, une quatrième série de simulations a été faite pour une plaque 2D. L'épaisseur des plaques de l'empilement doit en effet être prise en compte pour deux raisons. D'abord parce qu'elle favorise l'apparition d'effets hydrodynamiques bidimensionnels, des tourbillons aux extrémités de la plaque, ensuite parce qu'un échange de chaleur peut se faire par la tranche de la plaque. Les résultats concernant les effets hydrodynamiques ont pu être validés par comparaison

à des expériences précédemment faites au laboratoire. L'étude des échanges de chaleur a montré qu'une partie importante de l'échange d'énergie entre le fluide et la plaque se fait à travers la tranche de cette dernière, et ce d'autant plus que le nombre de Mach est élevé. Enfin, il a été montré que la formation de tourbillons influence le transfert de chaleur en bouts de plaque, et augmente ce transfert.

Dans un futur immédiat, plusieurs développements sont envisagés. Le premier est l'inclusion d'échangeurs de chaleur 2D, qui offrirait la possibilité de simuler et d'optimiser un noyau thermoacoustique 2D complet. Le second est l'inclusion d'une source acoustique, menant à la simulation d'une tranche entière du réfrigérateur. Cet ajout permettrait de tenir compte de toutes les non-linéarités pouvant survenir lors de la propagation de l'onde acoustique. L'idéal serait de simuler une source qui soit véritablement *couplée* au résonateur, c'est-à-dire dont la dynamique dépendrait de l'impédance acoustique présentée par ce dernier. La possibilité de simuler une géométrie quelconque pour le résonateur semble un autre axe de recherche intéressant.

La majorité des simulations a été menée à 20 kHz pour diminuer le temps de calcul. Cette fréquence semble par ailleurs réaliste dans l'optique d'une miniaturisation du réfrigérateur. Aucun résultat expérimental n'a pourtant été collecté à une telle fréquence. Il semble donc nécessaire d'une part de faire des simulations pour des fréquences moins élevées (de quelques kHz par exemple), et d'autre part de rassembler des résultats expérimentaux à ces fréquences, dans le but d'établir une comparaison. Parallèlement, des efforts doivent aussi être faits pour améliorer le temps de convergence des simulations.

Signalons pour terminer que la présente étude a porté sur les réfrigérateurs thermoacoustiques. Le code de calcul peut néanmoins aisément être étendu au cas d'un moteur, où le gradient de température serait imposé, et l'établissement spontané d'une onde acoustique observé. Du fait des gradients de température importants qui existent dans un moteur, une des hypothèses faites dans le code doit être revue, à savoir celle qui suppose que la conductivité thermique et la viscosité du fluide sont indépendantes de la température. Cette modification est toutefois relativement immédiate.

Annexe A

Coefficients des schémas numériques

A.1 Coefficients du schéma de l'intégration de Runge-Kutta

$\alpha_1 = 1/4$	
$\alpha_2 = 1/3$	$c_2 = 1/4$
$\alpha_3 = 1/2$	$c_3 = 1/3$
$\alpha_4 = 1$	$c_4 = 1/2$

TAB. A.1.1 – Coefficients pour l'intégration de Runge-Kutta de la section 3.3.3.

A.2 Coefficients du schéma de Tam

N=M=3	N=2 M=4	N=1 M=5	N=0 M=6
$a_3 = 0.020843142770$	$a_4 = -0.026369431$	$a_5 = 0.048230454$	$a_6 = -0.203876371$
$a_2 = -0.166705904415$	$a_3 = 0.166138533$	$a_4 = -0.281814650$	$a_5 = 1.128328861$
$a_1 = 0.770882380518$	$a_2 = -0.518484526$	$a_3 = 0.768949766$	$a_4 = -2.833498741$
$a_0 = 0$	$a_1 = 1.273274737$	$a_2 = -1.388928322$	$a_3 = 4.461567104$
$a_{-1} = -a_1$	$a_0 = -0.474760914$	$a_1 = 2.147776050$	$a_2 = -5.108851915$
$a_{-2} = -a_2$	$a_{-1} = -0.468840357$	$a_0 = -1.084875676$	$a_1 = 4.748611401$
$a_{-3} = -a_3$	$a_{-2} = 0.049041958$	$a_{-1} = -0.209337622$	$a_0 = -2.192280339$

TAB. A.2.1 – Coefficients pour le schéma de Tam de la section 3.3.2.

A.3 Coefficients de filtrage

N=1	N=2	N=3	N=4
			$d_4 = 1/256$
		$d_3 = -1/64$	$d_3 = -1/32$
	$d_2 = 1/16$	$d_2 = 3/32$	$d_2 = 7/64$
$d_1 = -0.25$	$d_1 = -1/4$	$d_1 = -15/64$	$d_1 = -7/32$
$d_0 = 0.5$	$d_0 = 3/8$	$d_0 = 5/16$	$d_0 = 35/128$
$d_{-1} = d_1$	$d_{-1} = d_1$	$d_{-1} = d_1$	$d_{-1} = d_1$
	$d_{-2} = d_2$	$d_{-2} = d_2$	$d_{-2} = d_2$
		$d_{-3} = d_3$	$d_{-3} = d_3$
			$d_{-4} = d_4$

TAB. A.3.1 – Coefficients du filtrage de la section 3.3.4.

Annexe B

Symétrisation du tenseur visqueux τ

Pour une paroi adhérente, les points images en vitesse sont des points antisymétriques : l'image du point i ($\rho'_i, u'_i, v'_i, p'_i$) est le point $-i$ ($\times, -u'_i, -v'_i, p'_i$). On cherche ici à calculer les $\tau_{kl,-i}$ au point $-i$ en fonction des $\tau_{kl,i}$ au point i . Pour ce faire on remarque que d'après les symétries imposées sur u et v , on a :

$$\frac{\partial u_{-i}}{\partial x} = -\frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_{-i}}{\partial y} = \frac{\partial u_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_{-i}}{\partial x} = -\frac{\partial v_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_{-i}}{\partial y} = \frac{\partial v_i}{\partial y}. \quad (\text{B.0.1})$$

On se sert ensuite de la définition du tenseur τ :

$$\begin{aligned} \tau_{xx,i} &= \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial v_i}{\partial y}, \\ \tau_{xy,i} = \tau_{yx,i} &= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.0.2})$$

$$\tau_{yy,i} = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_i}{\partial x}.$$

Avec les premières et troisièmes équations on peut isoler :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x} &= \frac{1}{2\mu} (2\tau_{xx,i} + \tau_{yy,i}), \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} &= \frac{1}{2\mu} (\tau_{xx,i} + 2\tau_{yy,i}). \end{aligned} \quad (\text{B.0.3})$$

En utilisant les relations (B.0.1), on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{-i}}{\partial x} &= -\frac{1}{2\mu} (2\tau_{xx,i} + \tau_{yy,i}), \\ \frac{\partial v_{-i}}{\partial y} &= \frac{1}{2\mu} (\tau_{xx,i} + 2\tau_{yy,i}). \end{aligned} \quad (\text{B.0.4})$$

Ce qui nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \tau_{xx,-i} &= \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u_{-i}}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial v_{-i}}{\partial y} = -\frac{5}{3}\tau_{xx,i} - \frac{4}{3}\tau_{yy,i}, \\ \tau_{yy,-i} &= \frac{4}{3}\mu \frac{\partial v_{-i}}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_{-i}}{\partial x} = \frac{4}{3}\tau_{xx,i} + \frac{5}{3}\tau_{yy,i}. \end{aligned} \quad (\text{B.0.5})$$

Par contre les relations (B.0.2) ne permettent pas d'isoler $\partial u_i/\partial y$ et $\partial v_i/\partial x$. On ne peut donc exprimer $\tau_{xy,-i}$ en fonction de $\tau_{xy,i}$ qu'en négligeant $\partial v_i/\partial x$ par rapport à $\partial u_i/\partial y$ pour une paroi suivant x. On a alors simplement :

$$\tau_{xy,-i} = \tau_{xy,i}. \quad (\text{B.0.6})$$

Les relations (B.0.5) et (B.0.6) sont les symétries qui permettent de passer du point i au point -i pour le tenseur $\bar{\tau}$ dans le cas d'une paroi suivant Ox. Pour une paroi suivant Oy, ces relations deviennent :

$$\tau_{xx,-i} = \frac{5}{3}\tau_{xx,i} + \frac{4}{3}\tau_{yy,i},$$

$$\tau_{yy,-i} = -\frac{4}{3}\tau_{xx,i} - \frac{5}{3}\tau_{yy,i},$$

$$\tau_{xy,-i} = \tau_{xy,i}.$$

Annexe C

Onde stationnaire

On rappelle ici les expressions analytiques de la pression pour une onde stationnaire dans le domaine représenté en figure C.0.1. On note p_i et u_i les pression et vitesse acoustiques incidentes et p_r et u_r les pression et vitesse acoustiques réfléchies. On note p' et u' la pression acoustique totale et la vitesse acoustique totale qui correspondent au champ d'onde stationnaire résultant de la superposition des champs incident et réfléchi. On considère d'abord le cas du tube ouvert en

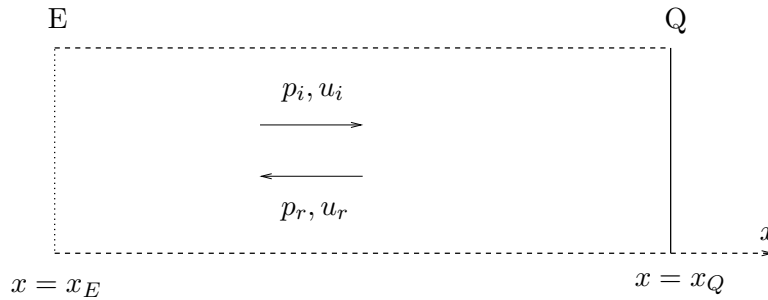


FIG. C.0.1 – Champ d'onde stationnaire obtenu dans le domaine par superposition d'une onde incidente et d'un onde réfléchi.

