

THÈSE

---

Synthèse modale probabiliste  
Théorie et applications

---

présentée devant  
L'ECOLE CENTRALE DE LYON  
pour obtenir  
LE GRADE DE DOCTEUR

*Ecole doctorale* : MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL ET ACOUSTIQUE  
Ecole Centrale de Lyon - Université Claude Bernard-Lyon I - INSA Lyon  
*Spécialité* : MÉCANIQUE

par  
Christophe HEINKELÉ

---

Soutenue le 30 Mai 2008 devant la Commission d'Examen composée de :

Sergio BELLIZZI	Chargé de recherche	Rapporteur
Michel FOGLI	Professeur à l'université Blaise Pascal	Rapporteur
Fabrice THOUVEREZ	Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon	Examineur
Alain BERLIOZ	Professeur à l'université Paul Sabatier	Président du Jury
Claude-Henri LAMARQUE	Professeur, Directeur adjoint du DGCB	Directeur de Thèse
Franck SGARD	Chercheur à l'IRSSST de Montréal	Directeur de Thèse
Stéphane PERNOT	Enseignant chercheur au DGCB	Invité

*Cette thèse a été préparée au Département Génie Civil et Bâtiment (URA CNRS 1652)  
de L'École Nationale des Travaux Publics de l'État*



# Remerciements

*"En réalité, on sait seulement quand on sait peu. Avec le savoir augmente le doute."*

Goethe.

Se construire nécessite de se remettre perpétuellement en question. Ainsi le doute est un moteur très important au coeur d'une démarche scientifique, mais si le doute devient lui-même un sujet d'étude, est-il toujours permis de douter? La théorie des probabilités vise à appréhender précisément les aspects incertains d'un phénomène, ce qui est en soit déjà un oxymore. Les mathématiques mises en oeuvre reposent sur des théories parfaitement rigoureuses, mais l'application à un phénomène physique est loin d'être aisée. L'aléa de la nature ne peut être reproduit parfaitement par un ordinateur, les modèles physiques ne sont que des approximations parfois grossières de cette *réalité*, qui est, il faut être clair, impossible à atteindre. Je tiens à remercier en tout premier lieu cette complexité formidable des choses, complexité qui a nourrit ce travail et qui pourra encore alimenter à l'infini la curiosité insatiable des chercheurs.

Cette thèse est le fruit d'un peu plus de trois années de travail au sein du Département Génie Civil et Bâtiment (DGCB) de l'École des Travaux Publics de l'État (ENTPE). Je tiens à remercier l'ensemble des personnes qui ont contribué directement ou indirectement à ce travail. Il y a d'abord ceux qui se sont régulièrement sustentés chez moi, les irremplaçables Fafa (qui a réveillé irrémédiablement en moi mon côté marseillais), Nesrine (dont je salue le courage et j'admire le calme), Scouby (le perfectionniste psychoacoustique nonobstant sniper fou incontrôlable), Samy (la rock star de l'accessibilité qui a vérifié toutes ses sources), Fx (l'homme qui m'a éveillé aux légumes et à l'altermondialisme, ce qui est chouette mais fatigant), et Luc (The star mondiale incontestée des poreux et néanmoins beau-frère). Votre contact a été et est toujours très enrichissant. Puis il y a les "lasheurs" fidèles Amélie, Raphaël, Bassam, Talal, Sophie, Valérie, Zaratine, Olivier, Manu, Pab et Cathy. Un salut spécial à Ben qui n'est pas prêt d'appartenir à une quelconque catégorie. Une pensée chaleureuse pour les très précieuses et très efficaces Monique et Bernadette. Merci à tous et à toutes.

Je tiens à remercier mon jury de thèse, et tout particulièrement mes deux rapporteurs, dont j'ai trouvé les remarques très pertinentes et la discussion qui a suivi la soutenance reste pour moi un temps fort de cette thèse.

---

Je tiens à remercier Stéphane Pernot, pour toutes les discussions que nous avons pu avoir, et je regrette que l'on n'ait pas plus travaillé ensemble. Je tiens à remercier Franck Sgard pour la très grande autonomie qu'il m'a laissé dans mon travail.

Je tiens à faire part de ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse, Claude-Henri Lamarque, pour m'avoir appris énormément de choses, et ce pas uniquement sur le plan scientifique, car ses qualités humaines sont également à prendre en exemple. Sa curiosité permanente et sa capacité à comprendre et à analyser me laissent admiratif. Je tiens à le remercier tout particulièrement pour sa très grande disponibilité et sa réactivité quasi instantanée, que beaucoup m'ont envié. Il m'a fait confiance dès ma première année en me proposant de dispenser le cours de math analyse aux élèves de l'ENTPE, chose qui a également été une expérience très enrichissante. Sa culture scientifique est impressionnante, et il fait partie de ces chefs de laboratoire qui continuent à prendre part activement à des activités de recherche. Un très grand merci pour son soutien.

Je tiens à avoir une petite pensée pour mes parents, dont l'absence me pèse encore aujourd'hui, comme à chaque étape importante de mon parcours. Je réalise encore mal tout ce que je leur dois, et je reste immensément triste de ne jamais pouvoir le leur rendre.

Je dédicace ce travail à mes deux plus belles réussites jusqu'à présent, Esteban et Clara, qui ont profondément changé ma vision du monde.

Enfin, merci à toi, sans qui je n'aurais jamais rien pu construire.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Méthodes numériques aléatoires</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction aux techniques de Monte Carlo	15
1.1.1 Motivations	15
1.1.2 Un exemple simple	15
1.2 Théorie et applications	16
1.2.1 Loi faible des grands nombres	16
1.2.2 Loi (forte) des grands nombres	17
1.2.3 Théorème central limite	18
1.2.4 Application	19
1.3 Simulations de variables aléatoires	20
1.3.1 Simulation selon une loi uniforme	20
1.3.2 Simulation selon une loi quelconque	21
1.3.2.1 Méthode de la fonction de répartition	22
1.3.2.2 Méthode du rejet	22
1.3.2.3 Méthode de mélange	23
1.3.3 Exemples sur des lois classiques	23
1.3.3.1 La loi exponentielle de paramètre $\lambda$	23
1.3.3.2 Les lois Gamma	24
1.4 Techniques d'optimisation de Monte-Carlo	24
1.4.1 Échantillonnage par fonction d'importance	24
1.4.2 Méthode de stratification	25
1.4.3 Valeur moyenne, Variables de contrôle et antithétiques	26
1.4.3.1 Valeur moyenne	26
1.4.3.2 Variables de contrôle	26
1.4.3.3 Variables antithétiques	26
1.4.4 Quasi Monte Carlo	27
1.4.4.1 Discrédance d'une suite	27
1.4.4.2 Exemple d'une suite à discrédance faible	28

1.5	Chaines de Markov et Metropolis-Hasting . . . . .	28
1.5.1	Processus . . . . .	29
1.5.1.1	Définitions . . . . .	29
1.5.1.2	Le mouvement brownien . . . . .	29
1.5.1.3	Le processus de Poisson . . . . .	30
1.5.2	Chaînes de Markov et ergodicité . . . . .	31
1.5.2.1	Chaîne de Markov . . . . .	31
1.5.2.2	Propriétés d'une chaîne de Markov . . . . .	31
1.5.2.3	Théorème ergodique . . . . .	33
1.5.3	Métropolis-Hasting . . . . .	33
1.5.3.1	Génération d'une chaîne de Markov . . . . .	33
1.5.3.2	La méthode du recuit simulé . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Etat de l'art des méthodes non-paramétriques</b>	<b>37</b>
2.1	Entropie d'une loi de probabilité . . . . .	37
2.1.1	Comment quantifier l'absence d'information . . . . .	37
2.1.2	Principe du maximum d'entropie . . . . .	38
2.1.3	La mesure de Gibbs . . . . .	38
2.2	L'approche non-paramétrique en mécanique . . . . .	39
2.2.1	Mise en place de la méthode . . . . .	39
2.2.2	Probabilités sur $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . . . . .	40
2.2.2.1	Mesure sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . . . . .	40
2.2.2.2	Mise en place d'une mesure de probabilité sur $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . . . . .	40
2.2.2.3	Application du principe du maximum d'entropie . . . . .	41
2.2.2.4	Expression de la loi . . . . .	42
2.2.2.5	Paramètre de contrôle . . . . .	43
2.2.3	Modèle réduit déterministe . . . . .	43
2.2.3.1	Résolution déterministe . . . . .	43
2.2.3.2	Résolution modale . . . . .	44
2.2.4	Modèle réduit probabiliste . . . . .	44
2.2.4.1	Construction du problème . . . . .	44
2.2.4.2	Solution du problème . . . . .	45
2.2.4.3	Résolution numérique . . . . .	45
2.3	Identification non-paramétrique . . . . .	46
2.3.1	Estimateur non-paramétrique de Parzen-Rosenblatt . . . . .	46
2.3.1.1	Définition et propriétés . . . . .	46
2.3.1.2	Choix d'un noyau puis d'une fenêtre . . . . .	47
2.3.1.3	Autres noyaux possibles . . . . .	48
2.3.1.4	Estimateur de Nadaraya-Watson . . . . .	49

2.3.2	Autre estimateurs non-paramétriques . . . . .	50
<b>3</b>	<b>L'oscillateur harmonique aléatoire</b>	<b>53</b>
3.1	Cadre déterministe . . . . .	53
3.1.1	L'oscillateur harmonique . . . . .	53
3.1.2	Les hypothèses sous-jacentes . . . . .	53
3.1.3	Les équations de base . . . . .	54
3.2	Fréquence propre aléatoire . . . . .	54
3.2.1	Formalisme . . . . .	55
3.2.2	Expressions des densités de probabilités . . . . .	55
3.2.3	Application à la loi uniforme . . . . .	57
3.2.3.1	Expressions des densités . . . . .	57
3.2.3.2	Moyenne et écart-type de $\text{Re } \tilde{H}$ . . . . .	59
3.2.3.3	Moyenne et écart-type de $\text{Im } \tilde{H}$ . . . . .	61
3.2.4	Confrontation avec Monte-Carlo . . . . .	63
3.2.4.1	Simulations numériques . . . . .	63
3.2.4.2	Confrontation des formules analytiques avec Monte Carlo . . . . .	65
3.2.5	Conclusion . . . . .	65
3.3	Amortissement aléatoire . . . . .	66
3.3.1	L'approche analytique . . . . .	66
3.3.1.1	Formalisme . . . . .	66
3.3.1.2	Expressions des lois . . . . .	68
3.3.2	Application à la loi uniforme . . . . .	69
3.3.2.1	Moyenne et écart-type de $\text{Re } \tilde{H}$ . . . . .	71
3.3.2.2	Moyenne et écart-type de $\text{Im } \tilde{H}$ . . . . .	72
3.3.3	Confrontation avec Monte Carlo . . . . .	74
<b>4</b>	<b>L'analyse modale probabiliste</b>	<b>77</b>
4.1	Analyse modale déterministe . . . . .	77
4.1.1	Hypothèses . . . . .	78
4.1.2	Méthode de calcul . . . . .	79
4.2	Extension au système probabilisé . . . . .	79
4.2.1	Formalisme . . . . .	79
4.2.2	Changement de variables . . . . .	80
4.2.3	Présentation du calcul avec deux lois uniformes . . . . .	81
4.2.4	Application . . . . .	82
4.3	Application à la poutre d'Euler-Bernoulli . . . . .	83
4.3.1	Equations du problème . . . . .	83
4.3.2	Résolution par éléments finis . . . . .	85
4.3.3	Première étape: description des paramètres du système vibrant . . . . .	86

4.3.4	Deuxième étape : utilisation des résultats théoriques . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>91</b>
5.1	Projection sur le chaos polynômial . . . . .	92
5.1.1	Les polynômes de chaos . . . . .	92
5.1.2	Résolution pratique . . . . .	92
5.1.3	Inconvénients . . . . .	94
5.1.4	Avantages . . . . .	95
5.1.5	Exemple . . . . .	95
5.2	Identification non-paramétrique . . . . .	96
5.2.1	Mode d'obtention de $\alpha$ . . . . .	97
5.2.2	Estimateur de Parzen-Rosenblatt . . . . .	98
5.2.3	Robustesse d'un modèle vis-à-vis des données expérimentales . . . . .	100
5.2.3.1	Calcul théorique . . . . .	100
5.2.3.2	Application au modèle de Miki . . . . .	101
5.2.3.3	Généralisation de la méthode . . . . .	103
5.3	Identification paramétrique . . . . .	104
5.3.1	Méthode des moindres carrés . . . . .	104
5.3.1.1	Application . . . . .	105
5.3.1.2	Intérêt pratique . . . . .	107
5.3.2	Identification à partir des enveloppes . . . . .	107
5.3.2.1	Définition des enveloppes . . . . .	107
5.3.2.2	Expressions des enveloppes à 100% . . . . .	108
5.3.2.3	Identification du support de densité . . . . .	109
5.3.2.4	Méthodes ponctuelles . . . . .	109
5.3.2.5	Méthodes globales . . . . .	112
5.3.2.6	Intérêts pratiques . . . . .	113
5.3.3	Pertinence pratique des méthodes paramétriques . . . . .	114
5.3.3.1	Nombre de réalisation . . . . .	114
5.3.3.2	Origine et prise en compte du bruit . . . . .	115
<b>6</b>	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>117</b>
<b>A</b>	<b>Rappels de probabilité</b>	<b>129</b>
A.1	Fondamentaux de la théorie de probabilités . . . . .	129
A.1.1	La théorie de la mesure . . . . .	129
A.1.2	Principaux théorèmes . . . . .	130
A.1.3	Axiomatique de Kolmogorov . . . . .	131
A.1.4	Variables aléatoires . . . . .	132
A.2	Différents modes de convergence . . . . .	133



A.2.1	Definitions et propriétés . . . . .	133
A.2.2	Schéma Bilan des convergences . . . . .	134
A.2.3	Loi d'une variable aléatoire . . . . .	134
A.2.4	Fonction de répartition . . . . .	136
A.2.5	Inégalités remarquables . . . . .	136
A.2.6	Fonction caractéristique . . . . .	137
A.3	Théories statistiques . . . . .	138
A.3.1	L'estimation . . . . .	138
A.3.1.1	Estimateurs classiques . . . . .	138
A.3.1.2	Estimateurs bayésiens . . . . .	140
A.3.2	Les tests . . . . .	141
A.3.2.1	Définitions . . . . .	141
A.3.3	Test d'adéquation . . . . .	142
A.3.3.1	Test du $\chi^2$ . . . . .	142
A.3.3.2	Test Kolmogorov-Smirnov . . . . .	142
<b>B</b>	<b>Expressions analytiques</b>	<b>143</b>
B.1	Formules analytiques . . . . .	143
B.1.1	Partie réelle . . . . .	143
B.1.1.1	Fréquences remarquables . . . . .	143
B.1.1.2	Intervalles d'intégration . . . . .	144
B.1.2	Partie imaginaire . . . . .	147
B.1.2.1	Fréquences remarquables . . . . .	147
B.1.2.2	Intervalles d'intégration . . . . .	147
B.2	Enveloppe à 100% . . . . .	150
B.2.1	Partie réelle . . . . .	150
B.2.1.1	Enveloppe inférieure . . . . .	150
B.2.1.2	Enveloppe supérieure . . . . .	150
B.2.2	Partie imaginaire . . . . .	151
B.2.2.1	Enveloppe inférieure . . . . .	151
B.2.2.2	Enveloppe supérieure . . . . .	151
<b>C</b>	<b>Algorithme</b>	<b>153</b>
C.1	Algorithme de Golub et Von Loan . . . . .	153



# Introduction

La modélisation des phénomènes physiques s'appuie sur des principes généraux qui permettent de mettre en équation un problème donné. Les modèles qui se dégagent ainsi sont utilisés pour appréhender les phénomènes et ils reposent toujours sur un certain nombre d'hypothèses. Ces hypothèses sont la plupart du temps simplificatrices, c'est-à-dire qu'elles découlent de la prépondérance de certains phénomènes sur d'autres. Mais il existe également beaucoup d'hypothèses issues d'un manque d'information du système étudié, car certaines grandeurs ne sont pas observables directement : c'est le cas par exemple des paramètres intrinsèques auxquels il n'est possible d'accéder que par le biais d'une autre expérience.

Cette thèse entend prendre en compte la notion d'incertitude des systèmes dynamiques en vibroacoustique. D'un point de vue scientifique, il est possible d'affirmer que pour de tels systèmes, l'aléa peut être considéré comme omniprésent. Mais si on se repose sur les travaux existants à ce jour, on s'aperçoit qu'il existe des dénominations différentes en fonction des cas étudiés. Ainsi si on considère que c'est la sollicitation du système qui est aléatoire, ce qui est le cas pour un tremblement de terre par exemple, on parle usuellement de mécanique stochastique. Lorsque l'aléa repose sur les paramètres du système, notamment les paramètres intrinsèques, on parle plutôt de paramètres incertains en mécanique. Les deux problèmes sont à ce titre différents, car en mécanique stochastique, on modélise la sollicitation par un processus et on redéfinit une intégrale spécifique à ce processus. Dans le cas des paramètres incertains, les paramètres sont modélisés par des variables aléatoires, ce qui transforme la réponse du système (ou toute autre grandeur en aval) en variable aléatoire. Généralement les paramètres initiaux ne dépendent pas du temps, ou alors sur des périodes très longues. Soit on considère alors ces paramètres de vieillissement ou de "guérison" comme des variables aléatoires, soit on les modélise comme des processus, auquel cas on retombe dans la mécanique stochastique (voir par exemple [KP00, Arn98, PM94]), que nous n'aborderons pas.

Les enjeux des systèmes mécaniques aléatoires se situent à différents niveaux. Le premier objectif à notre sens est de développer des outils prédictifs robustes, qui permettent de maîtriser les phénomènes physiques étudiés. On peut songer dans un second temps à mettre en place des outils permettant de dégager l'impact de l'aléa d'un paramètre vis-à-vis d'un autre et de "hiérarchiser" ainsi entre eux les paramètres d'un système. Cette démarche amène à revenir sur le

modèle utilisé si un paramètre possède une importance fondamentale et si sa description est trop sommaire. Un autre enjeu important est la résolution du problème inverse, c'est-à-dire de partir de l'observable, qui fluctue, et de remonter aux paramètres (et leur variabilité) qui engendrent cette fluctuation. Cet enjeu est important car il permet par exemple de tester la robustesse d'un modèle vis-à-vis des données observables, mais nous verrons que c'est un problème complexe et le champs d'investigation de ces méthodes inverses reste largement ouvert.

Cette thèse s'insère plus particulièrement dans le cadre du Génie Civil. Nous nous intéressons aux systèmes vibrants en mécanique et en acoustique, principalement dans le domaine des basses fréquences. Nous nous plaçons ainsi dans une approche fréquentielle du problème dans laquelle la théorie des modes normaux s'applique. Ainsi nous ne nous plaçons pas dans les conditions d'application de la méthode SEA (Statistical Energy Analysis) [LDH95], qui est réservée aux moyennes et hautes fréquences et qui constitue une approche énergétique pour résoudre des problèmes vibrants complexes. La méthode SEA reste une méthode déterministe intéressante en temps de calcul, mais elle ne traite pas l'incertitude des paramètres constitutifs en basses fréquences.

