

**THÈSE**

présentée pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

DE

**L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

SPECIALITÉ : MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE DE MÉCANIQUE DE LYON (UCBL/INSA/ECL)

PAR

**Cristiano VIANA SERRA VILLA**

**DYNAMIQUE NON LINÉAIRE DES ROTORS  
APPLICATIONS NUMÉRIQUES ET EXPÉRIMENTALES À UN  
ROTOR FLEXIBLE**

Présentée et soutenue publiquement le 28 Janvier 2005 devant le jury d'examen :

S. BELLIZZI, Chargé de Recherche HDR, Laboratoire LMA, Marseille	Rapporteur
F. IMBOURG, Ingénieur , SNECMA Moteurs	Examineur
R. DUFOUR, Professeur, INSA Lyon	Président
B. PESEUX, Professeur, Ecole Centrale de Nantes	Rapporteur
J-J. SINOU, Maître de Conférences, Laboratoire LTDS	Examineur
F. THOUVEREZ, Professeur, Laboratoire LTDS	Directeur de thèse

## Remerciements

Cette thèse a été développée au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'École Centrale de Lyon, sous financement du Ministère de l'Éducation du Brésil et de l'École Centrale de Lyon pour les deux derniers mois.

Je suis très reconnaissant au Professeur Louis JEZEQUEL de m'avoir reçu dans son équipe de recherche, en me confiant aux soins de mon directeur de recherche, le Professeur Fabrice THOUVEREZ, à qui je voudrais exprimer vivement ma plus profonde gratitude pour m'avoir guidé et encouragé dans mes travaux de recherche dans le domaine des machines tournantes. Je remercie également Jean-Jacques SINOU pour m'avoir encadré avec beaucoup de motivation et de foi sur les résultats obtenus. Je tiens à remercier aussi Monsieur Jean-Pierre LAINE des fructueuses discussions sur la modélisation des structures tournantes. Enfin, je remercie chaleureusement Monsieur Michel MASSENZIO d'avoir partagé son immense connaissance dans le domaine de la conception des machines.

Je remercie sincèrement Monsieur le Professeur Régis DUFOUR d'avoir présidé le jury lors de la soutenance, ainsi que Monsieur Sergio BELIZZI et Monsieur le Professeur Bernard PESEUX, qui ont accepté d'être les rapporteurs de mon travail. Je remercie aussi Monsieur Frederic IMBOURG d'avoir apporté les éléments nécessaires pour situer mes travaux dans un contexte industriel.

J'aimerais exprimer ma gratitude à Patrick PERRARD, Bernard JEAN-PIERRE, Lionel CHARLES, Stéphane LEMAIHEU et Sébastien LEONE pour le soutien technique lors des montages et démontages du banc d'essai et fabrication des composants. Je remercie Isabelle TIXIER du soutien logistique si sympathique et efficace. Je remercie aussi Olivier DESSOMBZ de m'avoir fourni des conditions informatiques optimales pour le bon déroulement de ma thèse.

Je tiens à dire un grand merci à mes amis thésards pour faciliter ma vie dans le labo et me dépanner avec les petits soucis inévitables aux étrangers. Merci à vous de faciliter mon intégration et pour me faire connaître un peu de la culture passionnante de votre beau pays.

# Résumé

Cette thèse s'intéresse au comportement dynamique des machines tournantes comportant des organes tels que des roulements dont le fonctionnement est décrit par des lois non linéaires. Le premier objectif de ces travaux de recherche est de mettre en oeuvre des méthodes d'analyse non linéaire afin de résoudre les équations du mouvement de tels systèmes tournants. Le second objectif consiste à effectuer des études expérimentales sur un rotor flexible et d'effectuer des corrélations avec les modèles numériques associés.

La modélisation des parties linéaires du système tournant est faite par la méthode des éléments finis. Concernant les roulements, nous présentons trois modèles permettant de prendre en compte leurs non-linéarités intrinsèques telles que le jeu radial et le contact de Hertz. Nous nous intéressons alors plus particulièrement à une modélisation où la cinématique des éléments roulants est considérée. Le type de solution non-linéaire recherchée est le régime permanent. Pour cela, nous présentons des méthodes fréquentielles telles que la méthode de la balance harmonique AFT (Alternating Frequency Time). Cette méthode, couplée à une technique de condensation sur les degrés de liberté non linéaires, permet d'obtenir la réponse non linéaire avec un gain considérable en temps de calcul. Nous validons cette technique en considérant un système de petite taille pour lequel la réponse non linéaire a été déterminée par une intégration temporelle. Ensuite nous appliquons cette méthode sur un rotor flexible comportant un grand nombre de degrés de liberté.

Aussi dans le but de réduire la taille des systèmes tournants non linéaires, nous présentons une technique basée sur la notion de modes normaux non linéaires déterminés par une approche de variétés invariantes. Nous appliquons cette méthode à un rotor comportant une non-linéarité cubique et des effets gyroscopiques. De plus, nous proposons une stratégie pour diminuer le temps de calcul associé à la variation des propriétés modales du système avec la vitesse de rotation.

Enfin, dans une dernière partie, nous présentons le banc d'essai Dynamique D'Ensemble et les mesures réalisées pour le caractériser dynamiquement. Ces études expérimentales consistent à évaluer la réponse à balourd et le diagramme de Campbell du banc en considérant deux configurations associées à des raideurs des supports paliers du rotor différentes. Nous nous intéressons aussi à l'analyse des orbites pour différentes vitesses de rotation. D'autre part, nous présentons un système amortisseur conçu pour diminuer les niveaux vibratoires atteints par le rotor lors du franchissement des vitesses critiques. Les données expérimentales obtenues servent alors de recalage pour le modèle numérique associé.

# Abstract

This thesis deals with the dynamic behavior of rotating machinery containing the parts whose behavior is described by non linear laws. The first goal of this research is to implement methods of non linear analysis in order to solve the equations of motion of the system. Secondly, experimental studies are made with a test rig and the results are used to update a numeric model.

The rotor is represented by a finite element model. To model the bearings, three models with different levels of complexity are presented, and a model where the kinematics of the rolling elements is adopted. The type of motion of interest is the steady state vibration, and to obtain this kind of solution it is advisable to use a frequential method like the Harmonic Balance Method Alternating Frequency Time (HBM AFT). This method can be implemented with an exact condensation strategy to reduce the computational time. The HBM AFT method is validated by comparing with a direct integration of a non linear Jeffcott rotor. The HBM AFT method is then used to study the non linear vibration of a flexible non linear rotor.

Still in the non linear analysis, the notion of non linear normal modes is presented. The invariant manifold approach is used to study the non linear normal modes of gyroscopic system. In particular, a new strategy to deal with this kind of problem is presented in order to increase the computational speed.

Then, the test rig where the experimental studies were developed is presented. These studies consist of the residual unbalance response and the construction of the Campbell diagram. Two configurations (with different bearing support stiffness) of the test rig were considered. After the dynamic characterization of the test rig, a damping device is installed on the rig and its performance is evaluated based on the vibration level at the first direct critical speed. The experimental data obtained in these tests are used to update a finite element model of the test rig.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation des rotors</b>	<b>5</b>
2.1	La modélisation dynamique des corps élastiques . . . . .	5
2.2	Modélisation des rotors par éléments finis . . . . .	10
2.3	Quelques phénomènes importants en dynamique des rotors . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Modélisation non-linéaire des rotors</b>	<b>21</b>
3.1	Introduction . . . . .	21
3.2	Non-linéarités des paliers à roulements . . . . .	22
3.3	Solutions périodiques . . . . .	30
3.4	Validation de la méthode HBM AFT . . . . .	46
3.5	Étude d'un modèle de rotor flexible avec un roulement non linéaire . . . . .	60
3.6	Modes non linéaires pour la dynamique des rotors . . . . .	75
3.7	Conclusions . . . . .	103
<b>4</b>	<b>Description du Banc Dynamique D'Ensemble</b>	<b>105</b>
4.1	Description du Banc Dynamique D'Ensemble . . . . .	105
4.2	Instrumentation du Banc DDE . . . . .	112
4.3	Description du modèle numérique . . . . .	114
4.4	Alignement des arbres . . . . .	119
4.5	Equilibrage des rotors . . . . .	122

4.6	Simulations numériques d'équilibrage . . . . .	130
<b>5</b>	<b>Etudes expérimentales et numériques du Banc DDE</b>	<b>143</b>
5.1	Résultats expérimentaux . . . . .	143
5.2	Evolution de la Raideur des Support Paliers . . . . .	162
5.3	Recalage du modèle numérique . . . . .	171
5.4	Mise en place d'un système amortisseur . . . . .	180
5.5	Conclusions . . . . .	188
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>189</b>
6.1	Conclusions . . . . .	189
6.2	Perspectives . . . . .	191
<b>A</b>	<b>Matrices élémentaires d'un rotor</b>	<b>201</b>
A.1	Matrices élémentaires du disque . . . . .	201
A.2	Matrices élémentaires de l'arbre . . . . .	202
<b>B</b>	<b>Procédure de construction de la matrice <math>M_0</math></b>	<b>205</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Le dimensionnement des systèmes mécaniques tournants constitue à l'heure actuelle un enjeu majeur pour les industries aéronautiques. Ainsi, la recherche croissante de gain en termes de performances et de diminution du poids des structures, associée à une baisse des coûts économiques, nécessite une connaissance et caractérisation fines et complexes des moteurs d'avion et du comportement vibratoire des systèmes tournants associés. En effet, les objectifs industriels actuels visent aussi bien à diminuer le poids des moteurs d'avion qu'à augmenter les vitesses de rotation de ces derniers ou à réduire les jeux entre les parties fixes et les parties tournantes. L'atteinte de tels objectifs nécessite donc la prise en compte de l'ensemble de ces critères de dimensionnement dès le stade de la conception des moteurs d'avion.

Aussi, dans le domaine des machines tournantes, ces dernières années ont vu un développement constant des modèles afin de prédire au mieux le comportement dynamique et d'aboutir à une compréhension accrue des phénomènes physiques mis en jeu. Cette amélioration des modèles existants se caractérise tout d'abord par des modélisations plus fines et plus réalistes des différents organes linéaires et non linéaires constituant une ligne d'arbre (tels que les roulements ou les amortisseurs de type film d'huile par exemple). Ces modèles permettent alors d'avoir de meilleures estimations des amplitudes des réponses des systèmes tournants soumis à des balourds et de mieux comprendre les problèmes physiques propres à chaque composante tels que le contact et perte de contact au niveau des roulements présents sur une ligne d'arbre.

Lors de la conception et du dimensionnement des lignes d'arbre, l'un des organes jouant un rôle essentiel et dont le comportement dynamique doit donc être correctement modélisé est le roulement qui sert de liaison entre les parties fixes et les parties tournantes. En effet, la prise en compte du jeu radial présent dans les roulements (nécessaire afin d'assurer un fonctionnement correct des moteurs d'avion) et son comportement dynamique fortement non-linéaire peuvent permettre de mieux comprendre et reproduire la dynamique des systèmes tournants.

Parmi les objectifs d'optimisation des performances des moteurs d'avion, le passage de la première vitesse critique avec le maximum d'énergie dans l'arbre et l'estimation du

niveau vibratoire associé devient incontournable. Afin d'atteindre un tel objectif et de pouvoir statuer sur les différentes configurations et améliorations testées (telles que la rigidification ou assouplissement des supports paliers des lignes d'arbre), la mise en place de techniques d'analyse non-linéaire est primordiale. La recherche des réponses des systèmes tournants peut alors s'avérer très lourde en terme de temps de calcul et de ressources informatiques nécessaires du fait de la présence d'éléments non linéaires. Aussi, la mise en place de méthodes d'analyse non linéaire permettant aussi bien de réduire le système dynamique non linéaire de départ que de déterminer rapidement les réponses vibratoires devient l'un des points clés et des objectifs prioritaires.

Le sujet de cette thèse s'inscrit donc sous ce double enjeu :

- modéliser des systèmes tournants comportant des roulements non linéaires avec jeu et des supports flexibles afin de dimensionner au mieux une ligne d'arbre pour le passage de la première vitesse critique (avec le maximum d'énergie dans l'arbre) ;
- mettre en place différentes méthodes non linéaires afin de mieux appréhender l'analyse vibratoire des systèmes non linéaires tournants et statuer sur les différentes stratégies et méthodes d'analyse non linéaire possibles pour répondre efficacement et rapidement à la détermination des niveaux vibratoires pour une problématique industrielle.

Enfin, le dernier objectif de ces travaux de thèse sera de réaliser une campagne d'essais sur le banc DDE (banc Dynamique D'Ensemble de l'Ecole Centrale de Lyon) afin de donner les premières bases du comportement dynamique non linéaire de ce banc et les paramètres influant sur le passage de la première vitesse critique.

Aussi ce mémoire de thèse sera scindé en quatre parties.

Dans une première partie (chapitre 2), nous introduirons les notions de base et les spécificités propres à la dynamique des systèmes tournants par rapport aux systèmes fixes (ou non-tournants). Nous nous intéresserons plus particulièrement à décrire la phénoménologie de la dynamique des rotors et la modélisation éléments finis des différents organes constituant les rotors tels que les disques, l'arbre, les paliers, le balourd, etc.

Afin d'étudier et caractériser le comportement dynamique des rotors comportant des roulements, nous aborderons dans une seconde partie (chapitre 3) les différents modèles non linéaires plus ou moins complexes propres aux roulements. Nous nous intéresserons alors plus particulièrement à la mise en place et utilisation de différentes méthodes d'analyse non linéaire pour les systèmes tournants. La méthode de la balance harmonique sera développée afin d'obtenir la réponse d'un roulement non linéaire (comportant du contact de Hertz et un jeu radial). Cette méthode non linéaire permettra alors d'approximer la dynamique non linéaire du roulement sous la forme d'une série de Fourier tronquée. Dans une seconde partie, cette méthode sera utilisée dans le cas d'un rotor flexible complexe constitué d'un nombre important de degrés de liberté et comportant un roulement non linéaire avec jeu. Pour cette étude, une méthode de réduction du système dynamique sur les degrés de liberté non linéaires sera mise en place afin d'obtenir rapidement la réponse dynamique du système. Dans ces deux derniers exemples, nous nous intéresserons plus particulièrement à la dynamique du roulement et aux problèmes de contact et perte de contact pour chacune des billes du roulement. Enfin, dans une dernière partie, nous abor-



derons la notion de modes non-linéaire pour les systèmes tournants à travers la méthode des variétés invariantes ; nous verrons alors un exemple d'application de cette méthode pour un rotor flexible comportant une non-linéarité cubique. Nous proposerons alors une stratégie permettant de prendre en compte l'évolution de la vitesse de rotation du système.

Les deux dernières parties seront consacrées à la description du banc DDE (Dynamique D'Ensemble) et aux études expérimentales et numériques associées. Nous verrons donc tout d'abord, dans la troisième partie (chapitre 4), une description complète des différents organes constituant le banc DDE et une présentation du modèle numérique éléments finis réalisé sous SAMCEF. Ensuite, les différentes techniques d'alignement des arbres et les procédures d'équilibrage en un ou plusieurs plans seront présentées.

Pour clore ce mémoire, des études expérimentales et numériques (chapitre 5) cherchant à diminuer les niveaux vibratoires par l'intermédiaire de l'ajout d'amortissement fixe (mise en place d'un dispositif de plots amortisseurs) et à examiner l'impact d'une rigidification des supports paliers seront présentées à travers les évolutions des diagrammes de Campbell, des réponses à balourd, des orbites en différents points de l'arbre, etc.

Nous terminerons enfin par une synthèse des différents résultats et apports de cette thèse, en dégagant les perspectives qui peuvent en découler.



## Chapitre 2

# Modélisation des rotors

Nous allons décrire dans ce chapitre les aspects de modélisation des rotors d'un point de vue générale dans un premier temps, puis de façon plus spécifique dans un second temps en nous appuyant sur des modèles éléments finis du type poutre. Nous nous intéressons ensuite à quelques phénomènes importants que l'on rencontre en dynamique des rotors et qui seront utiles par la suite, pour analyser les résultats expérimentaux obtenus.

### 2.1 La modélisation dynamique des corps élastiques

#### 2.1.1 Cinématique d'une particule du solide

Considérons un corps flexible  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . Dans sa configuration de référence, illustrée en figure 2.1, chaque particule est décrite par un vecteur  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^t$  dont les coordonnées sont mesurées dans le repère inertiel orthonormé  $O (X_1, X_2, X_3)$  (Gmur [22]).

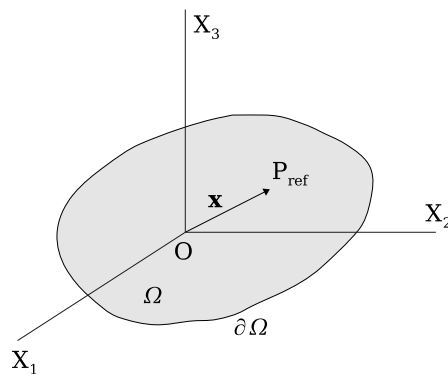


FIG. 2.1 – Configuration de référence

A l'instant initial ( $t = 0$ ), le corps est soumis à un champ de déplacements initial  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ . La particule repérée dans la configuration de référence par le vecteur  $\mathbf{x}$  occupe la position  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  :

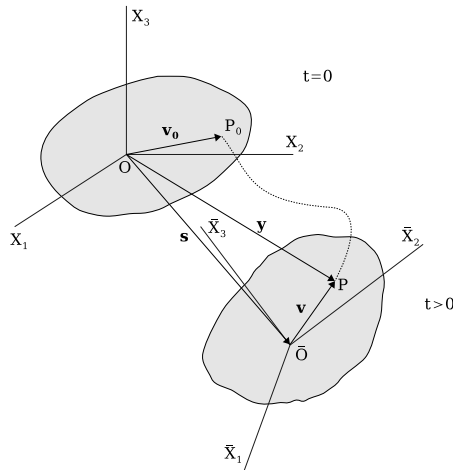


FIG. 2.2 – Configuration déformée

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

Considérons maintenant un mouvement du corps, comme illustré en figure 2.2. A l'instant  $t > 0$ , le corps est déformé, dans une position quelconque. Soit  $\bar{O}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$  le repère corotationnel. Sa position par rapport au repère inertiel est donnée par le vecteur translation  $\mathbf{s}(t)$  et la vitesse angulaire autour d'un axe quelconque est  $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^t$ . Cet axe sera spécifié ultérieurement pour définir l'axe de rotation de notre système tournant.

Dans la configuration déformée, la particule est maintenant au point  $P$  et sa position par rapport au repère inertiel est donnée par le vecteur  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  tandis que dans le repère corotationnel nous avons :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  est le vecteur déplacement résultant de la déformation dynamique du corps.

Dans le repère inertiel, le vecteur  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  est donné par :

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t) (\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{R}(t)$  est une matrice de changement de repère. Elle est orthogonale ( $\mathbf{R}^t \mathbf{R} = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1}$ ).

La dérivée temporelle de  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  est :

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \mathbf{R}\dot{\mathbf{u}} \quad (2.4)$$

où  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}$  est la dérivée temporelle de  $\mathbf{R}$ , avec  $\boldsymbol{\Omega}$  donnée par une matrice antisymétrique définie par les composantes de  $\omega$  :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Dynamique d'un corps déformable

Les équations du mouvement du système peuvent être établies de deux façons :

- La première consiste à écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à un volume infinitésimal du corps auquel on ajoute la loi de comportement du matériau et les conditions aux limites. L'accélération est obtenue à partir de l'équation 2.4. Le système ainsi obtenu correspond à la formulation forte de l'équation du mouvement. La forme faible est obtenue en intégrant l'équation aux dérivées partielles sur le volume du corps, pondérée par des fonctions tests.
- La deuxième approche est la méthode énergétique. Après avoir écrit les énergies cinétiques et potentielles du corps, la fonction de dissipation de Rayleigh et le travail virtuel des forces volumiques et surfaciques, les équations de Lagrange donnent l'équation du mouvement sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial F_d}{\partial \dot{q}} = 0 \quad , \quad L = T - U \quad (2.6)$$

L'énergie cinétique est donnée par :

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{y}}^t \dot{\mathbf{y}} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^t \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} d\Omega - \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^t \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^t \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{R}^t \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^t (\mathbf{R}^t \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega + \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{s}}^t \dot{\mathbf{s}} + 2\dot{\mathbf{s}}^t \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} - \mathbf{x}^t \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}) d\Omega \quad (2.7) \end{aligned}$$

L'énergie de déformation et le travail virtuel des forces volumiques et surfaciques sont groupés dans l'énergie potentielle sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^t \mathbf{C} \varepsilon d\Omega - \left( \int_{\Omega} \mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^t \mathbf{t} d(\partial\Omega) \right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^t \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u}) d\Omega - \left( \int_{\Omega} \mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^t \mathbf{t} d(\partial\Omega) \right) \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{C}$  est la matrice d'élasticité et  $\varepsilon = \nabla \mathbf{u}$  est le vecteur de déformations (considérées petites), où  $\nabla$  est l'opérateur différentiel qui a pour expression :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La fonction de dissipation, en supposant une loi de comportement viscoélastique  $\sigma = \mathbf{C}(\varepsilon + \eta_b \dot{\varepsilon})$ , est exprimée par :

$$F_d = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta_b (\nabla \dot{\mathbf{u}})^t \mathbf{C} (\nabla \dot{\mathbf{u}}) d\Omega \quad (2.10)$$

Si les déplacements  $\mathbf{u}$  sont exprimés par une approximation de Rayleigh-Ritz en produits de fonctions de forme et coordonnées généralisées  $\mathbf{u} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(t)$ , nous pouvons réécrire les équations 2.7, 2.8 et 2.10 sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{G} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{N} \mathbf{q} - \mathbf{q}^t \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t \Omega (\mathbf{R}^t \dot{\mathbf{s}} + \Omega \mathbf{x}) d\Omega + \dot{\mathbf{q}}^t \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t (\mathbf{R}^t \dot{\mathbf{s}} + \Omega \mathbf{x}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{s}}^t \dot{\mathbf{s}} + 2 \dot{\mathbf{s}}^t \mathbf{R} \Omega \mathbf{x} - \mathbf{x}^t \Omega \mathbf{x}) d\Omega \quad (2.11)$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{K} \mathbf{q} - \left( \mathbf{q}^t \int_{\Omega} \mathbf{H}^t \mathbf{f} d\Omega + \mathbf{q}^t \int_{\partial\Omega} \mathbf{H}^t \mathbf{t} d(\partial\Omega) \right) \quad (2.12)$$

$$F_d = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.13)$$

Finalement, en utilisant les équations de Lagrange, nous trouvons l'équation du mouvement du système dans le repère mobile sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{P} + \mathbf{N})\mathbf{q} = \mathbf{r} + \mathbf{F} \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{D}$  la matrice d'amortissement,  $\mathbf{G}$  la matrice gyroscopique,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur,  $\mathbf{P}$  la matrice d'accélération angulaire,  $\mathbf{N}$  la matrice d'accélération centrifuge (ou assouplissement centrifuge),  $\mathbf{r}$  le vecteur des excitations indirectes dues à l'entraînement du système de coordonnées et  $\mathbf{F}$  le vecteur des excitations par les forces volumiques et surfaciques. Nous avons :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t \mathbf{H} d\Omega \quad (2.15)$$

$$\mathbf{D} = \int_{\Omega} \eta_b (\nabla \mathbf{H})^t \mathbf{C} (\nabla \mathbf{H}) d\Omega \quad (2.16)$$

$$\mathbf{G} = 2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t \boldsymbol{\Omega} \mathbf{H} d\Omega \quad (2.17)$$

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{H} d\Omega \quad (2.18)$$

$$\mathbf{N} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{H} d\Omega \quad (2.19)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^t \mathbf{C} (\nabla \mathbf{H}) d\Omega \quad (2.20)$$

$$\mathbf{r} = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t \left( \mathbf{R}^t \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x} \right) d\Omega \quad (2.21)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{H}^t \mathbf{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{H}^t \mathbf{t} d(\partial\Omega) \quad (2.22)$$

Pour des systèmes complexes, nous devons faire appel à des méthodes de discrétisation capables de bien représenter les différents éléments composant le système tournant, comme la méthode des éléments finis. En s'appuyant sur les potentiels et les énergies cinétiques définies précédemment, nous établirons une formulation éléments finis adaptée à notre problématique.

## 2.2 Modélisation des rotors par éléments finis

Les premiers travaux utilisant ce type de modélisation ont été publiés par Nelson et McVaugh [52]. Ils prennent en compte les effets d'inertie de rotation, de charges axiales et d'efforts gyroscopiques. Cette modélisation a été complétée par Zorzi et Nelson [95] pour prendre en compte l'amortissement interne des parties tournantes. Plusieurs travaux ont suivi (Genta [19], Hashish et Sankar [28], Ku [36] et Özgüven et Özkan [96]), confirmant la maturité et la fiabilité de cette technique.

En s'appuyant sur une démarche analogue à la précédente, nous allons définir rapidement la procédure de construction des matrices élémentaires dans un repère fixe en s'appuyant sur les énergies cinétiques et potentielles des différents organes et sur le travail virtuel des forces données (Lalanne [37]).

Pour aboutir à cette modélisation, nous allons expliciter les matrices élémentaires associées à chaque organe majeur des systèmes tournants : le disque, l'arbre, les paliers et le balourd.

### 2.2.1 Modélisation du disque

Considérons un disque rigide, représenté en figure 2.3, avec les repères fixe et tournant notés respectivement  $(X, Y, Z)$  et  $(x, y, z)$ . La relation entre les deux repères est établie à l'aide des angles d'Euler, sous la forme de trois rotations successives comme illustré en figure 2.4.

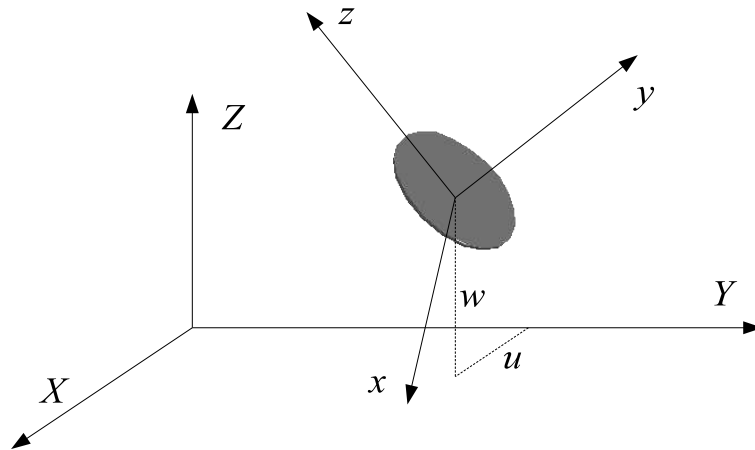


FIG. 2.3 – Le disque et les repères fixe et tournant

On montre alors aisément que le vecteur rotation du disque est donné par :

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) + \dot{\theta} \cos(\phi) \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin(\theta) \\ \dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) + \dot{\theta} \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$



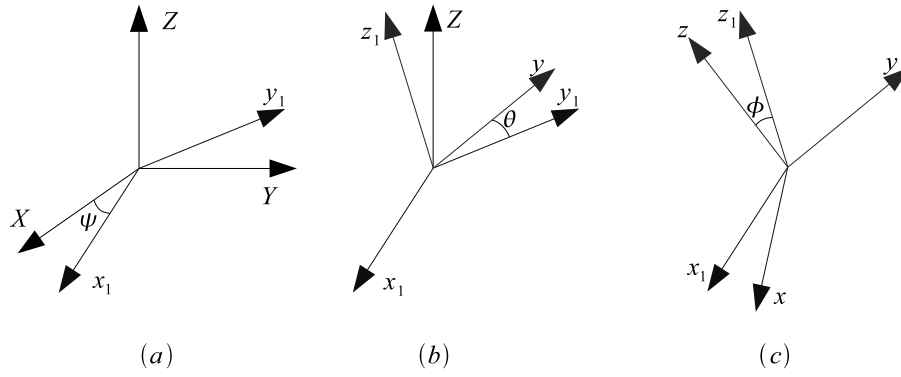


FIG. 2.4 – Les angles d'Euler

Les coordonnées de translation du centre du disque sont  $(u, v, w)$  dans le repère fixe. En faisant l'hypothèse que le centre du disque reste dans le plan  $(u, w)$  ( $v$  constante), l'énergie cinétique du disque est :

$$T_d = \frac{1}{2}M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx}\omega_x^2 + I_{dy}\omega_y^2 + I_{dz}\omega_z^2) \quad (2.24)$$

où  $M_d$  est la masse du disque et  $I_{dx}$ ,  $I_{dy}$  et  $I_{dz}$  sont les composantes du tenseur d'inertie du centre du disque, avec les directions principales coïncidant avec les axes du repère tournant :  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_{dx}, I_{dy}, I_{dz})$ . En considérant que le disque est symétrique ( $I_{dx} = I_{dz} = I_d$ ), que les angles  $\theta$  et  $\psi$  sont suffisamment petits et que  $\dot{\phi} = \Omega$  est constante, nous avons :

$$T_d = \frac{1}{2}M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}I_d (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (2.25)$$

Le vecteur des déplacements nodaux au niveau du disque est donné par  $\delta = [u, w, \theta, \psi]^t$ , ce qui conduit aux équations de Lagrange suivantes :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \mathbf{m}_d \ddot{\delta} + \Omega \mathbf{g}_d \dot{\delta} \quad (2.26)$$

où les matrices élémentaires  $\mathbf{m}_d$  et  $\mathbf{g}_d$  sont données en annexe A.

### 2.2.2 Modélisation de l'arbre

Un élément d'arbre est représenté par une poutre de section circulaire caractérisée par ses énergies cinétique et potentielle. L'énergie cinétique de cet élément est obtenue par intégration de l'énergie cinétique de chaque section élémentaire de l'arbre (équation 2.25) :

$$T_S = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (2.27)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'arbre,  $S$  est la surface de la section droite et  $I$  son moment d'inertie par rapport à la ligne neutre.

Nous allons maintenant écrire l'expression de l'énergie de déformation dans l'arbre. Pour cela, nous exprimons tout d'abord les moments de flexion, puis les déformations qui leur sont associés.

La déformation est donnée par (figure 2.5) :

$$\varepsilon_y = -r \sin(\beta + \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - r \cos(\beta + \Omega t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.28)$$

en considérant les inclinaisons des sections droites données par :

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.29)$$

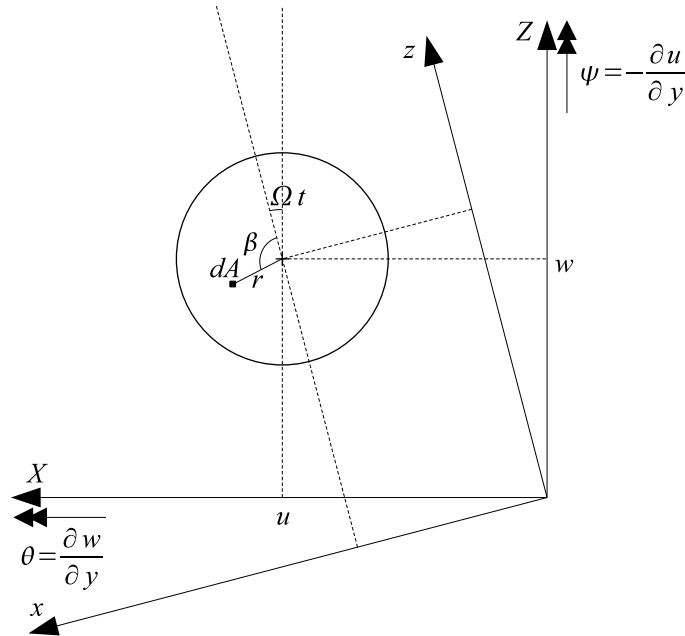


FIG. 2.5 – Coupe de la section droite de l'arbre

La loi de comportement viscoélastique permet alors d'écrire :

$$\sigma_y = E (\varepsilon_y + \eta_b \dot{\varepsilon}_y) \quad (2.30)$$

Les moments de flexion par rapport à  $X$  et  $Z$  sont exprimés par :

$$M_X = \int_0^{2\pi} \int_0^a -[w + r \sin(\beta + \Omega t)] \sigma_y dr r d\beta \quad (2.31)$$

$$M_Z = \int_0^{2\pi} \int_0^a [u + r \cos(\beta + \Omega t)] \sigma_y dr r d\beta \quad (2.32)$$

En substituant les équations 2.28 (et sa dérivée temporelle) et 2.30 dans les équations 2.31 et 2.32, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} M_X \\ M_Z \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1 & -\Omega \eta_b \\ \Omega \eta_b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} \eta_b & 0 \\ 0 & -\eta_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

L'énergie de déformation est alors donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( M_Z \frac{\partial \psi}{\partial y} + M_X \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^L \left( -M_Z \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M_X \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dy \quad (2.34)$$

Pour appliquer la méthode des éléments finis, nous employons l'élément de poutre illustré en figure 2.6, avec quatre degrés de liberté par noeud.

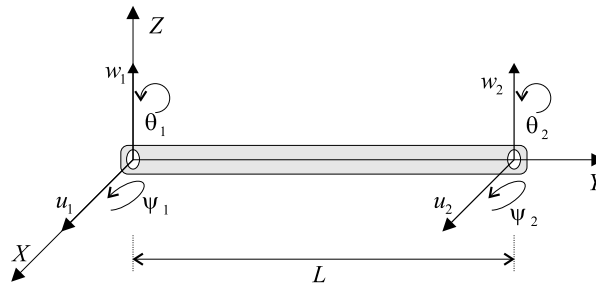


FIG. 2.6 – Degrés de liberté de l'élément de poutre

Pour décrire le mouvement sur chaque plan de flexion du rotor, nous définissons les vecteurs :

$$\delta_{\mathbf{u}} = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2] \quad (2.35)$$

$$\delta_{\mathbf{w}} = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2] \quad (2.36)$$

et les fonctions d'interpolation :

$$\mathbf{N}_1(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \\ -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \\ \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \\ \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \end{bmatrix}^t, \quad \mathbf{N}_2(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \\ y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \\ \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \\ -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \end{bmatrix}^t \quad (2.37)$$

Les fonctions de déplacement sont alors :

$$u = \mathbf{N}_1(y) \delta_{\mathbf{u}} \quad , \quad w = \mathbf{N}_2(y) \delta_{\mathbf{w}} \quad (2.38)$$

La substitution des équations 2.38 et ses dérivées dans l'expression de l'énergie cinétique (équation 2.27) nous donne :

$$\begin{aligned} T = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\delta \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{N}_1^t \mathbf{N}_1 \delta \mathbf{u} + \delta \dot{\mathbf{w}}^t \mathbf{N}_2^t \mathbf{N}_2 \delta \mathbf{w}] dy \\ & + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[ \delta \dot{\mathbf{u}}^t \frac{d\mathbf{N}_1^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_1}{dy} \delta \mathbf{u} + \delta \dot{\mathbf{w}}^t \frac{d\mathbf{N}_2^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \delta \mathbf{w} \right] dy \\ & - 2\rho I \Omega \int_0^L \left[ \delta \dot{\mathbf{u}}^t \frac{d\mathbf{N}_1^t}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \delta \mathbf{w} \right] dy + \rho I L \Omega^2 \quad (2.39) \end{aligned}$$

L'application de l'équation de Lagrange nous fournit alors :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = (\mathbf{m} + \mathbf{m}_S) \ddot{\delta} + \Omega \mathbf{g} \dot{\delta} \quad (2.40)$$

où  $\mathbf{m}$  est la matrice élémentaire de masse,  $\mathbf{m}_S$  est la matrice élémentaire d'inertie liée aux rotations et  $\mathbf{g}$  est la matrice élémentaire gyroscopique, données en annexe A.

A partir des équations 2.33, 2.34 et 2.38, nous pouvons exprimer l'énergie potentielle d'un élément comme :

$$\begin{aligned} U = & \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \delta \mathbf{u}^t \frac{d^2 \mathbf{N}_1^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{w}^t \frac{d^2 \mathbf{N}_2^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \delta \mathbf{w} \right] dy + \\ & \eta_b \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \Omega \delta \mathbf{w}^t \frac{d^2 \mathbf{N}_2^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \delta \mathbf{u} - \Omega \delta \mathbf{u}^t \frac{d^2 \mathbf{N}_1^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \delta \mathbf{w} \right] dy + \\ & \eta_b \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \delta \mathbf{u}^t \frac{d^2 \mathbf{N}_1^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{w}^t \frac{d^2 \mathbf{N}_2^t}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \delta \mathbf{w} \right] dy \quad (2.41) \end{aligned}$$

L'équation de Lagrange appliquée à l'équation 2.41 nous fournit :

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = \mathbf{k}_d \dot{\delta} + (\mathbf{k} + \Omega \mathbf{k}_c) \quad (2.42)$$

où  $\mathbf{k}_d$  est la matrice élémentaire de dissipation,  $\mathbf{k}$  est la matrice élémentaire de raideur et  $\mathbf{k}_c$  est la matrice élémentaire circulatoire, données en annexe A.

### 2.2.3 Modélisation des paliers

Les paliers sont modélisés à partir du principe des travaux virtuels des forces exercées sur le système. Les forces généralisées du palier sont alors :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} & 0 & 0 \\ k_{zx} & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} & 0 & 0 \\ c_{zx} & c_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

### 2.2.4 Modélisation du balourd radial

Le balourd est caractérisé par son énergie cinétique. L'équation de Lagrange nous permet d'obtenir les forces d'excitation par balourd :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = m_u d_u \Omega^2 \left( \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{bmatrix} \sin(\Omega t) + \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cos(\Omega t) \right) \quad (2.44)$$

où  $\alpha$  est l'angle entre le balourd et l'axe vertical à  $t = 0$ .

### 2.2.5 L'équation de mouvement du système

Le système d'équations différentielles constituant les équations du mouvement du système est obtenu par assemblage des matrices élémentaires de chaque organe, ce qui nous amène à :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_b + \mathbf{D} + \Omega \mathbf{G}) \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} + \Omega \mathbf{K}_c) \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2.45)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse du système (obtenue à partir des matrices  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{m}_S$  et  $\mathbf{m}_d$ ),  $\mathbf{K}_b$  la matrice de dissipation (obtenue à partir des matrices  $\mathbf{k}_b$ ),  $\mathbf{D}$  la matrice d'amortissement externe (obtenue à partir des amortissements visqueux des supports, par exemple),  $\mathbf{G}$  la matrice gyroscopique (obtenue à partir des matrices  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{g}_d$ ),  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur

(obtenue à partir de la matrice  $\mathbf{k}$  et de la matrice élémentaire des paliers),  $\mathbf{K}_c$  la matrice circulatoire (obtenue à partir de la matrice  $\mathbf{k}_c$ ) et  $\mathbf{F}$  le vecteur des excitations (obtenue à partir du vecteur élémentaire de balourd).

L'équation de mouvement du système et le problème aux valeurs propres de l'équation homogène associée permettent de construire le diagramme de Campbell, d'étudier les zones d'instabilité et le comportement dynamique du système. La solution en régime permanent du système forcée par balourd est obtenue classiquement par passage en variables complexes.

## 2.3 Quelques phénomènes importants en dynamique des rotors

La modélisation des rotors flexibles par éléments finis ayant été explicitée précédemment, nous allons maintenant aborder quelques-uns des aspects importants concernant la dynamique des rotors. Nous verrons plus particulièrement les notions de vitesses critiques, d'instabilités liées à l'amortissement tournant et le rôle que peuvent jouer les dissymétries sur la dynamique des rotors.

### 2.3.1 Les vitesses critiques

Parmi les phénomènes classiquement observés en dynamique des rotors, nous avons la notion de vitesse critique. Selon Nelson [51], l'une des premières citations concernant la notion de vitesse critique remonte à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle lors d'essais expérimentaux réalisés par Dunkerley. Il définit alors la vitesse critique comme la vitesse où, de manière analogue à la résonance d'une structure élastique non tournante, les vibrations de la machine atteignent des niveaux élevés.

Aujourd'hui le concept de vitesse critique a évolué et se rattache d'un point de vue théorique à la notion de valeurs propres du système tournant : la vitesse critique correspond à la vitesse où l'excitation par balourd coïncide avec une des fréquences propres du système.

Pour les machines constituées d'organes avec des moments d'inertie polaires importants, l'on constate une forte dépendance des modes propres vis-à-vis de la vitesse de rotation due aux effets gyroscopiques. Ainsi, on observe le dédoublement des modes propres du système (pour le cas d'un système axisymétrique) dû aux forces gyroscopiques comme suit :

- Une précession directe où le rotor tourne dans le même sens que son mouvement de précession. Alors, sous les effets gyroscopiques, la fréquence de résonance associée croît.
- Une précession rétrograde, où le rotor tourne en sens inverse de son mouvement de précession, ce qui engendre un effet d'assouplissement et donc une chute de la vitesse critique.

Ces notions sont illustrées en figure 2.7, où nous avons représenté l'évolution des fréquences propres d'un rotor en fonction de la fréquence de rotation. Ce graphique, appelé diagramme de Campbell, constitue l'un des outils de base pour la détermination des vitesses critiques du système. Le diagramme indiqué en figure 2.7 est caractéristique d'un rotor axisymétrique. La fréquence propre à 22 Hz au repos est double : du fait de la symétrie, il existe deux modes de vibration de déformées identiques qui sont dans 2 plans orthogonaux qui s'intersectent sur l'axe longitudinal du rotor. Lorsque les forces gyroscopiques augmentent, la séparation des modes donne naissance à un mode direct excitable par la force de balourd et un mode rétrograde non sollicité par l'excitation synchrone.

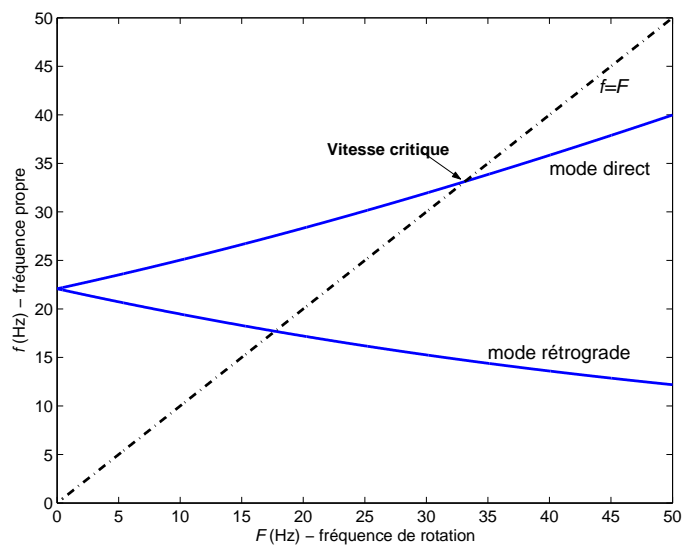


FIG. 2.7 – Exemple d'un diagramme de Campbell pour un rotor axisymétrique

### 2.3.2 L'instabilité due à l'amortissement tournant

L'amortissement correspond à l'un des facteurs déterminants pour le dimensionnement des systèmes et plus particulièrement pour l'étude de la stabilité des machines tournantes. En effet, l'amortissement (particulièrement celui des parties tournantes) peut être responsable de phénomènes instables à haute vitesse, pouvant conduire à la rupture d'éléments composant le rotor. Il est donc indispensable de pouvoir estimer les proportions d'amortissement amenées, tant sur les parties fixes que sur les parties tournantes, afin de garantir l'intégrité du système.

L'amortissement tournant des rotors est l'un des facteurs déstabilisants des machines tournantes. Il provient de l'amortissement interne des arbres, des interfaces entre les disques et les arbres, des joints d'accouplement constitués d'éléments en caoutchouc, etc. (Bigret [2], Erich [15]). Ces phénomènes donnent naissance à des forces tangentielles, nommées forces circulatoires, dans la direction de la précession et dans le sens opposé à la force d'amortissement externe. Lorsque ces forces, proportionnelles au déplacement (de manière antisymétrique) et à la vitesse de rotation, deviennent supérieures aux forces externes d'amortissement, une instabilité se développe.

Le compromis entre les forces circulatoires et l'amortissement externe (parties fixes) peut être explicité dans le cas simple d'un modèle de rotor Jeffcott. Si le rotor possède un amortissement non tournant  $c_s$  supposé visqueux et un amortissement tournant  $c_r$  également visqueux (Crandall [11]), la fréquence de rotation  $\Omega_i$  où l'instabilité démarre est donnée par :

$$\Omega_i = \Omega_{VC} \left( 1 + \frac{c_s}{c_r} \right) \quad (2.46)$$

où  $\Omega_{VC}$  est la vitesse critique du système considéré. L'équation 2.46 montre que l'instabilité apparaît à des vitesses supérieures à la vitesse critique et que l'ajout d'amortissement externe augmente la fréquence  $\Omega_i$ .

### 2.3.3 Les dissymétries

Couramment les rotors sont conçus comme étant axisymétriques. Néanmoins, le stator peut avoir des caractéristiques fonctionnelles qui invalident cette hypothèse. Dans ce cas, la dynamique de la machine présentera quelques différences par rapport au cas axisymétrique. Les modes doubles laissent place à deux modes simples de fréquences distinctes menant, comme dans le cas axisymétrique, à un mode direct et un mode rétrograde (figure 2.8) (Lalanne et Ferraris [37]). Dans ce cas de figure, les modes rétrogrades sont sollicités par l'excitation synchrone et le nombre de vitesses critiques est multiplié par 2, par rapport au cas axisymétrique.

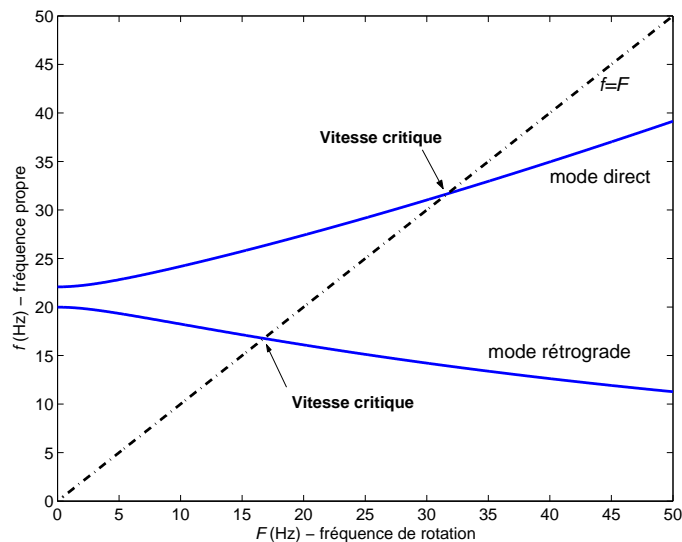


FIG. 2.8 – Exemple d'un diagramme de Campbell pour un rotor avec des supports orthotropes

Sur les réponses à balourd, l'influence de la dissymétrie peut être analysée à l'aide d'un modèle Jeffcott avec des paliers orthotropes. On montre (Genta [20], Childs [8]) qu'à faible vitesse de rotation, le rotor est en précession directe. Au voisinage et au-delà de la



première vitesse critique, le comportement devient de type rétrograde avant de redevenir direct pour des vitesses de rotation supérieures à la deuxième vitesse critique.

En comparaison avec un rotor à supports isotropes, où les orbites sont circulaires pour toutes les fréquences de rotation, un rotor à supports anisotropes génère des orbites elliptiques. L'arbre subit alors des contraintes axiales normales qui nuisent à la durée de vie de la machine.

Aussi, les rotors avec des supports anisotropes peuvent être utilisés pour augmenter la fréquence où l'instabilité apparaît. Childs [8] montre par exemple que l'instabilité originelle de l'amortissement interne est décalée grâce à la dissymétrie des supports.

Un autre phénomène lié à l'anisotropie des supports est la manifestation simultanée de précessions directes et rétrogrades le long de l'arbre. Muszinska [46] a observé expérimentalement les précessions simultanées sur un rotor vertical dont l'arbre est fléchi. Dans cette étude, la manifestation des précessions simultanées est affectée par l'amplitude de la flexion de l'arbre et aussi par la distribution de balourds. Des résultats identiques (Dias et al. [13]) ont été obtenus pour un rotor horizontal supporté par des roulements et des paliers. Ces études ont été confirmées par des simulations numériques.

De même, Rao et al. [66],[65] ont étudié expérimentalement et numériquement un rotor Jeffcott horizontal supporté par deux paliers hydrodynamiques identiques, en montrant que la variation du jeu radial des paliers (le paramètre qui contrôle l'anisotropie) est la variable qui pilote la manifestation des précessions simultanées : ils observent alors la précession rétrograde au niveau du disque et la précession directe ailleurs.

Enfin, certaines machines tournantes peuvent présenter une asymétrie du rotor. Il s'agit par exemple des générateurs à deux pôles ou des systèmes à hélices à deux pales. L'étude de ce type de rotor a attiré l'attention de plusieurs chercheurs (Sakata et al.[68], Kang et al [31], Genta [19]), qui ont montré que ce type de systèmes engendre une dynamique très riche dont le phénomène caractéristique est l'existence d'une vitesse critique secondaire. Cette vitesse critique apparaît à une vitesse proche de la moitié de la vitesse critique synchrone, plus précisément sur l'intersection de la courbe d'évolution fréquentielle du mode direct avec la droite d'excitation  $f = 2F$ . Celle-ci est alors excitée par une force latérale constante, comme le poids du rotor. D'un point de vue de l'apparition ou non d'instabilité, les anisotropies tournantes font apparaître des plages de fréquences instables qui peuvent être éliminées par l'ajout d'amortissement externe (Genta [19]).



## Chapitre 3

# Modélisation non-linéaire des rotors

### 3.1 Introduction

Dans le domaine de la dynamique, les systèmes mécaniques qui possèdent des parties tournantes sont souvent des structures complexes du point de vue technologique. Couramment, les outils de conception et d'analyse de ces machines sont souvent basés sur le comportement linéaire du système.

Les caractéristiques dynamiques de telles structures, du fait de leur complexité, s'appuient principalement sur une approche modale, qui permet de découpler les équations du mouvement en les transformant en un ensemble d'oscillateurs à un degré de liberté dont les solutions sont ensuite superposées pour construire la solution finale du problème (Meirovitch [44]). D'autre part, diverses techniques de réduction de la dimension du système sont disponibles, comme la réduction de Guyan, Craig et Bampton et la troncature modale (Gérardin [24], Meirovitch [43]).

Les différents organes intervenant dans une machine tournante peuvent être classifiés de la façon suivante :

- les arbres, constituant les éléments principaux des machines tournantes ;
- les éléments de support et positionnement (paliers hydrauliques, paliers à roulements, paliers magnétiques, etc.) ;
- les éléments de transmission de mouvement (engrenages, courrois, joints d'accouplement, embrayages, etc.) ;
- les éléments fonctionnels (roues aubagées, broches, hélices, etc.).

Ces éléments en liaison avec le rotor sont en général de nature non-linéaire. Afin de prendre en compte ces éléments lors de l'utilisation des outils traditionnels d'analyse et de conception, on utilise des propriétés linéarisées correspondant à des comportements extrêmes de ces organes. Pour bien analyser le comportement global de la machine prenant en compte la complexité amenée par les éléments non linéaires, il est nécessaire de développer des outils spécifiques permettant de rendre compte de cette dynamique.

Une des techniques classiquement utilisées pour décrire le comportement non linéaire de tels systèmes est l'intégration directe (Bathe [1]). Le principal désavantage de ces méthodes d'intégration directe est le temps de calcul requis pour obtenir une solution qui puisse être considérée comme une solution de type régime permanent, surtout dans les cas de systèmes à faible amortissement.

Quand les efforts subis par le système peuvent être mis sous la forme  $\mathbf{F}_L + \varepsilon\mathbf{F}_{NL}$ , où  $\mathbf{F}_L$  définit les forces dites linéaires,  $\mathbf{F}_{NL}$  les forces dites non linéaires supposées décrites mathématiquement par des fonctions analytiques, et  $\varepsilon$  un paramètre supposé petit, des méthodes essentiellement analytiques comme les méthodes de perturbation (Nayfeh et Mook [50]), où la non-linéarité est représentée par un polynôme, sont souvent utilisées.

Pour des non-linéarités non-analytiques ou des non-linéarités dont la représentation par un polynôme nécessite un nombre important de termes, il est alors préférable de faire appel à des méthodes numériques, telles que la méthode de tir (Demailly [12], Vrande [86], Padmanabhan et Singh [55]), qui est une adaptation des méthodes d'intégration directe et permet d'éviter le régime transitoire du système. Le principe de la méthode est d'imposer aux équations du mouvement des conditions initiales qui se situent sur le régime périodique de la solution. En intégrant les équations du mouvement sur une période et en imposant la périodicité, nous pouvons expliciter la dépendance du système aux conditions de départ et les déterminer à l'aide d'un solveur d'équations non-linéaires.

Dans l'étude qui va suivre, nous allons appliquer une méthode de balance harmonique, appelée la méthode de la balance harmonique AFT (Alternating Frequency/Time) sur un roulement non-linéaire avec jeu. Avant de présenter cette méthode, nous allons expliciter les non-linéarités des paliers à roulements et le modèle de roulement non-linéaire (contact de hertz) avec jeu qui sera utilisé par la suite pour valider la méthode de la balance harmonique.

## 3.2 Non-linéarités des paliers à roulements

Dans les paliers à roulement, la prise en compte des non-linéarités est nécessaire afin de modéliser correctement le comportement dynamique de cet organe. Aussi, les principales non-linéarités provenant des roulements sont le jeu radial et le contact de Hertz.

Ainsi, dans les paragraphes suivants nous allons expliciter le calcul de la raideur radiale d'un élément tournant. Nous présenterons ensuite trois types de modèle de roulement : un modèle à jeu radial, un modèle à raideur radiale bilinéaire et un modèle incorporant la cinématique des éléments tournants.

### 3.2.1 Calcul de la raideur d'un élément roulant en statique

Le calcul de la raideur radiale statique d'un roulement est fait à partir de la description géométrique du contact entre deux corps selon les hypothèses de Hertz (Harris[26], Timo-

shenko [80]). La géométrie du contact est illustrée en figure 3.1, où les corps sont en contact ponctuel et sans aucun chargement. Le premier corps est nommé I et le deuxième corps est nommé II. Les plans principaux sur lesquels les courbures sont définies sont nommés 1 et 2. Par convention, une courbure négative indique une surface concave.

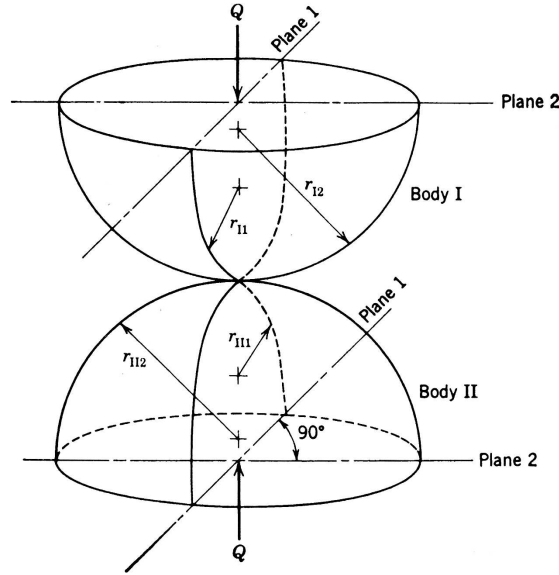


FIG. 3.1 – Géométrie de contact (figure tirée de Harris [26])

Il existe deux quantités fondamentales pour la description du contact. La première est la somme des courbures, définie par :

$$\Sigma\rho = \frac{1}{r_{I1}} + \frac{1}{r_{I2}} + \frac{1}{r_{II1}} + \frac{1}{r_{II2}} \quad (\text{mm}^{-1}) \quad (3.1)$$

et la deuxième quantité est la différence des courbures, définie par :

$$F(\rho) = \frac{(\rho_{I1} - \rho_{I2}) + (\rho_{II1} - \rho_{II2})}{\Sigma\rho} \quad (3.2)$$

Pour le contact entre une bille et la gorge de la bague intérieure, les rayons et les courbures sont :

$$\begin{aligned} r_{I1} &= \frac{D}{2} & \rho_{I1} &= \frac{1}{r_{I1}} \\ r_{I2} &= \frac{D}{2} & \rho_{I2} &= \frac{1}{r_{I2}} \\ r_{II1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{d_m}{\cos(\alpha)} - D \right) & \rho_{II1} &= \frac{1}{r_{II1}} \\ r_{II2} &= f_i D & \rho_{II2} &= -\frac{1}{r_{II1}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $D$  est le diamètre de la bille,  $d_m$  est le diamètre primitif du roulement,  $f_i$  est le rapport entre le rayon de courbure de la gorge de la bague intérieure et le diamètre de la bille, et  $\alpha$  est l'angle de contact.

Pour le contact entre la bille et la gorge de la piste extérieure, nous avons :

$$\begin{aligned}
 r_{I1} &= \frac{D}{2} & \rho_{I1} &= \frac{1}{r_{I1}} \\
 r_{I2} &= \frac{D}{2} & \rho_{I2} &= \frac{1}{r_{I2}} \\
 r_{II1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{d_m}{\cos(\alpha)} + D \right) & \rho_{II1} &= -\frac{1}{r_{II1}} \\
 r_{II2} &= f_o D & \rho_{II2} &= -\frac{1}{r_{II1}}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

où  $f_o$  est le rapport entre le rayon de courbure de la gorge de la bague extérieure et le diamètre de la bille.

Quand une des bagues et la bille sont sous un chargement  $Q$  (donnée en Newtons), la distance relative entre ces deux éléments est égale à :

$$\delta = 2.79 \times 10^{-4} \delta^* Q^{\frac{2}{3}} (\Sigma \rho)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{mm}) \tag{3.5}$$

où  $\delta^* = f(F(\rho))$  est un paramètre de déformation adimensionnel dont la valeur est obtenue à l'aide d'abaques (Harris [26]). Nous pouvons obtenir à partir de l'équation 3.5 le chargement  $Q$  :

$$Q = \left[ 2.15 \times 10^5 (\delta^*)^{-\frac{3}{2}} (\Sigma \rho)^{-\frac{1}{2}} \right] \delta^{\frac{3}{2}} = K_P \delta^{\frac{3}{2}} \tag{3.6}$$

Pour obtenir la raideur de l'ensemble bague intérieure - bille - bague extérieure, nous calculons les raideurs :

$$\begin{aligned}
 K_{Pi} &= \left[ 2.15 \times 10^5 (\delta_i^*)^{-\frac{3}{2}} (\Sigma \rho_i)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{N/mm}^{3/2}) \\
 K_{Po} &= \left[ 2.15 \times 10^5 (\delta_o^*)^{-\frac{3}{2}} (\Sigma \rho_o)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{N/mm}^{3/2})
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

où  $K_P$  est la raideur entre une bague et la bille, et l'indice  $i$  se rapporte à la bague intérieure-bille et  $o$  à la bague extérieure - bille. Dans le cas du contact rouleau-bague, l'expression de la raideur est :

$$K_{Pi} = K_{Po} = 7.86 \times 10^4 l^{\frac{8}{9}} \quad (\text{N/mm}^{10/9}) \tag{3.8}$$

où  $l$  est la longueur du rouleau.

La raideur de l'ensemble est alors :

$$K_n = \frac{1}{\left[ \left( \frac{1}{K_{Pi}} \right)^{\frac{1}{n}} + \left( \frac{1}{K_{Po}} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n} \tag{3.9}$$

où  $n = 1.5$  pour des roulements à billes et  $n = 1.11$  pour des roulements à rouleaux. Finalement, la relation entre le chargement et le déplacement est donnée par :

$$Q = K_n \delta^n \quad (3.10)$$

L'expression ci-dessus sera utilisée dans les modèles de roulement que nous allons étudier dans les prochains paragraphes.

### 3.2.2 Modèle à jeu radial "normal loose"

La présence d'un jeu radial dans un roulement peut être à l'origine d'une dynamique extrêmement complexe sur les rotors. Sur un rotor Jeffcott vertical (sans force latérale), Childs [8] montre que la vitesse critique et les niveaux atteints diminuent quand la valeur du jeu radial augmente.

Le jeu radial engendre une réduction de la raideur sur une fraction de période de rotation du rotor et cette condition est nommée "normal loose" (Childs [8]). Dans le cas où le rotor est positionné sur des roulements à jeu radial et soumis à une force latérale constante, comme le poids par exemple, il existe alors des conditions pour l'apparition de phénomènes du type "normal loose". Ces phénomènes peuvent être illustrés sur un modèle simple de rotor de type Jeffcott avec une raideur bilinéaire fonction du déplacement vertical du rotor, caractérisant le roulement par :

$$\begin{aligned} F_X &= -k [1 - \varepsilon U(Y)] X \\ F_Y &= -k [1 - \varepsilon U(Y)] Y \end{aligned} \quad (3.11)$$

où  $X$  et  $Y$  sont les degrés de libertés des déplacements horizontal et vertical,  $k$  est la raideur radiale et  $U(Y)$  est la fonction de Heaviside appliquée sur le déplacement vertical. Childs montre alors que le système aura des vibrations comportant des sous harmoniques d'ordre  $1/2$  et, moins couramment, des sous-harmoniques  $1/3$  et  $1/4$ , avec des amplitudes pour les sous-harmoniques pouvant devenir très importantes.

### 3.2.3 Modèle à raideur radiale bilinéaire

Dans ce modèle nous supposons que le rotor (composé d'un arbre et des parties tournantes du roulement) touche le stator (représenté par la bague extérieure du roulement), sur un seul point. La figure 3.2 illustre ce modèle.

Au repos, nous avons le centre de l'arbre  $O_r$  et le centre du stator  $O_s$  qui coïncident. Le repère fixe est défini par  $O_r(X, Y, Z)$ . Le stator est représenté par un cercle qui se comporte comme la bague extérieure du roulement, et des ressorts selon les directions  $X$  et  $Z$  qui agissent comme la structure autour de la bague extérieure. Nous supposons que la distance radiale entre le rotor et le stator est  $\delta$  dans la configuration de départ.

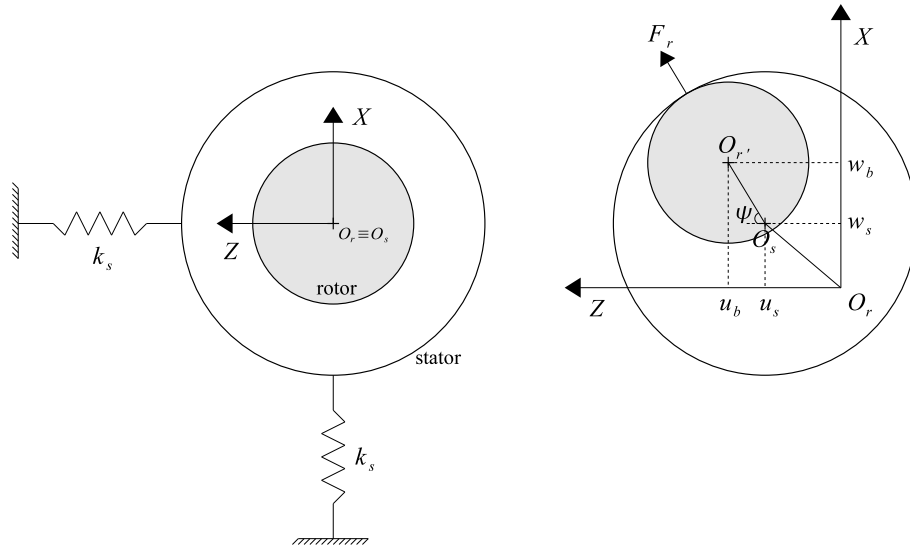


FIG. 3.2 – Modèle de roulement à raideur radiale bilinéaire

Passons maintenant à une configuration où le rotor et le stator sont en contact. La position du stator est  $(u_s, w_s)$  dans le repère fixe. La position du rotor quant à lui est  $(u_b, w_b)$ . Lors du contact, il apparaît sur le point de contact une force  $\mathbf{F}_r$  entre le rotor et le stator, de direction normale aux surfaces en contact (le frottement entre le rotor et le stator n'est pas considéré ici).

La distance entre le rotor et le stator est alors :

$$\overline{O_r'O_s} = R = \sqrt{(u_b - u_s)^2 + (w_b - w_s)^2} \quad (3.12)$$

L'angle  $\psi$  qui caractérise la position du rotor par rapport au stator est tel que :

$$\cos(\psi) = \frac{u_b - u_s}{R} \quad ; \quad \sin(\psi) = \frac{w_b - w_s}{R} \quad (3.13)$$

Le déplacement relatif entre le rotor et le stator est donc donné par  $R - \delta$ . Nous avons alors les composantes de  $\mathbf{F}_r$  agissant sur le rotor :

$$F_X = - \begin{cases} K_C (R - \delta) \cos(\psi) & , \quad R \geq \delta \\ 0 & , \quad R < \delta \end{cases} \quad (3.14)$$

$$F_Z = - \begin{cases} K_C (R - \delta) \sin(\psi) & , \quad R \geq \delta \\ 0 & , \quad R < \delta \end{cases}$$

Le modèle pourrait incorporer le contact de Hertz, avec un exposant 1.5 sur les déplacements relatifs pour un roulement à billes ou 1.11 pour des roulements à rouleaux.

Pour un tel modèle de roulement à raideur radiale bilinéaire couplé à un rotor Jeff-



cott et avec un couplage entre les raideurs horizontales et verticales, Kim et Noah [34] ont montré la possibilité d'existence de mouvements sous-harmoniques et mouvements quasi périodiques. En utilisant aussi un modèle de raideur bilinéaire pour le roulement, Karpenko et al. [32] montrent que sur le même type de modèle le système peut avoir des vibrations périodiques, chaotiques et quasi périodiques.

### 3.2.4 Modèle incorporant la cinématique des éléments roulants

Ce modèle constitue une amélioration du précédent modèle dans le sens où la cinématique des éléments roulants est prise en compte. Nous pouvons alors avoir plusieurs contacts au même instant. En plus, ce modèle permet l'étude d'autres phénomènes comme des défauts des éléments roulants et l'ondulation des pistes de roulement (Harsha et al. [27], Jang et Jeong [29]).

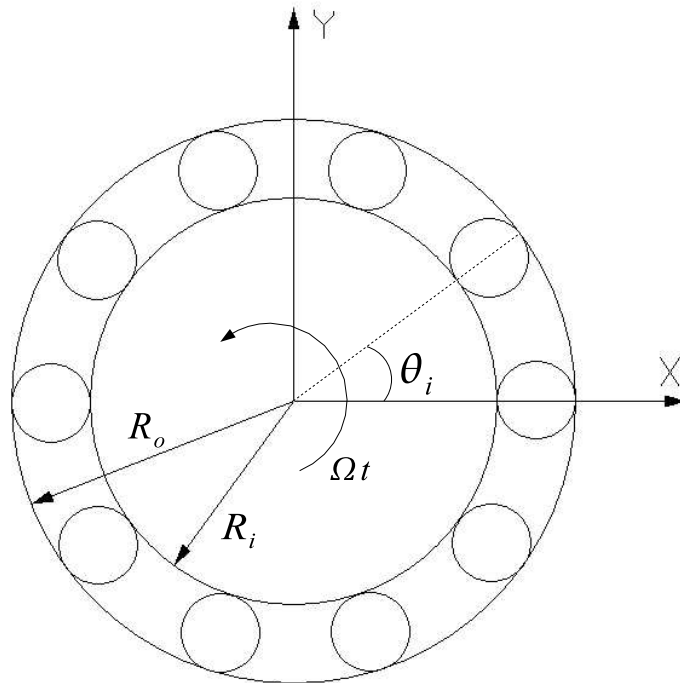


FIG. 3.3 – Modèle de roulement incorporant la cinématique des éléments roulants

La figure 3.3 montre le schéma du modèle, où  $R_i$  est le rayon de la gorge de la bague intérieure,  $R_o$  est le rayon de la gorge de la bague extérieure et  $\theta_i$  est la position de l'élément roulant  $i$ . Nous supposons que les éléments roulants sont maintenus séparés avec une distance angulaire constante par une cage et qu'il n'y a pas de glissement entre les éléments roulants et les pistes. Le jeu radial vaut  $\delta$  et les effets dynamiques (moment gyroscopique et force centrifuge) sur les éléments roulants ne sont pas pris en compte. En considérant la piste extérieure fixe, nous avons (Tiwari et al. [82]) :

$$\Omega_{\text{cage}} = \Omega \left( \frac{R_i}{R_i + R_o} \right) \quad (3.15)$$

Ce modèle de roulement engendre une excitation propre si le jeu est consommé (existence d'une force constante (poids)) due à une variation de la raideur en fonction du changement des positions angulaires des éléments roulants. La fréquence de cette excitation est :

$$\Omega_{VC} = \Omega \cdot \left( \frac{R_i}{R_i + R_o} \right) \cdot N_b = \Omega \cdot BN \quad (3.16)$$

où  $BN$  est nommé "nombre de roulement" et traduit le rapport entre la fréquence d'excitation paramétrique et la fréquence de rotation du rotor et  $N_b$  définit le nombre d'éléments roulants.

Le roulement possède donc  $N_b$  éléments roulants dont la position angulaire de chacun est :

$$\theta_i = \frac{2\pi}{N_b} (i - 1) + \Omega_{cage} t \quad , \quad i = 1, \dots, N_b \quad (3.17)$$

Avec la position de chaque élément roulant connue, nous pouvons calculer la force de rappel du roulement. Nous commençons par déterminer le déplacement relatif entre le rotor et le stator par rapport aux positions angulaires des éléments roulants :

$$\delta_i = (x_r - x_s) \cos(\theta_i) + (y_r - y_s) \sin(\theta_i) \quad , \quad i = 1, \dots, N_b \quad (3.18)$$

où les indices  $r$  et  $s$  désignent le rotor et le stator. La force s'exerçant sur les éléments roulants est alors :

$$Q_i = \begin{cases} K_C (\delta_i - \delta)^n & , \quad \delta_i \geq \delta \\ 0 & , \quad \delta_i < \delta \end{cases} \quad (3.19)$$

où l'exposant de Hertz vaut  $3/2$  pour un roulement à billes et  $10/9$  pour un roulement à rouleaux. Les forces exercées par le roulement sur le rotor sont obtenues par la somme des forces  $Q_i$  projetées sur les axes horizontaux et verticaux :

$$\begin{aligned} F_X &= - \sum_{i=1}^{N_b} Q_i \cos(\theta_i) \\ F_Y &= - \sum_{i=1}^{N_b} Q_i \sin(\theta_i) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Avec ce modèle de roulement, Tiwari et al. [82] ont étudié un rotor sans excitation par balourd, ne considérant que l'excitation paramétrique liée à une raideur variable du roulement. Les auteurs ont montré que le système peut avoir des régimes chaotiques et des vibrations quasi périodiques. L'augmentation de la force latérale ou la diminution

du jeu rapproche le comportement du rotor du comportement d'un rotor linéaire, car ces conditions favorisent le mouvement avec le jeu consommé. Le comportement complexe observé par les auteurs est lié au niveau des vibrations obtenues, étant en effet du même ordre de grandeur que le jeu radial.

Tiwari et Gupta [81] ont abordé le même problème que celui évoqué au paragraphe précédent en prenant en compte l'excitation par balourd. Malgré l'importante variation de vitesse subie par le rotor (entre 3000 tr/min et 28700 tr/min), les auteurs ont considéré le balourd comme étant une force constante en amplitude, ce qui diminue son importance par rapport aux effets propres du roulement liés à  $\Omega_{VC}$ . La simulation est faite avec un intégrateur temporel et les réponses montrent des harmoniques multiples de  $1X$  (où  $1X$  est la fréquence de rotation), multiples de  $VC$  (où  $VC$  est la fréquence donnée par l'équation 3.16) et en combinaisons linéaires de ces fréquences. De plus, des régimes chaotiques ont été mis en évidence.

Concernant la complexité des roulements et modèles associés, des exemples plus complets peuvent être trouvés dans la littérature. Par exemple, Lim et Singh [41] présentent un modèle de roulement avec 5 degrés de liberté pour modéliser la réponse statique du roulement aux forces suivant les trois axes et les moments suivant les deux axes transversaux. Là aussi le modèle possède encore un jeu radial et un contact du type Hertz. Sapanen et Mikkola [77] ont proposé un modèle de roulement à billes avec 6 degrés de liberté (comme dans le modèle de Lim et Singh, mais en incluant le moment résistant à la rotation de l'arbre). Le modèle prend en compte le jeu radial, la raideur variable et des défauts de fabrication locaux ou distribués. Le modèle a été utilisé pour un rotor rigide et le système est simulé sur le logiciel MSC.ADAMS en utilisant des intégrateurs temporels. Les excitations sont des balourds sur les disques et l'effet paramétrique des roulements. Dans les réponses, les auteurs ont trouvé des harmoniques  $1X$ ,  $2X$ ,  $3X$ ,  $4X$ ,  $VC$ ,  $VC - 1X$ ,  $VC + 1X$  et  $VC + 2X$ . En prenant le déplacement sur  $1X$  comme référence, les niveaux de déplacement observés sur les autres fréquences sont au moins 60 fois plus petits.

En conclusion, le modèle de roulement incorporant la cinématique des éléments roulants permet une représentation plus fidèle des phénomènes physiques intrinsèques au roulement. Les auteurs qui ont étudié des rotors avec ce type de roulement ont trouvé des régimes de vibration assez complexes. Dans la plupart de ces recherches, les déplacements obtenus sont du même ordre de grandeur que le jeu radial, grâce aux conditions de fonctionnement très spéciales des rotors simulés, comme l'absence d'excitation par balourd, la prise en compte d'une excitation essentiellement paramétrique ou encore les études en fonctionnement dans une zone de contact intermittent. Il semble qu'un rotor avec une excitation à balourd résiduel ne favorise pas l'apparition de régimes chaotiques ou quasi-périodiques, bien que des équilibres très pointus peuvent éventuellement amener le rotor dans ces conditions.