$x = x_E$, abscisse à laquelle l'onde incidente est entrée dans le domaine de calcul. La paroi sur laquelle se réfléchit l'onde est située en $x = x_Q$. On note A l'amplitude en pression de l'onde incidente et on prend :

$$p_i = A \sin(k(x - x_E) - \omega t),$$

$$u_i = \frac{A}{\rho_0 c_0} \sin(k(x - x_E) - \omega t).$$

Ces expressions sont valables en acoustique linéaire et en l'absence de viscosité. En utilisant les notations complexes, et la convention en $e^{i\omega t}$, on a :

$$p_i = A e^{i(\omega t - k(x - x_E) + \pi/2)},$$

$$v_i = \frac{A}{\rho_0 c_0} e^{i(\omega t - k(x - x_E) + \pi/2)}.$$

En imposant comme conditions aux limites en $x = x_Q$ un gradient de pression totale et une vitesse totale nuls, on a :

$$\begin{aligned} p_r &= A e^{i(\omega t + k(x + x_E - 2x_Q) + \pi/2)}, \\ v_r &= -\frac{A}{\rho_0 c_0} e^{i(\omega t + k(x + x_E - 2x_Q) + \pi/2)}. \end{aligned}$$

L'expression le champ stationnaire vérifie alors :

$$\begin{aligned} p' &= 2A \cos(k(x - x_Q)) e^{i(\omega t + k(x_E - x_Q) + \pi/2)}, \\ v' &= \frac{2A}{\rho_0 c_0} \sin(k(x - x_Q)) e^{i(\omega t + k(x_E - x_Q))}. \end{aligned}$$

En utilisant le nombre de Mach M_a et le drive ratio définis respectivement par (1.1.3) et (1.1.2), on peut écrire ces expressions sous la forme :

$$\begin{aligned} p' &= D_r p_0 \cos(k(x - x_Q)) e^{i(\omega t + k(x_E - x_Q) + \pi/2)}, \\ v' &= M_a c_0 \sin(k(x - x_Q)) e^{i(\omega t + k(x_E - x_Q))}. \end{aligned} \quad (\text{C.0.1})$$

L'amplitude à imposer pour l'onde incidente est alors

$$A = \frac{D_r p_0}{2} = \frac{\gamma M_a p_0}{2}.$$

Les expressions (C.0.1) sont celles à utiliser pour une comparaison avec les résultats issus de la simulation quand on entre une onde acoustique dans le domaine de calcul par la méthode des caractéristiques (voir section 4.2).

On considère maintenant le cas d'un résonateur : il y a alors une paroi en $x_E = 0$ qui impose les mêmes conditions aux limites qu'en $x = x_Q = l_{res}$, c'est à dire un gradient de pression et une vitesse nuls. Les expressions de la vitesse et de la pression sont alors les mêmes que pour un canal ouvert (équations (C.0.1)) mais le nombre d'onde vérifie $kl_{res} = n\pi$ avec n entier. Pour un résonateur en $l_{res} = \lambda/2$, on a $n=1$ et :

$$\begin{aligned} p' &= i D_r p_0 \cos(kx) e^{i\omega t}, \\ v' &= M_a c_0 \sin(kx) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Ceci peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} p' &= p_1 e^{i\omega t}, \\ v' &= v_1 e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (\text{C.0.2})$$

avec

$$\begin{aligned} p_1 &= i P_A \cos(kx), \\ v_1 &= \frac{P_A}{\rho_0 c_0} \sin(kx). \end{aligned} \quad (\text{C.0.3})$$

L'indice 1 rappelle que l'on a un champ acoustique, et P_A est l'amplitude en pression de l'onde acoustique stationnaire, avec $P_A = D_r p_0 = \gamma M_a p_0$. L'expression (C.0.3) est équivalente à celle (1.1.1) donnée au chapitre 1.

Annexe D

Cas simulés

Dans cette annexe sont regroupés les cas simulés. Les cas concernant une plaque 1D isotherme sont donnés à la section D.1, ceux concernant une plaque non-isotherme à la section D.2, ceux concernant une plaque 1D couplée à des échangeurs de chaleur à la section D.3, et enfin ceux concernant une plaque 2D à la section D.4. Dans chaque série de cas, le paramètre en gras est celui qui varie. Les caractéristiques du fluide et de la plaque sont données à la section D.5. Avec un processeur fonctionnant à 1.2 GHz, les temps de calcul s'échelonnent entre 1 heure pour une plaque isotherme et 50 périodes de calcul, et quelques jours pour une plaque non-isotherme avec jusqu'à 2000 périodes de calcul. Ces temps de calcul sont donnés pour une fréquence $f=20$ kHz et une résolution $reso=8$ (on rappelle que le temps de calcul est proportionnel à $reso^3$ et inversement proportionnel à $1/f$).

D.1 Plaque 1D isotherme

Cas N°	l_{dc}/λ	kx_S	L/λ	δ_κ/y_0	M_a	$reso$
1-1	1/3	2.35	1/40	0.4	0.005	8
1-2	1/3	2.13	1/40	0.19	0.02	8
1-3	1/3	2.13	1/40	0.37	0.02	8
1-4	1/3	2.13	1/40	0.75	0.02	8
1-5	1/3	2.13	1/40	1.1	0.02	23
1-6	1/3	2.13	1/40	1.2	0.02	23
1-7	1/3	2.13	1/40	1.3	0.02	23
1-8	1/3	2.13	1/40	1.45	0.02	23
1-9	1/3	2.13	1/40	0.37	0.005	8
1-10	1/3	2.13	1/40	0.37	0.01	8
1-12	1/3	2.13	1/40	0.37	0.015	8
1-12	1/3	2.13	1/40	0.37	0.02	8
1-13	1/3	2.13	1/40	0.37	0.025	8
1-14	1/3	2.13	1/40	0.37	0.035	8
1-15	1/3	2.13	1/40	0.37	0.04	8
1-16	1/3	2.13	1/40	0.37	0.06	8
1-17	1/3	2.13	1/40	0.37	0.08	8
1-18	1/3	2.13	1/40	0.37	0.10	8
1-19	1/3	2.13	1/40	0.37	0.12	8

1-20	1/3	2.13	2/40	0.37	0.005	8
1-21	1/3	2.13	2/40	0.37	0.01	8
1-22	1/3	2.13	2/40	0.37	0.015	8
1-23	1/3	2.13	2/40	0.37	0.02	8
1-24	1/3	2.13	2/40	0.37	0.025	8
1-25	1/3	2.13	2/40	0.37	0.035	8
1-26	1/3	2.13	2/40	0.37	0.04	8
1-27	1/3	2.13	2/40	0.37	0.06	8
1-28	1/3	2.13	2/40	0.37	0.08	8
1-29	1/3	2.13	2/40	0.37	0.10	8
1-30	1/3	2.13	2/40	0.37	0.12	8
1-31	1/3	2.13	3/40	0.37	0.005	8
1-32	1/3	2.13	3/40	0.37	0.01	8
1-33	1/3	2.13	3/40	0.37	0.015	8
1-34	1/3	2.13	3/40	0.37	0.02	8
1-35	1/3	2.13	3/40	0.37	0.025	8
1-36	1/3	2.13	3/40	0.37	0.035	8
1-37	1/3	2.13	3/40	0.37	0.04	8
1-38	1/3	2.13	3/40	0.37	0.06	8
1-39	1/3	2.13	3/40	0.37	0.08	8
1-40	1/3	2.13	3/40	0.37	0.10	8
1-41	1/3	2.13	3/40	0.37	0.12	8
1-42	1/3	2.43	1/40	0.37	0.005	8
1-43	1/3	2.43	1/40	0.37	0.01	8
1-44	1/3	2.43	1/40	0.37	0.015	8
1-45	1/3	2.43	1/40	0.37	0.02	8
1-46	1/3	2.43	1/40	0.37	0.025	8
1-47	1/3	2.43	1/40	0.37	0.035	8
1-48	1/3	2.43	1/40	0.37	0.04	8
1-49	1/3	2.43	1/40	0.37	0.06	8
1-50	1/3	2.43	1/40	0.37	0.08	8
1-51	1/3	2.43	1/40	0.37	0.10	8
1-52	1/3	2.43	1/40	0.37	0.12	8
1-53	1/3	2.43	1/40	0.30	0.01	8
1-54	1/3	2.43	1/40	0.30	0.02	8
1-55	1/3	2.43	1/40	0.30	0.03	8
1-56	1/3	2.43	1/40	0.30	0.04	8
1-57	1/3	2.43	1/40	0.30	0.05	8