Face au problème posé par l'incertitude des paramètres, notre première remarque est qu'il est inutile de vouloir probabiliser un problème dont on ne maîtrise pas la résolution déterministe. En effet si on s'intéresse à un problème physique dont les paramètres d'entrée sont fixés, il est continu en espace et en temps, ce qui amène à le discrétiser. Cette première simplification permet de classer alors les problèmes déterministes en deux grandes classes : les problèmes linéaires et les problèmes non-linéaires. Force est de constater aujourd'hui que l'on maîtrise mieux la résolution des problèmes linéaires, mais qu'il existe également beaucoup de méthodes et de techniques dans le cadre non-linéaire (voir par exemple [LC91, A.F97, SC91, SR05]). Si on rajoute des variables en entrée d'un système et si on considère celles-ci comme des variables aléatoires, l'impact sur la réponse du système devient un problème non-linéaire. Ceci est le cas notamment des problèmes linéaires dans le cadre déterministe dont la dépendance vis-à-vis des paramètres n'est pas linéaire. L'idée de cette thèse est de conserver le principe de superposition des contributions élémentaires en vue d'obtenir un système global. La méthode des éléments finis se place directement dans ce cadre et un problème à plusieurs degrés de liberté reste l'assemblage de systèmes linéaires élémentaires. C'est donc sur la résolution du problème élémentaire qu'il convient alors de se concentrer lorsque l'on envisage de probabiliser un ou plusieurs paramètres.

L'idée de ce travail de thèse est de tenter une approche analytique des systèmes vibrants aléatoires. Nous allons nous baser sur la résolution déterministe dans le cadre linéaire. La démarche consistera à se concentrer sur un système élémentaire, puis à généraliser à plusieurs degrés de libertés. Nous nous basons donc sur une résolution déterministe bien connue pour y introduire dans un cas élémentaire une notion d'aléa sur les paramètres. L'utilisation des probabilités clas-

---

siques n'a que très rarement été développé dans le cadre de la théorie des modes normaux. Il est ainsi logique de commencer par les systèmes mécaniques simples qui trouvent par ailleurs une application pratique en Génie Civil. Nous nous concentrerons dans un premier temps à l'oscillateur harmonique, puis nous passerons à plusieurs degrés de liberté en utilisant le théorème de superposition modale.

Les calculs de probabilité utilisés dans ce travail sont tout à fait classiques pour la communauté mathématique, peut-être un peu moins pour la communauté vibroacoustique. Nous avons rappelé certains aspects sans chercher exagérément à rentrer dans les détails, afin de pouvoir disposer de plusieurs résultats pour traiter les problèmes posés. De nombreux résultats de probabilités figurent en annexe; ils permettent d'embrasser la théorie générale mais ne visent évidemment pas l'exhaustivité.

Les probabilités permettent de pousser un peu plus loin les études de sensibilité classiques, car en plus du sens de variation, une densité de probabilité n'est rien d'autre qu'une application qu'il est possible de composer par une autre. A ce titre, les probabilités seront utilisées pour manipuler des ensembles de valeurs par le biais de variables aléatoires. Ceci est la philosophie de la démarche analytique qui sera présentée en détails dans cette thèse.

La problématique soulevée ici est née dans le contexte des matériaux poreux. Ce sont des systèmes couplés fluide-structure qui peuvent comporter jusqu'à une dizaine de paramètres descriptifs qui sont la plupart des paramètres intrinsèques. Ces paramètres peuvent évoluer dans le temps lorsque le matériau vieillit par exemple, mais leur variabilité vient surtout des processus de fabrication. Il est courant qu'un matériau soit fabriqué et que l'on en détermine les paramètres a posteriori ; ainsi la caractérisation dépend pour un même type de matériau de l'échantillon choisi. Considérer ces paramètres comme aléatoires et connaître l'impact de leur variabilité permettrait d'envisager des campagnes de caractérisation afin de garantir les performances du dit matériau.

L'approche analytique est soumise à un certain nombre d'hypothèses que nous allons énumérer. Les limites d'applications de la méthode découleront de ces hypothèses, mais comme nous le verrons par la suite, des modèles plus complets pourront être envisagés à partir de l'oscillateur harmonique probabilisé. Ainsi si certains cas paraissent simplistes au premier abord, il possède des extensions techniques qui permettent d'avancer. Ce sera le cas de l'étude de la loi uniforme sur un intervalle. Il existe une approche numérique basée sur la loi uniforme, qui regroupe l'ensemble des méthodes par intervalles. Ces méthodes résultent de l'utilisation de l'algorithme de Rump [OL01], mais cette approche numérique ne permet pas d'envisager la résolution du problème inverse, ni l'extension à une loi de probabilité quelconque.

Le présent document est relativement court et le parti pris de rédaction a été de condenser la plupart des expressions lorsque ces dernières devenaient trop lourdes. Nous avons tenu à conser-

ver certaines démonstrations dans l'état de l'art, car elles appuient le discours scientifique d'une part et car les calculs mis en oeuvre sont similaires à ceux qui seront utilisés par la suite. Les applications numériques reposent sur l'étude d'un cas particulier avec un modèle relativement élémentaire, mais l'idée est d'illustrer et d'expliquer les méthodes sur un exemple concret et de ne pas rallonger abusivement la longueur du texte.

Le présent manuscrit s'organise comme suit. Les deux premiers chapitres sont des récapitulatifs de l'état de l'art sur les simulations numériques aléatoires et les méthodes non-paramétriques. Le chapitre 1 n'est original que par sa forme, tandis que le chapitre 2 met en parallèle des techniques déjà utilisées en mécanique et des résultats mathématiques qui n'ont pas encore été utilisés dans le domaine. Le chapitre 3 présente la résolution analytique du problème de l'oscillateur harmonique dont un unique paramètre est aléatoire. Nous traitons le cas de la fréquence propre et de l'amortissement visqueux. En procédant ainsi par étape pour le chapitre 4, nous intégrons ces deux paramètres comme aléatoires simultanément et nous montrons sous quelles hypothèses il est possible de s'intéresser à des systèmes à plusieurs degrés de libertés. C'est ce chapitre qui expose concrètement l'analyse modale probabiliste. Le chapitre 5 est consacré aux applications numériques. Après la présentation d'une technique de projection sur le chaos polynomial, nous proposons une méthode non paramétrique pour tester la robustesse d'un modèle vis-à-vis des données expérimentales. Enfin nous exploitons les résultats du chapitre précédent en définissant les enveloppes de la réponse en fréquence et en proposant des méthodes d'identification des paramètres aléatoires.

# Chapitre 1

## Méthodes numériques aléatoires

Ce chapitre est un état de l'art des simulations numériques aléatoires. Nous rappelons d'abord les fondamentaux des techniques de Monte Carlo, puis nous énonçons les résultats théoriques de la simulation de variables aléatoires. Ce type de simulation est très classique pour la communauté mathématique, mais beaucoup moins pour la communauté mécanique, c'est pourquoi nous avons jugé pertinent de faire le point sur les méthodes existantes.

Cet état de l'Art ne se veut pas exhaustif, mais il donne les grandes lignes. La partie sur les processus est notamment très réduite car elle ne sert que sous un seul aspect dans le dernier chapitre de cette thèse. Cette concision est voulue et nous avons essayé de citer les plus importants ouvrages du domaine pour renvoyer à certains approfondissements sans alourdir le texte exagérément.

### 1.1 Introduction aux techniques de Monte Carlo

#### 1.1.1 Motivations

Nous consacrons une section complète à ces techniques pour plusieurs raisons. D'une part elles sont très utilisées et servent de référence lorsque l'on ne sait a priori rien sur la nature aléatoire du phénomène étudié. Leur utilisation demande quelques précautions sur le plan théorique et les hypothèses à vérifier sont souvent omises. D'autre part la théorie des intégrales multiples ne se traite correctement qu'avec l'intégrale de Lebesgue, et le calcul d'une intégrale multiple avec une technique de Monte Carlo permet de rester dans le cadre de la mesure de Lebesgue. Outre le calcul d'intégrales, ces méthodes servent également à la résolution d'EDP, de systèmes linéaires ou de problèmes d'optimisation (algorithme du recuit simulé).

#### 1.1.2 Un exemple simple

Cherchons à approcher numériquement la valeur de l'intégrale suivante  $I = \int_0^1 g(x) dx$ . Les techniques basées sur l'intégration de Riemann (méthode des trapèzes, formule de Simpson...)

dites de quadrature estiment  $I$  sous la forme  $\sum_{k=0}^n \omega_k g(x_k)$  avec  $\sum_{k=0}^n \omega_k = 1$  (les  $\omega_k$  sont les poids de la quadrature) et  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  dans  $[0,1]$  (les  $x_k$  sont les points de la quadrature).

La méthode Monte Carlo consiste à écrire  $I = \mathbb{E}[g(\mathbf{U})]$  où  $\mathbb{E}[\cdot]$  désigne l'espérance mathématique et  $\mathbf{U}$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $[0,1]$ . On simule alors une suite  $\mathbf{U}_i$  de variables aléatoires de loi uniforme sur  $[0,1]$  et on utilise la loi des grands nombres pour obtenir que  $\frac{1}{n} \sum_i^n \mathbf{U}_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[g(\mathbf{U})]$  où *p.s.* désigne la convergence presque sûre. En d'autres

termes, si  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)$  sont des nombres tirés au hasard dans  $[0,1]$ ,  $\frac{1}{n}(g(\mathbf{u}_1) + g(\mathbf{u}_2) + \dots)$  est une approximation de  $I$ . Cet exemple montre la philosophie de la méthode, à savoir qu'elle repose sur l'aléa d'un tirage et d'une convergence au sens de cet aléa.

Rappelons à présent les outils nécessaires à la méthode afin d'en poser le cadre mathématique rigoureux.

## 1.2 Théorie et applications

### 1.2.1 Loi faible des grands nombres

Nous allons commencer par énoncer un théorème général qui concerne la convergence d'une suite de variables aléatoires. Il est appelé **Loi faible des grands nombres**, car il ne suppose la finitude que du moment d'ordre 1. Il possède un pendant pour lequel on renforce les hypothèses : on obtient alors la **Loi (forte) des grands nombres**.

#### **Théorème 1.1 (Loi faible des grands nombres):**

Soit  $(\mathbf{X}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes la même loi. Soit  $m$  l'espérance supposée finie de chaque  $\mathbf{X}_i$ ,  $\mathbb{E}[\mathbf{X}_i] = m < \infty$ . On a alors :

$$\frac{1}{n} \sum_i^n \mathbf{X}_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} m, \tag{1.1}$$

où  $\mathbb{P}$  désigne la convergence en probabilité. □

#### **Preuve**

Notons  $S_n = \sum_i^n \mathbf{X}_i$  et  $\Phi_{\mathbf{X}}(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i\lambda \mathbf{X}}]$ , la fonction caractéristique de  $\mathbf{X}$ . On a donc, puisque les variables aléatoires  $\mathbf{X}_i$  sont indépendantes et de même loi,  $\Phi_{S_n} = \Phi_{\mathbf{X}}^n$ .

D'autre part  $\Phi_{S_n/n}(\lambda) = \Phi_{S_n}\left(\frac{\lambda}{n}\right) = \Phi_{\mathbf{X}}^n\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ . On a donc (Log désigne le logarithme complexe) :

$$\text{Log} \left( \Phi_{S_n/n}(\lambda) \right) = n \text{Log} \left( \Phi_{\mathbf{X}} \left( \frac{\lambda}{n} \right) \right) = n \text{Log} \left( 1 - \left( 1 - \Phi_{\mathbf{X}} \left( \frac{\lambda}{n} \right) \right) \right).$$



Or  $\Phi_{\mathbf{X}}(0) = 1$  et  $\Phi'_{\mathbf{X}}(0) = [\mathbb{E}[i\mathbf{X} e^{i\lambda\mathbf{X}}]]_{\lambda=0} = i \mathbb{E}[\mathbf{X}]$ . Donc  $1 - \Phi_{\mathbf{X}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) \sim \frac{i\lambda}{n} \mathbb{E}[\mathbf{X}]$ .

Par conséquent on a  $\text{Log}\left(\Phi_{S_n/n}(\lambda)\right) \sim i\lambda \mathbb{E}[\mathbf{X}]$ .

En prenant alors l'exponentielle du tout, on obtient  $\Phi_{S_n/n}(\lambda) \sim e^{i\lambda \mathbb{E}[\mathbf{X}]} = \Phi_{\mathbb{E}[\mathbf{X}]}(\lambda)$ .

Ce qui permet de conclure à la convergence en loi dans (1.1) (en vertu du théorème de Lévy A.4) et donc en probabilité ( $\mathbb{P}$ ). ■

## 1.2.2 Loi (forte) des grands nombres

La loi des grands nombres donnée par le théorème 1.1 justifie la convergence de toute technique de Monte Carlo. Cependant dans la pratique, on a besoin de renforcer les hypothèses pour aboutir au théorème 1.2, notamment en supposant que le moment d'ordre 2 (et donc la variance) existe et est fini.

### Théorème 1.2 (Loi (forte) des grands nombres):

Soit  $(\mathbf{X}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes la même loi. Soit  $m$  l'espérance supposée finie de chaque  $\mathbf{X}_i$ ,  $\mathbb{E}[\mathbf{X}_i] = m < \infty$  et  $\sigma^2$  la variance supposée finie de chaque  $\mathbf{X}_i$ ,  $\mathbb{E}[(\mathbf{X}_i - m)^2] = \sigma^2 < \infty$ . On a alors :

$$\frac{1}{n} \sum_i^n \mathbf{X}_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{ps, L^1} m, \quad (1.2)$$

où *ps* désigne la convergence presque sûre et  $L^1$  la convergence en moyenne.

On a même :

$$\frac{1}{n} \sum_i^n \mathbf{X}_i - m \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} 0. \quad (1.3)$$

□

Remarque

On a donc aussi (doublement) convergence en probabilité ( $\mathbb{P}$ ) et on retrouve le théorème 1.1.

### Preuve

Notons  $M_n = \frac{1}{n} \sum_i^n \mathbf{X}_i$ . Pour prouver la convergence presque sûre, on va poser  $S_n = n M_n$ .

On peut séparer chaque  $\mathbf{X}_i$  comme la somme de sa partie positive et de sa partie négative, on ne perd donc pas de généralité à considérer des variables aléatoires positives (la suite  $S_n$  est donc croissante).

On a donc  $\mathbb{E}[S_n] = n m$  et  $\text{Var}(S_n) = n \sigma^2$  (où  $\text{Var}()$  désigne la variance), car

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_i \mathbf{X}_i\right)^2\right] = \sum_i \mathbb{E}[\mathbf{X}_i^2] + 2 \sum_{i+j \leq n} \mathbb{E}[\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j] = n \mathbb{E}[\mathbf{X}^2] + 2 C_n^2 m^2 \text{ car les } \mathbf{X}_i \text{ sont indépendants.}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \mathbb{E} \left[ \left( \sum_i \mathbf{X}_i \right)^2 \right] - \mathbb{E} \left[ \sum_i \mathbf{X}_i \right]^2 &= n \mathbb{E}[\mathbf{X}^2] + n(n-1)m^2 - n^2m^2 \\ &= n \mathbb{E}[\mathbf{X}^2] - n \mathbb{E}[\mathbf{X}]^2 = n \text{Var}(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

On remarque de plus que  $\text{Var}(a\mathbf{X}) = a^2 \text{Var}(\mathbf{X})$  et que  $\text{Var}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \text{Var}(\mathbf{X}) - \text{Var}(\mathbf{Y})$ . On a  $\text{Var}(n^{-4}(S_{n^4} - n^4m)) = n^{-8} \text{Var}(S_{n^4}) = n^{-4} \text{Var}(\mathbf{X})$ , car  $\text{Var}(m) = 0$ . On peut appliquer l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff comme suit :

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{S_{n^4}}{n^4} - m \right| > \frac{1}{n} \right) \leq n^2 \mathbf{Var} (n^{-4}(S_{n^4} - n^4m)) = \frac{\sigma^2}{n^2}.$$

Il y a donc convergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{S_{n^4}}{n^4} - m \right| > \frac{1}{n} \right)$ , donc d'après le lemme de

Borel-Cantelli (cf A.2), on a  $\left| \frac{S_{n^4}}{n^4} - m \right| \leq \frac{1}{n}$  presque sûrement, c'est à dire sauf pour un nombre fini de  $n$ . On choisit un aléa  $\omega$  pour lequel cet élément est réalisé. Pour tout entier  $k$ , on peut trouver  $n$  tel que  $n^4 \leq k \leq (n+1)^4$ . On a alors, de la croissance de  $S_n$  :

$$M_k = \frac{S_k}{k} \leq \frac{S_{(n+1)^4}}{n^4} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^4 \frac{S_{(n+1)^4}}{(n+1)^4} \leq \left( \frac{n+1}{n} \right)^4 \left( m + \frac{1}{n+1} \right).$$

Comme  $\left( \frac{n+1}{n} \right)^4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , pour cet aléa  $\omega$ , on a  $\limsup_{k \rightarrow \infty} M_k \leq m$ .

On peut minorer de façon analogue :  $M_k \geq \frac{S_{n^4}}{(n+1)^4} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^4 \frac{S_{n^4}}{n^4} \geq \left( \frac{n}{n+1} \right)^4 \left( m - \frac{1}{n} \right)$ .

Comme  $\left( \frac{n}{n+1} \right)^4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , pour cet aléa  $\omega$ , on a  $\liminf_{k \rightarrow \infty} M_k \geq m$ .

En conclusion, pour presque tout  $\omega$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = m$ .

Par linéarité de l'espérance,  $\mathbb{E}[(M_n - m)^2] = \text{Var}(M_n) = \text{Var} \left( \frac{S_n}{n} \right) = \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$ .

Comme de plus,  $\mathbb{E}[|Y|]^2 \leq \mathbb{E}[Y^2]$ , on obtient (1.3) et la convergence en moyenne dans (1.2). ■

### 1.2.3 Théorème central limite

La raison pour laquelle on utilise toujours dans la pratique le théorème 1.2, c'est que les mêmes hypothèses permettent de disposer du théorème central limite (théorème 1.3), qui sera indispensable pour estimer la vitesse de convergence des techniques de Monte Carlo.

#### **Théorème 1.3 (Théorème central limite):**

Soit une  $(\mathbf{X}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes la même loi. Soit  $m$  l'espérance supposée finie de chaque  $\mathbf{X}_i$ ,  $\mathbb{E}[\mathbf{X}_i] = m < \infty$  et  $\sigma^2$  la variance supposée finie de chaque  $\mathbf{X}_i$ ,  $\mathbb{E}[(\mathbf{X}_i - m)^2] = \sigma^2 < \infty$ . On note  $M_n = \frac{1}{n} \sum_i^n \mathbf{X}_i$  et on a alors :

$$\frac{M_n - n \mathbb{E}[\mathbf{X}]}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (1.4)$$

où  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  désigne la loi normale centrée de variance  $\sigma^2$ .

□

### Preuve

On peut supposer  $m = 0$ , quitte à remplacer  $\mathbf{X}$  par  $\mathbf{X} - m$ . On pose  $\Phi_{\mathbf{X}}(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i\lambda\mathbf{X}}]$ , la fonction caractéristique de  $\mathbf{X}$ . On a ainsi  $\Phi_{S_n/\sqrt{n}}(\lambda) = \Phi_{S_n}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = \Phi_{\mathbf{X}}^n\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)$ .

Comme les  $\mathbf{X}_i$  admettent un moment d'ordre 2,  $\Phi$  admet une dérivée seconde et on peut écrire alors :

$$\Phi_{\mathbf{X}}(0) = \mathbb{E}[1] \quad \Phi'_{\mathbf{X}}(0) = i \mathbb{E}[\mathbf{X}] \mathbb{E}[1] = 0 \quad \Phi''_{\mathbf{X}}(0) = -\mathbb{E}[\mathbf{X}^2] \mathbb{E}[1] = -\sigma^2$$

$$\text{et on a } \Phi_{\mathbf{X}}(\lambda) = \Phi_{\mathbf{X}}(0) + \lambda \Phi'_{\mathbf{X}}(0) + \frac{\lambda^2}{2} \Phi''_{\mathbf{X}}(0) + O(\lambda^3) = 1 - \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} + O(\lambda^3)$$

$$\text{D'où } \Phi_{S_n/\sqrt{n}}(\lambda) = \left(1 - \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} + O(\lambda^3)\right)^n \sim e^{n \ln\left(1 - \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2n}\right)} \sim e^{-\frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}}$$

ce qui est la fonction caractéristique de la loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . ■

### Remarque

La convergence dans le théorème 1.3 a bien lieu en loi, ce qui ne veut nullement dire que toute suite de variables aléatoires converge vers quelque chose de gaussien ! Ce mode de convergence est rappelé dans l'annexe A.2.