### 3.3 Solutions périodiques

Afin d'obtenir la solution stationnaire d'un système dynamique non linéaire, l'une des techniques couramment utilisées consiste à rechercher cette solution sous une forme pré-définie qui peut par exemple être sous la forme d'une série de Fourier tronquée. Des méthodes non linéaires permettent alors de déterminer les coefficients de Fourier associés ([5],[7],[48]).

Dans les paragraphes suivants nous allons tout d'abord présenter différentes méthodes permettant de déterminer la réponse stationnaire d'un système non-linéaire telles que la méthode de balance harmonique AFT (Alternating Frequency Time), la méthode de balance harmonique incrémentale et la méthode de la collocation trigonométrique.

Ensuite, la notion de stabilité des solutions périodiques sera abordée et dans une dernière partie, nous validerons l'utilisation de la méthode de la balance harmonique AFT sur un système constitué d'un roulement non-linéaire avec jeu.

#### 3.3.1 Introduction

L'une des premières méthodes de recherche des solutions stationnaires d'un système dynamique non-linéaire est la méthode de la balance harmonique ([78]). Cette méthode est un outil bien connu des chercheurs qui travaillent dans le domaine de la dynamique non linéaire des structures. Elle consiste à imposer une solution harmonique de période égale à la période de l'excitation et, ensuite, à équilibrer les termes en sinus et cosinus de l'équation du mouvement. Afin d'illustrer cette méthode, nous allons étudier le cas particulier de l'approximation monoharmonique de la réponse d'un système. Par exemple, considérons l'oscillateur de Duffing décrit par :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \alpha x^3 = F \cos(\Omega t) \quad (3.21)$$

La solution en régime permanent de l'équation 3.21 est supposée comme pouvant être décrite par l'harmonique de même fréquence que l'excitation :

$$x(t) = A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t) \quad (3.22)$$

Nous injectons la solution 3.22 dans l'équation du mouvement 3.21, et les termes en sinus et cosinus sont équilibrés. Les termes dont les fréquences sont plus hautes que  $\Omega$  sont négligés. Avec cette démarche le problème différentielle non-linéaire devient un problème algébrique non linéaire :

$$\begin{bmatrix} k - m\Omega^2 & -c\Omega \\ c\Omega & k - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} - \frac{3}{4}\alpha \begin{Bmatrix} A^3 + AB^2 \\ A^2B + B^3 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Cette équation permet alors la construction des courbes de réponse en fréquence du système.

Dans cet exemple, il n'y a qu'un seul degré de liberté. La solution est approchée par 1 harmonique et la non-linéarité est simple et analytique, ce qui rend l'estimation de la réponse en fréquence facile à mettre en oeuvre. Cependant, lors de l'étude de problèmes de plus grande taille avec des non-linéarités non analytiques, cette méthode devient difficile de mise en oeuvre.

### 3.3.2 Méthode de la balance harmonique incrémentale

Cette méthode a été utilisée par plusieurs auteurs pour obtenir la solution périodique de différents problèmes. Raghothama et Narayanan [58] ont utilisée la méthode de la balance harmonique incrémentale pour étudier les vibrations en torsion d'un rotor couplé à une transmission par engrenages comportant un jeu. Ils ont aussi étudié le comportement dynamique d'un système à raideur continue par morceaux [60] et un système à raideur cubique [59].

Cheung et al. [7] ont travaillé sur un système avec des non-linéarités cubiques. Leung et Chui [39] ont eux aussi étudié un système avec des non-linéarités cubiques, en perfectionnant la méthode et en remplaçant la procédure de Galerkin par des transformées de Fourier. Xu et al. ont appliqué la méthode pour étudier un oscillateur avec des non-linéarités bilinéaires pour la raideur [92] et pour l'amortissement visqueux [91]; la comparaison des résultats de la balance harmonique incrémentale avec une intégration directe (Runge Kutta du quatrième ordre) montre alors une excellente concordance.

Pour présenter la méthode, nous allons considérer tout d'abord que l'équation du mouvement du système s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{F} \cos(\Omega t) \quad (3.24)$$

La méthode consiste alors à écrire l'équation 3.24 sous forme incrémentale. L'état du système est incrémenté, c'est à dire, en considérant l'état du système défini par  $(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}, \mathbf{F} + \Delta\mathbf{F})$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\Delta\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{X} = & \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \frac{\partial\mathbf{F}_{NL}}{\partial\mathbf{X}}\Delta\mathbf{X} + \frac{\partial\mathbf{F}_{NL}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}\Delta\dot{\mathbf{X}} \\ & + \mathbf{F} \cos(\Omega t) - \left(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X}\right) + \Delta\mathbf{F} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Le vecteur  $\mathbf{X}$  et son incrément  $\Delta\mathbf{X}$  sont supposés développables en séries de Fourier. Donc, pour chaque composante de  $\mathbf{X}$  et de  $\Delta\mathbf{X}$ , on a le développement en série de Fourier (tronquée à l'ordre  $m$ ) :

$$X_j = [1, \sin(\Omega t), \cos(\Omega t), \dots, \sin(m\Omega t), \cos(m\Omega t)] \begin{bmatrix} B_{0j} \\ A_{1j} \\ B_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \\ B_{mj} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_S \mathbf{A}_j \quad (3.26)$$

$$\Delta X_j = [1, \sin(\Omega t), \cos(\Omega t), \dots, \sin(m\Omega t), \cos(m\Omega t)] \begin{bmatrix} \Delta B_{0j} \\ \Delta A_{1j} \\ \Delta B_{1j} \\ \vdots \\ \Delta A_{mj} \\ \Delta B_{mj} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_S \Delta \mathbf{A}_j \quad (3.27)$$

Les expressions 3.26 et 3.27 peuvent être mises sous la forme :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{C}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix} = \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (3.28)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{C}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{A}_m \end{bmatrix} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{A} \quad (3.29)$$

En injectant les équations 3.28 et 3.29 dans l'équation 3.25, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^t \mathbf{M} \ddot{\mathbf{S}} \Delta \mathbf{A} + \mathbf{S}^t \mathbf{D} \dot{\mathbf{S}} \Delta \mathbf{A} + \mathbf{S}^t \mathbf{K} \mathbf{S} \Delta \mathbf{A} = \\ \mathbf{S}^t \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{S}^t \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{S} \Delta \mathbf{A} + \mathbf{S}^t \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \dot{\mathbf{S}} \Delta \mathbf{A} + \mathbf{S}^t \mathbf{F} \cos(\Omega t) \\ - \left( \mathbf{S}^t \mathbf{M} \ddot{\mathbf{S}} \mathbf{A} + \mathbf{S}^t \mathbf{D} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{A} + \mathbf{S}^t \mathbf{K} \mathbf{S} \mathbf{A} \right) + \mathbf{S}^t \Delta \mathbf{F} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Un procédé de Galerkin est appliquée à l'équation 3.30, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \delta(\Delta \mathbf{X})^t \left( \mathbf{S}^t \mathbf{M} \ddot{\Delta \mathbf{A}} + \mathbf{S}^t \mathbf{D} \dot{\Delta \mathbf{A}} + \mathbf{S}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{A} \right) d\tau = \\
\int_0^T \delta(\Delta \mathbf{X})^t \left( \mathbf{S}^t \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{S}^t \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{S} \Delta \mathbf{A} + \right. \\
\left. \mathbf{S}^t \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \dot{\Delta \mathbf{A}} + \mathbf{S}^t \mathbf{F} \cos(\Omega t) \right) d\tau + \\
\int_0^T \delta(\Delta \mathbf{X})^t \left( - \left( \mathbf{S}^t \mathbf{M} \ddot{\Delta \mathbf{A}} + \mathbf{S}^t \mathbf{D} \dot{\Delta \mathbf{A}} + \mathbf{S}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{A} \right) + \mathbf{S}^t \Delta \mathbf{F} \cos(\Omega t) \right) d\tau \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Cette équation fournit le système d'équations algébriques qui nous permet de déterminer les coefficients de la série de Fourier représentés en 3.29 :

$$\left( \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{K}} \right) \Delta \mathbf{A} = \mathbf{F}_0 - \left( \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{K}} \right) \mathbf{A} + \mathbf{F}_\Delta \quad (3.32)$$

où :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \int_0^T \mathbf{S}^t \mathbf{M} \ddot{\Delta \mathbf{A}} d\tau$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \int_0^T \mathbf{S}^t \mathbf{D} \dot{\Delta \mathbf{A}} d\tau$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \int_0^T \mathbf{S}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{A} d\tau$$

$$\mathbf{F}_0 = \int_0^T \mathbf{S}^t \left( \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{S} \Delta \mathbf{A} + \right. \\
\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \dot{\Delta \mathbf{A}} + \mathbf{F} \cos(\Omega t) \right) d\tau$$

$$\mathbf{F}_\Delta = \int_0^T \mathbf{S}^t \Delta \mathbf{F} \cos(\Omega t) d\tau$$

Cette procédure de balance harmonique incrémentale nous permet donc d'effectuer les calculs des incréments  $\Delta \mathbf{A}$  et ensuite de réaliser la mise à jour des coefficients de la série de Fourier représentative des déplacements.

Cette méthode peut s'avérer délicate si l'évaluation analytique des gradients des forces non linéaires est difficile. Nous chercherons donc à développer une approche qui évite cette difficulté comme par exemple la méthode de la collocation ou la méthode AFT.

### 3.3.3 Méthode de la collocation trigonométrique

Dans cette méthode, nous utilisons une approximation par série de Fourier de la solution recherchée, comme dans le cas précédent. Cette approximation est évaluée pour une discrétisation temporelle de la réponse du système sur une période de vibration, ces évaluations devant satisfaire l'équation du mouvement.

La procédure développée par Nataraj et Nelson [48] s'appuie sur une mise en équations du mouvement sous forme d'équations d'état d'ordre  $n$  :

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{R} + \mathbf{BZ}) = \mathbf{F}(\mathbf{Z}, t) \quad (3.33)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{F} \cos(\Omega t) \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{Z} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{array} \right\}$$

La solution  $\mathbf{Z}(t)$  est écrite comme étant une série de Fourier tronquée à l'ordre  $m$  :

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^m (\mathbf{A}_k \sin(k\Omega t) + \mathbf{B}_k \cos(k\Omega t)) \quad (3.34)$$

La méthode de la collocation trigonométrique consiste à injecter la solution 3.34 dans l'équation du mouvement 3.33 et à imposer que les expressions ainsi obtenues soient satisfaites sur  $L$  points pris sur une période.

La période de vibration est alors discrétisée sur  $L$  points de collocation :

$$t_k = k \frac{2\pi}{\Omega L} \quad , \quad k = 0, \dots, L-1 \quad (3.35)$$

Pour expliciter la démarche de la méthode, le vecteur  $\mathbf{Z}(t)$  est mis sous la forme suivante :



$$\mathbf{Z}(t) = [Z_1(t), \dots, Z_n(t)]^t \quad (3.36)$$

Nous explicitons aussi les composantes des vecteurs de la série de Fourier de  $\mathbf{Z}(t)$  :

$$\mathbf{B}_0 = [B_{01}, \dots, B_{0n}]^t \quad (3.37)$$

$$\mathbf{A}_k = [A_{k1}, \dots, A_{kn}]^t \quad (3.38)$$

$$\mathbf{B}_k = [B_{k1}, \dots, B_{kn}]^t \quad (3.39)$$

L'évaluation de  $\mathbf{Z}(t)$  sur les points de collocation peut être écrite comme suit :

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{C}} \quad (3.40)$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} Z_1(0) & Z_2(0) & \cdots & Z_n(0) \\ Z_1(t_1) & Z_2(t_1) & \cdots & Z_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_1(t_k) & Z_2(t_k) & \cdots & Z_n(t_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_1(t_{L-1}) & Z_2(t_{L-1}) & \cdots & Z_n(t_{L-1}) \end{bmatrix}_{L \times n}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \sin(\Omega t_1) & \cos(\Omega t_1) & \cdots & \sin(m\Omega t_1) & \cos(m\Omega t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sin(\Omega t_k) & \cos(\Omega t_k) & \cdots & \sin(m\Omega t_k) & \cos(m\Omega t_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sin(\Omega t_{L-1}) & \cos(\Omega t_{L-1}) & \cdots & \sin(m\Omega t_{L-1}) & \cos(m\Omega t_{L-1}) \end{bmatrix}_{L \times (2m+1)}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} B_{01} & B_{02} & \cdots & B_{0n} \\ A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}_{(2m+1) \times n} \quad (3.41)$$

En évaluant la vitesse  $\dot{\mathbf{Z}}(t)$  (obtenue à partir de la dérivation temporelle de l'équation 3.34) sur les points de collocation, nous pouvons écrire :

$$\dot{\mathbf{Z}} = \Omega \mathbf{TP}\tilde{\mathbf{C}} \quad (3.42)$$

où  $\mathbf{P}$  est une matrice tri-diagonale carrée d'ordre  $2m + 1$  définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,i+1} &= \frac{i}{2} \\ \mathbf{P}_{i+1,i} &= -\frac{i}{2} \end{aligned}, \quad i = 2, 4, \dots, 2m \quad (3.43)$$

En injectant les équations 3.40 et 3.42 dans l'équation du mouvement 3.33, nous avons :

$$\Omega \mathbf{TP}\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{R} + \mathbf{B}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{C}}) = \mathbf{F} (\mathbf{T}\tilde{\mathbf{C}}, t_k) \quad (3.44)$$

Le système d'équations 3.44 possède  $L \times n$  équations algébriques non-linéaires avec les  $(2m + 1)n$  inconnues représentant les coefficients de la série de Fourier de la réponse. Nous devons alors avoir  $L \geq (2m + 1)$  pour le calcul de ces inconnues.

### 3.3.4 Méthode de la balance harmonique AFT

L'extension de la méthode de la balance harmonique illustrée précédemment 3.3 aux systèmes à plusieurs degrés de liberté avec la prise en compte de plusieurs harmoniques, sous-harmoniques et superharmoniques dans la réponse et non-linéarités complexes peut être envisagée par une stratégie du type AFT ("Alternating Frequency Time"). Cette procédure a été formalisée par Cameron et Griffin [5], et consiste à évaluer les non-linéarités dans le domaine temporel, bien que le système d'équations algébriques non linéaires soit toujours résolu dans le domaine fréquentiel.

Pour présenter cette méthode, nous considérons le même système d'équations différentielles utilisé pour les méthodes précédentes :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{NL} (\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{F} \cos(\Omega t) = \mathbf{F} (\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \Omega, t) \quad (3.45)$$

En considérant que l'excitation harmonique amène le système à une réponse harmonique (même en considérant la présence de la non-linéarité), la réponse  $\mathbf{X}(t)$  peut-être écrite comme une série de Fourier tronquée à l'ordre  $m$  :

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^m \left( \mathbf{B}_k \cos\left(\frac{k}{\nu}\Omega t\right) + \mathbf{A}_k \sin\left(\frac{k}{\nu}\Omega t\right) \right) \quad (3.46)$$

où  $\nu$  est un entier qui permet de prendre en compte des sous harmoniques dans la réponse. Les forces d'excitation sont aussi supposées représentables par une série de Fourier d'ordre  $m$  :

$$\tilde{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{C}_0 + \sum_{k=1}^m \left( \mathbf{C}_k \cos\left(\frac{k}{\nu}\Omega t\right) + \mathbf{S}_k \sin\left(\frac{k}{\nu}\Omega t\right) \right) \quad (3.47)$$

Bien entendu, les efforts sont des fonctions de  $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \Omega, t)$ , mais nous allons par la suite écrire uniquement le temps comme variable indépendante afin d'alléger la notation. Les approximations de la solution harmonique et des efforts (équations 3.46 et 3.47) sont injectées dans l'équation du mouvement (équation 3.45), et les termes harmoniques de même fréquence sont équilibrés. Pour les termes constants (ou d'ordre 0), nous obtenons :

$$\mathbf{K}\mathbf{B}_0 = \mathbf{C}_0 \quad (3.48)$$

Pour le  $i$ -ème terme en sinus, nous avons :

$$\left( \mathbf{K} - \left(\frac{i}{\nu}\Omega\right)^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{A}_i - \left(\frac{i}{\nu}\Omega\right) \mathbf{D}\mathbf{B}_i = \mathbf{S}_i \quad (3.49)$$

Et pour le  $i$ -ème terme en cosinus :

$$\left(\frac{i}{\nu}\Omega\right) \mathbf{D}\mathbf{A}_i + \left( \mathbf{K} - \left(\frac{i}{\nu}\Omega\right)^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{B}_i = \mathbf{C}_i \quad (3.50)$$

Nous allons maintenant expliciter la méthode de la balance harmonique sans condensation des degrés de liberté linéaires par rapport aux degrés de liberté non linéaires, employable pour des systèmes de petite taille. Pour cela nous mettons sous forme matricielle les équations 3.48, 3.49 et 3.50 en considérant tous les harmoniques du développement en série de Fourier. Nous obtenons alors un système d'équations algébriques d'ordre  $(2m + 1)r$  (où  $r$  est le nombre de degrés de liberté du système) comme le montre l'équation 3.51 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & & & & & & \\ & \Lambda_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \Lambda_i & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \Lambda_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_i \\ \vdots \\ \Gamma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 \\ \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_i \\ \vdots \\ \Theta_m \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

où :

$$\begin{aligned}
 \Lambda_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{K} - ((i/\nu)\Omega)^2 \mathbf{M} & -((i/\nu)\Omega) \mathbf{D} \\ ((i/\nu)\Omega) \mathbf{D} & \mathbf{K} - ((i/\nu)\Omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \\
 \Gamma_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \\
 \Theta_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_i \\ \mathbf{C}_i \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Le système 3.51 peut-être écrit de manière compacte sous la forme :

$$\mathbf{H}(\mathbf{Z}, \Omega) = \Lambda \mathbf{Z} - \mathbf{b}(\mathbf{Z}) \tag{3.53}$$

Il s'agit d'un système non linéaire, car les vecteurs des coefficients de la série de Fourier des forces d'excitation sont implicitement fonctions des coefficients de Fourier de  $\mathbf{Y}$ . Pour construire cette relation implicite, nous utilisons la stratégie AFT, dont le principe est d'évaluer les fonctions non linéaires dans le domaine temporel pour calculer les coefficients de la série de Fourier dans le domaine fréquentiel. Cette stratégie est illustrée en figure 3.4.

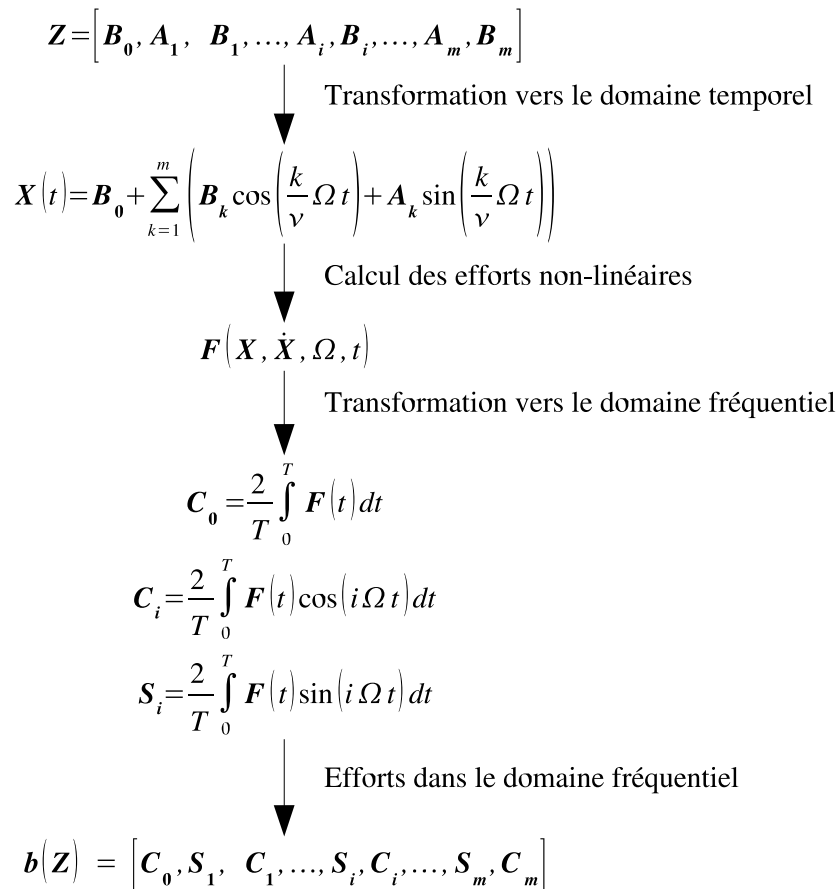


FIG. 3.4 – La procédure AFT

Nous commençons par estimer les coefficients de Fourier de  $\mathbf{Y}$  stockés dans le vecteur  $\mathbf{Z}$ . Ces coefficients sont utilisés pour la synthèse de  $\mathbf{Y}(t)$  qui, à son tour, sert au calcul des efforts non linéaires dans le domaine temporel. Les expressions temporelles des efforts non linéaires sont transformées dans le domaine fréquentiel en utilisant :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{F}(t) dt \\ \mathbf{C}_i &= \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{F}(t) \cos(i\Omega t) dt \\ \mathbf{S}_i &= \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{F}(t) \sin(i\Omega t) dt \end{aligned} \quad (3.54)$$

Les coefficients de Fourier (équation 3.54) sont stockés dans le vecteur  $\mathbf{b}(\mathbf{Z})$  et nous pouvons finalement calculer la fonction  $\mathbf{H}(\mathbf{Z}, \Omega)$ . La démarche pour construire les courbes de réponse du système consiste à chercher les zéros de  $\mathbf{H}(\mathbf{Z}, \Omega)$  (équation 3.53) sur la plage de fréquences désirée, ce qui peut être accompli au moyen d'un solveur d'équations algébriques non-linéaires comme la méthode de Newton-Raphson (Flannery et al. [18]), la méthode de Broyden (Broyden [4]), ou encore la méthode de Powell (Madson et al. [42]).

La méthode peut être couplée avec un schéma de condensation (Hahn et Chen [25]) : les degrés de liberté subissant des efforts non linéaires sont ainsi placés à la fin du vecteur de déplacement. Pour cela nous utilisons une matrice qui relie le vecteur  $\mathbf{X}$  et un nouveau vecteur  $\mathbf{Y}$  avec les degrés de liberté dans le nouvel ordre choisi. Nous avons alors :

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y} \quad (3.55)$$

En utilisant cette transformation des variables, l'équation du mouvement devient :

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{Y}} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{Y}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}, \Omega, t) \quad (3.56)$$

où :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{P}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}, \Omega, t) = \mathbf{P}^{-1} \left( \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{F} \cos(\Omega t) \right)$$

Dans cette nouvelle équation du mouvement, nous pouvons faire la partition des matrices selon les  $p$  degrés de liberté dits linéaires (dans le sens où ils ne sont pas liés directement aux efforts non-linéaires) et les  $q$  degrés de liberté dits non-linéaires ( $p + q = r$  où  $r$  est le nombre de degrés de liberté du système). Ceci conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{pp} & \tilde{\mathbf{M}}_{pq} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{qp} & \tilde{\mathbf{M}}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{Y}}_p \\ \ddot{\mathbf{Y}}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{pp} & \tilde{\mathbf{D}}_{pq} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{qp} & \tilde{\mathbf{D}}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}}_p \\ \dot{\mathbf{Y}}_q \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{pp} & \tilde{\mathbf{K}}_{pq} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{qp} & \tilde{\mathbf{K}}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p \\ \tilde{\mathbf{F}}_q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Donc, pour les termes constants, l'équation 3.48 partitionnée se met sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{pp} & \tilde{\mathbf{K}}_{pq} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{qp} & \tilde{\mathbf{K}}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{0p} \\ \mathbf{B}_{0q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{0p} \\ \mathbf{C}_{0q} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

où  $p$  et  $q$  indiquent les degrés de liberté linéaires et non linéaires, comme nous avons vu précédemment. Cette équation nous permet d'écrire  $\mathbf{B}_{0q}$  en fonction de  $\mathbf{B}_{0p}$  :

$$\left( \tilde{\mathbf{K}}_{qq} - \tilde{\mathbf{K}}_{qp} \tilde{\mathbf{K}}_{pp}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{pq} \right) \mathbf{B}_{0q} = \mathbf{C}_{0q} - \tilde{\mathbf{K}}_{qp} \tilde{\mathbf{K}}_{pp}^{-1} \mathbf{C}_{0p} \quad (3.59)$$

Pour avoir les équations 3.49 et 3.50 sous forme compacte, nous définissons :

$$\mathbf{Q}_i = \left( \tilde{\mathbf{K}} - \left( \frac{i}{\nu} \Omega \right)^2 \tilde{\mathbf{M}} \right) \quad (3.60)$$

$$\mathbf{R}_i = \left( \frac{i}{\nu} \Omega \right) \tilde{\mathbf{D}} \quad (3.61)$$

Avec ces nouvelles notations nous avons donc les  $i$ -ème termes en sinus et cosinus (comme précédemment en équations 3.49 et 3.50) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i & -\mathbf{R}_i \\ \mathbf{R}_i & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{B}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_i \\ \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

A partir de l'équation 3.62, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{T}_i \mathbf{B}_i = \mathbf{U}_i \quad (3.63)$$

$$\mathbf{T}_i \mathbf{A}_i = \mathbf{W}_i \quad (3.64)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i &= \mathbf{Q}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{R}_i \\ \mathbf{U}_i &= \mathbf{C}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{S}_i \\ \mathbf{W}_i &= \mathbf{S}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{C}_i \end{aligned} \quad (3.65)$$

De manière analogue à ce que nous avons fait pour retrouver l'équation 3.59, les coefficients de Fourier liés aux degrés de liberté non-linéaires (pour les  $i$ -ème termes en sinus et cosinus) sont :

$$\left( \mathbf{T}_{iqq} - \mathbf{T}_{iqp} \mathbf{T}_{ipp}^{-1} \mathbf{T}_{ipq} \right) \mathbf{B}_{iq} = \mathbf{U}_{iq} - \mathbf{T}_{iqp} \mathbf{T}_{ipp}^{-1} \mathbf{U}_{ip} \quad (3.66)$$

$$\left( \mathbf{T}_{iqq} - \mathbf{T}_{iqp} \mathbf{T}_{ipp}^{-1} \mathbf{T}_{ipq} \right) \mathbf{A}_{iq} = \mathbf{W}_{iq} - \mathbf{T}_{iqp} \mathbf{T}_{ipp}^{-1} \mathbf{W}_{ip} \quad (3.67)$$

Finalement, les équations 3.59, 3.66 et 3.67 sont mises sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \left( \tilde{\mathbf{K}}_{qq} - \tilde{\mathbf{K}}_{qp} \tilde{\mathbf{K}}_{pp}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{pq} \right) & & & & & \\ & \tilde{\Lambda}_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \tilde{\Lambda}_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tilde{\Lambda}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{0q} \\ \mathbf{\Gamma}_{1q} \\ \vdots \\ \mathbf{\Gamma}_{iq} \\ \vdots \\ \mathbf{\Gamma}_{mq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{0q} - \tilde{\mathbf{K}}_{qp} \tilde{\mathbf{K}}_{pp}^{-1} \mathbf{C}_{0p} \\ \mathbf{\Xi}_{1q} \\ \vdots \\ \mathbf{\Xi}_{iq} \\ \vdots \\ \mathbf{\Xi}_{mq} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

où :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{\Lambda}}_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{iqq} - \mathbf{T}_{iqp} \mathbf{T}_{ipp}^{-1} \mathbf{T}_{ipq} & \\ & \mathbf{T}_{iqq} - \mathbf{T}_{iqp} \mathbf{T}_{ipp}^{-1} \mathbf{T}_{ipq} \end{bmatrix} \\
\mathbf{\Gamma}_{iq} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{iq} \\ \mathbf{B}_{iq} \end{bmatrix} \\
\mathbf{\Xi}_{iq} &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{iq} - \mathbf{T}_{iqp} \mathbf{T}_{ipp}^{-1} \mathbf{W}_{ip} \\ \mathbf{U}_{iq} - \mathbf{T}_{iqp} \mathbf{T}_{ipp}^{-1} \mathbf{U}_{ip} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

L'équation 3.69 est un système d'ordre  $(2m + 1)q$  au lieu de  $(2m + 1)r$  pour le cas non condensé. Cette différence représente un gain en temps de calcul qui peut se révéler très intéressant si on considère que la solution du système d'équations non linéaires doit être résolue de façon itérative. Ceci peut représenter un gain tout à fait appréciable, car en général le nombre de degrés de liberté "non linéaires" est petit par rapport au nombre de degrés de liberté "linéaires".

La méthode de la balance harmonique possède des formes variées d'implémentation dont les différences par rapport à l'approche développée dans l'étude précédente se concentrent principalement sur la solution des systèmes algébriques non linéaires et sur la façon de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel. Cameron et Griffin [5] utilisent des FFT pour les changements de domaine et pour la solution du système d'équations algébriques, l'approche utilisée est la méthode de Newton-Raphson, sans écrire le système sous forme incrémentale, la matrice Jacobienne étant calculée par le solveur. Choi et Noah [9], Kim et al. [35] et Kim et Noah [33] utilisent aussi la méthode de la balance harmonique avec la méthode de Newton-Raphson et des expressions analytiques pour les termes de la matrice jacobienne.

Narayanan et Sekar [48] appellent la méthode de la balance harmonique "méthode de Fourier-Galerkin-Newton", car les non-linéarités sont évaluées dans le domaine temporel grâce à des transformées de Fourier ; l'équation du mouvement est transformée en un système d'équations algébriques non linéaires par l'application d'une procédure de Galerkin et les solutions du système d'équations algébriques sont obtenues à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. Cette méthode peut être couplée avec une technique de prédicteur type polynômes de Lagrange définis sur la coordonnée curviligne utilisée pour la continuation numérique. Cardona et al. [6] utilisent la même démarche mais ils emploient un prédicteur d'Euler avec contrôle de direction.

Enfin, il est bon de noter que les solutions obtenues avec les approches fréquentielles présentées ne permettent pas de savoir si la solution obtenue est stable ou instable. Il est donc nécessaire de se doter d'outils d'analyse permettant de lever cette inconnue.

### 3.3.5 Stabilité des solutions périodiques

La stabilité correspond à l'étude du comportement des systèmes autour d'une solution. La notion de stabilité est alors définie de la façon suivante (Nayfeh et Balachandran [49]) : la solution  $\mathbf{X}(t)$  est dite stable si, pour un petit  $\varepsilon$  donné, il existe  $\varphi = \varphi(\varepsilon) > 0$  tel que



*n'importe quelle autre solution  $\mathbf{V}(t)$  pour laquelle  $\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{V}(t)\| < \varphi$  évalué à  $t = t_0$  satisfait  $\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{V}(t)\| < \varepsilon$  pour  $t > t_0$ . En plus, si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}(t) - \mathbf{V}(t)\| \rightarrow 0$ , alors le système est asymptotiquement stable.*

L'étude de la stabilité dans le cas particulier des solutions périodiques se fait en général en étudiant l'évolution du système au voisinage de sa solution périodique. Deux stratégies sont alors envisageables. La première s'appuie sur la théorie de Floquet, où il est nécessaire de revenir dans le domaine temporel pour construire la matrice monodrome (Cardona et al. [6], Kim et Noah [33], Hahn et Chen [25]), et la deuxième approche purement fréquentielle où il s'agit d'estimer l'évolution de la solution périodique au cours du temps.

### Stabilité par Floquet

La théorie de Floquet est utilisée pour la détermination de la stabilité des systèmes d'équations linéaires à coefficients périodiques. Afin de l'utiliser pour les solutions périodiques obtenues avec des systèmes non linéaires, nous avons besoin de mettre les équations du mouvement sous forme incrémentale et linéariser les efforts par rapport aux incréments.

Nous allons reprendre l'équation générale du mouvement en regroupant tous les efforts dans le vecteur  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \quad (3.70)$$

En considérant une solution périodique  $\mathbf{X}_0$ , nous avons :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}_0 + \mathbf{D}\dot{\mathbf{X}}_0 + \mathbf{K}\mathbf{X}_0 = \mathbf{F}_0(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \quad (3.71)$$

La soustraction de l'équation 3.70 par l'équation 3.71 fournit :

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\Delta\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{F} \quad (3.72)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{X} &= \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \\ \Delta\mathbf{F} &= \mathbf{F} - \mathbf{F}_0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

La linéarisation de  $\Delta\mathbf{F}$  est faite en ne considérant que les termes d'ordre 1 de l'expansion de Taylor :

$$\Delta \mathbf{F} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0} \Delta \mathbf{X} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right|_{\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0} \Delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{B}_X \Delta \mathbf{X} + \mathbf{B}_{\dot{X}} \Delta \dot{\mathbf{X}} \quad (3.74)$$

L'équation 3.74 est injectée dans l'équation 3.72, et nous obtenons le système d'équations linéaires à coefficients périodiques :

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{D} - \mathbf{B}_{\dot{X}}) \Delta \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} - \mathbf{B}_X) \Delta \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.75)$$

Cette équation sous forme d'équations d'état d'ordre  $2r$  donne :

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{A} \mathbf{Q} \quad (3.76)$$

où :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} - \mathbf{B}_X) & \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{D} - \mathbf{B}_{\dot{X}}) \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t + T)$$

La matrice fondamentale de 3.76 est la matrice qui contient toutes ses solutions  $\mathbf{q}^{(j)}(t)$  :

$$\Phi(t) = [\mathbf{q}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{q}^{(2r)}(t)] \quad (3.78)$$

La matrice fondamentale obéit à l'équation 3.76, ce qui nous autorise à écrire :

$$\dot{\Phi} = \mathbf{A} \Phi \quad (3.79)$$

avec les conditions initiales :

$$\Phi(0) = \mathbf{I} \quad (3.80)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité d'ordre  $2r$ . La matrice fondamentale 3.78 correspond à la matrice monodrome quand celle-ci est calculée en  $t = T$ . Ses valeurs propres sont les multiplicateurs de Floquet et le système est stable quand la valeur absolue de tous les multiplicateurs est inférieure à 1.

Donc pour la construction de la matrice monodrome nous avons besoin d'intégrer les  $2r$  équations différentielles  $\dot{\mathbf{q}}^{(j)} = \mathbf{A} \mathbf{q}^{(j)}$ ,  $\mathbf{q}^{(j)}(0) = \mathbf{I}^{(j)}$ ,  $0 \leq t \leq T$ , pour  $1 \leq j \leq 2r$ . Une autre alternative consiste à faire l'intégration par l'exponentielle de matrices, en suivant la procédure de Friedmann (Cardona et al. [6]).

### Stabilité par analyse des perturbations dans le domaine fréquentiel

Les principaux avantages des méthodes fréquentielles sont le faible coût de calcul et la vitesse, par rapport à l'intégration directe. Pour préserver ces avantages, des méthodes d'évaluation de la stabilité directement dans le domaine fréquentiel ont été développées (Sinha [73], Groll et Ewins [23]).

Considérons sans perte de généralité que la non-linéarité est fonction du déplacement, ce qui nous donne l'équation du mouvement suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}\mathbf{Y} = \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{Y}) + \mathbf{F}_L \quad (3.81)$$

Avec la procédure de la balance harmonique à  $m$  harmoniques, nous pouvons écrire l'équation 3.81 en fonction de ses coefficients de Fourier :

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{Z} = \mathbf{b}_L + \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{Z}) \quad (3.82)$$

où  $\mathbf{\Lambda}$  est la matrice de raideur dynamique multi harmonique et  $\mathbf{Z}$  est le vecteur des coefficients de Fourier de la réponse ;  $\mathbf{b}_L$  et  $\mathbf{b}_{NL}(\mathbf{Z})$  sont les vecteurs des coefficients de Fourier des efforts linéaires et non linéaires, respectivement.

Considérons aussi que la solution périodique est perturbée par un terme périodique multiplié par un terme exponentiel :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^* + \mathbf{L}e^{\lambda t} \quad (3.83)$$

En injectant la perturbation dans l'équation du mouvement, nous trouvons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}}^* + \mathbf{D}\dot{\mathbf{Y}}^* + \mathbf{K}\mathbf{Y}^* + \\ e^{\lambda t} \left[ \lambda^2 \mathbf{M}\mathbf{L} + \lambda (2\mathbf{M}\dot{\mathbf{L}} + \mathbf{D}\mathbf{L}) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{L}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{L}} + \mathbf{K}\mathbf{L} \right] = \\ \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{Y}^* + e^{\lambda t}\mathbf{L}) \end{aligned} \quad (3.84)$$

L'application de la procédure de la balance harmonique à l'équation 3.84 nous amène à :

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{Z}^* + (\mathbf{\Lambda} + \lambda\mathbf{\Gamma}_1 + \lambda^2\mathbf{\Gamma}_2)\bar{\mathbf{Z}}e^{\lambda t} = \mathbf{b}_L + \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{Z}^* + e^{\lambda t}\bar{\mathbf{Z}}) \quad (3.85)$$

où  $\bar{\mathbf{Z}}$  est le vecteur regroupant les coefficients de Fourier de  $\mathbf{L}$  et :

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\mathbf{K}, \mathbf{\Lambda}_1, \dots, \mathbf{\Lambda}_m) \quad (3.86)$$

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \text{diag}(\mathbf{D}, \tilde{\mathbf{\Delta}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{\Delta}}_m) \quad (3.87)$$

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \text{diag}(\mathbf{M}, \dots, \mathbf{M}) \quad (3.88)$$

avec :

$$\mathbf{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - ((i/\nu)\Omega)^2 \mathbf{M} & -((i/\nu)\Omega) \mathbf{D} \\ ((i/\nu)\Omega) \mathbf{D} & \mathbf{K} - ((i/\nu)\Omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$\tilde{\mathbf{\Delta}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & -2((i/\nu)\Omega) \mathbf{M} \\ 2((i/\nu)\Omega) \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

La série de Taylor tronquée au terme de premier ordre de  $\mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X})$  nous fournit :

$$\mathbf{b}_{NL}(\mathbf{Z}^* + e^{\lambda t} \bar{\mathbf{Z}}) \approx \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{Z}^*) + \mathbf{J}_{\mathbf{b}_{NL}}(\mathbf{Z}^*) \cdot e^{\lambda t} \bar{\mathbf{Z}} \quad (3.91)$$

où  $\mathbf{J}_{\mathbf{b}_{NL}}$  est la matrice jacobienne de  $\mathbf{b}_{NL}$  évaluée sur la solution périodique  $\mathbf{Z}^*$ . En injectant l'équation 3.91 dans l'équation 3.85, nous obtenons le problème aux valeurs propres suivant :

$$(\lambda \mathbf{\Gamma}_1 + \lambda^2 \mathbf{\Gamma}_2 + \mathbf{\Lambda} - \mathbf{J}_{\mathbf{b}_{NL}}(\mathbf{Z}^*)) \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{0} \quad (3.92)$$

Les valeurs propres issues de 3.92 sont complexes. Si le système est stable, la partie réelle de toutes les valeurs propres est négative et la perturbation diminue en fonction du temps. Dans le cas contraire, si au moins une des valeurs propres possède une partie réelle supérieure à zéro, le système est instable.

Cette méthode présente l'intérêt de ne nécessiter aucun passage dans le domaine temporel, contrairement à la précédente. Par contre, elle nécessite un développement en série de Fourier de la perturbation  $\mathbf{L}$  dont la troncature peut jouer un rôle dans l'évaluation de la stabilité du système (tout comme la solution  $\mathbf{X}$ ).

### 3.4 Validation de la méthode HBM AFT

Nous allons maintenant illustrer et valider la méthode de la balance harmonique avec la stratégie AFT en utilisant un modèle de rotor Jeffcott comportant un roulement à billes

au milieu de l'arbre (Sinou et Thouverez [74], Sinou et al. [75]). La bague intérieure du roulement est fixée sur un disque et la bague extérieure est fixée à un stator élastique, comme illustré en figure 3.5. Les équations du mouvement du système sont :

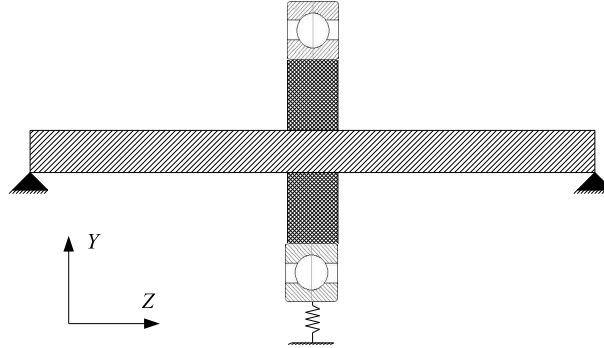


FIG. 3.5 – Rotor Jeffcott avec un roulement à billes non-linéaire

$$\begin{aligned}
 m_s \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s + k_s x_s &= F_x^R \\
 m_s \ddot{y}_s + c_s \dot{y}_s + k_s y_s &= F_y^R - m_s g \\
 m_r \ddot{x}_r + c_r \dot{x}_r + k_r x_r &= -F_x^R + m_u d_u \Omega^2 \cos(\Omega t) \\
 m_r \ddot{y}_r + c_r \dot{y}_r + k_r y_r &= -F_y^R + m_u d_u \Omega^2 \sin(\Omega t) - m_r g
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

où  $m$  est la masse,  $c$  est le coefficient d'amortissement visqueux et  $k$  est la raideur. L'indice  $r$  indique le rotor et  $s$  indique le stator. L'accélération de la gravité est indiquée par  $g$ ,  $m_u d_u$  définit le balourd et  $\Omega$  est la fréquence de rotation. Les forces  $F_x^R$  et  $F_y^R$  sont les forces du roulement et sont calculées selon le modèle cinématique défini au paragraphe 3.2.4.

L'équation 3.93 peut être écrite comme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \tag{3.94}$$

où  $\mathbf{F}$  est le vecteur :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_s g \\ 0 \\ -m_r g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_u d_u \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m_u d_u \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x^R \\ F_y^R \\ -F_x^R \\ -F_y^R \end{bmatrix} \tag{3.95}$$

Les paramètres de la simulation sont  $\omega_{0s} = 577.35 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{0r} = 141.42 \text{ rad/s}$ ,  $\zeta_r = 0.02$  et  $\zeta_s = 0.05$ . Le roulement possède  $N_b = 16$  billes de diamètre  $D = 20 \text{ mm}$ . Le rayon de la piste de roulement de la bague intérieure est  $R_i = 100 \text{ mm}$  et pour la bague extérieure,  $R_o = 120 \text{ mm}$ . Le jeu radial vaut  $\delta = 20 \mu\text{m}$  et pour le balourd nous avons pris  $m_u = 0.5 \text{ kg}$  et  $d_u = 0.10 \text{ m}$ .

L'application de la méthode de la balance harmonique nous fournit un système d'équations algébriques similaire à celui de l'équation 3.53. Nous supposons que  $\nu = 1$  dans les

équations 3.46 et 3.47. La solution du système est obtenue avec la méthode de Broyden [4], et la méthode est couplée à un prédicteur du type polynômes de Lagrange de troisième degré. La prédiction est basée sur les trois dernières solutions connues comme explicité par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_i^{(\text{pred})} = & \frac{(\Omega_i - \Omega_{i-2})(\Omega_i - \Omega_{i-1})}{(\Omega_{i-3} - \Omega_{i-2})(\Omega_{i-3} - \Omega_{i-1})} \mathbf{Z}_{i-3} + \\ & \frac{(\Omega_i - \Omega_{i-3})(\Omega_i - \Omega_{i-1})}{(\Omega_{i-2} - \Omega_{i-3})(\Omega_{i-2} - \Omega_{i-1})} \mathbf{Z}_{i-2} + \\ & \frac{(\Omega_i - \Omega_{i-3})(\Omega_i - \Omega_{i-2})}{(\Omega_{i-1} - \Omega_{i-3})(\Omega_{i-1} - \Omega_{i-2})} \mathbf{Z}_{i-1} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Le premier résultat qui nous intéresse est la courbe de réponse globale du système, illustrée en figure 3.6, et calculée avec une approximation à 5 harmoniques. La vitesse critique se situe vers 58.9 Hz. Dans cette étude, nous nous intéressons à la région comprise entre 10 Hz et 23 Hz, car il s'agit de la transition entre le mouvement au fond du roulement et le mouvement de précession sur la bague extérieure du roulement.

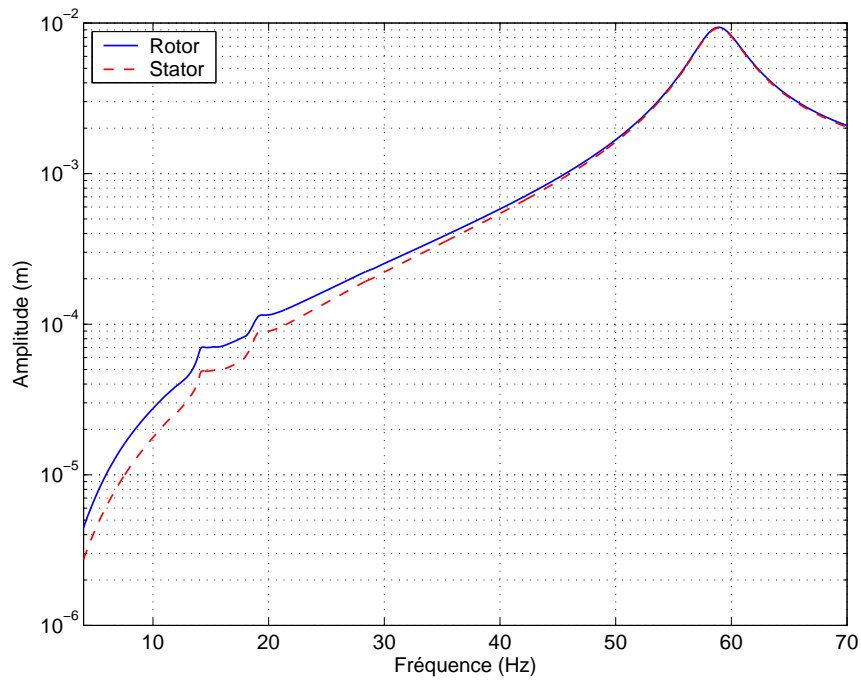


FIG. 3.6 – Courbes de réponse du rotor et du stator calculées avec 5 harmoniques (direction  $X$ )

Nous allons comparer les résultats fournis par la méthode HBM AFT avec une intégration directe pour valider la méthode. Pour l'intégration directe, nous utilisons un schéma aux différences finies centrées avec 3000 points par période et 1500 périodes pour chaque fréquence de rotation considérée. La figure 3.7 illustre la comparaison entre les deux méthodes et nous pouvons constater qu'il y a une bonne concordance entre les deux solutions (nous avons choisi de prendre 10 harmoniques pour le calcul fréquentiel).

Nous pouvons aussi regarder les orbites calculées par la méthode HBM AFT et par

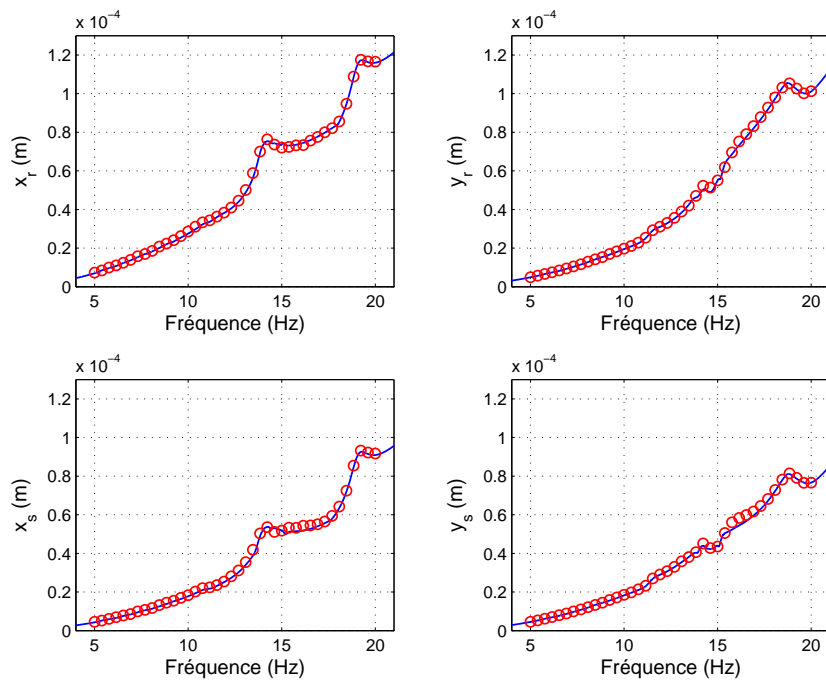


FIG. 3.7 – Comparaison d’amplitudes entre la balance harmonique à 10 harmoniques (–) et l’intégration directe (◦) (direction  $X$ )

l’intégration directe, toujours dans l’esprit de valider la méthode fréquentielle. Le premier cas considère le système à 10.4 Hz : les orbites sont montrées en figure 3.8. Nous voyons que les deux méthodes donnent des résultats très proches.

A 12.7 Hz (figure 3.9), l’orbite du stator possède une orbite hexagonale tandis que le rotor suit une orbite pentagonale. La comparaison entre les deux méthodes nous montre que la différence entre elles est assez faible. Pour la fréquence de rotation égale à 14.2 Hz (figure 3.10), nous avons des orbites plus complexes. Le rotor et le stator ont des mouvements en forme d’étoiles avec une boucle sur la partie inférieure gauche. La concordance entre les deux méthodes est raisonnablement bonne. Pour le dernier cas (système à 19.2 Hz, figure 3.11), nous voyons que les orbites possèdent deux lobes et que la concordance entre les deux méthodes est excellente. Au-delà de cette fréquence, l’harmonique 1 est de plus en plus fort par rapport aux harmoniques supérieures et les comparaisons entre l’intégration directe et la balance harmonique donnent toujours de très bons résultats.

Enfin, la figure 3.12 récapitule et illustre l’évolution des orbites dans l’intervalle de fréquence 10-20 Hz par rapport à la fréquence de rotation.

Dans cet exemple, comme la solution via l’intégration directe est connue, une analyse spectrale pourrait indiquer le nombre d’harmoniques requis pour obtenir une bonne approximation avec la balance harmonique. Mais, comme la solution est supposée inconnue, les figures 3.13 et 3.14 permettent d’évaluer l’influence de l’augmentation du nombre d’harmoniques sur l’écart entre la solution "balance harmonique" et "intégration directe". Le même genre de comparaison est fait pour le rotor à 19.2 Hertz (figures 3.15 et 3.16), montrant que la solution de référence peut être très bien approchée par la balance harmo-

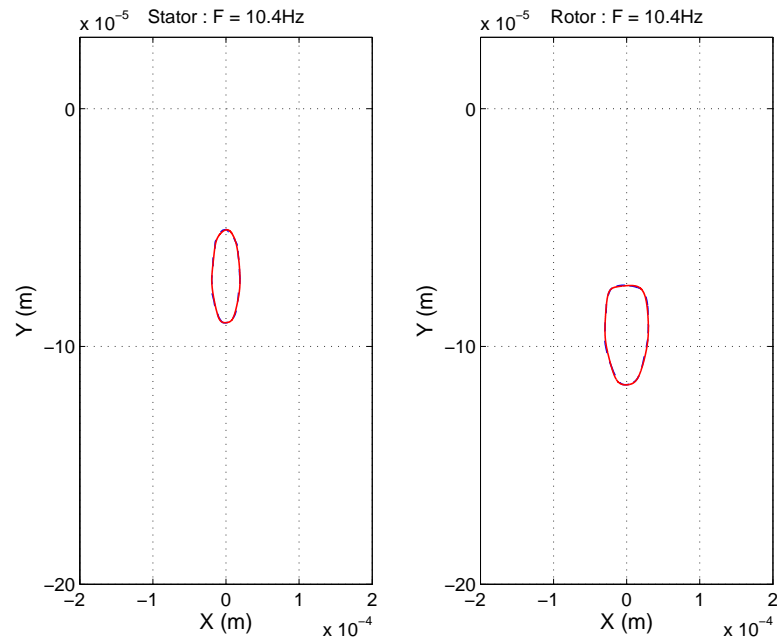


FIG. 3.8 – Comparaison entre les orbites - balance harmonique à 10 harmoniques (—) et l'intégration directe (---) - fréquence :10.4 Hz

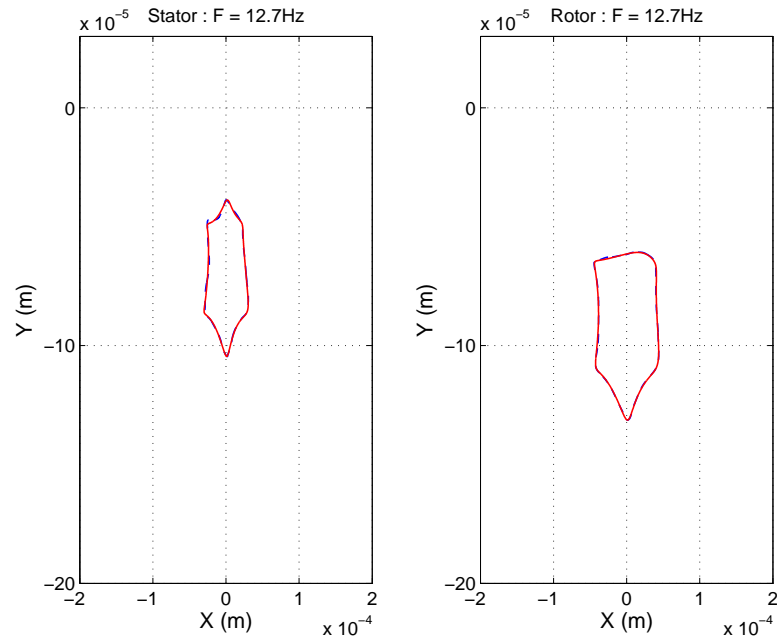


FIG. 3.9 – Comparaison entre les orbites - balance harmonique à 10 harmoniques (—) et l'intégration directe (---) - fréquence :12.7 Hz



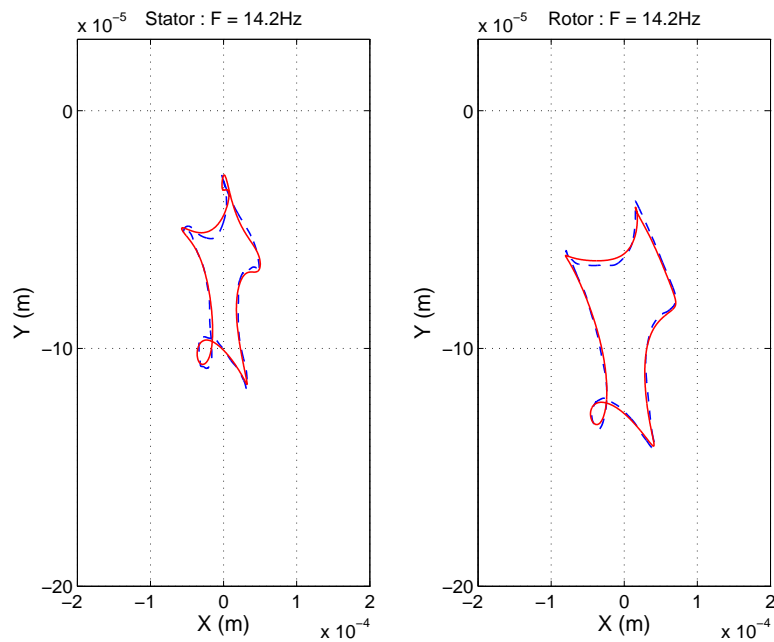


FIG. 3.10 – Comparaison entre les orbites - balance harmonique à 10 harmoniques (—) et l'intégration directe (---) - fréquence :14.2 Hz

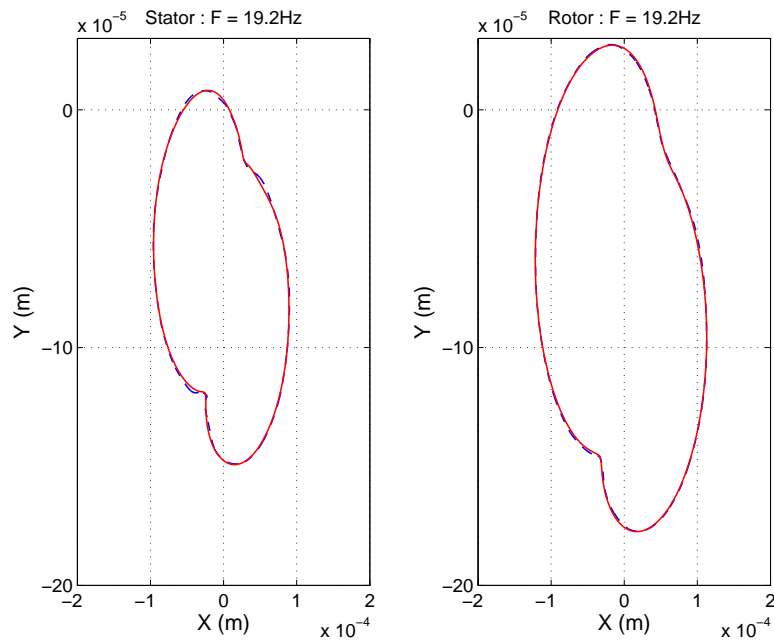


FIG. 3.11 – Comparaison entre les orbites - balance harmonique à 10 harmoniques (—) et l'intégration directe (---) - fréquence :19.2 Hz

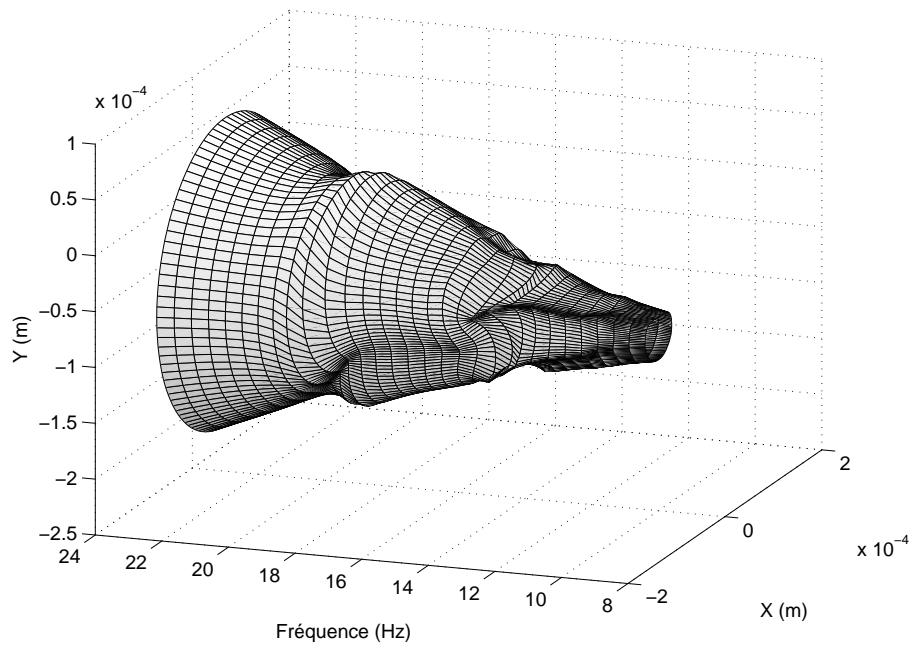


FIG. 3.12 – Evolution des orbites entre 10 Hz et 23 Hz, calculée avec 10 harmoniques

rique à 3 harmoniques.

Nous pouvons utiliser la solution de la balance harmonique pour étudier le comportement des billes du roulement lors de la prise de contact. Pour nous aider dans la compréhension de la prise de contact, nous allons définir pour chaque bille une fonction qui vaut 0 s'il n'y a pas de contact et 1 si le contact se produit. Nous évaluons cette fonction pour toutes les billes (sur une période de rotation de la cage) et le résultat est alors mis sous forme graphique.

Nous commençons avec une fréquence de rotation égale à 5 Hz. La figure 3.17(a) montre la fonction de prise de contact sur toutes les billes : nous pouvons voir qu'à un instant donné, il y a au moins 3 billes en contact avec la bague extérieure. Nous voyons aussi que le temps de contact pour chaque bille est à peu près le même pour toutes les billes. Finalement, vu que l'évolution du contact va de la bille 16 à la bille 1 et en considérant le sens de rotation de l'arbre, nous pouvons conclure que l'arbre est en train de tourner de manière presque homogène au fond du roulement. Ceci peut être vu à l'aide de la figure 3.17(b), où nous avons l'orbite relative et un cercle de rayon égal à  $\delta$ . Ce cercle délimite la frontière de contact. En dehors du cercle, le rotor est toujours en contact avec le stator et, à l'intérieur, le rotor n'est plus en contact. Ainsi, la figure 3.17(b) montre que le rotor est toujours en contact avec le stator au fond du roulement pour la fréquence de rotation considérée ici ( $F = 5$  Hz).

A 10.4 Hz (figures 3.18(a) et 3.18(b)), nous voyons que le contact se passe de façon plus privilégiée dans les régions des billes 6-7-8-9-10 et 15-16-1-2. L'orbite relative confirme le contact permanent et le rotor est toujours en train d'évoluer au fond du roulement.

A 14.2 Hz (figures 3.19(a) et 3.19(b) ), ces zones de contact sont plus importantes et

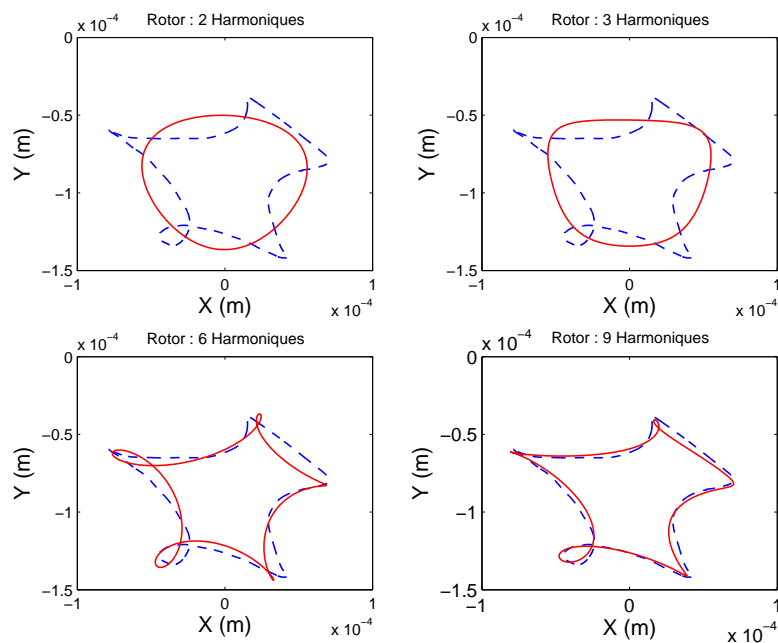


FIG. 3.13 – Comparaison entre les orbites du rotor pour  $F = 14.2$  Hz - balance harmonique (—) et l'intégration directe (---)

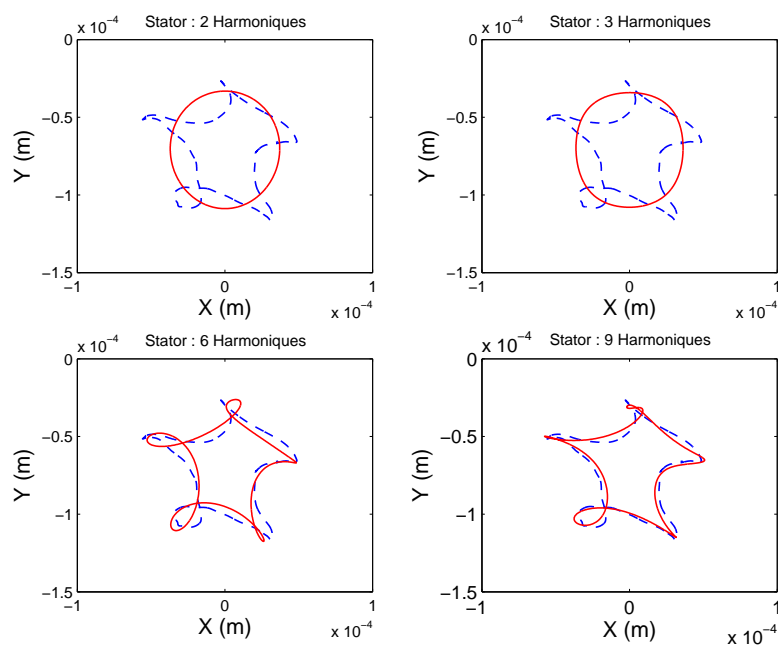


FIG. 3.14 – Comparaison entre les orbites du stator pour  $F = 14.2$  Hz - balance harmonique (—) et l'intégration directe (---)

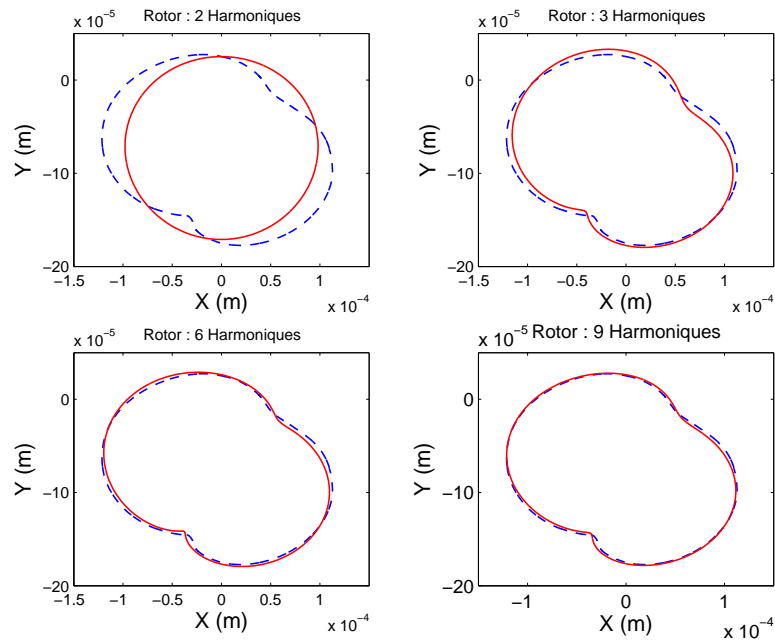


FIG. 3.15 – Comparaison entre les orbites du rotor pour  $F = 19.2$  Hz - balance harmonique (–) et l’intégration directe (– · –)

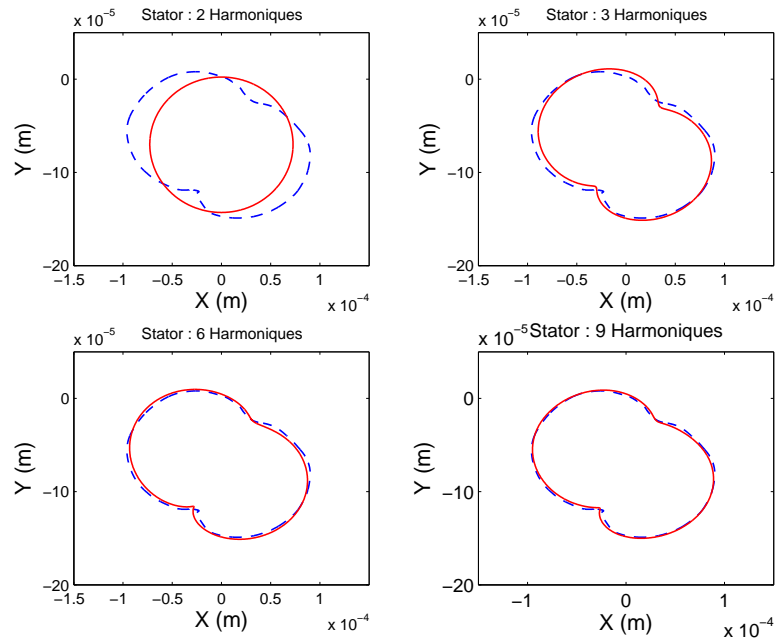


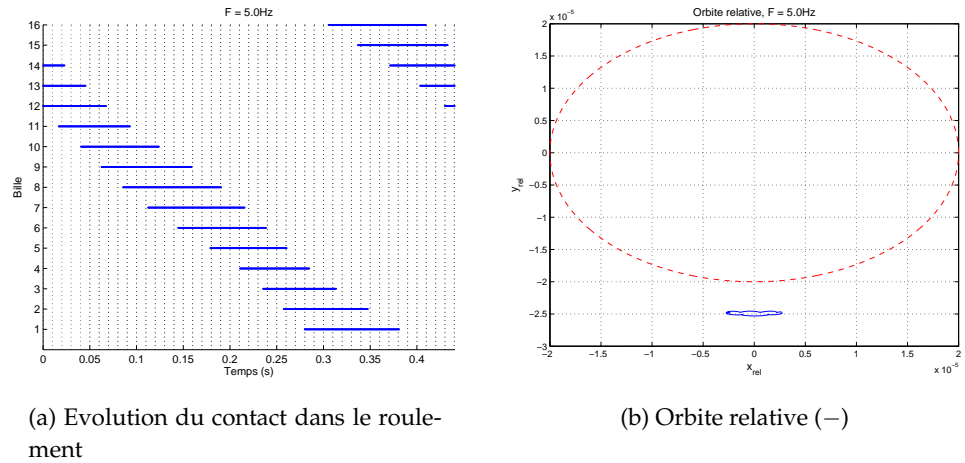
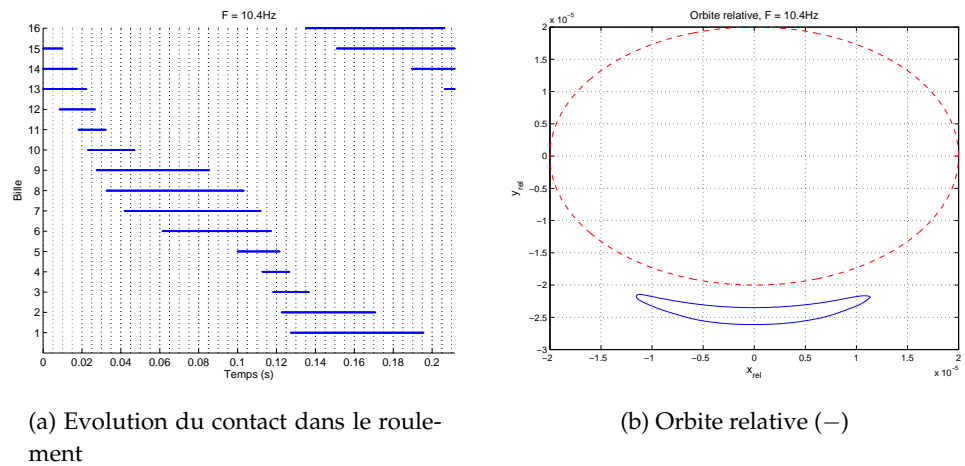
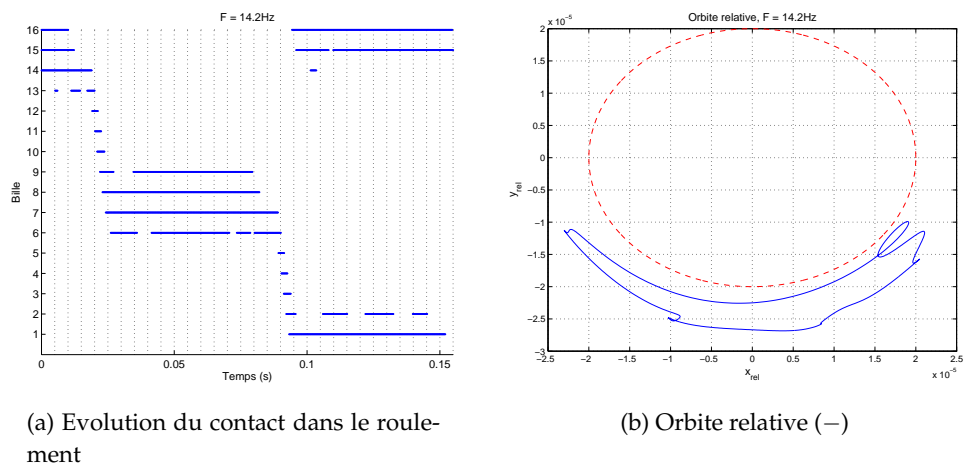
FIG. 3.16 – Comparaison entre les orbites du stator pour  $F = 19.2$  Hz - balance harmonique (–) et l’intégration directe (– · –)

nous avons des billes avec des contacts intermittents, comme les billes 2 et 13. Cependant, toutes les billes participent au mouvement. L'orbite relative s'approche de plus en plus de la frontière de contact.

A 14.5 Hz (figures 3.20(a) et 3.20(b)), nous avons déjà des pertes de contact sur les billes 4, 5 et 12. La perte de contact est confirmée sur le graphique de l'orbite relative. A 15 Hz (figures 3.21(a) et 3.21(b)), nous n'avons que des contacts en deux régions, et l'orbite relative nous confirme qu'une importante fraction du temps est sans contact. En plus, ce graphique nous indique que la zone de contact s'élargit et se produit sur presque la moitié de la bague extérieure.