D.2 Plaque 1D non-isotherme

Cas N°	l_{dc}/λ	kx_S	L/λ	δ_κ/y_0	l/δ_ν	M_a	<i>reso</i>
2-1	1/3	2.35	1/40	0.4	0.5	0.02	8
2-2	1/3	2.35	1/40	0.4	0.05	0.02	8
2-3	1/3	2.35	1/40	0.4	0.005	0.02	8
2-4	1/3	2.13	1/40	0.37	0.01	0.04	8
2-5	1/3	2.35	0.35/40	0.57	0.5	0.005	8
2-6	1/3	2.35	0.35/40	0.57	0.5	0.012	8
2-7	1/3	2.35	0.35/40	0.57	0.5	0.02	8
2-8	1/3	2.35	0.35/40	0.57	0.5	0.04	8
2-9	1/3	2.35	0.35/40	0.57	0.5	0.08	8
2-10	1/3	2.9	0.35/40	0.57	0.5	0.005	8
2-11	1/3	2.9	0.35/40	0.57	0.5	0.012	8
2-12	1/3	2.9	0.35/40	0.57	0.5	0.02	8
2-13	1/3	2.9	0.35/40	0.57	0.5	0.04	8
2-14	1/3	2.9	0.35/40	0.57	0.5	0.08	8
2-15	1/3	2.1	0.35/40	0.57	0.5	0.005	8
2-16	1/3	2.35	0.35/40	0.57	0.5	0.005	8
2-17	1/3	2.5	0.35/40	0.57	0.5	0.005	8
2-18	1/3	2.7	0.35/40	0.57	0.5	0.005	8
2-19	1/3	2.9	0.35/40	0.57	0.5	0.005	8
2-20	1/3	2.1	0.35/40	0.57	0.5	0.04	8
2-21	1/3	2.35	0.35/40	0.57	0.5	0.04	8
2-22	1/3	2.5	0.35/40	0.57	0.5	0.04	8
2-23	1/3	2.7	0.35/40	0.57	0.5	0.04	8
2-24	1/3	2.78	0.35/40	0.57	0.5	0.04	8
2-25	1/3	2.9	0.35/40	0.57	0.5	0.04	8
2-26	1/3	2.35	1/40	0.57	0.5	0.005	8
2-27	1/3	2.35	1/40	0.57	0.5	0.02	8
2-28	1/3	2.35	1/40	0.57	0.5	0.04	8
2-29	1/3	2.35	1/40	0.57	0.5	0.08	8

D.3 Plaque et échangeurs 1D

Cas N°	l_{dc}/λ	kx_S	L/λ	δ_κ/y_0	G_f/λ	L_f/λ	$\frac{T_f - T_0}{\gamma T_0}$	M_a	$reso$
3-1	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/200	-0.002	0.04	6
3-2	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/200	-0.003	0.04	6
3-3	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/200	-0.005	0.04	6
3-4	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/200	-0.008	0.04	6
3-5	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/200	-0.011	0.04	6
3-6	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/200	-0.015	0.04	6
3-7	1/3	2.13	1/40	0.37	1/2000	1/200	-0.008	0.04	6
3-8	1/3	2.13	1/40	0.37	1/800	1/200	-0.008	0.04	6
3-9	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/200	-0.008	0.04	6
3-10	1/3	2.13	1/40	0.37	1/267	1/200	-0.008	0.04	6
3-11	1/3	2.13	1/40	0.37	1/200	1/200	-0.008	0.04	6
3-12	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/800	-0.008	0.04	6
3-13	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/400	-0.008	0.04	6
3-14	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/200	-0.008	0.04	6
3-15	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/133	-0.008	0.04	6
3-16	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/100	-0.008	0.04	6
3-17	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/80	-0.008	0.04	6
3-18	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/67	-0.008	0.04	6
3-19	1/3	2.13	1/40	0.26	1/400	1/200	-0.008	0.04	6
3-20	1/3	2.13	1/40	0.30	1/400	1/200	-0.008	0.04	6
3-21	1/3	2.13	1/40	0.37	1/400	1/200	-0.008	0.04	6
3-22	1/3	2.13	1/40	0.40	1/400	1/200	-0.008	0.04	6
3-23	1/3	2.13	1/40	0.52	1/400	1/200	-0.008	0.04	6

Pour tous ces cas on a : $G_c/\lambda = G_f/\lambda$, $L_c/\lambda = L_f/\lambda$, et $\frac{T_c - T_0}{\gamma T_0} = -\frac{T_f - T_0}{\gamma T_0}$.

D.4 Plaque 2D

Cas N°	l_{dc}/λ	kx_S	L/λ	δ_κ/H	l/δ_ν	M_a	$reso$
4-1	1/3	2.35	1/113	0.57	0.25	0.005	16
4-2	1/3	2.35	1/113	0.57	0.25	0.02	16
4-3	1/3	2.35	1/113	0.57	0.25	0.04	16
4-4	1/3	2.35	1/113	0.57	0.25	0.06	16
4-5	1/3	2.35	1/113	0.57	0.25	0.08	16
4-6	1/3	2.35	1/113	0.57	0.5	0.005	8
4-7	1/3	2.35	1/113	0.57	0.5	0.015	8
4-8	1/3	2.35	1/113	0.57	0.5	0.02	8
4-9	1/3	2.35	1/113	0.57	0.5	0.04	8
4-10	1/3	2.35	1/113	0.57	0.5	0.06	8
4-11	1/3	2.35	1/113	0.57	0.5	0.08	8
4-12	1/3	2.35	1/113	0.33	1.25	0.005	8
4-13	1/3	2.35	1/113	0.33	1.25	0.01	8
4-14	1/3	2.35	1/113	0.33	1.25	0.04	8
4-15	1/3	2.35	1/113	0.33	1.25	0.06	8
4-16	1/3	2.35	1/113	0.33	1.25	0.08	8

D.5 Caractéristiques du fluide et du solide

Coefficient polytropique		$\gamma=1.4$
Densité	kg.m^{-3}	$\rho_0=1.2$
Capacité calorifique	$\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$	$c_p=\gamma r/(\gamma-1)=1004$
Viscosité	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$	$\nu=1.5 \cdot 10^{-5}$
Nombre de Prandtl		$P_r=2/3$
Conductivité	$\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$	$K=\rho_0 c_p \nu / P_r=0.027$

TAB. D.5.1 – Caractéristiques du fluide utilisé (correspondant approximativement à de l'air) dans toutes les simulations. $r=287\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ est une constante correspondant à un gaz parfait.

Conductivité	$\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$	$K_s=0.14$
Densité	kg.m^{-3}	$\rho_s=1350$
Capacité calorifique	$\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$	$c_s=1300$

TAB. D.5.2 – Caractéristiques du solide utilisé (mylar) dans les simulations d'une plaque 1D (cas des annexes D.1, D.2, et D.3).

Conductivité en x	$\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$	$K_{sx}=0.237$
Conductivité en y	$\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$	$K_{sy}=237$
Densité	kg.m^{-3}	$\rho_s=900$
Capacité calorifique	$\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$	$c_s=2700$

TAB. D.5.3 – Caractéristiques du solide utilisé dans les simulations d'une plaque 2D (cas de l'annexe D.4). Les valeurs de ρ_s , c_s , et K_{sy} correspondent à de l'aluminium. La conductivité K_{sx} dans la direction x correspond ainsi à celle de l'aluminium multipliée par un facteur 0.001, dans le but de réduire les pertes. La conductivité K_{sx} correspond alors à peu près à celle du téflon.

Annexe E

Influence de la taille de la maille

Dans cette annexe, l'influence de la taille de la maille est étudiée. On rappelle que la taille de la maille dépend de la plus petite échelle du problème, ici l'épaisseur visqueuse δ_ν . Une autre échelle importante est l'épaisseur thermique δ_κ , qui a une taille plus importante, puisque l'on a la relation $\delta_\kappa = \delta_\nu / \sqrt{Pr}$, où $Pr \sim 0.67$. Ainsi, la taille Δy de la maille est donnée en fonction de δ_ν et la résolution *reso* est définie par le rapport $reso = \delta_\nu / \Delta y$. On prend en outre $\Delta x = \Delta y$. Les résultats présentés ici sont obtenus pour la simulation d'une plaque isotherme de longueur $L = \lambda/40$, située en $kx_S = 2.35$. La géométrie du domaine de calcul est rappelée à la figure E.0.1. La hauteur du domaine vérifie $y_0 = 3\delta_\nu$.

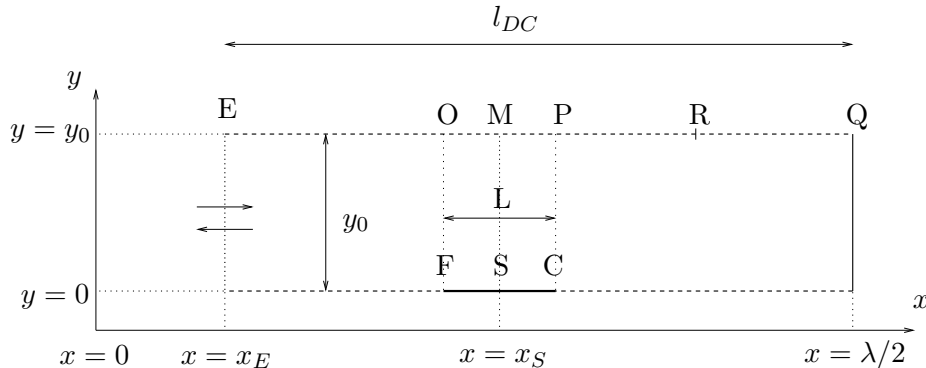


FIG. E.0.1 – Domaine de calcul et notations.