## 1.2.4 Application

Nous possédons à présent les outils pour expliciter l'exemple introductif.

Considérons  $I = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x) dx$ , où  $f(x) \geq 0$  et  $\int f(x) dx = 1$ . On dit que  $I = \mathbb{E}[g(\mathbf{X})]$  où  $\mathbf{X}$  est une variable aléatoire de densité  $f$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ . On considère une suite  $\mathbf{X}_i$  de variables aléatoires de loi  $f$  et la loi (forte) des grands nombres nous permet d'affirmer que  $\frac{1}{n} \sum_i^n g(\mathbf{X}_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s} \mathbb{E}[g(\mathbf{X})]$ .

Le théorème central limite va nous donner la vitesse de convergence. En effet si on suppose que  $\sigma^2 = \mathbf{Var}(g(\mathbf{X}))$  est fini et en notant  $\epsilon_n = \frac{1}{n} \sum_i^n g(\mathbf{X}_i) - \mathbb{E}[g(\mathbf{X})]$ , on obtient le résultat suivant :  $\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \epsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ .

La convergence en loi impliquant la convergence en probabilité (noté  $\mathbb{P}$ ), en notant  $\mathbf{G}$  une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, on peut écrire

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\epsilon_n| \geq 1,96\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(|\mathbf{G}| \geq 1,96) = 0,95.$$

Donc un intervalle de confiance pour  $\mathbb{E}[g(\mathbf{X})]$  est donné par  $\left[\frac{1}{n} \sum_i^n \mathbf{X}_i - \sigma \frac{1,96}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_i^n \mathbf{X}_i + \sigma \frac{1,96}{\sqrt{n}}\right]$ .

Notons qu'à ce stade l'écart-type  $\sigma$  est inconnu. Mais d'un point de vue pratique, il est facile d'en disposer. En effet il suffit de faire une nouvelle fois appel à la loi des grands nombres pour obtenir : 
$$\frac{1}{n} \sum_i^n g(\mathbf{X}_i)^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_i^n g(\mathbf{X}_i) \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \sigma^2.$$

Il est donc impératif de mener les calculs de la moyenne et de l'écart-type en même temps. On initialise deux quantités  $m_1$  et  $m_2$  à 0. On calcule  $g(\mathbf{X}_i)$  et on l'ajoute à  $m_1$  en faisant  $m_1 = m_1 + \frac{1}{n} g(\mathbf{X}_i)$ . On calcule à ce stade  $g(\mathbf{X}_i)^2$  que l'on ajoute à la quantité  $m_2$  en faisant  $m_2 = m_2 + g(\mathbf{X}_i)^2$ . Lorsque  $i = n$ , la variance est alors donnée par  $\frac{1}{n} m_2 - m_1^2$ . Ces deux opérations sont d'un coût très faible par rapport au calcul de  $g(\mathbf{X}_i)$  qui n'est calculé qu'une seule fois par  $\mathbf{X}_i$  simulé. En réalisant une seule boucle, on récupère la moyenne, l'écart-type, et donc un intervalle de confiance.

La vitesse de convergence est donc de l'ordre de  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Vis-à-vis du nombre de simulations, cela peut paraître faible, mais il y a deux avantages importants. Le premier est que cette vitesse de convergence est insensible à la dimension et le deuxième est que l'on demande à  $g(\mathbf{X})$  de n'être que de carré intégrable (finitude du moment d'ordre 2).

Cette technique de Monte Carlo qualifiée de "basique" peut être optimisée en cherchant à réduire la variance  $\sigma^2$  afin d'accélérer la convergence : ce sont les techniques dites de réduction de variance, elle sont décrites dans 1.4.

Énonçons à présent les procédés indispensables aux techniques de Monte Carlo : la simulation de variables aléatoires suivant une loi  $f$  donnée.

## 1.3 Simulations de variables aléatoires

Deux points sont importants à respecter lors de la simulation d'une suite de variables aléatoires  $(\mathbf{X}_i)_{i \leq n}$  : d'une part que chaque  $\mathbf{X}_i$  suive une même loi de densité  $f$  fixée et d'autre part que  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{X}_j$  soient indépendants pour  $i \neq j$ . Ces propriétés (théoriques) sont d'abord développées sur la loi uniforme puis étendues à une loi quelconque.

### 1.3.1 Simulation selon une loi uniforme

La première étape est de disposer d'un générateur de nombres aléatoires qui est capable de simuler une suite de nombres au hasard compris entre 0 et 1, c'est à dire que la dite suite doit représenter une suite de variables aléatoires  $(\mathbf{U}_i)_{i \leq n}$  indépendantes et de loi uniforme sur  $[0,1]$ . Exhiber un tel générateur est un vaste problème et nous ne proposons ici qu'une réponse partielle à la question. Il faut toutefois être conscient que la mémoire de nos machines reste finie et

qu'une telle suite n'est pas réalisable au sens théorique du terme. Les algorithmes génèrent ainsi des suites de nombres totalement déterministes qui sont plus ou moins sophistiquées : on parlera donc plutôt de suite pseudo-aléatoire.

Les propriétés essentielles d'un générateur acceptable sont l'uniformité de ce dernier, sa période, son efficacité et le fait que ses sous-suites soient indépendantes. L'uniformité se réfère à l'indépendance des éléments et à l'adéquation à la loi uniforme de la suite aux moyens de tests statistiques (test du  $\chi^2$  ou test de Kolmogorov-Smirnov voir annexe A.3.3.1 et A.3.3.2). Les suites pseudo-aléatoires étant a fortiori périodiques et les programmes faisant intervenir jusqu'à  $10^n$  valeurs de la suite avec  $n$  de l'ordre de 30, la période de la suite se doit d'être la plus grande possible. L'efficacité repose sur le fait que l'algorithme ne doit nécessiter que peu d'opérations pour réduire le coût de calcul. Enfin, l'indépendance des sous-suites est fondamentale si on pense au calcul distribué sur une machine multiprocesseur.

La plupart des générateurs pseudo-aléatoires sont dits "congruentiels", c'est à dire qu'ils fournissent une suite d'entiers  $(x_n)_{n \geq 0}$  donnée par la relation de récurrence  $x_{n+1} = a x_n + c \pmod{m}$ .  $x_0$  est la racine ("seed" en anglais),  $a$  est le multiplicateur,  $c$  est l'accroissement et  $m$  le module de la suite. A noter que la suite  $(x_n/m)_{n \geq 0}$  prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0,1[$ . Il existe des résultats théoriques d'arithmétique qui maximise la période de  $(x_n)$  à condition que  $m$  soit un nombre premier (se reporter à la référence absolue [Knu97] pour plus de détails). Il faut avoir à l'esprit que quelque soit le générateur, la suite donnée sera la même à chaque simulation si la racine reste inchangée. La meilleure façon de faire est d'utiliser un générateur minimal standard que l'on initialise avec l'horloge afin de générer une racine différente à chaque simulation.

Il existe une foule de générateurs de nombres aléatoires disponibles pour la plupart sur Internet. Par exemple les générateurs par défaut sous C (`rand`) ou Random sous Pascal ne sont pas à retenir car leurs propriétés statistiques ne sont pas satisfaisantes. Nous utiliserons pour notre part les générateurs fournis avec la GSL (GNU Scientific Library) dont toutes les propriétés sont fournies dans l'aide, par exemple l'algorithme de Makotomo and Takuji Nishimura (`gsl_rng_mt19937`) dont la période est de  $10^{600}$  ou celui de P.L'Ecuyer (`gsl_rng_taus2`) très bien équidistribué avec une période de  $10^{26}$ .

### 1.3.2 Simulation selon une loi quelconque

Il existe principalement trois façons de générer une suite de nombres aléatoires selon une loi quelconque : la méthode de la fonction de répartition (ou méthode d'inversion), la méthode du rejet ou la méthode de mélange. La plus utilisée pour les lois classiques étant à notre sens la première, la méthode du rejet possède un intérêt pratique certain dans le cas où la densité ne permet pas des développements analytiques.

### 1.3.2.1 Méthode de la fonction de répartition

Supposons que  $\mathbf{X}$  est une variable aléatoire réelle de fonction de répartition  $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ ,  $F$  est alors croissante et continue à droite. On définit alors la fonction pseudo-inverse de  $F$  sur  $[0,1]$  par :

$$F^{-1} = \inf \{y \in \mathbb{R}, F(y) \geq u\}.$$

A noter que  $\forall u \in [0,1]$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on a l'équivalence  $F^{-1}(u) \leq x \Leftrightarrow u \leq F(x)$ . ( $\Leftarrow$  est immédiat et pour  $\Rightarrow$  on remarque que si  $F^{-1}(u) \leq x$  par croissance de  $F \forall y > x F(y) \geq u$ . Comme  $F$  est continue à droite on en déduit le résultat).

Nous avons alors la propriété suivante qui permet de générer des variables aléatoires de loi quelconque :

**Proposition 1.1:**

*Si  $\mathbf{U}$  suit une loi uniforme sur  $[0,1]$ , la variable aléatoire  $F^{-1}(\mathbf{U})$  suit une loi dont la fonction de répartition est  $F$ .* □

**Preuve**

D'après l'équivalence  $F^{-1}(u) \leq x \Leftrightarrow u \leq F(x)$ , on a directement pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbb{P}(F^{-1}(\mathbf{U}) \leq x) = \mathbb{P}(\mathbf{U} \leq F(x)) = \int_0^{F(x)} dx = F(x).$$

Ainsi si  $F^{-1}$  est explicite, à partir d'un échantillon  $(\mathbf{U}_i)_{i \leq n}$  de variables de loi uniforme sur  $[0,1]$ , il suffit de poser  $\mathbf{X}_i = F^{-1}(\mathbf{U}_i)$  pour générer un échantillon  $(\mathbf{X}_i)_{i \leq n}$  de variables aléatoires indépendantes et de même loi de fonction de répartition  $F$ .

### 1.3.2.2 Méthode du rejet

On veut simuler une variable aléatoire  $\mathbf{X}$  dont la loi a pour densité  $f$  et on suppose qu'il existe une loi de densité  $g$  facilement simulable et  $\alpha > 0$  tels que  $f(x) \leq \alpha g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 1.2:**

*On note  $q(x) = \frac{f(x)}{\alpha g(x)} \in [0,1]$ . Soit  $\mathbf{X}_1$  une variable aléatoire de densité  $g$  (générée par la méthode de la fonction de répartition par exemple) et  $\mathbf{U}_1$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0,1]$ .*

*Si  $\mathbf{U}_1 \leq q(\mathbf{X}_1)$ , on pose  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1$ .*

*Sinon on rejette  $\mathbf{X}_1$  et on génère une suite de couples  $(\mathbf{U}_n, \mathbf{X}_n)_{n \geq 2}$  jusqu'à l'instant  $p$  où  $\mathbf{U}_p \leq q(\mathbf{X}_p)$  et on pose alors  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_p$ .*

*La variable aléatoire  $\mathbf{X}$  ainsi simulée a pour densité  $f$ .* □

La preuve de ce résultat est omise ici.

Remarque

La probabilité d'acceptation de la variable aléatoire  $Y_i$  vaut :

$$\mathbb{P}(\mathbf{U}_i \leq q(\mathbf{X}_i)) = \int \mathbb{P}(\mathbf{U}_i \leq q(x)) P_{\mathbf{X}_i}(x) dx$$

car  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{X}_i$  sont indépendantes, donc comme la densité de  $\mathbf{X}_i$  est  $g$  et que  $\mathbf{U}_i$  suit une loi uniforme:

$$\mathbb{P}(\mathbf{U}_i \leq q(\mathbf{X}_i)) = \int \left( \int_0^{q(x)} du \right) g(x) dx = \int q(x) g(x) dx = \int \frac{1}{k} g(x) dx = \frac{1}{k}$$

Pour éviter de devoir rejeter un trop grand nombre de couples  $(\mathbf{U}_n, \mathbf{X}_n)$  pour générer  $\mathbf{X}$ , il faut que cette probabilité soit la plus grande possible, et donc que  $k$  soit le plus petit possible, tout en restant  $\leq 1$  ( il suffit d'intégrer l'inégalité  $f(x) \leq \alpha g(x)$  entre les deux densités pour s'en convaincre). Il faut donc trouver une densité  $g$  qui a une allure similaire à  $f$  pour que la méthode soit performante.

Notons que cette méthode est à retenir pour comprendre l'algorithme de Metropolis Hasting.

### 1.3.2.3 Méthode de mélange

On suppose que la densité de la loi que l'on veut simuler est  $f_{\mathbf{X}}(x) = \int g(x,y) dy$  où  $g$  est une fonction positive. Par Fubini on peut écrire que  $\int \int g(x,y) dx dy = 1$  donc  $g$  est une densité. On va donc grossir l'espace et générer un couple  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  de densité  $g$  et retrouver  $\mathbf{X}$  par projection. La densité de  $\mathbf{Y}$  est  $g_{\mathbf{Y}}(y) = \int g(x,y) dx$  et la densité conditionnelle de  $\mathbf{X}$  sachant que  $\mathbf{Y} = y$  est donnée par  $g(x|y) = \frac{g(x,y)}{g_{\mathbf{Y}}(y)}$ . On simule donc d'abord  $\mathbf{Y}$  de densité  $g_{\mathbf{Y}}$  puis ayant obtenu un  $y$ , on simule la densité conditionnelle  $g(\cdot|y)$  indépendamment de  $g_{\mathbf{Y}}$ , ce qui fournit alors une simulation de  $g_{\mathbf{X}}$  selon  $f$ .

Cette technique repose sur la méthode de la fonction de répartition et n'est intéressante que si les densités sont faciles à simuler. A noter que la technique permet de simuler des vecteurs aléatoires (en procédant par couples successifs de composantes).

## 1.3.3 Exemples sur des lois classiques

### 1.3.3.1 La loi exponentielle de paramètre $\lambda$

Si  $\mathbf{X}$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  de densité  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Sa fonction de répartition vaut pour  $x \geq 0$   $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ , donc si  $u \in [0,1]$ , la pseudo inverse s'écrit  $F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$ . Si  $\mathbf{U}$  est une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0,1]$ . La variable  $\mathbf{X}$  a donc même loi que  $-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \mathbf{U})$ , et par symétrie que  $-\frac{1}{\lambda} \ln(\mathbf{U})$ .

### 1.3.3.2 Les lois Gamma

Soit  $\mathbf{X}$  qui suit une loi  $\Gamma(\lambda, a)$  de densité  $f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x)$ . Si  $\mathbf{Y}$  suit une loi  $\Gamma(1, a)$ , un changement de variables montre que  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}/\lambda$  suit une loi  $\Gamma(\lambda, a)$ . Il suffit donc de savoir simuler une variable aléatoire de loi  $\Gamma(1, a)$  avec  $a \in ]0, 1[$ , chose que l'on va réaliser avec la méthode de rejet de Ahrens et Dieter [AD82] qui permet de s'affranchir du calcul de  $\Gamma(a)$ .

Soit la fonction  $g(x) = \frac{ae}{a+e} (x^{a-1} \mathbb{1}_{]0, 1[}(x) + e^{-x} \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x))$ . On a alors  $f(x) \leq \frac{a+e}{ae\Gamma(a)} g(x)$  et pour tout  $x > 0$ , on a alors  $q(x) = x^{a-1} \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) + e^{-x} \mathbb{1}_{]0, 1[}(x)$ .

Si  $\mathbf{Y}$  est une variable aléatoire qui suit une loi de densité  $g$ , l'inverse de sa fonction de répartition est donnée pour  $z \in ]0, 1[$  par :

$$G^{-1}(z) = \left( \frac{a+e}{e} z \right)^{\frac{1}{a}} \mathbb{1}_{]0, \frac{e}{a+e} \left[ (z) - \ln \left( (1-z) \frac{a+e}{ae} \right) \mathbb{1}_{\left[ \frac{e}{a+e}, 1 \right[} (z) \right.}$$

- (1) On simule une variable aléatoire  $\mathbf{U}$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$ , on calcule  $\mathbf{Y} = G^{-1}(\mathbf{U})$  puis on simule  $\mathbf{V}$  de loi uniforme indépendante de  $\mathbf{U}$ .
- (2) Si  $\mathbf{V} \leq q(\mathbf{Y})$ , on pose  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ , sinon on retourne en (1).

## 1.4 Techniques d'optimisation de Monte-Carlo

Il existe différentes méthodes d'optimisation plus ou moins intéressantes à mettre en pratique. Les premières sont dites de réduction de variance. La méthode de Monte Carlo étant de l'ordre de  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , l'idée est de remplacer la variable aléatoire  $\mathbf{X}$  dont on veut calculer l'espérance par une nouvelle variable aléatoire  $\mathbf{Y}$ , de tel sorte que  $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mathbb{E}[\mathbf{Y}]$  et que la variance  $\sigma^2$  soit plus faible. Nous aurons alors accéléré la convergence de la méthode.

Cette section se termine par une autre méthode dite de quasi Monte Carlo.

### 1.4.1 Échantillonnage par fonction d'importance

On emploie aussi le terme d'échantillonnage préférentiel, "importance sampling" en anglais. On considère toujours  $I = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$ . Si on se donne la densité  $\tilde{f}$  d'une autre loi de probabilité (c'est-à-dire que  $\tilde{f}(x) \geq 0$  et  $\int \tilde{f}(x) dx = 1$ ), rien n'interdit d'écrire:  $\mathbb{E}[g(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x) f(x)}{\tilde{f}(x)} \tilde{f}(x) dx$ .

Nous allons ainsi considérer une variable aléatoire  $\mathbf{Y}$  de loi  $\tilde{f}$  et simuler une suite  $(\mathbf{Y}_i)$  selon cette loi. On aura alors  $\frac{1}{n} \sum_i \frac{g(\mathbf{Y}_i) f(\mathbf{Y}_i)}{\tilde{f}(\mathbf{Y}_i)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s} \mathbb{E}[g(\mathbf{X})]$ .

La première remarque que l'on peut faire, c'est que cette technique repose sur le fait que l'on sache



générer une suite de variables aléatoires  $(\mathbf{Y}_i)$  de loi quelconque, d'où la pertinence de la section précédente. Pour appliquer la technique de l'échantillonnage par fonction d'importance, simuler simplement une loi uniforme ne suffit plus. La deuxième remarque est la suivante : qu'avons nous gagné? Si on pose  $\mathbf{Z} = \frac{g(\mathbf{X})f(\mathbf{X})}{\tilde{f}(\mathbf{X})}$ , il faut que  $\mathbf{Var}(\mathbf{Z}) < \mathbf{Var}(g(\mathbf{X}))$ .

Or  $\mathbf{Var}(\mathbf{Z}) = \mathbb{E}[\mathbf{Z}^2] - \mathbb{E}[\mathbf{Z}]^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} dx - \mathbb{E}[g(\mathbf{X})]^2$ . Le meilleur choix pour la densité de probabilité est alors  $\tilde{f}(x) = \frac{g(x)f(x)}{\mathbb{E}[g(\mathbf{X})]}$ , parce qu'alors on annule la variance! Mais en pratique on cherche justement à calculer  $\mathbb{E}[g(\mathbf{X})]$ , donc on n'accède pas à cette valeur idéale. Concrètement on approxime  $|g(x)f(x)|$  par une fonction  $\tilde{f}_1(x)$  bien choisie et on pose  $\tilde{f} = \frac{\tilde{f}_1}{\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_1(x) dx}$ .