Les régions sans contact du cas précédent commencent à reprendre contact à 15.5 Hz (figures 3.22(a) et 3.22(b)). Ce cas de figure nous rappelle le système à 14.5 Hz ; notons cependant que maintenant l'ordre de contact est inversé. Le graphique de l'orbite relative montre que le contact se produit sur presque toute la bague extérieure. Les figures 3.23-3.26 montrent progressivement la prise de contact et les orbites relatives indiquent le nouveau type de mouvement du système, c'est-à-dire, un mouvement de précession avec le jeu consommé.

En conclusion, la méthode de la balance harmonique a été validée par rapport à l'intégration directe et nous a permis de mettre en évidence les phénomènes de perte et de prise de contact pour un roulement à contact de Hertz et jeu radial. Nous avons vu que le rotor démarre avec un mouvement en fond du roulement. Avec l'évolution de la fréquence de rotation, nous observons une augmentation de l'amplitude angulaire du mouvement jusqu'au début des pertes de contact. Les régimes avec perte de contact sont caractérisés par deux régions dans le roulement avec contact et deux régions sans contact. En augmentant encore la fréquence, la fraction de temps sans contact atteint un maximum et diminue, pendant que le déplacement angulaire augmente encore. Finalement, l'orbite relative atteint une forme de cercle sans perte de contact.

FIG. 3.17 – Dynamique du roulement pour  $F = 5$  HzFIG. 3.18 – Dynamique du roulement pour  $F = 10.4$  HzFIG. 3.19 – Dynamique du roulement pour  $F = 14.2$  Hz

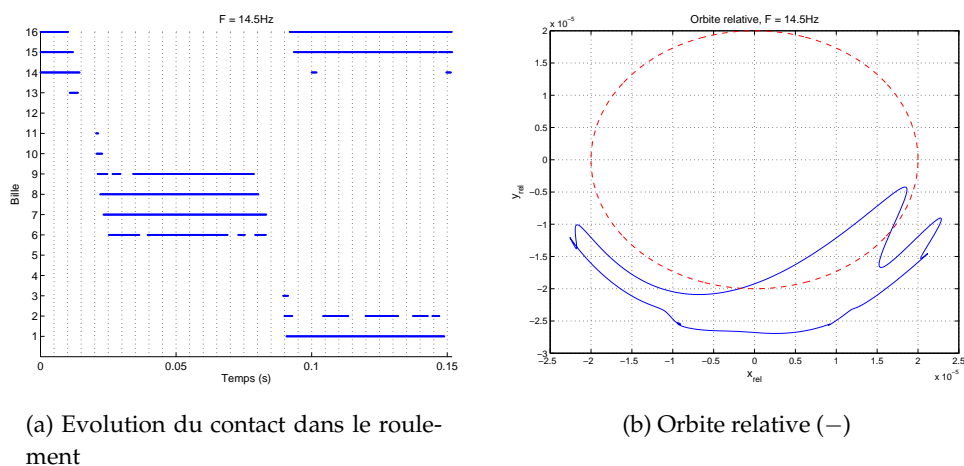


FIG. 3.20 – Dynamique du roulement pour  $F = 14.5$  Hz

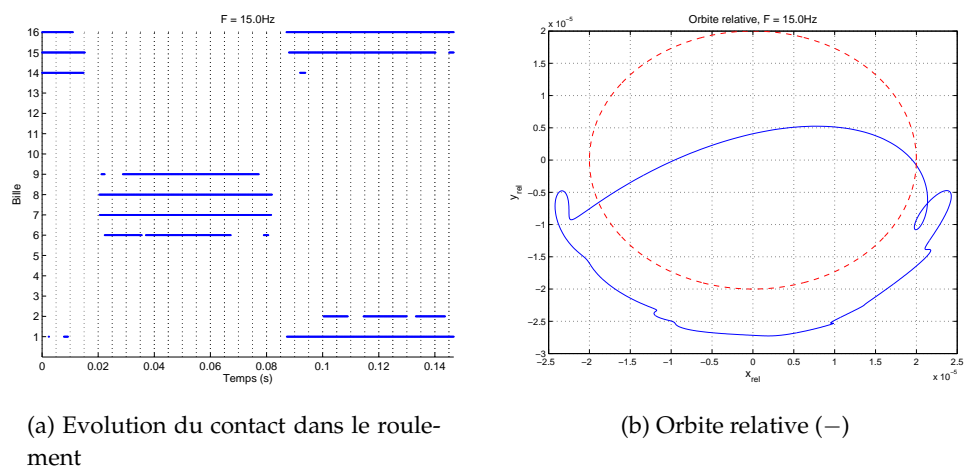


FIG. 3.21 – Dynamique du roulement pour  $F = 15$  Hz

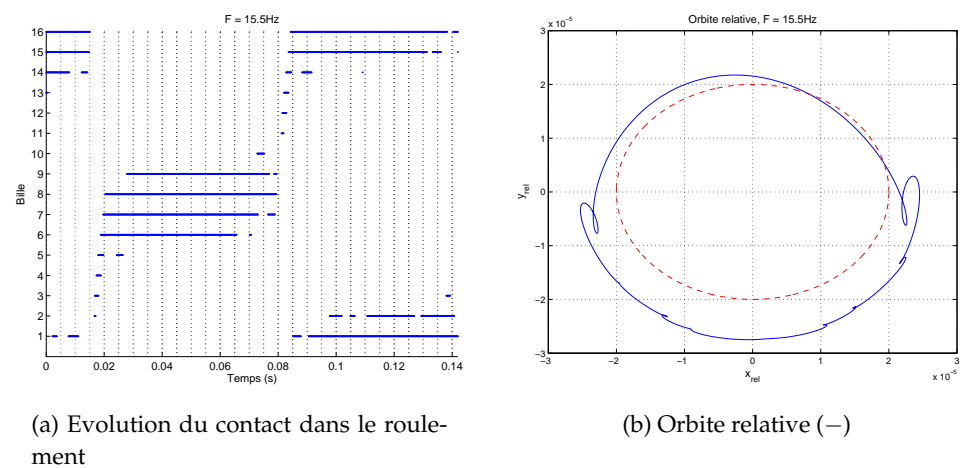
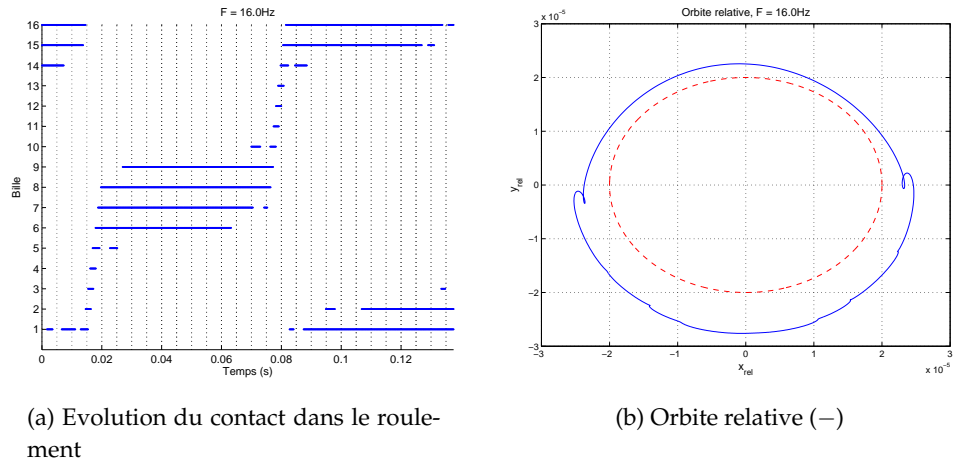
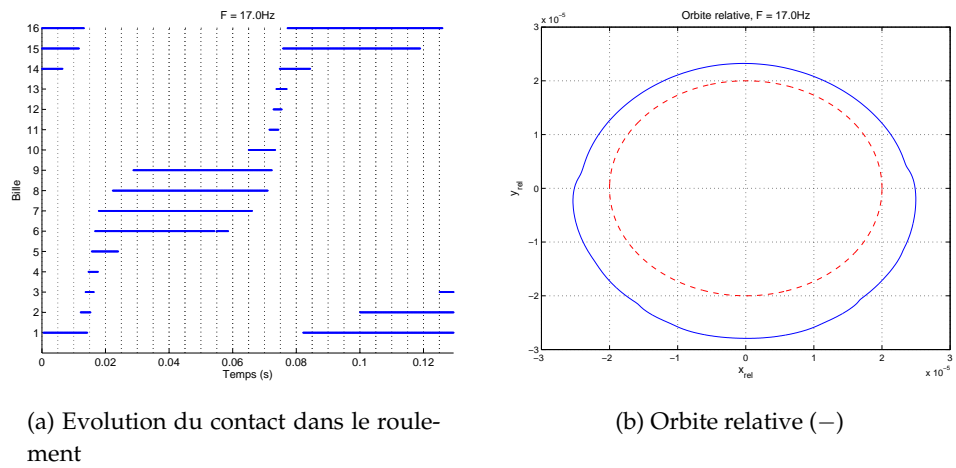
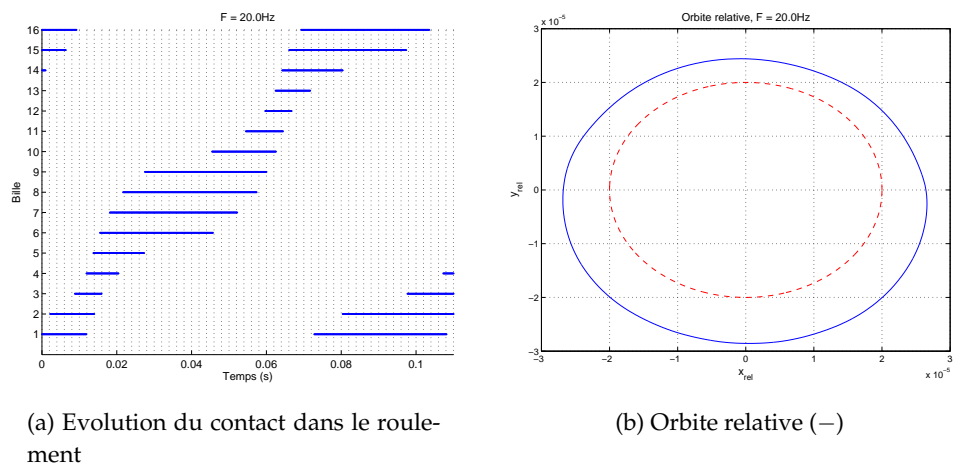
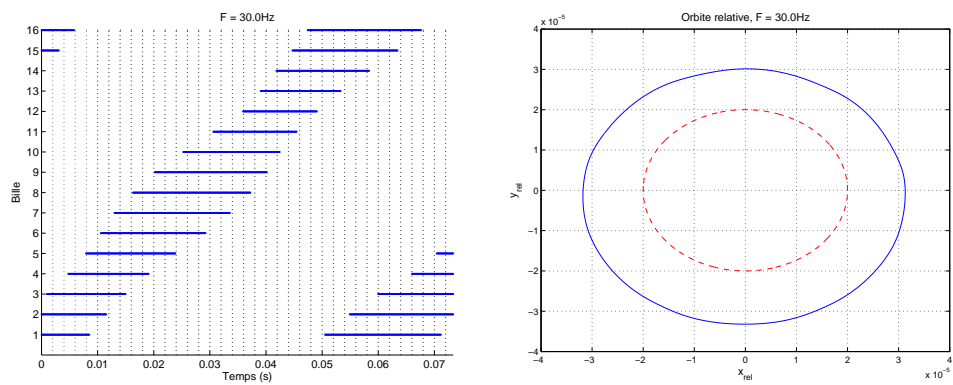


FIG. 3.22 – Dynamique du roulement pour  $F = 15.5$  Hz

FIG. 3.23 – Dynamique du roulement pour  $F = 16$  HzFIG. 3.24 – Dynamique du roulement pour  $F = 17$  HzFIG. 3.25 – Dynamique du roulement pour  $F = 20$  Hz





(a) Evolution du contact dans le roulement

(b) Orbite relative (—)

FIG. 3.26 – Dynamique du roulement pour  $F = 30$  Hz

### 3.5 Étude d'un modèle de rotor flexible avec un roulement non linéaire

Considérons le rotor illustré en figure 3.27. Le rotor est divisé en quatre sections : les sections 1 et 4 sont discrétisées en 2 éléments chacune et les sections 2 et 3, en 3 éléments. Les longueurs des sections sont  $L_1 = 0.222$  m,  $L_2 = 1.136$  m,  $L_3 = 0.146$  m et  $L_4 = 0.196$  m.

Le roulement à billes est choisi comme étant du type 6014 dont les dimensions caractéristiques pour le modèle sont :  $D = 11.906$ mm,  $d_i = 77.960$ mm,  $d_o = 89.866$ mm et  $f_i = f_o = 0.51$ . Ces quantités sont issues de mesures effectuées sur un modèle CAO du roulement, à l'exception de  $f_i$  et  $f_o$ , qui sont des estimations dont la valeur est dans la gamme des valeurs utilisées par Sopenan et Mikkola [77]. En utilisant la méthodologie de calcul de raideur présentée dans le paragraphe 3.2.1, nous trouvons une raideur radiale égale à  $4.6 \times 10^7$  N/m<sup>1.5</sup> pour l'ensemble bague intérieure/bille/bague extérieure. Nous utilisons le modèle de roulement incorporant la cinématique des éléments tournants. Le roulement à rouleaux est représenté par une raideur radiale linéaire de valeur  $7 \times 10^8$  N/m. Les masses totales des roulements à rouleaux et à billes sont  $m_{b1} = m_{b2} = 1.5$  kg.

Le balourd est mis uniquement sur le disque, sous la forme d'une masse de 2g excentrée de 20 cm. Les supports-paliers ont une raideur de flexion égale à  $3.8 \times 10^6$  N/m et une masse  $m_{s1} = m_{s2} = 6$  kg. Le joint d'accouplement est représenté par une raideur radiale qui vaut  $5.75 \times 10^4$  N/m et une masse  $m_J = 0.73$  kg.

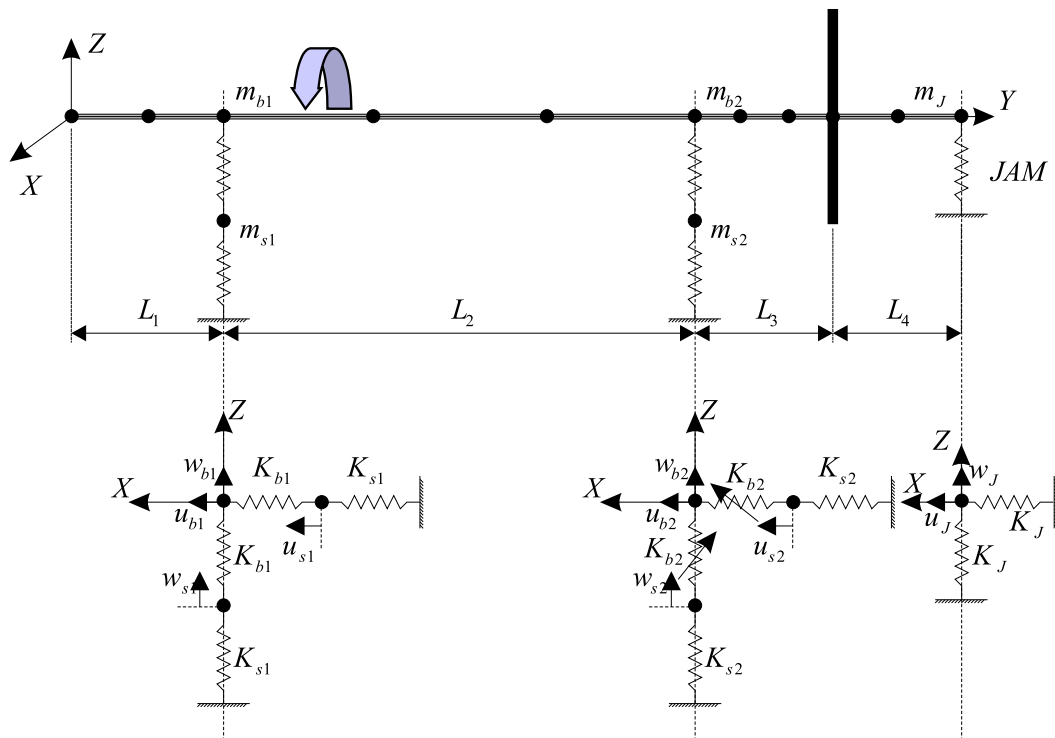


FIG. 3.27 – Schéma du rotor ( $K_b$  : raideur d'un roulement,  $K_s$  : raideur d'un support palier, JAM : joint d'accouplement)

L'application de la méthode des éléments finis détaillé en section 2.2 nous conduit à l'équation du mouvement du système suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{D} + \Omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_{NL} \quad (3.97)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement fixe,  $\mathbf{G}$  la matrice gyroscopique,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur,  $\mathbf{X}$  le vecteur des déplacements,  $\mathbf{F}_L$  le vecteur des forces de balourd et du poids de la structure et  $\mathbf{F}_{NL}$  le vecteur des forces non linéaires du roulement.

Le vecteur des déplacements est organisé de manière à avoir les degrés de liberté associés aux efforts non linéaires à la fin du vecteur :  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_p; \mathbf{X}_q]^t$ , avec  $p$  et  $q$  définies en section 3.3.4.

Le système discrétisé possède 48 degrés de liberté. Nous utilisons la procédure de condensation explicitée au paragraphe 3.3.4, en gardant les 8 degrés de liberté liés aux roulements (4 sur l'arbre et 4 sur les supports-paliers) comme degrés de liberté maîtres. Cependant, la non-linéarité considérée dans cet exemple n'agit que sur les 4 degrés de liberté associés au roulement à billes, mais le logiciel développé sous MATLAB permet de prendre en compte un système avec des non-linéarités sur les deux roulements.

Concernant l'ajout d'amortissement, nous introduisons tout d'abord un système linéaire associé au rotor non-linéaire. Ce système linéaire obtenu par la substitution du roulement non linéaire par une raideur linéaire radiale égale à  $4.6 \times 10^7$  N/m (correspondant à la raideur de l'ensemble bague extérieure-bille-bague intérieure) est utilisé pour construire une matrice d'amortissement de type Rayleigh  $\mathbf{D} = \alpha\tilde{\mathbf{M}} + \beta\tilde{\mathbf{K}}$ , où  $\tilde{\mathbf{K}}$  et  $\tilde{\mathbf{M}}$  correspondent aux matrices de raideur et masse du système linéaire. Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont choisis tels que les amortissements modaux sur le premier et le deuxième mode valent 0.005.

Dans les analyses qui suivent, la plage de fréquences de rotation varie de 0.002 Hz jusqu'à 52.5 Hz et le nombre de fréquences calculées dans cet intervalle est égal à 500. La méthode de résolution en régime permanent est la balance harmonique avec une stratégie AFT, où nous prenons 6 harmoniques multiples de la fréquence de rotation. Nous allons alors voir les courbes de réponse à balourd pour le cas où le roulement est dans la classe de jeu radial dite "normal" pour laquelle nous choisissons  $\delta = 10\mu\text{m}$  (catalogue NSK [54]). Les déplacements sont relevés au niveau du roulement pour le rotor et pour le stator. Une étude de stabilité sera réalisée sur les solutions obtenues en s'appuyant sur la procédure mise au point au paragraphe 3.3.5.

### 3.5.1 Courbes de réponse à balourd

Les figures 3.28 et 3.29 illustrent les réponses à balourd sur le rotor et sur le stator au niveau du roulement dans les directions horizontale et verticale, en considérant toutes les harmoniques jusqu'à l'ordre 6. Sur cette figure, nous recherchons la réponse en régime permanent pour une vitesse de rotation croissante ainsi que pour une vitesse de rotation décroissante.

Nous voyons que sur la courbe de montée en vitesse il existe deux sauts : entre 27.25 Hz et 27.56 Hz et entre 28.41 Hz et 28.62 Hz. Dans la courbe de descente les sauts se trouvent entre 28.41 Hz et 28.20 Hz et entre 27.04 Hz et 26.72 Hz. Nous voyons aussi que vers 4.2 Hz et 7.6 Hz il existe des sous harmoniques de faible intensité.

Concernant la stabilité, la courbe de montée en vitesse est instable entre 27.9 Hz et 28.3 Hz et entre 28.5 Hz et 29.8 Hz comme illustré en figure 3.30. Les points représentés sur ce graphique correspondent aux maximum des parties réelles des valeurs propres de l'équation 3.92 pour chaque vitesse de rotation. Pour la descente en vitesse, nous avons des zones instables dans les mêmes plages fréquentielles que sur les courbes de réponse de montée en vitesse. La figure 3.31 montre les zones d'instabilité sur la courbe de réponse horizontale du rotor. Nous voyons aussi que entre 27.04 Hz et 27.25 Hz, il existe des solutions stables doubles.

Nous avons regardé l'influence de l'ordre de troncature de la série de Fourier sur la détermination des plages d'instabilité, en réalisant des simulations avec 2, 3, 4 et 6 harmoniques. Nous avons augmenté le nombre de points de calcul entre 25.5 Hz et 31 Hz afin d'améliorer la résolution dans cette plage de fréquences, ce qui nous permettra de voir plus aisément les différences obtenues. L'évolution de la partie réelle maximale des valeurs propres de l'équation 3.92 est illustrée en figure 3.32, pour les simulations en vitesse décroissante.

Nous remarquons tout d'abord que la région principale d'instabilité (entre 28.5 Hz et 29.8 Hz) est bien trouvée par les quatre troncatures considérées. Cependant, la région d'instabilité comprise entre 27.9 Hz et 28.3 Hz n'est pas déterminée par le calcul avec 2 harmoniques seulement. De plus, en observant les courbes obtenues avec 3, 4 et 6 harmoniques, nous voyons que l'augmentation du nombre d'harmoniques amène à une convergence des prévisions des zones d'instabilité : en effet, nous notons que la solution obtenue avec 4 harmoniques est pratiquement coïncidente avec la solution à 6 harmoniques.

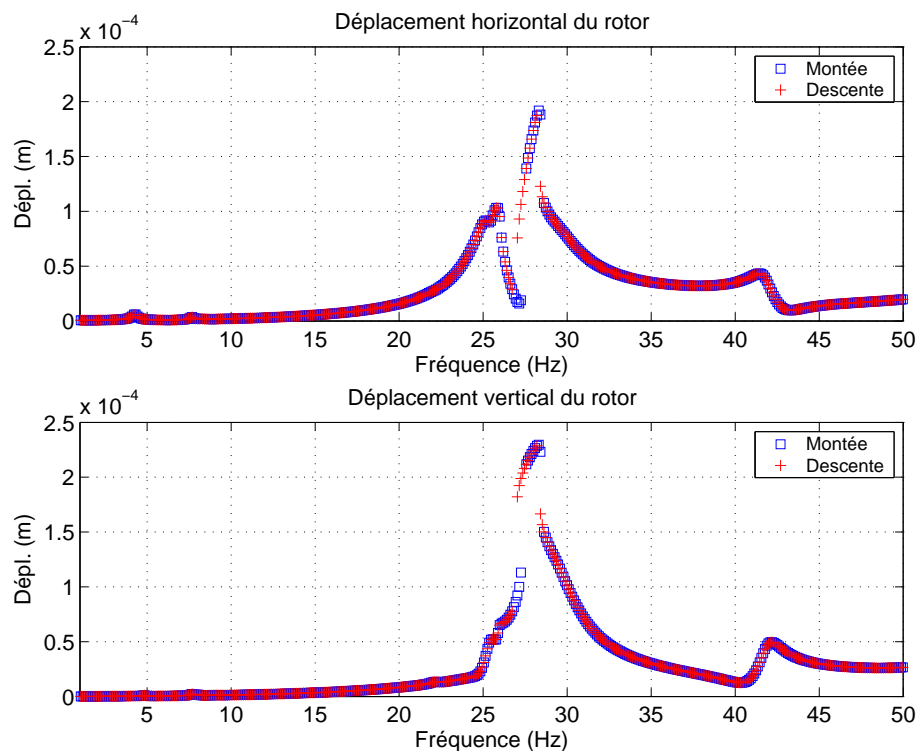


FIG. 3.28 – Déplacement du rotor au niveau du roulement à billes

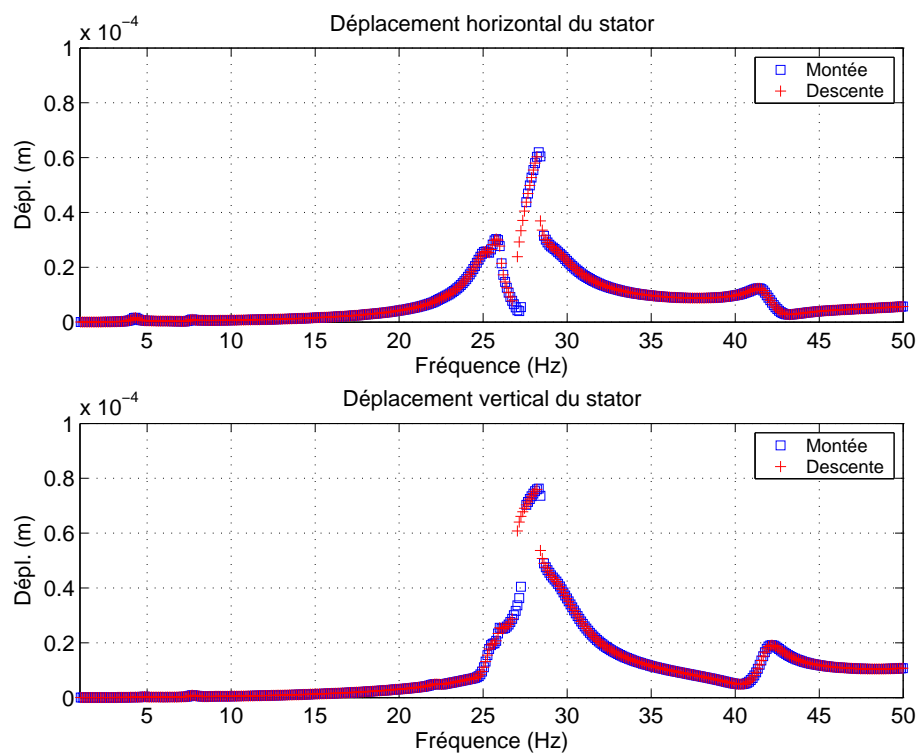


FIG. 3.29 – Déplacement du stator au niveau du roulement à billes

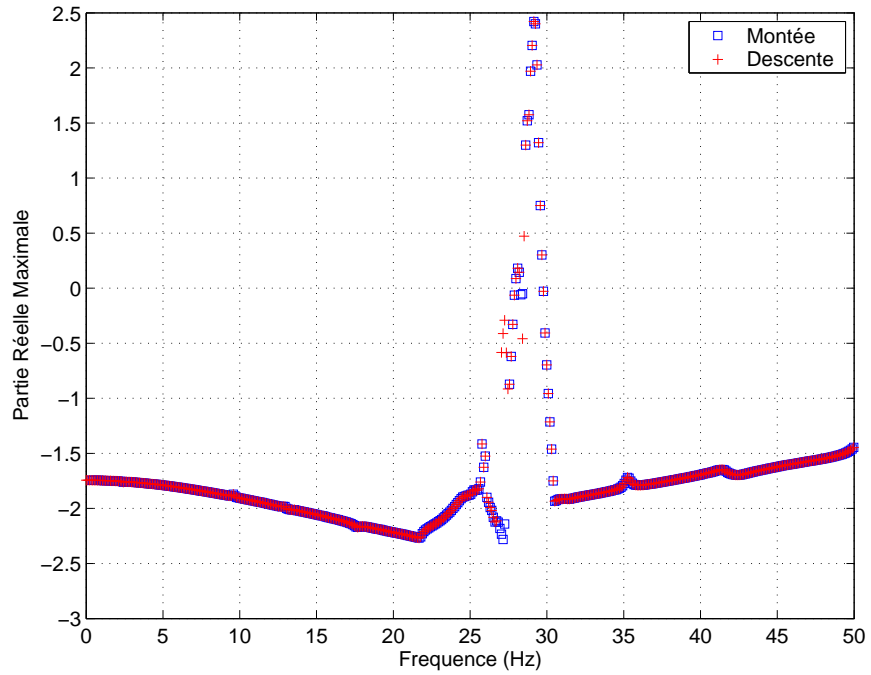


FIG. 3.30 – Régimes d’instabilité

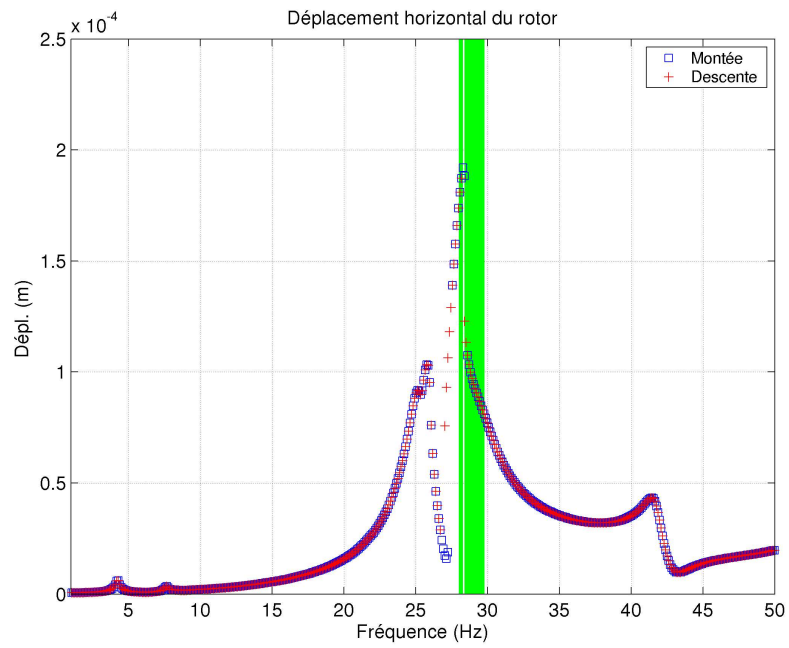


FIG. 3.31 – Régimes d’instabilité (sur la réponse à balourd)

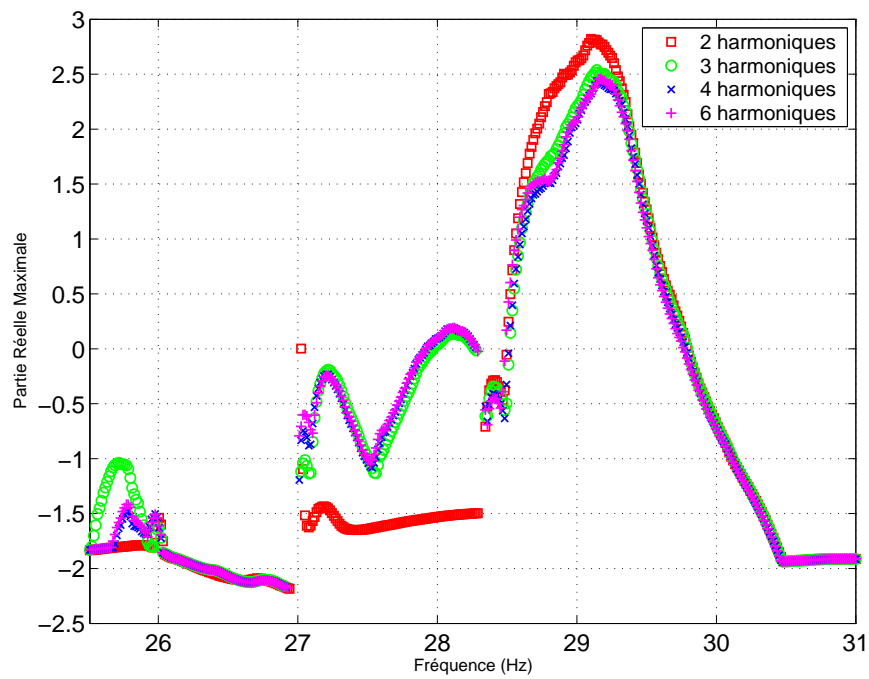


FIG. 3.32 – Influence du nombre d’harmoniques sur la détermination des régimes d’instabilité

### 3.5.2 Étude des orbites

Nous allons étudier dans ce paragraphe les orbites correspondantes aux points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* et *G* de la figure 3.33. Pour le dessin des orbites, nous n'utilisons pas la constante de la série de Fourier de manière ce que les orbites soient centrées autour de l'origine.

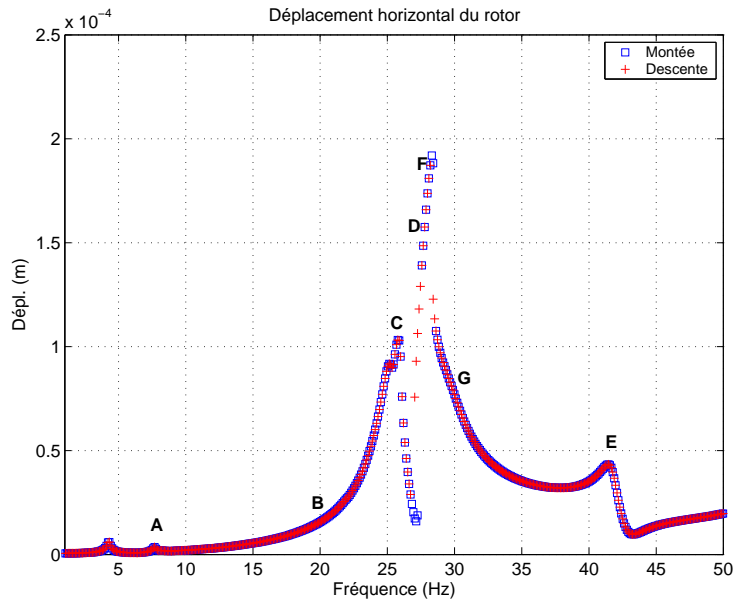


FIG. 3.33 – Repérage pour les orbites

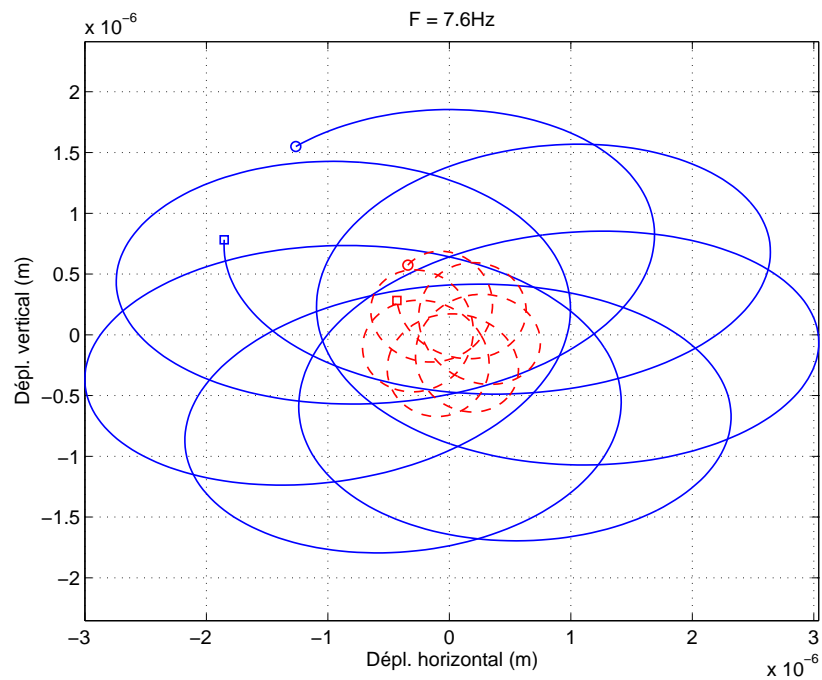
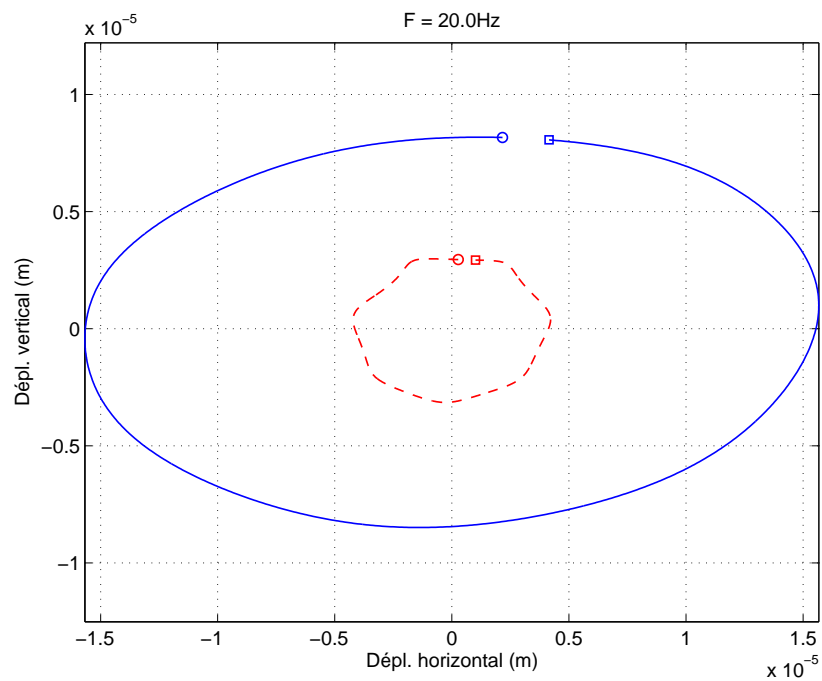
Le point A correspond au deuxième pic de super-harmonique d'ordre 6. Les orbites du rotor et du stator (figure 3.34) se montrent assez complexes et sont limitées à  $3\mu\text{m}$ .

Le point B (figure 3.35) correspond à une fréquence de rotation égale à 20 Hz. Notons que les orbites sont elliptiques et que le mouvement dans la direction verticale est plus restreint que dans la direction horizontale, indiquant un effet de dissymétrie dû au jeu radial et au poids du rotor. La précession est directe.

Sur le point C (figure 3.36), nous avons des orbites avec trois boucles. Sur le point D (figure 3.37), nous avons des orbites elliptiques en précession directe. Finalement, sur le point E (figure 3.38), les orbites sont elliptiques avec l'axe principal incliné à peu près de 45 degrés et la précession est rétrograde.

En ce qui concerne les orbites correspondantes aux courbes de descente en vitesse, nous avons les points F et G. Le point F correspond au point de maximum des courbes de réponse en descente. L'orbite est elliptique (figure 3.39) avec un axe principal très proche de la verticale. Finalement à 30.2 Hz (figure 3.40), nous n'avons pas de changements notables d'allure de l'orbite par rapport à l'orbite à 28.2 Hz.



FIG. 3.34 – Orbites du rotor et du stator à  $F = 7.6 \text{ Hz}$  (montée en vitesse, point A)FIG. 3.35 – Orbites du rotor et du stator à  $F = 20 \text{ Hz}$  (montée en vitesse, point B)

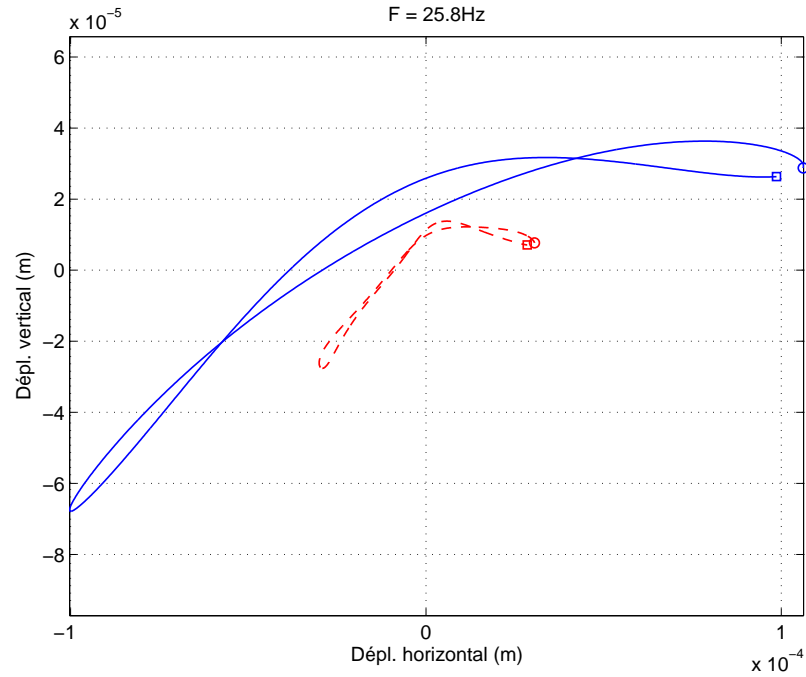


FIG. 3.36 – Orbites du rotor et du stator à  $F = 25.8$  Hz (montée en vitesse, point C)

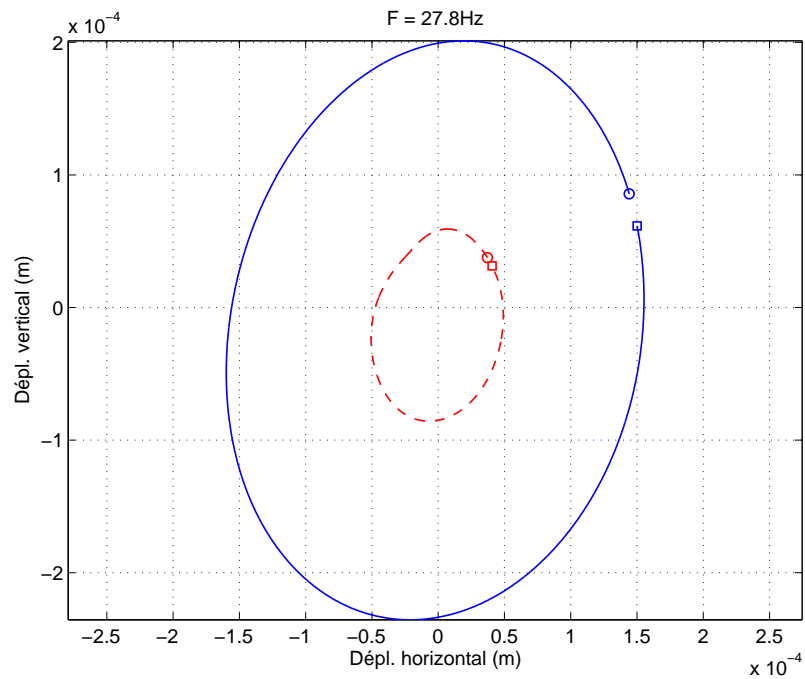
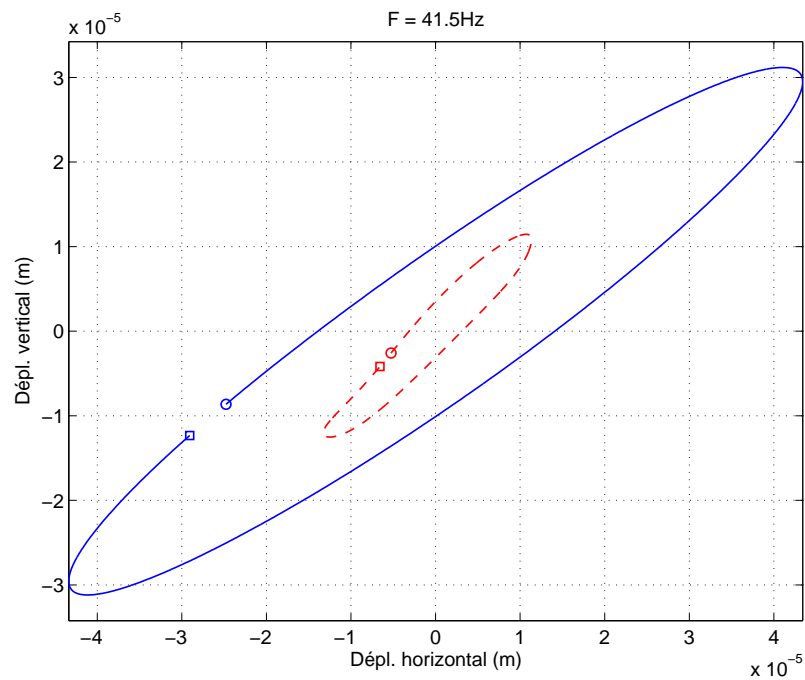
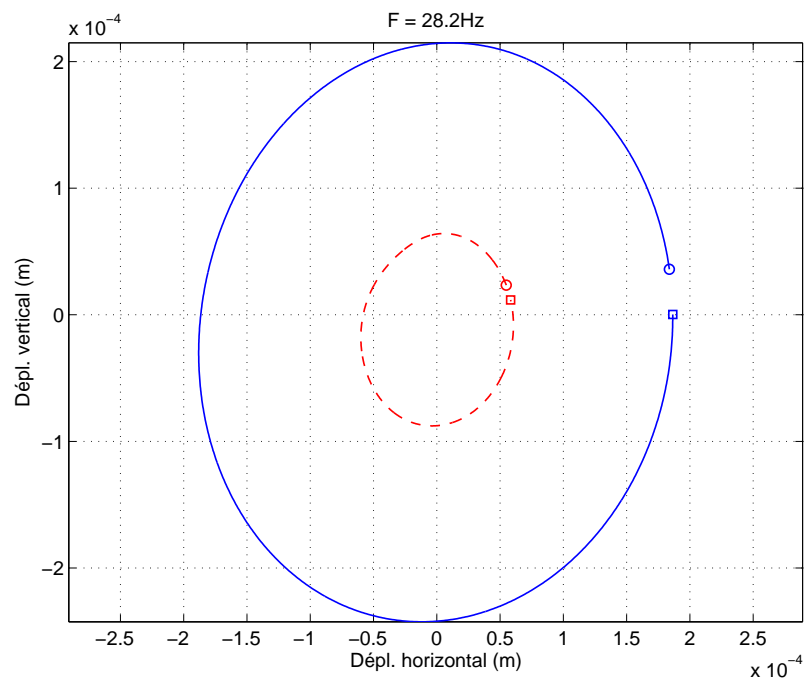


FIG. 3.37 – Orbites du rotor et du stator à  $F = 27.8$  Hz (montée en vitesse, point D)

FIG. 3.38 – Orbites du rotor et du stator à  $F = 41.5 \text{ Hz}$  (montée en vitesse, point E)FIG. 3.39 – Orbites du rotor et du stator à  $F = 28.2 \text{ Hz}$  (descente en vitesse, point F)

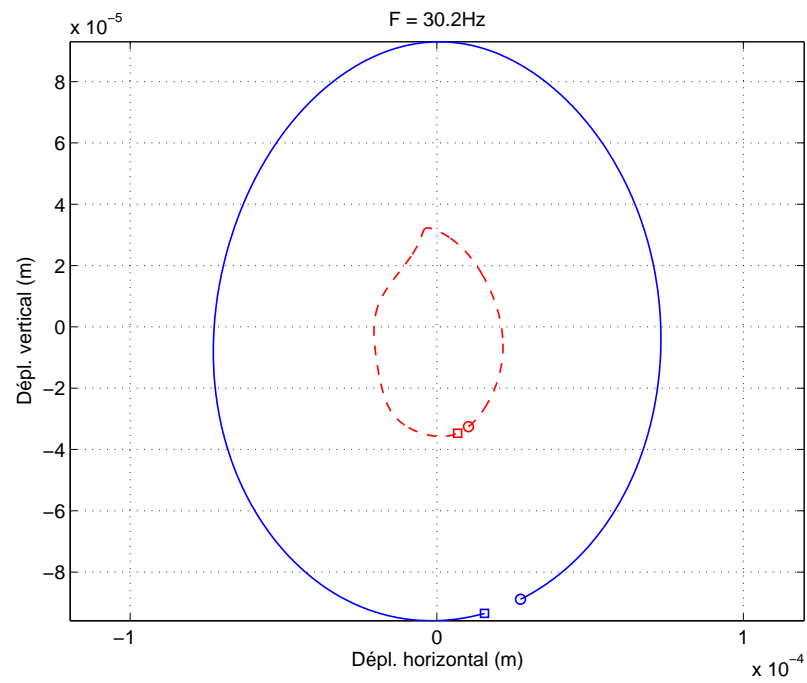


FIG. 3.40 – Orbites du rotor et du stator à  $F = 30.2$  Hz (descente en vitesse, point G)

### 3.5.3 Étude du contact dans le roulement

Nous abordons dans cette section la prise de contact des éléments roulants du roulement en utilisant la fonction de contact définie dans la section 3.4. Cette fonction est définie sur une période de rotation de la cage du roulement et vaut 1 si l'élément est en contact et 0 si le contact n'existe pas. La représentation graphique de cette fonction pour tous les éléments roulants nous montre comment le contact évolue dans le roulement.

Considérons tout d'abord le système à 7.6 Hz (figure 3.41(a)). Nous voyons que les éléments roulants possèdent tous à peu près le même temps de contact avec la bague extérieure du roulement et que l'ordre du contact va de la bille 14 à la bille 1. La figure 3.41(b) montre l'orbite relative du rotor par rapport au stator et la frontière de contact. Nous voyons alors que l'arbre est au fond du roulement et qu'il n'y a pas de perte de contact dans ce régime de fonctionnement.

À 20 Hz (figure 3.42), l'évolution du contact à l'intérieur du roulement se produit de la même façon qu'à 7.6 Hz, mais avec des niveaux plus importants que dans ce dernier cas. Quand le système est à 25.8 Hz (figures 3.43), nous observons des pertes de contact localisées sur les billes 1, 7, 8, 13 et 14. L'orbite relative possède trois boucles et indique que la précession se passe en dessous de l'axe de l'arbre non-déformé.

A 41.5 Hz (figures 3.44), nous n'avons pas de pertes de contact, mais celui-ci se produit de manière irrégulière, comme on le voit sur les durées de contacts sur chaque bille qui sont légèrement différentes les unes des autres. La précession est toujours en dessous de l'axe de l'arbre non déformé (la déformée statique prédomine sur la déformée dynamique).

Regardons maintenant les orbites relevées à partir des courbes de descente en vitesse. A 28.2 Hz (figure 3.45(a)), nous voyons que toutes les billes sont en régime de contact intermittent : les billes subissent quatre périodes de contact sur une période de rotation de la cage, à l'exception des billes 13 et 14, avec trois périodes de contact. L'orbite relative (figure 3.45(b)) indique une précession de l'arbre sur la bague extérieure du roulement, autour de l'axe de l'arbre non déformé.

Pour le système à 29.1 Hz (figure 3.46(a)), nous observons deux régions de perte de contact : entre 0.014s et 0.016s et entre 0.048s et 0.049s. Ces petites régions de perte de contact sont aussi vues sur la figure 3.46(b), où la frontière de contact est franchie par l'orbite relative.

A 30.2 Hz (figure 3.47(a)), nous voyons des régions de contact intermittent sur les billes 5, 6, 7, 12 et 13. L'orbite relative figure 3.47(b) indique que la précession se produit en dessous de l'axe de l'arbre non déformé.

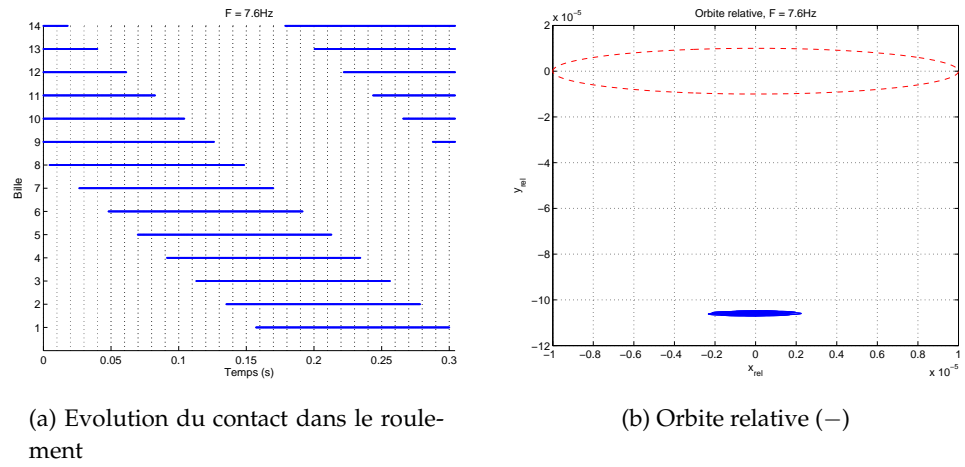


FIG. 3.41 – Dynamique du roulement pour  $F = 7.6$  Hz

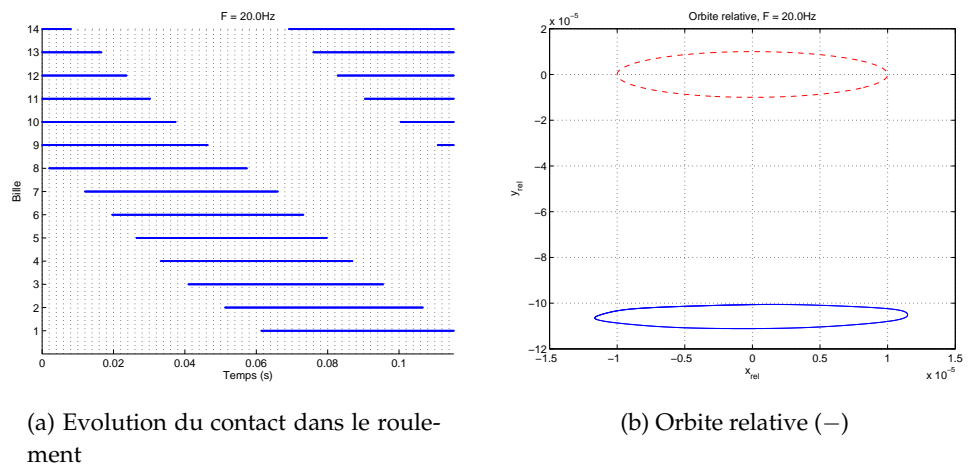


FIG. 3.42 – Dynamique du roulement pour  $F = 20$  Hz

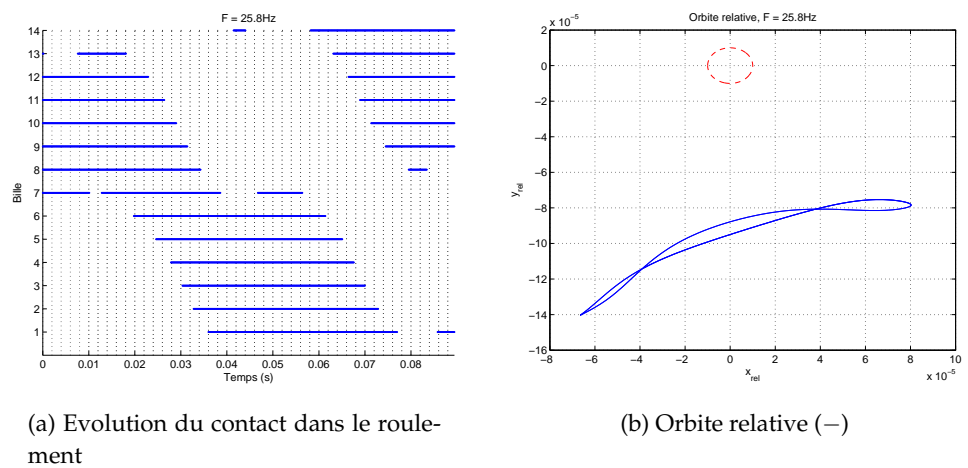


FIG. 3.43 – Dynamique du roulement pour  $F = 25.8$  Hz

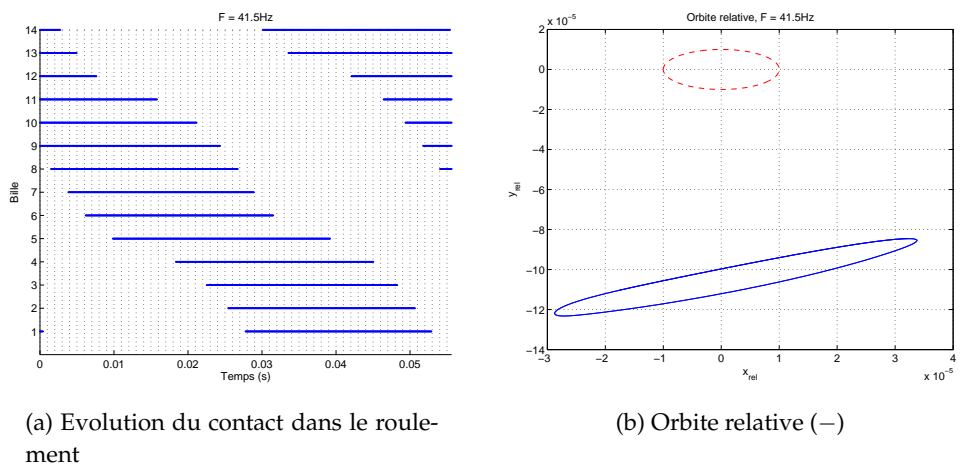


FIG. 3.44 – Dynamique du roulement pour  $F = 25.8$  Hz

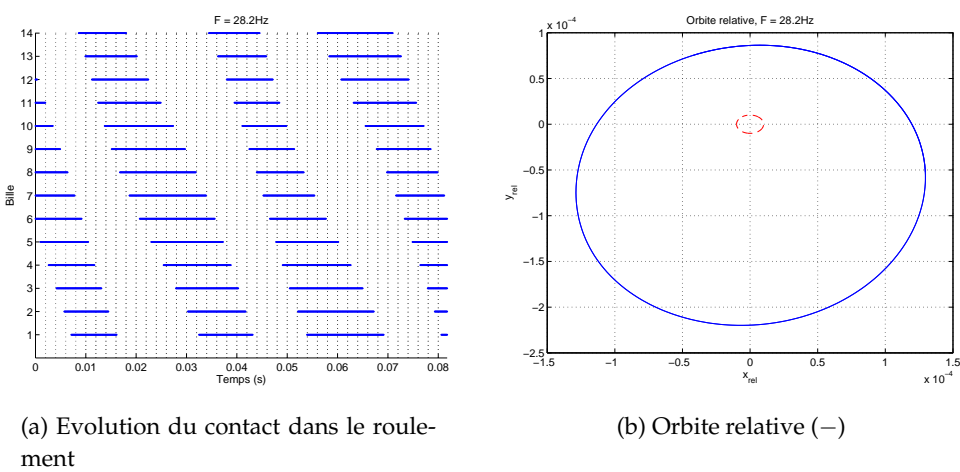


FIG. 3.45 – Dynamique du roulement pour  $F = 28.2$  Hz

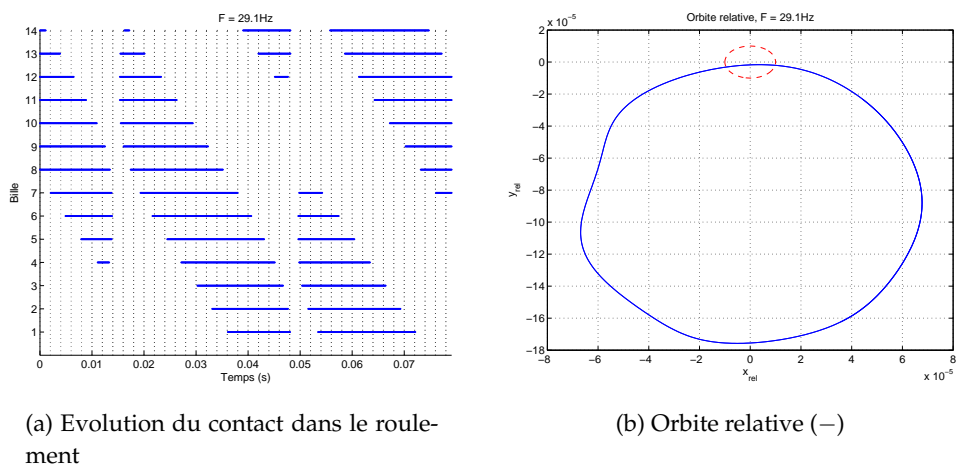
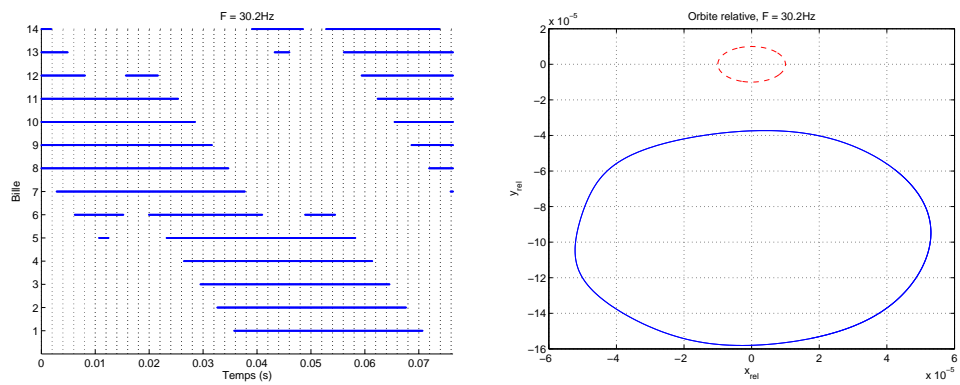


FIG. 3.46 – Dynamique du roulement pour  $F = 29.1$  Hz



(a) Evolution du contact dans le roulement

(b) Orbite relative (-)

FIG. 3.47 – Dynamique du roulement pour  $F = 30.2$  Hz



## 3.6 Modes non linéaires pour la dynamique des rotors

### 3.6.1 Introduction

Un des outils les plus couramment utilisés en dynamique des structures est l'analyse modale (Ewins [17], Newland [53]). Grâce à cet outil, nous pouvons découpler les équations du mouvement et étudier la dynamique du système au moyen d'un ensemble de problèmes plus simples pour ensuite construire la solution recherchée en utilisant une superposition de ces différents problèmes précédemment définis. En outre, si nous nous intéressons au comportement de la structure en basse fréquence, nous pouvons ignorer les modes qui ne sont pas excités ou faiblement excités dans l'ensemble de l'intervalle de fréquences considérées dans l'étude.

Pour les systèmes non linéaires, les développements scientifiques d'aujourd'hui ne nous permettent pas d'établir un principe de superposition générale ; cependant, le principe de l'analyse modale est possible à l'aide de la notion de modes normaux non linéaires. L'étude des modes normaux non linéaires commence au vingtième siècle. Rosenberg [67] formalise le concept en 1966, et plusieurs études ont suivi (Li et al.[40], Xie et al.[89], Vakkakis et al.[84], Yabuno et Nayfeh [93], Jézéquel et Lamarque [30], Lamarque [38]). Par exemple, Rand a étudié des systèmes à deux degrés de liberté et s'est intéressé aux problèmes de stabilité et à l'obtention de ces modes [63],[64],[62]. Szemplinska-Stupinicka [79] est parti des concepts de Rosenberg pour créer une méthode de calcul des modes normaux non linéaires à l'aide d'une procédure de Galerkin. Setio et Jézéquel [69] ont utilisé la base modale du système linéaire pour construire un problème de valeurs propres non linéaires dont la solution fournit les modes normaux non linéaires.

La définition des modes normaux non linéaires a été étendue par Shaw et Pierre [70] de manière à être aussi valide pour des systèmes dissipatifs ou possédant des termes gyroscopiques. L'idée de base de cette nouvelle définition provient de l'observation que les trajectoires modales d'un système linéaire sont contenues dans une surface plane bidimensionnelle. Pour un système non linéaire, la même idée est valide, mais la surface n'est plus obligatoirement plane. Nous disons alors que le mode normal est le mouvement qui se produit sur cette surface dite variété invariante ; en utilisant un développement asymptotique pour la description des variétés, on peut alors construire les modes normaux.

Les modes normaux ont été définis tout d'abord pour des systèmes discrets. Par la suite, la méthode des variétés invariantes a été élargie pour les systèmes continus (Shaw et Pierre [71]), pour des systèmes comportant des résonances internes (Pesheck et al. [47]) et pour des systèmes non linéaires avec excitation harmonique (Boivin et al. [3]), l'estimation des modes pouvant être réalisée de diverses manières, soit analytiquement, soit à l'aide d'une projection de Galerkin (Pesheck et al. [57],[56]).

### 3.6.2 Modes non linéaires classiques

Les modes normaux de vibration d'un système linéaire et la réponse forcée à une excitation périodique caractérisent et forment une classe de mouvements qui décrit dynamiquement le comportement du système. Dans le cas des systèmes non linéaires, les outils classiques liés au calcul des valeurs propres ne sont plus applicables, car l'énergie potentielle n'est pas représentable par une forme quadratique (Rosenberg [67]).

Cependant, avec une nouvelle définition pour les modes normaux de vibration (les modes non linéaires de Rosenberg [67]), nous pouvons trouver des mouvements des systèmes non linéaires dont la dynamique est analogue à celle des modes normaux pour les systèmes linéaires. Pour cela, il nous faut définir tout d'abord les systèmes pour lesquels les modes non linéaires peuvent être définis et aussi les types de chargement et mouvements admissibles dans cette nouvelle définition.

#### Systèmes et mouvements admissibles

Le système type pour l'étude des modes non linéaires est constitué d'un ensemble de masses interconnectées par des ressorts. De plus, toutes les masses sont "solidaires" dans le sens où le mouvement d'une masse est "senti" par toutes les autres masses. Chaque masse possède un degré de liberté et peut être excitée par une force.

Les ressorts doivent suivre les relations suivantes :

$$U_{ij}(w) = U_{ij}(|w|) \quad (3.98)$$

$$F_{ij}(w) = \frac{d}{dw} U_{ij}(w) \quad (3.99)$$

où  $U_{ij}$  est l'opposé de l'énergie potentielle du ressort  $S_{ij}$  qui connecte les masses  $i$  et  $j$ ;  $w$  est la variation de la distance entre les deux masses et  $F_{ij}$  est la force responsable de cette variation. A partir de ces équations, nous pouvons déduire que la force est une fonction impaire.

La fonction potentielle  $U$  du système est la somme de toutes les fonctions individuelles. Elle suit les conditions :

–  $U$  est négative définie :

$$U(0, \dots, 0) = 0$$

$U(x_1, \dots, x_n) < 0$ , si au moins un des déplacements est différent de zéro

– Les dérivées de  $U$  sont nulles seulement sur l'origine

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U(0, \dots, 0) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

- $U$  est symétrique par rapport à l'origine

$$U(x_1, \dots, x_n) = U(-x_1, \dots, -x_n)$$

Si la fonction potentielle respecte ces conditions, nous disons que cette fonction est admissible et le système correspondant est aussi admissible.

Pour les forces d'excitation, les conditions imposées sont

- Périodicité :  $f_i(t) = f_i(t + T)$
- Moyenne nulle :  $\frac{1}{T} \int_0^T f_i(t) dt = 0$

Les mouvements du système sont aussi restreints à obéir à certaines conditions :

- Mouvement périodique :  $x_i(t) = x_i(t + T)$  ,  $i = 1, \dots, n$
- Le système ne passe qu'une seule fois par l'origine dans une demi-période :  $\exists t_0 \in [t_r, t_r + T/2] \mid x_i(t_0) = 0$  ,  $i = 1, \dots, n$
- Les vitesses ne s'annulent qu'une seule fois dans une demi-période :  $\exists t_1 \neq t_0 \in [t_r, t_r + T/2] \mid \dot{x}_i(t_1) = 0$  ,  $i = 1, \dots, n$
- Les déplacements des masses  $i$  à l'instant  $t$  sont déterminés de manière unique par le déplacement de la masse  $r$  au même instant :  $x_i = x_i(x_r)$  ,  $i = 1, \dots, n$

Les mouvements satisfaisant ces conditions sont nommés mouvements admissibles, et les oscillations engendrées sont nommées "vibrations à l'unisson".

### Trajectoires admissibles

L'équation générale du système est écrite par l'intermédiaire de sa fonction potentielle :

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} U(x_1, \dots, x_n) + f_i(t) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (3.100)$$

L'espace où les solutions de 3.100 évoluent est nommé "espace de configuration".

Afin d'éliminer la dépendance temporelle des variables  $x_i(t)$  , nous utilisons la propriété énoncée précédemment  $x_i = x_i(x_r)$ , en prenant comme coordonnée de référence  $x_1$  :

$$x_j = x_j(x_1) \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (3.101)$$

La vitesse et l'accélération sont alors données par :

$$\dot{x}_j = \frac{dx_j}{dx_1} \dot{x}_1 = x'_j \dot{x}_1 \quad (3.102)$$

$$\ddot{x}_j = x'_j \ddot{x}_1 + x''_j \dot{x}_1^2 \quad (3.103)$$

où le prime indique la dérivation par rapport à  $x_1$  et le point, la dérivation par rapport au temps.

L'équation 3.100 combinée avec la relation  $\ddot{x}_i = \dot{x}_i \cdot (d\dot{x}_i/dx_i)$  nous fournit une nouvelle forme de l'équation du mouvement :

$$\dot{x}_i \frac{d\dot{x}_i}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} U(x_1, \dots, x_n) + f_i(t) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (3.104)$$

Dans les conditions de continuité et différentiabilité du système (théorème de la fonction inverse [87]), il existe un intervalle  $[x_i, X_i]$  (où  $X_i$  est l'extrémum de  $x_i$ ) pour lequel nous pouvons inverser  $x_i(t)$  pour obtenir :

$$t = t(x_i) \quad (3.105)$$

En sommant les  $n$  équations 3.104 et en intégrant le résultat sur l'intervalle  $[x_i, X_i]$ , nous obtenons alors l'équation d'énergie suivante :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2 = U(x_1, \dots, x_n) + h + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i(x_i, X_i) \quad (3.106)$$

où  $h$  est une constante d'intégration représentant l'énergie totale et  $F_i(x_i, X_i)$  est le travail de la force  $f_i$ ,

$$F_i(x_i, X_i) = \int_{X_i}^{x_i} f_i(t_i(x_i)) dx_i \quad (3.107)$$

A partir des équations 3.104 et 3.103, nous pouvons éliminer la dépendance temporelle de l'équation 3.106 :

$$\begin{aligned} 2 \left[ U(x_1, \dots, x_n) + h + \sum_{i=1}^n F_i(x_i, X_i) \right] x'_j + \\ + \sum_{k=1}^n x_k'^2 x'_j \left( \frac{\partial}{\partial x_1} U(x_1, \dots, x_n) + f_1(t_1(x_1)) \right) + \\ - \sum_{k=1}^n x_k'^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_j} U(x_1, \dots, x_n) + f_j(t_j(x_j)) \right) = 0 \quad (3.108) \end{aligned}$$

Dans les cas d'un système admissible autonome, l'équation 3.108 s'écrit sous la forme :

$$2[U(x_1, \dots, x_n) + h]x_j'' + \sum_{k=1}^n x_k'^2 \left( x_j' \frac{\partial}{\partial x_1} U(x_1, \dots, x_n) - \frac{\partial}{\partial x_j} U(x_1, \dots, x_n) \right) = 0 \quad (3.109)$$

Les solutions de l'équation 3.108 constituent les trajectoires admissibles du système non autonome représenté par l'équation 3.100. Et les solutions de 3.109 constituent les trajectoires admissibles du système non autonome correspondant.

Dans l'espace de configuration, la surface décrite par les extremums des trajectoires est nommée "surface limite" et elle est obtenue en prenant  $t = t_1$  dans l'équation de conservation de l'énergie :

$$U(x_1, \dots, x_n) + h + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i(x_i, X_i) = 0 \quad (3.110)$$

D'après les propriétés du "mouvement à l'unisson", les trajectoires admissibles passent par l'origine de l'espace des configurations et croisent la surface limite. A partir de l'équation 3.101, nous voyons alors que les trajectoires sont strictement monotones.

### Modes de vibration non linéaires

Rosenberg [67] définit un mode normal comme étant les vibrations à l'unisson d'un système autonome admissible, dont les trajectoires dans l'espace de configuration sont nommées lignes modales.

Les lignes modales pour les systèmes linéaires et pour les systèmes non linéaires à modes dits "similaires" sont des lignes droites. Dans le cas des systèmes non linéaires à modes non similaires, les lignes modales sont des courbes monotones.

Nous allons illustrer le calcul des modes non linéaires à partir d'un exemple simple [83].

Considérons le système défini par les équations :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 + x_1^3 + K(x_1 - x_2)^3 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + x_2 + x_2^3 - K(x_1 - x_2)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.111)$$

Les modes similaires sont obtenus en supposant que la dépendance entre  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  est linéaire :

$$x_2(t) = cx_1(t) \quad , \quad c \neq 0 \quad (3.112)$$

Nous injectons l'équation 3.112 dans les équations du mouvement pour éliminer le degré de liberté  $x_2$  :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 + \left[1 + K(1-c)^3\right] x_1^3 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + x_1 - (1/c) \left[K(1-c)^3 + c^3\right] x_1^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.113)$$

Comme ces deux équations représentent le même mouvement, nous pouvons les égarer et déduire l'équation suivante :

$$K(1+c)(c-1)^3 = c(1-c^2) \quad (3.114)$$

Les solutions de l'équation 3.114 sont :

$$c_{1,2} = \pm 1 \quad , \quad c_{3,4} = \frac{1}{2K} \left(2K - 1 \pm \sqrt{-4K + 1}\right)$$

Les solutions  $c_{1,2} = \pm 1$  correspondent aux modes similaires en phase et en opposition de phase du système. Ce sont les mêmes modes que ceux du système linéaire correspondant. Les solutions  $c_{3,4}$  sont valides si nous avons  $K \leq 0.25$ . Nous avons alors pour  $0 < K \leq 0.25$  la possibilité d'existence de quatre modes normaux. Cet exemple montre la possibilité pour un système non linéaire d'avoir plus de modes que de degrés de liberté.