La figure E.0.2 représente le flux de chaleur parallèle à la plaque dans la section SM au-dessus de la plaque (voir figure E.0.1), pour $Ma = 0.5\%$ et pour plusieurs valeurs de la résolution. La figure E.0.3 donne le flux de chaleur correspondant, dans la direction y , sur la surface de la plaque. La figure E.0.4 donne le flux de chaleur à la plaque pour plusieurs valeurs de la résolution, et pour une valeur $Ma = 8\%$ plus élevée du nombre de Mach. On constate que les courbes convergent pour une résolution suffisamment élevée. On constate qu'un effet du raffinement du maillage se fait ressentir au bord de la plaque, où la valeur du flux de chaleur dans la direction y augmente

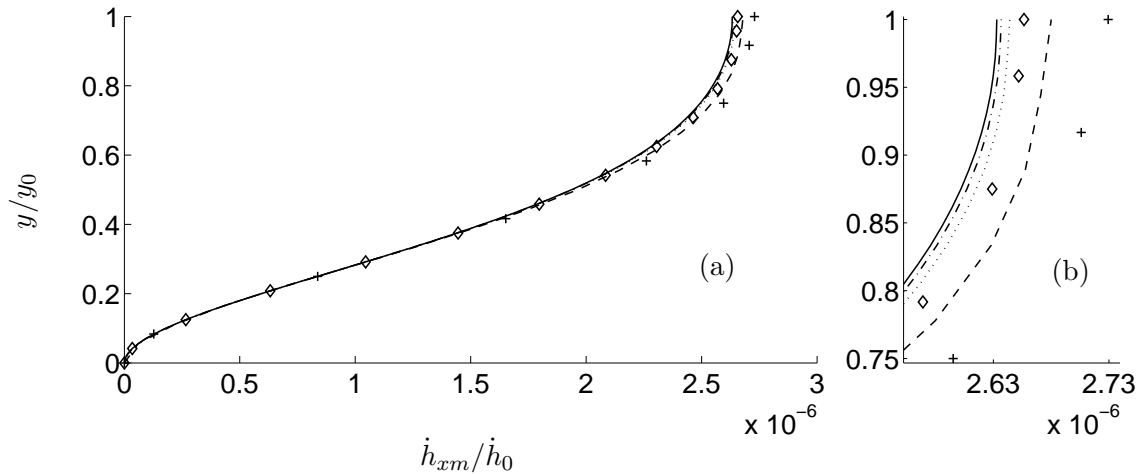


FIG. E.0.2 – (a) Flux d'énergie dans la direction x , dans la section SM du domaine de calcul, pour plusieurs valeurs de la résolution : $+$ $reso = 4$, $--$ $reso = 6$, \diamond $reso = 8$, \cdots $reso = 12$, $- \cdot -$ $reso = 16$, $—$ $reso = 24$ (b) Zoom de la figure (a). $M_a = 0.5\%$.

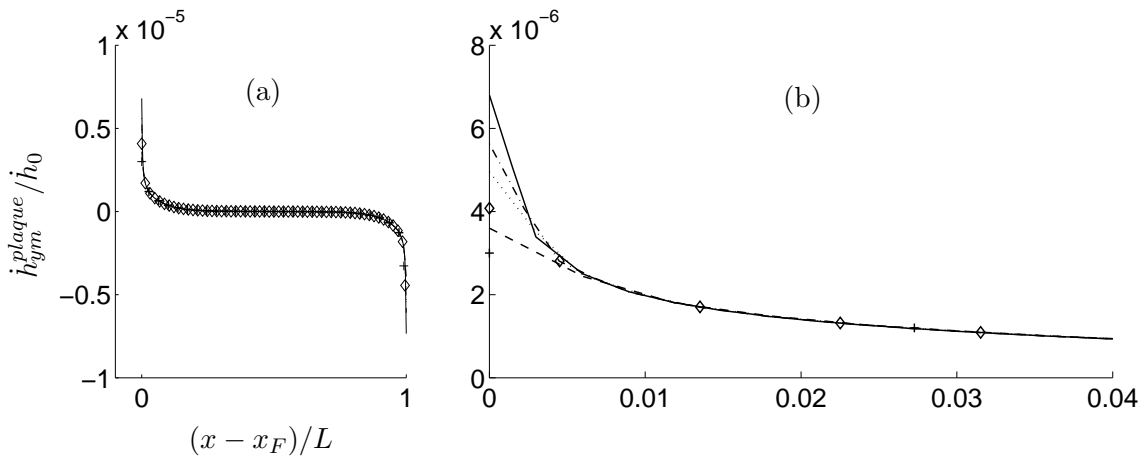


FIG. E.0.3 – (a) Flux d'énergie dans la direction y , à la plaque, pour plusieurs valeurs de la résolution : $+$ $reso = 4$, $--$ $reso = 6$, \diamond $reso = 8$, \cdots $reso = 12$, $- \cdot -$ $reso = 16$, $—$ $reso = 24$ (b) Zoom de la figure (a). $M_a = 0.5\%$.

avec la résolution (figures E.0.3(b) et E.0.4(b)). Une telle augmentation a aussi été observée par Ishikawa [65]. Toutefois, cette augmentation n'est observable que sur un point de maillage, et la contribution au flux de chaleur total est négligeable. Sur les courbes présentées ici, le flux de chaleur total ne varie que de quelques pourcents lors du passage d'une résolution $reso = 8$ à une résolution $reso = 24$. Par conséquent, dans la majeure partie des simulations présentées dans cette thèse, la résolution choisie vaut $reso = 8$.

A la section 5.2.7, on a vu que l'oscillation de température au bord F de la plaque, à des nombres de Mach mêmes faibles, ainsi qu'au point M du domaine de calcul, pour un nombre de

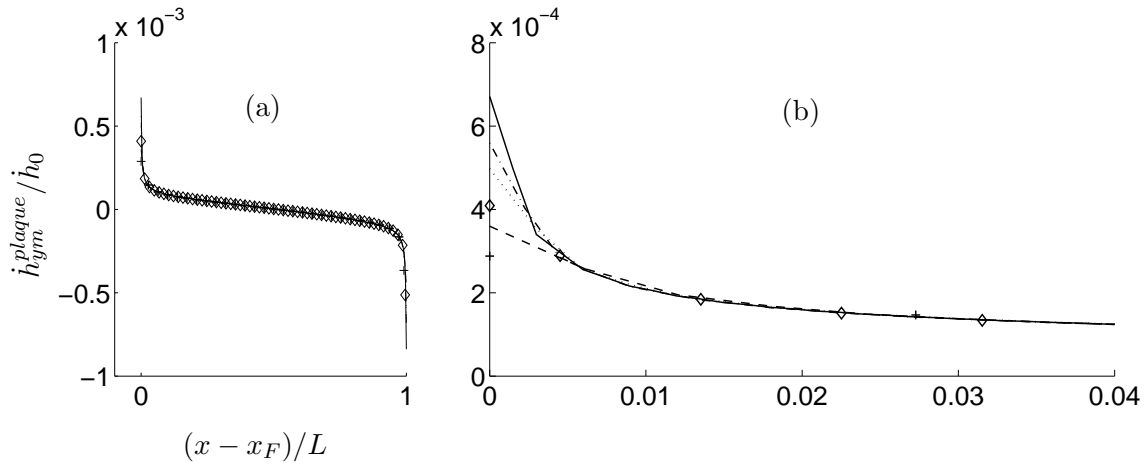


FIG. E.0.4 – (a) Flux d'énergie dans la direction y , à la plaque, pour plusieurs valeurs de la résolution : $+$ $reso = 4$, $--$ $reso = 6$, \diamond $reso = 8$, \cdots $reso = 12$, $-\cdot-$ $reso = 16$, $—$ $reso = 24$ (b) Zoom de la figure (a). $M_a = 8\%$.

Mach suffisamment élevé, a un comportement non-linéaire. On rappelle que ce comportement est physiquement dû à l'échange d'énergie entre la plaque et le fluide, et apparaît mathématiquement dans le terme non-linéaire convectif de l'équation d'énergie. La variation temporelle de la température aux points M, F, mais aussi O du domaine de calcul sont données respectivement aux figures E.0.5, E.0.6, et E.0.7 pour plusieurs valeurs de la résolution. La position des différents points est donnée à la figure E.0.1. Le point F en particulier est situé au bord froid de la plaque ($x = x_F$), à l'ordonnée $y = 0.375\delta_\nu$. On constate qu'une résolution égale à 8 donne une bonne description de l'oscillation non-linéaire de la température aux différents points du domaine de calcul. En particulier, l'oscillation au point F est bien décrite, ce qui montre que la présence du bord (donc d'une forte discontinuité) n'introduit pas d'erreurs numériques importantes.