L'approximation  $\tilde{f}_1(x)$  peut être un polynôme réduit à un support compact par exemple si la loi  $f$  est à support compact.

### 1.4.2 Méthode de stratification

On se donne une intégrale  $I = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x) dx$  à calculer ainsi qu'une partition  $(D_i)_{1 \leq i \leq m}$  de  $\mathbb{R}^d$ .

On décompose alors  $I = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathbf{X} \in D_i} g(\mathbf{X})] = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[g(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in D_i] \mathbb{P}(\mathbf{X} \in D_i)$ . Tout repose sur le fait que l'on connaisse les probabilités  $p_i = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in D_i)$  et on va utiliser une technique de Monte Carlo pour approximer les intégrales  $I_i = \mathbb{E}[g(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in D_i]$  avec  $n_i$  tirages indépendants. En notant  $\tilde{I}_i$  l'approximation de  $I_i$ , un calcul immédiat montre que  $\mathbf{Var}(\tilde{I}_i) = \frac{\sigma_i^2}{n_i}$

où l'on note  $\sigma_i^2 = \mathbf{Var}(g(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in D_i)$ . On a alors  $I$  qui est approchée par  $\tilde{I} = \sum_{i=1}^m p_i \tilde{I}_i$  et on

estime  $\mathbf{Var}(\tilde{I}) = \sum_{i=1}^m p_i \mathbf{Var}(\tilde{I}_i) = \sum_{i=1}^m p_i \frac{\sigma_i^2}{n_i}$  qui représente l'erreur que l'on cherche à minimiser

pour un nombre total de tirages  $n = \sum_{i=1}^m n_i$ . La méthode de stratification consiste à faire un choix optimal dans le nombre de tirages de chaque strate. C'est une technique qui "sectorise l'aléa" selon une partition donnée. Les  $n_i$  qui minimisent  $\mathbf{Var}(\tilde{I})$  sont tels que  $n_i = n \frac{p_i \sigma_i}{\sum_{i=1}^m p_i \sigma_i}$

et le minimum vaut alors  $\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^m p_i \sigma_i \right)^2$ . Avant de montrer que l'on a bien diminué la variance,

il nous faut remarquer que le choix optimal passe par la connaissance des  $\sigma_i$ , ce qui n'est pas toujours aisé. Usuellement on essaie de les calculer par un premier Monte Carlo rapide, puis on en déduit le choix optimal des tirages. Une autre stratégie consiste à affecter un nombre de points proportionnel à la probabilité du domaine  $D_i$ :  $n_i = np_i$ . La variance est alors égale à  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m p_i \sigma_i^2$ , donc supérieure au minimum accessible en théorie, mais inférieure au cas pratique

de simulation uniforme sans stratification.

$$\begin{aligned} \text{Montrons à présent que l'on a gagné sur la variance. On a } \mathbf{Var}(g(\mathbf{X})) &= \mathbb{E}[g(\mathbf{X})^2] - \mathbb{E}[g(\mathbf{X})]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^m p_i \mathbb{E}[g(\mathbf{X})^2 | \mathbf{X} \in D_i] - \left( \sum_{i=1}^m p_i \mathbb{E}[g(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in D_i] \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m p_i \mathbf{Var}(g(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in D_i) + \sum_{i=1}^m p_i \mathbb{E}[(g(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in D_i)^2] - \left( \sum_{i=1}^m p_i \mathbb{E}[g(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in D_i] \right)^2. \end{aligned}$$

Comme  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ , on dispose de l'inégalité de convexité de  $x^2$ :  $\left( \sum_{i=1}^m p_i a_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m p_i a_i^2$  d'où

$\mathbf{Var}(g(\mathbf{X})) \geq \sum_{i=1}^m p_i \mathbf{Var}(g(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in D_i) \geq \left( \sum_{i=1}^m p_i a_i \right)^2$ . Rappelons qu'il faut connaître les probabilité  $p_i$  pour cette méthode. Cependant pour les lois usuelles, on peut même avoir une expression analytique des  $p_i$ . Dans le cas contraire le calcul n'est fait qu'une seule fois pour une partition  $(D_i)_{1 \leq i \leq m}$  de  $\mathbb{R}^d$  donné.

### 1.4.3 Valeur moyenne, Variables de contrôle et antithétiques

#### 1.4.3.1 Valeur moyenne

Supposons que l'on cherche à calculer  $\mathbb{E}[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \int g(x, y) f(x, y) dx dy$ , où  $f(x, y)$  est la loi du couple  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ . Si on pose  $h(x) = \frac{1}{m(x)} \int g(x, y) f(x, y) dy$  avec  $m(x) = \int f(x, y) dy$ . On a alors  $\mathbb{E}[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \mathbb{E}[h(\mathbf{X})]$  d'après Fubini. En remarquant que  $m(x)$  est la loi de  $\mathbf{X}$ , on peut écrire que  $h(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) | \mathbf{X}]$  et donc  $\mathbb{E}[h(\mathbf{X})]$  est une espérance conditionnelle et cela permet de montrer de manière analogue à la méthode de stratification que  $\mathbf{Var}(h(\mathbf{X})) \leq \mathbf{Var}(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ .

Cette méthode est intéressante lorsque l'on sait expliciter  $h(x)$ , mais on peut la simuler dans un premier temps par une technique de Monte Carlo classique.

#### 1.4.3.2 Variables de contrôle

Il s'agit d'écrire  $\mathbb{E}[f(\mathbf{X})] = \mathbb{E}[f(\mathbf{X}) - h(\mathbf{X})] + \mathbb{E}[h(\mathbf{X})]$ , sachant que l'on sait calculer explicitement  $\mathbb{E}[h(\mathbf{X})]$  et que  $\mathbf{Var}(f(\mathbf{X}) - h(\mathbf{X}))$  est plus petit que  $\mathbf{Var}(f(\mathbf{X}))$ . On calcule donc par la méthode de Monte-Carlo la quantité  $\mathbb{E}[f(\mathbf{X}) - h(\mathbf{X})]$ , ce qui est plus rapide que de calculer avec la même méthode  $\mathbb{E}[f(\mathbf{X})]$  (puisque  $\mathbf{Var}(f(\mathbf{X}))$  est plus grande). Cette méthode n'est intéressante que si on arrive à trouver la fonction  $h$  qui convient.

#### 1.4.3.3 Variables antithétiques

Soit  $I = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x) dx$ . Cette méthode consiste à utiliser l'invariance d'une fonction judicieusement choisie (noté  $h(x)$ ) par la mesure de probabilité  $f$ . On peut donc écrire alors

$I = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (g(x) + g(h(x))) f(x) dx$ . (Par exemple  $x \rightarrow 1-x$  est invariante pour la loi uniforme sur  $[0,1]$  et on peut écrire  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x) + f(1-x)) dx$ ).

On simule alors  $n$  variables aléatoires  $\mathbf{X}_i$  selon la loi  $f$  comme pour une méthode de Monte-Carlo classique, et on calcule  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\mathbf{X}_i) + g(1 - \mathbf{X}_i)$ . On divise la variance d'un facteur proche de 2, mais cette méthode requiert  $2n$  évaluations de  $g$ .

### 1.4.4 Quasi Monte Carlo

Cette technique consiste à renoncer au caractère aléatoire des tirages. On va ainsi générer des suites déterministes qui possèdent tout de même une propriété particulière, celle d'être à *discrédance faible*. Avant de nous lancer dans les définitions, notons que l'on connaît de nombreuses suites à discrédance faible, ce qui rend la technique ouverte à quantité de tests et que d'autre part, on peut obtenir une majoration de l'erreur commise en remplaçant les tirages aléatoires par des tirages déterministes. Cependant ce dernier point nous entrainerait trop loin (inégalité de Koksma-Hlawka) et nous n'entrerons pas dans les détails (voir [Nei92]).

#### 1.4.4.1 Discrédance d'une suite

Nous noterons  $x \geq y$  dans  $[0,1]^d$  si et seulement si  $x_i \geq y_i$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ .

##### Définition 1.1 (suite équirépartie)

On dit qu'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite équirépartie sur  $[0,1]^d$  si pour tout  $a = (a_1, \dots, a_d) \in [0,1]^d$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{x_k \in [0,a]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^d a_i = \Pi(a).$$

##### Définition 1.2 (discrédance d'une suite)

La discrédance d'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est notée  $D_n^*(x)$  et est donnée par :

$$D_n^*(x) = \sup_{a \in [0,1]^d} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{x_k \in [0,a]} - \Pi(a) \right|.$$

Nous admettrons le résultat suivant : la discrédance d'une suite équirépartie tend vers 0 (se reporter à [Nei92]).

Si on considère une suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  où  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite équirépartie, sous réserve d'une hypothèse de régularité sur  $f$ , on a le résultat suivant :

$$\left| \int_{[0,1]^d} f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right| \leq C(f) D_n^*(x),$$

où  $C(f)$  est une constante qui dépend de  $f$ . C'est-à-dire que c'est la discrédance de la suite qui va assurer la rapidité de convergence de la technique du quasi Monte Carlo.

**Définition 1.3 (discrédance faible)**

On dit qu'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs  $[0,1]^d$  est à discrédance faible si sa discrédance  $D_n^*(x)$  est asymptotiquement meilleure que la discrédance  $D_\infty^*(x)$  d'une suite aléatoire  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de loi uniforme sur  $[0,1]^d$ .  $\square$

On peut prouver que la discrédance  $D_n^*(x)$  d'une suite quelconque vérifie

$$\limsup_n \frac{n D_n^*(x)}{\ln(n)^{\frac{d}{2}}} \geq C_d.$$

où  $C_d$  est une constante qui ne dépend que de la dimension. On peut également exhiber des suites encore plus performantes dont la discrédance est en  $O\left(\frac{\ln(n)^d}{n}\right)$ , ce qui montre l'intérêt très important de la méthode en grande dimension .

**1.4.4.2 Exemple d'une suite à discrédance faible**

Nous allons donner l'exemple de la suite de Van Der Corput (en dimension  $d$  elle est appelée suite de Halton).

Soit  $p \geq 1$ . Pour tout entier  $n$  on note  $a_0, a_1, \dots, a_r$  les nombres entiers tels que  $n = \sum_{i=0}^r a_i p^i$  avec  $a_r > 0$  et  $0 \leq a_i < p$  pour  $0 \leq i \leq r$  (il s'agit de la décomposition p-adique de  $n$ ). La suite de Van Der Corput en base  $p$  est donnée par

$$\phi_p(n) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots + \frac{a_r}{p^{r+1}}.$$

La discrédance de la suite de Van Der Corput est en  $O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ ,

Les suites de Halton se définissent en choisissant  $p_1, p_2, \dots, p_d$   $d$  nombres premiers entre eux (par exemple les  $d$  premiers nombres premiers  $> 1$ ) et en posant :

$$x_n^d = (\phi_{p_1}(n), \dots, \phi_{p_d}(n)).$$

La discrédance  $D_n^*(x^d)$  d'une suite de Halton est majorée par un  $O\left(\frac{\ln(n)^d}{n}\right)$ .

**1.5 Chaines de Markov et Metropolis-Hasting**

Nous nous garderons bien de passer en revue la totalité de la théorie des chaînes de Markov et des processus ergodiques. Le but de cette section est de donner les idées maîtresses de nombreuses

méthodes de simulations aléatoires. C'est une théorie très puissante qui possède des applications numériques très importantes. Nous n'utiliserons pour notre part uniquement la méthode du recuit-simulé, mais c'est une méthode qu'il est possible de décrire uniquement avoir énoncé certains jalons de la théorie générale.

## 1.5.1 Processus

### 1.5.1.1 Définitions

Avant toute chose, il nous faut définir ce qu'est un processus. Il s'agit en fait d'un continuum de variables aléatoires indexé par le temps.

#### Définition 1.4 (processus)

Soit un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable (voir annexe A.1.1). Soit  $I$  un ensemble discret ou continu. On appelle *processus aléatoire* ou *processus stochastique* l'application de  $I \rightarrow E : t \rightarrow X_t$  où  $\forall t \in I, X_t$  est une variable aléatoire de  $\Omega$  dans  $E$ .  $\square$

La dépendance en temps est donc notée en indice.

#### Définition 1.5 (trajectoire)

On appelle *trajectoire* la fonction  $I \rightarrow E$  qui pour un évènement  $\omega \in \Omega, t \rightarrow X_t(\omega)$   $\square$

En elles mêmes ces deux définitions 1.4 et 1.5 sont très générales et ne sont qu'une formalisation mathématique. La question qui se pose à présent, c'est de savoir ce qui peut se passer entre un instant  $t$  et un instant  $s > t$  sur  $I$ , en particulier quelle "transition" il peut y avoir entre  $X_t$  et  $X_s$  et notamment avec quelle probabilité cette "transition" peut avoir lieu.

Nous allons nous intéresser au cas où  $I$  est un ensemble continu (par exemple un borélien de  $\mathbb{R}_+$ ) et regarder sur un exemple concret comment on définit un processus stochastique et quelles sont les propriétés intéressantes qu'il peut présenter.

### 1.5.1.2 Le mouvement brownien

Il existe de nombreux résultats sur le mouvement brownien et nous allons nous contenter simplement d'en énoncer quelques uns pour donner un exemple de processus stochastique.

Le mouvement brownien a été énoncé pour la première fois par Robert Brown pour décrire le déplacement d'une particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Ce déplacement est aléatoire et peut être défini mathématiquement par un processus stochastique de la façon suivante :

**Définition 1.6 (mouvement brownien)**

Un processus stochastique  $W : [0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est un mouvement Brownien si :

- (i)  $W_0 = 0$
- (ii) Pour tout  $s \leq t$ ,  $W_t - W_s$  suit une loi gaussienne centrée de variance  $t - s$ .
- (iii)  $\forall n \geq 1$  et toute suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , les accroissements  $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}, 0 \leq i \leq n-1)$  sont indépendants.  $\square$

En appliquant la propriété (ii) avec  $s = 0$ , on voit immédiatement que  $W_t$  suit une loi gaussienne centrée réduite. On s'aperçoit aussi que  $\forall s, t \geq 0$ ,  $W_{s+t} - W_t$  et  $W_s - W_0$  ont même loi, ce qui veut dire que le processus est stationnaire. La propriété (iii) traduit le fait que le mouvement brownien est un processus à accroissements indépendants, c'est à dire que ce qui s'est passé entre  $t_{i-1}$  et  $t_i$  n'influence pas ce qui va se passer entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ .

**1.5.1.3 Le processus de Poisson**

Le processus de Poisson est un processus dit de "comptage", car il est utilisé pour dénombrer au cours du temps l'occurrence d'un évènement (par exemple une file d'attente). Il y a deux approches : soit on observe les instants d'occurrence de la succession d'évènements, soit on considère le nombre d'occurrences sur l'intervalle  $[0, t]$ . Nous allons opter ici pour le second point de vue.

**Définition 1.7 (processus de Poisson)**

Un processus stochastique  $N : [0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  si :

- (i)  $N_0 = 0$
- (ii) Pour tout  $s \leq t$ ,  $N_t - N_s$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda(t - s)$ .
- (iii)  $\forall n \geq 1$  et toute suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , les accroissements  $(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}, 0 \leq i \leq n-1)$  sont indépendants.  $\square$

Le processus de Poisson est également un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

Nous avons vu comment on définissait un processus de manière théorique, et quelles étaient certaines propriétés intéressantes, comme l'aspect stationnaire ou l'indépendance des accroissements. Nous allons maintenant en venir à illustrer en pratique ces processus : c'est le but des chaînes de Markov.

## 1.5.2 Chaînes de Markov et ergodicité

### 1.5.2.1 Chaîne de Markov

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui illustre un processus (a fortiori) discret à accroissements indépendants. Donc si on considère dans une simulation que le temps a été discrétisé, la loi de variable aléatoire  $\mathbf{X}_{n+1}$  sachant les valeurs du passé  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  ne dépend que de  $\mathbf{X}_n$ , et compte tenu de l'ensemble (fini ou dénombrable) des différents états possibles de  $\mathbf{X}$ , on aura une probabilité de transition pour passer de  $\mathbf{X}_i$  à  $\mathbf{X}_{i+1}$ . Voici la définition rigoureuse :

#### Définition 1.8 (chaîne de Markov)

Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace discret (fini ou dénombrable).

(i) Une matrice de transition  $Q = (Q(x, y))$ ,  $(x, y) \in E^2$  est une application de  $E \times E \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\sum_{y \in E} Q(x, y) = 1 \forall x \in E$ .

(ii) Une chaîne de Markov homogène de matrice de transition  $Q$  est une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $E$  telle que  $\forall n \geq 1$  et pour tout  $x_0, \dots, x_n, y \in E$  :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1} = y \mid \mathbf{X}_0 = x_0, \dots, \mathbf{X}_n = x_n) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1} = y \mid \mathbf{X}_n = x_n) = Q(x_n, y)$$

La loi initiale de la chaîne est la loi  $\mu$  de  $\mathbf{X}_0$ , c'est à dire la probabilité sur la tribu  $\mathcal{E}$  telle que  $\forall x \in E, \mu(x) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_0 = x)$ .  $\square$

La propriété (i) montre que pour chaque ligne de la matrice de transition, la somme des coefficients vaut 1. C'est la propriété d'une matrice stochastique. De plus, la matrice  $Q$  est carrée mais rien n'oblige qu'elle soit symétrique. Le terme  $Q(x_n, y)$  désigne la probabilité de passer de l'état  $x_n$  à l'instant  $n$  à l'état  $y$  à l'instant  $n + 1$ .

### 1.5.2.2 Propriétés d'une chaîne de Markov

Le nom de "chaîne" de Markov, plutôt que celui de suite marque le lien qu'il existe entre les éléments. En fait une chaîne de Markov se caractérise par sa loi initiale  $\mu$  et sa matrice de transition.

#### Proposition 1.3:

Soit  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène de matrice de transition  $Q$  et de loi initiale  $\mu$ .

(i)  $\forall n \geq 0$  et pour tout vecteur  $(x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1}$

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_0 = x_0, \dots, \mathbf{X}_n = x_n) = \mu(x_0) Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n)$$

(ii)  $\forall n \geq 0$  et pour tout  $(x, y) \in E^2$

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y \mid \mathbf{X}_0 = x) = Q^n(x, y) \quad \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y) = \sum_{x \in E} \mu(x) Q^n(x, y)$$

**Preuve**

(i) En utilisant la formule de Bayes, on a  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_0 = x_0, \dots, \mathbf{X}_n = x_n) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x_n \mid \mathbf{X}_0 = x_0, \dots, \mathbf{X}_{n-1} = x_{n-1}) \mathbb{P}(\mathbf{X}_0 = x_0, \dots, \mathbf{X}_{n-1} = x_{n-1}) = Q(x_{n-1}, x_n) \mathbb{P}(\mathbf{X}_0 = x_0, \dots, \mathbf{X}_{n-1} = x_{n-1})$ . On arrive ainsi au résultat itérant la formule  $n - 1$  fois, en notant que  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_0 = x_0) = \mu(x_0)$ .

(ii) Pour  $n=2$ , on applique la formule des probabilités totales à la quantité  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_2 = y, \mathbf{X}_0 = x)$ :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_2 = y, \mathbf{X}_0 = x) = \sum_{z \in E} \mathbb{P}(\mathbf{X}_0 = x, \mathbf{X}_1 = z, \mathbf{X}_2 = y).$$

On utilise alors (i) :  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_2 = y, \mathbf{X}_0 = x) = \mu(x) \sum_{z \in E} Q(x, z) Q(z, y)$ . La dernière égalité n'est rien d'autre que le terme  $(x, y)$  de la matrice  $Q^2$ , d'après les règles de multiplication matricielle.