Une autre approche pour le calcul des modes non linéaires similaires est présentée par Gibert [21] et Szemplinska-Stupinicka [79]. Dans leur approche, les modes non linéaires sont calculés à l'aide de la méthode de Ritz, afin d'éviter la résolution de l'équation de la trajectoire 3.108, toujours difficile à réaliser. Pour illustrer la méthode, considérons un système autonome conservatif dont les équations du mouvement sont :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.115)$$

où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices de masse et raideur correspondantes à la partie linéaire,  $\mathbf{x}$  est le vecteur des déplacements et  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  est le vecteur des forces non linéaires conservatives. Les solutions des modes non linéaires sont :

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{u}(t) = u_r(t) \bar{\mathbf{b}} \quad (3.116)$$

où  $u_r(t)$  est une coordonnée de référence et  $\bar{\mathbf{b}}$  est un vecteur constant dont nous pouvons fixer la  $r$ -ième coordonnée comme étant égale à 1. La coordonnée  $u_r(t)$  est approchée par une fonction harmonique de pulsation  $\bar{\omega}$  et d'amplitude  $U_r$  :

$$u_r(t) = U_r \cos(\bar{\omega}t) \quad (3.117)$$

Cette hypothèse, qui n'existe pas dans la théorie de Rosenberg, est légitime dans la mesure où l'on ne s'écarte pas trop d'un comportement monoharmonique.

Le problème consiste maintenant à trouver, pour une amplitude  $U_r$  donnée, la pulsation  $\bar{\omega}$  et le vecteur  $\bar{\mathbf{b}}$  de telle façon que l'équation 3.116 soit solution de l'équation du mouvement.

En employant la méthode de Ritz, nous pouvons trouver :

$$(-\bar{\omega}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \bar{\mathbf{b}} + \frac{1}{\pi U_r} \int_0^{2\pi} f(U_r \bar{\mathbf{b}} \cos(\theta)) \cos(\theta) d\theta = 0 \quad (3.118)$$

L'équation 3.118 constitue un système d'équations algébriques non linéaires ayant comme inconnues les composantes de  $\bar{\mathbf{b}}$  et la pulsation  $\bar{\omega}$ . Comme il s'agit d'un système non linéaire, il est possible d'avoir un nombre de modes de vibration plus grand que le nombre de degrés de liberté. Pour prendre en compte la possible surabondance des modes, nous supposons qu'il existe  $m$  solutions pour le système. Les solutions sont :

$$s_j = [\bar{\omega}_j, b_{1j}, \dots, b_{nj}]^T, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.119)$$

Les solutions ainsi obtenues sont directement dépendantes de  $U_r$ , ce qui permet de contrôler l'ensemble de la trajectoire à l'aide d'un seul paramètre.

### 3.6.3 Modes non linéaires pour les systèmes non-conservatifs ou gyroscopiques

La définition de mode normal non linéaire de Rosenberg n'est pas adaptée aux systèmes avec des modes complexes, parce que ce type de mode ne constitue pas un mouvement admissible. Nous allons voir alors une nouvelle méthodologie capable de traiter ce genre de systèmes pour aborder les modes non linéaires.

Considérons le système linéaire autonome avec  $N$  degrés de liberté dont les équations du mouvement sont :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.120)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse supposée inversible,  $\mathbf{C}$  est la matrice d'amortissement possiblement non proportionnelle et pouvant-être associée à une matrice gyroscopique antisymétrique,  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur supposée définie positive et  $\mathbf{X}$  est le vecteur des déplacements. Sous forme d'équation d'état, l'équation du mouvement est :

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}\mathbf{z} \quad (3.121)$$





ce qui permet de découpler les équations du mouvement par bloc de 2 variables :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{2i-1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{2i-1} \\ \mathbf{q}_{2i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.130)$$

Nous avons donc écrit le système d'équations du mouvement du système linéaire dans une base modale où chaque mode est représenté par une paire d'équations différentielles découplées. Si nous avons des conditions initiales nulles sur tous les modes sauf pour le  $i$ -ème, le mouvement n'aura lieu que sur ce mode. Ceci est dû à l'invariance des modes linéaires, ici représenté par un plan bidimensionnel dont les coordonnées sont le déplacement modal et la vitesse modale. Un mode normal linéaire est alors un mouvement qui se produit dans un sous-espace linéaire invariant de l'espace modal, où la base est formée par le déplacement modal et par la vitesse modale.

La description géométrique d'un mode normal précédemment énoncée va maintenant être utilisée pour proposer une nouvelle définition du mode normal non linéaire dans le but de considérer les systèmes non linéaires comme une extension des systèmes linéaires. La définition proposée est la suivante (Shaw et Pierre [70]) : *un mode normal d'un système non linéaire autonome est un mouvement qui se passe sur une variété invariante bidimensionnelle dans l'espace des phases du système. Cette variété passe par un point d'équilibre stable du système et, sur ce point, elle est tangente au plan représentatif du sous-espace modal du système linéarisé autour du point d'équilibre.*

Considérons l'équation de mouvement d'un système non linéaire sous forme d'équation d'état et normalisée par la matrice de masse :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i \\ \dot{y}_i &= f_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad , \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.131)$$

où  $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n]^T$  est le vecteur des déplacements,  $\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_n]^T$  est le vecteur des vitesses et  $f_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  est le vecteur des forces agissant sur le système.

Dans un mouvement en mode normal, le mouvement du système est tel que toutes les coordonnées se comportent selon une coordonnée de référence, ici choisi comme étant la paire  $x_1(t)$  et  $y_1(t)$ . La seule restriction pour le choix de la coordonnée de référence est de ne pas correspondre à un noeud de vibration. En choisissant :

$$\begin{aligned} u &= x_1(t) \\ v &= y_1(t) \end{aligned} \quad (3.132)$$

nous pouvons écrire les fonctions modales :

$$\begin{aligned} x_i &= X_i(u, v) \\ y_i &= Y_i(u, v) \quad , \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.133)$$

Les dérivées des équations 3.133 sont :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial X_i}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial X_i}{\partial v} \dot{v} \\ \dot{y}_i &= \frac{\partial Y_i}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial Y_i}{\partial v} \dot{v} \quad , \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.134)$$

Pour éliminer la dépendance temporelle du problème, nous injectons les équations 3.132 et 3.134 dans l'équation du mouvement, pour obtenir :

$$\begin{aligned} Y_i(u, v) &= \frac{\partial X_i(u, v)}{\partial u} v + \\ &+ \frac{\partial X_i(u, v)}{\partial v} f_1(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v), v, Y_2(u, v), \dots, Y_N(u, v)) \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} f_i(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v), v, Y_2(u, v), \dots, Y_N(u, v)) &= \frac{\partial Y_i(u, v)}{\partial u} v + \\ &+ \frac{\partial Y_i(u, v)}{\partial v} f_1(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v), v, Y_2(u, v), \dots, Y_N(u, v)) \end{aligned} \quad (3.136)$$

La solution des équations 3.136 et 3.135 nous fournit les  $X_i$  et  $Y_i$  qui seront injectés dans l'équation du mouvement correspondant au couple de coordonnées de référence  $(x_1, y_1)$  :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= f_1(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v), v, Y_2(u, v), \dots, Y_N(u, v)) \end{aligned} \quad (3.137)$$

En général, il existe  $N$  ensembles de solutions pour les équations 3.136 et 3.135, où chaque ensemble correspond à un mode de vibration. La dynamique correspondant à chaque mode est représentée par l'équation 3.137. De cette manière, chaque mode normal possède son couple de variables modales  $(u_k, v_k)$ .

En ce qui concerne les systèmes non linéaires, nous ne pouvons pas trouver des solutions générales pour les équations 3.136 et 3.135. Cependant, une approximation judicieuse peut nous fournir des résultats locaux autour du point d'équilibre. Cette approximation est faite par un développement en série des  $X_i$  et  $Y_i$  :

$$\begin{aligned} X_i(u, v) &= a_{10i}u + a_{01i}v + a_{20i}u^2 + a_{11i}uv + a_{02i}v^2 + \\ &+ a_{30i}u^3 + a_{21i}u^2v + a_{12i}uv^2 + \dots + a_{jki}u^jv^k + \dots \\ Y_i(u, v) &= b_{10i}u + b_{01i}v + b_{20i}u^2 + b_{11i}uv + b_{02i}v^2 + \\ &+ b_{30i}u^3 + b_{21i}u^2v + b_{12i}uv^2 + \dots + b_{jki}u^jv^k + \dots \end{aligned} \quad (3.138)$$

En notation vectorielle les équations 3.138 s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{z} = \{\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1(u, v) + \dots\} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

où :

$$\mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_{10i} & a_{01i} \\ b_{10i} & b_{01i} \\ \vdots & \vdots \\ a_{10N} & a_{01N} \\ b_{10N} & b_{01N} \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

$$\mathbf{m}_1(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{20i}u + a_{11i}v & a_{02i}v \\ b_{10i}u + b_{11i}v & b_{01i}v \\ \vdots & \vdots \\ a_{20N}u + a_{11N}v & a_{02N}v \\ b_{10N}u + b_{11N}v & b_{01N}v \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

$$\mathbf{z} = [x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N]^t \quad (3.142)$$

Cette équation représente la transformation de coordonnées entre les coordonnées physiques  $\mathbf{z}$  et les coordonnées modales  $(u, v)$ . Notons aussi que le système 3.139 comptant  $2N$  équations est transformé en un système de 2 équations modales. La matrice  $\mathbf{m}_0$  correspond aux composantes linéaires de la transformation qui décrivent le sous-espace modal plan. Les termes d'ordre supérieur définissent la courbure du sous-espace modal. Afin de construire la transformation complète entre les coordonnées physiques et modales, nous allons tout d'abord assembler le vecteur des coordonnées modales :

$$\mathbf{w} = [u_1, v_1, \dots, u_n, v_n]^t \quad (3.143)$$

Ensuite, nous assemblons la matrice modale non linéaire d'ordre  $2N$ , composée par les matrices :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \left[ \left[ {}^{(1)}\mathbf{m}_0, \dots, {}^{(N)}\mathbf{m}_0 \right] + \left[ {}^{(1)}\mathbf{m}_1(u_1, v_1), \dots, {}^{(N)}\mathbf{m}_1(u_N, v_N) \right] + \dots \right] \\ &= [\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(z) + \dots] \end{aligned} \quad (3.144)$$

L'équation 3.144 est un principe de superposition valide pour l'approximation modale utilisée (équations 3.138).

La transformation modale est alors :

$$\mathbf{z} = (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{w}) + \dots) = \mathbf{M}(\mathbf{w}) \mathbf{w} \quad (3.145)$$

Cette équation met en évidence le pouvoir de réduction offert par la technique des variétés invariantes. La propriété d'invariance dit que si un mouvement démarre dans un sous-espace modal non linéaire, il y reste. Ainsi, les modes non concernés peuvent être ignorés.

La détermination des coefficients  $a_{jki}$  et  $b_{jki}$  est faite en injectant les approximations écrites sur les équations 3.138 dans les équations 3.136 et 3.135. Ensuite nous équilibrons les monômes de même puissance, ce qui nous fournit des systèmes d'équations algébriques à résoudre.

Pour les coefficients linéaires, nous trouvons un système algébrique d'équations non linéaires (avec des produits entre les inconnues) dont la solution représente les modes linéaires du système linéarisé autour du point d'équilibre. Donc, au lieu de résoudre le système d'équations non linéaires, nous pouvons utiliser les solutions du problème aux valeurs propres du système linéarisé et normaliser de manière adéquate les vecteurs propres (Soares [76]). Cette procédure est explicitée en annexe B.

### 3.6.4 Application des modes non linéaires au cas d'un rotor avec effets gyroscopiques

Nous allons maintenant illustrer la notion des modes non linéaires au cas d'un rotor comportant une non-linéarité cubique et des effets gyroscopiques. Dans un premier temps, nous présenterons le système étudié et nous développerons la procédure de construction des variétés invariantes. Dans un second temps, nous proposerons une stratégie permettant de prendre en compte la vitesse de rotation dans l'estimation des variétés linéaires ; nous illustrerons alors cette procédure sur le système non-linéaire précédemment explicité.

#### Présentation du système

Considérons un rotor dont les équations du mouvement sont :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}^{3*} = \mathbf{0} \quad (3.146)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse (symétrique),  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur (symétrique),  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement (symétrique),  $\mathbf{G}$  la matrice gyroscopique (antisymétrique) et  $\mathbf{x}$  le vecteur de déplacement. Le terme  $\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}^{3*}$  représente une non-linéarité cubique sur les déplacements, et l'exposant  $3^*$  indique que l'exposant est appliqué à chaque élément du vecteur. Les matrices sont :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} \\ g_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

Nous pouvons écrire l'équation 3.146 sous forme d'équation d'état de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -\frac{c_{11}}{m_{11}}y_1 - \frac{k_{11}}{m_{11}}x_1 - \Omega\frac{g_{12}}{m_{11}}y_2 - \frac{\alpha}{m_{11}}x_1^3 \end{cases} \quad (3.152)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{c_{22}}{m_{22}}y_2 - \frac{k_{22}}{m_{22}}x_2 - \Omega\frac{g_{21}}{m_{22}}y_1 \end{cases} \quad (3.153)$$

Pour appliquer la procédure de construction des variétés invariantes, nous définissons les fonctions suivantes :

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\frac{c_{11}}{m_{11}}y_1 - \frac{k_{11}}{m_{11}}x_1 - \Omega\frac{g_{12}}{m_{11}}y_2 - \frac{\alpha}{m_{11}}x_1^3 \quad (3.154)$$

$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\frac{c_{22}}{m_{22}}y_2 - \frac{k_{22}}{m_{22}}x_2 - \Omega\frac{g_{21}}{m_{22}}y_1 \quad (3.155)$$

Nous prenons comme coordonnées de référence le premier couple de déplacement et vitesse :

$$\begin{aligned} x_1 &= u \\ y_1 &= v \end{aligned} \quad (3.156)$$

Le deuxième couple de coordonnées est écrit en fonction du premier en utilisant un développement en série au cinquième ordre :

$$\begin{aligned}
x_2 = X_2(u, v) = & a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + \\
& + a_{30}u^3 + a_{21}u^2v + a_{12}uv^2 + a_{03}v^3 + a_{40}u^4 + \\
& + a_{31}u^3v + a_{22}u^2v^2 + a_{13}uv^3 + a_{04}v^4 + a_{50}u^5 + \\
& + a_{41}u^4v + a_{32}u^3v^2 + a_{23}u^2v^3 + a_{14}uv^4 + a_{05}v^5
\end{aligned} \tag{3.157}$$

$$\begin{aligned}
y_2 = Y_2(u, v) = & b_{10}u + b_{01}v + b_{20}u^2 + b_{11}uv + b_{02}v^2 + \\
& + b_{30}u^3 + b_{21}u^2v + b_{12}uv^2 + b_{03}v^3 + b_{40}u^4 + \\
& + b_{31}u^3v + b_{22}u^2v^2 + b_{13}uv^3 + b_{04}v^4 + b_{50}u^5 + \\
& + b_{41}u^4v + b_{32}u^3v^2 + b_{23}u^2v^3 + b_{14}uv^4 + b_{05}v^5
\end{aligned} \tag{3.158}$$

En utilisant les équations 3.136 et 3.135, nous avons :

$$Y_2(u, v) = \frac{\partial X_2(u, v)}{\partial u}v + \frac{\partial X_2(u, v)}{\partial v}f_1(u, X_2(u, v), v, Y_2(u, v)) \tag{3.159}$$

$$\begin{aligned}
f_2(u, X_2(u, v), v, Y_2(u, v)) = & \frac{\partial Y_2(u, v)}{\partial u}v + \\
& \frac{\partial Y_2(u, v)}{\partial v}f_1(u, X_2(u, v), v, Y_2(u, v))
\end{aligned} \tag{3.160}$$

Grâce aux relations 3.157 à 3.160, on obtient un système de 40 équations qui correspond aux contributions de chacun des monômes. Le système peut être résolu par blocs où chaque bloc correspond à un ordre d'approximation. Les ordres 2 et 4 forment des systèmes homogènes et ses coefficients sont nuls. Nous avons alors 24 inconnues à trouver.

Pour les termes d'ordre 1, nous obtenons un système d'équations algébriques non linéaires :

$$\begin{bmatrix} \frac{k_{11}}{m_{11}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_{22}}{m_{22}} & \frac{k_{11}}{m_{11}} & -\frac{c_{22}}{m_{22}} \\ \frac{c_{11}}{m_{11}} & -1 & 0 & 1 \\ -\frac{k_{22}}{m_{22}} & 0 & \frac{c_{11}}{m_{11}} - \frac{c_{22}}{m_{22}} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{10} \\ b_{01} \\ b_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\Omega g_{12}/m_{11}) a_{01} b_{10} \\ (-\Omega g_{12}/m_{11}) b_{01} b_{10} \\ (-\Omega g_{12}/m_{11}) a_{01} b_{01} \\ (-\Omega g_{12}/m_{11}) b_{01}^2 \end{bmatrix} \tag{3.161}$$

Le système d'équations 3.161 nous fournit deux ensembles de solutions réelles qui représentent les sous-espaces modaux linéaires. Comme nous l'avons vu précédemment, nous n'avons pas besoin de résoudre le système d'équations non linéaires, car la solution peut être déterminée à l'aide de l'analyse modale traditionnelle. Nous notons les coefficients identifiés par  $a_{10}^{(1)}$ ,  $a_{01}^{(1)}$ ,  $b_{10}^{(1)}$ ,  $b_{01}^{(1)}$ ,  $a_{10}^{(2)}$ ,  $a_{01}^{(2)}$ ,  $b_{10}^{(2)}$  et  $b_{01}^{(2)}$ , où l'exposant indique le mode normal.

Après avoir trouvé les deux ensembles de solutions pour les modes linéaires, les termes d'ordre supérieur sont déterminés par la résolution des systèmes linéaires des différents ordres. Considérons d'abord les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{k_{11}}{m_{11}} + \frac{\Omega g_{12} b_{10}}{m_{11}} \\
\theta_2 &= \frac{\Omega g_{12} a_{01}}{m_{11}} + 1 \\
\theta_3 &= -\frac{k_{22}}{m_{22}} \\
\theta_4 &= \frac{\Omega g_{12} b_{01}}{m_{11}} - \frac{c_{22}}{m_{22}} \\
\theta_5 &= \frac{c_{11}}{m_{11}} + \frac{\Omega g_{12} b_{01}}{m_{11}} \\
\theta_6 &= \frac{2\Omega g_{12} b_{01}}{m_{11}} - \frac{c_{22}}{m_{22}} + \frac{c_{11}}{m_{11}} \\
\theta_7 &= \frac{3\Omega g_{12} b_{01}}{m_{11}} - \frac{c_{22}}{m_{22}} + \frac{2c_{11}}{m_{11}} \\
\theta_8 &= \frac{4\Omega g_{12} b_{01}}{m_{11}} - \frac{c_{22}}{m_{22}} + \frac{3c_{11}}{m_{11}} \\
\theta_9 &= \frac{5\Omega g_{12} b_{01}}{m_{11}} - \frac{c_{22}}{m_{22}} + \frac{4c_{11}}{m_{11}} \\
\theta_{10} &= \frac{6\Omega g_{12} b_{01}}{m_{11}} - \frac{c_{22}}{m_{22}} + \frac{5c_{11}}{m_{11}}
\end{aligned} \tag{3.162}$$

A partir de ces définitions, nous avons le système d'équations linéaires pour les coefficients modaux du troisième ordre :

$$\begin{bmatrix}
\theta_3 & 0 & 0 & 0 & \theta_4 & \theta_1 & 0 & 0 \\
0 & \theta_1 & 0 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & \theta_5 & 2\theta_1 & 0 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 \\
0 & \theta_3 & 0 & 0 & -3 & \theta_6 & 2\theta_1 & 0 \\
0 & -2 & 2\theta_5 & 3\theta_1 & 0 & 0 & \theta_2 & 0 \\
0 & 0 & \theta_3 & 0 & 0 & -2 & \theta_7 & 3\theta_1 \\
0 & 0 & -1 & 3\theta_5 & 0 & 0 & 0 & \theta_2 \\
0 & 0 & 0 & \theta_3 & 0 & 0 & -1 & \theta_8
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_{30} \\
a_{21} \\
a_{12} \\
a_{03} \\
b_{30} \\
b_{21} \\
b_{12} \\
b_{03}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\alpha b_{01} \\
-\alpha a_{01} \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix} \tag{3.163}$$

Et finalement les constantes modales de cinquième ordre :

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}} \tag{3.164}$$

où :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_4 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & \theta_5 & 2\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & \theta_6 & 2\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2\theta_5 & 3\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \theta_7 & 3\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3\theta_5 & 4\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & \theta_8 & 4\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4\theta_5 & 5\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & \theta_9 & 5\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5\theta_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \theta_{10} \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -a_{21}\alpha - \Omega g_{12} a_{21} b_{30}/m_{11} \\ -b_{21}\alpha - \Omega g_{12} a_{21} b_{30}/m_{11} \\ -2a_{12}\alpha - \Omega g_{12} a_{21} b_{21}/m_{11} - 2\Omega g_{12} a_{21} b_{21}/m_{11} \\ -2b_{12}\alpha - 2\Omega g_{12} b_{12} b_{30}/m_{11} - \Omega g_{12} b_{21}^2/m_{11} \\ -3a_{03}\alpha - \Omega g_{12} a_{21} b_{12}/m_{11} - 3\Omega g_{12} a_{03} b_{30}/m_{11} - 2\Omega g_{12} a_{12} b_{21}/m_{11} \\ -3b_{03}\alpha - 3\Omega g_{12} b_{21} b_{12}/m_{11} - 3\Omega g_{12} b_{03} b_{30}/m_{11} \\ -\Omega g_{12} a_{21} b_{03}/m_{11} - 3\Omega g_{12} a_{03} b_{21}/m_{11} - 2\Omega g_{12} a_{12} b_{12}/m_{11} \\ -4\Omega g_{12} b_{03} b_{21}/m_{11} - 2\Omega g_{12} b_{12}^2/m_{11} \\ -2\Omega g_{12} a_{12} b_{03}/m_{11} - 3\Omega g_{12} a_{03} b_{12}/m_{11} - 3\Omega g_{12} a_{13} b_{02}/m_{11} \\ -5\Omega g_{12} b_{03} b_{12}/m_{11} \\ -3\Omega g_{12} a_{03} b_{03}/m_{11} \\ -3\Omega g_{12} b_{03}^2/m_{11} \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = [a_{50}, a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}, a_{05}, b_{50}, b_{41}, b_{32}, b_{23}, b_{14}, b_{05}]^t \quad (3.167)$$

A partir des coefficients des variétés ainsi déterminés, nous pouvons alors écrire la matrice de transformation entre les coordonnées physiques et les coordonnées modales, comme le montre l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_4) \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

avec :

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_{10}^{(1)} & a_{01}^{(1)} & a_{10}^{(2)} & a_{01}^{(2)} \\ b_{10}^{(1)} & b_{01}^{(1)} & b_{10}^{(2)} & b_{01}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.169)$$



$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{30}^{(1)} u_1^2 + a_{12}^{(1)} v_1^2 & a_{21}^{(1)} u_1^2 + a_{03}^{(1)} v_1^2 & a_{30}^{(2)} u_1^2 + a_{12}^{(2)} v_1^2 & a_{21}^{(2)} u_1^2 + a_{03}^{(2)} v_1^2 \\ b_{30}^{(1)} u_1^2 + b_{12}^{(1)} v_1^2 & b_{21}^{(1)} u_1^2 + b_{03}^{(1)} v_1^2 & b_{30}^{(2)} u_1^2 + b_{12}^{(2)} v_1^2 & b_{21}^{(2)} u_1^2 + b_{03}^{(2)} v_1^2 \end{bmatrix} \quad (3.170)$$

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} {}^{(1)}\mathbf{m}_4 & {}^{(2)}\mathbf{m}_4 \end{bmatrix} \quad (3.171)$$

où :

$${}^{(1)}\mathbf{m}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{50}^{(1)} u_1^4 + a_{32}^{(1)} u_1^2 v_1^2 + a_{14}^{(1)} v_1^4 & a_{41}^{(1)} u_1^4 + a_{23}^{(1)} u_1^2 v_1^2 + a_{05}^{(1)} v_1^4 \\ b_{50}^{(1)} u_1^4 + b_{32}^{(1)} u_1^2 v_1^2 + b_{14}^{(1)} v_1^4 & b_{41}^{(1)} u_1^4 + b_{23}^{(1)} u_1^2 v_1^2 + b_{05}^{(1)} v_1^4 \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

$${}^{(2)}\mathbf{m}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{50}^{(2)} u_1^4 + a_{32}^{(2)} u_1^2 v_1^2 + a_{14}^{(2)} v_1^4 & a_{41}^{(2)} u_1^4 + a_{23}^{(2)} u_1^2 v_1^2 + a_{05}^{(2)} v_1^4 \\ b_{50}^{(2)} u_1^4 + b_{32}^{(2)} u_1^2 v_1^2 + b_{14}^{(2)} v_1^4 & b_{41}^{(2)} u_1^4 + b_{23}^{(2)} u_1^2 v_1^2 + b_{05}^{(2)} v_1^4 \end{bmatrix} \quad (3.173)$$

### Stratégie pour les systèmes gyroscopiques

L'idée principale de la méthodologie de calcul des modes non linéaires consiste à trouver tout d'abord les variétés linéaires qui représentent les modes normaux linéaires du système linéarisé autour d'un point d'équilibre. Les variétés courbes prenant en compte les non-linéarités peuvent alors être déterminées.

Cependant, dans le cas où nous avons un système gyroscopique, l'un des problèmes rencontrés réside dans le fait que les variétés linéaires sont fonction de la vitesse de rotation. Ainsi, des études où la vitesse de rotation varie risquent d'être délicates à réaliser du fait du temps de calcul prohibitif : le calcul des variétés linéaires exige en effet d'effectuer au moins un calcul d'analyse modale à chaque vitesse de rotation. Ce calcul peut alors s'avérer trop lourd quand on considère des systèmes avec un nombre important de degrés de liberté.

Dans cette étude, nous allons donc proposer une stratégie pour éviter ces calculs potentiellement trop lourds. Il s'agit d'effectuer l'estimation des variétés linéaires pour un nombre relativement petit de vitesses de rotation et de construire une fonction d'interpolation suivant la vitesse de rotation pour chacun de ces coefficients. Nous supposons alors que le comportement des variétés linéaires par rapport au changement des vitesses de rotation est correctement approximé et que les fonctions d'interpolation ainsi obtenues seront adaptées pour substituer les calculs modaux sur toute la plage de fréquences considérée.

### Application numérique

Nous allons maintenant illustrer cette stratégie pour les systèmes gyroscopiques sur l'exemple illustré en figure 3.48. Pour cette étude, le rotor est composé d'un arbre dont la longueur est égale à 0.4m et le diamètre vaut 0.02m. Le diamètre du disque est égal à 0.55m et son épaisseur, 0.05m. Le disque et l'arbre sont en acier ( $E = 2.11 \times 10^{11} \text{N/m}^2$  et  $\rho = 7800 \text{kg/m}^3$ ). Les paliers sont asymétriques avec  $k_{xx} = 5 \times 10^5 \text{N/m}$  et  $k_{zz} = 2.1 \times 10^6 \text{N/m}$ . De plus, la raideur selon la direction  $X$  possède une non-linéarité cubique associée, dont le coefficient multiplicatif vaut  $\alpha = 1 \times 10^{11} \text{N/m}^3$ . La position du disque est  $L_D = 0.13\text{m}$  et la position du palier est  $L_P = 0.27\text{m}$

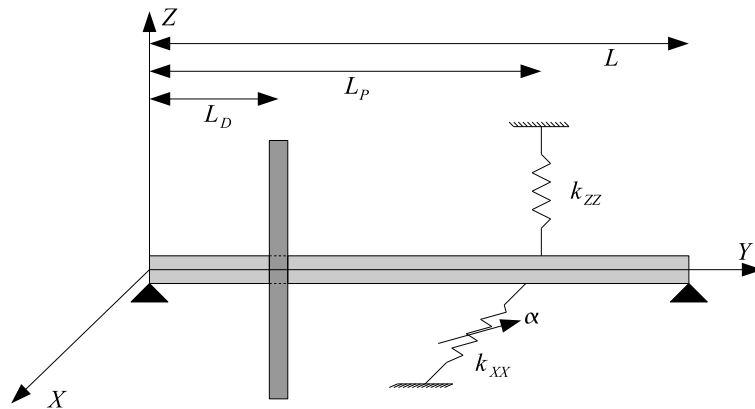


FIG. 3.48 – Rotor

Le rotor est discrétisé par la méthode de Rayleigh-Ritz avec une fonction de forme du type sinus. Les valeurs numériques pour les matrices du système sont :  $m_{11} = m_{22} = 97.2 \text{kg}$ ,  $k_{11} = 1.6 \times 10^6 \text{N/m}$ ,  $k_{22} = 2.8 \times 10^6 \text{N/m}$ ,  $c_{11} = c_{22} = 75 \text{Ns/m}$  et  $g_{21} = -g_{12} = 54.3 \text{Ns/m}$ .

Avant de passer au système non linéaire, nous allons construire le diagramme de Campbell du système linéaire correspondant pour la plage fréquentielle de 0-50 Hz. Le diagramme est illustré en figure 3.49 et nous permet de déduire les modes du système linéaire. Nous avons le premier mode vers 18.06 Hz et le second vers 36.20 Hz.

Il est connu que les systèmes comportant des non-linéarités cubiques peuvent présenter des résonances internes du type 3 :1<sup>1</sup>. Nous pouvons vérifier si c'est le cas pour le rotor étudié, et pour cela nous utilisons les courbes d'évolution des fréquences propres du diagramme de Campbell. Nous multiplions la courbe de la précession rétrograde par 3 : cette nouvelle courbe croise la courbe de précession directe vers 47 Hz (figure 3.50). Cette démarche nous montre que les conditions permettant l'existence de la résonance interne du type 3 :1 sont comprises dans notre plage d'étude (fréquence de rotation de 0 à 50 Hz), et son influence sur les résultats sera détaillée par la suite.

Pour illustrer la stratégie de calcul des modes non linéaires pour les systèmes gyro-

<sup>1</sup>phénomène non linéaire traduit par l'échange d'énergie entre deux modes quand le système possède des fréquences propres multiples l'une de l'autre. Dans notre cas, la notation 3 :1 indique un rapport de trois entre deux des fréquences propres du système

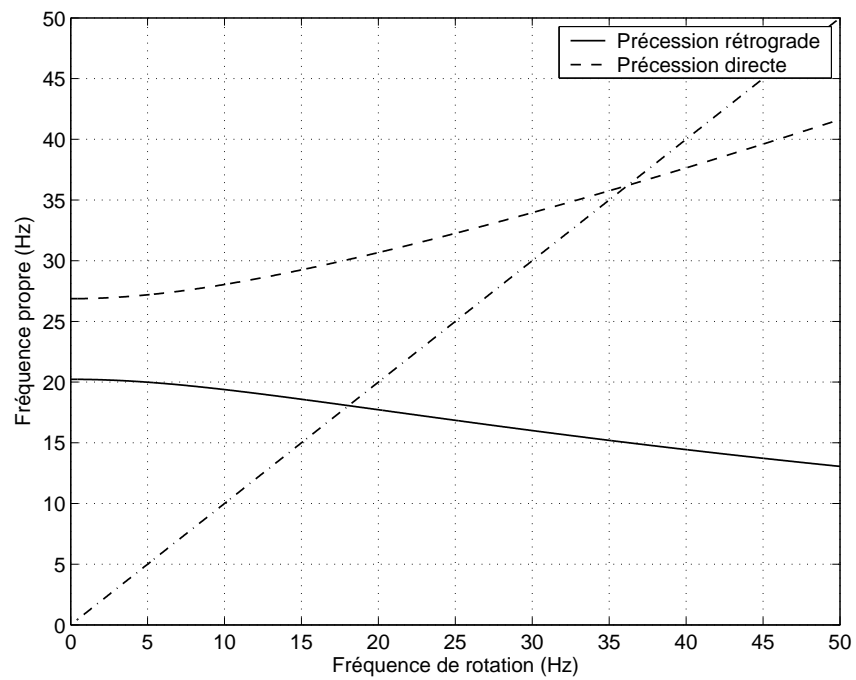


FIG. 3.49 – Diagramme de Campbell

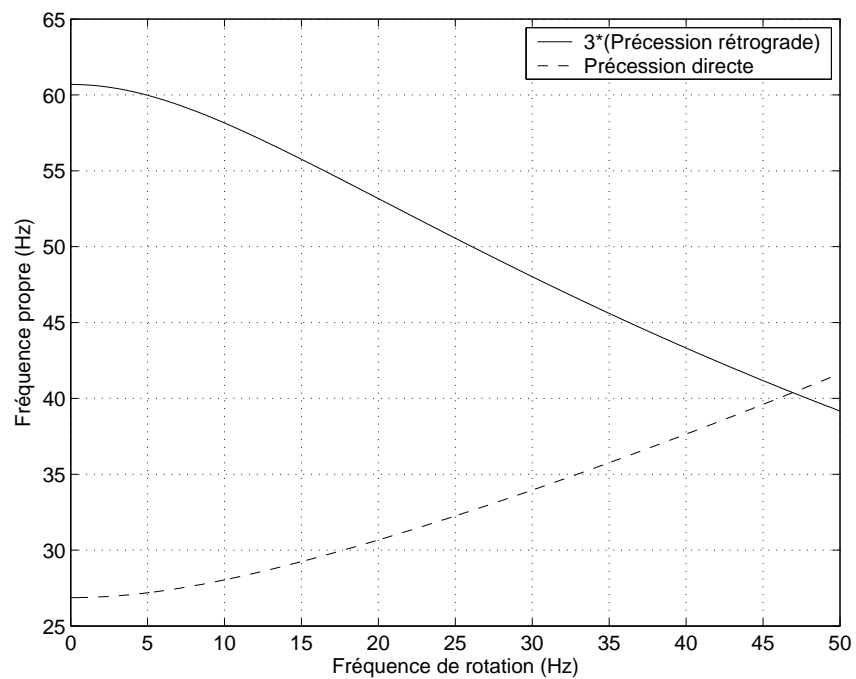


FIG. 3.50 – Fréquence pour la résonance interne 3 :1

scopiques précédemment explicitée, nous allons choisir 20 points également espacés sur notre domaine de vitesse de rotation et, pour ces points, nous calculons les coefficients des variétés linéaires. La figure 3.51 illustre les résultats obtenus pour le mode 1.

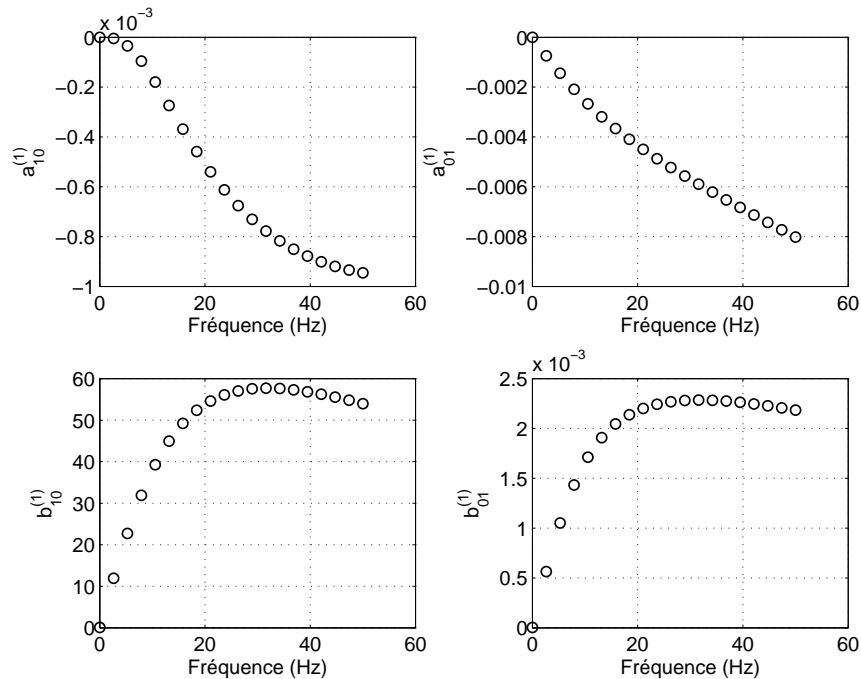


FIG. 3.51 – Coefficients d’ordre 1 en fonction de la fréquence pour le mode normal 1

Nous avons choisi des polynômes de degré cinq comme fonction d’interpolation pour les coefficients des variétés linéaires. En utilisant les fonctions d’interpolations, nous pouvons calculer les coefficients du troisième ordre et du cinquième ordre. Les figures 3.52 et 3.53 illustrent l’évolution de ces coefficients par rapport à la fréquence de rotation.

Nous voyons sur les figures 3.52 et 3.53 la présence de singularités au voisinage de 47 Hz, ce qui correspond à la fréquence de la résonance interne comme explicité précédemment. En fait, ces singularités sont attendues du fait que la formulation des modes non linéaires utilisée, sous cette forme, n’est pas adaptée pour prendre en compte les systèmes comportant des résonances internes.

Quand le rotor est à une vitesse de rotation correspondant à une fréquence de 23.87 Hz, les variétés modales sont représentées sur les figures 3.54 et 3.55. La figure 3.54 montre la variété modale du déplacement  $X_2(u_1, v_1)$  tandis que la figure 3.55 illustre la variété modale de la vitesse  $Y_2(u_1, v_1)$ . Sur chaque figure, les variétés correspondant aux variétés linéaires ont été dessinées pour visualiser la contribution des termes non linéaires dans le calcul des modes normaux.

Nous allons maintenant comparer les résultats de la réponse dynamique du système par l’intermédiaire de l’approche des modes non-linéaires et un calcul non-linéaire complet. Pour cela, nous considérons maintenant une condition initiale purement sur le premier mode normal. Le système peut alors être représenté par l’oscillateur correspondant au premier mode, donné par :

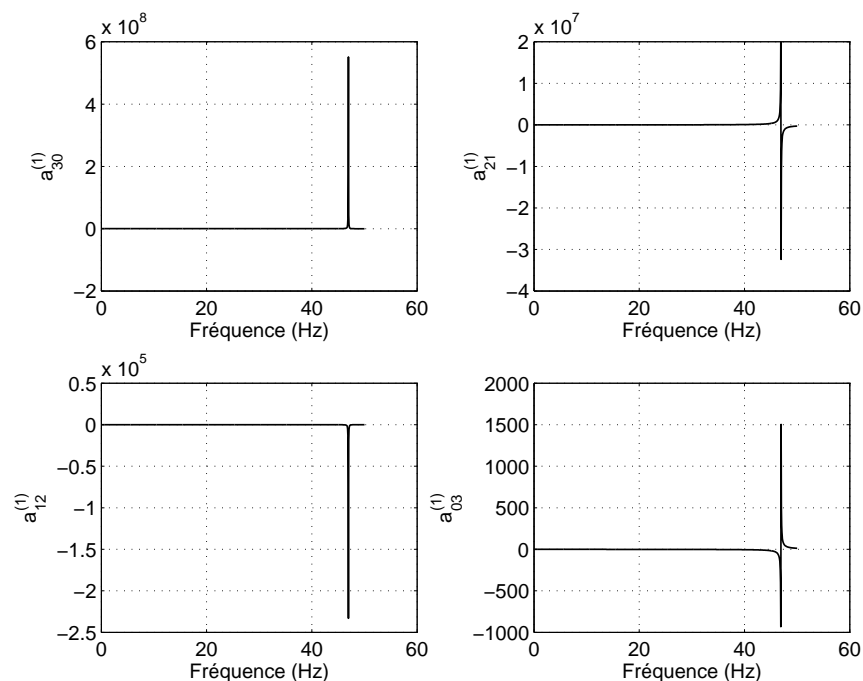


FIG. 3.52 – Coefficients d’ordre 3 en fonction de la fréquence pour le mode normal 1

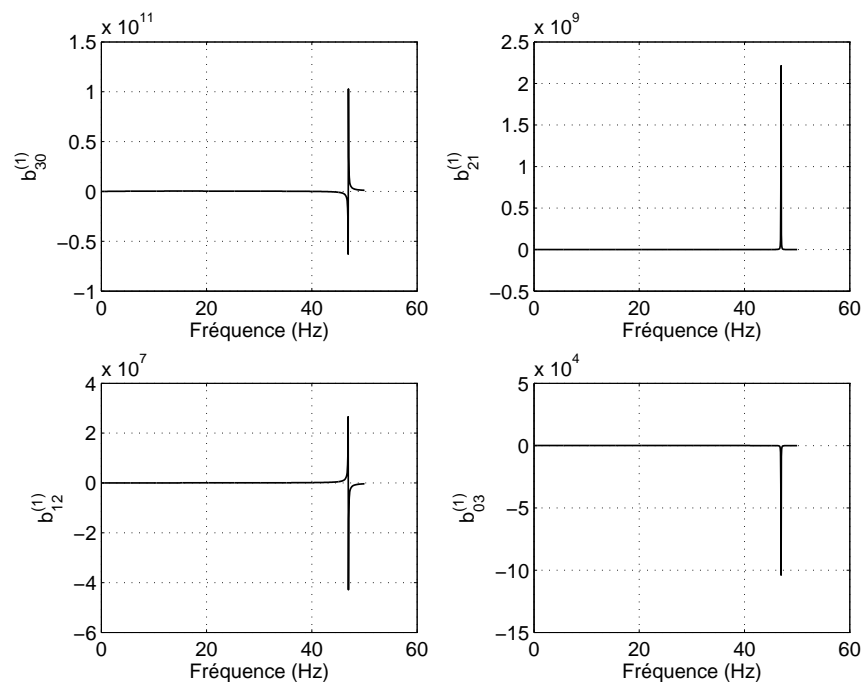


FIG. 3.53 – Coefficients d’ordre 3 en fonction de la fréquence pour le mode normal 1

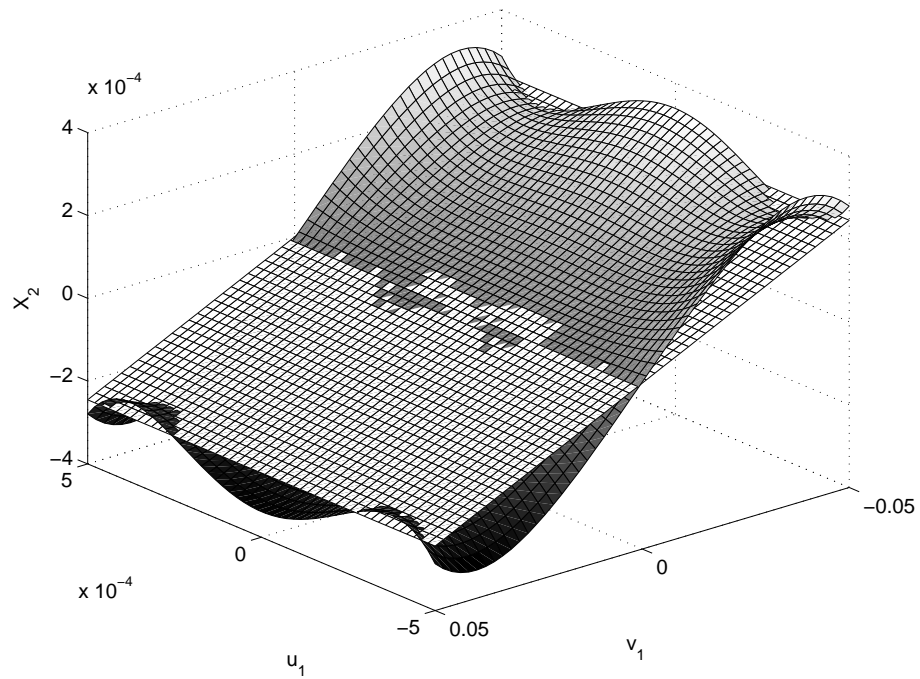


FIG. 3.54 – Variété modale du déplacement pour une fréquence de rotation de 23.87 Hz. (Facettes grises : non linéaire ; Facettes blanches : linéaire)

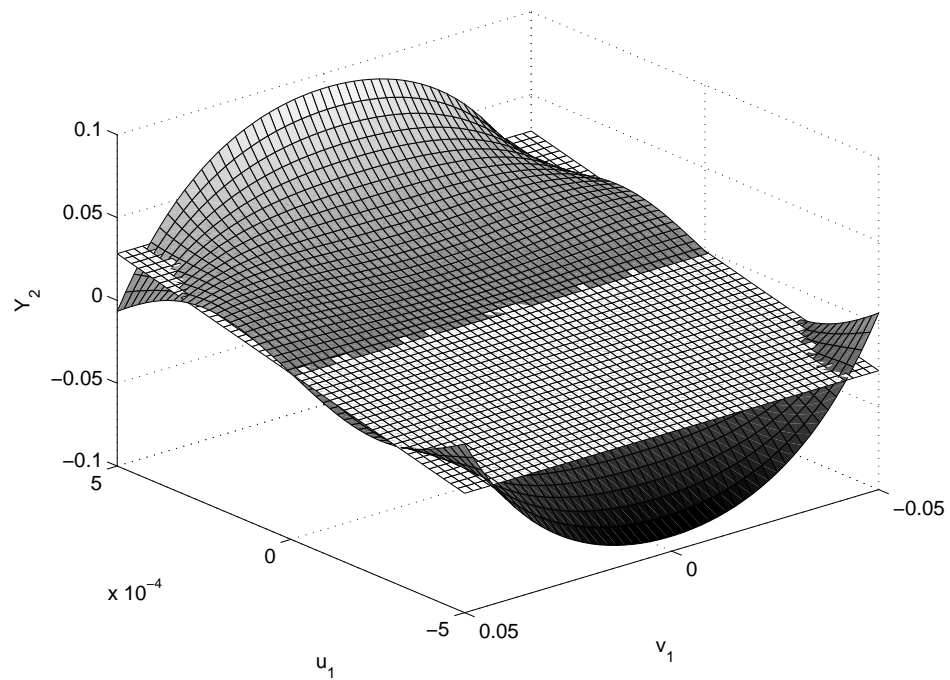


FIG. 3.55 – Variété modale de la vitesse pour une fréquence de rotation de 23.87 Hz. (Facettes grises : non linéaire ; Facettes blanches : linéaire)

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = -\frac{c_{11}}{m_{11}}v_1 - \frac{k_{11}}{m_{11}}u_1 - \Omega \frac{g_{12}}{m_{11}}Y_2(u, v) - \frac{\alpha}{m_{11}}u_1^3 \end{cases} \quad (3.174)$$

avec  $Y_2(u, v)$  donné par l'équation 3.158.

Les conditions initiales choisies sont :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}_{ini} = \begin{bmatrix} 2.5 \times 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.175)$$

Nous allons comparer les résultats du modèle réduit, représenté par l'équation 3.174, avec les résultats d'une intégration directe du modèle complet (équations 3.152 et 3.153). Nous présentons aussi une comparaison du modèle réduit avec le modèle linéaire, obtenu à partir du modèle complet en négligeant les termes non linéaires. Les conditions initiales pour le modèle complet sont converties en conditions initiales dans l'espace physique en utilisant l'équation 3.175. Les intégrations sont réalisées entre  $t = 0$  s et  $t = 1$  s, et nous considérons trois fréquences de rotation (8 Hz, 23.87 Hz, 44.56 Hz) dans ces calculs.

Les résultats pour  $\Omega = 8$  Hz sont illustrés en figures 3.56 et 3.57.

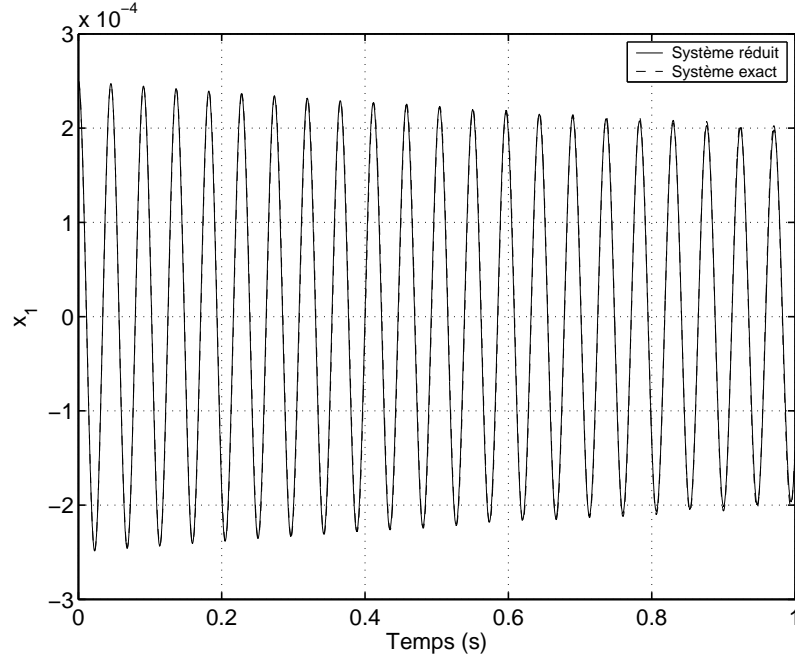


FIG. 3.56 – Comparaison entre le modèle réduit et le modèle complet (fréquence de rotation : 8 Hz)

La comparaison entre les résultats du système réduit et les résultats du système complet montre une très bonne concordance entre eux. La comparaison entre le système linéaire et le système réduit indique que les effets non linéaires sont présents et bien considérés par le modèle réduit.

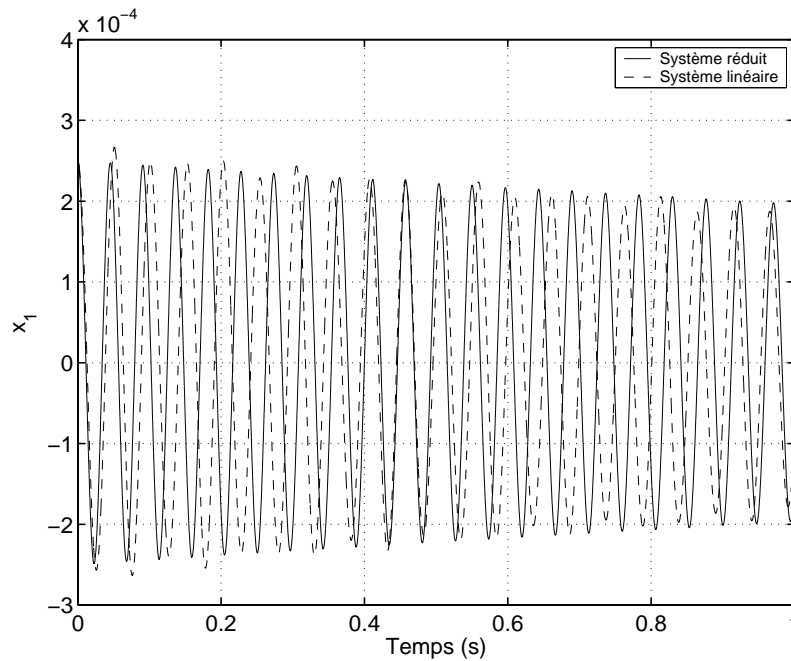


FIG. 3.57 – Comparaison entre le modèle réduit et le modèle linéaire (fréquence de rotation : 8 Hz)

Le même type de comparaison a été fait pour une fréquence de rotation égale à 23.87 Hz (figures 3.58 et 3.59). Les résultats du modèle réduit sont toujours bons par rapport au modèle complet. Par contre, quand le système est à 44.56 Hz (figures 3.60 et 3.61), nous voyons que le modèle réduit n'arrive plus à bien représenter le système. Cela nous montre que la performance du système réduit près de la résonance interne est moins bonne, du fait que les couplages entre les modes ne peuvent pas être correctement représentés.

Une autre façon de visualiser les résultats est de projeter les courbes de réponse aux conditions initiales sur les variétés de déplacement et de vitesse. Prenons le cas où la fréquence de rotation vaut 23.87 Hz. Les projections des réponses sont illustrées en figures 3.62 et 3.63. Les figures montrent que la dynamique du système se passe sur la région "plate" des surfaces, du fait des conditions de départ trop faibles pour que les déplacements soient dans les régions courbes de la surface ; cependant ces conditions sont suffisantes pour "activer" les effets non-linéaires.

En effet, pour bien voir comment les termes non linéaires du développement en séries agissent sur la réponse du système, nous allons comparer les projections de la réponse sur les variétés de déplacement et vitesse avec les variétés linéaires. Sur la figure 3.65, nous voyons une représentation sur le plan  $(Y_2(u_1, v_1), u_1)$  de la projection de la réponse et de la variété linéaire, représentée par une ligne droite. Notons que les termes d'ordre supérieur de l'expansion en séries de puissance agissent sur l'inclinaison de la projection de la réponse, comme prévu par les figures 3.54 et 3.55 au voisinage de l'origine. D'autre part, comme illustré sur la figure 3.64, les termes linéaires sont dominants sur la réponse, sauf sur les extrémités de la projection, où nous constatons l'effet des termes non linéaires du développement en séries.



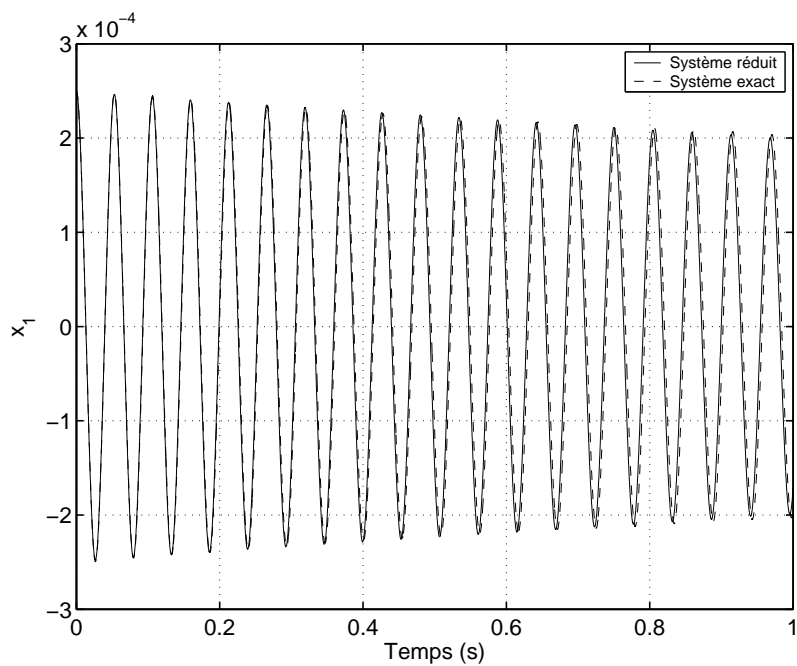


FIG. 3.58 – Comparaison entre le modèle réduit et le modèle complet (fréquence de rotation : 23.87 Hz)

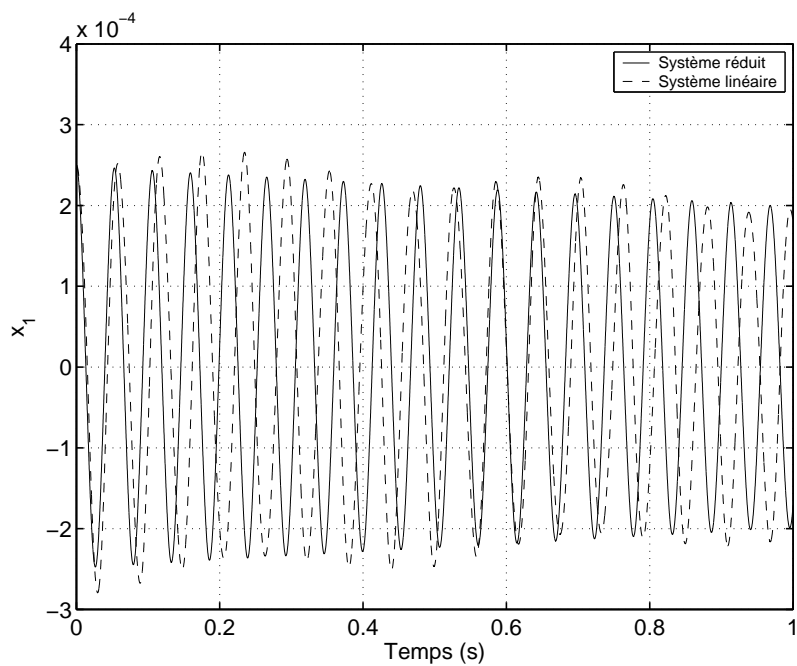


FIG. 3.59 – Comparaison entre le modèle réduit et le modèle linéaire (fréquence de rotation : 23.87 Hz)

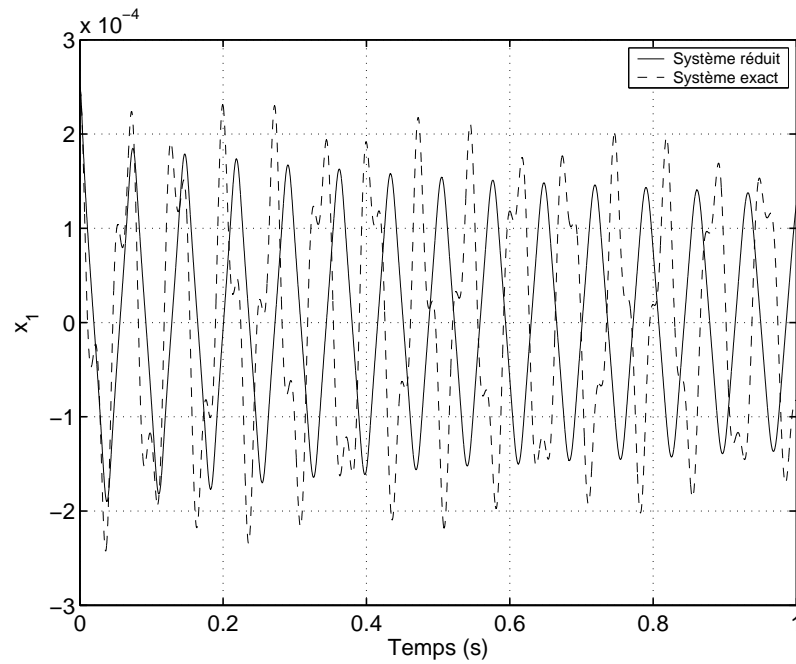


FIG. 3.60 – Comparaison entre le modèle réduit et le modèle complet (fréquence de rotation : 44.56 Hz)

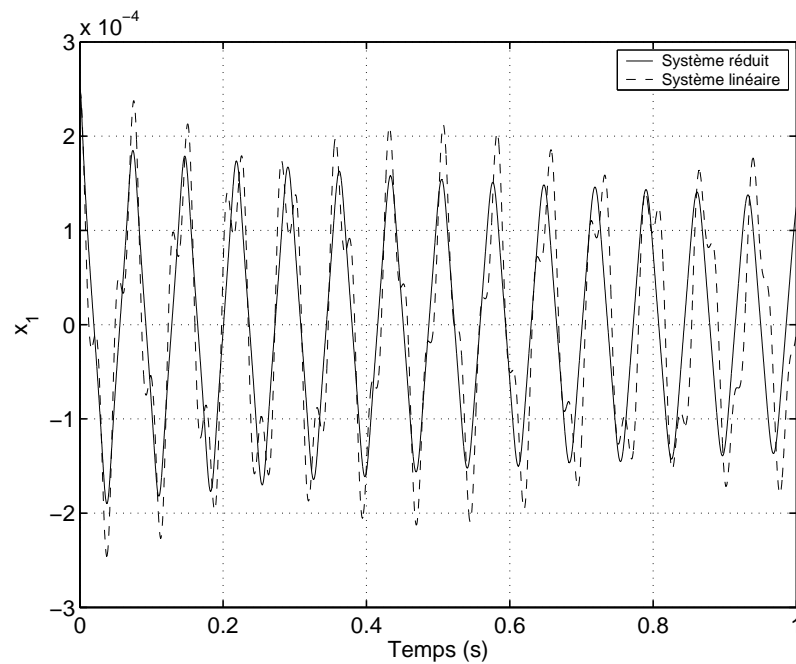


FIG. 3.61 – Comparaison entre le modèle réduit et le modèle linéaire (fréquence de rotation : 44.56 Hz)

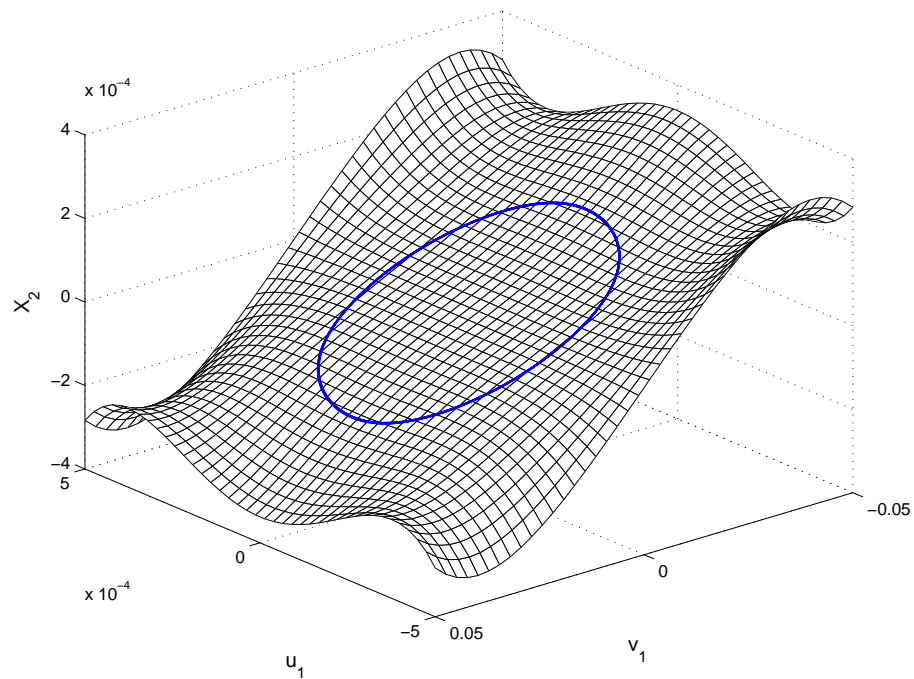


FIG. 3.62 – Projection de la réponse temporelle sur la variété de déplacement (fréquence de rotation : 23.87 Hz)

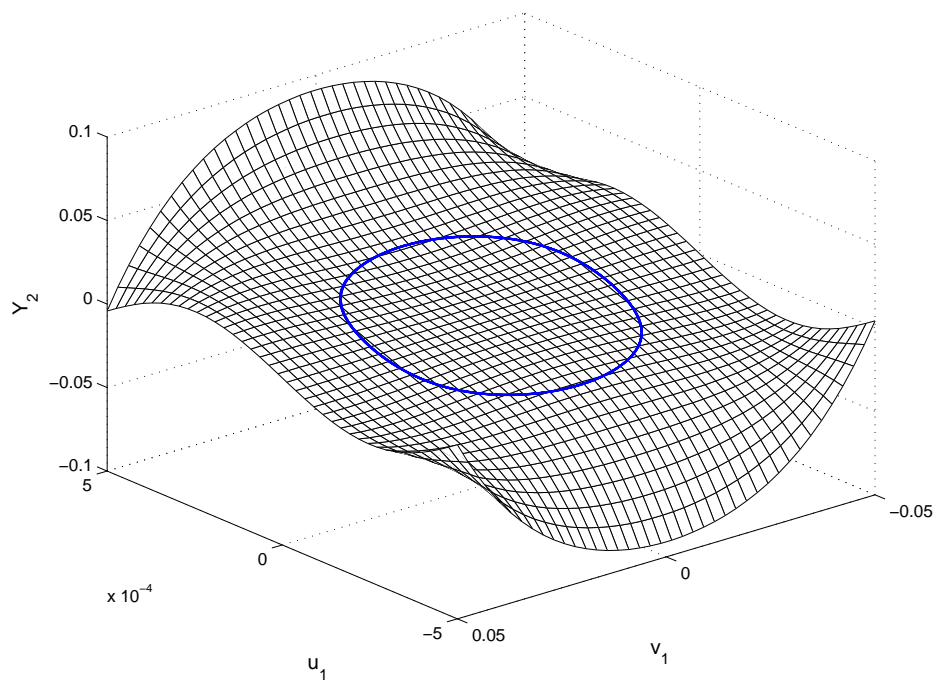


FIG. 3.63 – Projection de la réponse temporelle sur la variété de vitesse (fréquence de rotation : 23.87 Hz)

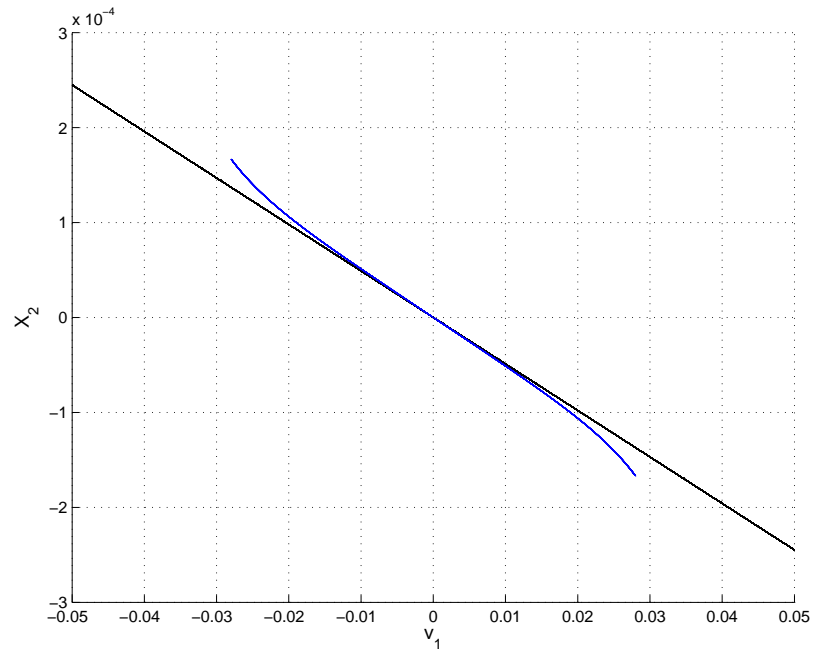


FIG. 3.64 – Projection de la réponse temporelle sur la variété linéaire de déplacement (fréquence de rotation : 23.87 Hz)

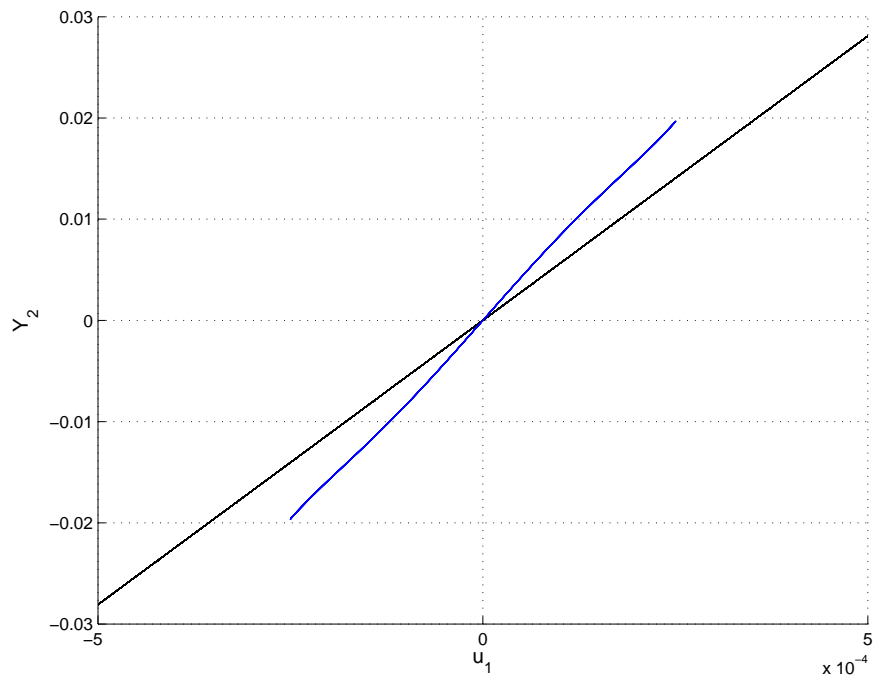


FIG. 3.65 – Projection de la réponse temporelle sur la variété linéaire de vitesse (fréquence de rotation : 23.87 Hz)

## Conclusions

Nous avons appliqué la méthodologie des variétés invariantes pour la construction des modes normaux non linéaires d'un rotor avec une non-linéarité cubique dans une direction. Cette méthodologie nous permet de découpler les équations du mouvement.

Nous avons identifié une source potentielle de problèmes dans le calcul des modes non linéaires, provenant de la nécessité de faire les calculs des variétés pour chaque vitesse de rotation à étudier. Ce calcul peut alors se révéler très coûteux en terme de temps de calcul et de stockage des résultats. Nous avons donc proposé une stratégie pour faire face à ce problème : nous calculons les variétés linéaires pour une petite quantité de fréquences dans le domaine de fréquences étudié et ensuite nous générons des fonctions d'interpolation pour représenter le comportement global des variétés linéaires, puis nous calculons de façon directe les termes non linéaires du développement.

Enfin, nous avons vu que sur l'exemple étudié, le système possède une résonance interne vers 47 Hz et que les coefficients des variétés présentent des singularités sur cette fréquence. En conséquence, le modèle réduit n'arrive pas à représenter correctement le modèle complet au voisinage de 47 Hz.

## 3.7 Conclusions

Nous avons étudié dans ce chapitre la dynamique des rotors incluant des non-linéarités, plus particulièrement celles provenant des roulements. Le modèle de roulement qui a été développé inclut la cinématique des corps roulants, la présence du jeu radial ainsi que les raideurs de Hertz associées au contact bague-billes ou bague-rouleaux. Dans ce dernier modèle, l'excitation paramétrique due à la variation de raideur engendrée par la variation de la position angulaire des éléments roulants peut générer des mouvements quasi-périodiques et chaotiques.

Afin de pouvoir estimer les réponses périodiques, nous avons développé des algorithmes basés sur la décomposition des solutions en série de Fourier. En couplant ce type d'algorithme (méthode de la balance harmonique) à une stratégie de AFT nous avons pu étudier des non-linéarités complexes comme celles des roulements. Un modèle simple de rotor a permis de montrer l'efficacité de ce type de procédure en comparant l'intégration directe et les résultats de simulation.

Par ailleurs, cette procédure a été appliquée à un rotor flexible complexe comportant un roulement non linéaire et un grand nombre de degrés de liberté. De plus, une technique de condensation sur les degrés de liberté non linéaires a été mise en place pour obtenir de façon rapide et efficace les réponses dynamiques du rotor non linéaire. Enfin, une analyse de stabilité a été effectuée pour clore cette étude.

En marge de ces procédures, un outil de réduction a été mis au point. Il se base sur la théorie des modes non linéaires. Dans le cas de la problématique des rotors, la plupart des

approches classiques des modes non linéaires ne fonctionnent pas, car elles ne peuvent inclure facilement les effets gyroscopiques. En nous appuyant sur la théorie des variétés invariantes qui permet de donner une définition adaptée de modes non linéaires, nous avons proposé une stratégie de calcul qui permet d'accélérer l'estimation des dépendances de ces modes non linéaires vis-à-vis de la vitesse de rotation du système.

## Chapitre 4

# Description du Banc Dynamique D'Ensemble

### 4.1 Description du Banc Dynamique D'Ensemble

Nous allons présenter dans cette section le banc d'essai Dynamique D'Ensemble (DDE), avec ses caractéristiques générales ainsi que celles des différents organes qui le composent. Ce banc d'essai a été conçu pour représenter le rotor du compresseur basse pression d'un moteur d'avion en respectant des lois de similitude avec un rotor de compresseur réel. A l'aide de cette expérimentation, nous allons pouvoir analyser l'impact des caractéristiques non linéaires des roulements sur la réponse vibratoire au voisinage et en dehors des vitesses critiques. Les essais menés permettront aussi d'analyser l'influence de l'amortissement sur la dynamique de la machine.

#### 4.1.1 Description générale

Afin de comprendre le comportement vibratoire des machines, la conception et la fabrication du banc d'essai "Dynamique D'Ensemble" ont été réalisées au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, Equipe Dynamique des Systèmes et des Structures de l'École Centrale de Lyon (Demailly [12]) en ayant comme objectif initial le placement des vitesses critiques dans la plage de fonctionnement du banc. Les paramètres de conception du banc (dimensions de l'arbre, dimensions du disque, raideurs des paliers, choix et position de roulements) ont été obtenus par l'intermédiaire de modèles numériques. Le schéma du banc ainsi que le banc "Dynamique D'Ensemble" sont représentés en figures 4.1 et 4.2.