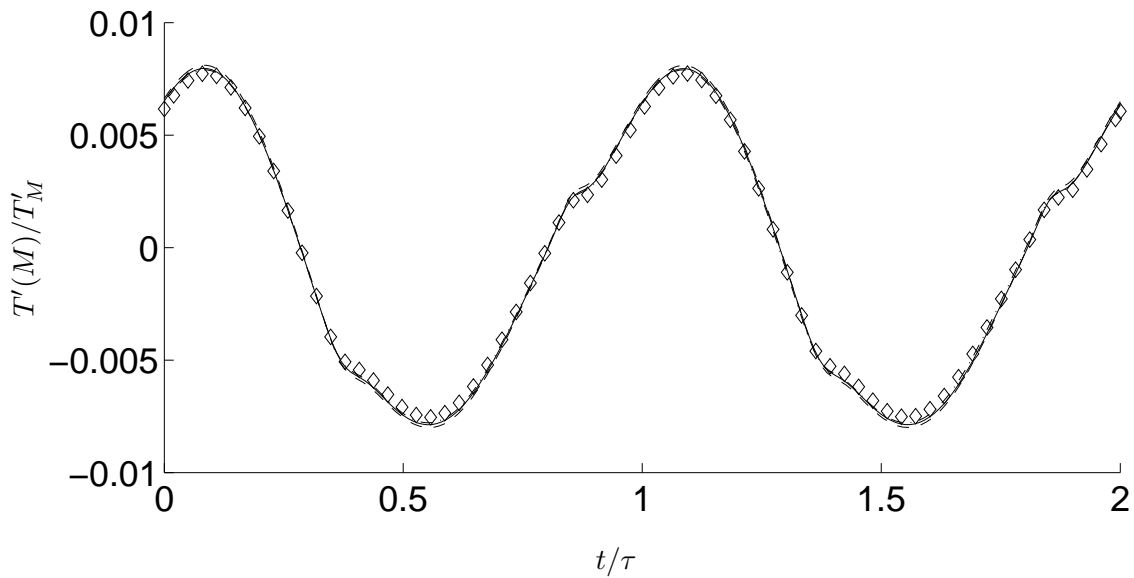


FIG. E.0.5 – Evolution temporelle de la température $T'(M)$ au point M, adimensionnée par sa valeur maximale T'_M en ce point, pour plusieurs valeurs de la résolution : $--$ $reso = 5.33$, \diamond $reso = 8$, $- \cdot -$ $reso = 16$, $—$ $reso = 24$. $Ma = 8\%$.

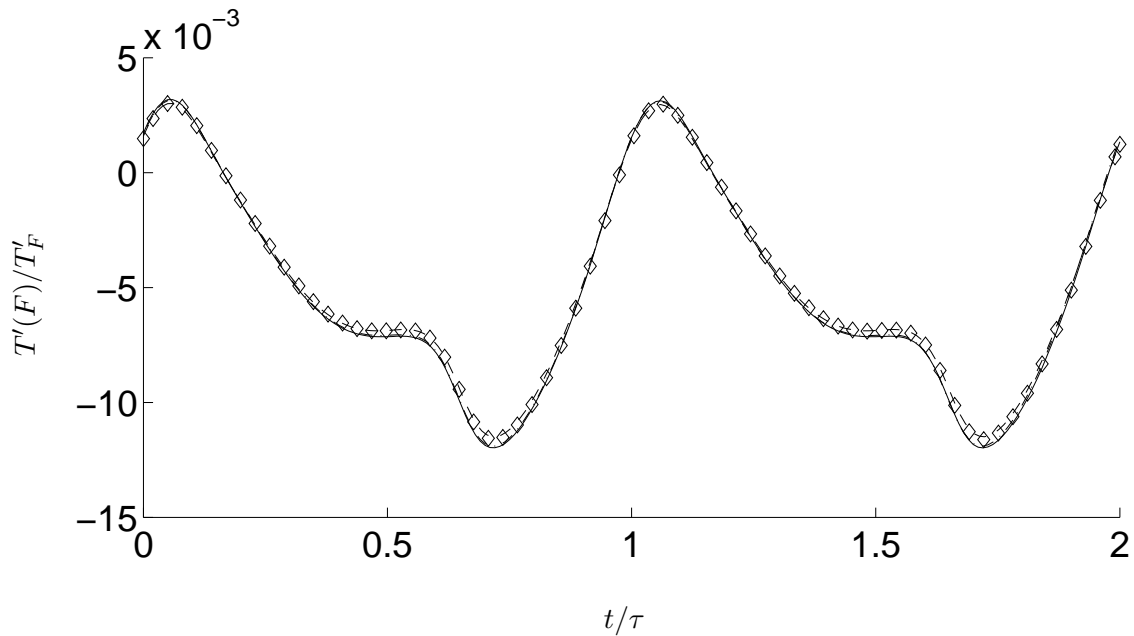


FIG. E.0.6 – Evolution temporelle de la température $T'(F)$ au point F, adimensionnée par sa valeur maximale T'_F en ce point, pour plusieurs valeurs de la résolution : $--$ $reso = 5.33$, \diamond $reso = 8$, $- \cdot -$ $reso = 16$, $—$ $reso = 24$. $Ma = 8\%$.

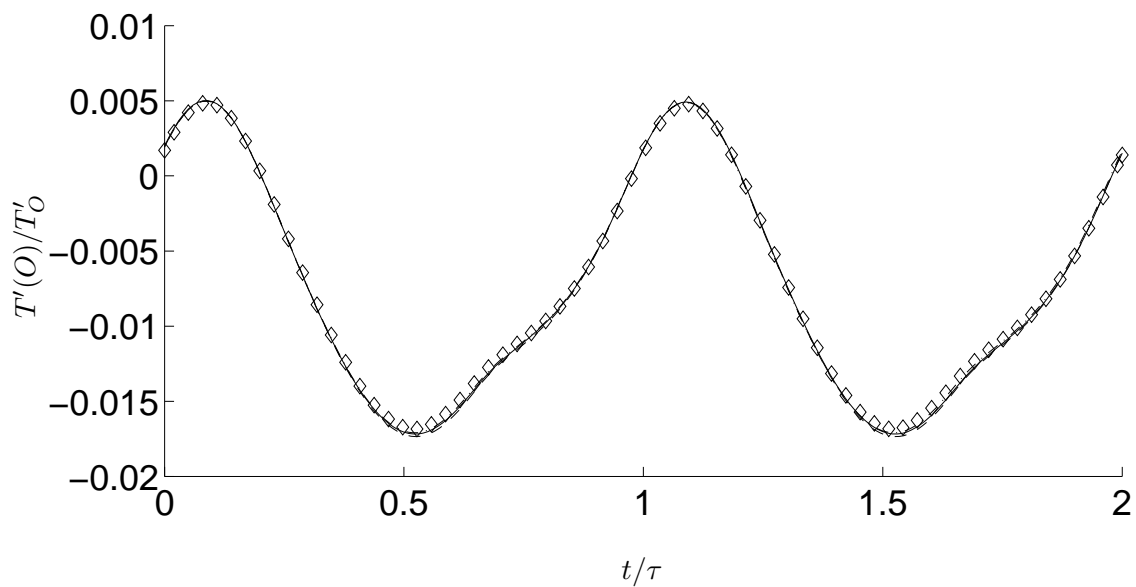


FIG. E.0.7 – Evolution temporelle de la température $T'(O)$ au point O, adimensionnée par sa valeur maximale T'_O en ce point, pour plusieurs valeurs de la résolution : $--$ $reso = 5.33$, \diamond $reso = 8$, $- \cdot -$ $reso = 16$, $—$ $reso = 24$. $M_a = 8\%$.

Bibliographie

- [1] ADEFF, J. A., AND HOFLEER, T. J. Design and construction of a solar-powered, thermoacoustically driven, thermoacoustic refrigerator. *J. Acoust. Soc. Am.* **107**(6) (2000), L37–L42.
- [2] ADEFF, J. A., HOFLEER, T. J., ATCHLEY, A. A., AND MOSS, W. C. Measurements with reticulated vitreous carbon stacks in thermoacoustic prime movers and refrigerators. *J. Acoust. Soc. Am.* **104**(1) (1998), 32–38.
- [3] ALEXEEV, A., AND GUTFINGER, C. Resonance gas oscillations in closed tubes : numerical study and experiments. *Phys. Fluids* **15** (2003), 3397–3408.
- [4] ARNOTT, W. P., BASS, H. E., AND RASPET, R. General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrarily shaped pore cross section. *J. Acoust. Soc. Am.* **90** (1991), 3228–3237.
- [5] ARNOTT, W. P., BELCHER, J. R., RASPET, R., AND BASS, H. E. Stability analysis of a helium-filled thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **96**(1) (1994), 370–375.
- [6] ATCHLEY, A. A. Standing wave analysis of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation. *J. Acoust. Soc. Am.* **92**(5) (1992), 2907–2914.
- [7] ATCHLEY, A. A. Analysis of the initial buildup of oscillations in a thermoacoustic prime mover. *J. Acoust. Soc. Am.* **95**(3) (1994), 1661–1664.
- [8] ATCHLEY, A. A., BASS, H. E., AND HOFLEER, T. J. Development of nonlinear waves in a thermoacoustic prime mover. In *Frontiers of Nonlinear Acoustics : 12th ISNA*, pp. 603–608. Edited by M. F. Hamilton and D. T. Blackstock (Elsevier, New York, 1990).
- [9] ATCHLEY, A. A., BASS, H. E., HOFLEER, T. J., AND LIN, H. Study of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation. *J. Acoust. Soc. Am.* **91**(2) (1992), 734–743.
- [10] ATCHLEY, A. A., HOFLEER, T. J., MUZERALL, M. L., KITE, M. D., AND AO, C. Acoustically generated temperature gradients in short plates. *J. Acoust. Soc. Am.* **88** (1990), 251–263.
- [11] ATCHLEY, A. A., AND KUO, F. Stability curves for a thermoacoustic prime mover. *J. Acoust. Soc. Am.* **95**(3) (1994), 1401–1404.