Donc  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_2 = y, \mathbf{X}_0 = x) = \mu(x) Q^2(x, y)$  et on montre que  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y, \mathbf{X}_0 = x) = \mu(x) Q^n(x, y)$  par une récurrence facile. Donc par la formule de Bayes on obtient que  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y \mid \mathbf{X}_0 = x) = Q^n(x, y)$ .

Par ailleurs la formule des probabilités totales nous fournit

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y \mid \mathbf{X}_0 = x) \mathbb{P}(\mathbf{X}_0 = x)$$
 ce qui fournit le résultat d'après ce qui précède. ■

Nous pouvons ainsi constater qu'une chaîne de Markov est caractérisée par sa matrice de transition.

Nous allons donner maintenant deux définitions importantes sur les matrices de transition, en vue de l'énoncé du théorème ergodique.

**Définition 1.9 (Probabilité invariante)**

Soit  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène de matrice de transition  $Q$  à valeurs dans  $E$ .

Une probabilité  $\Pi$  définie sur  $E$  est dite invariante pour  $Q$  si  $\Pi Q = \Pi$ . □

On peut montrer que si  $\Pi$  est une probabilité invariante, la chaîne  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un processus strictement stationnaire.

**Définition 1.10**

(i) Une matrice  $A$  à coefficients positifs ou nuls est irréductible si  $\forall (x, y) \in E^2$ , il existe  $n \geq 1$  tel que  $A^n(x, y) > 0$ . Si  $Q$  est une matrice de transition irréductible, la chaîne de Markov de matrice de transition  $Q$  est dite irréductible.

(ii) On dit que deux états  $x, y$  communiquent s'il existe  $n_1, n_2 \geq 1$  tels que  $Q^{n_1}(x, y) > 0$  et  $Q^{n_2}(y, x) > 0$ . □

Il peut y avoir deux types d'états d'une chaîne de Markov. Soit on visite l'état une infinité de fois, auquel cas l'état est dit récurrent, soit il est visité un nombre fini de fois et il est dit transitoire. Si  $E$  est fini, on peut montrer que la chaîne admet au moins un état récurrent.

On peut montrer que dans le cas où une chaîne admet une unique probabilité invariante alors  $Q$



est irréductible et dans ce cas tous les états sont récurrents.

### 1.5.2.3 Théorème ergodique

Nous allons pouvoir passer à ce théorème important qui est un équivalent de la loi des grands nombres avec une chaîne de Markov.

#### **Théorème 1.4 (Théorème ergodique):**

Soit  $Q$  une probabilité de transition irréductible. On suppose aussi qu'il existe une probabilité invariante  $\Pi$ . On a alors :

- (i)  $\Pi$  est l'unique probabilité invariante et  $\Pi(x) > 0 \forall x \in E$ .
- (ii) Tous les états sont récurrents.
- (iii) Pour tout état  $x \in E$  et toute fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\int_E |f(t)| d\Pi(t) < +\infty$

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\mathbf{X}_k^x) = \int_E f(y) \Pi(y) \quad p.s.$$

où  $(\mathbf{X}_n^x)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov d'état initial  $x$ . □

Si l'on sait construire une chaîne de Markov de matrice de transition irréductible et ayant  $\Pi$  comme probabilité invariante, on pourra approximer l'intégrale par la somme discrète. Le problème du calcul de l'intégrale se ramène avec le théorème 1.4 à celui de la simulation de la chaîne de Markov  $(\mathbf{X}_n^x)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## 1.5.3 Métropolis-Hasting

### 1.5.3.1 Génération d'une chaîne de Markov

Cet algorithme va nous permettre de simuler une chaîne de Markov ayant une probabilité  $\Pi$  donnée. Voici l'algorithme, qui est basé sur une technique proche de celle du rejet (voir 1.3.2.2).

#### **Proposition 1.4 (Algorithme de Métropolis):**

Soit  $E$  un ensemble d'état fini ou dénombrable,  $Q$  une matrice de transition sur  $E$  et  $\Pi$  une probabilité sur  $E$ . Fixons  $x_0 \in E$  tel que  $\Pi(x_0) > 0$  et posons  $\mathbf{X}_0 = x_0$ . On va construire  $\mathbf{X}_{n+1}$  en supposant  $\mathbf{X}_n$  déjà simulé.

On simule deux variables aléatoires  $\mathbf{Y}_n$  et  $\mathbf{U}_n$  indépendantes de tous les  $(\mathbf{X}_k)_{k \leq n}$  telles que :

- $\mathbf{Y}_n$  est de loi  $Q(x_n, \cdot)$ , c'est à dire que  $\forall y \in E, \mathbb{P}(\mathbf{Y}_n = y) = Q(x_n, y)$
- $\mathbf{U}_n$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$

Posons

$$\alpha(x, y) = \min \left( 1, \frac{\Pi(y)Q(y, x)}{\Pi(x)Q(x, y)} \right)$$

en posant que  $\alpha(x, y) = 1$  si  $\Pi(x)Q(x, y) = 0$ .

- Si  $\mathbf{U}_n \leq \alpha(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)$ ,  $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{Y}_n$ , on accepte la transition.

- Si  $U_n > \alpha(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)$ ,  $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n$ , on rejette la transition. □

Cet algorithme répond alors au problème de générer une chaîne de Markov qui pourra servir dans le théorème 1.4, car on a la propriété suivante :

**Proposition 1.5:**

Le processus  $(\mathbf{X}_n, n \geq 0)$  est une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$  définie par :

- $P(x,y) = Q(x,y) \alpha(x,y) = Q(x,y) \min \left( 1, \frac{\Pi(y)Q(y,x)}{\Pi(x)Q(x,y)} \right)$
- $P(x,x) = 1 - \sum_{y \neq x} P(x,y)$

De plus la probabilité  $\Pi$  est invariante par  $P$ . □

Une grande latitude est possible dans le choix de  $x_0$  et  $Q$ . Si on choisit  $Q$  correctement, il sera possible de garantir que  $P$  soit irréductible et/ou apériodique. Par exemple si  $Q$  est symétrique, on dispose de théorèmes qui garantissent des vitesses de convergence dans le théorème ergodique "exponentiellement rapide" et qui remplacent alors le théorème de la limite centrale. Tous ces résultats nous entraîneraient trop loin et nous renvoyons à [Chu67, Yca02] pour plus de détails.

**1.5.3.2 La méthode du recuit simulé**

Le but de la méthode du recuit simulé est de trouver le minimum global d'une fonction  $V : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un ensemble fini  $E$ , mais trop grand pour faire une recherche systématique. L'exemple le plus célèbre est celui le problème dit du commis voyageur.

C'est la mesure de Gibbs qui va apparaître ici comme naturelle, car comme nous le verrons au chapitre suivant, elle se concentre sur les états d'énergie minimale. On fixe une matrice de transition  $Q$  symétrique ( $Q(x,y) = Q(y,x)$  pour tout couple d'états  $x,y$  de  $E$ ). On se donne une suite  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui croit vers  $+\infty$ . On construit alors la matrice de transition  $P_n$  associée à  $Q$  et à la température  $1/\beta_n$  par l'algorithme de Metropolis-Hasting :

$$\begin{aligned} P_n(x,y) &= Q(x,y) e^{-\beta_n(V(y)-V(x))} \quad \text{si } x \neq y \\ P_n(x,x) &= 1 - \sum_{y \neq x} P_n(x,y) \end{aligned} \tag{1.5}$$

La suite  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est appelée schéma de température et elle doit être telle que la chaîne ne reste pas piégée dans un minimum local de  $V$  (appelé puit de potentiel). Cette terminologie est inspirée de la métallurgie où l'on cherche à refroidir lentement un métal. Si la vitesse de refroidissement est trop rapide, le système peut être "gelé" dans un état qui ne correspond pas à l'état minimal global. Si ce refroidissement est trop lent, les calculs quant à eux prennent trop de temps.

Nous utiliserons cet algorithme au chapitre 5. De plus amples détails sur le recuit simulé pourront être trouvés dans [Duf96].

## Conclusion

Nous avons décrits succinctement de nombreuses méthodes de simulation aléatoire en présentant également les améliorations possibles pour optimiser les méthodes de Monte Carlo. Nous avons cherché à faire passer les idées maîtresses sans entrer excessivement dans les détails. Certaines démonstrations ont été rappelées concernant les résultats fondamentaux, mais beaucoup de résultats ont été reportés en annexe A.1.

Nous nous référerons par la suite à ce chapitre lorsque nous appliquerons notamment les méthodes de Monte Carlo ou du recuit simulé.



# Chapitre 2

## Etat de l'art des méthodes non-paramétriques

Ce chapitre est un deuxième état de l'art qui concerne les méthodes probabilistes non-paramétriques. C'est une branche un peu plus récente des probabilités qui revêt actuellement assez d'importance, notamment en mécanique, pour que l'on y consacre ici un chapitre complet. Nous commençons par énoncer des principes généraux, puis nous décrivons les travaux existants en mécanique. Enfin nous énonçons des résultats sur les estimateurs non-paramétriques que nous utiliserons au chapitre 5.

### 2.1 Entropie d'une loi de probabilité

#### 2.1.1 Comment quantifier l'absence d'information

L'entropie est un outil qui permet de mesurer l'information sur un système donné. Nous allons raisonner en terme d'énergie d'un système, qui sera dans notre cas un système mécanique, mais il est facile d'étendre le raisonnement à d'autres domaines. Si l'énergie considérée est constante, on ne dispose d'aucune information sur la manière dont le système évolue, ce qui se traduit par une incertitude maximale pour l'observateur. Dans ce cas, la probabilité qui va maximiser l'entropie va être la probabilité uniforme pour qu'un évènement se produise. Au contraire, s'il n'y a aucune incertitude, l'entropie est nulle et c'est la mesure de Dirac, c'est à dire une valeur déterministe, qui va maximiser l'entropie.

Le concept d'entropie en probabilité à été introduit par Shannon [Sha48] en 1948. Voici une définition :

**Définition 2.1 (Entropie d'une loi)**

*Soit  $E$  un ensemble fini,  $\mu$  une mesure de probabilité définie sur un l'espace probabilisé  $(E, \mathcal{E})$ .*

*On appelle entropie de  $\mu$  la quantité suivante :*

$$S(\boldsymbol{\mu}) = - \sum_{x \in E} \mu(x) \ln(\mu(x))$$

avec la convention que  $y \ln(y) = 0$  quand  $y = 0$ .  $\square$

Ainsi l'entropie est une grandeur toujours positive, car  $0 \leq \mu(x) \leq 1$ .

Nous nous permettons d'évoquer l'analogie avec le second principe de la thermodynamique où l'entropie sert à évaluer l'irréversibilité d'un système.

### 2.1.2 Principe du maximum d'entropie

Le principe du maximum d'entropie a été énoncé par Jaynes [Jay57]. Considérons une partie  $I$  de  $\mathbb{N}$  et une loi de probabilité discrète  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i \in I}$  sur un ensemble discret  $E = (x_i)_{i \in I}$ . Nous avons  $\sum_{i \in I} \mu_i = 1$  et si on considère  $m$  fonctions  $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , on suppose que

$$\mathbb{E}[f_j] = \sum_{i \in I} f_j(x_i) \mu_i < +\infty \quad \forall 1 \leq j \leq m .$$

L'entropie  $S(\boldsymbol{\mu})$  mesurant le manque d'information d'un système, l'idée de Jaynes est de maximiser  $S(\boldsymbol{\mu})$  sous les  $m + 1$  contraintes suivantes :

$$\sum_{i \in I} \mu_i - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} f_j(x_i) \mu_i - \mathbb{E}[f_j] = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m. \quad (2.1)$$

On utilise pour cela la méthode des multiplicateurs de Lagrange  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$  correspondant aux  $m + 1$  contraintes et on exprime le Lagrangien de  $\boldsymbol{\mu}$  :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}) = S(\boldsymbol{\mu}) - (\lambda_0) \left( \sum_{i \in I} \mu_i - 1 \right) - \sum_{i \in I} \lambda_j (f_j(x_i) \mu_i - \mathbb{E}[f_j]) \quad (2.2)$$

Les équation données par  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu(x)}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \boldsymbol{\mu}) = 0 \quad \forall x \in E$  permettent de déterminer la loi  $\boldsymbol{\mu}$ .

### 2.1.3 La mesure de Gibbs

Nous proposons un exemple d'utilisation du principe du maximum d'entropie. Pour ce faire nous allons d'abord définir la mesure de Gibbs.

#### Définition 2.2 (Mesure de Gibbs)

Soit  $E$  un ensemble fini,  $\beta > 0$  une constante et  $V : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $E$ . La mesure de Gibbs est donnée par :

$$\Pi_\beta(x) = \frac{e^{-\beta V(x)}}{K(\beta)} \quad \forall x \in E$$

où  $K(\beta) = \sum_{x \in E} e^{-\beta V(x)}$  est une constante de normalisation.  $\square$

Une conceptualisation "intuitive" de la mesure de Gibbs consiste à voir  $\beta$  comme l'inverse d'une température et si elle est positive,  $V$  est vue comme la fonction d'énergie des états. Cette vision est "naturelle" quand on pense par exemple à l'algorithme du recuit simulé (voir [Duf96]).

Passons à l'application du principe de maximum d'entropie. Considérons l'énergie moyenne d'un système que l'on fixe égale à  $C$ , i.e.  $\int_E V(x)d\mu(x) = C$ . Nous voulons maximiser  $S(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{x \in E} \mu(x) \ln(\mu(x))$  sous les contraintes  $\sum_{x \in E} \mu(x) = 1$  et  $\sum_{x \in E} V(x) \mu(x) = C$ . On considère les multiplicateurs de Lagrange  $(\beta, b)$  et le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}(\beta, b, \boldsymbol{\mu}) = S(\boldsymbol{\mu}) - \beta \left( \sum_{x \in E} V(x) \mu(x) - C \right) - b \left( \sum_{x \in E} \mu(x) - 1 \right) \quad (2.3)$$

Les équations données par  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu(x)}(\beta, b, \boldsymbol{\mu}) = 0$  donnent que  $\forall x \in E, \ln(\mu(x)) + 1 + \beta V(x) + b = 0$ . On trouve donc que  $\mu(x) = \Pi_\beta(x)$  et la constante  $\beta$  est donc déterminée par la condition de normalisation couplée à la deuxième contrainte :

$$\sum_{x \in E} V(x) \frac{e^{-\beta V(x)}}{K(\beta)} = C. \quad (2.4)$$

La loi de Gibbs, appelée aussi loi exponentielle, est la mesure d'entropie maximale parmi toutes les lois ayant la même moyenne. Cet exemple est très important pour comprendre ce qui va suivre et notamment le résultat du principe du maximum d'entropie dans 2.2.2.3.

## 2.2 L'approche non-paramétrique en mécanique

### 2.2.1 Mise en place de la méthode

La méthode développée par C.Soize [Soi00, Soi01, Soi02, Soi03, SH04, Soi05] consiste à construire un modèle probabiliste sur la base d'une résolution déterministe, par exemple une analyse en modes normaux. L'idée est d'utiliser le caractère défini positif des matrices de masse  $\mathbf{M}$ , de dissipation  $\mathbf{D}$  et de raideur  $\mathbf{K}$ , de conserver les méthodes de l'analyse modale déterministe pour construire à partir de là des matrices stochastiques  $\widetilde{\mathbf{M}}$ ,  $\widetilde{\mathbf{D}}$  et  $\widetilde{\mathbf{K}}$ , qui seront considérées comme des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})^1$ . Après avoir défini une mesure sur cet ensemble, on peut considérer l'espérance de  $\widetilde{\mathbf{M}}$ ,  $\widetilde{\mathbf{D}}$  et  $\widetilde{\mathbf{K}}$  et on prend pour référence que  $\mathbb{E}[\widetilde{\mathbf{M}}] = \mathbf{M}$ ,  $\mathbb{E}[\widetilde{\mathbf{D}}] = \mathbf{D}$  et  $\mathbb{E}[\widetilde{\mathbf{K}}] = \mathbf{K}$ , ainsi que la finitude des moments d'ordre 2. Il est possible alors de déterminer les lois de  $\widetilde{\mathbf{M}}$ ,  $\widetilde{\mathbf{D}}$  et  $\widetilde{\mathbf{K}}$  en utilisant le principe de maximum d'entropie.

Cette méthode générale trouve de multiples applications, dès lors que l'on possède un modèle réduit déterministe, qui est alors pris comme modèle réduit moyen. Nous allons illustrer cette approche non-paramétrique sur un problème classique, mais nous indiquerons au cours de l'exposé les éventuelles extensions possibles.

## 2.2.2 Probabilités sur $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$

Il convient à présent de préciser le cadre des probabilités sur un ensemble de matrices que l'on va être amené à employer, ce notamment pour pouvoir définir rigoureusement l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Pour y parvenir, nous allons rappeler comment on définit une mesure sur  $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ , puis nous verrons comment on peut obtenir une mesure de probabilité sur  $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$ , en utilisant le principe de maximisation d'entropie.

### 2.2.2.1 Mesure sur $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$

La théorie des matrices aléatoires a été introduite par Wigner dans les années cinquante puis reprise plus tard par Dyson et Mehta, dans le cadre de la physique nucléaire. La théorie des matrices aléatoires dans  $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$  est calquée sur la théorie générale dans  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  [Soi03]. Nous allons donc rappeler brièvement la manière de définir une mesure sur  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , puis nous passerons au cas particulier de cette mesure sur  $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ .

Nous allons munir  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  d'une structure euclidienne. On considère le produit scalaire sur  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2$  suivant :  $\langle\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle\rangle = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T)$  et on appelle norme de Frobenius la norme associé  $\|\mathbf{A}\|_F = \langle\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle\rangle^{1/2}$ . Si on décompose un élément  $\mathbf{x}$  sur la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \mathbf{e}_i$ , on définit la mesure  $d\mathbf{x}$  comme la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens d'un pavé de  $\mathbb{R}^n$  par  $d\mathbf{x} = \prod_{1 \leq i \leq n} dx_i$ .

On considère donc à présent la famille des  $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^T)_{1 \leq i \leq j \leq n}$ .

Comme  $\langle\langle E_{i,i'}, E_{j,j'} \rangle\rangle = \delta_{i,i'} \delta_{j,j'}$ , c'est une base orthonormale de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Par extension au cas de  $\mathbb{R}^n$ , si  $\mathbf{A} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \mathbf{A}_{i,j} E_{i,j}$ , on définit de manière analogue une mesure  $d$  sur  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  par

$$d\mathbf{A} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} d\mathbf{A}_{i,j}.$$

Le cas de  $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$  est un cas particulier de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . On considère la famille  $(E'_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$  définie par  $E'_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^T + \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^T)_{1 \leq i \leq j \leq n}$  qui est une base orthonormale de  $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ . Si on décompose un élément sur cette base  $\mathbf{A} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \mathbf{A}'_{i,j} E'_{i,j}$ , on peut relier les coefficients  $\mathbf{A}'_{i,j}$  aux coefficients

$\mathbf{A}_{i,j}$  et on a :  $\mathbf{A}'_{i,i} = \mathbf{A}_{i,i}$  et  $\mathbf{A}'_{i,j} = \sqrt{2} \mathbf{A}_{i,j}$ . Donc la mesure  $d'$  sur  $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$  se définit par

$$d'\mathbf{A} = 2^{n(n-1)/4} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} d\mathbf{A}_{i,j}.$$

### 2.2.2.2 Mise en place d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$

Les conditions algébriques des matrices définies positives vont conditionner la loi de probabilité que l'on cherche à définir sur  $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Nous noterons la loi de probabilité  $P_{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{A}}) = p_{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{A}}) d'\tilde{\mathbf{A}}$  qui va de  $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$  dans  $[0, \infty[$ , définie sur la tribu borélienne de  $\mathbb{R}^{n^2}$  (où  $d'$  a été définie ci-dessus).