Le banc d'essai est donc composé d'un disque et d'un arbre horizontal couplé avec un moteur électrique. La connexion entre le moteur et le rotor est réalisée par l'intermédiaire d'un joint d'accouplement de type "double cardan" souple (figure 4.3), ce qui permet d'assurer une raideur radiale très faible lors du fonctionnement du rotor. Le rotor est main-

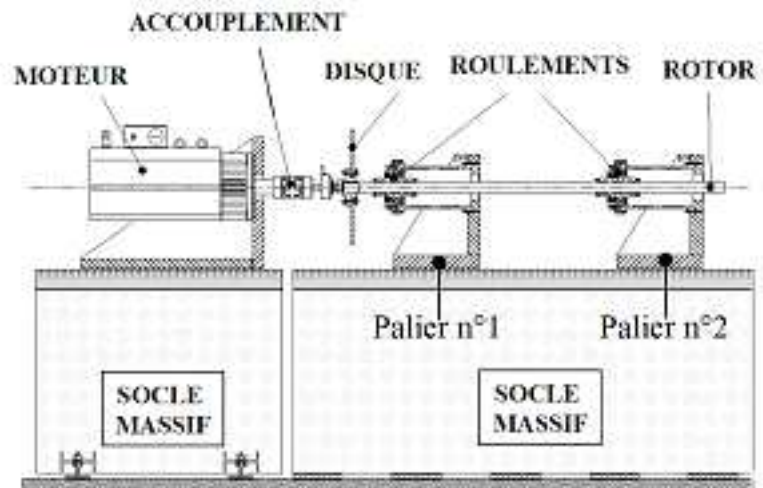


FIG. 4.1 – Schématisation du banc

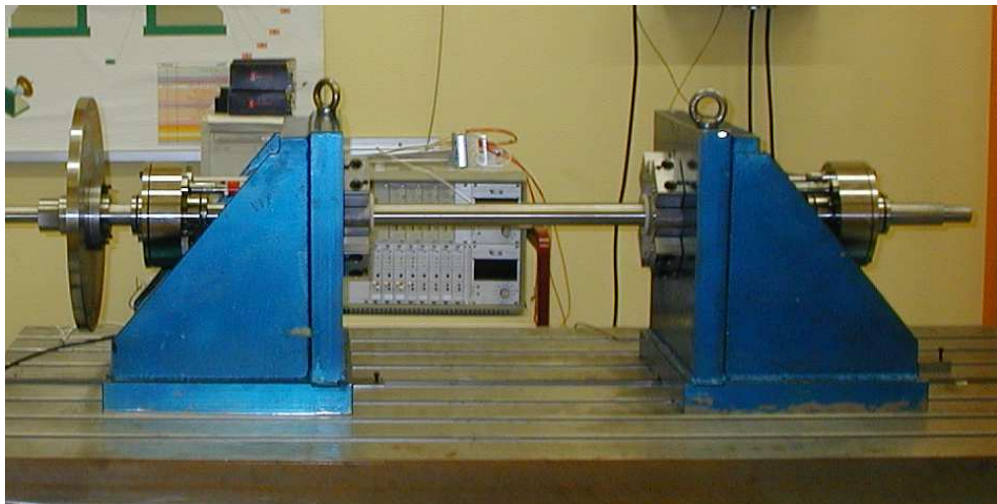


FIG. 4.2 – Photographie du banc d'essai



tenu sur deux supports paliers par l'intermédiaire d'un roulement à billes pour le premier support et un roulement à rouleaux (pour le palier proche de l'extrémité libre du rotor). L'ensemble du système "rotor- supports paliers - disque" est monté sur une table en béton massif et isolé de l'environnement par des couches de matériau élastomère.

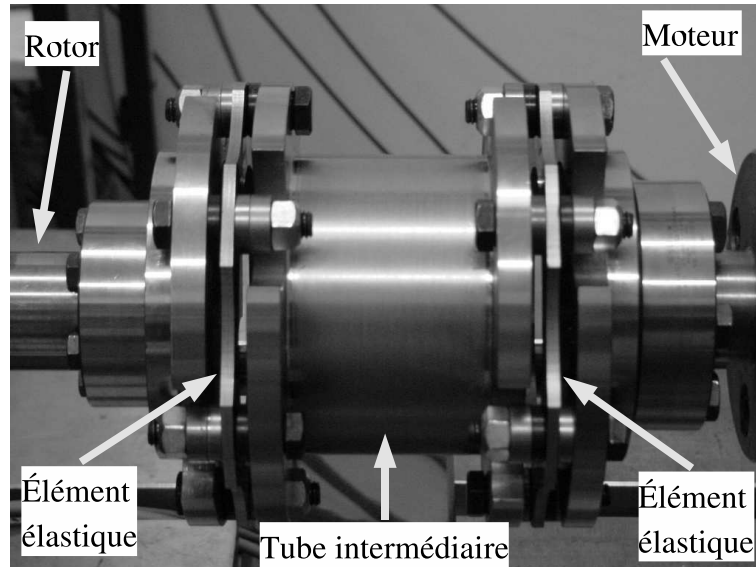


FIG. 4.3 – Le joint d'accouplement de type "double cardan"

#### 4.1.2 Le rotor : arbre plus disque

L'arbre du rotor BP a une longueur de 1700 mm et un diamètre de 40 mm, sauf aux deux extrémités pour des raisons d'accouplement avec le moteur ou éventuellement avec un autre arbre. Le matériau de l'arbre est un acier CD35. Le poids de l'arbre est 14.7 kg. Le disque est fabriqué avec le même acier que celui utilisé pour l'arbre. Son diamètre est égal à 400 mm et son épaisseur vaut 20 mm. Son poids total est de 21.9 kg.

Des essais d'analyse modale ont été réalisés et les fréquences propres associées à chacun des organes (arbre, disque et rotor=arbre+disque) sont données en tableau 4.1.

#### 4.1.3 Le support palier

Cet organe a été conçu en ayant comme objectif de changer sa raideur afin de pouvoir effectuer des études pour différentes configurations de répartition énergétique entre l'arbre et les supports. La figure 4.4 montre la photographie de l'un des supports paliers. Il est composé de quatre barres en acier qui jouent le rôle de ressorts, un flasque qui contient le roulement et un système de fixation des barres sur l'équerre.

	Mode	Fréquence (Hz)
Arbre	1	69.87
	2	188.20
	3	358.96
	4	573.25
Disque	1	635.06
	2	1004.56
	3	1502.52
Rotor (arbre+disque)	1	52.92
	2	128.17

TAB. 4.1 – Fréquence propres de l'arbre, du disque et du rotor

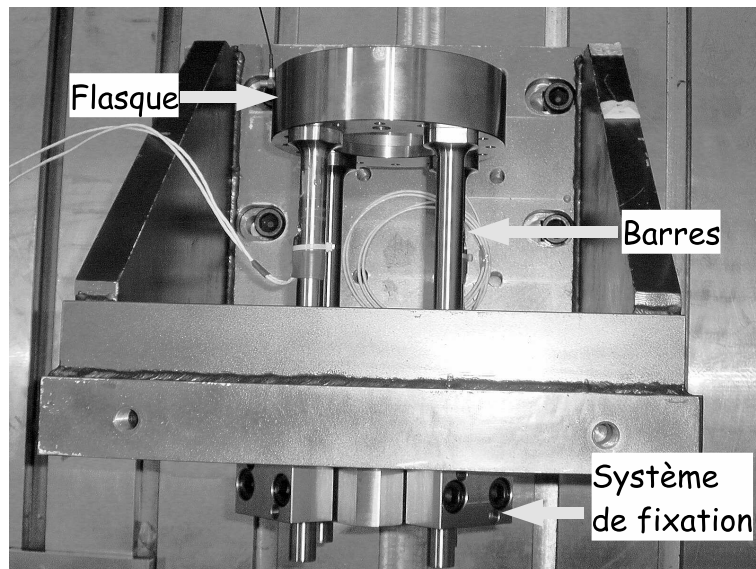


FIG. 4.4 – Photographie du support palier

### Caractérisation statique de la raideur en flexion variable en fonction de la longueur des barres

Comme explicité précédemment, la caractéristique principale du support palier est d'avoir une raideur en flexion réglable. Nous pouvons choisir la raideur des supports paliers en fonction de la longueur active des barres, qui est réglée indirectement en choisissant la longueur  $a$ , comme illustré en figure 4.5. La relation entre la longueur effective  $L$  et la cote  $a$  est donnée par  $L = 266 - a$  (quantités en millimètres).

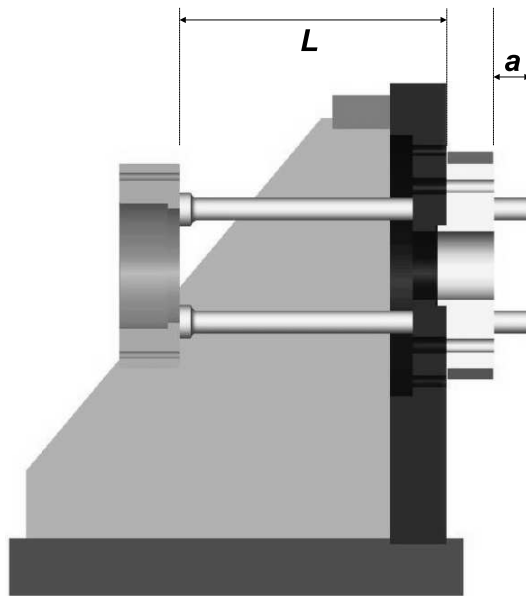


FIG. 4.5 – Réglage de la longueur effective  $L$

A fin d'établir la relation entre cette longueur  $a$  et la raideur en flexion des supports paliers, des essais ont été réalisés. Ces essais consistent à solliciter le support palier avec une force connue et à mesurer le déplacement résultant. Le montage expérimental est illustré en figure 4.6. La force est appliquée au moyen d'une tige filetée connectée à un anneau de force fixé à un portique supposé indéformable vis-à-vis des forces mises en jeu. Un comparateur mesure le déplacement du flasque. Le dispositif offre aussi la possibilité de solliciter le support palier dans la direction horizontale. La figure 4.7 montre les courbes de chargement pour six raideurs en flexion différentes. Nous pouvons voir que la linéarité entre la force et le déplacement est présente. Des essais multiples avec diminution et augmentation du chargement appliqué ont permis de vérifier que ces derniers sont répétitifs et que l'hystérésis est négligeable.

Le tableau 4.2 montre les raideurs calculées pour chaque courbe de chargement. Nous avons aussi réalisé des essais de chargement dans la direction horizontale pour  $a = 0$  mm et  $a = 31$  mm (tableau 4.2). Pour ces deux cas nous pouvons considérer que l'hypothèse d'axisymétrie du support palier est bien justifiée. Cette hypothèse sera considérée valide pour les autres valeurs.

L'évolution de la raideur en flexion mesurée en fonction de la longueur effective  $L$



FIG. 4.6 – Montage expérimental pour la mesure de la raideur en flexion du support palier

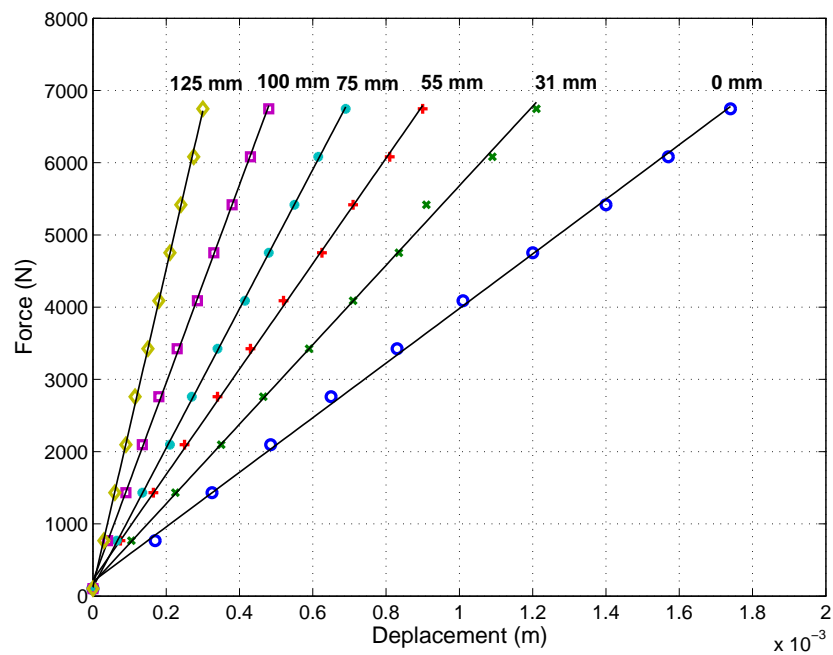


FIG. 4.7 – Courbes de chargement pour différents raideurs

$a$ (mm)	$L_{eff}$ (mm)	$K_{vert}$ (N/m)	$K_{horz}$ (N/m)
0	266	$3.78 \times 10^6$	$3.77 \times 10^6$
31	235	$5.50 \times 10^6$	$5.53 \times 10^6$
55	211	$7.30 \times 10^6$	—
75	191	$9.64 \times 10^6$	—
100	166	$1.37 \times 10^7$	—
125	141	$2.19 \times 10^7$	—

TAB. 4.2 – Raideurs en fonction de la longueur des barres

est représentée en figure 4.8. A partir des points mesurés, nous pouvons établir une loi exponentielle qui relie ces deux grandeurs :

$$\begin{aligned} K &= aL_{eff}^b & (K : N/m, \quad L_{eff} : mm) \\ a &= 1.6957 \times 10^{13} & b = -2.7402 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Cette loi est parfaitement en accord avec la loi théorique attendue.

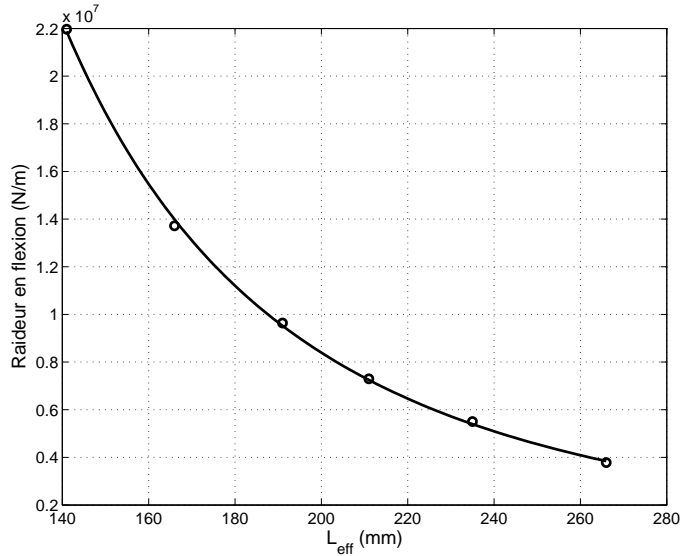


FIG. 4.8 – Raideur en flexion en fonction de la longueur effective

### Analyse modale

Le second type d'essai de caractérisation du support palier réalisé est l'analyse modale. Pour cela un accéléromètre a été placé sur le flasque du support palier pour la configuration la plus souple ( $a = 0$  mm). L'excitation est faite par un marteau de choc. La figure 4.9 montre le montage expérimental utilisé pour réaliser les essais d'analyse modale.

La courbe de la fonction de réponse en fréquence mesurée est montrée en figures 4.10 et 4.11, pour des excitations verticale et horizontale respectivement. Nous observons le premier mode propre à 129.5 Hz avec un amortissement modal de l'ordre de  $10^{-3}$ . Il s'agit d'un mode de flexion dans le plan horizontal. De plus, nous pouvons voir la présence de modes à 130.5 Hz (flexion dans le plan vertical) et à 171.5 Hz (identifié par comparaison avec un modèle éléments finis comme étant un mode de torsion).

Les résultats expérimentaux sont tout à fait semblables aux résultats prévus par la modélisation numérique faite lors de la conception du banc. En effet, l'erreur observée sur la raideur en fonction de la longueur est de 8% au maximum (sur la raideur la plus grande) et sur les fréquences propres l'erreur maximum est de 6% (à 171.5 Hz). Le premier mode du support palier étant 30 Hz au dessus des performances maximales du moteur

(6000 tr/min - 100 Hz), l'on peut considérer que les caractéristiques modales du support ne perturberont pas les analyses dynamiques envisagées.

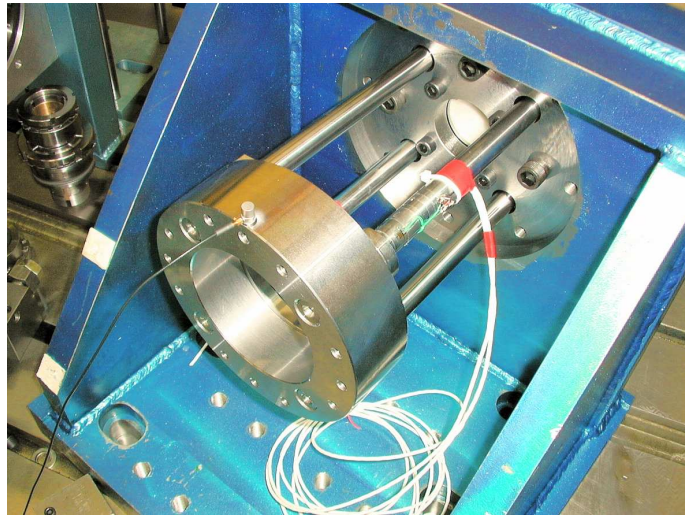


FIG. 4.9 – Montage expérimental pour l'analyse modale du support palier

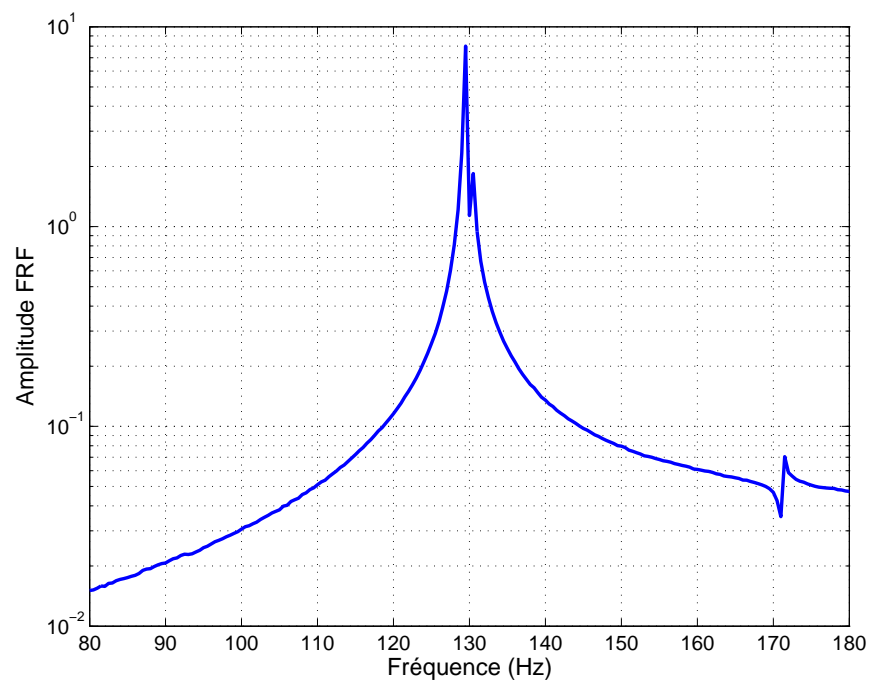
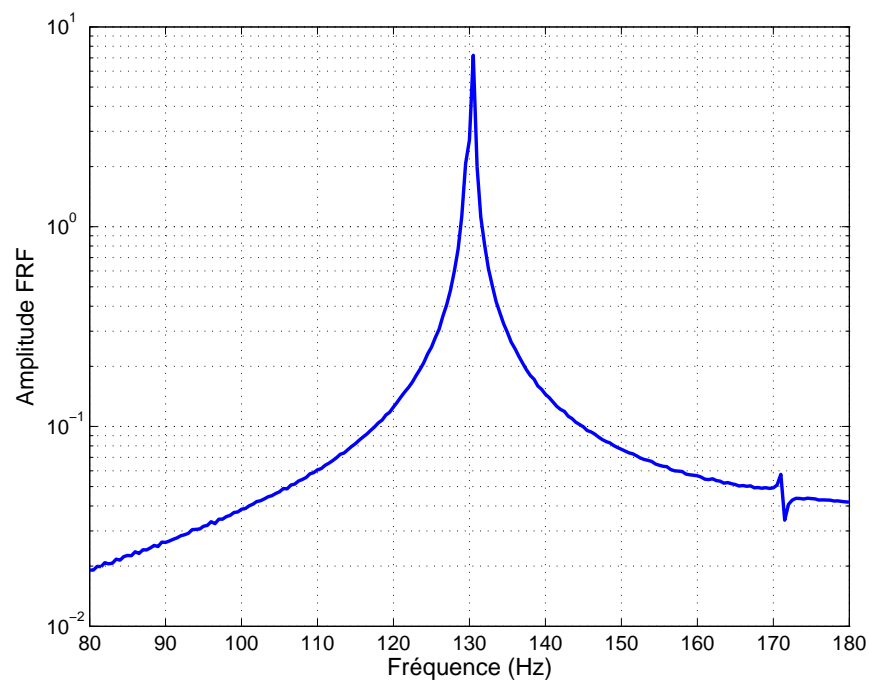
#### 4.1.4 Analyse modale du banc DDE

Une fois les différents organes du banc caractérisés séparément, nous avons réalisé des essais d'analyse modale sur le banc DDE afin de mettre en évidence son comportement dynamique à l'arrêt.

Le banc est excité par un pot vibrant installé sur le support palier 1 et les réponses sont mesurées sur ce même support palier. Nous avons relevé des fonctions de réponses en fréquence pour 3 positions angulaires du rotor comme illustré en figure 4.12. Ces essais ont montré qu'il y a une légère dissymétrie sur le montage (de l'ordre de 3 Hz).

## 4.2 Instrumentation du Banc DDE

Les mesures des vibrations pour les machines tournantes sont relativement plus délicates à réaliser que pour des structures classiques du fait de la rotation d'une partie du système étudié. De plus, le banc est caractérisé par un rotor flexible, ce qui implique que les mesures sur les parties fixes du système (telles que les supports paliers par exemple) ne sont pas suffisantes pour pouvoir décrire correctement et complètement le comportement vibratoire du système lors du fonctionnement de la machine. Ainsi, 8 capteurs de déplacement sans contact sont utilisés pour mesurer les vibrations sur les parties tournantes et 6 accéléromètres sont positionnés sur les supports paliers afin de mesurer les vibrations sur les parties fixes. Les figures 4.13 et 4.14 nous montrent des plans de mesure sur les supports paliers (accéléromètres) et sur l'arbre (capteurs de déplacement).

FIG. 4.10 – Analyse modale du support palier pour  $a=0$  mm - plan verticalFIG. 4.11 – Analyse modale du support palier pour  $a=0$  mm - plan horizontal

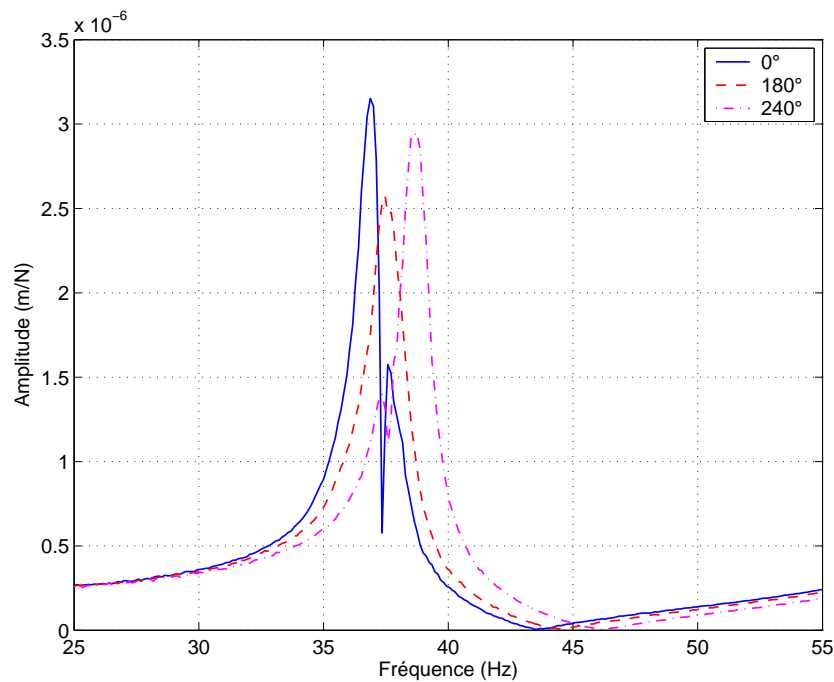


FIG. 4.12 – Analyse modale du banc DDE pour 3 positions angulaires du rotor

Le banc d'essai dispose de 2 thermocouples permettant de relever et surveiller la température des roulements, et d'un codeur incrémental donnant la vitesse de rotation du rotor et sa position angulaire. L'ensemble des capteurs est connecté à un système d'acquisition Hewlett-Packard HP3565A.

Les plans de mesure sont illustrés en figure 4.15. Les plans C1, C3, C4 et C5 sont des plans de mesure de déplacement sur l'arbre, et les plans C6 et C7 sont des plans de mesure d'accélération sur les supports paliers. Le sens de rotation du rotor est indiqué par une flèche sur la figure 4.15.

Enfin des logiciels (Figure 4.16) ont été développés sous MATLAB afin de traiter, visualiser et analyser l'ensemble des résultats expérimentaux (données de déplacement, spectres, orbites, déformées opérationnelles).

### 4.3 Description du modèle numérique

Dans cette section nous allons détailler la construction du modèle élément finis réalisé sous le logiciel SAMCEF qui sera utilisé par la suite dans nos simulations.

#### 4.3.1 Description du modèle

Le modèle de rotor développé sera principalement utilisé pour le calcul des réponses en régime forcé. Le schéma du rotor, avec ses longueurs caractéristiques, est montré en



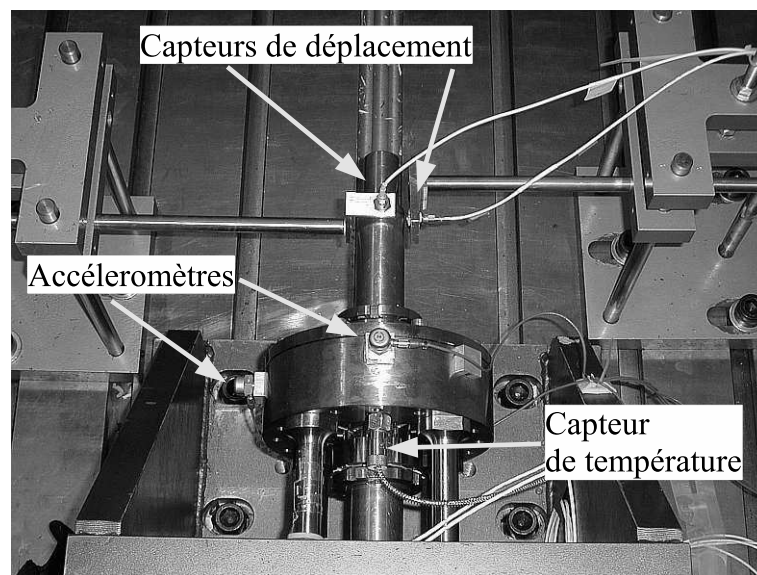


FIG. 4.13 – Plans de mesure sur le support palier 2 et sur l'extrémité libre de l'arbre

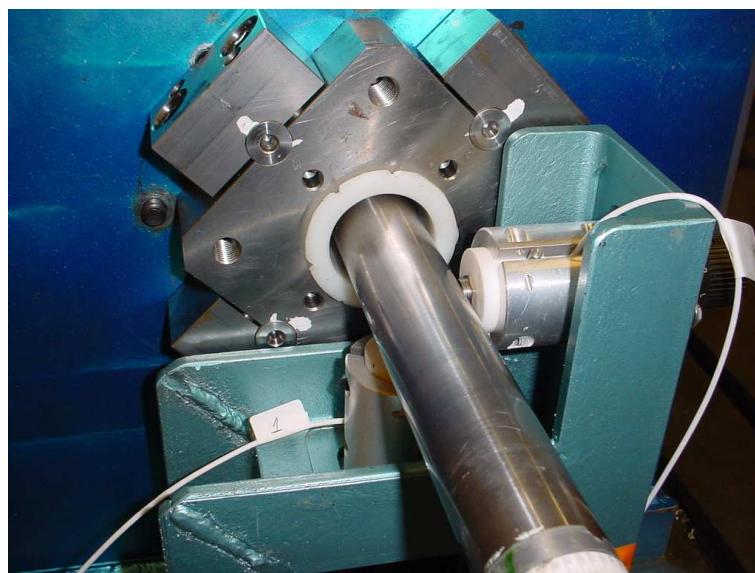


FIG. 4.14 – Plan de mesure sur l'arbre

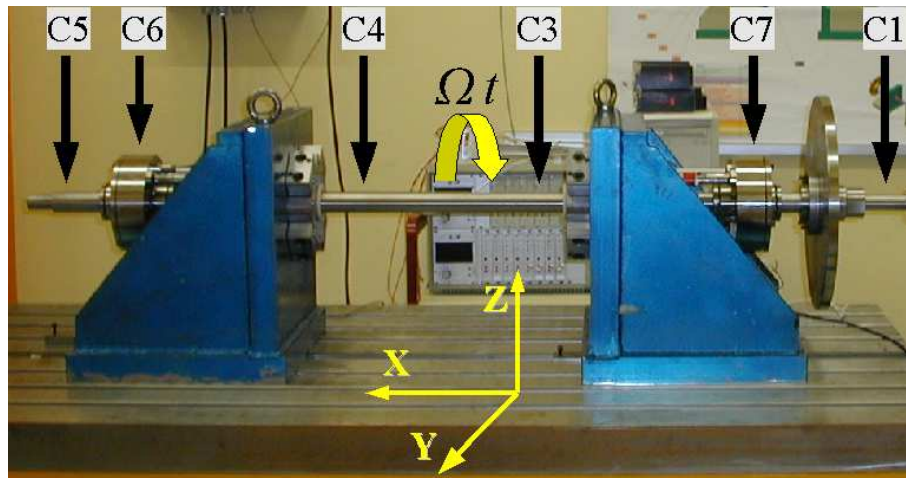


FIG. 4.15 – Plan de mesure sur l’arbre du banc et le sens de rotation de l’arbre

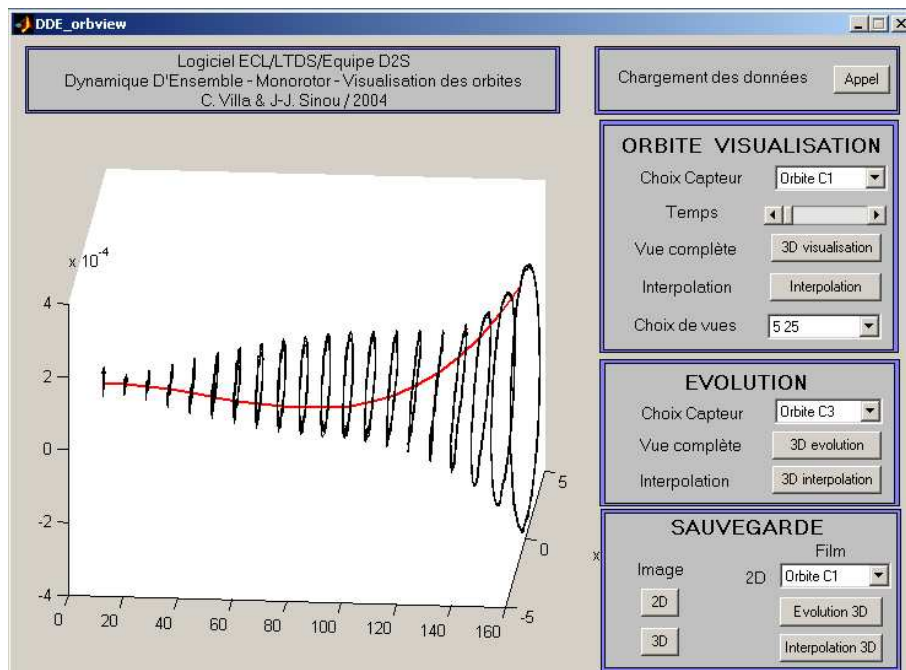


FIG. 4.16 – Logiciel de dépouillement

figure 4.17.

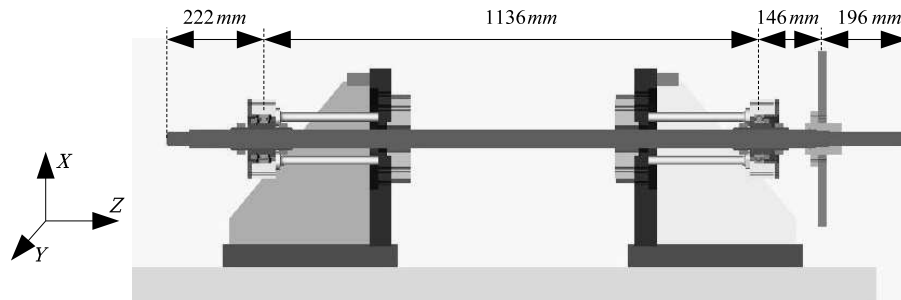


FIG. 4.17 – Dimensions principales du banc DDE

### 4.3.2 Modèle de l'arbre

L'arbre est discrétisé en 184 éléments de poutre obéissant à l'hypothèse de Timoshenko, avec six degrés de liberté par noeud. Nous considérons qu'il n'y a aucun chargement selon l'axe longitudinal du rotor et qu'il n'y a pas de vibration de torsion. L'arbre est axisymétrique.

Le modèle de l'arbre a été recalé vis-à-vis d'essais d'analyse modale sous condition de frontière libre-libre, et les résultats ont montré que l'erreur sur la fréquence propre est de l'ordre de 0.5% pour les quatre premiers modes et que la concordance entre les déformées modales est bonne.

### 4.3.3 Le rotor (arbre plus disque)

Le disque est positionné sur l'arbre au moyen d'un système de fixation qui est modélisé comme faisant partie de l'arbre. Le disque est modélisé par une masse ponctuelle avec des inerties de rotation.

Le rotor a été recalé vis-à-vis d'essais d'analyse modale sous condition de frontière libre-libre. Les erreurs sur les fréquences propres sont cette fois-ci de l'ordre de 0.1% pour les deux premiers modes.

### 4.3.4 Les roulements

Le rotor est supporté par 2 roulements : le premier roulement est un roulement à billes et le deuxième un roulement à rouleaux. Ils sont modélisés comme des ressorts linéaires dont la raideur radiale vaut  $8 \times 10^7$  N/m pour le roulement à billes et  $7 \times 10^8$  N/m pour le roulement à rouleaux.

### 4.3.5 Les supports paliers

La matrice de raideur des supports paliers a été construite au moyen d'essais de chargement sur un modèle éléments finis dont le maillage est illustré en figure 4.18, en ne considérant que les degrés de liberté dans le plan  $XY$ .

Les matrices de raideur obtenues à partir du modèle éléments finis du support palier sont recalées à l'aide de la raideur en flexion mesurée expérimentalement.

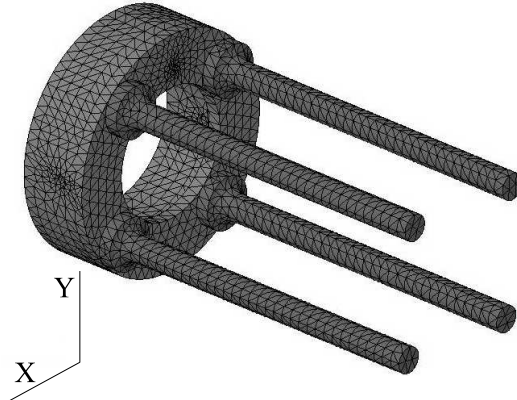


FIG. 4.18 – Maillage du support palier à 4 barres

L'équation reliant les efforts et les déplacements nodaux est alors :

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_X \\ M_Y \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{SP} \begin{bmatrix} U_X \\ U_Y \\ \theta_X \\ \theta_Y \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Pour la configuration de support palier la plus souple ( $a = 0$  dans l'équation 4.1), la matrice de raideur est la suivante :

$$\mathbf{K}_{SP} = 3.8 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.133 \\ 0 & 1 & -0.133 & 0 \\ 0 & -0.133 & 0.5 & 0 \\ 0.133 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Les masses des supports paliers sont prises comme étant les masses équivalentes associées au premier mode de vibration (voir paragraphe 4.1.3).

### 4.3.6 Le joint d'accouplement

Le joint d'accouplement utilisé est constitué par deux éléments élastiques reliés par un tube, comme illustré en figure 4.3. Les éléments élastiques sont composés par un ensemble

de lames superposées qui assure la souplesse du montage.

Le calcul des termes de la matrice de raideur a été réalisé en utilisant un modèle éléments finis de l'élément élastique et recalé vis-à-vis de la raideur axiale, fournie par le fabricant du joint d'accouplement. La matrice de raideur de chaque élément élastique est alors donnée par :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Le joint d'accouplement sera donc modélisé par un élément poutre possédant à ses extrémités des raideurs de connexion définies par la matrice  $\mathbf{K}$ .

## 4.4 Alignement des arbres

Il s'agit ici d'assurer une parfaite colinéarité entre les deux extrémités d'arbre qui vont être couplées. Une telle opération doit être réalisée avec minutie pour qu'aucun effet ne soit transmis du fait d'un désalignement ou des harmoniques pouvant être générés par un mauvais positionnement du joint d'accouplement (Erich [15]).

Les techniques d'alignement disponibles de nos jours sont (Mitchell [45]) :

- l'alignement optique ;
- l'alignement laser ;
- l'alignement avec des comparateurs.

Lors des alignements du banc DDE, deux types d'alignement ont été utilisés : l'alignement avec des comparateurs et l'alignement laser. Cependant, dans la plupart des alignements, la méthode utilisée a été la méthode des comparateurs inversés, qui sera rapidement présentée dans le paragraphe suivant.

### 4.4.1 La méthode des comparateurs inversés

Dans cette méthode, nous cherchons d'abord la localisation d'un arbre par rapport à l'autre dans les plans horizontaux et verticaux. Il est nécessaire d'avoir un comparateur et un système de fixation pour prendre les mesures, comme illustré sur le schéma de la figure 4.19.

Dans un premier temps, nous faisons des mesures sur le rotor de la machine mobile. Ces mesures vont donner les décalages dans les plans horizontaux et verticaux de l'arbre mobile par rapport à l'arbre fixe. Après avoir installé le système d'alignement sur le rotor

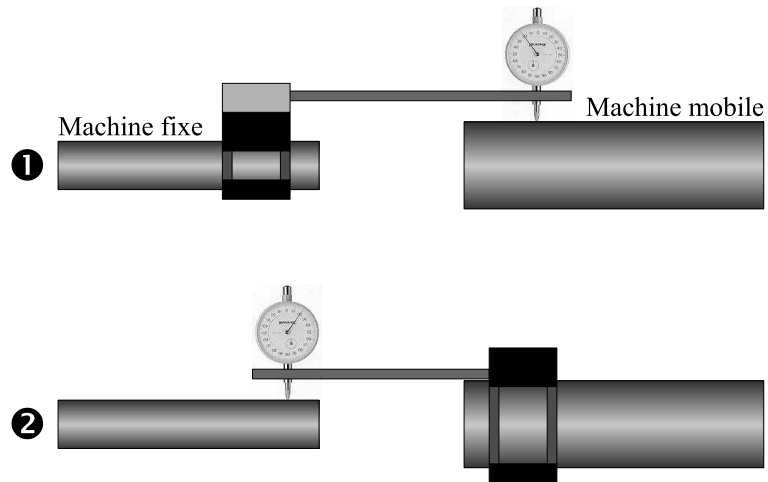


FIG. 4.19 – Schéma de la méthode des comparateurs inversés

de la machine mobile, nous faisons les mesures sur le rotor de la machine fixe. Les informations nécessaires pour la détermination des corrections sont illustrées en figure 4.20.

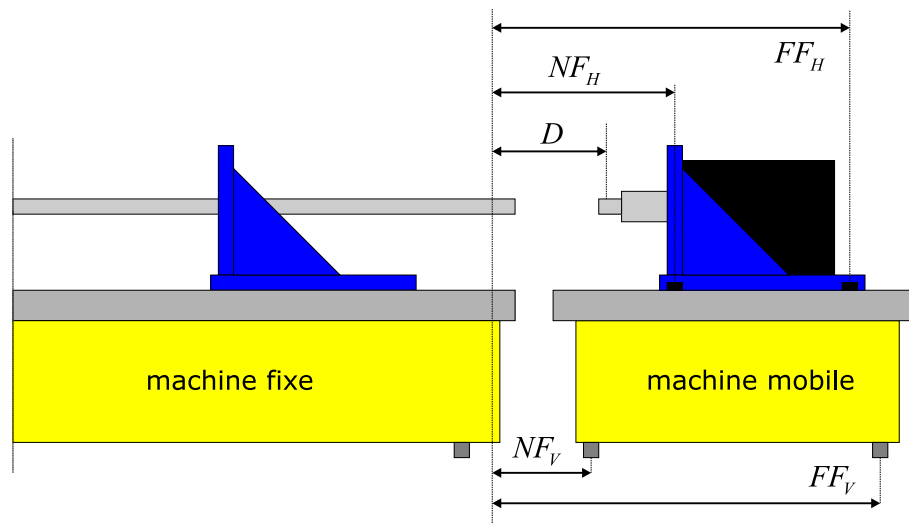


FIG. 4.20 – Côtes nécessaires pour l'alignement

Il s'agit dès lors de déterminer la position d'un arbre par rapport à l'autre. Il est alors nécessaire de réaliser quatre mesures séparés de  $90^\circ$  sur chaque arbre (représentés sur la figure 4.21 par les points  $N$ ,  $S$ ,  $O$  et  $E$ ). Les mesures sont alors prises sur ces points, ce qui permet de définir les effets de désalignement vis-à-vis de l'axe  $N - S$  (noté  $V$ ) et l'axe  $E - O$  (noté  $H$ ).

$$V = \frac{S - N}{2} \quad (4.5)$$

$$H = \frac{E - O}{2} \quad (4.6)$$

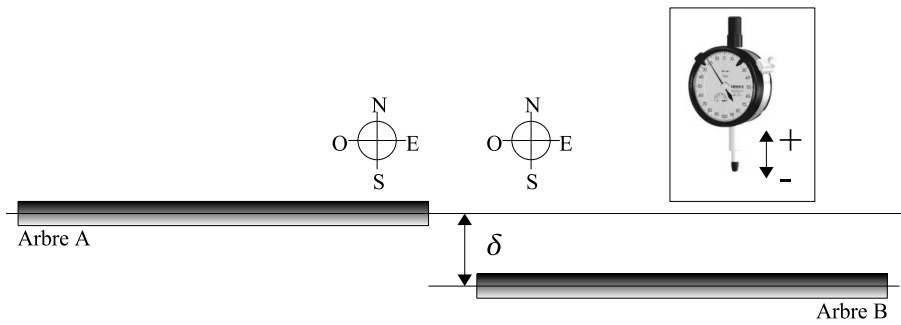


FIG. 4.21 – Arbres avec un désalignement de parallélisme

où  $S$  est la mesure du comparateur sur le point Sud,  $N$  sur le point Nord,  $O$  sur le point Ouest et  $E$  sur le point Est.

Les dispositifs utilisés pour les mesures de désalignement peuvent présenter une certaine souplesse qu'il convient de prendre en compte pour assurer une bonne qualité de la mesure du désalignement. Une manière de quantifier cette déformation est d'installer le dispositif sur un arbre rigide, faire le zéro sur le point  $N$  et prendre les mesures sur les trois points restants. Les valeurs obtenues indiquent alors la déformation statique du dispositif sur chaque position de mesure et doivent être soustraites des mesures brutes lors de l'alignement.

En résumé la procédure d'alignement utilisée s'effectue selon les étapes suivantes ([45]) :

**Etape 1** Mesurer les côtes pour l'alignement, comme illustré en figure 4.20 ;

**Etape 2** Repérer les arbres fixes et mobiles (points  $N, S, E, O$ ) ;

**Etape 3** Installer le système d'alignement sur le rotor et faire les mesures sur  $N, S, E$  et  $O$ , en faisant le zéro du comparateur sur le  $N$ . Les deux arbres doivent être tournés en même temps et toujours dans le même sens. Les mesures sont cohérentes quand  $N + S = E + O$  ;

**Etape 4** Installer le système d'alignement sur le moteur et prendre les mesures sur les points  $N, S, E$  et  $O$  ;

**Etape 5** Calculer l'offset horizontal :

$$H_{rot} = \frac{E_{rot} - W_{rot}}{2}$$

$$H_{mot} = \frac{E_{mot} - W_{mot}}{2}$$

**Etape 6** Calculer l'offset vertical :

$$V_{rot} = \frac{S_{rot}}{2}$$

$$V_{mot} = \frac{S_{mot}}{2}$$

**Etape 7** On calcule comme illustré en figures 4.22 et 4.23 les valeurs des corrections qui doivent être apportées à la machine mobile.

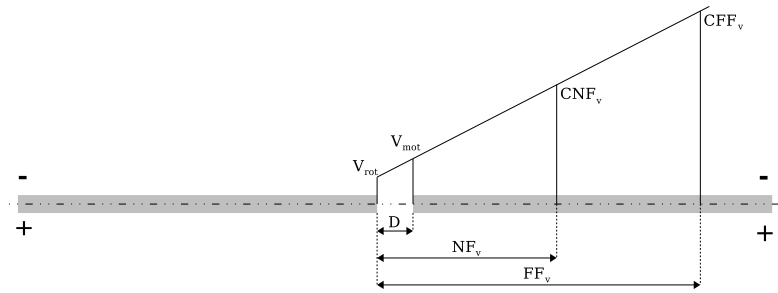


FIG. 4.22 – Désalignement dans le plan vertical

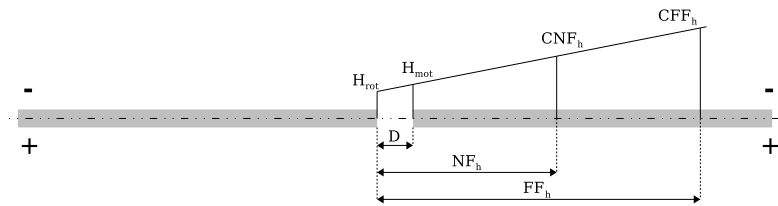


FIG. 4.23 – Désalignement dans le plan horizontal

## 4.5 Equilibrage des rotors

### 4.5.1 Introduction

Une étape importante de l'étude dynamique des rotors passe par la problématique de l'équilibrage. En effet, une distribution asymétrique de masse sur le rotor se traduit par ce que l'on appelle un balourd. Ce dernier se caractérise alors par une force harmonique dont la fréquence est égale à la fréquence de rotation du rotor. Il est défini par le produit de la masse de déséquilibre et de son excentricité par rapport à l'axe de rotation.

Le but de l'équilibrage est donc de diminuer la vibration synchrone due à ce balourd. En général de telles techniques ne permettent pas d'annuler parfaitement la vibration puisque le balourd n'est pas forcément la seule source de vibration. En effet, des phénomènes comme le désalignement, la déformation du rotor, les excentricités des roulements ou des paliers peuvent aussi être des sources de vibrations synchrones (Dimarogonas [14], Wowk [88]).

Selon la norme ISO 1925 (citée par Schenck [10]), il existe quatre types de déséquilibre pour les rotors rigides. Le premier type de déséquilibre (déséquilibre statique) correspond à un déplacement de l'axe principal d'inertie du rotor parallèlement à l'axe de rotation. Le deuxième type de déséquilibre (déséquilibre par moment) est caractérisé par un moment de flexion lié au fait que l'axe principal d'inertie du rotor croise l'axe de rotation au centre de gravité. Le troisième type de déséquilibre (déséquilibre quasi-statique) correspond à une combinaison du premier et du deuxième cas, où le point d'intersection entre l'axe principal d'inertie et l'axe de rotation ne se situe plus au centre de gravité du rotor. Finalement, pour le quatrième type de déséquilibre, l'axe principal d'inertie ne croise pas



l'axe de rotation.

Bien entendu, dans la pratique, il n'est pas possible de savoir d'avance quelle est la nature du balourd à corriger et nous devons le trouver à partir de mesures.

Quel que soit le type de balourd, l'objectif est donc de minimiser l'amplitude de la vibration synchrone engendrée par ce dernier. A cet effet, il existe différentes méthodes d'équilibrage que nous allons maintenant d'écrire.

## 4.5.2 Les méthodes d'équilibrage

### La méthode exhaustive

Il s'agit ici d'une approche systématique qui ne peut être appliquée que sur 1 plan d'équilibrage. Elle consiste à chercher de manière exhaustive la masse et la phase de correction conduisant au minimum de vibration. L'avantage majeur de cette méthode est de pouvoir trouver la correction nécessaire à l'équilibrage du rotor indépendamment de toute hypothèse sur le modèle.

La procédure générale qui sera utilisée se déroule selon les étapes suivantes :

- Faire tourner le rotor et mesurer la vibration initiale ;
- Trouver la relation entre l'amplitude de vibration ( $V_0$ ) dans le plan de mesure et la position angulaire ( $\psi$ ) d'une masse de test dans le plan d'équilibrage ( $V_0 = V_0(\psi)$ ) ;
- Trouver le  $\psi$  qui minimise  $V_0$  ;
- Dans la position  $\psi$  optimale, trouver la relation entre la masse de test ( $M_T$ ) et l'amplitude de vibration ( $V_1$ ) ( $V_1 = V_1(M_T)$ ) ;
- Trouver la valeur de  $M_T$  qui minimise  $V_1(M_T)$ .

La masse de test pour la recherche de l'angle optimal doit être choisie de façon à générer une force centrifuge entre 5% et 15% du poids du rotor à la vitesse d'équilibrage (Wowk [88]) .

Cependant, cette méthode exige de nombreuses mises en fonctionnement et est donc très consommatrice en temps. De plus, elle n'est envisageable que sur un unique plan d'équilibrage.

Afin de gagner du temps lors des phases d'équilibrage, d'autres techniques telles que la méthode des coefficients d'influence ou la méthode des trois masselottes seront utilisées. Nous allons maintenant décrire ces dernières.

### La méthode des coefficients d'influence à un plan

Soit un rotor sur deux appuis comme illustré en figure 4.24. Un capteur est installé sur un des appuis pour mesurer la vibration (déplacement ; vitesse ou accélération). Cet appui

définit donc le plan de mesure choisi (plan A). Il faut de plus avoir un plan de correction où nous pouvons installer les masses de test et de correction afin d'équilibrer le rotor (plan 1).

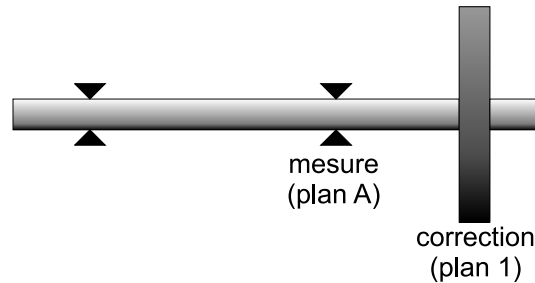


FIG. 4.24 – Rotor avec les plans de correction et de mesure

Avant de présenter la procédure d'équilibrage, nous allons définir la notion de coefficient d'influence. En plaçant une masse unitaire sur le plan de correction (plan 1) à une phase nulle pour un rotor initialement équilibré, nous allons mesurer une certaine vibration sur le plan A. La transformation linéaire entre le balourd appliqué et la vibration mesurée définit alors le coefficient d'influence. Dans ce cas idéal, il est obtenu directement. Cependant, généralement il faut effectuer plusieurs essais (avec des masses et angles variables) pour estimer les coefficients d'influence associés.

La procédure d'équilibrage démarre avec un essai initial à la vitesse de rotation désirée (en général la vitesse d'opération du rotor). Ensuite nous mesurons la vibration sur le plan de mesure A (amplitude et phase). Nous appelons cette mesure  $\mathbf{V}$ , et supposons que ce signal est mono-harmonique et que la différence de phase par rapport au signal de référence est  $\theta$ . Ainsi, la vibration mesurée peut être représentée par le complexe :

$$\mathbf{V} = V e^{i\theta} \quad (4.7)$$

où  $V$  est l'amplitude de vibration et  $\theta$  la phase. L'objectif est donc d'annuler la force de balourd que nous notons  $\mathbf{U}$ . En principe son amplitude  $U$  et sa phase  $\psi$  ne sont pas connues et la représentation complexe du balourd est définie par :

$$\mathbf{U} = U e^{i\psi} \quad (4.8)$$

Ainsi la vibration mesurée et la force de balourd sont reliées par le coefficient d'influence  $\mathbf{C}$  sous la forme :

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{U} \quad (4.9)$$

La détermination du coefficient d'influence  $\mathbf{C}$  permet de trouver une masse de correction de manière à créer une force qui s'oppose à la force de balourd. Autrement dit, nous

cherchons une masse de correction dont l'effet sur le plan de mesure soit une vibration opposée à  $\mathbf{V}$ . Nous effectuons alors un essai avec une masse de test positionnée sur le plan de correction en  $\psi_T$ . L'effet de cette masse de test sur la vibration donne :

$$\mathbf{M}_T = M_T e^{i\psi_T} \quad (4.10)$$

Par superposition, l'ajout de la masse de test nous donne :

$$\mathbf{V}_T = \mathbf{C} (\mathbf{U} + \mathbf{M}_T) \quad (4.11)$$

La détermination du coefficient d'influence s'obtient alors par soustraction de l'équation 4.11 à l'équation 4.9 :

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{V}_T - \mathbf{V}}{\mathbf{M}_T} \quad (4.12)$$

La masse de correction qui permet alors d'annuler la vibration mesurée est donnée à partir de l'équation 4.11, par :

$$\mathbf{M}_C = -\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{C}} \quad (4.13)$$

La valeur absolue de  $\mathbf{M}_C$  définit alors la masse de correction et l'argument de  $\mathbf{M}_C$  sa position angulaire.

### La méthode des trois masselottes

La méthode des trois masselottes est conçue pour l'équilibrage à 1 plan des rotors rigides où des rotors flexibles à vitesse constante. La principale différence par rapport à la méthode des coefficients d'influence à un plan est l'absence de mesures de phase. En fait, une des principales difficultés lors de l'équilibrage est la mesure précise des phases, ce qui peut engendrer des erreurs significatives dans les calculs. De plus, si la vitesse d'équilibrage est au voisinage d'une vitesse critique, le taux de variation de la phase de la réponse autour de cette vitesse (surtout pour des systèmes faiblement amortis) est assez important. Par contre, la méthode des trois masselottes permet d'équilibrer des rotors sur des vitesses critiques et aussi en présence de non-linéarités (Wowk [88]). De plus, la méthode des trois masselottes apparaît comme étant l'une des méthodes d'équilibrage à un plan les plus performantes.

La méthode des trois masselottes correspond à une méthode graphique, même si une formulation algébrique est possible (Vance [85]). La procédure expérimentale est la suivante :

- Nous commençons par réaliser un essai permettant de mesurer l'amplitude de vibration  $V$  à la vitesse d'équilibrage choisie ;
- Nous ajoutons ensuite une masse de test  $M_T$  sur la position  $0^\circ$  (choisie arbitrairement). L'amplitude de vibration est alors mesurée et notée  $V_0$ . Nous répétons la procédure pour les positions  $120^\circ$  et  $240^\circ$  pour obtenir  $V_{120}$  et  $V_{240}$  ;
- La détermination graphique de la masse de correction s'effectue en traçant tout d'abord le cercle de rayon  $V$ . Ce cercle est alors divisé en trois arcs de  $120^\circ$ . Les points qui définissent ces arcs sont nommés de  $P_0$ ,  $P_{120}$  et  $P_{240}$ . Sur les points  $P_{120}$  et  $P_{240}$  nous dessinons les cercles de rayon  $V_{120}$  et  $V_{240}$ , respectivement. La figure 4.25 illustre cette construction géométrique.

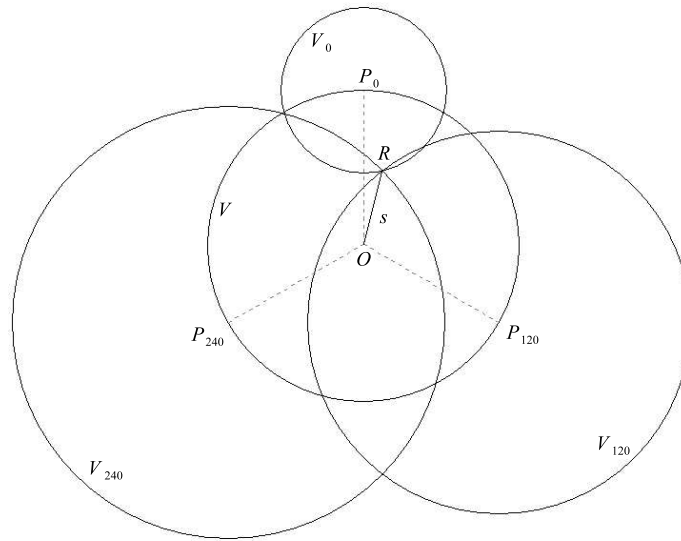


FIG. 4.25 – La méthode des trois masselottes

Si la masse de test a été bien choisie, les trois cercles centrés sur les points  $P_0$ ,  $P_{120}$  et  $P_{240}$  vont se croiser en un point noté  $R$ . Le centre du cercle  $V$  et ce point d'intersection définissent le segment de droite  $\overline{OR}$ . La masse de correction est alors égale à :

$$M_C = \frac{\overline{OR}}{V} M_T \quad (4.14)$$

La position angulaire de la masse de correction est donnée par l'angle entre  $OP_0$  et  $OR$ . Dans le cas où l'intersection des trois cercles n'existe pas, nous pouvons choisir le point  $R$  comme étant le point le plus proche des trois cercles où alors recommencer l'équilibrage avec une nouvelle masse de test.

Dans la pratique, les techniques d'équilibrage en 1 plan peuvent s'avérer insuffisantes pour diminuer de façon significative les niveaux vibratoires et traiter les problèmes du passage des vitesses critiques. Il est alors nécessaire d'utiliser des techniques d'équilibrage en plusieurs plans comme cela va être exposé dans les paragraphes suivants.

### La méthode des coefficients d'influence

La méthode des coefficients d'influence qui a été présentée pour 1 plan peut être généralisée de manière à prendre en compte plusieurs plans de mesure, plusieurs plans d'équilibrage et plusieurs vitesses d'équilibrage. Soit  $N_b$  le nombre de plans de correction,  $N_m$  le nombre de plans de mesure et  $N_v$  le nombre de vitesses d'équilibrage. L'équation de base de cette méthode est :

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{U} \quad (4.15)$$

où  $\mathbf{V}$  est le vecteur des vibrations mesurées ( $N_t \times 1$ ),  $\mathbf{U}$  est le vecteur des balourds inconnus ( $N_b \times 1$ ) et  $\mathbf{C}$  est la matrice des coefficients d'influence ( $N_t \times N_b$ , avec  $N_t = N_v N_m$ ). Quand  $N_b < N_m N_v$ , l'équation 4.15 devient un système d'équations surdéterminé et nous pouvons utiliser la technique des moindres carrés pour trouver les balourds optimaux de correction.

Le but de cette méthode est donc de déterminer un ensemble de masses de correction de manière à minimiser les balourds localisés sur les plans de correction. Pour y parvenir, nous cherchons à avoir :

$$\mathbf{V} = -\mathbf{C}\mathbf{M}_C \quad (4.16)$$

En prémultipliant l'équation 4.15 par la transposée conjuguée de  $\mathbf{C}$ , nous pouvons trouver le vecteur des masses de correction :

$$\mathbf{M}_C = -(\bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{C})^{-1} \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{V} \quad (4.17)$$

La détermination des éléments de la matrice des coefficients d'influence est réalisée à l'aide de plusieurs essais.

Par exemple, considérons un rotor flexible avec 2 plans de mesure et 2 plans de correction (illustré en figure 4.26). Les plans de correction sont les plans 1 et 2, et les plans de mesure sont les plans A et B.

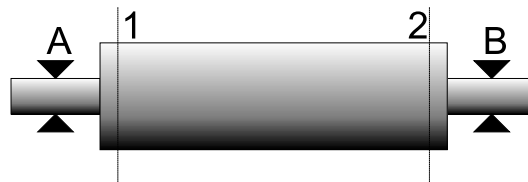


FIG. 4.26 – Rotor avec 2 plans de mesure et 2 plans de correction

L'hypothèse de base pour la technique d'équilibrage à deux plans est la représentation du balourd par deux masses, une à chaque plan de correction. Cette fois-ci, la relation entre

les vibrations mesurées et les balourds sur les plans 1 et 2 est une matrice de coefficients d'influence d'ordre  $2 \times 2$ . L'équation de transformation est :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_A \\ \mathbf{V}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{A1} & \mathbf{C}_{A2} \\ \mathbf{C}_{B1} & \mathbf{C}_{B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

où  $\mathbf{V}_A$  et  $\mathbf{V}_B$  sont les vibrations mesurées sur les plans A et B,  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  sont les balourds inconnus,  $\mathbf{C}_{A1}$ ,  $\mathbf{C}_{A2}$ ,  $\mathbf{C}_{B1}$  et  $\mathbf{C}_{B2}$  sont les coefficients d'influence. Comme dans la technique d'équilibrage à 1 plan, la détermination des coefficients d'influence passe par plusieurs essais.

Nous commençons par faire tourner le rotor à la vitesse désirée et nous mesurons sur les plans A et B les vibrations  $\mathbf{V}_A$  et  $\mathbf{V}_B$ . Nous installons ensuite une masse de test  $M_{T1}$  sur le plan 1 à une position angulaire  $\psi_{T1}$ . Les mesures sur les plans A et B sont notées  $\mathbf{V}_{A1}$  et  $\mathbf{V}_{B1}$ . D'après l'équation 4.18 nous pouvons alors écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{A1} \\ \mathbf{V}_{B1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{A1} & \mathbf{C}_{A2} \\ \mathbf{C}_{B1} & \mathbf{C}_{B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 + \mathbf{M}_{T1} \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Nous procédons de la même manière pour le plan 2. Nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{A2} \\ \mathbf{V}_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{A1} & \mathbf{C}_{A2} \\ \mathbf{C}_{B1} & \mathbf{C}_{B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 + \mathbf{M}_{T2} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Par soustraction de l'équation 4.19 à l'équation 4.18, nous déterminons les coefficients d'influence  $\mathbf{C}_{A1}$  et  $\mathbf{C}_{B1}$ . Similairement, la soustraction de l'équation 4.20 à l'équation 4.18 donne les coefficients  $\mathbf{C}_{A2}$  et  $\mathbf{C}_{B2}$ . La matrice des coefficients d'influence décrite en équation 4.18 est complètement déterminée et nous pouvons maintenant trouver les masses de correction dont l'effet s'oppose à celui des balourds à équilibrer :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{C1} \\ \mathbf{M}_{C2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Les équations 4.21 et 4.18 amènent à :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{C1} \\ \mathbf{M}_{C2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{A1} & \mathbf{C}_{A2} \\ \mathbf{C}_{B1} & \mathbf{C}_{B2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_A \\ \mathbf{V}_B \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

De plus, Everett [16] présente une méthode d'équilibrage où les mesures de phase ne sont pas nécessaires. La méthode a été conçue pour l'équilibrage de rotors rigides, mais peut être appliquée à des rotors flexibles à une vitesse donnée. La méthode est une extension de la méthode de trois masselottes au cas de 2 plans et elle est proposée pour des cas où la méthode des coefficients d'influence à 2 plans ne donne pas des bons résultats. La

méthode proposée nécessite 7 essais et 14 mesures d'amplitude de vibration sur les plans de mesure. Les avantages de cette méthode par rapport à la méthode des coefficients d'influence à 2 plans sont : (1) pouvoir équilibrer un rotor à une vitesse proche des vitesses critiques et, (2) équilibrer des rotors où la mesure de phase est difficile, voir impossible. Ramamurti et Anataraman [61] ont comparé la technique des coefficients d'influence à 2 plans et la technique d'Everett, et ont conclu que cette dernière apparaissait plus efficace.

Parmi les désavantages de la méthode des coefficients d'influence, nous pouvons citer le grand nombre d'essais nécessaires et le nombre de mesures à réaliser. Pour remédier à ces problèmes, Xu et al. [90] proposent une technique où il n'a pas besoin de faire des essais pour la détermination des coefficients d'influence. La méthode utilise une technique d'optimisation (algorithme génétique) alliée à un modèle numérique du rotor.

La méthode des coefficients d'influence, bien que très efficace, ne permet pas toujours d'équilibrer les rotors flexibles présentant un amortissement faible (Erich [15]). Il est donc nécessaire de prévoir des stratégies spécifiques à même de répondre à ce type de difficulté.

### Equilibrage modal

La méthode d'équilibrage modal est basée sur la connaissance du comportement modal du système au voisinage des vitesses critiques. La méthode est capable d'équilibrer le rotor sur des vitesses critiques successives sans dégrader les équilibrages effectués auparavant.

En général le nombre de plans nécessaires pour l'équilibrage de la vitesse critique  $j$  est égal à  $j$ . La position des plans d'équilibrage est définie grâce à la déformée modale (les plans se situent au niveau d'un ventre de vibration). Cependant, si les modes de corps rigide sont gênants et empêchent le franchissement de la première vitesse critique, le nombre de plans d'équilibrage est augmenté de 2 (pour prendre en compte l'équilibrage des modes de corps rigide).

Dans l'approche présentée par Erich [15], le rotor est modélisé comme suit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{U}\Omega^2 e^{i\Omega t} \quad (4.23)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement proportionnel,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur et  $\mathbf{U}$  le vecteur des balourds inconnus. Nous considérons que les efforts gyroscopiques sont négligeables.

Par des moyens traditionnels, nous pouvons trouver les vecteurs propres et les valeurs propres du système représenté par l'équation 4.23. La base modale tronquée à  $m$  modes nous permet d'avoir une matrice de vecteurs propres réduite qui s'écrit comme :

$$\Phi_m = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_m \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

La matrice des vecteurs propres réduite est utilisée pour découpler le système d'équations 4.23 :

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{\Delta}_m \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}_m^T \mathbf{U} \omega^2 e^{i\omega t} \quad (4.25)$$

où  $\mathbf{\Delta}_m$  est la matrice des constantes modales réduites d'amortissement et  $\mathbf{\Lambda}_m$  la matrice spectrale.

L'équation 4.25 comprend les  $m$  oscillateurs découplés qui représentent la dynamique du rotor dans l'espace modal :

$$\ddot{y}_j + 2\zeta_j \omega_{0j} \dot{y}_j + \omega_{0j}^2 y_j = \phi_i^T \mathbf{U} \Omega^2 e^{i\omega t}, \quad 1 \leq j \leq m \quad (4.26)$$

Equilibrer le mode  $j$  consiste alors à appliquer une distribution de balourds  $\mathbf{U}_C$  sur le rotor de manière à annuler les forces généralisées originaires du balourd résiduel  $\mathbf{U}$ . La distribution des balourds de correction est un vecteur où tous les éléments sont nuls sauf ceux correspondants aux coordonnées généralisées des plans d'équilibrage. La relation entre le balourd de correction et le balourd résiduel, pour le  $i$ -ème mode, est donnée par (Genta [20]) :

$$\phi_i^T (\mathbf{U} + \mathbf{U}_{C_i}) = 0 \quad (4.27)$$

Pour équilibrer la première vitesse critique, l'équation 4.27 fournit :

$$\phi_{1k} U_{C_1} = -\phi_1^T \mathbf{U} \quad (4.28)$$

où l'indice  $k$  indique la composante de  $\phi_1$  correspondant au plan d'équilibrage du premier mode. Pour le deuxième mode la procédure est la même, en rajoutant le fait que le vecteur des balourds généralisés  $\mathbf{U}_{C_2}$  doit être orthogonal au vecteur propre du premier mode de manière à préserver l'équilibrage effectué sur la première vitesse critique.

Expérimentalement, nous avons besoin de mesurer les déformées modales pour construire la matrice des vecteurs propres et il est impératif de connaître le vecteur des balourds résiduels. Pour cela, une stratégie analogue à celle employée dans la méthode des coefficients d'influence, c'est-à-dire, effectuer différents essais, peut être utilisée.

## 4.6 Simulations numériques d'équilibrage

Afin d'analyser l'efficacité des différentes techniques d'équilibrage qui ont été présentées, ces dernières vont être mises en oeuvre sur un modèle numérique de rotor flexible comme illustré en figure 4.27.



### 4.6.1 Description du rotor

L'exemple qui a été choisi correspond au rotor DDE dont les caractéristiques géométriques et de matériaux sont rappelées dans les tableaux 4.3, 4.4 et 4.5.

Section :	1	2	3	4	5	6
$L_i$ (m)	0.222	0.568	0.284	0.284	0.146	0.196
Eléments	4					
E	$200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$					
$\rho$	$7800 \text{ kg/m}^3$					

TAB. 4.3 – Caractéristiques de l'arbre

Rayon externe	0.2 m
Rayon interne	0.02 m
Epaisseur	0.02 m
E	$200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
$\rho$	$7800 \text{ kg/m}^3$

TAB. 4.4 – Caractéristiques du disque

Organe	$K$ (N/m)	$C$ (Ns/m)
Support palier 1	$3.8 \times 10^6$	350
Support palier 2	$3.8 \times 10^6$	350
Roulement à billes	$8 \times 10^7$	0
Roulement à rouleaux	$7 \times 10^8$	0
Joint d'accouplement	$5.75 \times 10^4$	0

TAB. 4.5 – Propriétés radiales des supports paliers, des roulements et du joint d'accouplement

Afin d'être le plus réaliste possible, trois types différents de balourd ont été pris en compte simultanément. Le premier type de balourd est un balourd aléatoire réparti sur l'ensemble des degrés de liberté en déplacement, compris entre 0 et 4 g cm et, pour des positions angulaires, entre 0 et 360°. La loi de distribution utilisée est de type uniforme.

Le deuxième type de balourd est porté sur le disque (pièce la plus massive du rotor) et est égal à 140 g cm à 103°. Enfin, le dernier balourd ajouté au système est un balourd dynamique qui équivaut à une inclinaison du disque de  $3 \times 10^{-4}$  radians (même si cette valeur peut sembler faible elle est à elle seule capable de générer une dynamique de 500  $\mu\text{m}$  au niveau du support palier 1).

Afin de pouvoir équilibrer ce rotor nous allons définir différents plans de correction et de mesure. En s'appuyant sur les déformées modales à l'arrêt de la machine (figures 4.28 et 4.29) nous avons choisi 2 plans de correction C3 (qui correspond au disque) et C2 (qui est directement sur l'arbre), ainsi que 2 plans de mesure qui sont le support palier 1 et le plan C1 (qui est sur l'arbre).

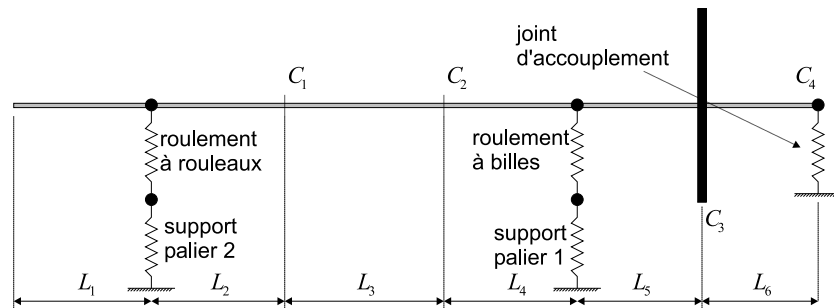


FIG. 4.27 – Schéma du rotor à équilibrer

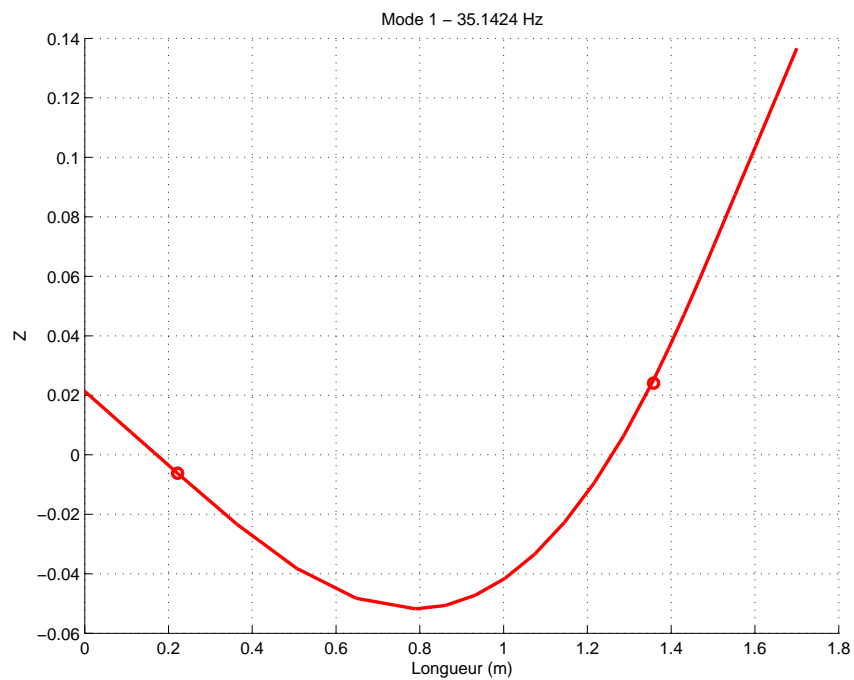


FIG. 4.28 – Première déformée modale

Les courbes de réponse pour les deux plans de mesure considérés sont illustrées en figure 4.30. Notons que les déplacements du rotor sans équilibrage à la première vitesse critique sont de l'ordre de  $3000 \mu\text{m}$ , mesurés au plan de mesure 1 (plan  $C_1$ ), et  $2800 \mu\text{m}$  au plan de mesure 2 (support palier 1). Sur la deuxième vitesse critique le déplacement atteint  $800 \mu\text{m}$  sur le plan de mesure  $C_1$  tandis que sur le support palier 1 le déplacement est proche de  $270 \mu\text{m}$ .