- [12] BACKHAUS, S., AND SWIFT, G. W. A thermoacoustic-Stirling heat engine : detailed study. *J. Acoust. Soc. Am.* **107**(6) (2000), 3148–3166.
- [13] BAILLIET, H. Machines thermoacoustiques : études analytiques et expérimentales de couplages et d'effets non-linéaires acoustiques. Thèse de Doctorat, Université du Maine, 2001.
- [14] BAILLIET, H. A., GUSEV, V., RASPET, R., AND HILLER, R. A. Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.* **110**(4) (2001), 1808–1821.
- [15] BAILLIET, H. A., LOTTON, P., BRUNEAU, M., AND GUSEV, V. Coupling between electrodynamic loudspeakers and thermoacoustic cavities. *Acustica* **86** (2000), 363–373.
- [16] BAILLY, C., AND JUVÉ, D. Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized euler equations. *AIAA Journal* **38**(1) (2000), 22–29.
- [17] BELCHER, J. R., SLATON, W. V., RASPET, R., BASS, H. E., AND LIGHTFOOT, J. Working gases in thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* **105**(5) (1999), 2677–2684.
- [18] BESNOIN, E. *Numerical study of thermoacoustic heat exchangers*. PhD thesis, Johns Hopkins University, 2001.
- [19] BETCHOV, R. Nonlinear oscillations of a column of gas. *J. Acoust. Soc. Am.* **1**(3) (1958), 205–212.
- [20] BLANC-BENON, P., BESNOIN, E., AND KNIO, O. Experimental and computational visualization of the flow field in a thermoacoustic stack. *C. R. Mécanique* **331** (2003), 17–24.
- [21] BOGEY, C., AND BAILLY, C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for computing the aerodynamic noise. *AIAA-2002-2509* (2002).
- [22] BOLURIAAN, S., AND MORRIS, P. Numerical prediction of minor losses in high amplitude acoustic resonators. *AIAA-2002-2594* (2002).
- [23] BOLURIAAN, S., AND MORRIS, P. Numerical simulation of acoustic streaming in high amplitude standing waves. *AIAA-2003-3152* (2003).
- [24] BRETAGNE, E., DELBENDE, I., FRANÇOIS, M. X., AND JEBALI, F. Initialisation d'un moteur thermoacoustique : comparaison des approches expérimentale, semi-analytique et numérique. In *Actes du 5^{ième} Congrès Français d'acoustique* (2002), pp. 223–225. 3-6 septembre, EPFL, Lausanne, Suisse.
- [25] BREWSTER, J. R., RASPET, R., AND BASS, H. E. Temperature discontinuities between elements of thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.* **102**(6) (1997), 3355–3360.
- [26] BRUNEAU, M. *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermès, Paris, 1998.
- [27] CAO, N., OLSON, J., SWIFT, G. W., AND CHEN, S. Energy flux density in a thermoacoustic couple. *J. Acoust. Soc. Am.* **99** (1996), 3456–3464.

- [28] CEPERLEY, P. H. A pistonless Stirling engine — the traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **66**(5) (1979), 1508–1513.
- [29] CHEN, R.-L., CHEN, Y.-C., CHEN, C.-L., TSAI, C., AND J.DENATALE. Development of miniature thermoacoustic refrigerators. *AIAA-2002-0206* (2002).
- [30] CHEN, R.-L., AND GARRETT, S. L. A large solar/heat-driven thermoacoustic cooler. *J. Acoust. Soc. Am.* **108**(5), Pt 2 (2000), 2554.
- [31] CHESTER, W. Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid Mech.* **18** (1964), 44–64.
- [32] CHUN, Y. D., AND KIM, Y. H. Numerical analysis for nonlinear resonant oscillations of gas in axisymmetric closed tubes. *J. Acoust. Soc. Am.* **108**(6) (2000), 2765–2774.
- [33] CONTRAT-DGA-LAUM-LMFA. Machines thermoacoustiques : moteurs et réfrigérateurs. DGA/DSP n° 99-34-072 : rapport de synthèse finale., 2002.
- [34] COPPENS, A. B., AND SANDERS, J. V. Finite-amplitude standing waves in rigid-walled tubes. *J. Acoust. Soc. Am.* **43** (1968), 516–529.
- [35] COPPENS, A. B., AND SANDERS, J. V. Finite-amplitude standing waves within real cavities. *J. Acoust. Soc. Am.* **58**(6) (1975), 1133–1140.
- [36] CRUIKSHANK, D. B. Experimental investigation of finite-amplitude acoustic oscillations in a closed tube. *J. Acoust. Soc. Am.* **52** (1972), 1024–1036.
- [37] DE WITT, D. P., AND INCROPERA, F. P. *Fundamentals of heat and mass transfert, 5th edition*. John Wiley and Sons, 2001.
- [38] DOWLING, A. P. The calculation of thermoacoustic oscillations. *J. Sound Vib.* **180**(4) (1995), 557–581.
- [39] DOWLING, A. P. A kinematic model of a ducted flame. *J. Fluid Mech.* **394** (1999), 51–72.
- [40] DUFFOURD, S. Réfrigérateur thermoacoustique : études analytiques et expérimentales en vue d’une miniaturisation. Thèse de Doctorat n°2001-06, Ecole Centrale de Lyon, 2001.
- [41] DUFFOURD, S., BLANC-BENON, P., LOTTON, P., BRUNEAU, M., AND GUSEV, V. Etude temporelle de l’établissement d’un gradient de température dans un réfrigérateur thermoacoustique : expériences et modèle. In *Actes du 5^e Congrès Français d’Acoustique, EPFL, Lausanne, Suisse* (3-6 septembre 2000), Publié par les Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, pp. 226–229.
- [42] ECKART, C. Vortices and streams caused by sound waves. *Phys. Rev.* **73**(1) (1948), 68–76.
- [43] FELDMAN, K. T. Review of the literature on Rijke thermoacoustic phenomena. *J. Sound Vib.* **7**(1) (1968), 83–89.

- [44] FELDMAN, K. T. Review of the literature on Sondhaus thermoacoustic phenomena. *J. Sound Vib.* **7**(1) (1968), 71–82.
- [45] GAITAN, D. F., AND ATCHLEY, A. A. Finite amplitude standing waves in harmonic and anharmonic tubes. *J. Acoust. Soc. Am.* **93** (1993), 2489–2495.
- [46] GAITAN, D. F., GOPINATH, A., AND ATCHLEY, A. A. Experimental study of acoustic turbulence and streaming in a thermoacoustic stack. *J. Acoust. Soc. Am.* **96** (1994), 3220.
- [47] GARRETT, S. L., ADEFF, J. A., AND HOFLE, T. Thermoacoustic refrigerator for space applications. *J. Thermophys. Heat Transf.* **7**(4) (1993), 595–599.
- [48] GARRETT, S. L., AND BACKHAUS, S. The power of sound. *American scientist* **88** (2000), 516–525.
- [49] GEDEON, D. Dc gas flows in stirling and pulse-tube cryocoolers. In *Cryocoolers 9*. Edited by R. G. Ross (Plenum, New York), 1997, pp. 385–392.
- [50] GELLER, D. A., AND SWIFT, G. W. Saturation of thermoacoustic mixture separation. *J. Acoust. Soc. Am.* **111**(4) (2002), 1675–1684.
- [51] GIFFORD, W. E., AND LONGSWORTH, R. C. Surface heat pumping. *Adv. Cryog. Eng.* **11** (1966), 171–179.
- [52] GRANT, A., AND GARRETT, S. L. Extended performance measurements for SETAC. In *Proc. 16th international congress on acoustics, Seattle, Washington, USA* (20-26 June 1998), pp. 811–812.
- [53] GUSEV, V., BAILLIET, H., LOTTON, P., AND BRUNEAU, M. Asymptotic theory of nonlinear acoustic waves in a thermoacoustic prime mover. *Acustica* **86** (2000), 25–38.
- [54] GUSEV, V., JOB, S., BAILLIET, H., LOTTON, P., AND BRUNEAU, M. Acoustic streaming in annular thermoacoustics prime-movers. *J. Acoust. Soc. Am.* **108**(3) (2000), 934–945.
- [55] GUSEV, V., LOTTON, P., BAILLIET, H., JOB, S., AND BRUNEAU, M. Relaxation-time approximation for analytical evaluation of temperature field in thermoacoustic stack. *J. Sound Vib.* **235**(5) (2000), 711–726.
- [56] GUSEV, V., LOTTON, P., BAILLIET, H., JOB, S., AND BRUNEAU, M. Thermal wave harmonics generation in the hydrodynamical heat transport in thermoacoustics. *J. Acoust. Soc. Am.* **109**(1) (2001), 84–90.
- [57] HADJICONSTANTINO, N. G., AND SIMEK, O. Sound propagation at small scales under continuum and non-continuum transport. *J. Fluid Mech.* **488** (2003), 399–408.