La variable aléatoire  $\tilde{\mathbf{A}}$  est à valeurs dans  $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Il est possible à présent de parler de l'espérance de  $\tilde{\mathbf{A}}$ , que l'on notera  $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{A}}]$ ,

Il n'y a que peu d'information disponible à ce stade. C'est pourquoi 3 conditions vont s'imposer pour déterminer  $P_{\tilde{\mathbf{A}}}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad p.s. \\ \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{A}}] = \mathbf{A}, \text{ où } \mathbf{A} \in \mathbb{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ est donnée.} \\ \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\|_{\mathbb{F}}^2] < \infty \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{A}}] = \mathbf{A}, \text{ où } \mathbf{A} \in \mathbb{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ est donnée.} \quad (2.6)$$

$$\mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\|_{\mathbb{F}}^2] < \infty \quad (2.7)$$

La condition (2.5) est une contrainte algébrique, (2.6) exprime le fait que le modèle est construit pour une valeur moyenne arbitraire, qui reste la seule information disponible, et la condition (2.7) est là pour garantir que la variable aléatoire est au moins d'ordre 2. La condition (2.7) se ramène après des calculs détaillés dans [Soi00] à  $\mathbb{E}[\ln(\det(\tilde{\mathbf{A}}))] = \nu$  où  $\nu < \infty$ .

Si on reporte les conditions (2.6) et (2.7) sur  $P_{\tilde{\mathbf{A}}}$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} p_{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{A}}) d'\tilde{\mathbf{A}} = 1 \\ \int_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} \tilde{\mathbf{A}} p_{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{A}}) d'\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \in \mathbb{S}_n^+(\mathbb{R}) \\ \int_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} \ln(\det(\tilde{\mathbf{A}})) p_{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{A}}) d'\tilde{\mathbf{A}} = \nu \quad \text{où } \nu < \infty \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$\int_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} \tilde{\mathbf{A}} p_{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{A}}) d'\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \in \mathbb{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad (2.9)$$

$$\int_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} \ln(\det(\tilde{\mathbf{A}})) p_{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{A}}) d'\tilde{\mathbf{A}} = \nu \quad \text{où } \nu < \infty \quad (2.10)$$

Nous allons déterminer  $P_{\tilde{\mathbf{A}}}$  sous les contraintes (2.8), (2.9) et (2.10) en faisant appel au principe du maximum d'entropie.

### 2.2.2.3 Application du principe du maximum d'entropie

La méthode va être appliquée pour déterminer  $P_{\tilde{\mathbf{A}}}$ , en notant que l'entropie sur  $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$  se définit par  $S(P_{\tilde{\mathbf{A}}}) = - \int_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} p(\tilde{\mathbf{A}}) \ln(p(\tilde{\mathbf{A}})) d'\tilde{\mathbf{A}}$ . Nous allons ainsi considérer les  $n^2 + 2$  contraintes données par (2.8), (2.9) et (2.10), donc les multiplicateurs de Lagrange suivants:  $\mu_0 - 1$ ,  $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$  et  $1 - \lambda$ .  $\mathbf{M}$  est bien sûr définie positive.

On note  $f_0 = \int_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} p_{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{A}}) d'\tilde{\mathbf{A}} - 1$  la fonction correspondant à la contrainte (2.8),

$f_{n^2+1} = \int_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} \ln(\det(\tilde{\mathbf{A}})) p_{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{A}}) d'\tilde{\mathbf{A}} - \nu$  la fonction correspondant à la contrainte (2.10),

et  $\mathbf{F} = \int_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} \tilde{\mathbf{A}} p_{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{A}}) d'\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}$  la matrice regroupant les contraintes induites par (2.9).

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(P_{\tilde{\mathbf{A}}}) = S(P_{\tilde{\mathbf{A}}}) - (\mu_0 - 1)f_0 + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \mathbf{M}_{i,j} \mathbf{F}_{i,j} + (1 - \lambda)f_{n^2+1}. \quad (2.11)$$

Le calcul du maximum de (2.11) n'est pas toujours détaillé dans les travaux de C.Soize. Cependant, l'observation des contraintes (2.8), (2.9) et (2.10) nous permet de remarquer que l'on recherche une loi qui maximise l'entropie parmi toutes les lois ayant une moyenne donnée par

(2.9). En effet, les contraintes (2.8) et (2.10) sont des contraintes qui n'émanent pas de l'observable, mais de la construction du modèle probabiliste en lui-même.

A ce stade nous nous retrouvons dans la situation présentée au 2.1.3 et la loi que nous cherchons est une loi de Gibbs généralisée à un ensemble de matrice dans le cadre défini en 2.2.2.1.

Le maximum d'entropie est donc réalisé pour la loi  $P_{\tilde{\mathbf{A}}}$  suivante :

$$P_{\tilde{\mathbf{A}}} = \mathbb{1}_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} \exp\left(-\mu_0 - \ll \mathbf{M}, \tilde{\mathbf{A}} \gg - (1 - \lambda) \ln\left(\det(\tilde{\mathbf{A}})\right)\right) \quad (2.12)$$

Les intégrations s'effectuent bien sur  $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$  car  $P_{\tilde{\mathbf{A}}}$  est définie sur cet ensemble de matrices. Le produit scalaire  $\ll , \gg$  utilisé est celui de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ .

#### 2.2.2.4 Expression de la loi

La loi donnée par (2.12) est très générale et ce n'est pas encore une loi de probabilité pour  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$ . La constante  $\exp(-\mu_0)$  va servir à normaliser  $P_{\tilde{\mathbf{A}}}$  pour que (2.8) soit vérifiée. On a donc :

$$1/K_{\tilde{\mathbf{A}}} = \exp(\mu_0) = \int_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} \det(\tilde{\mathbf{A}})^{\lambda-1} e^{-\ll \mathbf{M}, \tilde{\mathbf{A}} \gg} d'\tilde{\mathbf{A}} = J(\lambda, \mathbf{M}). \quad (2.13)$$

La fonction  $J(\lambda, \mathbf{M})$  s'appelle l'intégrale de Siegel et constitue une généralisation de la fonction  $\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt$ . Elle possède une expression analytique que voici :

$$J(\lambda, \mathbf{M}) = (2\pi)^{n(n-1)/4} \frac{\prod_{l=1}^n \Gamma\left(\frac{n-l+2\lambda}{2}\right)}{\det(\mathbf{M})^{(n-1+2\lambda)/2}} \quad (2.14)$$

Pour manipuler plus aisément une loi de probabilité, il est commode de considérer sa fonction caractéristique. Celle de  $P_{\tilde{\mathbf{A}}}$  s'écrit :

$$\forall \mathbf{\Lambda} \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R}) \quad \Phi_{\tilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{\Lambda}) = \int_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} e^{-i \ll \mathbf{\Lambda}, \tilde{\mathbf{A}} \gg} p_{\tilde{\mathbf{A}}}(\tilde{\mathbf{A}}) d'\tilde{\mathbf{A}} \quad (2.15)$$

C'est une transformée de Fourier qui prend ses valeurs dans  $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{\Lambda}) &= \int_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} e^{-i \ll \mathbf{\Lambda}, \tilde{\mathbf{A}} \gg} K_{\tilde{\mathbf{A}}} \det(\tilde{\mathbf{A}})^{\lambda-1} e^{-\ll \mathbf{M}, \tilde{\mathbf{A}} \gg} d'\tilde{\mathbf{A}} \\ &= \frac{J(\lambda, \mathbf{M} + i\mathbf{\Lambda})}{J(\lambda, \mathbf{M})} = \left( \frac{1}{\det(I_n + i\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Lambda})} \right)^{(n-1+2\lambda)/2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

où on a factorisé au dénominateur par  $\det(\mathbf{M})$  dans l'expression donnée par (2.14).

L'expression (2.16) de la fonction caractéristique peut être différenciée en  $\mathbf{\Lambda}$  pour obtenir les expressions des 2 premiers moments de  $\tilde{\mathbf{A}}$ , car nous avons supposé que  $\tilde{\mathbf{A}}$  était au moins d'ordre 2. La différentiation d'un déterminant est un grand classique de calcul différentiel qui vaut

$\mathcal{D}_{\det}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} = \det(\mathbf{A}) \operatorname{tr}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{H})$  et de plus nous avons  $\det(\mathbf{I}_n + \mathbf{H}) = 1 + \operatorname{tr}(\mathbf{H}) + O(\|\mathbf{H}\|_F^2)$  quand  $\|\mathbf{H}\|_F \rightarrow 0$ .

En utilisant donc la propriété que  $[\mathcal{D}_{\Phi_{\tilde{\mathbf{A}}}}(\mathbf{A})]_{\mathbf{A}=\{0\}} = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{A}}]$  et en se remémorant la contrainte (2.9), la matrice  $\mathbf{M}$  peut s'exprimer (après calculs) en fonction de  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{M} = \frac{n-1+2\lambda}{2} \mathbf{A}^{-1} \quad (2.17)$$

En appliquant ainsi toutes les conditions énoncées, il ne reste plus qu'un seul paramètre qui ne soit pas fixé, à savoir  $\lambda$ . On peut alors exprimer la loi de  $\tilde{\mathbf{A}}$  :

$$P_{\tilde{\mathbf{A}}} = \mathbb{1}_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} K_{\tilde{\mathbf{A}}} \det(\tilde{\mathbf{A}})^{\lambda-1} e^{-\frac{n-1+2\lambda}{2} \langle \mathbf{A}^{-1}, \tilde{\mathbf{A}} \rangle} \quad (2.18)$$

où  $\mathbf{M}$  a aussi été remplacé au préalable dans  $K_{\tilde{\mathbf{A}}}$ .

### 2.2.2.5 Paramètre de contrôle

C'est uniquement le paramètre  $\lambda$  (qui lui même dépend de  $\nu$ ) qui sert de contrôle, mais on va lui préférer une autre quantité qui a un sens plus pertinent vis-à-vis de la dispersion de  $P_{\tilde{\mathbf{A}}}$ . On pose ainsi :

$$\delta_{\tilde{\mathbf{A}}} = \left[ \frac{\mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}\|_F^2]}{\|\mathbf{A}\|_F^2} \right]^{1/2} \quad (2.19)$$

On peut montrer que :

$$\delta_{\tilde{\mathbf{A}}} = \left[ \frac{1}{n-1+2\lambda} \left( 1 + \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{A}^2)}{\operatorname{tr}(\mathbf{A})^2} \right) \right]^{1/2} \quad (2.20)$$

Ainsi le paramètre qui contrôle la dispersion de la matrice sera  $\delta_{\tilde{\mathbf{A}}}$ . On peut alors exprimer  $\lambda$  en fonction  $\delta_{\tilde{\mathbf{A}}}$  et remplacer le tout dans (2.18).

## 2.2.3 Modèle réduit déterministe

### 2.2.3.1 Résolution déterministe

On étudie un problème sur un ouvert  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ , avec des conditions de Dirichlet sur  $\Gamma$ . On suppose que le système est soumis à une force extérieure appartenant à  $L^2(\Omega) \cup L^2(\Gamma)$ . Après une formulation variationnelle du problème, on obtient dans le domaine temporel :

$$m(\ddot{u}, v) + d(\dot{u}, v) + k(u, v) = g(v). \quad (2.21)$$

où  $u$  appartiennent à l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}_0^1$  muni de son produit scalaire classique et  $v$  à son dual. Les formes bilinéaires  $m$ ,  $d$  et  $k$  sont symétriques, continues et coercives. La forme linéaire  $g$  est également continue sur  $\mathcal{H}_0^1$ . Le théorème de Lax-Milgram donne l'existence et l'unicité d'une solution  $f$  dans  $\mathcal{H}_0^1$  telle que  $g(v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^1$ .

### 2.2.3.2 Résolution modale

On utilise une approche de Ritz-Galerkin en projetant la solution sur le sous-espace de dimension finie  $\mathbf{H}_n \subset \mathcal{H}_0^1$  engendré par les formes propres  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  associées aux pulsations propres  $0 < \omega_1^2 < \dots < \omega_n^2$ . En utilisant les notations des formes bilinéaires,  $(\lambda_k, \varphi_k)$  sont solutions du problème aux valeurs propres suivant :  $m(\varphi_i, \varphi_j) = \lambda_i \delta_{ij}$  et  $k(\varphi_i, \varphi_j) = \lambda_i \omega_i^2 \delta_{ij}$ .

Le projeté s'écrit donc  $u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i^n(t) \varphi_i(x)$  (ou  $u_n(x, \omega) = \sum_{i=1}^n q_i^n(\omega) \varphi_i(x)$  dans le domaine de Fourier) où  $\mathbf{q}^n(t) = (q_i^n(t))_{1 \leq i \leq n}$  (respectivement  $\mathbf{q}^n(\omega) = (q_i^n(\omega))_{1 \leq i \leq n}$ ) désigne le vecteur des coordonnées généralisées. En notant le second membre en base modale  $\mathbf{f}^n(t) = (g(\varphi_i, t))_{1 \leq i \leq n}$  (ou  $\mathbf{f}^n(\omega) = (g(\varphi_i, \omega))_{1 \leq i \leq n}$ ), le problème s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^n(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}^n(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}^n(t) = \mathbf{f}^n(t), & (2.22) \\ \text{ou} \\ [-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{D} + \mathbf{K}] \mathbf{q}^n(\omega) = \mathbf{f}^n(\omega). & (2.23) \end{cases}$$

Les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{K}$  sont exprimées en base modale et les propriétés suivantes ont lieu :

$$\mathbf{M}_{i,j} = \lambda_i \delta_{ij}, \quad \mathbf{K}_{i,j} = \lambda_i \omega_i^2 \delta_{ij}, \quad \mathbf{D}_{i,j} = d(\varphi_i, \varphi_j).$$

## 2.2.4 Modèle réduit probabiliste

### 2.2.4.1 Construction du problème

On écrit  $U_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \{\tilde{q}_i^n\}_t \varphi_i(x)$  où  $\tilde{\mathbf{q}}_t^n = (\{\tilde{q}_i^n\}_t)_{1 \leq i \leq n}$  est un processus stochastique à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , pour lequel on choisit les conditions initiales  $\tilde{\mathbf{q}}_0^n = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0^n = 0$ . On garde donc les modes propres déterministes comme "support" de définition du phénomène aléatoire. Ce qui change en formulant le problème de la sorte, c'est que les matrices du problème deviennent aléatoires elles aussi. Il est possible de transposer le problème dans le domaine fréquentiel en définissant un processus stochastique indicé sur  $\omega$ . Le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_t^n + \widetilde{\mathbf{D}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_t^n + \widetilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}}_t^n = \mathbf{f}^n(t), & (2.24) \\ \text{ou} \\ [-\omega^2\widetilde{\mathbf{M}} + i\omega\widetilde{\mathbf{D}} + \widetilde{\mathbf{K}}] \tilde{\mathbf{q}}_\omega^n = \mathbf{f}^n(\omega). & (2.25) \end{cases}$$

où à présent  $\widetilde{\mathbf{M}}$ ,  $\widetilde{\mathbf{D}}$  et  $\widetilde{\mathbf{K}}$  sont des variables aléatoires d'ordre 2 à valeurs dans  $\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

Le modèle réduit déterministe va être pris comme *modèle réduit moyen probabiliste* et en référence au travail exposé précédemment dans 2.2.2, nous considérons les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\widetilde{\mathbf{M}}] = \mathbf{M}, \quad \mathbb{E}[\widetilde{\mathbf{D}}] = \mathbf{D}, \quad \mathbb{E}[\widetilde{\mathbf{K}}] = \mathbf{K}, & (2.26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\|\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\|_F^2] < +\infty, \quad \mathbb{E}[\|\widetilde{\mathbf{D}}^{-1}\|_F^2] < +\infty, \quad \mathbb{E}[\|\widetilde{\mathbf{K}}^{-1}\|_F^2] < +\infty. & (2.27) \end{cases}$$

Nous allons développer maintenant la résolution en se focalisant sur  $\widetilde{\mathbf{M}}$ , en sachant que la démarche s'applique de manière identique à  $\widetilde{\mathbf{D}}$  et à  $\widetilde{\mathbf{K}}$ .

### 2.2.4.2 Solution du problème

On connaît d'après (2.18) la loi de  $\widetilde{\mathbf{M}}$ . On peut à ce stade un peu simplifier la résolution en considérant la décomposition de Choleski de  $\mathbf{M}$ . En effet  $\mathbf{M} \in \mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$ , donc il existe  $\mathbf{L}_M$  telle que  $\mathbf{M} = \mathbf{L}_M^T \mathbf{L}_M$ . Il suffit alors de considérer la matrice  $\widetilde{\mathbf{G}}_M$  telle que  $\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{L}_M^T \widetilde{\mathbf{G}}_M \mathbf{L}_M$  et on a la propriété  $\mathbb{E}[\widetilde{\mathbf{G}}_M] = \mathbf{G}_M = \mathbf{I}_n$ . Il est donc possible de restreindre le problème à la loi de  $\widetilde{\mathbf{G}}_M$ , ce qui signifie que le paramètre de contrôle  $\delta_{\widetilde{\mathbf{M}}}$  est proportionnel à l'écart-type de  $\widetilde{\mathbf{G}}_M$ . En reprenant (2.18) pour  $\widetilde{\mathbf{G}}_M$  avec le paramètre  $\delta_{\widetilde{\mathbf{M}}}$  on obtient :

$$P_{\widetilde{\mathbf{G}}_M} = \mathbb{1}_{\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})} K_{\widetilde{\mathbf{G}}_M} \det(\widetilde{\mathbf{G}}_M) \frac{(1 - \delta_{\widetilde{\mathbf{M}}}^2)(n+1)}{2\delta_{\widetilde{\mathbf{M}}}^2} \exp\left(-\frac{n+1}{2\delta_{\widetilde{\mathbf{M}}}^2} \text{tr}(\widetilde{\mathbf{G}}_M)\right) \quad (2.28)$$

$$\text{où } K_{\widetilde{\mathbf{G}}_M} = \left(\frac{n+1}{2\delta_{\widetilde{\mathbf{M}}}^2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2\delta_{\widetilde{\mathbf{M}}}^2}} \frac{(2\pi)^{-n(n-1)/4}}{\prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2\delta_{\widetilde{\mathbf{M}}}^2} + \frac{1-j}{2}\right)} \quad (2.29)$$

Dans la pratique on doit se donner  $0 < \delta_{\widetilde{\mathbf{M}}} < \sqrt{\frac{1}{(n+1)(n+5)}}$ .

Le problème probabiliste est donc décrit complètement en fonction de la "dispersion" que l'on s'autorise sur chacune des matrices  $\widetilde{\mathbf{M}}$ ,  $\widetilde{\mathbf{D}}$  et à  $\widetilde{\mathbf{K}}$ .

### 2.2.4.3 Résolution numérique

Nous allons nous placer dans une résolution dans le domaine de Fourier et nous considérons (2.25). La fonction de réponse en fréquence solution du problème est donnée par :

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \sum_{\omega} \left[ -\omega^2 \widetilde{\mathbf{M}} + i\omega \widetilde{\mathbf{D}} + \widetilde{\mathbf{K}} \right]^{-1} \quad (2.30)$$

Pour pouvoir manipuler (2.30), il est nécessaire d'identifier les paramètres de dispersion  $\delta_{\widetilde{\mathbf{M}}}$ ,  $\delta_{\widetilde{\mathbf{D}}}$  et  $\delta_{\widetilde{\mathbf{K}}}$ . L'article [Soi05] dresse un bilan de la méthode non-paramétrique et propose une méthode pour identifier à partir de données expérimentales ces paramètres de dispersion des matrices.