#### 4.6.2 Équilibrage par une approche exhaustive

Dans un premier temps, nous allons chercher l'angle optimal de correction. Pour cela, nous disposons sur le disque une masse de 5 g à 20 cm de l'axe de rotation dont nous faisons varier la position. On constate en figure 4.31 que l'angle optimal vis-à-vis de la mesure sur le support palier 1 est de  $284.6^\circ$ .

Dans un deuxième temps, nous fixons l'angle et nous faisons varier l'intensité du balourd jusqu'à obtenir le niveau minimum sur le support palier 1. La masse de correction ainsi obtenue est égale à 8.62 g. La figure 4.33 illustre l'efficacité de l'équilibrage réalisé au niveau du support palier 1. En effet, la masse de correction a permis de diminuer le pic de la vitesse critique de  $2800 \mu\text{m}$  à  $22 \mu\text{m}$ . Le pic de la deuxième vitesse critique est aussi influencé par l'équilibrage, en passant de  $270 \mu\text{m}$  à  $554 \mu\text{m}$ . De plus, en regardant les déformées opérationnelles avant et après l'équilibrage, nous voyons que les niveaux sont très faibles sur tous les points de l'arbre, comme le montrent les figures 4.34 et 4.35.

Afin d'étudier la sensibilité du système à l'équilibrage, nous supposons qu'une erreur de  $10^\circ$  sur la détermination de la phase de correction mesurée a été commise. Sous cette hypothèse, la masse de correction passe de 8.62g à 8.49g et le déplacement du support palier de  $22 \mu\text{m}$  à  $480 \mu\text{m}$ . Ceci permet de mettre en évidence l'importance de la bonne détermination de l'angle de correction.

#### 4.6.3 Équilibrage par la méthode des coefficients d'influence à 1 plan

Nous allons maintenant appliquer le méthode des coefficients d'influence pour équilibrer le rotor présenté au paragraphe précédent. Le plan de correction a été choisi sur le disque. La méthode donne alors une masse de correction égale à 8.61g et située à  $284.76^\circ$ . La différence observée sur l'angle de correction, par rapport à la méthode exhaustive, est due à la discrétisation utilisée dans la recherche de l'angle optimal (dans la méthode exhaustive). Après l'équilibrage, nous retrouvons donc les mêmes courbes de réponse et déformées que par l'approche précédent (figures 4.33, 4.34 et 4.35).

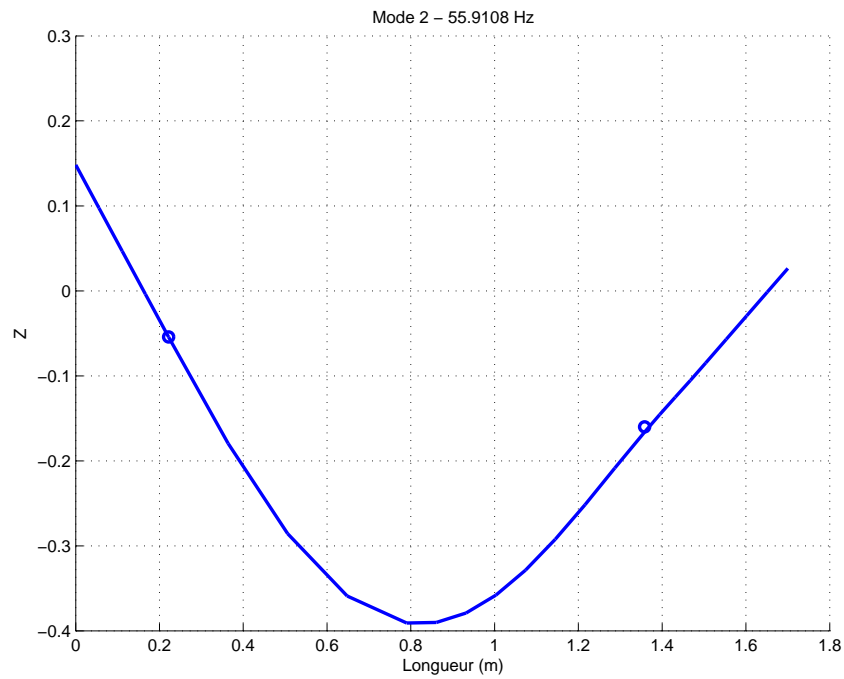


FIG. 4.29 – Deuxième déformée modale

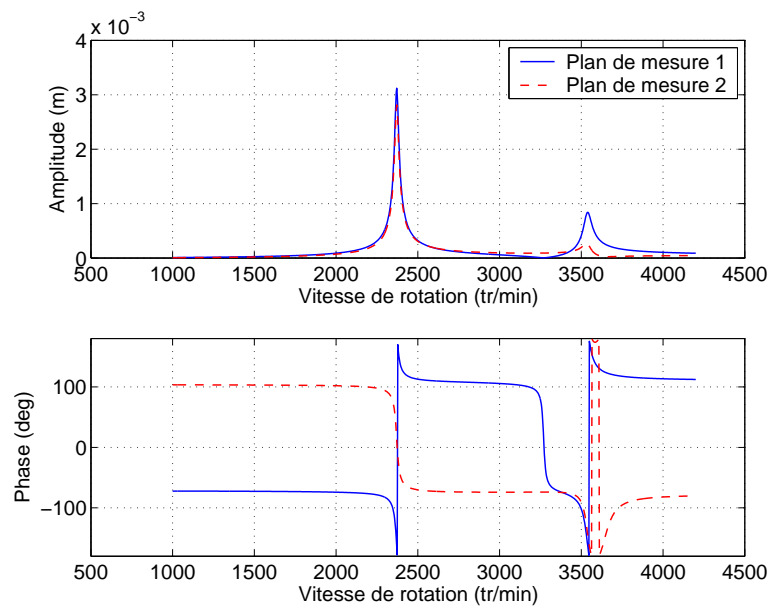


FIG. 4.30 – Réponses sur les plans de mesure avant l'équilibrage

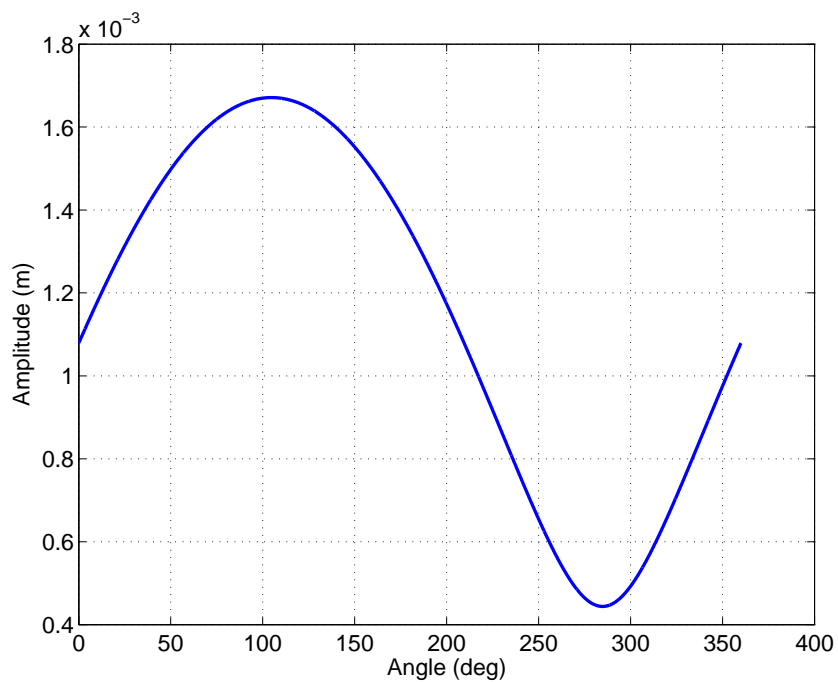


FIG. 4.31 – Recherche de l'angle optimale

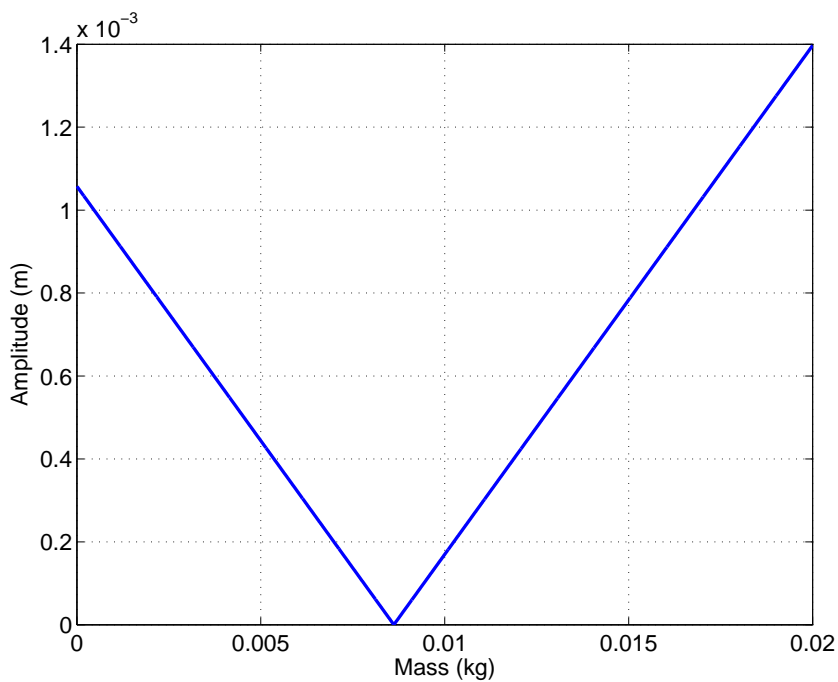


FIG. 4.32 – Recherche de la masse optimale

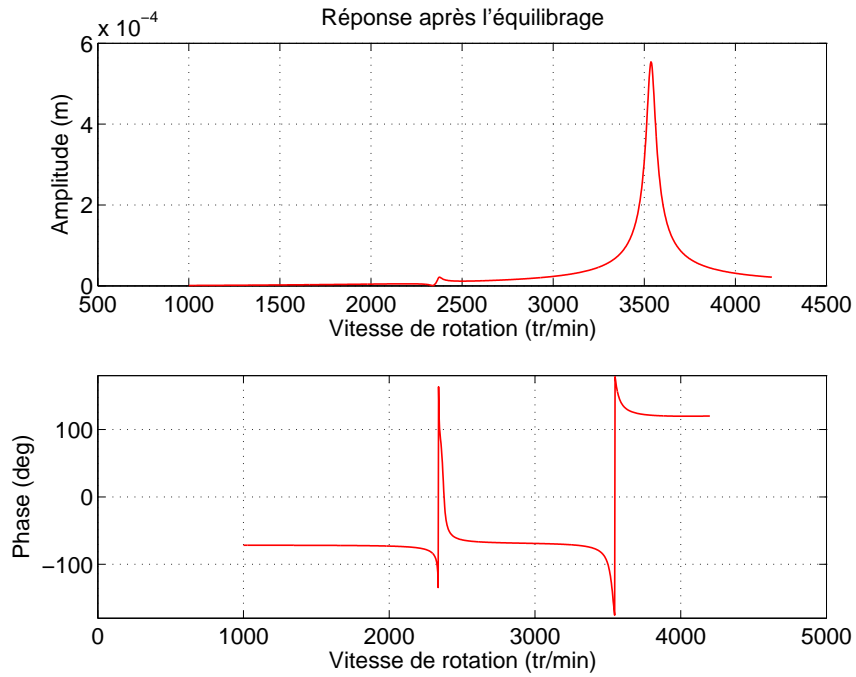


FIG. 4.33 – Courbes de réponse mesurées sur le support palier

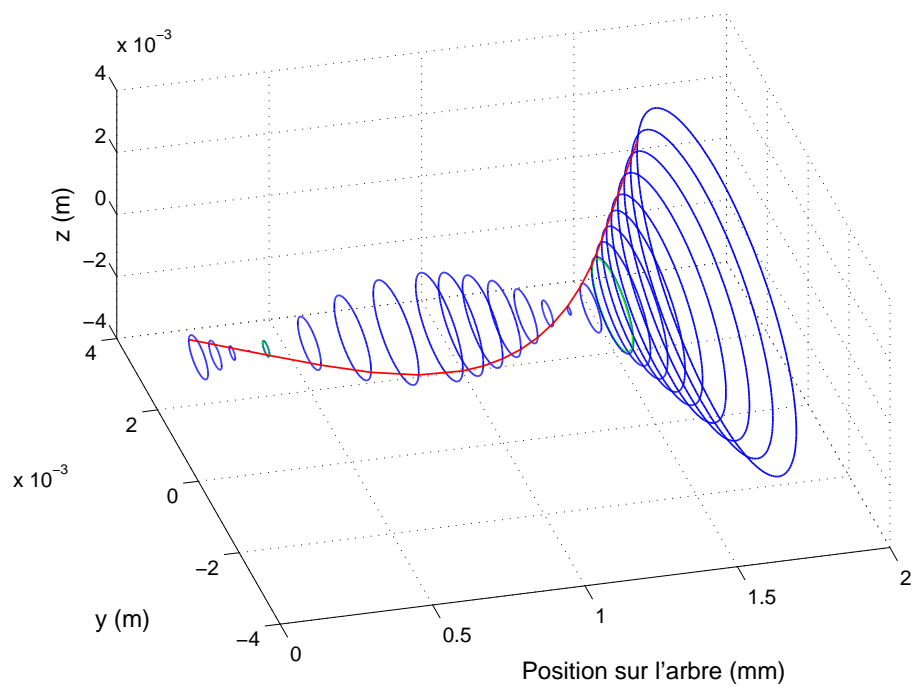


FIG. 4.34 – Déformée opérationnelle à 2340 tr/min avant l'équilibrage

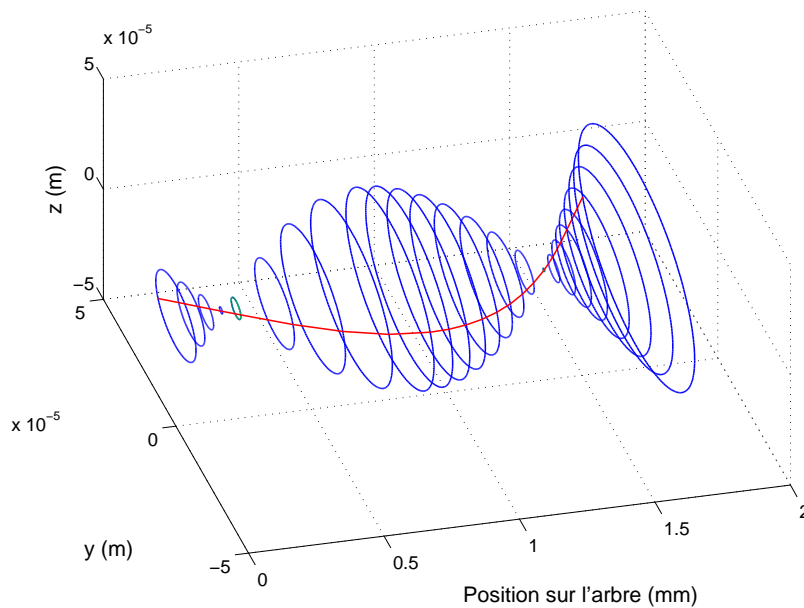


FIG. 4.35 – Déformée opérationnelle à 2340 tr/min après l'équilibrage

#### 4.6.4 Equilibrage par la méthode des coefficients d'influence à 2 plans et une vitesse d'équilibrage

Nous considérons maintenant le problème de l'équilibrage à 2 plans d'équilibrage pour une vitesse de 2340 tr/min. Les plans de mesure sont le support palier 1 (plan de mesure 2) et le plan C1 (plan de mesure 1). Les plans de correction sont les plans C2 et le disque. En suivant la démarche décrite au paragraphe 4.5.2, nous trouvons pour le plan C2 une masse de correction égale à 12.38g (à 20 mm du centre) et située à un angle de 113.23°. Sur le disque la masse de correction vaut 8.36g à 284.50°.

Notons que le décalage angulaire entre les masses de correction vaut 171.27°, ce qui montre que les corrections sont presque en opposition de phase et le moment causé par ces deux forces radiales équilibre principalement le moment dû à l'inclinaison du disque.

Les courbes de réponse après l'équilibrage sont données en figures 4.36 et 4.37. Notons que l'équilibrage à 2 plans permet de diminuer aussi l'amplitude sur la deuxième vitesse critique. En effet, sur la première vitesse critique nous avons 2  $\mu\text{m}$  sur le plan de mesure 1 (22  $\mu\text{m}$  avec l'équilibrage à 1 plan) et 1.6  $\mu\text{m}$  sur le plan 2. Sur la deuxième vitesse critique nous avons 66  $\mu\text{m}$  sur le plan 1 et 19  $\mu\text{m}$  sur le plan 2 (554  $\mu\text{m}$  pour l'équilibrage à 1 plan).

Sur les déformées opérationnelles illustrées en figures 4.38 et 4.39, nous voyons que l'équilibrage à 2 plans réduit fortement les niveaux de déplacement le long de l'arbre. De plus, la déformée opérationnelle du rotor équilibré à 2 plans est plus complexe que celle obtenue à 1 plan, car les faibles déplacements des modes 1 et 2 ne masquent plus la contribution des modes supérieurs.

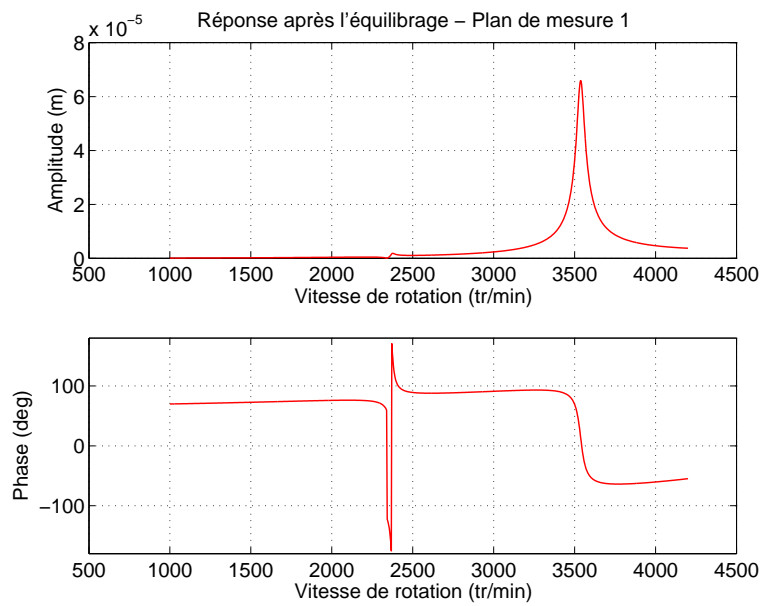


FIG. 4.36 – Courbes de réponse mesurée sur le plan C1

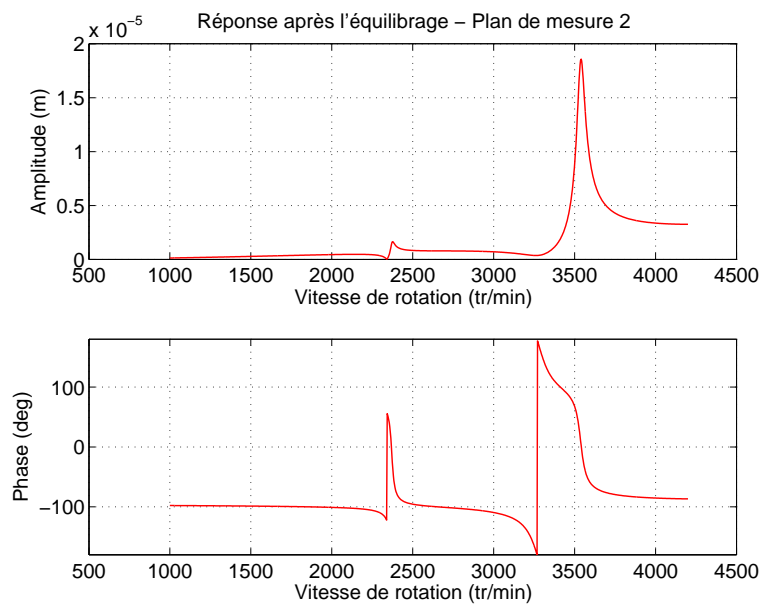


FIG. 4.37 – Courbes de réponse mesurée sur le support palier 1



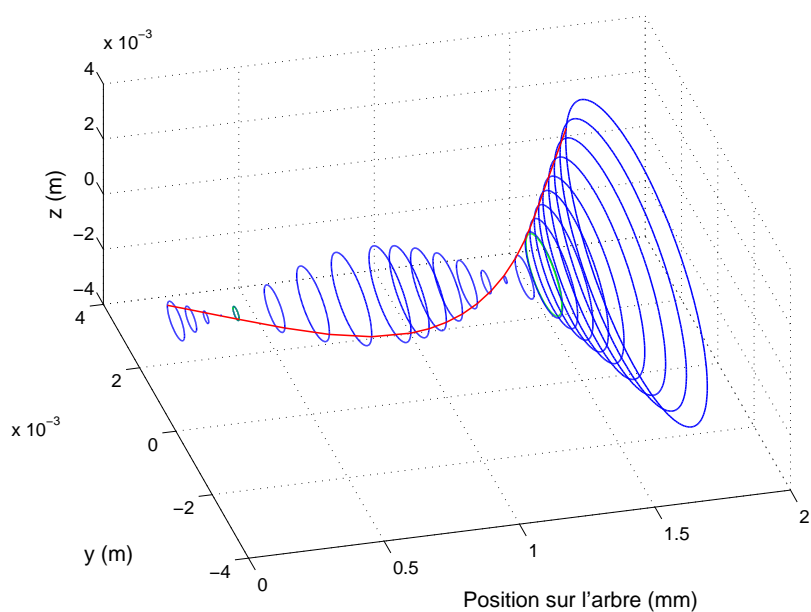


FIG. 4.38 – Déformée opérationnelle à 2340 tr/min avant l'équilibrage par les coefficients d'influence à 2 plans

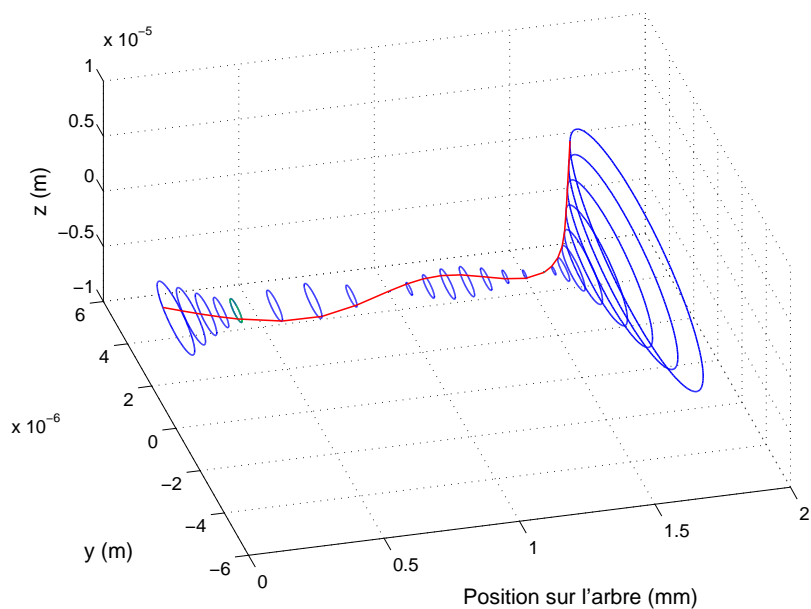


FIG. 4.39 – Déformée opérationnelle à 2340 tr/min après l'équilibrage par les coefficients d'influence à 2 plans

#### 4.6.5 Equilibrage par la méthode des coefficients d'influence à 2 plans et deux vitesses d'équilibrage

Les résultats précédemment obtenus peuvent encore être améliorés si nous utilisons un équilibrage prenant en compte deux vitesses de rotation. En choisissant une deuxième vitesse proche de la deuxième vitesse critique (ce qui suppose que nous sommes capables de franchir la première vitesse critique), nous pouvons nous attendre à obtenir une diminution de sa participation dans la dynamique de la machine.

Nous prendrons comme deuxième vitesse 3515 tr/min (soit 30 tr/min en dessous de la deuxième vitesse critique). Ceci nous amène à une procédure d'équilibrage où la détermination des masses de correction passe par le problème d'optimisation décrit par l'équation 4.17.

Cette procédure, appliquée au rotor étudié précédemment, nous donne alors une masse de correction de 11.98g à 113.57° pour le plan de correction 1 et de 8.37g à 284.51° pour le plan de correction 2. Il est intéressant de comparer ces corrections avec les corrections obtenues pour l'équilibrage à 2 plans uniquement pour une vitesse de rotation. En prenant ce dernier cas comme référence, nous voyons que les différences entre les deux équilibrages se situent principalement sur la valeur de la masse de correction au niveau du plan 1. De plus les courbes de réponse sont assez différentes par rapport à celles obtenues précédemment (figures 4.40 et 4.41).

Après équilibrage, le niveau chute à 0.7  $\mu\text{m}$  pour la première vitesse critique et 1.3  $\mu\text{m}$  pour la deuxième vitesse critique (plan de mesure 1). La diminution de la dynamique est cette fois importante et conduit même à l'apparition d'une "anti-résonance" au niveau de la deuxième vitesse critique pour le plan de mesure 2 (figure 4.41).

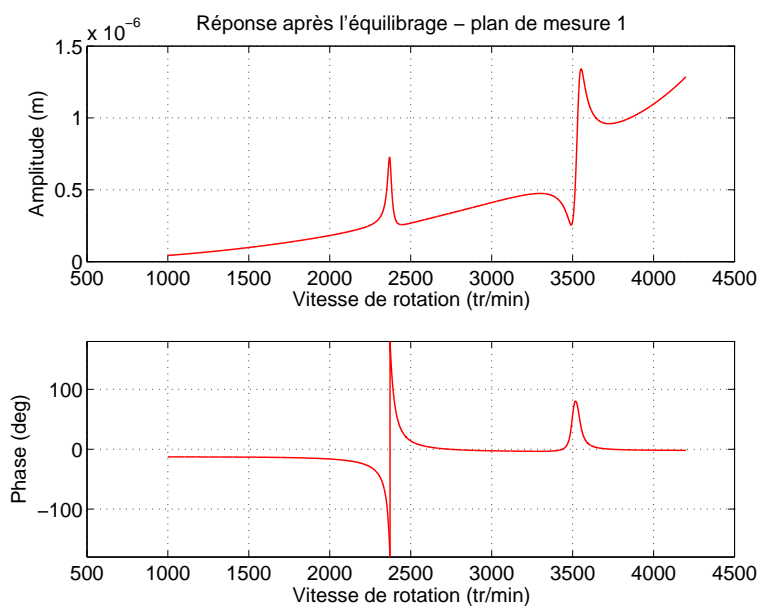


FIG. 4.40 – Courbe de réponse mesurée sur le plan C1

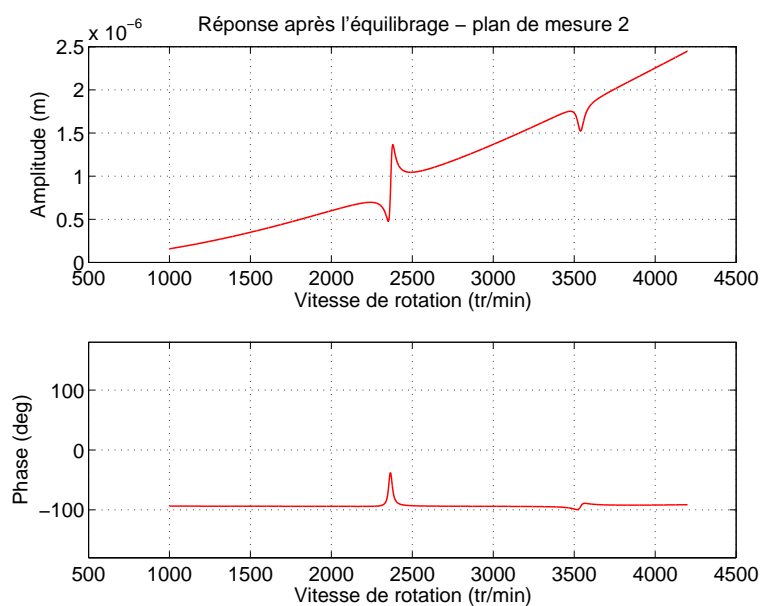


FIG. 4.41 – Courbe de réponse mesurée sur le support palier 1

#### 4.6.6 Conclusion

L'ensemble des simulations d'équilibrage qui vient d'être réalisé démontre l'efficacité de chacune des procédures et la cohérence des résultats. Il a été démontré l'extrême sensibilité des corrections sur la dynamique de la machine (en particulier par rapport à la phase, voir paragraphe 4.6.2), ce qui laisse supposer que l'équilibrage devra être effectué avec beaucoup de précision.



## Chapitre 5

# Etudes expérimentales et numériques du Banc DDE

### 5.1 Résultats expérimentaux

Nous allons étudier dans ce chapitre les essais de caractérisation dynamique menés sur le banc Dynamique D'Ensemble (DDE) de l'Ecole Centrale de Lyon. Ces essais consistent à analyser la réponse vibratoire au voisinage de la première vitesse critique de la machine, mais aussi l'éventuel comportement non linéaire lié à la dynamique des roulements.

Les support paliers étant réglés dans un premier temps à  $3.8 \times 10^6$  N/m en raideur de flexion, nous allons réaliser différentes analyses afin de bien maîtriser le banc qui vient d'être défini. Pour la suite de l'étude, cette configuration du banc sera appelée configuration A1.

Parmi ces analyses, nous allons étudier l'influence de la température et de la rigidification des supports paliers, mais aussi l'apport d'amortissement externe sur la machine. L'ensemble de ces tests permettra de corriger et d'améliorer le modèle éléments finis qui a été préalablement développé, et d'analyser les premiers comportements non linéaires observés.

#### 5.1.1 Phase d'équilibrage

Le rotor a été équilibré au moyen de la méthode exhaustive en prenant le disque comme plan de correction et le support palier 1 comme plan de mesure. Nous utilisons en parallèle la méthode des coefficients d'influence pour valider les résultats d'équilibrage obtenus. Lors de cette phase d'équilibrage, les essais sont réalisés à une température fixe de 40°C (sur le roulement à billes) pour éviter une influence possible de ce paramètre sur les niveaux vibratoires.

La méthode exhaustive indique que la masse de correction vaut 4.36g et sa position sur

le disque est à  $300^\circ$ . La vitesse d'équilibrage est 2550 tr/min et l'amplitude sur le support palier 1 a chuté de  $478 \mu\text{m}$  à  $281 \mu\text{m}$ . La figure 5.1 illustre la recherche de la position optimale d'une masse de test de 4.36g sur le disque.

La méthode des coefficients d'influence à 1 plan indique qu'il faudrait une masse de correction de 10.31g à  $272^\circ$  (valeurs moyennes) pour équilibrer la machine. Nous observons une variation importante des valeurs calculées par la méthode des coefficients d'influence : pour la masse la variation est égale à 47% et pour la position de correction la variation est égale à 11% (variation = écart type/ moyenne). Cette variation des valeurs est principalement due à la difficulté de déterminer avec précision les phases quand nous sommes proche de la vitesse critique, ce qui est le cas ici. Cette constatation est en accord avec les précédents résultats de simulation réalisés dans le paragraphe 4.6.2.

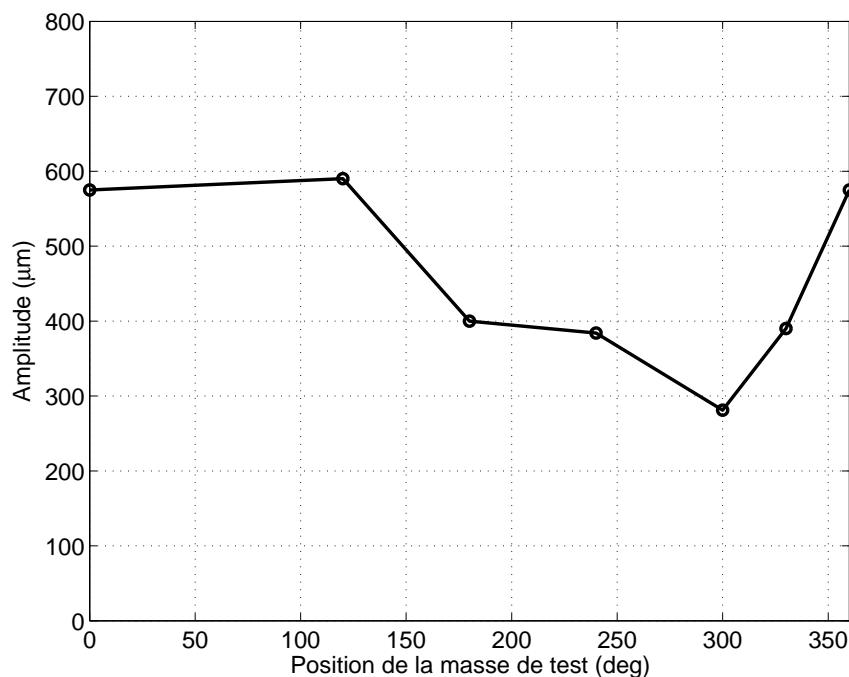


FIG. 5.1 – Equilibrage de la configuration A1

### 5.1.2 Franchissement de la première vitesse critique

Les figures 5.2-5.11 montrent les premiers résultats obtenus (en configuration A1). Il s'agit de la composante synchrone de la réponse du rotor au balourd résiduel. Nous sommes allés jusqu'à une vitesse de 3730 tr/min sous une accélération moyenne de 23 tr/min/s.

Les déplacements maximaux ont été observés sur les plans C3 et C4, quand le rotor s'approche de la deuxième vitesse critique. La première vitesse critique directe se situe à 2640 tr/min et nous constatons aussi la présence d'un pic à 2260 tr/min correspondant à la vitesse critique rétrograde. Nous reviendrons sur ce point lors de la détermination du diagramme de Campbell expérimental.

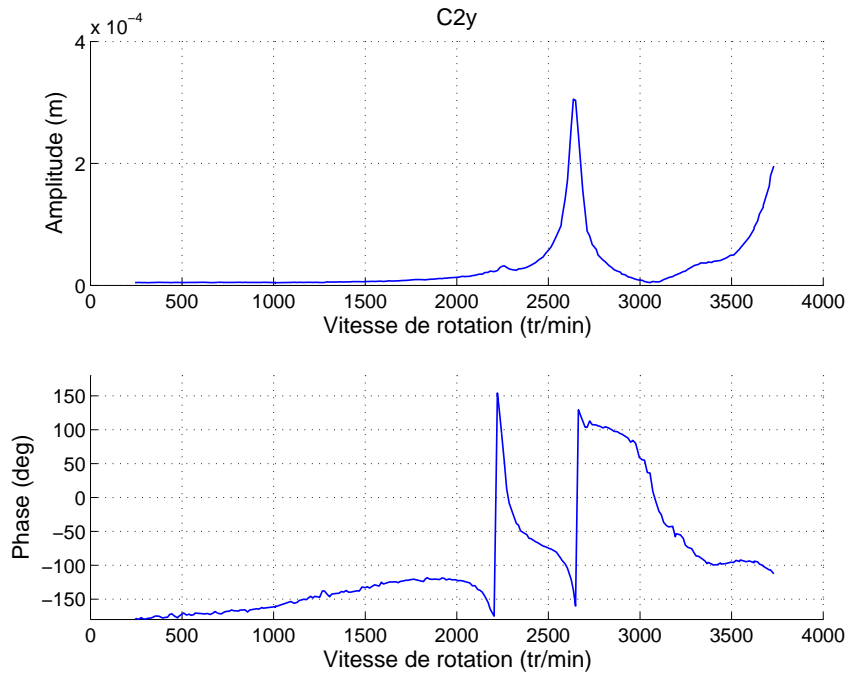


FIG. 5.2 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le capteur C2y

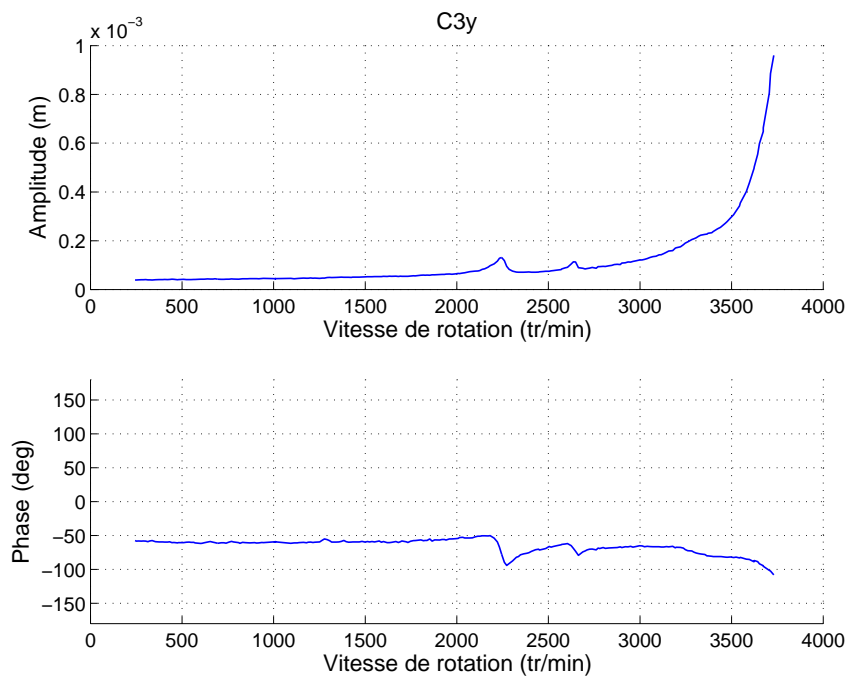


FIG. 5.3 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le capteur C3y

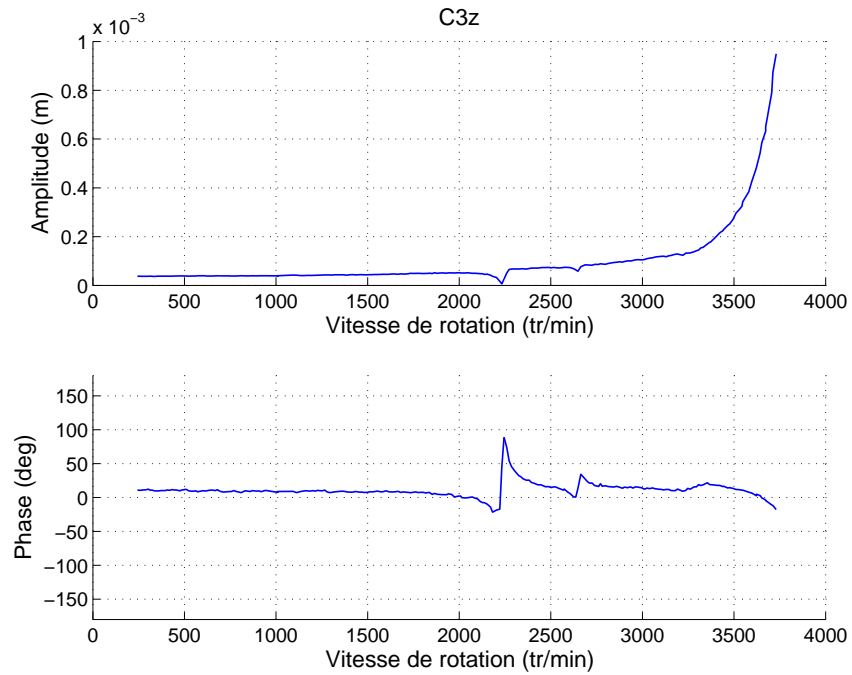


FIG. 5.4 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le capteur C3z

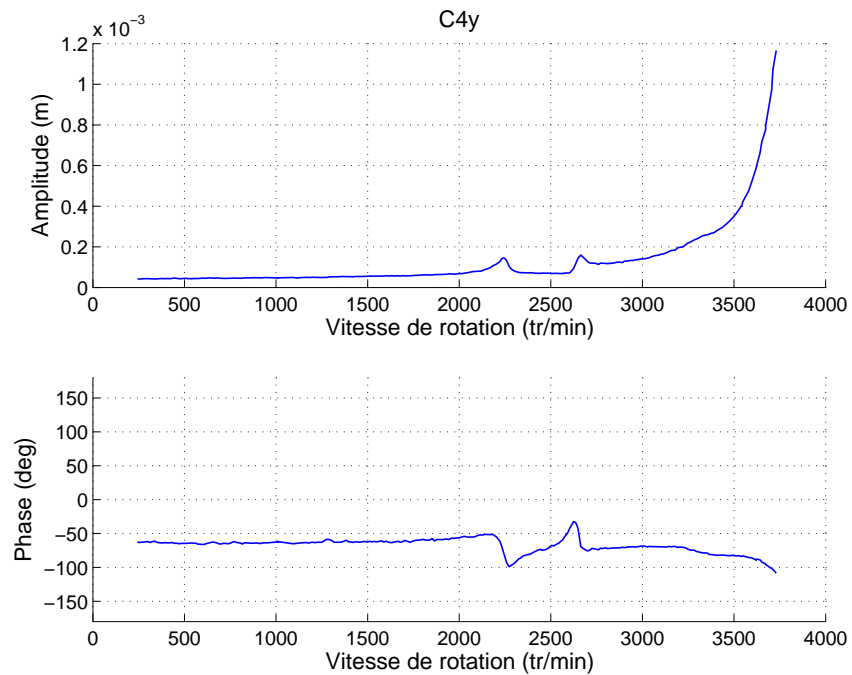


FIG. 5.5 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le capteur C4y



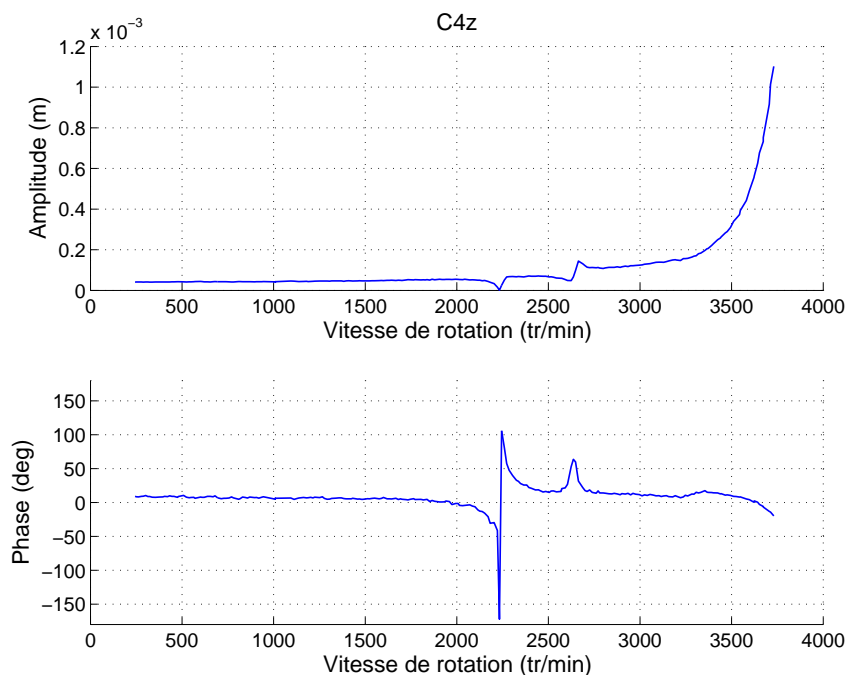


FIG. 5.6 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le capteur C4z

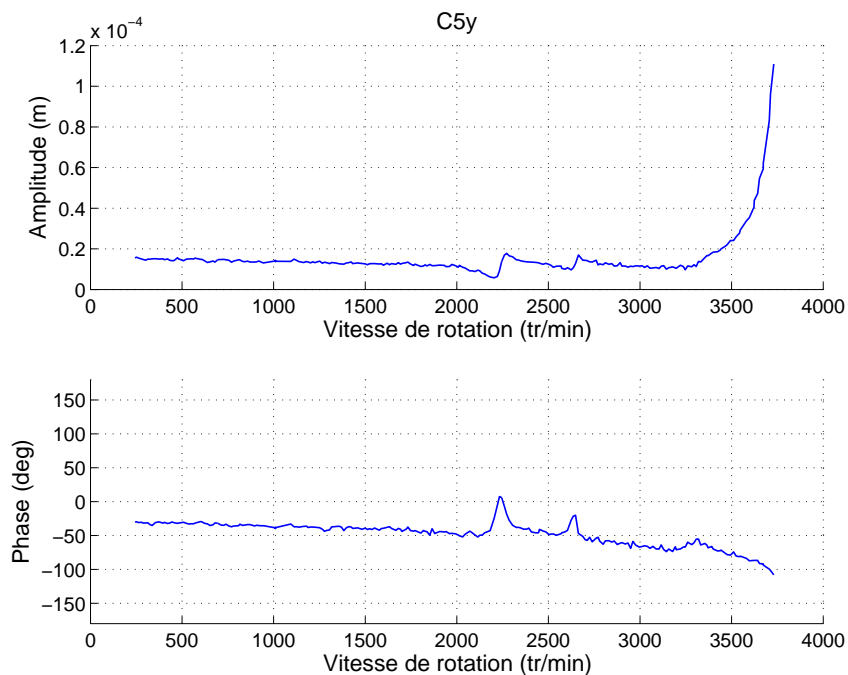


FIG. 5.7 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le capteur C5y

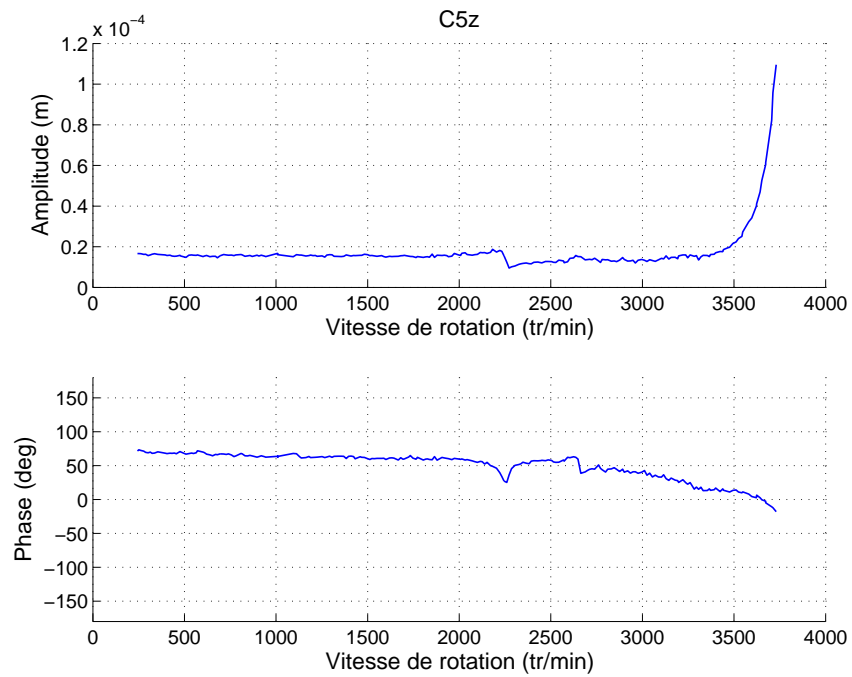


FIG. 5.8 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le capteur C5z

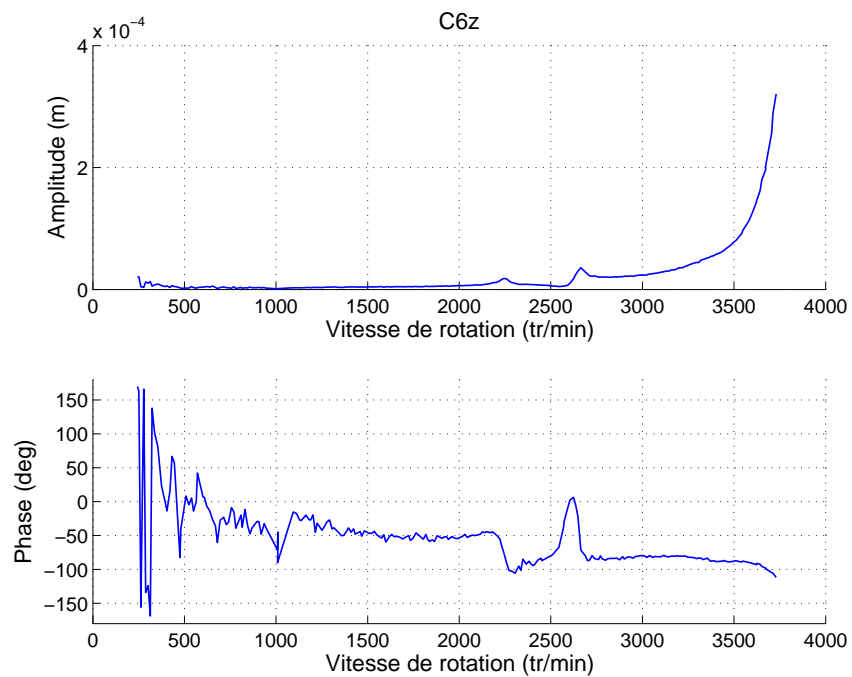


FIG. 5.9 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le capteur C6z

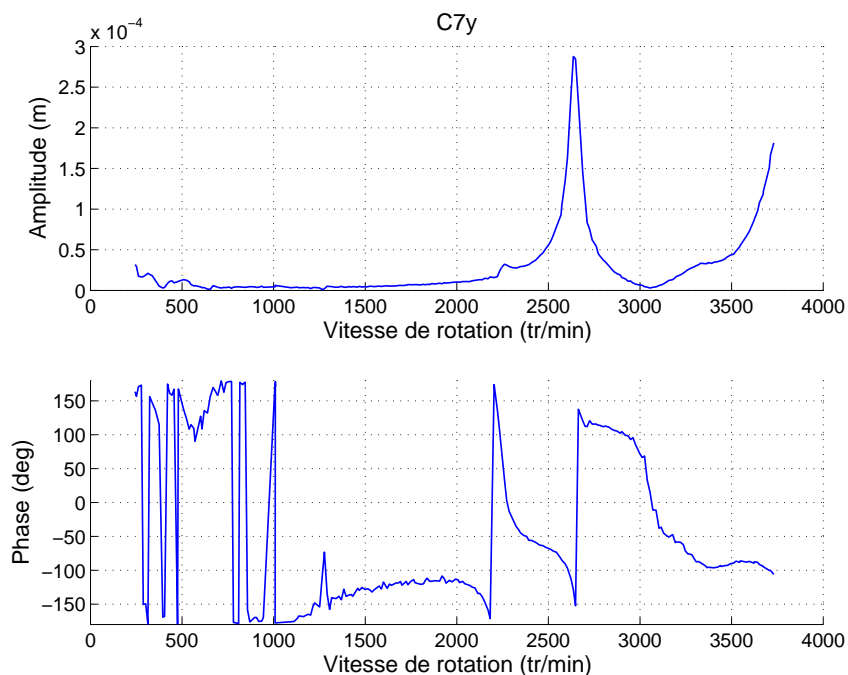


FIG. 5.10 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le capteur C7y

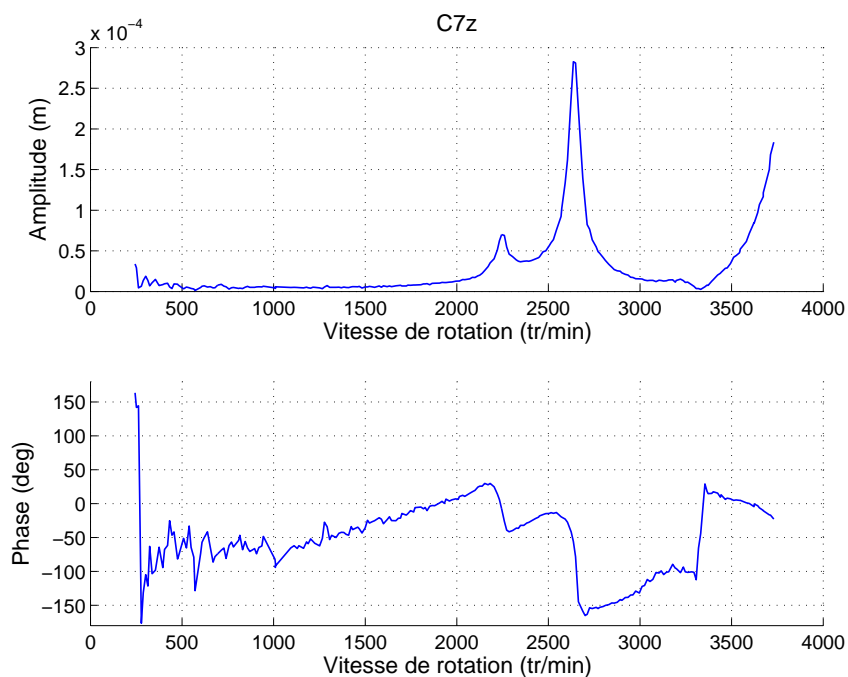


FIG. 5.11 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le capteur C7z

Températures (°C)		Amplitude $\mu\text{m}$	Vitesse critique (tr/min)
Début d'essai	Fin d'essai		
30	32	190	2672
33	35	220	2662
38	38	240	2653
40	40	260	2650

TAB. 5.1 – Influence de la température en montée

Températures (°C)		Amplitude $\mu\text{m}$	Vitesse critique (tr/min)
Début d'essai	Fin d'essai		
34	36	105	2670
36	39	140	2660
40	42	150	2655
42	44	170	2640

TAB. 5.2 – Influence de la température en descente

### 5.1.3 Influence de la température du roulement à billes sur les essais

Nous allons maintenant examiner l'influence de la température du roulement à billes sur les niveaux vibratoires. En effet, il est intéressant, voire nécessaire, de savoir si la température de démarrage des essais influence les mesures, et si c'est le cas, de quelle manière. Aussi, connaître l'influence de la température peut s'avérer utile afin de maîtriser le passage de la vitesse critique de façon sécurisée. Ainsi, des essais de franchissement de la vitesse critique ont été conduits pour quantifier cette influence sur la vitesse critique et sur les niveaux vibratoires atteints par le support palier 1.

Nous avons choisi la température du roulement à billes comme paramètre de contrôle et les essais pour cette étude sont des réponses à balourd avec une vitesse de montée en régime constante (13 tr/min/s) et une vitesse de descente en régime constante (17 tr/min/s). Les résultats sont présentés en figures 5.12 et 5.13.

En prenant les essais de montée en vitesse (figure 5.12), nous observons que la vitesse critique diminue quand la température augmente (tableau 5.1). Nous concluons qu'une augmentation de 30°C à 40°C fait chuter la vitesse critique (variation de 0.8% par rapport au essai à 40°C) et fait monter le niveau sur le support palier de 70  $\mu\text{m}$  (variation de 27%). Pour les essais de descente en vitesse (figure 5.13), les résultats sont synthétisés dans le tableau 5.2. Les variations sont égales à 1.1% (par rapport à l'essai à 42°C) sur la vitesse critique et 38% sur les niveaux.

Cette analyse montre le rôle essentiel joué par la température sur les réponses vibratoires. L'effet observé est principalement un "assouplissement" du système quand la température augmente combinée avec une augmentation du niveau provenant probablement d'une perte d'efficacité de l'équilibrage.

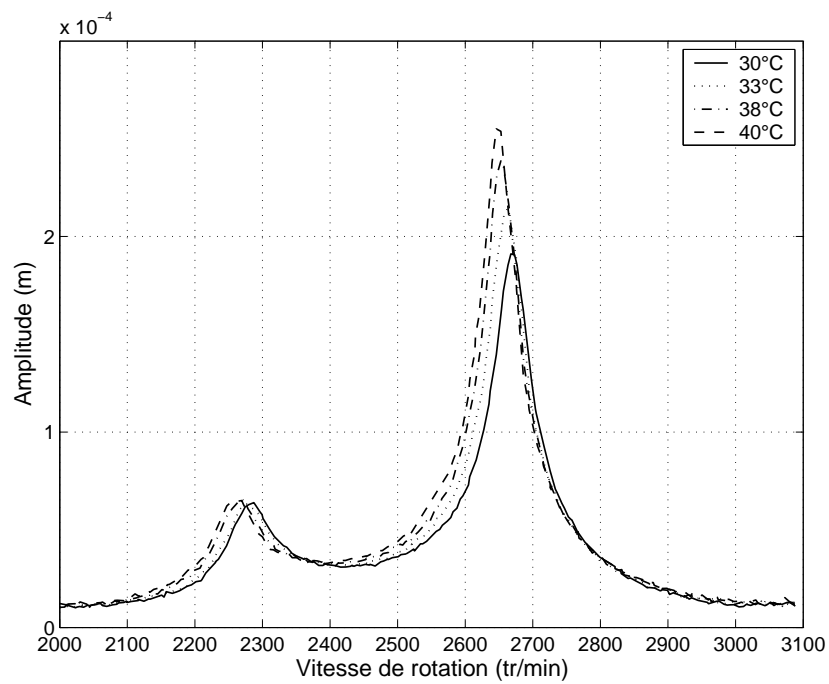


FIG. 5.12 – Influence de la température sur la réponse (montée en vitesse, mesure sur le capteur C7z)

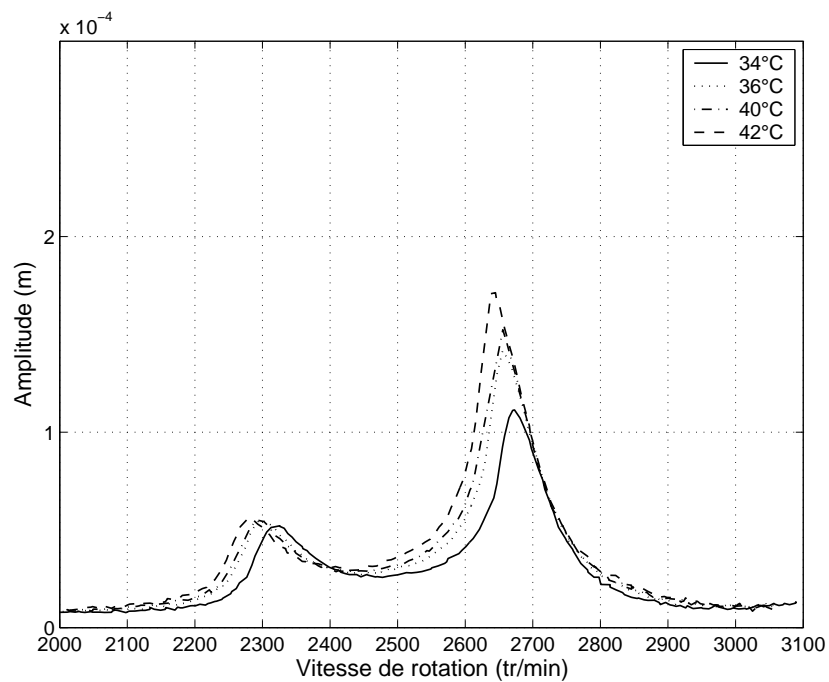


FIG. 5.13 – Influence de la température sur la réponse (descente en vitesse, mesure sur le capteur C7z)

### 5.1.4 Les déformées opérationnelles

La mesure des déformées opérationnelles va nous permettre d'analyser plus finement la dynamique du rotor, en repérant les plans les plus dynamiques, le sens de précession des orbites, la présence d'harmoniques autres que le synchrone, etc..

Ainsi, nous avons mené des essais de mesures temporelles pour relever ces informations. Dans ce type d'essai, le rotor est placé à une vitesse déterminée et une acquisition de 10 secondes est effectuée. Pour la présentation des orbites et des déformées nous avons choisi une période d'acquisition. Par contre, pour l'analyse des spectres, nous avons considéré l'ensemble de l'acquisition dans le calcul, ce qui donne une situation spectrale moyenne.

Nous avons choisi trois vitesses pour visualiser les déformées opérationnelles. La première vitesse correspond au maximum du deuxième harmonique, la deuxième à la vitesse critique rétrograde et enfin la troisième, à la vitesse critique directe.

La première déformée opérationnelle a été relevée à 1280 tr/min, comme illustré en figure 5.14, où les carrés représentent les points mesurés sur l'arbre et les croix représentent des points mesurés sur les supports paliers. A 1280 tr/min le rotor est sur une vitesse où l'amplitude du deuxième harmonique est maximale. Sur cette déformée nous pouvons voir des boucles correspondant à la présence de composantes  $2X$  sur les réponses mesurées. Les niveaux les plus importants sont obtenus sur le capteur C1, et la boucle intérieure la plus prononcée est sur le plan C7. Le comportement du système à cette vitesse est connu dans la littérature comme " vitesse critique due à la gravité " (gravity critical) et est observable sur des rotors horizontaux avec des dissymétries sur la raideur des parties tournantes (Childs [8], Dimarogonas [14]). La dissymétrie engendre un couplage entre la réponse statique due au poids et la réponse dynamique en  $2\Omega$ . Ce couplage se caractérise alors par un pic de réponse à une fréquence de rotation correspondant à l'intersection de la droite d'excitation  $2X$  avec la courbe d'évolution des fréquences propres du mode direct dans le diagramme de Campbell. Nous allons revenir sur ce phénomène par la suite.

Le sens de précession des orbites obtenues est représenté graphiquement en figure 5.15, avec le début de l'orbite représenté par un cercle et la fin représentée par un carré (le rotor tourne dans le sens des aiguilles d'une montre). La figure montre que les orbites sur les plans C1, C3, C4 et C7 sont dans le sens de précession directe.

Les spectres des signaux acquis pour chaque capteur à 1280 tr/min sont montrés en figure 5.16. Pour le capteur C1y nous avons des pics significatifs à 21.37 Hz (correspondant à la fréquence de rotation) et à 42.75 Hz (le double de la fréquence de rotation). Pour le capteur C1y le rapport entre le deuxième harmonique et le premier vaut 0.47, ce qui justifie la forme de l'orbite sur le plan C1 où nous avons une orbite extérieure presque circulaire autour d'une orbite elle aussi pratiquement circulaire.

Les spectres pour les signaux sur le plan C3 présentent le premier harmonique comme étant dominant. En fait, sur C3y le premier harmonique est 4.7 fois plus fort en niveau que le deuxième. Le spectre du capteur C4y est analogue à celui de C3y. Sur les plans C5 et C6

le contenu spectral est riche, car il est associé à une dynamique faible. Les signaux acquis sur le plan de mesure C7 montrent une dynamique dominée par le deuxième harmonique.

Afin d'étudier la vitesse critique rétrograde, nous nous sommes placés à une vitesse de rotation égale à 2260 tr/min, et nous avons mesuré la réponse du rotor (figure 5.17). Les orbites sur les plans C3 et C4 sont aplaties, avec une composante du déplacement horizontal plus grande que la composante du déplacement vertical : ceci peut être attribué à la présence de dissymétries (déjà relevées sur le banc, cf. paragraphe 4.1.4).

Les sens de précession sont déterminés en regardant les orbites dans leur plan, comme illustré en figure 5.18. Sur les plans C1 et C7 les orbites sont rétrogrades, tandis que sur les plans C3, C4 et C6 les orbites sont directes (sur le plan C5 le sens de précession n'a pu être déterminé). La coexistence de deux types de précession a déjà été observée (paragraphe 2.3.3) sur des rotors à supports anisotropes présentant des caractéristiques spécifiques en ce qui concerne la distribution de balourd résiduel ou encore la présence d'une flexion résiduelle de l'arbre.

L'analyse spectrale (figure 5.19) montre clairement l'importance de l'harmonique 1 bien que sur les niveaux plus faibles (capteurs C5 et C6) l'harmonique 2 commence à faire son apparition. On notera que la dynamique globale du mode rétrograde reste faible en comparaison avec celle du mode direct que nous allons maintenant étudier.

La figure 5.20 nous donne la déformée opérationnelle du rotor pour la première vitesse critique directe (2650 tr/min).

Comme le montrent les orbites représentées en figure 5.21, toutes les précessions sont directes. Nous observons de plus que les orbites des plans C1 et C7 sont quasi circulaires, mais que par contre celles des plans C4 et C3 possèdent une harmonique supplémentaire qui sera analysée par la suite.

Les analyses spectrales pour les signaux mesurés sur le plan C1 montrent que l'harmonique 1 est dominant, comme illustré en figure 5.22. Sur C3y le spectre indique principalement la présence du premier harmonique et une manifestation moindre de l'harmonique 2. Sur les plans C5 et C6 les niveaux faibles favorisent la manifestation d'une grande richesse harmonique (1/2, 1, 4/3 et 2). Sur le plan C7 le premier harmonique est nettement dominant.

Si on regarde les spectres en augmentant les limites fréquentielles (figure 5.23), on peut alors expliquer la forme de l'orbite sur C3 et C4. En effet, l'apparition d'une harmonique d'ordre 10 amène des ondulations rapides sur les orbites (partiellement visible sur le plan C3). La fréquence de cette harmonique (442.5 Hz) ne coïncide pas avec les fréquences caractéristiques des roulements à 2650 tr/min, on peut par contre penser qu'il puisse s'agir d'un couplage avec un mode plus élevé (autour de 442.5 Hz) qui serait excité par des effets non linéaires comme ceux des roulements.