- [58] HAMILTON, M. F., ILINSKII, Y. A., AND ZABOLOTSKAYA, E. A. Linear and nonlinear frequency shifts in acoustical resonators with varying cross sections. *J. Acoust. Soc. Am.* **110**(1) (2001), 109–119.
- [59] HAMILTON, M. F., ILINSKII, Y. A., AND ZABOLOTSKAYA, E. A. Nonlinear two-dimensional model for thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* **111**(5) (2002), 2076–2086.
- [60] HAMILTON, M. F., ILINSKII, Y. A., AND ZABOLOTSKAYA, E. A. Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width. *J. Acoust. Soc. Am.* **113**(1) (2003), 153–160.
- [61] HOFER, J. *Thermoacoustic refrigerator design and performance*. PhD thesis, University of California, San Diego, 1986.
- [62] HOFER, T. J., AND ADEFF, J. A. Development of a miniature thermoacoustic refrigerator. *J. Acoust. Soc. Am.* **108**(5), Pt. 2 (2000), 2554.
- [63] HU, F. Q., HUSSAINI, M. Y., AND MANTHEY, J. L. Low dissipation and low dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics. *J. Comput. Phys.* **124** (1996), 177–191.
- [64] ILINSKII, Y. A., LIPKENS, B., LUCAS, T. S., VAN DOREN, T. W., AND ZABOLOTSKAYA, E. A. Nonlinear standing waves in an acoustical resonator. *J. Acoust. Soc. Am.* **104** (1998), 2664–2674.
- [65] ISHIKAWA, H. *Investigations of optimum design of heat exchangers of thermoacoustic engines*. PhD thesis, The university of Queensland, 1999.
- [66] ISHIKAWA, H., AND MEE, D. J. Numerical investigations of flow and energy fields near a thermoacoustic couple. *J. Acoust. Soc. Am.* **111** (2002), 831–839.
- [67] JOB, S. *Etudes théoriques et expérimentales d'un générateur thermoacoustique annulaire à ondes progressives*. Thèse de Doctorat, Université du Maine, 2001.
- [68] KARPOV, S., AND PROSPERETTI, A. Nonlinear saturation of the thermoacoustic instability. *J. Acoust. Soc. Am.* **107** (2000), 3130–3147.
- [69] KARPOV, S., AND PROSPERETTI, A. A nonlinear model of thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.* **112**(4) (2002), 1431–1444.
- [70] KIM, Y. T., SUH, S. J., AND KIM, M. G. Linear resonant duct thermoacoustic refrigerator having regenerator stacks. In *Proc. 16th international congress on acoustics, Seattle, Washington, USA* (20–26 June 1998), pp. 821–822.
- [71] KITTEL, P., KASHANI, A., LEE, J. M., AND ROACH, P. R. General pulse tube theory. *Cryogenics* **36** (1996), 849–857.

- [72] LANDAU, L. D., AND LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 2nd edition, 1987.
- [73] LARRAZA, A., AND ATCHLEY, A. A. Analysis of a thermoacoustic prime mover above onset of self-oscillation. *J. Acoust. Soc. Am.* **94**(3) (1993), 1773.
- [74] LAWRENSON, C. C., LIPKENS, B., LUCAS, T. S., PERKINS, D. K., AND VAN DOREN, T. W. Measurements of macrosonic standing waves in oscillating closed cavities. *J. Acoust. Soc. Am.* **104** (1998), 623–636.
- [75] LEE, C. P., AND WANG, T. G. Nonlinear resonance and viscous dissipation in an acoustic chamber. *J. Acoust. Soc. Am.* **92**(4) (1992), 2195–2206.
- [76] LI, Y., MINNER, B. L., CHIU, G. T.-C., MONGEAU, L., AND BRAUN, J. E. Adaptive tuning of an electrodynamically driven thermoacoustic cooler. *J. Acoust. Soc. Am.* **111**(3) (2002), 1251–1258.
- [77] LIGHTFOOT, J. A., ARNOTT, W. P., BASS, H. E., AND RASPET, R. Experimental study of a radial mode thermoacoustic prime mover. *J. Acoust. Soc. Am.* **105**(5) (1999), 2652–2662.
- [78] LIHOREAU, B. Réfrigérateur thermoacoustique 'compact' : modélisation, conception, évaluation. Thèse de Doctorat, université du Maine, 2002.
- [79] MARX, D., AND BLANC-BENON, P. Numerical simulation of a thermoacoustic refrigerator. In *Proceedings of 5th World Congress on Ultrasonics (2003)*, 1069–1072.
- [80] MARX, D., AND BLANC-BENON, P. Numerical simulation of stack-heat exchangers coupling in a thermoacoustic refrigerator. Submitted to AIAA Journal, 2003.
- [81] MARX, D., AND BLANC-BENON, P. Numerical study of the coupling between stack and heat exchangers in a thermoacoustic refrigerator. In *Proceedings of the 9th AIAA-CEAS aeroacoustics conference, Hilton Head, SC, USA, 12-14 May 2003*. AIAA Paper, 2003-3150.
- [82] MARX, D., AND BLANC-BENON, P. Simulation numérique d'un réfrigérateur thermoacoustique avec un stack et des échangeurs de chaleur. In *Actes du 16ème Congrès Français de Mécanique, Nice, France, 1-5 septembre 2003*. CD-ROM.
- [83] MARX, D., AND BLANC-BENON, P. Numerical simulation of aerodynamic and thermal effects around a 2D stack plate in a thermoacoustic refrigerator. *J. Acoust. Soc. Am.* **114**(4) (2003), 2329.
- [84] MENGUY, L., AND GILBERT, J. Non-linear acoustic streaming accompanying a plane stationary wave in a guide. *Acta Acust.* **86** (2000), 249–259.

- [85] MERKLI, P., AND THOMANN, H. Thermoacoustic effect in resonance tube. *J. Fluid Mech.* **70** (1975), 161–177.
- [86] MERKLI, P., AND THOMANN, H. Transition to turbulence in oscillating pipe flow. *J. Fluid Mech.* **68** (1975), 567–576.
- [87] MINNER, B. L., BRAUN, J. E., AND MONGEAU, L. G. Theoretical evaluation of the optimal performance of a thermoacoustic refrigerator. *ASHRAE Trans.* **103** (1667), 827–832.
- [88] MORRIS, P., BOLURIAAN, S., AND SHIEH, C. M. Computational thermoacoustic simulation of minor losses through a sudden contraction and expansion. *AIAA-2001-2272* (2001).
- [89] MOZURKEWICH, G. Heat transfer from a cylinder in an acoustic standing wave. *J. Acoust. Soc. Am.* **98** (1995), 2209–2216.
- [90] MOZURKEWICH, G. A model for transverse heat transfer in thermoacoustics. *J. Acoust. Soc. Am.* **103**(6) (1998), 3318–3326.
- [91] MOZURKEWICH, G. Time average temperature distribution in a thermoacoustic stack. *J. Acoust. Soc. Am.* **103** (1998), 380–388.
- [92] NYBORG, W. L. Acoustic streaming. In *Physical acoustics*. Edited by W. P. Mason (Academic, New York, 1965), 1965. Vol. 2B, Chap. 11, pp. 265–331.
- [93] NYBORG, W. L. Acoustic streaming. In *Nonlinear Acoustics*. Edited by M. F. Hamilton and D.T. Blackstock (Academic, San Diego, 1998), 1998. Chap. 7, pp. 207–231.
- [94] OHMI, M., AND IGUCHI, M. Critical Reynolds number in an oscillatory pipe flow. *Bull. JSME* **25** (1982), 165–172.
- [95] OHMI, M., IGUCHI, M., KAKEHASHI, K., AND MASUDA, T. Transition to turbulence and velocity distribution in an oscillatory pipe flow. *Bull. JSME* **25** (1982), 365–371.
- [96] OLSON, J. R., AND SWIFT, G. W. Acoustic streaming in pulse tube refrigerators : tapered pulse tube. *J. Acoust. Soc. Am.* **37** (1997), 769–776.
- [97] PICCOLO, A., AND CANNISTRARO, G. Convective heat transport along a thermoacoustic couple in the transient regime. *Int. J. Thermal Sciences* **41** (2002), 1067–1075.
- [98] PIERCE, A. D. *Acoustics : an introduction to its physical principles and application*. Published by the Acoustical Society of America, 1991.
- [99] POESE, M. E., AND L.GARRETT, S. Performance measurements on a thermoacoustic refrigerator driven at high amplitudes. *J. Acoust. Soc. Am.* **107**(5) (2000), 2480–2486.
- [100] POINSOT, T. J., AND LELE, S. K. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *J. Comput. Phys.* **101** (1992), 104–129.