Comme on dispose de la loi, il est possible d'utiliser une technique de Monte-Carlo et de générer des tirages matrices aléatoires  $\in \mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$  selon les lois  $P_{\widetilde{\mathbf{G}}_M}$ ,  $P_{\widetilde{\mathbf{G}}_D}$  et  $P_{\widetilde{\mathbf{G}}_K}$ , en repassant ensuite grâce aux matrices fournies par la décomposition de Choleski à des tirages de  $\widetilde{\mathbf{M}}$ ,  $\widetilde{\mathbf{D}}$  et  $\widetilde{\mathbf{K}}$ . La méthode de Monte-Carlo donne alors la moyenne  $\mathbb{E}[\widetilde{\mathbf{H}}]$  ou permet d'estimer un intervalle de confiance (à  $\omega$  fixé) pour une probabilité  $\alpha$  donnée, c'est à dire une  $\alpha$ -enveloppe.

Le technique de Monte-Carlo est ici plus fine que dans le cas général car elle nous préserve de nombreux cas aberrants lors des tirages qu'il aurait fallu traités par une méthode de rejet qui est alors délicate à mettre en place et très peu performante. Ici le tirage est conditionné par les densités issues de (2.29) ce qui rend la technique beaucoup plus pertinente.

## 2.3 Identification non-paramétrique

Il existe une littérature importante qui étudie les différentes méthodes qui permettent de dresser une statistique à partir d'un ensemble de données expérimentales. On se donne comme point de départ des grandeurs observables sans émettre d'hypothèses *a priori* sur le modèle probabiliste sous-jacent. On va donc chercher à mettre en place des estimateurs plutôt que des tests (voir A.3).

Le problème récurrent lorsque l'on cherche à mettre en place un estimateur, c'est que l'observable n'est pas nécessairement représentatif et on est à chaque fois confronté à un biais qu'il faut pouvoir estimer lui aussi. Nous ne présenterons pas une revue complète des méthodes d'identification non-paramétriques, mais nous allons énoncer les étapes importantes à la construction d'un estimateur qui permettent d'analyser des données expérimentales.

### 2.3.1 Estimateur non-paramétrique de Parzen-Rosenblatt

#### 2.3.1.1 Définition et propriétés

Nous allons présenter l'estimateur le plus utilisé, qui est celui de Parzen-Rosenblatt [Ros56], mais il en existe d'autres (voir 2.3.2 et [PU99]). La construction de ces estimateurs se font toujours à l'aide d'un opérateur (a fortiori discret) défini à partir d'un "noyau". Ce dernier peut être vu comme une fonction de pondération qui permet d'estimer en un point  $z_0$  l'importance de l'information en un autre point  $z \neq z_0$  vis-à-vis de sa distance à  $z_0$ . La définition de ces estimateurs repose également sur le choix d'un pas de discrétisation de cet opérateur, on parle de largeur de fenêtre (de Parzen) ou de largeur de bande. Voici la définition :

#### Définition 2.3 (Estimateur de Parzen-Rosenblatt)

Si on se donne un ensemble de points  $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^n$  ainsi qu'une largeur de fenêtre  $h > 0$ , la quantité suivante :

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{nh} \sum_i \mathcal{K} \left( \frac{z - z_i}{h} \right) \quad (2.31)$$

est appelé estimateur de Parzen-Rosenblatt de la densité de probabilité  $f$  au point  $z$ . L'application  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est appelé noyau de Parzen-Rosenblatt. Ce dernier doit vérifier les conditions suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} x \mathcal{K}(x) dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathcal{K}(x) dx = \sigma^2 < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}^2(x) dx < \infty. \quad (2.32)$$

La méthode va donc être de prendre pour hypothèse que les  $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$  constituent des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire  $\mathbf{z}$  de densité  $f$ . Nous allons supposer pour la suite que la loi  $f$  est continue et que  $f'' \in L^2(\mathbb{R})$ . La formule (2.31) permet donc de donner une estimation

ponctuelle de  $f$ .

A noter que les conditions que l'on impose à  $\mathcal{K}$  sont très analogues à (2.8), (2.9) et (2.10). De plus  $\mathcal{K}$  n'est pas nécessairement une densité de probabilité comme nous le verrons par la suite.

Nous avons alors des propriétés vérifiées automatiquement par l'estimateur lorsque l'on fait tendre la largeur de la fenêtre  $h_n$  vers 0 :

**Proposition 2.1:**

On suppose que  $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et que  $n h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

$$(i) \text{ biais } [\hat{f}(z)] = \mathbb{E}[\hat{f}(z) - f(z)] = \frac{h_n^2}{2} \sigma^2 f''(z) + o(h_n^2)$$

$$(ii) \text{ Var } [\hat{f}(z)] = \mathbb{E}\left[\left(\hat{f}(z) - \mathbb{E}[\hat{f}(z)]\right)^2\right] = \frac{f(z)}{n h_n} \|\mathcal{K}\|_2^2 + o\left(\frac{1}{n h_n}\right) \quad \square$$

Les sources d'"erreurs" que l'on commet avec un tel estimateur reposent sur trois grandeurs. La première est la variance  $\sigma^2$  de la variable aléatoire considérée (qui intervient dans le biais), la deuxième est la norme  $\|\cdot\|_2$  du noyau (qui intervient dans la variance de l'estimateur) et la troisième est la largeur de la fenêtre  $h$  (qui intervient dans le biais et la variance). La variance de la variable aléatoire  $\mathbf{z}$  considérée ne peut pas être contrôlée, car elle appartient aux données que l'on observe.

Il convient ainsi de choisir au mieux les paramètres restants pour disposer d'un estimateur consistant, c'est-à-dire que l'on veut que  $\text{biais}[\hat{f}(z)]$  et  $\text{Var}[\hat{f}(z)]$  tendent simultanément vers 0 aussi vite que possible quand  $n \rightarrow \infty$ .

Dans la pratique, le choix des largeurs de fenêtre est bien plus déterminant que celui du noyau. La méthode la plus répandue est celle présente ci-après (2.3.1.2) où l'on cherche à minimiser l'erreur quadratique. Il existe également une approche bayésienne qui est présentée dans 2.3.1.4.

### 2.3.1.2 Choix d'un noyau puis d'une fenêtre

La méthode la plus utilisée est de choisir un noyau, puis d'adapter la largeur de la fenêtre en fonction de ce noyau afin de minimiser l'erreur quadratique. L'erreur quadratique  $\mathcal{E}_2$  de l'estimateur  $\hat{f}$  s'évalue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(\hat{f}, f)(z) &= \mathbb{E}\left[\left(\hat{f}(z) - f(z)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\hat{f}(z) - \mathbb{E}[\hat{f}(z)] + \mathbb{E}[\hat{f}(z)] - f(z)\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\hat{f}(z) - \mathbb{E}[\hat{f}(z)]\right)^2\right] + \left(\mathbb{E}[\hat{f}(z) - f(z)]\right)^2 = \text{Var}[\hat{f}(z)] + \text{biais}[\hat{f}(z)]^2 \\ &= \frac{f(z)}{n h_n} \|\mathcal{K}\|_2^2 + \frac{h_n^4}{4} \sigma^4 f''(z)^2 + o\left(\frac{1}{n h_n} + h_n^2\right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$\mathcal{E}_2(\hat{f}, f)$  s'exprime ainsi comme la somme de la variance et du carré du biais.

Considérons la cas le plus répandu qui est celui d'un noyau gaussien centré réduit de la forme

$$\mathcal{K}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Il est évident que  $\|\mathcal{K}\|_2^2 = 1$ , mais pour la plupart des noyaux, il est possible d'obtenir également cette propriété.

Nous allons donc à présent minimiser l'expression (2.33) par rapport à la largeur de la fenêtre  $h_n$ . Deux dérivations successives par rapport à  $h_n$  montrent rapidement que la largeur de fenêtre optimale est donnée par  $h_{\text{opt}} = f(z)^{1/5} f''(z)^{-2/5} \sigma^{-4/5} n^{-1/5}$  et qu'alors  $\mathcal{E}_2(\hat{f}, f) = 5/4 f(z)^{4/5} f''(z)^{2/5} \sigma^{4/5} n^{-4/5}$ .

On constate que  $h_{\text{opt}}$  vérifie les hypothèses de la proposition 2.1. Cependant dans la pratique nous n'avons évidemment pas accès à cette valeur optimale, car nous cherchons précisément à estimer  $f(z)$ , et les valeurs de  $\sigma$  et  $f''(z)$  sont également inaccessibles. On choisit donc  $h_n = \frac{K}{n^{1/5}}$  où  $K$  est une constante fixée. On remarque au passage que la vitesse de convergence de l'estimateur  $\hat{f}$  est en  $O\left(\frac{1}{n^{4/5}}\right)$  et est plus faible que pour une méthode paramétrique dont la vitesse est donnée par le théorème 1.3 dans la loi forte des grands nombres (dans le théorème 1.2), qui est en  $O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$ .

### 2.3.1.3 Autres noyaux possibles

Nous avons pour l'instant évoqué des noyaux unidimensionnels. Une extension naturelle et pratique à un pavé  $J_d$  de  $\bar{\mathbb{R}}^d$  est de considérer le produit de  $d$  fois le même noyau unidimensionnel comme dans [Sco92]:  $\mathcal{K}(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^d \mathcal{K}(z_i)$ . L'estimateur  $\hat{f}(\mathbf{z})$  est donc celui d'une loi sur  $\bar{\mathbb{R}}^d$ , on choisit  $d$  largeurs de fenêtre  $(h_j)_{j=1..d}$  et l'estimateur a pour expression :

$$\hat{f}(\mathbf{z}) = \frac{1}{n h_1 \dots h_d} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^d \mathcal{K}\left(\frac{z_j - z_{ij}}{h_j}\right) \quad (2.34)$$

où  $z_{ij}$  désigne tous les points qui sont dans la même dimension que  $z_j$ .

En prenant pour hypothèse que l'on possède les  $h_j$  optimaux, Epanechnikov [Epa69] a montré que le noyau suivant minimisait l'erreur quadratique :

$$\mathcal{K}_e(z_i) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}} - \frac{3z_i^2}{20\sqrt{5}} & \text{si } |z_i| < \sqrt{5} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.35)$$

Le choix d'un noyau en dimension  $d$  est également directement lié à son ordre, dont voici la définition :

**Définition 2.4 (ordre d'un noyau)**

On appelle ordre d'un noyau  $\mathcal{K}$  le réel  $r$  tel que  $\int_{J_d} x^i \mathcal{K}(x) dx < \infty$  pour  $i = 0$  et  $i = r$ .  $\square$



On montre alors que la convergence dans (2.34) est un  $O\left(n^{-\frac{r}{2r+d}}\right)$ . Il est alors possible de choisir un noyau d'ordre élevé qui peut prendre des valeurs négatives, qui ne constitue alors pas une densité de probabilité, mais qui assure une convergence plus rapide de l'estimateur et qui en réduit le biais. Notons qu'un tel choix de noyau présente de grandes analogies avec la décomposition d'un opérateur en ondelettes, en gardant à l'esprit qu'il faut pouvoir manipuler correctement ces outils sur un intervalle compact.

### 2.3.1.4 Estimateur de Nadaraya-Watson

La philosophie de cet estimateur est différente, car il repose sur une approche bayésienne (de l'anglais T.Bayes), c'est-à-dire sur la formule des probabilités conditionnelles. Nous ne faisons qu'évoquer cette approche dans le cadre des estimateurs non paramétriques, nous renverrons à [Hä90, PU99] pour plus de détails.

Si on se donne un couple  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  de variables aléatoires de loi conjointe  $f_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}$  et de lois marginales  $f_{\mathbf{X}}$  et  $f_{\mathbf{Y}}$ , on définit la fonction de régression :

#### Définition 2.5

On appelle fonction de régression la fonction  $m(x) = \mathbb{E}[\mathbf{Y} | \mathbf{X} = x]$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Il s'agit donc d'une espérance de  $\mathbf{Y}$  sachant  $\mathbf{X}$ . Pour définir un estimateur  $\hat{m}$  de  $m$ , on considère que l'on observe  $(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)$  une suite de variables aléatoires indépendantes de loi  $f_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}$ . Voici un estimateur de la fonction de régression :

#### Définition 2.6 (Estimateur de Nadaraya-Watson)

On appelle estimateur de Nadaraya-Watson la quantité suivante :

$$\hat{m}(x) = \frac{1}{n h \hat{f}(x)} \sum_{i=1}^n \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{X}_i - x}{h}\right) \mathbf{Y}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{X}_i - x}{h}\right) \mathbf{Y}_i}{\sum_{i=1}^n \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{X}_i - x}{h}\right)}$$

où  $\hat{f}(x)$  est un estimateur de la densité  $f$  en  $x$ .  $\square$

Ainsi si on veut recomposer une fonction  $C(X)$  inconnue dans un modèle donné tel que  $C_i = C(X_i) + \epsilon_i$ , on se base sur les données observables  $(\mathbf{C}_i, \mathbf{X}_i)$  et l'estimateur de Nadaraya-Watson s'écrit de la façon suivante :

$$\hat{C}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{X}_i - X}{h}\right) \mathbf{C}_i}{\sum_{i=1}^n \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{X}_i - X}{h}\right)}$$

Il s'agit donc d'un estimateur qui comme celui de Parzen-Rosenblatt fait intervenir un noyau  $\mathcal{K}$  et une largeur de fenêtre  $h$ . On peut donc chercher à optimiser  $h$  pour l'estimateur de Nadaraya-Watson. La méthode la plus employée consiste à minimiser une quantité  $\mathcal{E}_{ap}$  qui joue le rôle d'erreur quadratique a priori de la forme suivante:  $\mathcal{E}_{ap} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \rho(\mathbf{Y}_j - \hat{m}(\mathbf{X}_j))$ , où  $\rho$  est une fonction paire de dérivée bornée.

Il est revient au même de trouver les solutions  $z$  de  $\sum_{j=1}^n \omega_j(x) \rho'(\mathbf{Y}_j - z) = 0$  où les  $\omega_j(x)$  dépendent de  $\hat{m}$ . On omet le terme  $i = j$  dans la somme pour arriver à un estimateur "leave-one-out". Dans le cas de l'estimateur de Nadaraya-Watson, l'estimateur "leave-one-out"  $m_{-i}(x)$  est solution de :

$$\sum_{j \neq i} \rho'(\mathbf{Y}_j - \hat{m}_{-i}(x)) \frac{\mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{X}_j - x}{h}\right)}{n h \sum_{k=1}^n \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{X}_k - x}{h}\right)} = 0$$

La méthode dite de validation croisée consiste alors à minimiser la quantité  $\sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \hat{m}_{-i}(\mathbf{X}_i))^2$  par rapport à  $h$ .

Il existe de nombreuses variantes à cette recherche d'un  $h$  optimal, par exemple rajouter une fonction de pondération  $\mathcal{E}_{ap}$  pour éliminer les  $h$  trop petits. Les détails nous entraineraient trop loin et nous laissons le lecteur se reporter aux références déjà citées plus haut.

### 2.3.2 Autre estimateurs non-paramétriques

Nous présentons ici trois autres estimateurs de densité sans rentrer dans les détails de leurs comportements asymptotiques. Il est possible de montrer que chacun de ces estimateurs converge en moyenne quadratique.

Le premier estimateur s'obtient par la relation de récurrence suivante où la largeur de fenêtre varie.

$$\hat{f}_n(x) = \frac{n-1}{n} \hat{f}_{n-1}(x) + \frac{1}{n h_n} \mathcal{K}\left(\frac{x - \mathbf{X}}{h}\right)$$

Cette relation revient à la définition suivante :

**Définition 2.7 (Estimateur de Yamato)**

On appelle estimateur de Yamato la quantité suivante :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{h_j} \mathcal{K}\left(\frac{x - \mathbf{X}_j}{h_j}\right) \tag{2.36}$$

où  $h_n$  est une suite décroissante. □

Une autre idée est de sommer toutes les largeurs de fenêtre :

**Définition 2.8 (Estimateur de Deheuvels)**

On appelle estimateur de Deheuvels la quantité suivante :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n \mathcal{K} \left( x, \frac{x - \mathbf{X}_j}{h_j} \right) \quad \text{avec} \quad b_n = \sum_{j=1}^n h_j \quad (2.37)$$

Le noyau  $\mathcal{K}$  vérifiant  $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}(x,y) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$ . □

Enfin on peut combiner les deux pour obtenir :

**Définition 2.9 (Estimateur de Banon)**

On appelle estimateur de Banon la quantité suivante :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{b_j} \sum_{k=1}^j \mathcal{K} \left( \frac{x - \mathbf{X}_j}{h_j} \right) \quad \text{avec} \quad b_n = \sum_{j=1}^n h_j \quad (2.38)$$

Il est possible pour ces estimateurs de choisir un noyau et d'optimiser la largeur de la fenêtre pour minimiser l'erreur quadratique. Nous laissons le lecteur se reporter également à [Yam72, Deh73, Ban76] pour plus de détails.

## Conclusion

Ce chapitre constitue un petit tour d'horizon des méthodes non-paramétriques. Nous avons dans un premier temps présenté l'utilisation qui en a déjà été faite dans le cadre de la mécanique, mais ce n'est pas sous cette forme que nous les avons mis en oeuvre dans ce qui va suivre. Nous présenterons au chapitre 5 une utilisation des estimateurs de Parzen-Rosenblatt dans le cadre du traitement de mesures expérimentales. Nous avons montré qu'il existe une grande latitude dans le choix des estimateurs non-paramétriques, ce qui permet d'entrevoir un développement intéressant concernant ce que l'on appelle usuellement les "incertitudes de mesures". Ces méthodes sont très utilisées dans le domaine des mathématiques financières (voir par exemple [R.E06]), et le champs d'application en mécanique reste très ouvert.

# Chapitre 3

## L'oscillateur harmonique aléatoire

Le chapitre qui va suivre constitue une étape importante dans la compréhension de la solution générale donnée dans le chapitre 4. Nous étudions ici le système vibrant le plus élémentaire, l'oscillateur harmonique, en considérant un de ses paramètres comme étant aléatoire.

Dans un premier temps, nous posons brièvement les hypothèses et les bases du cadre déterministe. Puis nous étudions dans un deuxième temps l'oscillateur en probabilisant sa fréquence propre, et dans un troisième temps l'amortissement visqueux. Ceci nous permet de poser les jalons d'une étude rigoureuse de la dépendance du comportement de la réponse d'un oscillateur vis-à-vis de ces deux paramètres pris séparément.

### 3.1 Cadre déterministe

#### 3.1.1 L'oscillateur harmonique

Avant de parler d'analyse modale, il est plus judicieux de se consacrer d'abord au cas de l'oscillateur harmonique élémentaire. En effet, ce dernier est la clef de voute de la théorie déterministe, non seulement par son aspect entièrement résolu analytiquement mais également par le fait que les physiciens s'y réfèrent constamment pour une meilleure compréhension d'un système vibrant. C'est le système masse-ressort qui est l'illustration physique de l'équation différentielle bien connue suivante :

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + c \frac{du(t)}{dt} + k u(t) = f(t) \quad (3.1)$$

Nous raisonnerons à partir de cette équation, il est donc important d'insister sur les hypothèses fondamentales que nous devons respecter par la suite.

#### 3.1.2 Les hypothèses sous-jacentes

Il faut d'abord préciser que ni la masse, ni la raideur, ni l'amortissement visqueux ne dépendent du temps. On ne prendra donc pas en compte directement les phénomènes de fatigue ou

d'écrouissage. Par ailleurs tous ces paramètres présentent la contrainte de devoir rester positifs. Il faudra garder à l'esprit que nous resterons sur ce modèle d'amortissement visqueux. Il est parfaitement critiquable, mais il permet de rendre compte de la modification de la fréquence propre en fonction de l'amortissement, ce que le modèle de l'amortissement hystérétique  $\eta$  ne permet pas par exemple. D'autre part nous n'utiliserons pas l'amortissement spécifique  $\xi$ , car ce dernier est défini par rapport à la fréquence propre de l'oscillateur harmonique, et l'extension à un système à plusieurs degré de liberté n'est alors plus possible. En effet il faudrait définir un amortissement spécifique pour chaque mode, ce que nous n'envisageons pas ici.