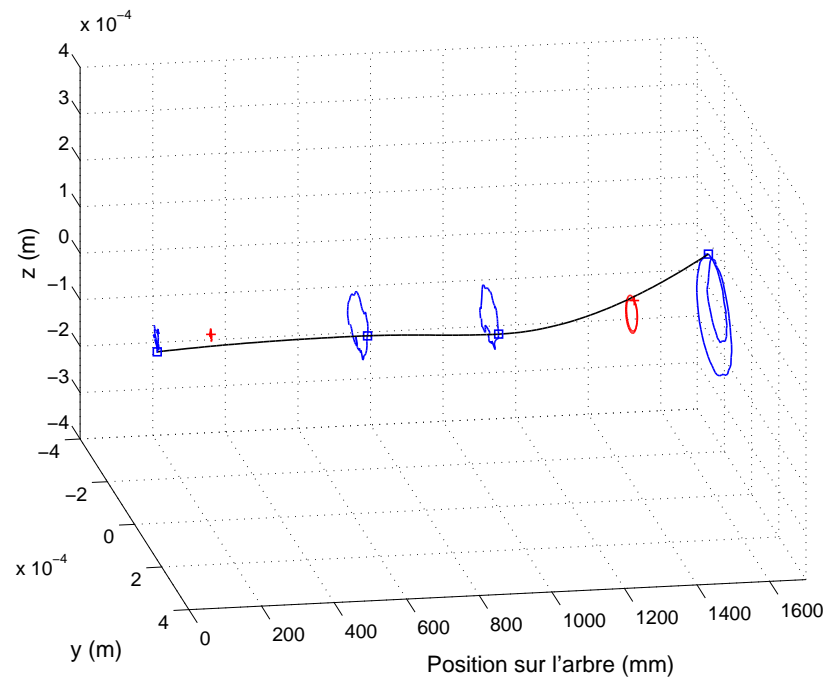


FIG. 5.14 – Déformée opérationnelle à 1280 tr/min

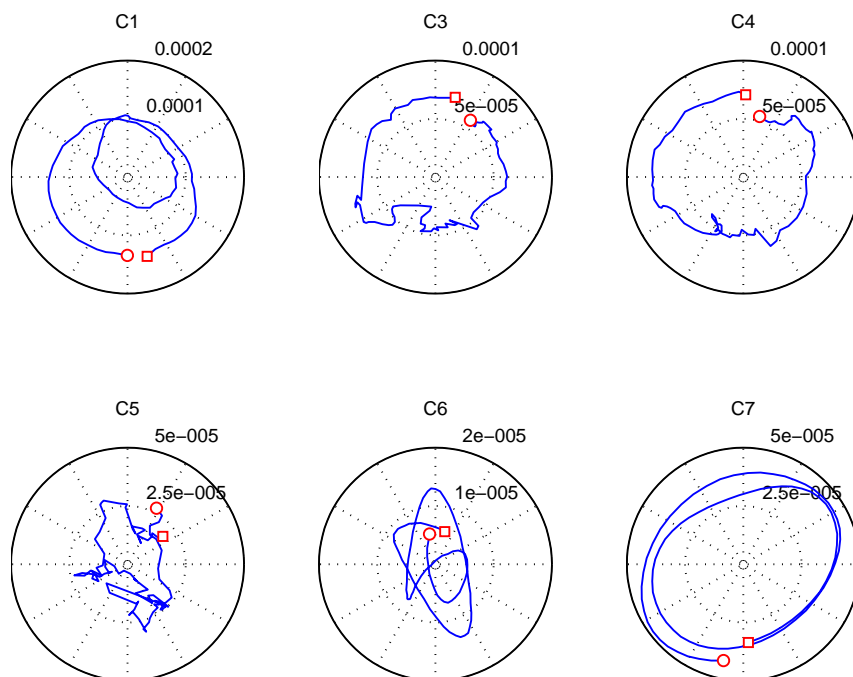


FIG. 5.15 – Orbites à 1280 tr/min



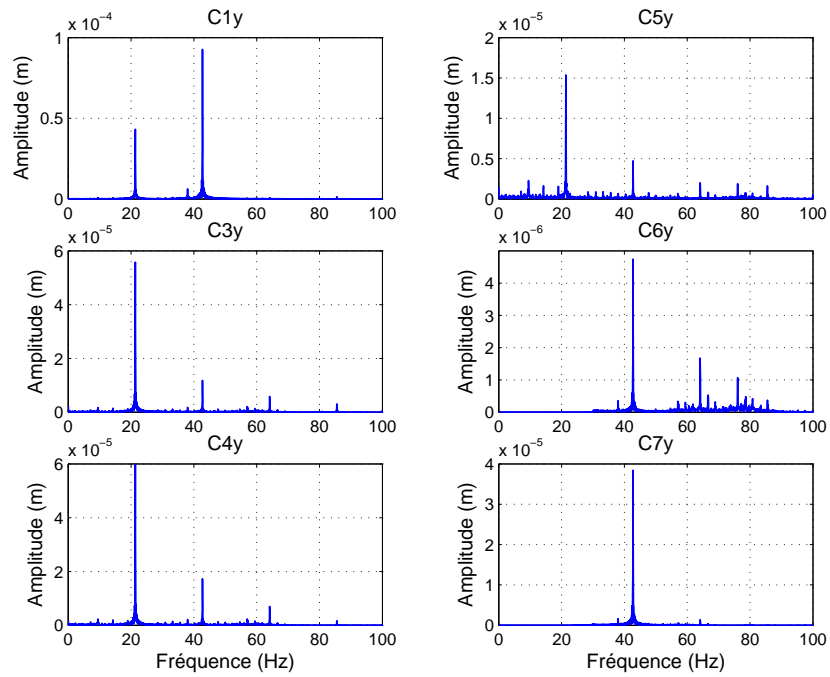


FIG. 5.16 – Spectres des mesures à 1280 tr/min (selon la direction  $y$ )

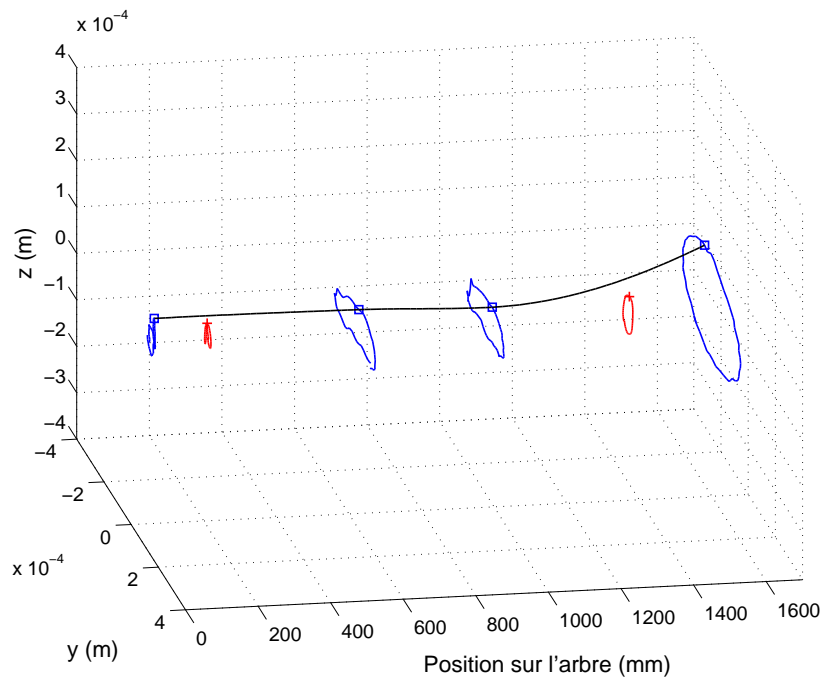


FIG. 5.17 – Déformée opérationnelle à 2260 tr/min

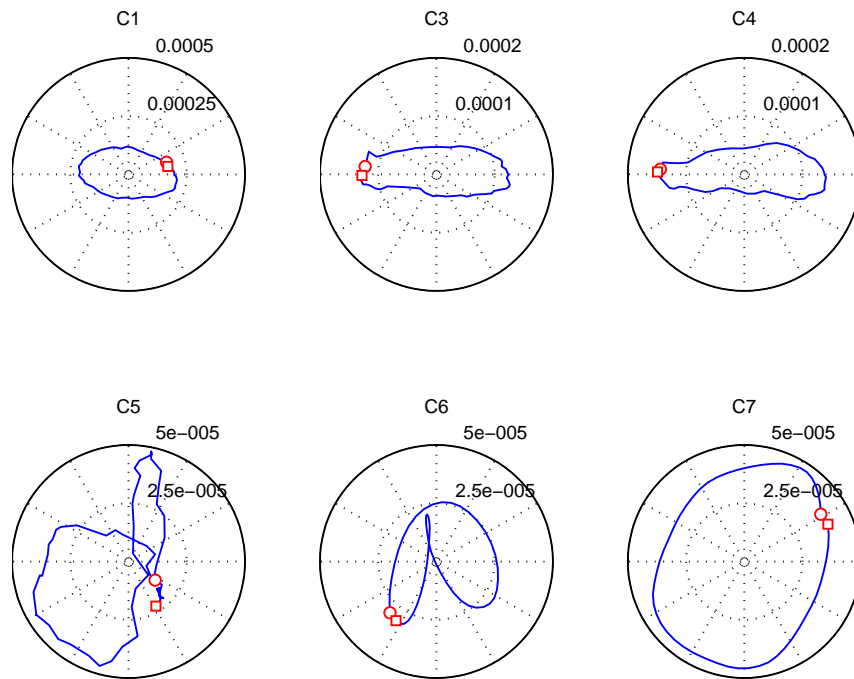
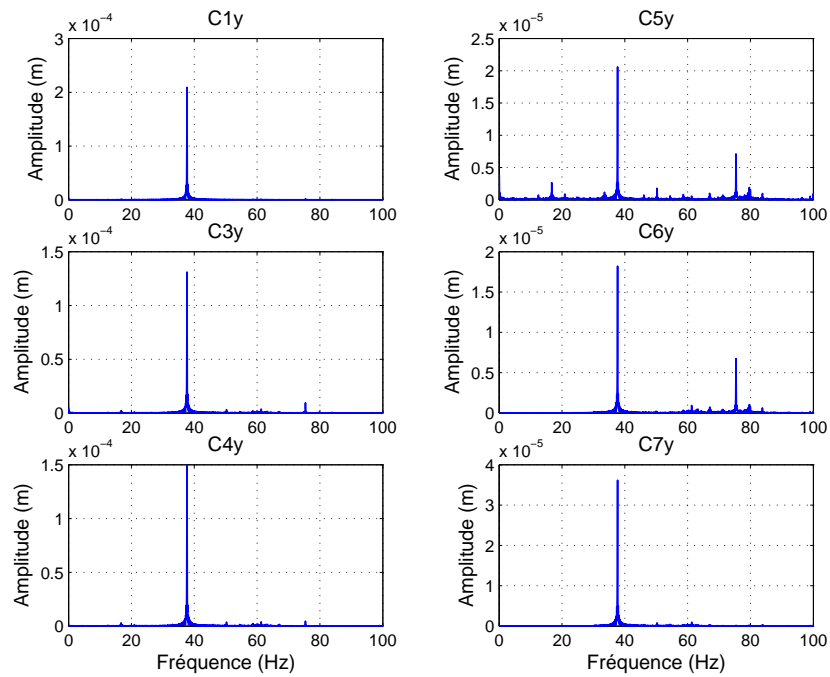


FIG. 5.18 – Orbites à 2260 tr/min

FIG. 5.19 – Spectres des mesures à 2260 tr/min (selon la direction  $y$ )

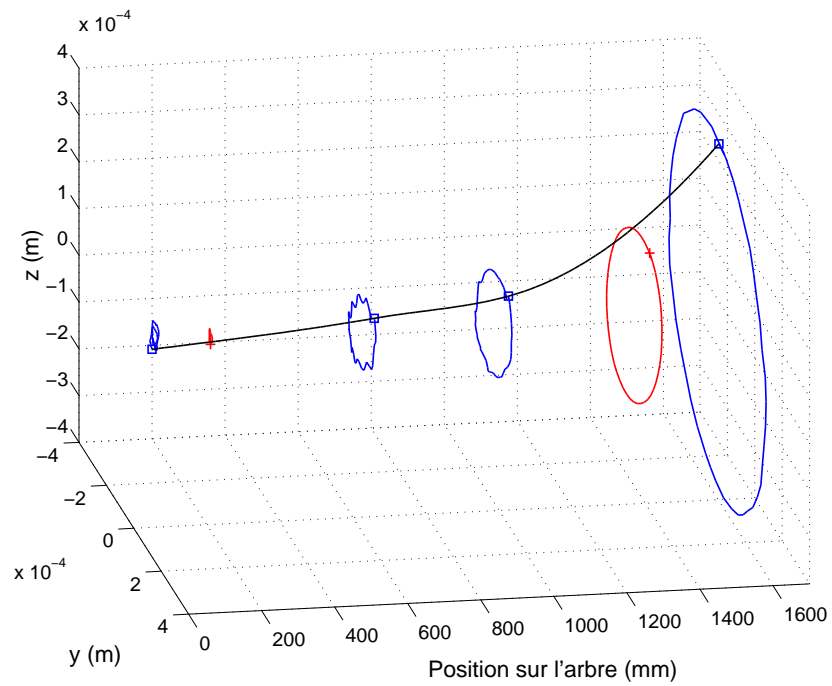


FIG. 5.20 – Déformée opérationnelle à 2650 tr/min

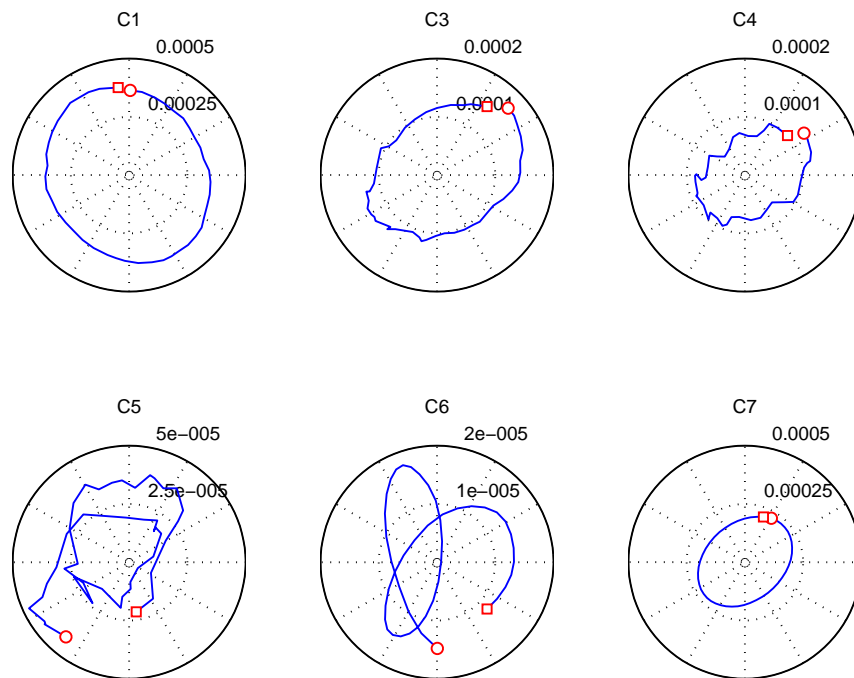


FIG. 5.21 – Orbites à 2650 tr/min

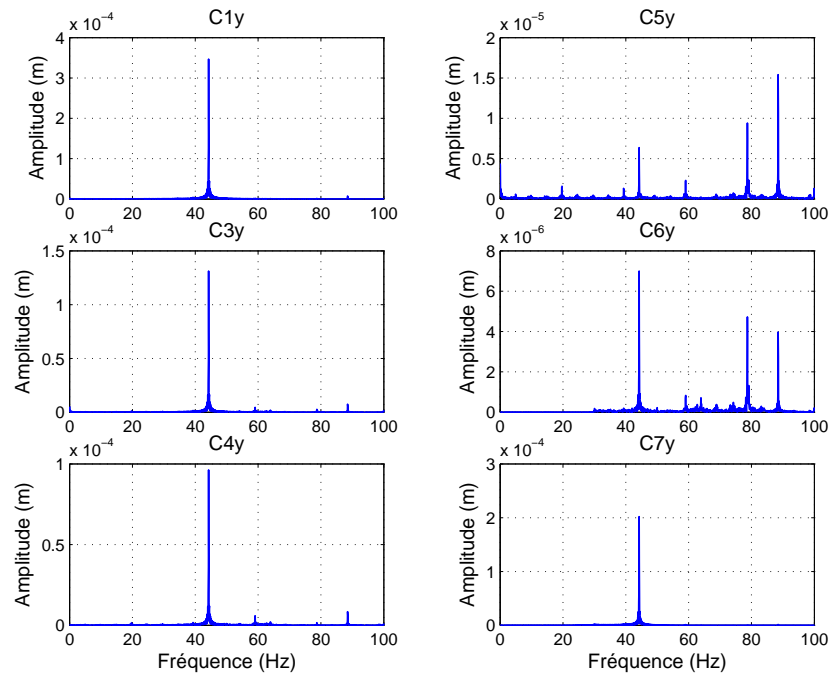
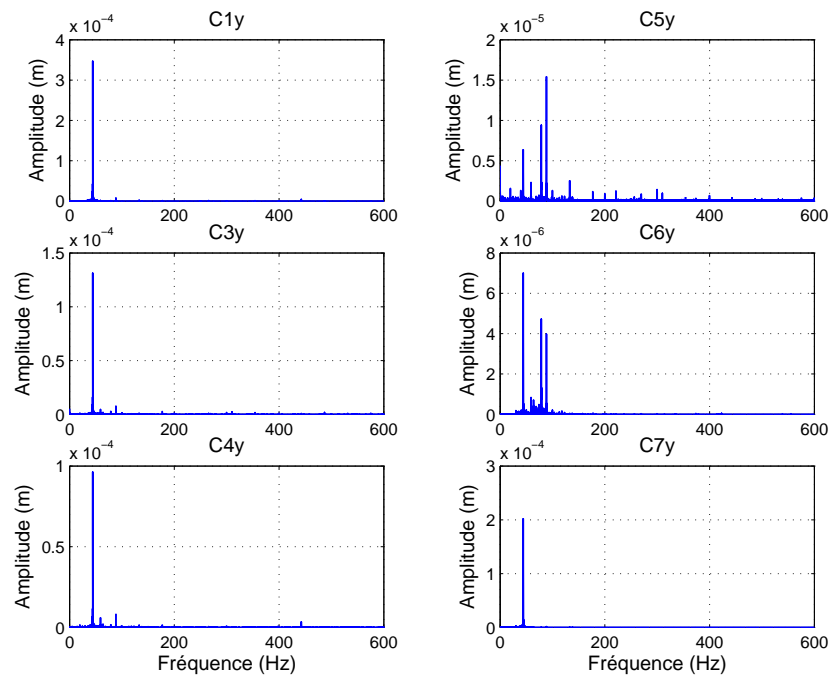
FIG. 5.22 – Spectres des mesures à 2650 tr/min (selon la direction  $y$ )

FIG. 5.23 – Spectres des mesures à 2650 tr/min

### 5.1.5 La mesure du diagramme de Campbell

Afin de mettre en évidence l'évolution des fréquences propres du rotor, nous allons tracer le diagramme de Campbell expérimental. A cet effet on a mis au point une procédure expérimentale où un pot électromagnétique est utilisé pour exciter de manière asynchrone le système comme illustré en figure 5.24. En effet, ce type d'excitation permet de faire sortir les modes rétrogrades dans les réponses du rotor en mouvement.

La procédure expérimentale consiste donc à mesurer les fonctions de réponse en fréquence (FRF) pour plusieurs vitesses de rotation, plus précisément 100, 500, 1000, 1500, 2000, 2400, 2700 et 3000 tr/min. Lors du post-traitement, nous nous intéressons aux extremums des FRF représentant les modes rétrogrades ou directs. Les fréquences où ces extremums apparaissent nous donnent alors une bonne approximation des fréquences propres rétrograde et directe.

La figure 5.25 illustre les FRF mesurées pour la configuration A1 sur le capteur C7z, à l'aide d'essais en sinus balayé. Les FRF mesurées sont représentées par des lignes foncées sur la surface interpolée. Le graphique montre de manière évidente l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation.

Nous retrouvons sur la figure 5.26 le diagramme de Campbell pour la configuration A1, qui a été obtenu par post-traitement des données expérimentales de la figure 5.25. Sur ce diagramme, nous avons dessiné les lignes droites d'excitation 1X et 2X. En regardant tout d'abord la droite 1X, les intersections de cette ligne avec les courbes d'évolution des fréquences propres définissent la vitesse critique rétrograde et la vitesse critique directe. Nous avons alors la vitesse critique rétrograde à 2228 tr/min et la vitesse critique directe à 2579 tr/min. Les intersections de la droite 2X avec les courbes d'évolution des fréquences propres sont à 1148 tr/min (rétrograde) et 1245 tr/min (directe).

Comme illustré en figure 5.26, les courbes de réponse à balourd donnent des estimations des vitesses critiques tout à fait similaires à celles obtenues par le diagramme de Campbell.

D'autre part, en figure 5.26, nous avons aussi un autre pic sur la courbe d'ordre 2 autour de 1700 tr/min et 2300 tr/min qui représentent l'intersection de la droite 2X avec les courbes d'évolution des fréquences propres relatives aux deuxièmes modes (rétrograde et direct).

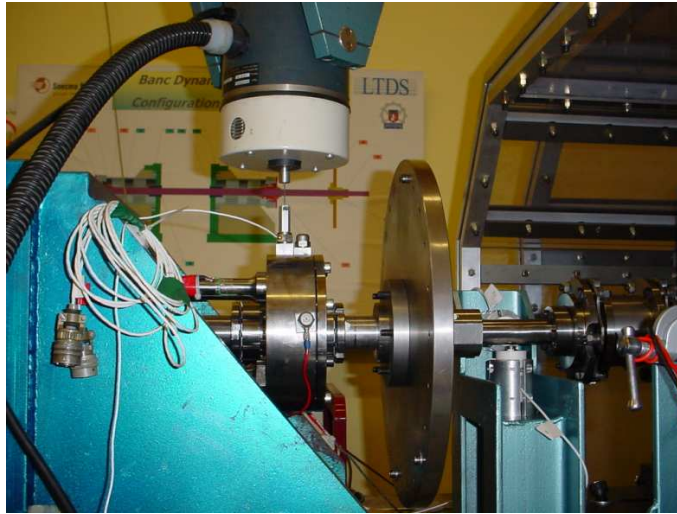


FIG. 5.24 – Montage expérimental pour la mesure du diagramme de Campbell

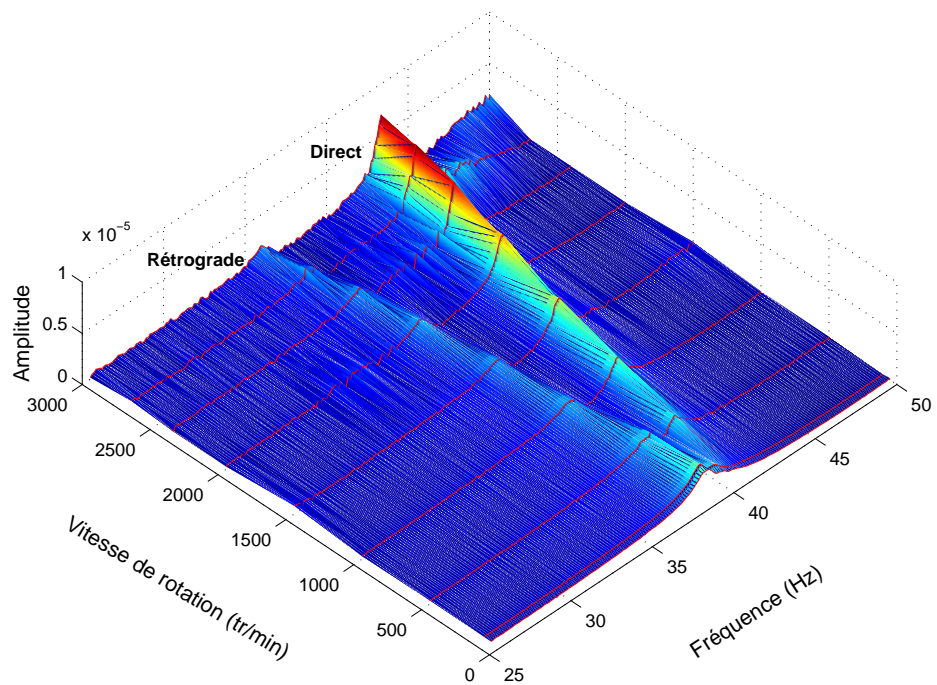


FIG. 5.25 – Evolution des fréquences propres vis-à-vis de la vitesse de rotation - Configuration A1

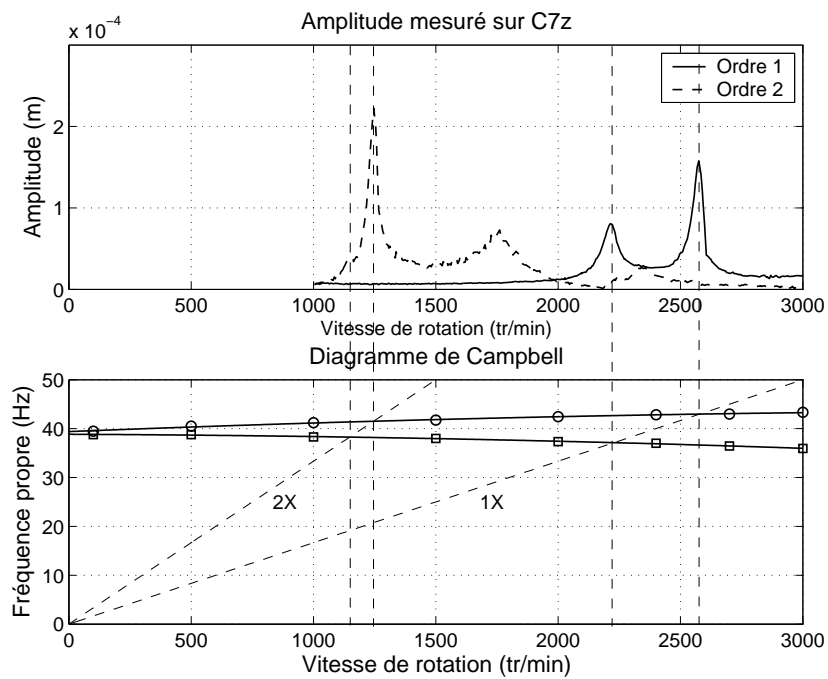


FIG. 5.26 – Diagramme de Campbell et réponse à balourd pour la configuration A1

## 5.2 Evolution de la Raideur des Support Paliers

Dans cette section nous allons réaliser des essais similaires à ceux de la configuration A1 en considérant une nouvelle valeur de la raideur de flexion des supports paliers. L'objectif de cette étude est d'examiner l'influence de cette raideur sur la dynamique de la machine.

Nous nommerons cette configuration, la configuration A3, correspondant à une raideur des supports paliers égale à  $7.2 \times 10^6$  N/m (soit une augmentation de 90% par rapport à la configuration A1).

### 5.2.1 Equilibrage

En utilisant l'approche exhaustive, nous obtenons une masse de correction de 6.36g à  $225^\circ$ , et une amplitude qui chute de 300 à  $100 \mu\text{m}$  pour une vitesse de 3060 tr/min. La figure 5.27 illustre la variation des amplitudes sur le support palier 1 en fonction de la position de la masse de test. Si l'on utilise la méthode des coefficients d'influence, la correction estimée est alors de 5.2g à  $214^\circ$ . La différence observée est liée, encore une fois, à la bonne estimation des phases (près de la vitesse critique).

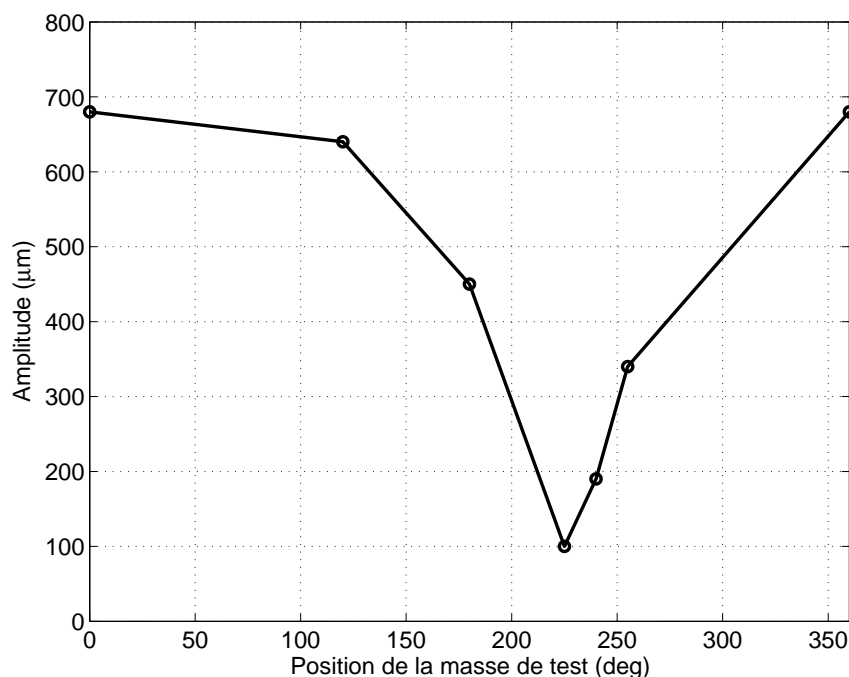


FIG. 5.27 – Equilibrage de la configuration A3

### 5.2.2 Franchissement de la vitesse critique

Les figures 5.28-5.33 nous montrent les résultats de passage de vitesse critique pour la configuration A3. La vitesse critique directe est cette fois autour de 3120 tr/min et la



vitesse critique rétrograde autour de 2340 tr/min. Pour cet essai l'accélération du rotor était de 19 tr/min/s.

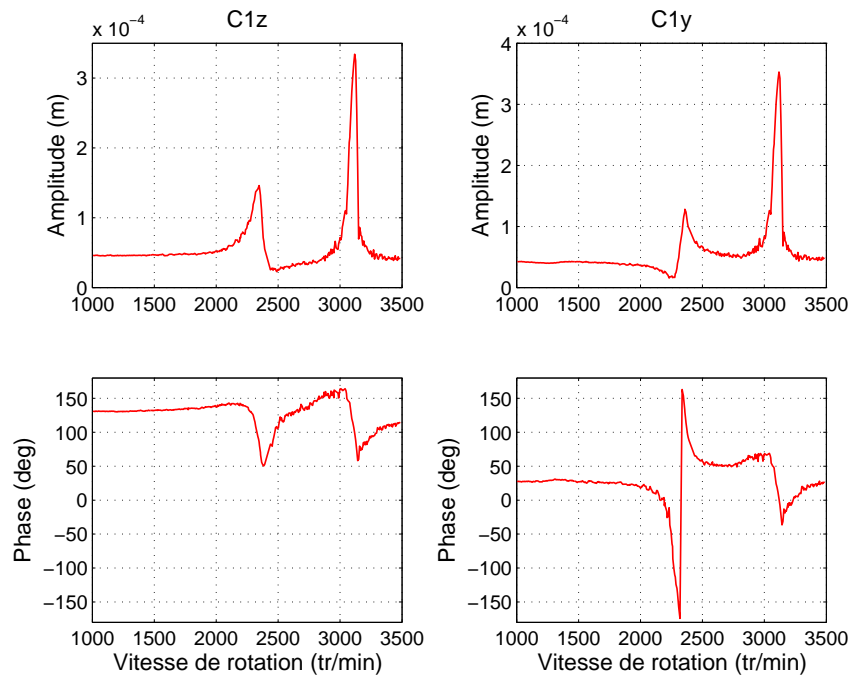


FIG. 5.28 – Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le plan C1

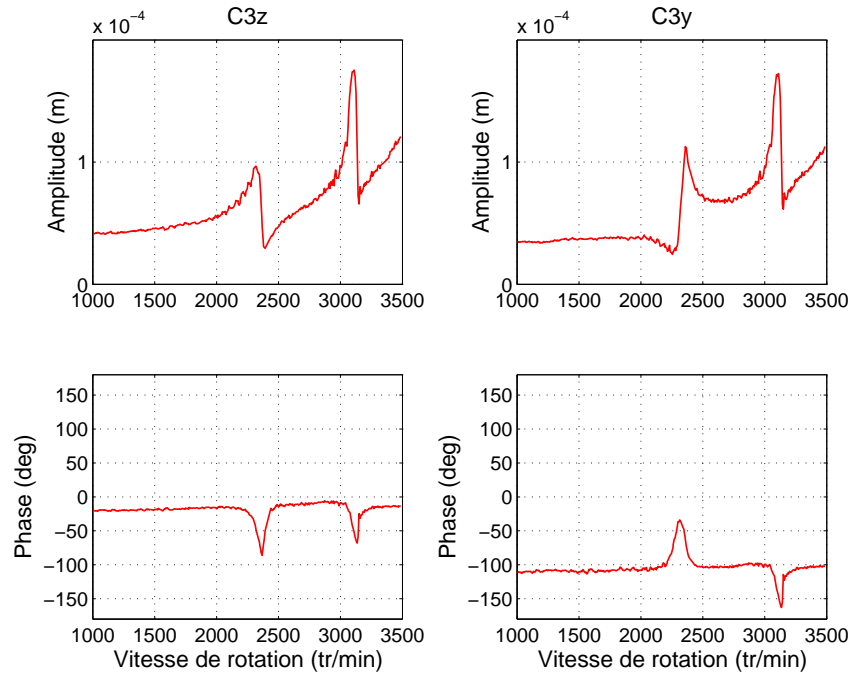


FIG. 5.29 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le plan C3

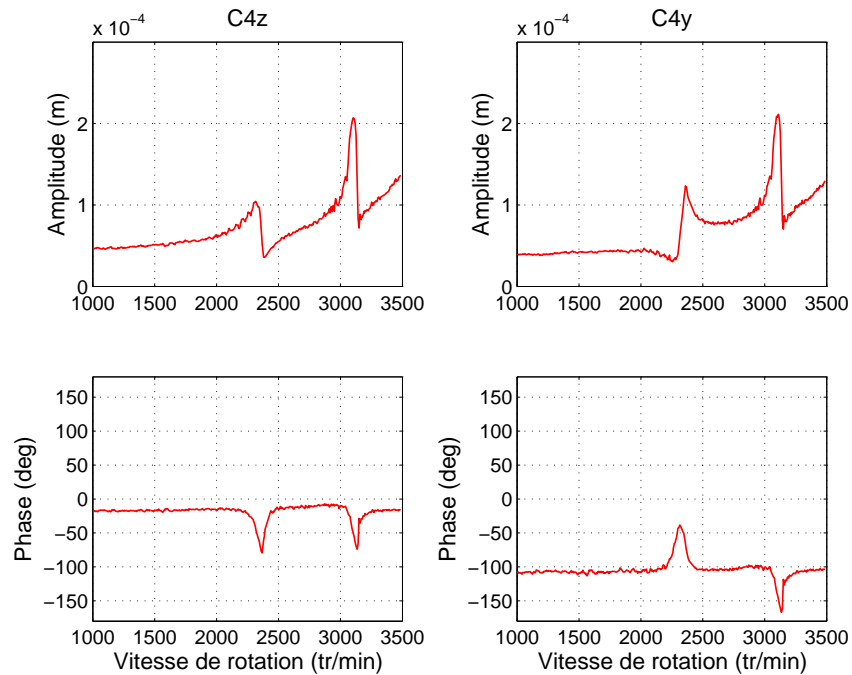


FIG. 5.30 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le plan C4

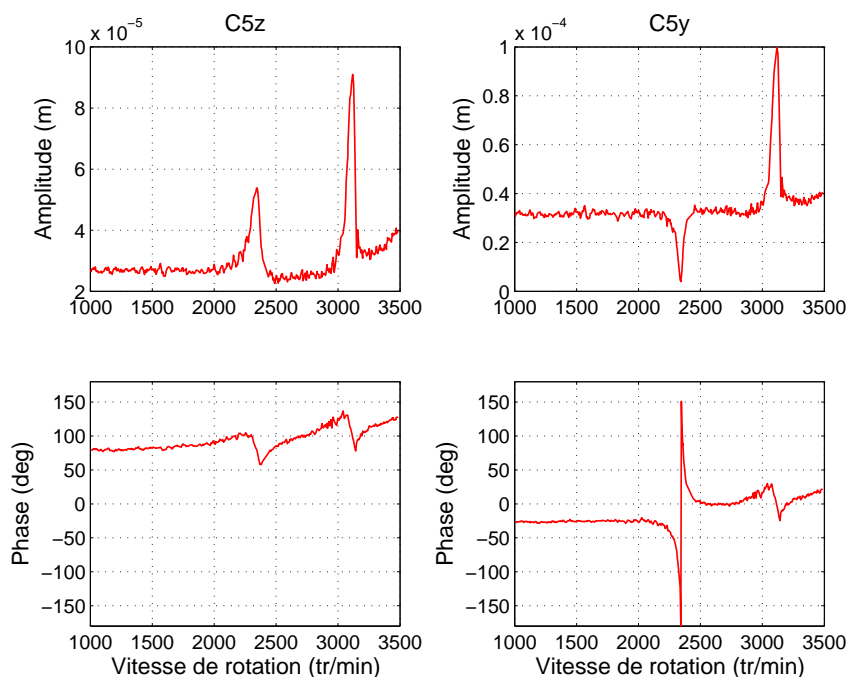


FIG. 5.31 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le plan C5

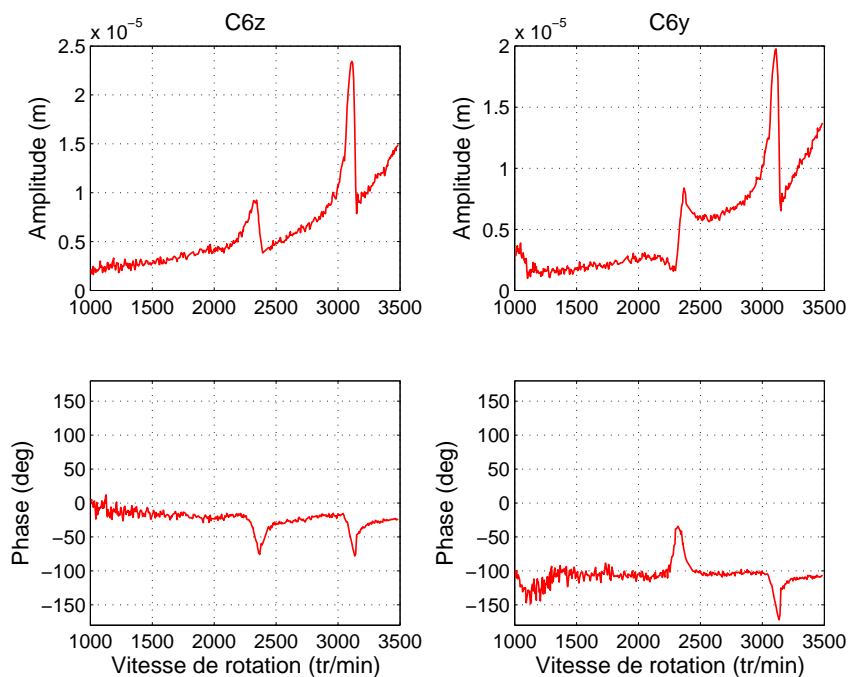


FIG. 5.32 – Courbes d’amplitude et phase mesurées sur le plan C6

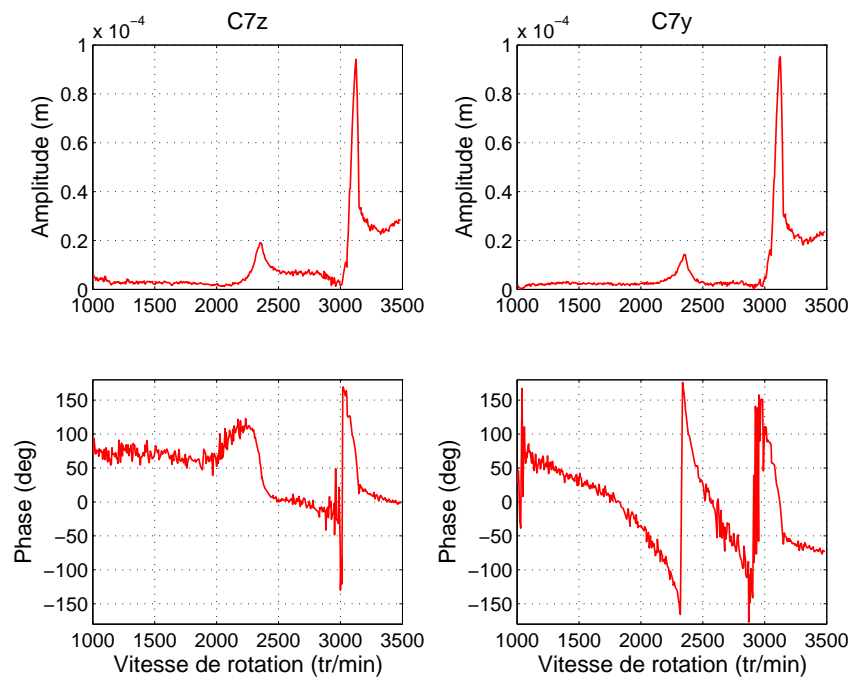


FIG. 5.33 – Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le plan C7

### 5.2.3 Mesure des déformées opérationnelles

La figure 5.34 montre la déformée opérationnelle au voisinage de la première vitesse critique rétrograde. Si on compare cette déformée avec la déformée opérationnelle de la configuration A1, il apparaît clairement que dans la configuration A3 les niveaux sont plus faibles et l'arbre moins fléchi.

Le graphique des orbites (figure 5.35) montre que sur le plan C1 nous avons une précession rétrograde tandis que sur les plans C3, C4 et C6 la précession est directe. Les orbites sur C1, C3 et C4 sont typiques d'un mouvement où le déplacement vertical est plus "difficile" que le déplacement horizontal : ceci est une indication de l'action du poids du rotor sur la dynamique du système.

Les spectres (figure 5.36) pour les plans C1, C3, C4, C5, C6 et C7 montrent que la dynamique est dominée par le premier harmonique. Par contre, sur le plan C5 nous pouvons voir les harmoniques d'ordre 1 et 2, ainsi que la présence d'une sous harmonique d'ordre 4/9 de la vitesse de rotation.

On retrouve dans la figure 5.37 la déformée opérationnelle du rotor à 3160 tr/min, au voisinage de la première vitesse critique directe de la configuration A3. En comparant cette déformée avec la déformée de la première vitesse critique pour la configuration A1, on voit que ces deux déformées ont des formes semblables, la flexion de l'arbre étant cependant plus importante en configuration A3.

En figure 5.38, on voit la représentation des orbites sur les plans de mesure. Pour cette vitesse de rotation (correspondant à la première vitesse critique directe), les orbites ont une forme pratiquement circulaire. Le sens de précession sur toutes les orbites est direct.

Pour les spectres, nous pouvons voir sur la figure 5.39 que les harmoniques 1 sont largement dominantes dans la plage 0-100 Hz.

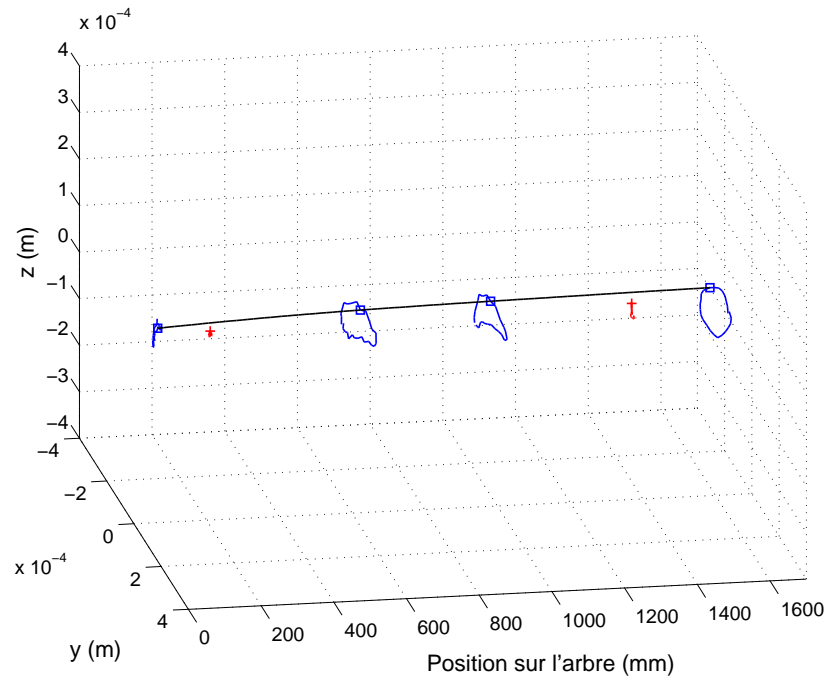


FIG. 5.34 – Déformée opérationnelle à 2450 tr/min

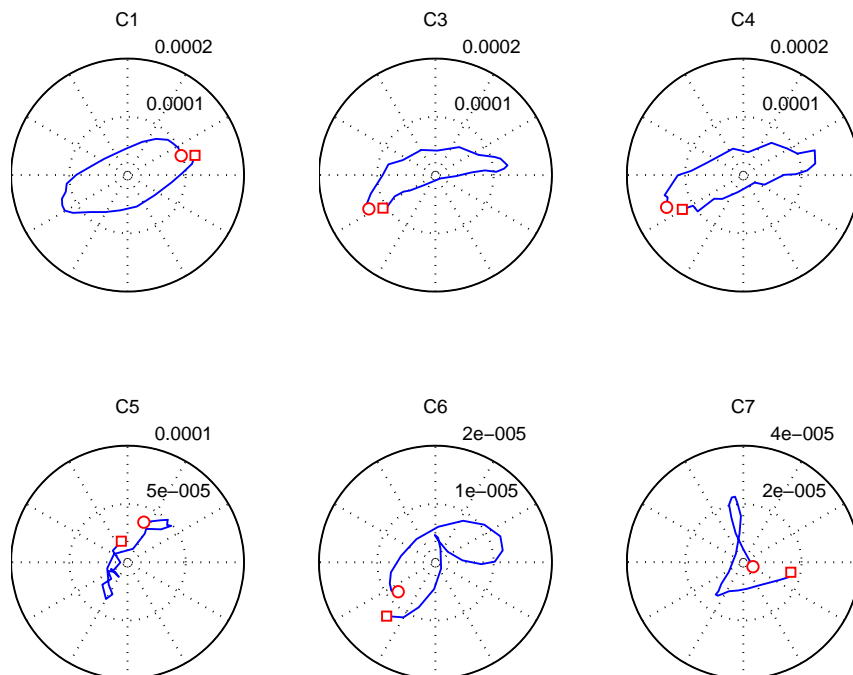


FIG. 5.35 – Orbites à 2450 tr/min

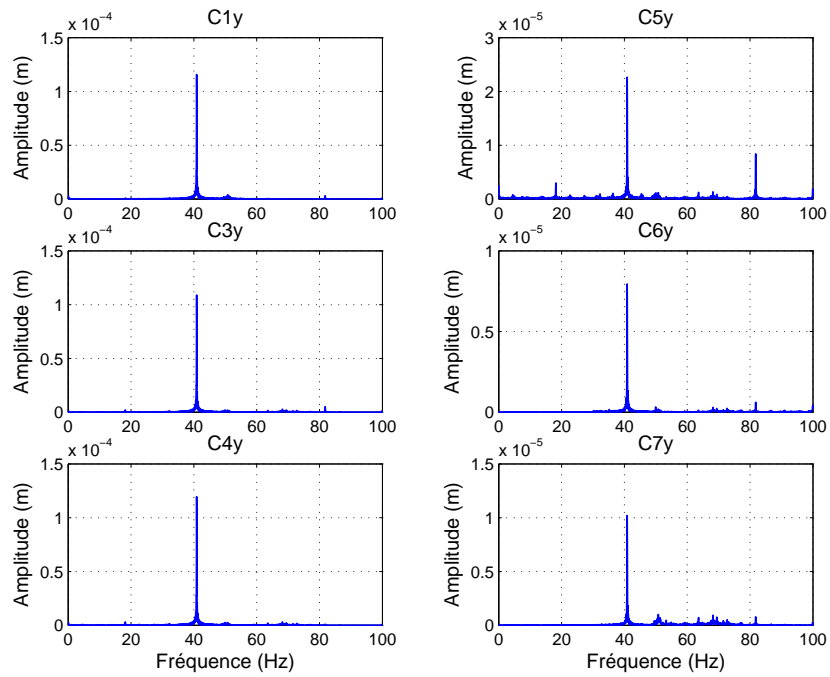


FIG. 5.36 – Spectres des mesures à 2450 tr/min (selon la direction  $y$ )

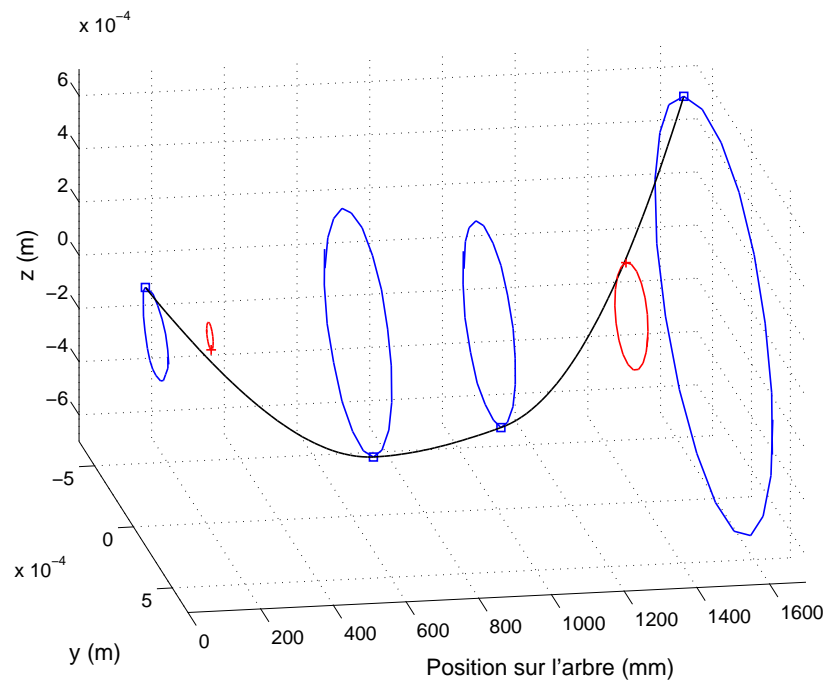


FIG. 5.37 – Déformée opérationnelle à 3160 tr/min

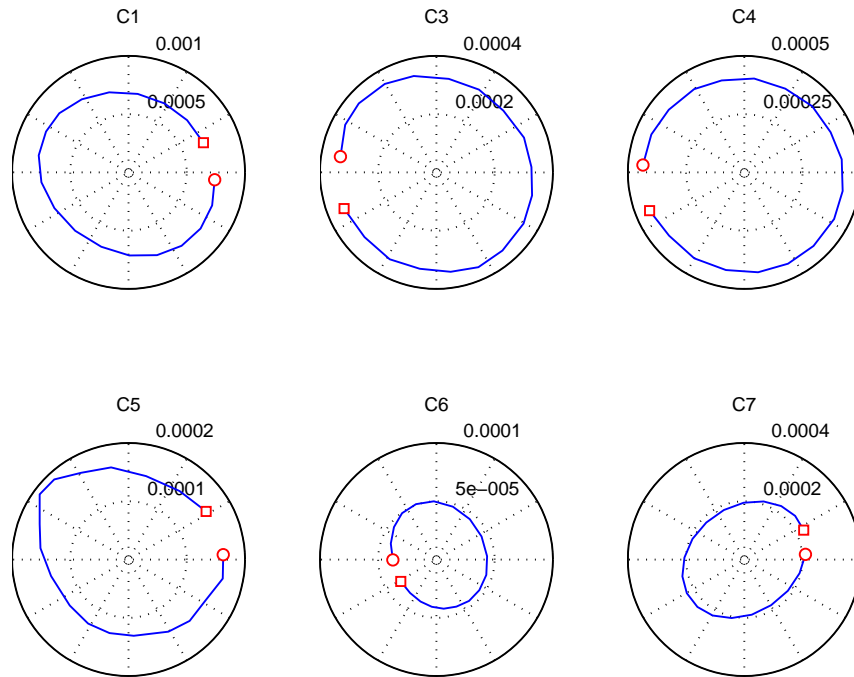
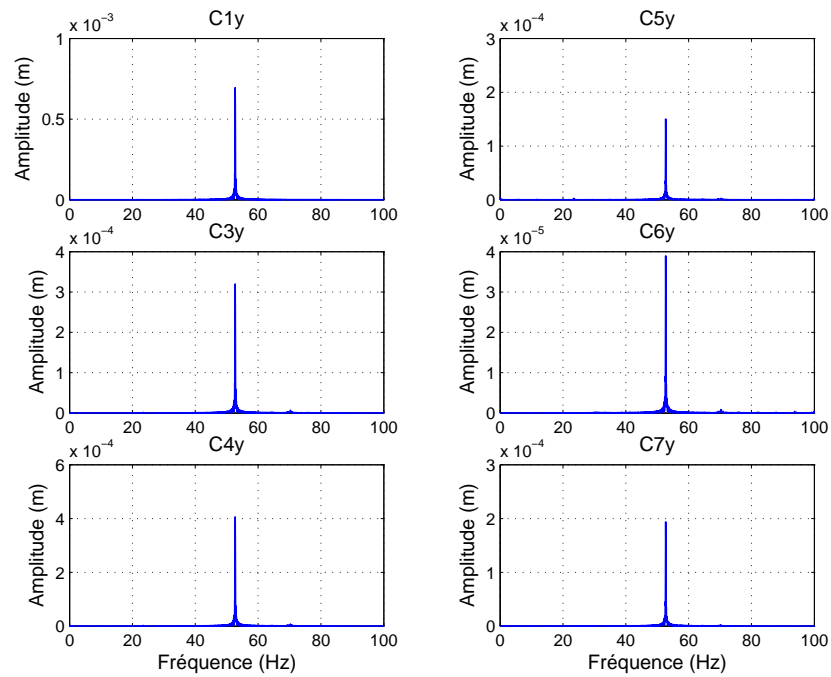


FIG. 5.38 – Orbites à 3160 tr/min

FIG. 5.39 – Spectres des mesures à 3160 tr/min (selon la direction  $y$ )



### 5.2.4 La mesure du diagramme de Campbell

La figure 5.40 illustre l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, basée sur des mesures effectuées avec le capteur C1z. A partir des FRF présentées sur la figure 5.40, nous pouvons construire le diagramme de Campbell (figure 5.41). Dans cette configuration, les vitesses critiques directes et rétrogrades observées sur le diagramme de Campbell peuvent être retrouvées sur la réponse à balourd à moins de 0.90% d'erreur relative maximale.

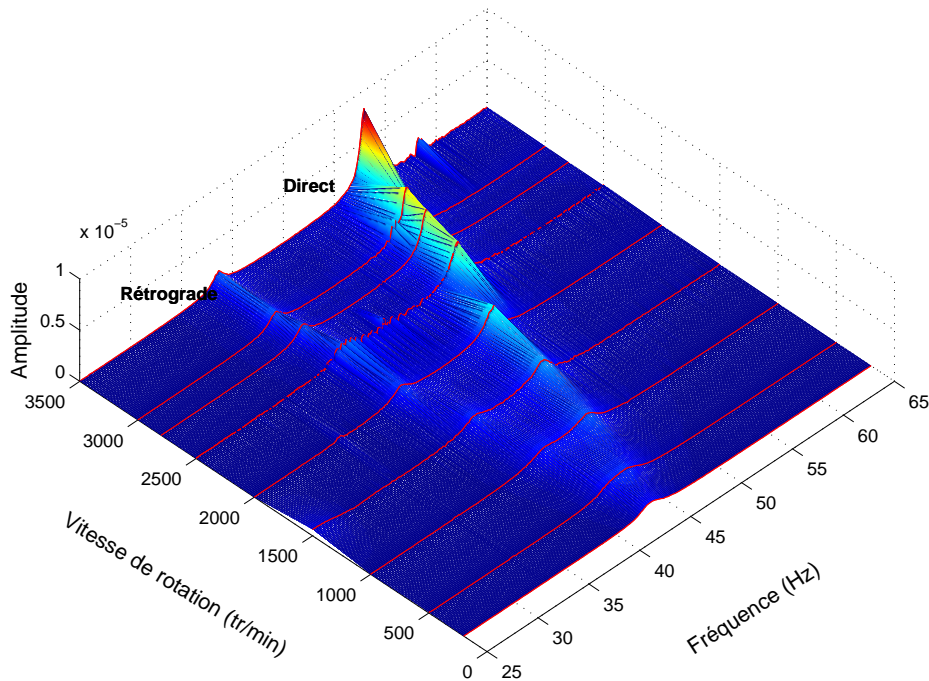


FIG. 5.40 – Evolution des fréquences propres vis-à-vis de la vitesse de rotation

## 5.3 Recalage du modèle numérique

Afin de mener des études numériques permettant de reproduire le comportement dynamique du banc d'essai, nous réalisons un modèle éléments finis comme explicité au chapitre 4. Ce modèle numérique a été construit par étapes successives. Dans un premier temps, des analyses modales de chacun des organes du banc pris séparément ont été réalisées, puis un recalage modal a été effectué lors de l'assemblage des pièces pour permettre d'affiner les paramètres structuraux de chacun des éléments et des liaisons entre pièces.

De plus, les matrices de masse et de raideur des supports paliers sont déterminées numériquement, à partir d'une géométrie CAO maillée finement. Les raideurs radiales ont été recalées expérimentalement sur un essai statique et le joint d'accouplement a été modélisé par éléments finis et recalé à l'aide des données constructeur. Enfin, une dernière étape a consisté à recalibrer les diagrammes de Campbell expérimentaux et numériques en se basant sur la fonction objective suivante :

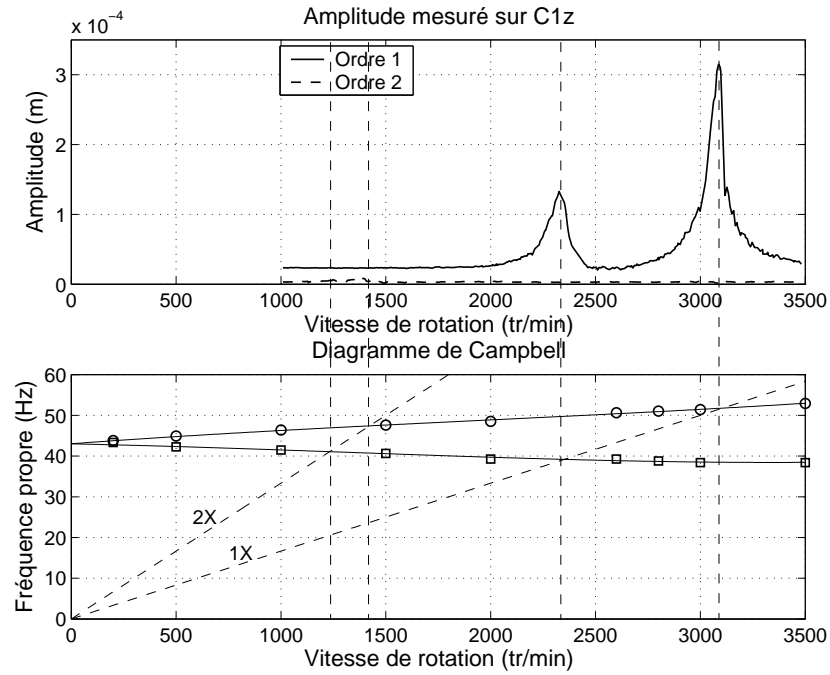


FIG. 5.41 – Diagramme de Campbell et réponse à balourd pour la configuration A3

$$MC^2 = a \left( \frac{D_{500}^{(mes)} - D_{500}}{D_{500}^{(mes)}} \right)^2 + b \left( \frac{R_{500}^{(mes)} - R_{500}}{R_{500}^{(mes)}} \right)^2 + c \left( \frac{VC_{ret}^{(mes)} - VC_{ret}}{VC_{ret}^{(mes)}} \right)^2 + d \left( \frac{VC_{dir}^{(mes)} - VC_{dir}}{VC_{dir}^{(mes)}} \right)^2 \quad (5.1)$$

où  $R_{500}$  représente la fréquence du mode rétrograde à 500 tr/min,  $D_{500}$  représente la fréquence du mode direct à 500 tr/min,  $VC_{ret}$  représente la première vitesse critique rétrograde et  $VC_{dir}$  représente la première vitesse critique directe. L'exposant  $(mes)$  indique les valeurs qui ont été mesurées. Les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  permettent de faire varier le poids de chacune des variables de la fonction objective. La variable de design recalé lors de cette étape est la raideur en basculement du roulement à billes, qui apparaît comme étant le paramètre le plus sensible du système.

La figure 5.42 illustre l'évolution de la fonction objective par rapport aux valeurs de raideur en basculement du roulement à billes. Les poids adoptés lors de la minimisation sont  $a = b = 1$  et  $c = d = 2$ , ce qui favorise le recalage sur les premières vitesses critiques directe et rétrograde. Ainsi, la raideur en basculement optimale vaut  $8 \times 10^4$  Nm/rad.

Si on fait une erreur de  $\pm 0.5$  Hz sur la fréquence du mode rétrograde à 500 tr/min, la raideur optimale varie entre  $7.7 \times 10^4$  et  $8.3 \times 10^4$  Nm/rad. Cet intervalle de raideur correspond à un intervalle de vitesses critiques directes qui, par rapport à la vitesse critique directe mesurée, ne dépasse pas 0.5%. On retrouve le même ordre de grandeur de variation sur la vitesse critique mesurée (soit 0.5%) si chaque grandeur ( $R_{500}$ ,  $R_{500}$ ,  $VC_{dir}$  et  $VC_{ret}$ ) est connue avec une précision de 0.5 Hz.

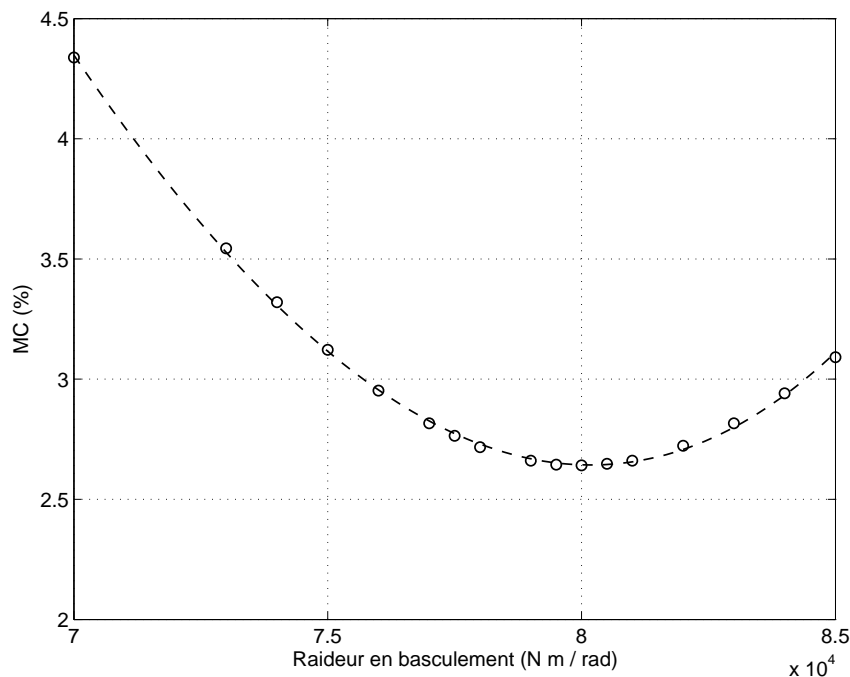


FIG. 5.42 – Minimisation de la fonction objective pour la configuration A1

En utilisant la valeur optimale de la raideur de basculement dans le modèle éléments finis, nous obtenons un modèle tout à fait conforme aux résultats expérimentaux, comme le montrent les figures 5.43 et 5.44 : le diagramme de Campbell numérique obtenu est tout à fait conforme au diagramme de Campbell expérimental avec moins de 3% d'écart sur l'ensemble des vitesses de rotation et moins de 0.5% d'erreur au passage de la première vitesse critique pour le mode direct (qui constitue la donnée la plus importante dans l'optique d'une étude au voisinage de la première vitesse critique directe).

Dans le cas expérimental, les vibrations mesurées sont causées par le balourd résiduel qui n'a pas été équilibré. Par ce fait sa position et son intensité sont inconnus. Toutefois, afin d'évaluer grossièrement la pertinence de notre modèle, des simulations de réponse à balourd ont été réalisées, comme illustré en figures 5.45 - 5.50. La position des balourds utilisés était sur le disque et le centre de l'arbre. Nous pouvons constater que pour les plans C1 et C7, les résultats expérimentaux et numériques sont bien corrélés sur le mode direct, mais nettement moins bien sur le mode rétrograde. Sur les autres plans les résultats sont moins convaincants, mais nous voyons que, à l'exception du plan C5, la tendance générale des courbes de réponses numériques suit les résultats expérimentaux. Ces différences ne sont pas choquantes compte tenu du fait que les balourds ici utilisés n'ont pas été optimisés en terme de nombre et de position.

Finalement, la méthodologie de recalage appliquée à la configuration A3 fournit comme valeur de raideur de basculement du roulement à billes  $7.15 \times 10^4$  Nm/rad (figure 5.51). Avec cette raideur, le modèle numérique fournit un diagramme de Campbell qui, comparé au diagramme de Campbell obtenu expérimentalement (figure 5.52), fournit des erreurs inférieures à 4% sur la première vitesse critique rétrograde et à 1% pour la première vitesse critique directe (figure 5.53). L'étude de sensibilité sur la configuration A3 montre qu'une

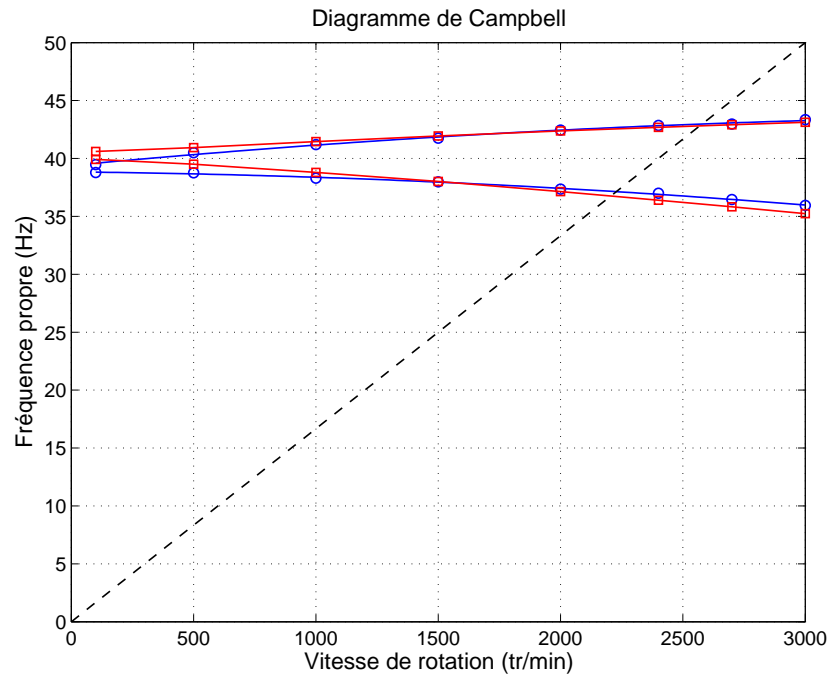


FIG. 5.43 – Diagrammes de Campbell expérimental (○) et numérique (□) pour la configuration A1

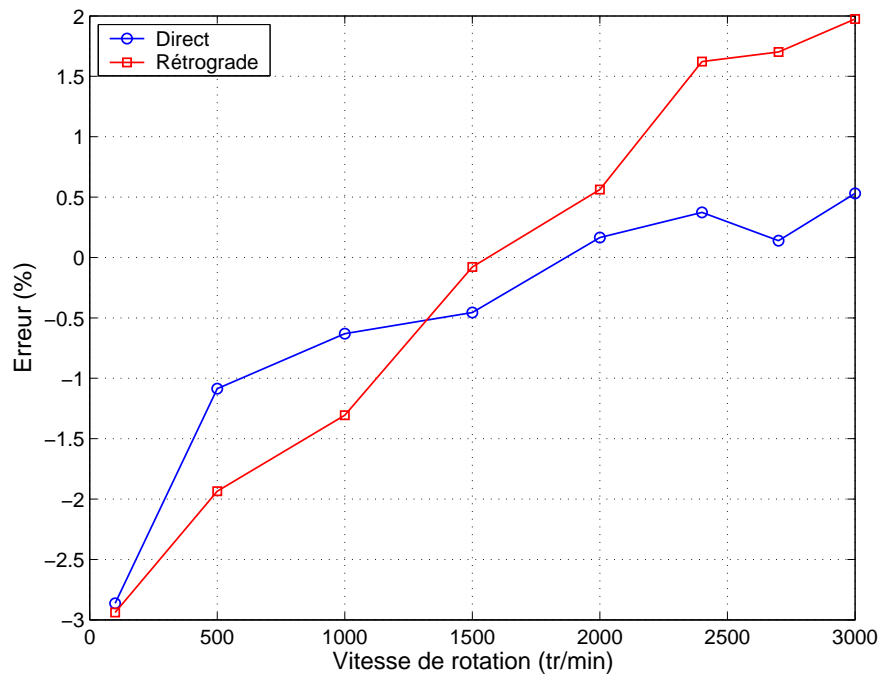


FIG. 5.44 – Mesure de l'erreur sur le diagramme de Campbell pour la configuration A1

erreur de 0.5 Hz sur les variables mesurées (une à la fois) donne un intervalle de raideurs de basculement optimal qui correspond à une variation de 1.3% sur les vitesses critiques directes par rapport à la mesure.

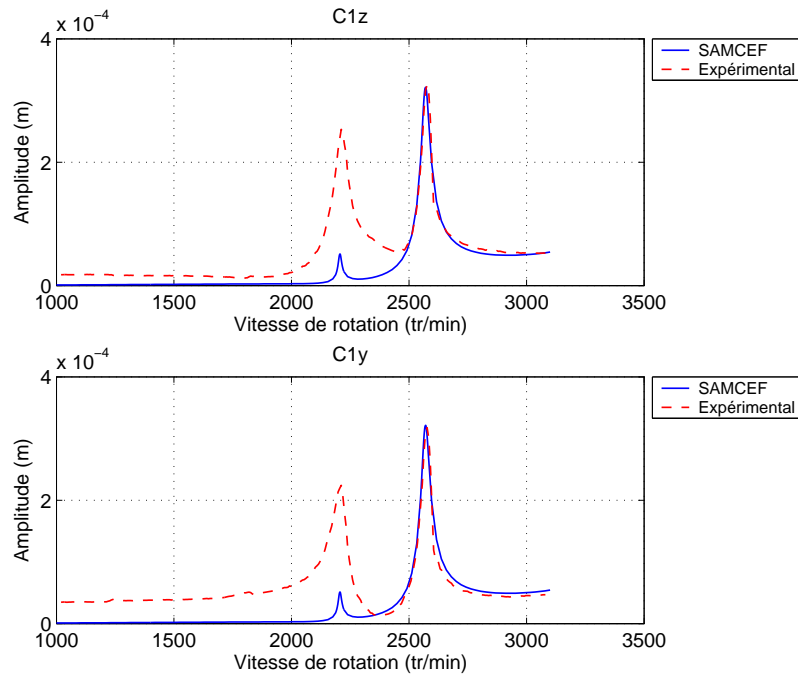


FIG. 5.45 – Réponses mesures dans le plans C1

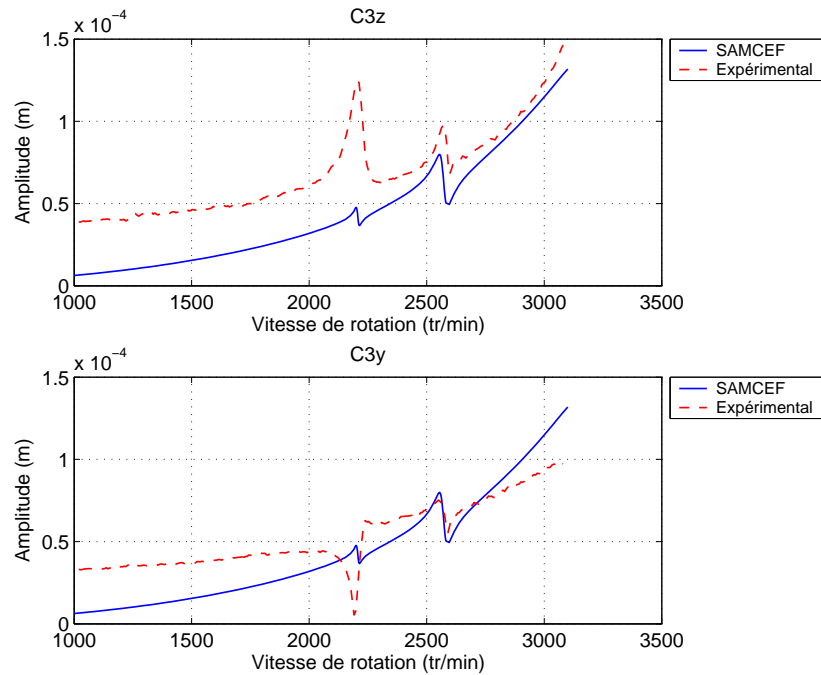


FIG. 5.46 – Réponses mesures dans le plans C3

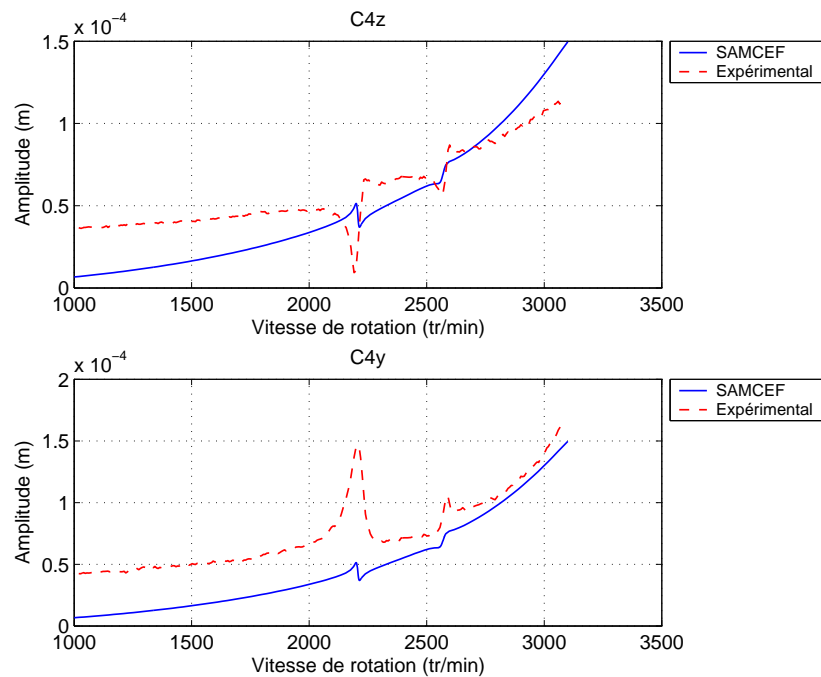


FIG. 5.47 – Réponses mesures dans le plans C4

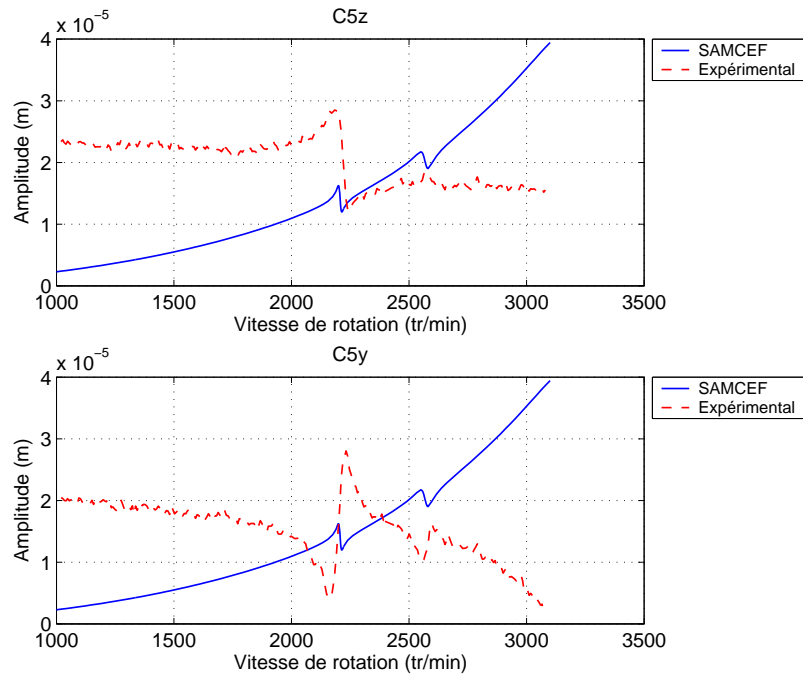


FIG. 5.48 – Réponses mesures dans le plans C5

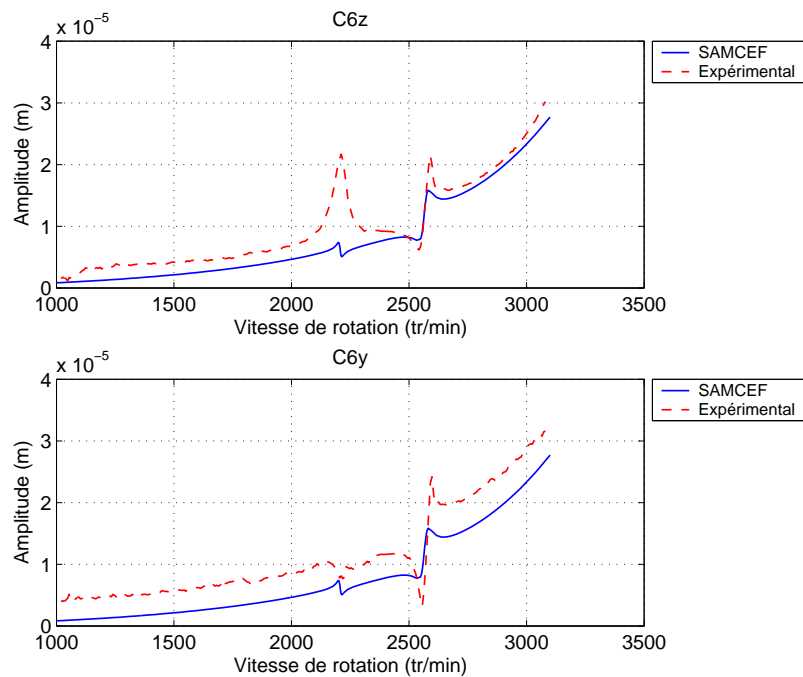


FIG. 5.49 – Réponses mesures dans le plans C6

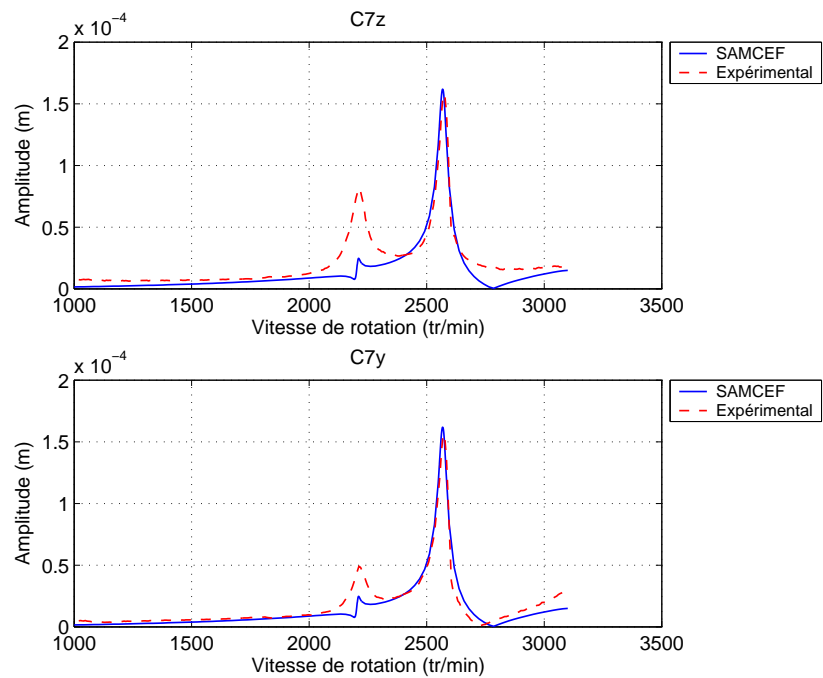


FIG. 5.50 – Réponses mesures dans le plans C7

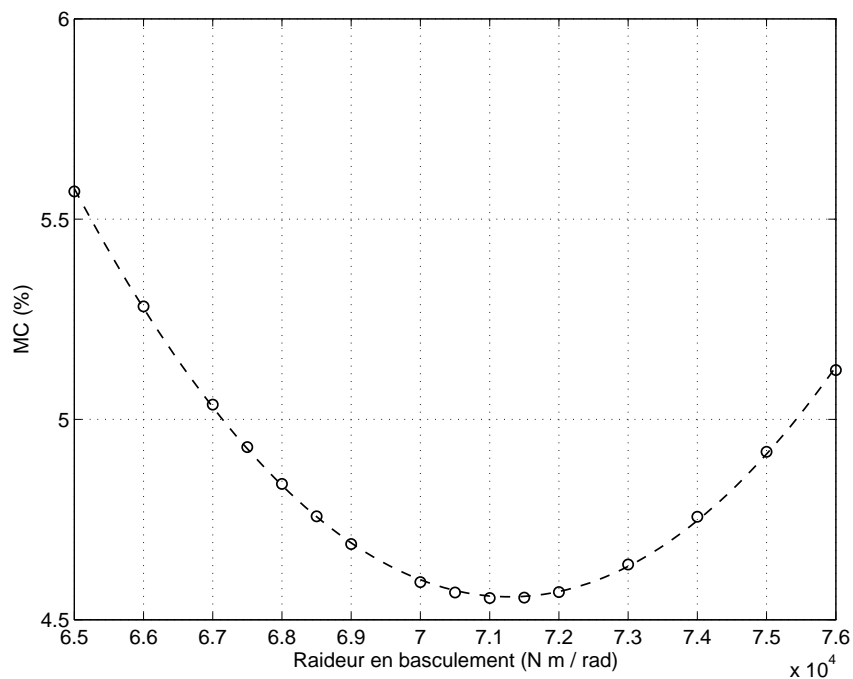


FIG. 5.51 – Minimisation de la fonction objective pour la configuration A3



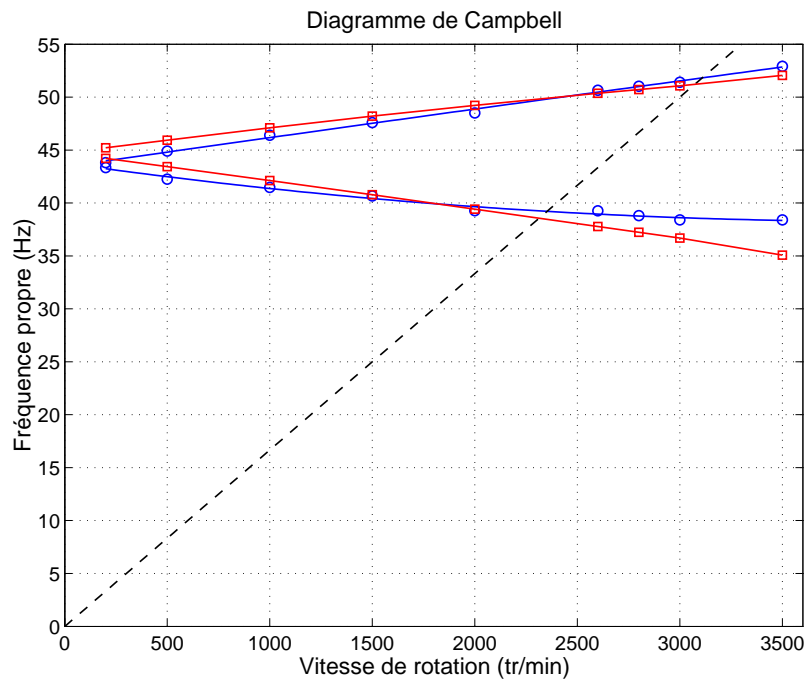


FIG. 5.52 – Diagrammes de Campbell expérimental (○) et numérique (□) pour la configuration A3

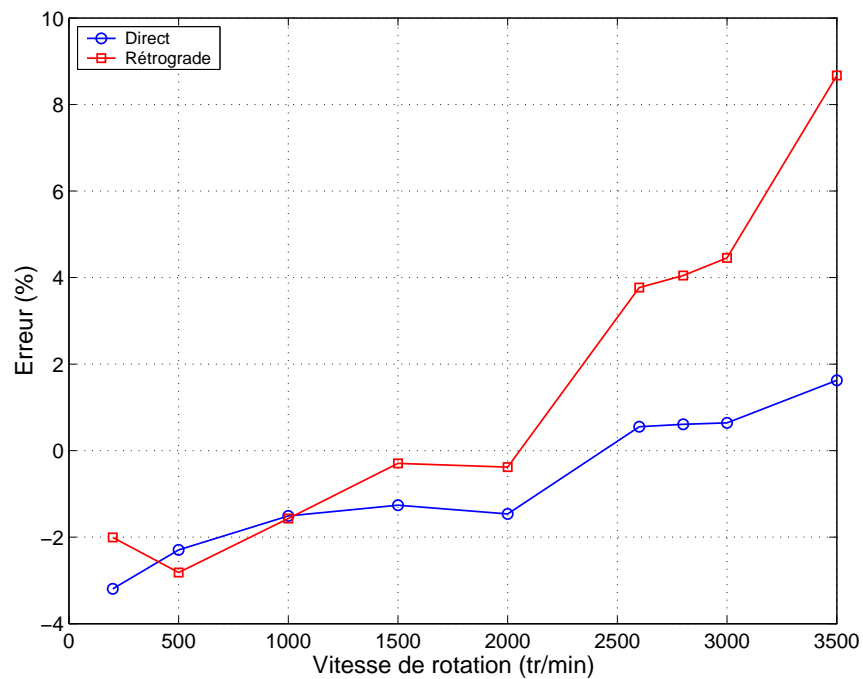


FIG. 5.53 – Mesure de l'erreur sur le diagramme de Campbell pour la configuration A3

## 5.4 Mise en place d'un système amortisseur

L'un des problèmes fréquemment rencontrés dans le domaine des machines tournantes est la réduction des niveaux vibratoires lors du passage des vitesses critiques. Ce niveau est naturellement diminué par la réalisation d'un équilibrage très fin, mais lorsque ce dernier est optimisé et qu'il devient très difficile de réduire la dynamique une autre possibilité est d'augmenter l'amortissement des parties fixes. Ainsi en diminuant le niveau, nous serons plus à même de pouvoir envisager des études paramétriques liées à l'influence de l'intensité du balourd.