- [101] RADEBAUGH, R. A review of pulse tube refrigeration. *Adv. Cryog. Eng.* **35** (1990), 1191–1205.
- [102] RASPET, R., SLATON, W. V., HICKEY, C. J., AND HILLER, R. A. Theory of inert gas-condensing vapor thermoacoustics : propagation equation. *J. Acoust. Soc. Am.* **112**(4) (2002), 1414–1422.
- [103] RASPET, R., SLATON, W. V., HICKEY, C. J., AND HILLER, R. A. Theory of inert gas-condensing vapor thermoacoustics : transport equation. *J. Acoust. Soc. Am.* **112**(4) (2002), 1423–1430.
- [104] RAYLEIGH, J. W. S. *The theory of sound*. Dover, New York, 2nd edition, 1945.
- [105] RAYLEIGH, L. On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems. *Philos. Trans. R. Soc. London* **175** (1883), 1–21.
- [106] ROTT, N. Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes. *Z. Angew. Math. Phys.* **20** (1969), 230–243.
- [107] ROTT, N. Thermally driven acoustic oscillations. Part 2 : Stability limit for helium. *Z. Angew. Math. Phys.* **24** (1973), 54–72.
- [108] ROTT, N. The heating effect connected with non-linear oscillations in a resonance tube. *Z. Angew. Math. Phys.* **25** (1974), 620–624.
- [109] ROTT, N. The influence of heat conduction on acoustic streaming. *Z. Angew. Math. Phys.* **25** (1974), 417–421.
- [110] ROTT, N. Thermally driven acoustic oscillations. Part 3 : Second-order heat flux. *Z. Angew. Math. Phys.* **26** (1975), 43–49.
- [111] ROTT, N. Thermally driven acoustic oscillations. Part 5 : Gas-liquid oscillations. *Z. Angew. Math. Phys.* **27** (1976), 326–334.
- [112] ROTT, N. Thermoacoustics. *Z. Angew. Math. Phys.* **20** (1980), 135–175.
- [113] ROTT, N. Thermally driven acoustic oscillations. Part 6 : Excitation and power. *Z. Angew. Math. Phys.* **34** (1983), 610–626.
- [114] SAENGER, R. A., AND HUDSON, G. E. Periodic shock waves in resonating gas columns. *J. Acoust. Soc. Am.* **32**(8) (1999), 961–970.
- [115] SAUVAGE, N. Etude expérimentale des effets thermoacoustiques dans un microsystème réfrigérant. Stage de deuxième année de magistère, Ecole Normale Supérieure de Lyon & Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [116] SCHLICHTING, H., AND GERSTEN, K. *Boundary Layer theory*. Springer-Verlag, 2000.

- [117] SMITH, G. Streaming in thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **106** (1999), 2265.
- [118] SWIFT, G. W. Thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* **84** (1988), 1145–1180.
- [119] SWIFT, G. W. Analysis and performance of a large thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **92**(3) (1992), 1551–1563.
- [120] SWIFT, G. W., GARDNER, D. L., AND BACKHAUS, S. Acoustic recovery of lost power in pulse tube refrigerators. *J. Acoust. Soc. Am.* **105**(2) (1999), 711–724.
- [121] SWIFT, G. W., AND KEOLIAN, R. M. Thermoacoustics in pin-array stacks. *J. Acoust. Soc. Am.* **94**(2) (1993), 941–943.
- [122] SWIFT, G. W., MIGLIORI, A., HOFLE, T., AND WHEATLEY, J. Theory and calculations for an intrinsically irreversible acoustic prime mover using liquid sodium as a primary working fluid. *J. Acoust. Soc. Am.* **78** (1985), 767–781.
- [123] TAM, C. K. W., AND DONG, J. C. WEBB. Z. A study of the short wave components in computational acoustics. *J. Comput. Acoustics.* **1** (1993), 1–30.
- [124] TAM, C. K. W., AND WEBB, J. C. Dispersion-Relation-Preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comput. Phys.* **107** (1993), 262–281.
- [125] TEMKIN, S. Nonlinear gas oscillations in a resonant tube. *Phys. Fluids* **11** (1968), 960–963.
- [126] TEMKIN, S. Propagating and standing sawtooth waves. *J. Acoust. Soc. Am.* **45**(1) (1969), 224–227.
- [127] TEMKIN, S. *Elements of acoustic*. Wiley, New York, 1981.
- [128] THOMPSON, K. W. Time dependant boundary conditions for hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.* **68** (1987), 1–24.
- [129] TIJANI, M. E. H., ZEEGERS, J. C. H., AND DE WAELE, A. T. A. M. Construction and performance of a thermoacoustic refrigerator. *Cryogenics* **42** (2002), 59–66.
- [130] TIJANI, M. E. H., ZEEGERS, J. C. H., AND DE WAELE, A. T. A. M. Design of thermoacoustic refrigerators. *Cryogenics* **42** (2002), 49–57.
- [131] TIJANI, M. E. H., ZEEGERS, J. C. H., AND DE WAELE, A. T. A. M. A gas-spring system for optimizing loudspeakers in thermoacoustic refrigerators. *J. Appl. Phys.* **92**(4) (2002), 2159–2165.
- [132] TIJANI, M. E. H., ZEEGERS, J. C. H., AND DE WAELE, A. T. A. M. The optimal stack spacing for thermoacoustic refrigeration. *J. Acoust. Soc. Am.* **112** (2002), 128–133.
- [133] TIJANI, M. E. H., ZEEGERS, J. C. H., AND DE WAELE, A. T. A. M. Prandtl number and thermoacoustic refrigerators. *J. Acoust. Soc. Am.* **112** (2002), 134–143.

- [134] VAINSHTAIN, P., FICHMAN, M., AND GUTFINGER, C. Acoustic engancement of heat transfer between two parallel plates. *Int. J. Heat Mass Transfer* **38** (1995), 1893–1899.
- [135] VANHILLE, C., AND CAMPOS-POZUELO, C. Numerical model for nonlinear standing waves and weak shocks in thermoviscous fluids. *J. Acoust. Soc. Am.* **109** (2001), 2660–2667.
- [136] WAKELAND, R. S., AND KEOLIAN, R. M. Thermoacoustics with idealized heat exchangers and no stack. *J. Acoust. Soc. Am.* **111**(6) (2002), 2654–2664.
- [137] WARD, W. C., AND SWIFT, G. W. Design environment for low-amplitude thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* **95**(6) (1994), 3671–3672.
- [138] WATANABE, M., PROSPERETTI, A., AND YUAN, H. A simplified model for linear and nonlinear processes in thermoacoustic prime movers. Part I. Model and linear theory. *J. Acoust. Soc. Am.* **102**(6) (1997), 3484–3496.
- [139] WAXLER, R. Stationary velocity and pressure gradients in a thermoacoustic stack. *J. Acoust. Soc. Am.* **109** (2001), 2739–2750.
- [140] WESTERVELT, P. J. The theory of steady rotational flow generated by a sound field. *J. Acoust. Soc. Am.* **25** (1953), 60–67.
- [141] WETZEL, M., AND HERMAN, C. Design optimization of thermoacoustic refrigerators. *Internat. J. Refrig.* **20** (1997), 3–21.
- [142] WETZEL, M., AND HERMAN, C. Experimental study of thermoacoustic effects on a single plate. part 1 : temperature fields. *Heat and Mass Transfer* **36** (2000), 7–20.
- [143] WHEATLEY, J., HOFER, T., SWIFT, G. W., AND MIGLIORI, A. An intrinsically irreversible thermoacoustic heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **74** (1983), 153–170.
- [144] WORLIKAR, A. *Numerical simulation of thermoacoustic refrigerators*. PhD thesis, Johns Hopkins University, 1997.
- [145] WORLIKAR, A. S., AND KNIO, O. M. Numerical simulation of a thermoacoustic refrigerator. Part 1 : Unsteady adiabatic flow around the stack. *J. Comput. Phys.* **127** (1996), 424–451.
- [146] WORLIKAR, A. S., AND KNIO, O. M. Numerical study of oscillatory flow and heat transfer in a loaded thermoacoustic stack. *Num. heat transf., PART A : Applications* **35** (1999), 49–65.
- [147] WORLIKAR, A. S., AND KNIO, O. M. Numerical study of the effective impedance of a thermoacoustic stack. *Acustica* **85** (1999), 480–494.

- [148] WORLIKAR, A. S., KNIO, O. M., AND KLEIN, R. Numerical simulation of a thermoacoustic refrigerator. Part 2 : Stratified flow around the stack. *J. Comput. Phys.* **144** (1998), 299–324.
- [149] YANO, T. Turbulent acoustic streaming excited by resonant gas oscillation with periodic shock waves in a closed tube. *J. Acoust. Soc. Am.* **106** (1999), L7–L12.
- [150] YAZAKI, T., IWATA, A., MAEKAWA, T., AND TOMINAGA, A. Traveling waves thermoacoustic engine in a looped tube. *Phys. Rev. Lett.* **81**(15) (1998), 3128–3131.
- [151] YAZAKI, T., TAKASHIMA, S., AND MIZUTANI, F. Complex quasiperiodic and chaotic state observed in thermally induced oscillations of gas columns. *Phys. Rev. Lett.* **58**(11) (1987), 1108–1111.
- [152] YAZAKI, T., TOMINAGA, A., AND NARAHARA, Y. Large heat transport due to spontaneous gas oscillation induced in a tube with steep temperature gradient. *J. Heat Transf.* **105** (1983), 889–894.
- [153] YUAN, H., KARPOV, S., AND PROSPERETTI, A. A simplified model for linear and nonlinear processes in thermoacoustic prime movers. Part II. Nonlinear oscillations. *J. Acoust. Soc. Am.* **102**(6) (1997), 3497–3506.