### 5.4.1 Etude expérimentale

Dans cette étude, nous nous proposons de rajouter de l'amortissement fixe par l'intermédiaire de plots amortisseurs sur les supports paliers 1 et 2 comme illustré en figure 5.54.

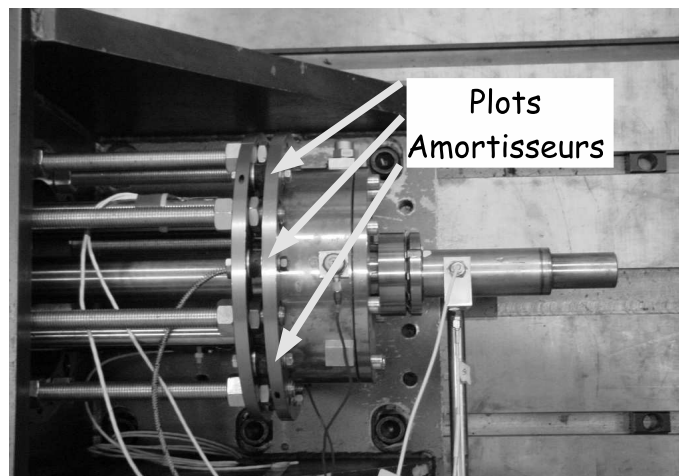


FIG. 5.54 – Système amortisseur installé sur le support palier 2

Nous cherchons alors à examiner l'influence des plots amortisseurs sur le passage de la première vitesse critique directe. Pour cela, nous comparons les niveaux vibratoires observés lors d'essais de montée en vitesse pour trois configurations : la première configuration correspond à un dispositif sans plots amortisseurs alors que les deuxième et troisième dispositifs considèrent l'ajout respectif de 4 et 8 plots amortisseurs sur chaque support palier. Dans les trois configurations, la masse de correction sur le disque est la même.

Comme le montre la figure 5.55, le dispositif expérimental permet bien en effet de diminuer le niveau vibratoire de façon importante : on divise l'amplitude vibratoire par 1.5 en ajoutant 4 plots amortisseurs et par 10 au passage de la première vitesse critique en ajoutant 8 plots amortisseurs. Ce dispositif permet donc de diminuer efficacement les niveaux vibratoires au passage de la première vitesse critique directe sans pour autant changer sensiblement la valeur de cette dernière.

On peut aussi noter que ce dispositif entraîne une augmentation faible de la première vitesse critique directe (les vitesses critiques avec 4 plots et 8 plots sont respectivement à 1.02 fois et 1.05 fois la vitesse critique sans plot). Cette rigidification provient tout naturellement de la mise en place des plots amortisseurs dont la rigidité dynamique augmente avec la fréquence et influe légèrement sur la valeur de la première vitesse critique. Les figures 5.56 - 5.59 montrent que les réponses sur les autres plans de mesure sont aussi diminuées.

Enfin, comme le montre la figure 5.60, les orbites expérimentales (obtenues par acquisition temporelle pour une vitesse de rotation fixe) au passage des vitesses critiques directes propres à chaque dispositif expérimental associé suivent naturellement les observations précédentes : l'ajout d'amortissement fixe permet de diminuer les amplitudes des orbites pour les différents plans de mesures  $C_i$  (avec  $i=1,3,4,5,6,7$ ). L'effet du système amortisseur est très clair pour les orbites mesurées sur les plans C1 et C7, où les niveaux sont plus importants.

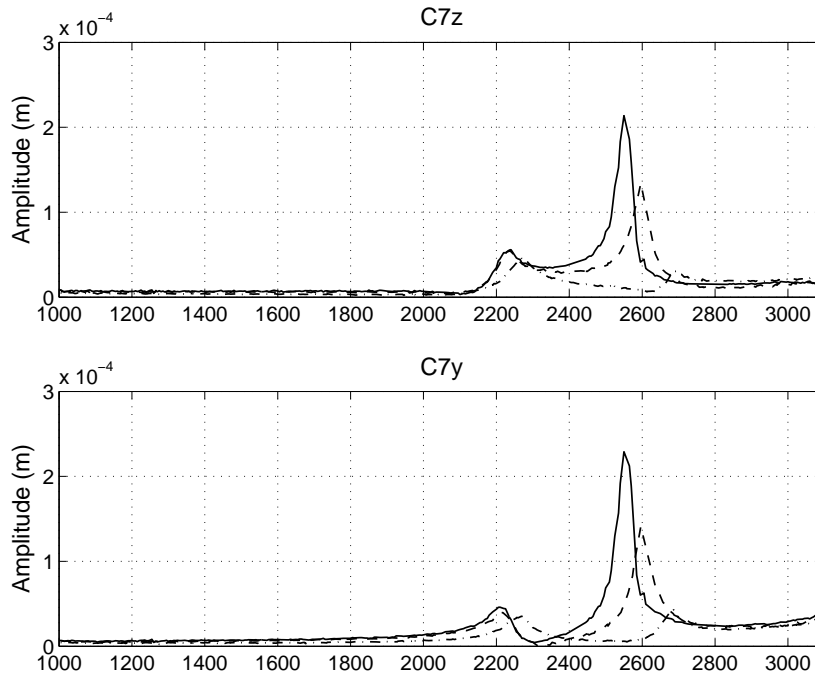


FIG. 5.55 – Réponses mesurées sur le plan C7 ((-) 0 plot ; (---) 4 plots ; (- · - ·) 8 plots)

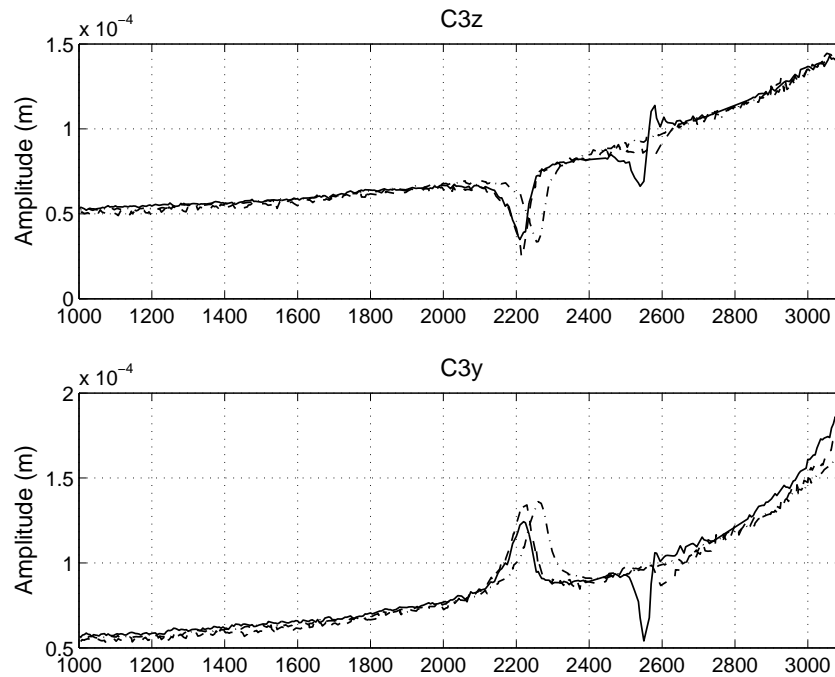


FIG. 5.56 – Réponses mesurées sur le plan C3 ((-) 0 plot; (---) 4 plots; (- · - ·) 8 plots)

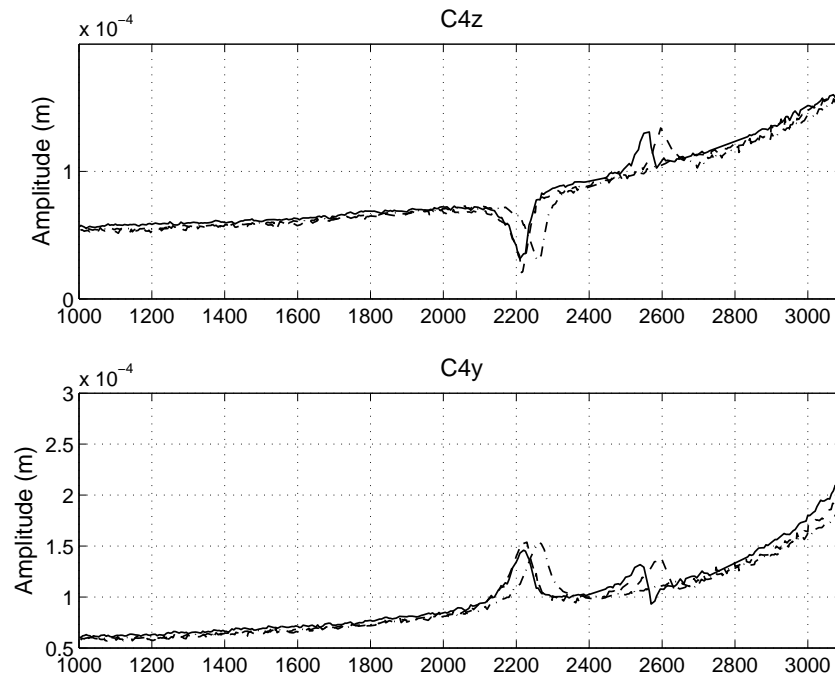


FIG. 5.57 – Réponses mesurées sur le plan C4 ((-) 0 plot; (---) 4 plots; (- · - ·) 8 plots)

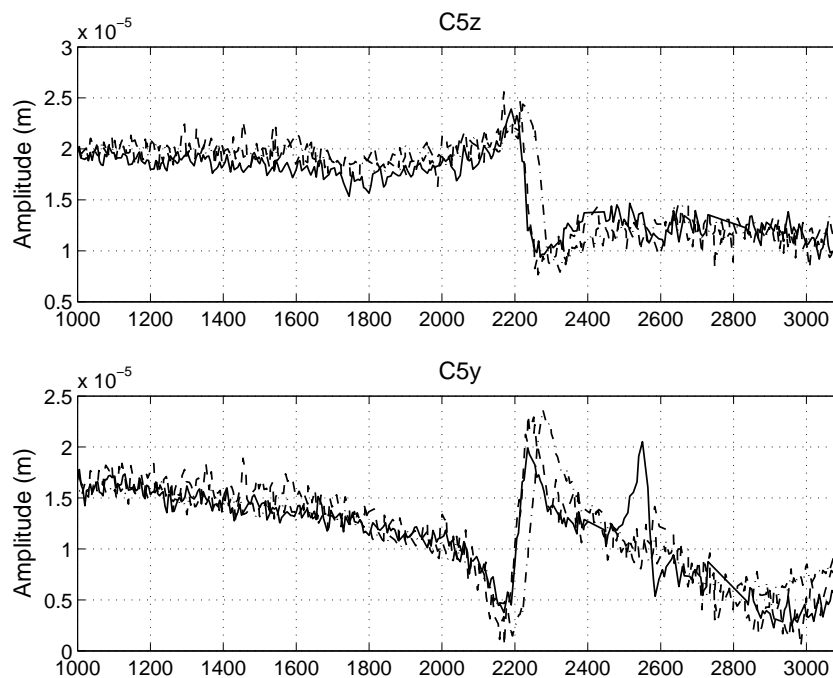


FIG. 5.58 – Réponses mesurées sur le plan C5 ((-) 0 plots; (---) 4 plots; (- · - ·) 8 plots)

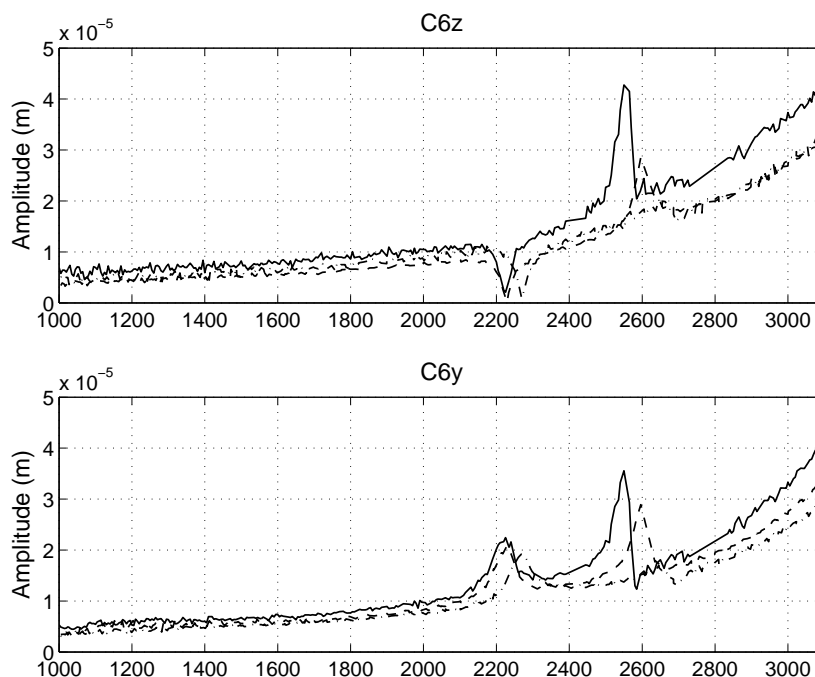


FIG. 5.59 – Réponses mesurées sur le plan C6 ((-) 0 plots; (---) 4 plots; (- · - ·) 8 plots)

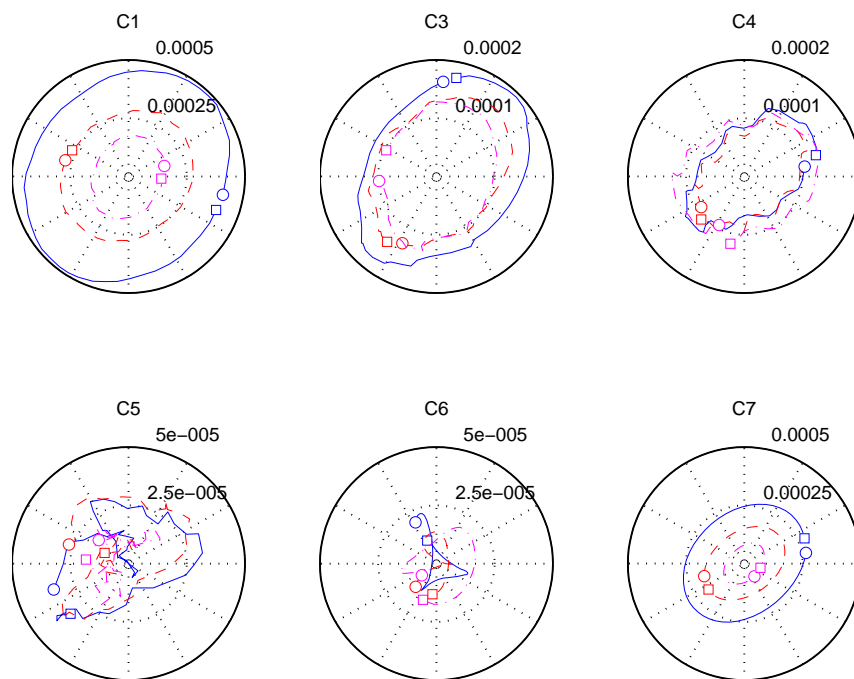


FIG. 5.60 – Orbites (—) 0 plots; (---) 4 plots; (- · -) 8 plots)

### 5.4.2 Recalage du modèle

Les essais ainsi réalisés avec ces différents systèmes amortisseurs (0, 4 et 8 plots) ont servi pour un recalage du modèle numérique. Le premier cas (figure 5.61) est le recalage du modèle numérique pour le système sans les plots amortisseurs. Nous pouvons voir que la vitesse critique directe est très bien représentée, ce qui n'est pas le cas de la vitesse critique rétrograde. Ceci est certainement dû à une sous estimation de la dissymétrie qui a été évaluée par des essais statiques autour de 6% (ce qui est faible compte tenu des résultats dynamiques observés).

Le modèle numérique montre une antirésonance vers 2800 tr/min qui n'est pas observée sur la courbe expérimentale. Ceci n'est pas surprenant compte tenu du fait que la modélisation du balourd résiduel a été déterminée *a priori* et ne correspond pas forcément à la réalité.

Pour recalculer le modèle avec le système d'amortisseurs à 4 plots, nous avons commencé avec le modèle recalé sans plots amortisseurs et, ensuite, nous avons rajouté la raideur des 4 plots en parallèle à la raideur en flexion des supports paliers. Enfin, nous avons fait varier le coefficient de perte du caoutchouc (dans les limites données par le fabricant) jusqu'à obtenir le niveau observé expérimentalement. Cette stratégie s'avère efficace, comme nous pouvons le constater en regardant la figure 5.62. Tant pour le niveau que pour l'amortissement, les résultats sont bons.

Finalement, pour le système amorti à 8 plots, nous n'avons pas réussi à obtenir des résultats satisfaisants (figure 5.63). La courbe présentée dans cette figure a été obtenue avec la valeur maximale pour le coefficient de perte fourni par le fabricant et avec le double de la raideur utilisée par le cas à 4 plots, ce qui est insuffisant pour bien recalculer le modèle numérique. La courbe expérimentale aurait pu être reproduite par le modèle numérique si une valeur plus importante d'amortissement avait été employée.

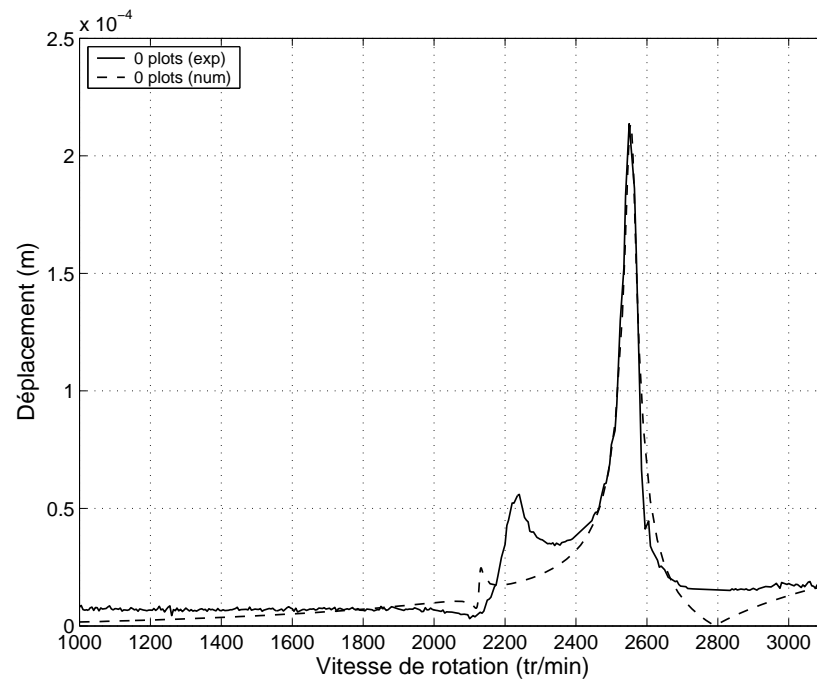


FIG. 5.61 – Comparaison essai-calcul pour le cas sans les plots amortisseurs - Plan de mesure C7

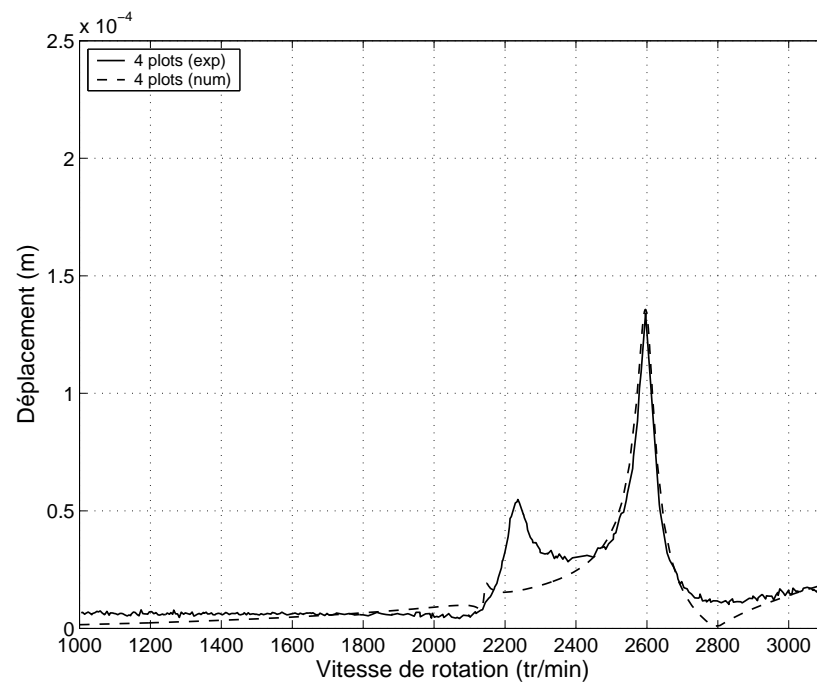


FIG. 5.62 – Comparaison essai-calcul pour le cas avec 4 plots amortisseurs



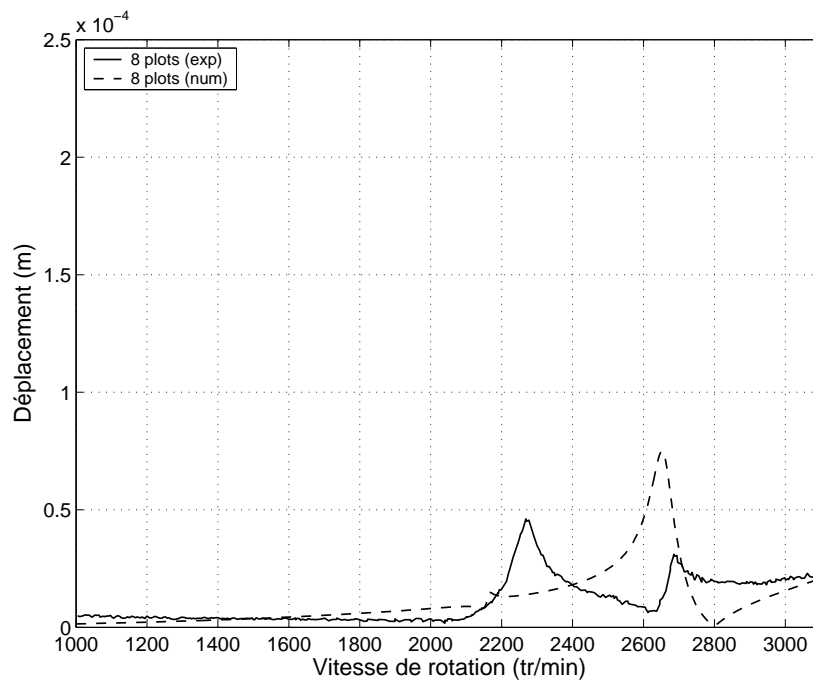


FIG. 5.63 – Comparaison essai-calcul pour le cas avec 8 plots amortisseurs

## 5.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté le banc d'essai Dynamique D'Ensemble avec la caractérisation mécanique et dynamique de ses composants.

Nous avons montré que l'équilibrage à 1 plan est suffisant pour permettre le franchissement de la première vitesse critique ; cependant, pour aller plus loin en vitesse et passer la deuxième vitesse critique, il serait nécessaire de considérer un équilibrage multiplan, comme cela a été présenté de façon numérique dans le chapitre 4.

Aussi, nous avons mis en évidence les influences de la qualité d'équilibrage et de la température du roulement à billes.

Les essais réalisés ont démontré tout d'abord que des effets de dissymétrie sont présents dans la dynamique du rotor. En effet, lors des essais de franchissement de la première vitesse critique du rotor nous avons vu que la vitesse critique rétrograde était présente dans les courbes de montée et descente en vitesse. Nous avons constaté aussi la présence du deuxième harmonique dans les mesures pour les configurations A1, où l'énergie dans les supports paliers et les roulements est plus important que dans la configuration A3.

La mesure du diagramme de Campbell nous a permis d'avoir la caractérisation modale du rotor en fonctionnement pour les deux configurations étudiées. Les vitesses critiques obtenues à l'aide du diagramme de Campbell sont bien retrouvées sur les réponses à balourd. De plus, le diagramme de Campbell nous a donné les éléments nécessaires à l'analyse des pics observés.

Avec les résultats de franchissement de la vitesse critique et du diagramme de Campbell, nous avons recalé le modèle numérique du banc d'essai. Sur le diagramme de Campbell le recalage est assez satisfaisant ; cependant pour les réponses à balourd nous n'avons pas les informations nécessaires pour réussir à avoir un bon recalage. Il faudrait estimer la distribution de balourd sur l'arbre et mettre en oeuvre des méthodes adaptées comme celles proposées par Yang et Lin [94], Sinha et al. [72].

Nous avons aussi étudié l'efficacité d'un dispositif d'amortissement, dans lequel des plots en caoutchouc assurent la dissipation, mais aussi une très légère rigidification du système. Le système amortisseur a démontré son efficacité et permettra de réduire les niveaux afin d'effectuer des études d'influence du balourd sur les caractéristiques non linéaires du système.

## Chapitre 6

# Conclusions et perspectives

### 6.1 Conclusions

Dans le cadre de ce travail, nous avons modélisé des rotors par éléments finis, en considérant la prise en compte des non-linéarités comme celles liées aux roulements, à travers le jeu radial et le contact de Hertz associé.

Nous avons vu trois modèles de roulement (le modèle à jeu radial "normal loose", le modèle à raideur radiale bilinéaire et le modèle incorporant la cinématique des éléments roulants) et nous avons plus particulièrement explicité un modèle comportant la cinématique des éléments roulants, le jeu radial et le contact de Hertz.

Aussi, l'étude de modèles de machines tournantes comportant des non-linéarités exige l'adoption de techniques spécifiques. En effet, les réponses dynamiques non linéaires des systèmes tournants peuvent être obtenues par l'intermédiaire d'intégrations temporelles classiques. Cependant, ces méthodes présentent le désavantage de nécessiter très rapidement de lourdes ressources informatiques et généralement induisent des temps de calcul prohibitifs.

Pour toutes ces raisons, nous avons développé deux méthodes non linéaires. La première, appelée la méthode de la balance harmonique AFT (Alternating Frequency Time) permet de rechercher la solution non linéaire du système tournant sous la forme d'une série de Fourier tronquée. La deuxième méthode se base sur la notion des modes normaux non linéaires et des réductions associées. Nous avons plus particulièrement proposé une nouvelle stratégie permettant de prendre en compte la variation des propriétés modales du système tournant non linéaire en fonction de la fréquence de rotation.

Concernant la méthode de la balance harmonique, elle a tout d'abord été validée sur un modèle de type rotor Jeffcott comportant un roulement non linéaire dont la modélisation prend en compte la cinématique des éléments roulants, le jeu et le contact de Hertz. Ce choix se justifie par le petit nombre de degrés de liberté utilisés, ce qui permet de valider cette méthode par comparaison des résultats obtenus avec une intégration directe des équations du mouvement. Ce problème nous a montré que la méthode est capable de

fournir des résultats tout à fait cohérents avec ceux qui viennent d'une intégration directe, si nous recherchons la solution approchée sous la forme d'une série de Fourier tronquée à un ordre suffisant. De plus, nous avons vu que le modèle de roulement utilisé peut donner des informations sur l'évolution du contact des éléments roulants en fonction du temps. En utilisant la méthode de la balance harmonique validée sur ce cas simple, nous avons étudié un rotor flexible dont les dimensions principales se sont inspirées de celles du banc d'essai Dynamique D'Ensemble (DDE) de l'Ecole Centrale de Lyon, avec un roulement à billes modélisé comme un roulement non linéaire. Cette étude a mis en évidence des réponses à balourd complexes, avec des plages fréquentielles comportant deux régions stables obtenues lors des essais de montée et descente en fréquence de rotation. Nous avons aussi déterminé les plages de fréquence instables et réalisé des études sur les orbites et les évolutions du contact pour chacune des billes.

Dans un second temps, l'application des modes normaux non linéaires aux machines tournantes a été illustrée sur un rotor avec des effets gyroscopiques et un palier à non-linéarité cubique. Nous avons vu que la notion de mode normal non linéaire peut être à l'origine de méthodes de réduction assez performantes. Nous avons aussi vu et exploré les limitations de la formulation en modes non linéaires qui sous cette forme n'est pas adaptée à la restitution du phénomène de résonance interne.

Dans une seconde partie, nous avons présenté la description du banc d'essai Dynamique D'Ensemble, avec la présentation et caractérisation des organes constitutifs du banc.

Nous avons aussi explicité la description du modèle numérique du banc, réalisé sur SAMCEF, qui a été utilisé pour la conception et pour le recalage à partir des essais expérimentaux. Les procédures d'alignement et d'équilibrage associées à une telle machine tournante ont été présentées; des simulations numériques d'équilibrage réalisées sur un modèle académique du banc ont confirmé l'efficacité de ces procédures mais aussi montré l'extrême sensibilité des résultats aux erreurs de mesure (en particulier en ce qui concerne la phase).

Enfin, des essais expérimentaux réalisés sur le banc DDE ont été menés dans le but de connaître le comportement dynamique du banc et de comprendre comment les variations de raideur des supports paliers influencent son comportement dynamique.

Dans un premier temps, nous avons utilisé une configuration où les supports paliers sont les plus souples possible. Dans cette configuration, nous avons réalisé des essais d'équilibrage, de franchissement de la première vitesse critique et de construction du diagramme de Campbell. Les orbites du système ont été mesurées, nous indiquant le sens de précession sur chaque partie de l'arbre en fonction de la vitesse de rotation. Lors de ces essais, nous avons retrouvé des régimes de fonctionnement avec des précessions directe et rétrograde simultanées. Les essais de franchissement de la première vitesse critique et de construction du diagramme de Campbell ont été aussi réalisés sur une autre configuration du banc, plus rigide que la première, afin de statuer sur les évolutions du comportement dynamique du banc vis-à-vis de ce paramètre.

Ces essais ont aussi été utilisés pour effectuer un recalage du modèle numérique du banc. Des essais numériques de sensibilité des paramètres nous ont indiqué que la variable la plus pertinente pour l'optimisation était la raideur en basculement du roulement à billes.

En agissant alors sur cette variable, nous avons réussi à recalibrer le modèle numérique du banc avec moins de 5% de différence sur la vitesse critique entre les mesures expérimentales et les résultats numériques.

Enfin, nous avons mis au point un système amortisseur conçu pour diminuer les vibrations du banc lors du franchissement de la première vitesse critique. Les essais ont montré que le système peut s'avérer très efficace. Nous avons alors recalibré le modèle numérique afin de reproduire le comportement dynamique du banc avec le système amortisseur.

## 6.2 Perspectives

Les résultats de ces travaux de thèse peuvent donc s'ouvrir sur diverses perspectives concernant aussi bien des aspects théoriques que des aspects expérimentaux.

Concernant tout d'abord les méthodes d'analyse non linéaire utilisées dans ces travaux de recherche, il est bon de noter que la méthode de la balance harmonique AFT exige une hypothèse initiale sur le nombre d'harmoniques retenu pour estimer la réponse non linéaire du système. De plus, comme nous nous intéressons à des systèmes tournants avec jeu, les réponses non linéaires sont plus ou moins complexes en fonction de la vitesse de rotation. En effet, il s'avère que suivant les plages de vitesses, la dynamique peut être représentée par un très faible nombre d'harmoniques (voire par une solution monoharmonique) ou au contraire par un nombre élevé d'harmoniques du fait de la complexité de la réponse non linéaire. Ceci nous amène tout naturellement à penser qu'une implémentation de la méthode de la balance harmonique gérant de façon adaptative le nombre d'harmoniques suivant la vitesse de rotation du système permettrait un gain en temps de calcul très important. Un critère tel que la contribution énergétique de chaque harmonique par rapport à l'énergie totale du signal de déplacement pourrait par exemple être envisagé.

Pour la notion des modes non linéaires, nous avons appliqué cette technique sur un rotor flexible comportant peu de degrés de liberté et une non-linéarité cubique. Il serait intéressant de mettre en place cette méthode sur des systèmes non linéaires de plus grande taille et comportant des non-linéarités autres que cubiques telles que des non-linéarités de type jeu ou contact de Hertz. En effet, si la problématique de traiter des problèmes de plus grande taille semble assez aisée à surmonter (le problème ne provenant que des algorithmes à développer et des ressources informatiques nécessaires à de tels calculs), la perspective de pouvoir appliquer la méthode des invariants à des systèmes comportant des non-linéarités discontinues est un problème plus ouvert et peut-être plus délicat à gérer.

D'autre part, comme pour la méthode de la balance harmonique, la méthode des variétés invariantes se base sur une approximation des variétés en fonction des coordonnées modales de référence : généralement, cette approximation est prise sous la forme d'une série en puissances croissantes allant jusqu'à un certain ordre. Cependant nous ne disposons actuellement d'aucun critère qui permette de définir le choix de l'ordre minimal permettant d'obtenir une représentation correcte des variétés (à part le fait de comparer les résultats obtenus par cette technique avec ceux provenant d'un calcul par intégration directe par

exemple). Il serait pourtant très intéressant de pouvoir statuer dès le départ sur l'ordre minimal nécessaire pour la série de puissance croissante car ainsi les calculs des variétés seraient plus facilement gérables et nécessiteraient beaucoup moins de temps de calcul et de ressources informatiques.

Concernant maintenant les aspects expérimentaux, nous disposons donc à l'heure actuelle d'un banc d'essai mono-rotor opérationnel sur lequel différentes études peuvent être envisagées. Dans un premier temps, il semble tout naturel de s'intéresser au problème de caractérisation et identification du comportement non linéaire des roulements et de pouvoir effectuer des corrélations entre les essais expérimentaux et les modèles de roulements développés dans la thèse.

Ainsi, des études permettant de statuer sur l'influence de la raideur non linéaire (jeu ou contact de Hertz) par rapport à la dynamique des machines tournantes au voisinage des vitesses critiques mais aussi pour d'autres vitesses de rotation (au passage de certains harmoniques spécifiques) seraient très intéressantes.

Enfin, des études expérimentales portant sur la détermination du minimum d'amortissement (fixe ou tournant) à apporter à un rotor pour permettre de franchir des vitesses critiques avec un certain niveau d'amplitude seraient fortes intéressantes et pourraient servir de critère de conception vis à vis des passages de modes. Bien entendu, de telles études seraient fortement couplées à l'étude d'instabilités. Aussi, des corrélations avec les modèles numériques déjà existants permettraient d'identifier et de statuer numériquement à l'avenir sur l'apport d'amortissements tournant et/ou fixe.

# Bibliographie

- [1] K. J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1995.
- [2] R. Bigret. *Stabilité des Machines Tournantes et des Systèmes*. Cetim, 1998.
- [3] N. Boivin, C. Pierre, and S. W. Shaw. Non-linear modal analysis of the forced response of structural. In *Proceedings of the AIAA Dynamics Specialists Conference*, Salt Lake City, Utah, USA, 1996.
- [4] C. G. Broyden. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of Computations*, 19 :577–593, 1965.
- [5] T. M. Cameron and J. H. Griffin. An alternating frequency time domain method for calculating the steady state response of nonlinear dynamic systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 56 :149–154, 1989.
- [6] A. Cardona, A. Lerusse, and M. Géradin. Fast fourier nonlinear vibration analysis. *Computational Mechanics*, 22 :128–142, 1998.
- [7] Y. K. Cheung, H. Chen, and S. L. Lau. Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems. *Journal of Sound and Vibration*, 140(2) :273–286, 1990.
- [8] D. Childs. *Turbomachinery Rotordynamics : Phenomena, Modeling, and Analysis*. Wiley-Interscience, 1993.
- [9] Y. S. Choi and S. T. Noah. Nonlinear steady state response of a rotor-support system. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 109(255–261), 1987.
- [10] Schenck Trebel Corporation. Unbalance types. Disponible en ligne : [http://www.schenck-usa.com/lib\\_101\\_types\\_unbal.asp](http://www.schenck-usa.com/lib_101_types_unbal.asp), Sep. 2004.
- [11] S. H. Crandall. *Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics*, chapter Rotordynamics, pages 1–44. CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [12] D. Demailly. *Etude du Comportement Non-Lineaire dans le Domaine Fréquentiel. Application à la Dynamique Rotor*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [13] M. Dias-Jr, S. J. Idehara, A. L. A. Mesquita, and U. A. Miranda. On the simultaneous forward and backward whirling of flexible rotors : Numerical analysis and experimental verification, 30/09/2002, sydney, australia. In *IFTToMM - Sixth International Conference on Rotor Dynamics*, Sydney, Australia, 2002.
- [14] A. D. Dimarogonas and S. Haddad. *Vibration for Engineers*. Prentice Hall, 1992.
- [15] F. E. Erich. *Handbook of Rotordynamics*. McGraw-Hill, 1992.

- [16] L. J. Everett. Two plane balancing of a rotor system without phase response measurements. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 109 :162–167, April 1987.
- [17] D. J. Ewins. *Modal Testing : Theory, Practice and Application*. Taylor & Francis Group, 2000.
- [18] B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, 2 edition, 1992.
- [19] G. Genta. Whirling of unsymmetrical rotors, a finite element approach based on complex coordinates. *Journal of Sound and Vibration*, 124(1) :27–53, 1988.
- [20] G. Genta. *Vibration of Structures and Machines : Practical Aspects*. Springer-Verlag, 1999.
- [21] C. Gibert. *Analyse Modale Non Linéaire Expérimentale*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2001.
- [22] T. Gmür. *Dynamique des Structures : Analyse Modale Numérique*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.
- [23] G. Groll and D. J. Ewins. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, 241(2) :223–233, 2001.
- [24] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des Vibrations - Application à la Dynamique des Structures*. Masson, 1992.
- [25] E. J. Hanh and P. Y. Chen. Harmonic balance analysis of general squeeze film damped multidegree-of-freedom rotor bearing systems. *Journal of Tribology*, 116 :499–507, 1994.
- [26] T. A. Harris. *Rolling Bearing Analysis*. John Wiley and Sons, 4 edition, 2001.
- [27] S. P. Harsha, K. Sandeep, and R. Prakash. Non-linear dynamic behaviors of rolling element bearings due to surface waviness. *Journal of Sound and Vibration*, 272 :557–580, 2004.
- [28] E. Hashish and T. C. Sankar. Finite element and modal analyses of rotor-bearing systems under stochastic loading conditions. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 106(1) :80–89, 1984.
- [29] G. Jang and S. W. Jeong. Vibration analysis of a rotating system due to the effect of ball bearing waviness. *Journal of Sound and Vibration*, 269 :709–726, 2004.
- [30] L. Jezequel and C. H. Lamarque. Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149(3) :429–459, 1989.
- [31] Y. Kang, Y. P. Shih, and A. C. Lee. Investigation on the steady-state responses of asymmetric rotors. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 114 :194–208, 1992.
- [32] E. V. Karpenko, M. Wiercigroch, and M. P. Cartmell. Regular and chaotic dynamics of a discontinuously nonlinear rotor system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 13 :1231–1242, 2002.
- [33] Y. B. Kim and S. T. Noah. Stability and bifurcation analysis of oscillators with piecewise-linear characteristics : A general approach. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 58 :545–553, 1991.
- [34] Y. B. Kim and S. T. Noah. Quasi periodic response and stability analysis of a non-linear jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 190(2) :239–253, 1996.



- [35] Y. B. Kim, S. T. Noah, and Y. S. Choi. Periodic response of multi-disk rotors with bearing clearances. *Journal of Sound and Vibration*, 144(3) :381–395, 1991.
- [36] D. M. Ku. Finite element analysis of whirl speeds for rotor-bearing systems with internal damping. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(5) :599–610, 1998.
- [37] M. Lalanne and Ferraris G. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. John Wiley and Sons, 1990.
- [38] C. H. Lamarque. *Contribution à la Modélisation et l'Identification des Systèmes Mécaniques non Linéaires*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- [39] A. Y. T. Leung and S. K. Chui. Non-linear vibration of coupled duffing oscillators by an incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 181(4) :619–633, 1995.
- [40] X. Li, Y. Chen, Z. Wu, and F. Chen. Bifurcation of nonlinear internal resonant normal modes of a class of multi-degree-of-freedom systems. *Mechanics Research Communications*, 29 :299–306, 2002.
- [41] T. C. Lim and R. Singh. Vibration transmission through rolling element bearings, part i : Bearing stiffness formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 139(2) :179–199, 1990.
- [42] K. Madsen, H. B. Nielsen, and O. Tingleff. *Methods for Non-Linear Least Squares Problems*. Technical University of Denmark, 2004.
- [43] L. Meirovitch. *Computational Methods in Structural Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1980.
- [44] L. Meirovitch. *Principles and Techniques of Vibrations*. Pearson Education, 1996.
- [45] J. S. Mitchell. *Introduction to Machinery Analysis and Monitoring Alignment*. Penwell Publications, 1993.
- [46] A. Muszynska. Forward and backward precession of a vertical anisotropically supported rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1) :207–222, 1996.
- [47] E. Peschek N., Boivin, C. Pierre, and S. Shaw. Nonlinear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds. *Nonlinear Dynamics*, 25 :183–205, 2001.
- [48] C. Nataraj and H. D. Nelson. Periodic oscillations in rotor dynamic systems with nonlinear supports : A general approach. *AME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 111 :187–193, 1989.
- [49] A. H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational, and Experimental Methods*. Wiley-Interscience, 1995.
- [50] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. Wiley-Interscience, 1995.
- [51] F.C. Nelson. A review of the origins and current status of rotor dynamics. In *IFTOMM - Sixth International Conference on Rotor Dynamics*, Sydney, Australia, 2002.
- [52] H. D. Nelson and J. M. McVaugh. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 98 :593–600, 1976.
- [53] D. E. Newland. On the modal analysis of non-conservative linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 112(1) :69–96, 1987.
- [54] NSK. *NSK Rolling Bearings Catalog E1101e*.

- [55] C. Padmanabhan and R. Singh. Analysis of periodically excited non-linear systems by a parametric continuation technique. *Journal of Sound and Vibration*, 184(1) :35–58, 1995.
- [56] E. Pesheck, C. Pierre, and S. W. Shaw. Accurate reduced-order models for a simple rotor blade model using nonlinear normal modes. *Mathematical and Computer Modelling*, 33 :1085–1097, 2001.
- [57] E. Pesheck, C. Pierre, and S. W. Shaw. A new galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 249(5) :971–993, 2002.
- [58] A. Raghothama and S. Narayanan. Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 226(3) :469–492, 1999.
- [59] A. Raghothama and S. Narayanan. Non-linear dynamics of a two-dimensional airfoil by incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 226(3) :493–517, 1999.
- [60] A. Raghothama and S. Narayanan. Bifurcation and chaos of an articulated loading platform with piecewise non-linear stiffness using the incremental harmonic balance method. *Ocean Engineering*, 27 :1087–1107, 2000.
- [61] V. Ramamurti and K. V. Anantaraman. Two-plane in-situ balancing. *Journal of Sound and Vibration*, 134(2) :343–352, 1989.
- [62] R. H. Rand. A higher order approximation for nonlinear normal modes in two degree of freedom systems. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 6 :545–547, 1971.
- [63] R. H. Rand. The geometrical stability of nonlinear normal modes in two degree of freedom systems. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 88 :161–168, 1973.
- [64] R. H. Rand. A direct method for nonlinear normal modes. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 9 :363–368, 1974.
- [65] C. Rao, R. B. Bhat, and G. D. Xistris. Experimental verification of simultaneous forward and backward whirling at different points of a jeffcott rotor supported on identical journal bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 198(3) :379–388, 1996.
- [66] C. Rao, R. B. Bhat, and G. D. Xistris. Simultaneous forward and backward whirling in a jeffcott rotor supported on dissimilar hydrodynamic bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 203(4) :707–716, 1996.
- [67] R.M. Rosenberg. On non-linear vibrations of systems with many degree of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, 9 :155–242, 1966.
- [68] M. Sakata, M. Endo, K. Kishimoto, and N. Hayashi. Secondary critical speed of flexible rotors with inertia slots. *Journal of Sound and Vibration*, 87(1) :61–70, 1983.
- [69] S. Setio, H. D. Setio, and L. Jézéquel. Modal analysis of nonlinear multi-degree-of-freedom structure. *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 7(2) :75–93, 1992.
- [70] S. W. Shaw and C. Pierre. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(3) :85–124, 1993.
- [71] S. W. Shaw and C. Pierre. Normal modes for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169(3) :319–347, 1994.

- [72] J. K. Sinha, A. W. Lees, and M. I. Friswell. Estimating unbalance and misalignment of a flexible rotating machine from a single run-down. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3–5) :976–983, 2004.
- [73] S. K. Sinha. Dynamic characteristics of a flexible bladed rotor with coulomb damping due to tip rub. *Journal of Sound and Vibration*, 273(4–5) :875–919, 2004.
- [74] J.-J. Sinou and F. Thouverez. Non-linear dynamic of rotor-stator system with non-linear bearing. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Mécanique*, 332(9) :743–750, 2004.
- [75] J.-J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jézéquel. Dynamique non-linéaire d'un ensemble rotor stator comportant des mécanismes non-linéaires avec jeu. In *Proceedings du 6ème Colloque National en Calcul des Structures*, pages 20–23, Giens, France, 2003.
- [76] M. E. S. Soares. *Modos Não-Lineares em Sistemas Discretizados pelo Método dos Elementos Finitos*. PhD thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1998.
- [77] J. T. Sopianen and A. M. Mikkola. Ball bearing vibration analysis including localized and distributed defects. In *Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2003.
- [78] W. Szemplinska-Stupinicka. *The Behaviour of Nonlinear Vibrating Systems*, volume 1. Kluwer Academic, 1990.
- [79] W. Szemplinska-Stupinicka. *The Behaviour of Nonlinear Vibrating Systems*, volume 2. Kluwer Academic, 1990.
- [80] S. P. Timoshenko. *Résistance des Matériaux - Tome 2*. Dunod, 1968.
- [81] M. Tiwari and K. Gupta. Dynamics response of an unbalanced rotor supported on ball bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 238(5) :757–779, 2000.
- [82] M. Tiwari, K. Gupta, and O. Prakash. Effect of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 238(5) :723–756, 2000.
- [83] A. F. Vakakis. Non-linear normal modes (nnms) and their application in vibration theory : an overview. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(1) :3–22, 1997.
- [84] A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, Y. V. Mikhlin, V. N. Pilipchuk, and A. A. Zevin. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. Wiley, 1996.
- [85] J. M. Vance. *Rotordynamics of Turbomachinery*. Interscience, 1988.
- [86] B. L. Vrande. *Nonlinear Dynamics of Elementary Rotor Systems with Compliant Plain Journal Bearings*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2001.
- [87] E. W. Weisstein. Inverse function theorem. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/InverseFunctionTheorem.html>., 2004.
- [88] V. Wowk. *Machinery Vibration : Balancing*. McGraw Hill, 1994.
- [89] W. C. Xie, H. P. Lee, and S. P. Lim. Nonlinear dynamic analysis of mems switches by nonlinear modal analysis. *Nonlinear Dynamics*, 31 :243–256, 2003.
- [90] B. Xu, L. Qu, and R. Sun. The optimization technique-based balancing of flexible rotors without test runs. *Journal of Sound and Vibration*, 238(5) :877–892, 2000.
- [91] L. Xu, M. W. Lu, and Q. Cao. Nonlinear vibrations of dynamical systems with a general form of piecewise viscous damping by incremental harmonic balance method. *Physics Letters A*, 301 :65–73, 2002.

- 
- [92] L. Xu, M. W. Lu, and Q. Cao. Bifurcation and chaos of a harmonically excited oscillator with both stiffness and viscous damping piecewise linearities by incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 264 :873–882, 2003.
- [93] H. Yabuno and A. H. Nayfeh. Nonlinear normal modes of a parametrically excited cantilever beam. *Nonlinear Dynamics*, 2001.
- [94] T. Yang and C. Lin. Estimation of distributed unbalance of rotors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124(4) :976–983, 2002.
- [95] E. S. Zorzi and H. D. Nelson. Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping. *ASME Journal of Engineering for Power*, pages 71–76, 1977.
- [96] H. N. Özgüven and Z. L. Özkan. Whirl speeds and unbalance response of multibearing rotors using finite elements. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 106 :72–79, 1984.

# Publications personnelles

1. C. V. S. Villa, J. J. Sinou, F. Thouverez and M. Massenzio. Études Numérique et Expérimentale de l'Amortissement sur la Réponse Dynamique d'un Rotor Flexible. In *Colloque "VIBRATIONS CHOCS ET BRUIT 2004"*, Association Française de Mécanique, Ecole Centrale de Lyon, France, 2004.
2. C. V. S. Villa, J. J. Sinou and F. Thouverez. Non-Linear Dynamics of a Rotor-Bearing System Based on the Invariant Manifold Approach. In *Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, Illinois, USA, 2003.
3. J. J. Sinou, D. Demailly, C. V. S. Villa, F. Thouverez, M. Massenzio et F. Laurant. Rotor dynamics Analysis : Experimental and Numerical Investigations. In *Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, Illinois, USA, 2003.
4. C. V. S. Villa, J. J. Sinou, F. Thouverez. The Invariant Manifold Approach Applied to Non-Linear Dynamics of a Rotor Bearing System, soumis au *European Journal of Mechanics*.
5. C. V. S. Villa, J. J. Sinou, F. Thouverez. Investigation of a Rotor-Bearing System with Bearing Clearances and Hertz Contact by Using an Harmonic Balance Method, soumis au *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*.
6. C. V. S. Villa, J. J. Sinou, F. Thouverez and M. Massenzio. Etudes numérique et expérimentale d'un système tournant à supports flexibles variables, soumis au *7ème Colloque National en Calcul des Structures (GIENS 2005)*, Association Française de Mécanique et Association Calcul des Structures et Modélisation, Laboratoire Roberval de Mécanique (Université de Technologie de Compiègne), Giens, 2005.



## Annexe A

# Matrices élémentaires d'un rotor

### A.1 Matrices élémentaires du disque

#### A.1.1 Matrice élémentaire de masse

$$\mathbf{m}_d = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

#### A.1.2 Matrice élémentaire gyroscopique

$$\mathbf{g}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$









## Annexe B

# Procédure de construction de la matrice $M_0$

Nous allons expliciter la procédure de Soares [76] pour la construction de la matrice  $M_0$  à partir des vecteurs propres du système linéarisé (sous la forme de l'équation 3.126).

Nous avons vu que dans le cas linéaire la solution peut s'exprimer à l'aide des modes du système 3.127. La méthode des variétés invariantes conduit au même type de relation, donnée par :

$$\mathbf{z} = M_0 \mathbf{w} \quad (\text{B.1})$$

Nous allons maintenant introduire une autre transformation de coordonnées :

$$\mathbf{w} = \mathbf{S} \mathbf{q} \quad (\text{B.2})$$

où  $\mathbf{S}$  est une matrice diagonale par blocs, donnée par :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/\beta_1 & 0 & & & & \\ \alpha_1/\beta_1 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \\ & & & & 1/\beta_N & 0 \\ & & & & \alpha_N/\beta_N & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Compte tenu des relations 3.127 et B.2, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{z} = \Phi \mathbf{S}^{-1} \mathbf{w} \quad (\text{B.4})$$

où :



où l'exposant indique les numéros des lignes considérées. Le sous-espace linéaire correspondant au mode  $k$  possède comme base les vecteurs  $\gamma_k$  et  $\eta_k$ . Pour que l'équation B.10 soit vérifiée, les vecteurs  $\hat{\gamma}_k$  et  $\hat{\eta}_k$  doivent aussi être une base. Pour cela, nous les écrivons comme étant des combinaisons linéaires de  $\gamma_k$  et  $\eta_k$  :

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_k &= c_1\gamma_k + c_2\eta_k \\ \hat{\eta}_k &= c_3\gamma_k + c_4\eta_k\end{aligned}\tag{B.11}$$

La substitution des équations B.11 dans les équations B.10 nous fournit un système d'équations linéaires en  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$ . Leur détermination nous permet d'avoir les matrices  ${}^{(k)}\mathbf{m}_0$  :

$${}^{(k)}\mathbf{m}_0 = [\hat{\gamma}_k, \hat{\eta}_k] \begin{bmatrix} \beta_k & 0 \\ -\alpha_k & 1 \end{bmatrix}\tag{B.12}$$



# Table des figures

2.1	Configuration de référence . . . . .	5
2.2	Configuration déformée . . . . .	6
2.3	Le disque et les repères fixe et tournant . . . . .	10
2.4	Les angles d'Euler . . . . .	11
2.5	Coupe de la section droite de l'arbre . . . . .	12
2.6	Degrés de liberté de l'élément de poutre . . . . .	13
2.7	Exemple d'un diagramme de Campbell pour un rotor axisymétrique . . . . .	17
2.8	Exemple d'un diagramme de Campbell pour un rotor avec des supports orthotropes . . . . .	18
3.1	Géométrie de contact (figure tirée de Harris [26]) . . . . .	23
3.2	Modèle de roulement à raideur radiale bilinéaire . . . . .	26
3.3	Modèle de roulement incorporant la cinématique des éléments roulants . . . . .	27
3.4	La procédure AFT . . . . .	38
3.5	Rotor Jeffcott avec un roulement à billes non-linéaire . . . . .	47
3.6	Courbes de réponse du rotor et du stator calculées avec 5 harmoniques (direction $X$ ) . . . . .	48
3.7	Comparaison d'amplitudes entre la balance harmonique à 10 harmoniques (—) et l'intégration directe (○) (direction $X$ ) . . . . .	49
3.8	Comparaison entre les orbites - balance harmonique à 10 harmoniques (—) et l'intégration directe (— · —) - fréquence :10.4 Hz . . . . .	50
3.9	Comparaison entre les orbites - balance harmonique à 10 harmoniques (—) et l'intégration directe (— · —) - fréquence :12.7 Hz . . . . .	50

3.10	Comparaison entre les orbites - balance harmonique à 10 harmoniques (-) et l'intégration directe (- · -) - fréquence :14.2 Hz . . . . .	51
3.11	Comparaison entre les orbites - balance harmonique à 10 harmoniques (-) et l'intégration directe (- · -) - fréquence :19.2 Hz . . . . .	51
3.12	Evolution des orbites entre 10 Hz et 23 Hz, calculée avec 10 harmoniques . . . . .	52
3.13	Comparaison entre les orbites du rotor pour $F = 14.2$ Hz - balance harmonique (-) et l'intégration directe (- · -) . . . . .	53
3.14	Comparaison entre les orbites du stator pour $F = 14.2$ Hz - balance harmonique (-) et l'intégration directe (- · -) . . . . .	53
3.15	Comparaison entre les orbites du rotor pour $F = 19.2$ Hz - balance harmonique (-) et l'intégration directe (- · -) . . . . .	54
3.16	Comparaison entre les orbites du stator pour $F = 19.2$ Hz - balance harmonique (-) et l'intégration directe (- · -) . . . . .	54
3.17	Dynamique du roulement pour $F = 5$ Hz . . . . .	56
3.18	Dynamique du roulement pour $F = 10.4$ Hz . . . . .	56
3.19	Dynamique du roulement pour $F = 14.2$ Hz . . . . .	56
3.20	Dynamique du roulement pour $F = 14.5$ Hz . . . . .	57
3.21	Dynamique du roulement pour $F = 15$ Hz . . . . .	57
3.22	Dynamique du roulement pour $F = 15.5$ Hz . . . . .	57
3.23	Dynamique du roulement pour $F = 16$ Hz . . . . .	58
3.24	Dynamique du roulement pour $F = 17$ Hz . . . . .	58
3.25	Dynamique du roulement pour $F = 20$ Hz . . . . .	58
3.26	Dynamique du roulement pour $F = 30$ Hz . . . . .	59
3.27	Schéma du rotor ( $K_b$ : raideur d'un roulement, $K_s$ : raideur d'un support palier, $JAM$ : joint d'accouplement) . . . . .	60
3.28	Déplacement du rotor au niveau du roulement à billes . . . . .	63
3.29	Déplacement du stator au niveau du roulement à billes . . . . .	63
3.30	Régimes d'instabilité . . . . .	64
3.31	Régimes d'instabilité (sur la réponse à balourd) . . . . .	64



---

3.32	Influence du nombre d'harmoniques sur la détermination des régimes d'instabilité . . . . .	65
3.33	Repérage pour les orbites . . . . .	66
3.34	Orbites du rotor et du stator à $F = 7.6$ Hz (montée en vitesse, point A) . . .	67
3.35	Orbites du rotor et du stator à $F = 20$ Hz (montée en vitesse, point B) . . . .	67
3.36	Orbites du rotor et du stator à $F = 25.8$ Hz (montée en vitesse, point C) . .	68
3.37	Orbites du rotor et du stator à $F = 27.8$ Hz (montée en vitesse, point D) . .	68
3.38	Orbites du rotor et du stator à $F = 41.5$ Hz (montée en vitesse, point E) . . .	69
3.39	Orbites du rotor et du stator à $F = 28.2$ Hz (descente en vitesse, point F) . .	69
3.40	Orbites du rotor et du stator à $F = 30.2$ Hz (descente en vitesse, point G) . .	70
3.41	Dynamique du roulement pour $F = 7.6$ Hz . . . . .	72
3.42	Dynamique du roulement pour $F = 20$ Hz . . . . .	72
3.43	Dynamique du roulement pour $F = 25.8$ Hz . . . . .	72
3.44	Dynamique du roulement pour $F = 25.8$ Hz . . . . .	73
3.45	Dynamique du roulement pour $F = 28.2$ Hz . . . . .	73
3.46	Dynamique du roulement pour $F = 29.1$ Hz . . . . .	73
3.47	Dynamique du roulement pour $F = 30.2$ Hz . . . . .	74
3.48	Rotor . . . . .	92
3.49	Diagramme de Campbell . . . . .	93
3.50	Fréquence pour la résonance interne 3 :1 . . . . .	93
3.51	Coefficients d'ordre 1 en fonction de la fréquence pour le mode normal 1 . .	94
3.52	Coefficients d'ordre 3 en fonction de la fréquence pour le mode normal 1 . .	95
3.53	Coefficients d'ordre 3 en fonction de la fréquence pour le mode normal 1 . .	95
3.54	Variété modale du déplacement pour une fréquence de rotation de 23.87 Hz. (Facettes grises : non linéaire ; Facettes blanches : linéaire) . . . . .	96
3.55	Variété modale de la vitesse pour une fréquence de rotation de 23.87 Hz. (Facettes grises : non linéaire ; Facettes blanches : linéaire) . . . . .	96

3.56	Comparaison entre le modèle réduit et le modèle complet (fréquence de rotation : 8 Hz) . . . . .	97
3.57	Comparaison entre le modèle réduit et le modèle linéaire (fréquence de rotation : 8 Hz) . . . . .	98
3.58	Comparaison entre le modèle réduit et le modèle complet (fréquence de rotation : 23.87 Hz) . . . . .	99
3.59	Comparaison entre le modèle réduit et le modèle linéaire (fréquence de rotation : 23.87 Hz) . . . . .	99
3.60	Comparaison entre le modèle réduit et le modèle complet (fréquence de rotation : 44.56 Hz) . . . . .	100
3.61	Comparaison entre le modèle réduit et le modèle linéaire (fréquence de rotation : 44.56 Hz) . . . . .	100
3.62	Projection de la réponse temporelle sur la variété de déplacement (fréquence de rotation : 23.87 Hz) . . . . .	101
3.63	Projection de la réponse temporelle sur la variété de vitesse (fréquence de rotation : 23.87 Hz) . . . . .	101
3.64	Projection de la réponse temporelle sur la variété linéaire de déplacement (fréquence de rotation : 23.87 Hz) . . . . .	102
3.65	Projection de la réponse temporelle sur la variété linéaire de vitesse (fréquence de rotation : 23.87 Hz) . . . . .	102
4.1	Schématisme du banc . . . . .	106
4.2	Photographie du banc d'essai . . . . .	106
4.3	Le joint d'accouplement de type "double cardan" . . . . .	107
4.4	Photographie du support palier . . . . .	108
4.5	Réglage de la longueur effective $L$ . . . . .	109
4.6	Montage expérimental pour la mesure de la raideur en flexion du support palier . . . . .	110
4.7	Courbes de chargement pour différents raideurs . . . . .	110
4.8	Raideur en flexion en fonction de la longueur effective . . . . .	111
4.9	Montage expérimental pour l'analyse modale du support palier . . . . .	112
4.10	Analyse modale du support palier pour $a=0$ mm - plan vertical . . . . .	113

---

4.11	Analyse modale du support palier pour $a=0$ mm - plan horizontal . . . . .	113
4.12	Analyse modale du banc DDE pour 3 positions angulaires du rotor . . . . .	114
4.13	Plans de mesure sur le support palier 2 et sur l'extrémité libre de l'arbre . . .	115
4.14	Plan de mesure sur l'arbre . . . . .	115
4.15	Plan de mesure sur l'arbre du banc et le sens de rotation de l'arbre . . . . .	116
4.16	Logiciel de dépouillement . . . . .	116
4.17	Dimensions principales du banc DDE . . . . .	117
4.18	Maillage du support palier à 4 barres . . . . .	118
4.19	Schéma de la méthode des comparateurs inversés . . . . .	120
4.20	Côtes nécessaires pour l'alignement . . . . .	120
4.21	Arbres avec un désalignement de parallélisme . . . . .	121
4.22	Désalignement dans le plan vertical . . . . .	122
4.23	Désalignement dans le plan horizontal . . . . .	122
4.24	Rotor avec les plans de correction et de mesure . . . . .	124
4.25	La méthode des trois masselottes . . . . .	126
4.26	Rotor avec 2 plans de mesure et 2 plans de correction . . . . .	127
4.27	Schéma du rotor à équilibrer . . . . .	132
4.28	Première déformée modale . . . . .	132
4.29	Deuxième déformée modale . . . . .	134
4.30	Réponses sur les plans de mesure avant l'équilibrage . . . . .	134
4.31	Recherche de l'angle optimale . . . . .	135
4.32	Recherche de la masse optimale . . . . .	135
4.33	Courbes de réponse mesurées sur le support palier . . . . .	136
4.34	Déformée opérationnelle à 2340 tr/min avant l'équilibrage . . . . .	136
4.35	Déformée opérationnelle à 2340 tr/min après l'équilibrage . . . . .	137
4.36	Courbes de réponse mesurée sur le plan C1 . . . . .	138

4.37	Courbes de réponse mesurée sur le support palier 1 . . . . .	138
4.38	Déformée opérationnelle à 2340 tr/min avant l'équilibrage par les coefficients d'influence à 2 plans . . . . .	139
4.39	Déformée opérationnelle à 2340 tr/min après l'équilibrage par les coefficients d'influence à 2 plans . . . . .	139
4.40	Courbe de réponse mesurée sur le plan C1 . . . . .	140
4.41	Courbe de réponse mesurée sur le support palier 1 . . . . .	141
5.1	Equilibrage de la configuration A1 . . . . .	144
5.2	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le capteur C2y . . . . .	145
5.3	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le capteur C3y . . . . .	145
5.4	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le capteur C3z . . . . .	146
5.5	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le capteur C4y . . . . .	146
5.6	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le capteur C4z . . . . .	147
5.7	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le capteur C5y . . . . .	147
5.8	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le capteur C5z . . . . .	148
5.9	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le capteur C6z . . . . .	148
5.10	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le capteur C7y . . . . .	149
5.11	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le capteur C7z . . . . .	149
5.12	Influence de la température sur la réponse (montée en vitesse, mesure sur le capteur C7z) . . . . .	151
5.13	Influence de la température sur la réponse (descente en vitesse, mesure sur le capteur C7z) . . . . .	151
5.14	Déformée opérationnelle à 1280 tr/min . . . . .	154
5.15	Orbites à 1280 tr/min . . . . .	154
5.16	Spectres des mesures à 1280 tr/min (selon la direction $y$ ) . . . . .	155
5.17	Déformée opérationnelle à 2260 tr/min . . . . .	155
5.18	Orbites à 2260 tr/min . . . . .	156
5.19	Spectres des mesures à 2260 tr/min (selon la direction $y$ ) . . . . .	156

---

5.20	Déformée opérationnelle à 2650 tr/min . . . . .	157
5.21	Orbites à 2650 tr/min . . . . .	157
5.22	Spectres des mesures à 2650 tr/min (selon la direction $y$ ) . . . . .	158
5.23	Spectres des mesures à 2650 tr/min . . . . .	158
5.24	Montage expérimental pour la mesure du diagramme de Campbell . . . . .	160
5.25	Evolution des fréquences propres vis-à-vis de la vitesse de rotation - Configuration A1 . . . . .	160
5.26	Diagramme de Campbell et réponse à balourd pour la configuration A1 . . .	161
5.27	Equilibrage de la configuration A3 . . . . .	162
5.28	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le plan C1 . . . . .	163
5.29	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le plan C3 . . . . .	164
5.30	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le plan C4 . . . . .	164
5.31	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le plan C5 . . . . .	165
5.32	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le plan C6 . . . . .	165
5.33	Courbes d'amplitude et phase mesurées sur le plan C7 . . . . .	166
5.34	Déformée opérationnelle à 2450 tr/min . . . . .	168
5.35	Orbites à 2450 tr/min . . . . .	168
5.36	Spectres des mesures à 2450 tr/min (selon la direction $y$ ) . . . . .	169
5.37	Déformée opérationnelle à 3160 tr/min . . . . .	169
5.38	Orbites à 3160 tr/min . . . . .	170
5.39	Spectres des mesures à 3160 tr/min (selon la direction $y$ ) . . . . .	170
5.40	Evolution des fréquences propres vis-à-vis de la vitesse de rotation . . . . .	171
5.41	Diagramme de Campbell et réponse à balourd pour la configuration A3 . . .	172
5.42	Minimisation de la fonction objective pour la configuration A1 . . . . .	173
5.43	Diagrammes de Campbell expérimental ( $\circ$ ) et numérique ( $\square$ ) pour la configuration A1 . . . . .	174
5.44	Mesure de l'erreur sur le diagramme de Campbell pour la configuration A1	174

5.45 Réponses mesures dans le plans C1 . . . . .	175
5.46 Réponses mesures dans le plans C3 . . . . .	176
5.47 Réponses mesures dans le plans C4 . . . . .	176
5.48 Réponses mesures dans le plans C5 . . . . .	177
5.49 Réponses mesures dans le plans C6 . . . . .	177
5.50 Réponses mesures dans le plans C7 . . . . .	178
5.51 Minimisation de la fonction objective pour la configuration A3 . . . . .	178
5.52 Diagrammes de Campbell expérimental (○) et numérique (□) pour la configuration A3 . . . . .	179
5.53 Mesure de l'erreur sur le diagramme de Campbell pour la configuration A3	179
5.54 Système amortisseur installé sur le support palier 2 . . . . .	180
5.55 Réponses mesurées sur le plan C7 ((-) 0 plot; (---) 4 plots; (- · - ·) 8 plots)	181
5.56 Réponses mesurées sur le plan C3 ((-) 0 plot; (---) 4 plots; (- · - ·) 8 plots)	182
5.57 Réponses mesurées sur le plan C4 ((-) 0 plot; (---) 4 plots; (- · - ·) 8 plots)	182
5.58 Réponses mesurées sur le plan C5 ((-) 0 plot; (---) 4 plots; (- · - ·) 8 plots)	183
5.59 Réponses mesurées sur le plan C6 ((-) 0 plot; (---) 4 plots; (- · - ·) 8 plots)	183
5.60 Orbites ( ) 0 plot; (---) 4 plots; (· - · -) 8 plots) . . . . .	184
5.61 Comparaison essai-calcul pour le cas sans les plots amortisseurs - Plan de mesure C7 . . . . .	186
5.62 Comparaison essai-calcul pour le cas avec 4 plots amortisseurs . . . . .	186
5.63 Comparaison essai-calcul pour le cas avec 8 plots amortisseurs . . . . .	187

# Liste des tableaux

4.1	Fréquences propres de l'arbre, du disque et du rotor . . . . .	108
4.2	Raideurs en fonction de la longueur des barres . . . . .	110
4.3	Caractéristiques de l'arbre . . . . .	131
4.4	Caractéristiques du disque . . . . .	131
4.5	Propriétés radiales des supports paliers, des roulements et du joint d'accou- plement . . . . .	131
5.1	Influence de la température en montée . . . . .	150
5.2	Influence de la température en descente . . . . .	150