### 3.1.3 Les équations de base

Il est courant de considérer l'équation (3.1) dans le domaine de Fourier. Cette vision purement fréquentielle se justifie par le fait que l'on s'intéresse au comportement du système en régime permanent, on parle aussi de comportement en régime harmonique. On obtient alors classiquement :

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k) \tilde{u}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \quad (3.2)$$

La fonction de réponse en fréquence va donc s'écrire comme suit :

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{\tilde{u}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} = \frac{-m\omega^2 + k}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} + i \frac{-c\omega}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} \quad (3.3)$$

Il est important d'observer que  $\tilde{H}$  est une grandeur complexe qui dépend de manière non linéaire de  $m$ ,  $c$  et  $k$ . On considère souvent l'équation (3.1) en la normalisant par rapport à la masse, ce qui fait apparaître les grandeurs  $\omega_0 = k/m$  et  $c' = c/m$ .  $\omega_0$  est la fréquence de résonance du système masse-ressort non amorti ( $c = 0$ ). On obtient alors :

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (c'\omega)^2} + i \frac{-c'\omega}{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (c'\omega)^2} \quad (3.4)$$

Dans l'expression de (3.4), il ne reste plus que 2 paramètres à considérer pour caractériser le système vibrant amorti élémentaire : la fréquence propre du système non amorti  $\omega_0$  et l'amortissement visqueux normalisé par rapport à la masse  $c'$ . Nous continuerons à écrire  $c$  à la place de  $c'$  par la suite sauf si cela devait prêter à confusion.

## 3.2 Fréquence propre aléatoire

Nous allons étudier dans ce chapitre l'influence du caractère aléatoire de la fréquence propre de l'oscillateur harmonique sur la partie réelle de la fonction de réponse en fréquence (FRF) d'une part et sur la partie imaginaire de la FRF d'autre part. Comme il est nécessaire d'introduire l'amortissement dans l'équation de l'oscillateur, nous avons opté pour l'amortissement visqueux noté  $c$ , qui est donc considéré ici comme une constante du problème.

### 3.2.1 Formalisme

Nous allons considérer les deux applications suivantes :

$$\mathcal{F}_{\text{re}} : \omega_0^2 \rightarrow \text{Re } \tilde{H} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{F}_{\text{im}} : \omega_0^2 \rightarrow \text{Im } \tilde{H} \quad (3.6)$$

Il faut bien noter que  $\omega_0^2$  est homogène à une raideur divisée par une masse. Nous avons décidé de garder la grandeur quadratique car cette approche permet de quantifier l'influence du caractère aléatoire de la fréquence propre de l'oscillateur sur sa FRF tout en étant conscient que cette dernière est liée aux paramètres physiques constitutifs du système oscillant.

Nous garderons à l'esprit qu'il s'agit d'une fréquence au carré et nous la noterons  $\Omega$  pour simplifier les expressions. Ceci permet d'écrire  $\mathcal{F}_{\text{re}}$  et  $\mathcal{F}_{\text{im}}$  sous la forme suivante :

$$\mathcal{F}_{\text{re}} : \Omega \rightarrow \frac{-\omega^2 + \Omega}{(-\omega^2 + \Omega)^2 + (c\omega)^2} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{F}_{\text{im}} : \Omega \rightarrow \frac{-c\omega}{(-\omega^2 + \Omega)^2 + (c\omega)^2} \quad (3.8)$$

La densité de probabilité de  $\Omega$  sera notée  $f_\Omega$ . Nous allons ainsi donner les expressions analytiques des densités de probabilités de  $\text{Re } \tilde{H}$  et  $\text{Im } \tilde{H}$  prises séparément. Ces densités permettront alors le calcul de la moyenne et des moments d'ordre supérieur (nous nous cantonnerons cependant au moment d'ordre 2).

### 3.2.2 Expressions des densités de probabilités

Il faut en premier lieu calculer les jacobiens de  $J_{\text{re}}$  et  $J_{\text{im}}$  de  $\mathcal{F}_{\text{re}}$  et  $\mathcal{F}_{\text{im}}$ , et comme ces deux fonctions vont de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on peut parler plus simplement de dérivé première. Leurs expressions sont :

$$J_{\text{re}} = \frac{-(-\omega^2 + \Omega)^2 + c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega)^2 + c^2\omega^2} \quad (3.9)$$

$$J_{\text{im}} = \frac{2c\omega(-\omega^2 + \Omega)}{(-\omega^2 + \Omega)^2 + c^2\omega^2} \quad (3.10)$$

Il est nécessaire dans un deuxième temps d'inverser la fonction considérée. Il se trouve que ni  $\mathcal{F}_{\text{re}}$  ni  $\mathcal{F}_{\text{im}}$  n'est injective  $\forall \omega$ . Nous avons deux solutions possibles notées  $S_1^{\text{re}}$  et  $S_2^{\text{re}}$  :

$$S_1^{\text{re}}(s), S_2^{\text{re}}(s) = \frac{2s\omega^2 + 1 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2}}{2s}, \frac{2s\omega^2 + 1 - \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2}}{2s} \quad s \in \left[-\frac{1}{2c\omega}, \frac{1}{2c\omega}\right] \quad (3.11)$$

$$S_1^{\text{im}}(t), S_2^{\text{im}}(t) = \frac{t\omega^2 + \sqrt{-tc\omega(1+tc\omega)}}{t}, \frac{t\omega^2 - \sqrt{-tc\omega(1+tc\omega)}}{t} \quad t \in \left[-\frac{1}{c\omega}, 0\right] \quad (3.12)$$

Il est très important de noter que ces expressions dépendent de la pulsation.

Les expressions théoriques qui découlent du théorème de changement de variables appliqué aux densités de probabilité sont données par :

$$f_{Re(H)}(s) = \frac{f_{\Omega}(S_1^{re}(s))}{|J_{re}(S_1^{re}(s))|} + \frac{f_{\Omega}(S_2^{re}(s))}{|J_{re}(S_2^{re}(s))|} \quad (3.13)$$

$$f_{Im(H)}(t) = \frac{f_{\Omega}(S_1^{im}(t))}{|J_{im}(S_1^{im}(t))|} + \frac{f_{\Omega}(S_2^{im}(t))}{|J_{im}(S_2^{im}(t))|} \quad (3.14)$$

Nous remplaçons ainsi 3.11 et 3.12 dans 3.9 et 3.10 puis nous appliquons ainsi 3.13 et 3.14 pour obtenir :

$$f_{Re(H)}(s) = \frac{(1 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})^2}{2s^2(1 - 4s^2c^2\omega^2 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})} f_{\Omega}\left(\omega^2 + \frac{1 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2}}{2s}\right) + \frac{(-1 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})^2}{2s^2(-1 + 4s^2c^2\omega^2 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})} f_{\Omega}\left(\omega^2 + \frac{1 - \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2}}{2s}\right) \quad (3.15)$$

$$f_{Im(H)}(t) = \frac{\sqrt{c\omega}}{-t\sqrt{-t(1 + tc\omega)}} \left[ f_{\Omega}\left(\omega^2 + \frac{\sqrt{-tc\omega(1 + tc\omega)}}{t}\right) + f_{\Omega}\left(\omega^2 - \frac{\sqrt{-tc\omega(1 + tc\omega)}}{t}\right) \right] \quad (3.16)$$

$f_{Re(H)}$  est défini sur  $[-\frac{1}{2c\omega}, \frac{1}{2c\omega}]$  et  $f_{Im(H)}$  sur  $[-\frac{1}{c\omega}, 0[$ .

Ici nous n'avons encore rien supposé sur la densité  $f_{\Omega}$ , donc les formules 3.15 et 3.16 ont une portée relativement générale. Dans le choix de  $f_{\Omega}$ , il faut garder à l'esprit que choisir une densité de probabilité, ce n'est ni plus ni moins choisir une façon de répartir des points entre deux valeurs extrémales données. Ces deux valeurs extrémales se doivent de garder un sens physique, par exemple dans le cas présent le carré de la fréquence propre  $\Omega$  ne peut pas devenir négatif, donc d'un point de vue modélisation probabiliste, le support de  $f_{\Omega}$  doit être inclus dans  $]0, +\infty[$ .

Dans ce qui va suivre, nous avons fait le choix de nous restreindre à un intervalle compact  $[\Omega_-, \Omega_+]$ . Ce choix est motivé par 3 raisons. La première est que nous allons voir que c'est surtout le support (qui dépend de  $\omega$ ) qui va poser problème, donc c'est dans ce cas le plus simple que l'on va pouvoir au mieux décortiquer le problème. La deuxième raison est que la loi uniforme est la loi qui maximise l'entropie d'une mesure de probabilité lorsque l'on ne possède aucune information sur la loi en question, ce qui est précisément notre cas.

La troisième raison est que nous avons réussi à mener les calculs analytiques relativement loin, jusqu'à pouvoir définir le concept d'enveloppe qui va nous mener à une résolution partielle du problème inverse.



### 3.2.3 Application à la loi uniforme

#### 3.2.3.1 Expressions des densités

Si  $\Omega$  suit une loi uniforme, on a  $f_{\Omega}(\theta) = \frac{\mathbb{1}_{\theta \in [\Omega_-, \Omega_+]}}{2\sqrt{3}\sigma_{\Omega}}$  avec  $\Omega_+ = \Omega_0 + \sqrt{3}\sigma_{\Omega}$  et  $\Omega_- = \Omega_0 - \sqrt{3}\sigma_{\Omega}$ .

$$f_{Re(H)}(s) = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_{\Omega}} \left[ \frac{(1 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})^2}{2s^2(1 - 4s^2c^2\omega^2 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})} \mathbb{1}_{s \in I_{1Re}} \right. \\ \left. \frac{(-1 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})^2}{2s^2(-1 + 4s^2c^2\omega^2 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})} \mathbb{1}_{s \in I_{2Re}} \right] \quad (3.17)$$

$$f_{Im(H)}(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_{\Omega}} \frac{\sqrt{c\omega}}{-t\sqrt{-t(1 + tc\omega)}} \mathbb{1}_{t \in I_{Im}} \quad (3.18)$$

Dans 3.17 et 3.18, il reste à préciser les intervalles  $I_{1Re}$ ,  $I_{2Re}$  et  $I_{Im}$  car  $s$  et  $t$  dépendent de  $\omega$ . Pour comprendre comment ces intervalles changent avec la pulsation, nous invitons à examiner la figure 3.1 qui illustre le problème.

Pour la partie réelle, les intervalles  $I_{1Re}$  et  $I_{2Re}$  sont déterminés selon que  $(\omega^2 - \Omega)^2 - c^2\omega^2$  est négatif (zone 2 et 4) ou positif (1, 3 et 5) selon les valeurs extrémales de  $\Omega$ .

Sur le graphe de la partie réelle, les régions 1 et 5 correspondent aux valeurs de  $\omega$  où  $\mathcal{F}_{re}$  est injective. Si on considère les régions 2 et 4, il y a bien deux façons d'atteindre certains points dans la zone hachurée, ce qui témoigne de la non-injectivité de  $\mathcal{F}_{re}$ . Enfin dans la zone centrale 3, il y a deux zones où les intervalles  $I_{1Re}$  et  $I_{2Re}$  se chevauchent, ce qui correspond à deux "repléments" de  $\mathcal{F}_{re}$ .

Pour la partie imaginaire, l'intervalle  $I_{Im}$  est un peu plus simple à visualiser, il n'y a que la zone centrale qui présente une perte d'injectivité.

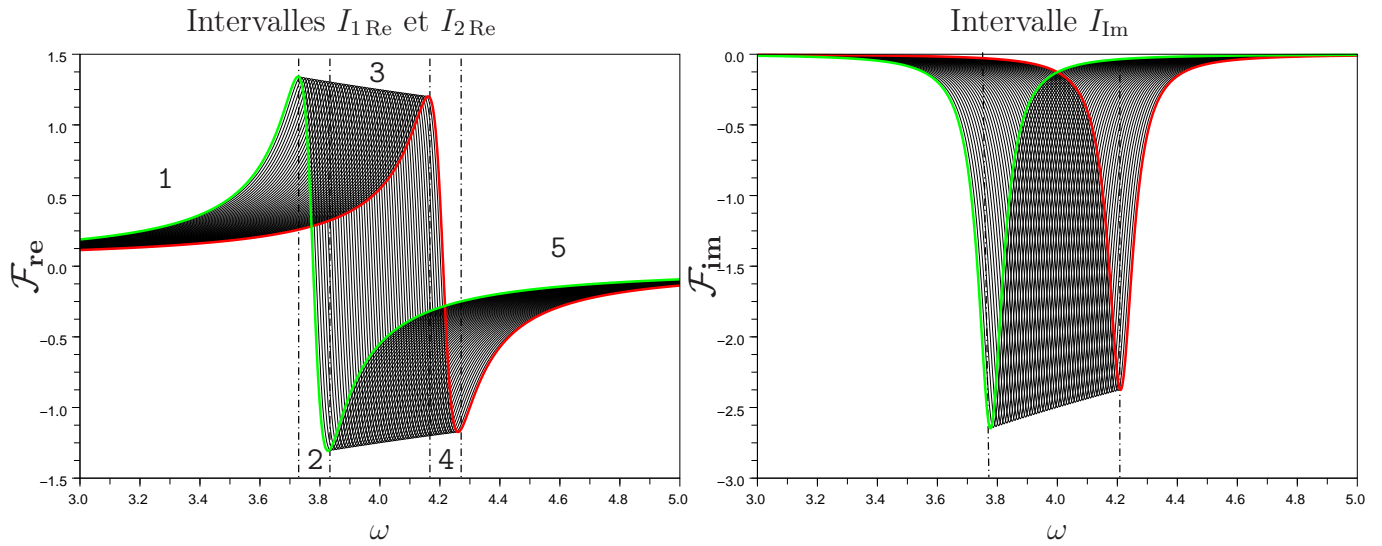


FIG. 3.1 – En rouge (-)  $\mathcal{F}_{\text{re}}(\Omega_+)$  (figure de gauche) et  $\mathcal{F}_{\text{im}}(\Omega_+)$  (figure de droite). En vert (-)  $\mathcal{F}_{\text{re}}(\Omega_-)$  et  $\mathcal{F}_{\text{im}}(\Omega_-)$ . En noir (-) des tirages de  $\mathcal{F}_{\text{re}}(z)$  et  $\mathcal{F}_{\text{im}}(z)$  avec  $z \in [\Omega_-, \Omega_+]$ .

Voici à présent les expressions analytiques de  $I_{1\text{Re}}$  et  $I_{2\text{Re}}$  en fonction de  $\omega$  :

$$\text{Si } \omega < \frac{\sqrt{4\Omega_- + c^2} - c}{2} \quad \text{et} \quad \omega \geq \frac{\sqrt{4\Omega_+ + c^2} + c}{2}$$

$$I_{1\text{Re}} = \left[ \frac{-\omega^2 + \Omega_+}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + (c\omega)^2}, \frac{-\omega^2 + \Omega_-}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + (c\omega)^2} \right] \quad (3.19)$$

$$I_{2\text{Re}} = \emptyset \quad (3.20)$$

$$\text{Si } \omega \geq \frac{\sqrt{4\Omega_- + c^2} - c}{2} \quad \text{et} \quad \omega < \frac{\sqrt{4\Omega_+ + c^2} + c}{2}$$

$$I_{1\text{Re}} = \left[ \frac{-\omega^2 + \Omega_+}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + (c\omega)^2}, \frac{1}{2c\omega} \right] \quad (3.21)$$

$$I_{2\text{Re}} = \left[ \frac{-\omega^2 + \Omega_-}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + (c\omega)^2}, \frac{1}{2c\omega} \right] \quad (3.22)$$

$$\text{Si } \omega \geq \frac{\sqrt{4\Omega_- + c^2} + c}{2} \quad \text{et} \quad \omega < \frac{\sqrt{4\Omega_+ + c^2} - c}{2}$$

$$I_{1\text{Re}} = \left[ \frac{-\omega^2 + \Omega_+}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + (c\omega)^2}, \frac{1}{2c\omega} \right] \cup \left[ -\frac{1}{2c\omega}, \frac{-\omega^2 + \Omega_-}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + (c\omega)^2} \right] \quad (3.23)$$

$$I_{2\text{Re}} = \left[ -\frac{1}{2c\omega}, \frac{1}{2c\omega} \right] \quad (3.24)$$

$$\text{Si } \omega \geq \frac{\sqrt{4\Omega_+ + c^2} - c}{2} \quad \text{et} \quad \omega < \frac{\sqrt{4\Omega_+ + c^2} + c}{2}$$

$$I_{1\text{Re}} = \left[ -\frac{1}{2c\omega}, \frac{-\omega^2 + \Omega_-}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + (c\omega)^2} \right] \quad (3.25)$$

$$I_{2\text{Re}} = \left[ -\frac{1}{2c\omega}, \frac{-\omega^2 + \Omega_+}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + (c\omega)^2} \right] \quad (3.26)$$

Nous continuons en donnant l'expression de  $I_{\text{Im}}$  :

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega \leq \sqrt{\Omega_-} \\ I_{\text{Im}} &= \left[ \frac{-c\omega}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + (c\omega)^2}, \frac{-c\omega}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + (c\omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega \in ]\sqrt{\Omega_-}, \sqrt{\Omega_+}[ \\ I_{\text{Im}} &= \left[ -\frac{1}{c\omega}, \frac{-c\omega}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + (c\omega)^2} \right] \cup \left[ -\frac{1}{c\omega}, \frac{-c\omega}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + (c\omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega \geq \sqrt{\Omega_+} \\ I_{\text{Im}} &= \left[ \frac{-c\omega}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + (c\omega)^2}, \frac{-c\omega}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + (c\omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

$f_{\text{Re}(H)}(s)$  et  $f_{\text{Im}(H)}$  sont bien des densités de probabilités car on peut vérifier que  $\int_{\mathbb{R}} f_{\text{Re}(H)}(s) ds = \int_{\mathbb{R}} f_{\text{Im}(H)}(t) dt = 1$  et ce pour tout  $\omega$ .

Il faut noter que ce n'est pas le problème d'intégration qui se révèle compliqué, mais plutôt l'image par  $\mathcal{F}_{\text{re}}$  et de  $\mathcal{F}_{\text{im}}$  de l'intervalle  $[\Omega_-, \Omega_+]$ , c'est à dire le support des deux applications. Regarder le problème avec une loi uniforme permet de se focaliser sur la vraie difficulté du problème, c'est à dire la perte d'injectivité en fonction de  $\omega$  vis à vis du support.

Ces expressions vont être très utiles pour calculer les  $k$  premiers moments de  $\text{Re } \tilde{H}$  et  $\text{Im } \tilde{H}$ , ainsi que pour définir les enveloppes (voir 5.3.2.1).

### 3.2.3.2 Moyenne et écart-type de $\text{Re } \tilde{H}$

Pour avoir l'expression analytique de la moyenne et l'écart-type, il faut calculer les deux premiers moments ( $k = 1, 2$ ) de  $\text{Re } \tilde{H}$ . Nous garderons à l'esprit que ce calcul est valable avec une loi uniforme en entrée ( $f_{\Omega}$  est une constante normalisée sur un intervalle  $[\Omega_-, \Omega_+]$ ).

#### 3.2.3.2.a Moyenne

Pour l'expression de la moyenne, on s'intéresse à la quantité suivante :

$$\begin{aligned} M_1(\text{Re } \tilde{H}) &= \int_{\mathbb{R}} s f_{\text{Re}(H)}(s) ds = \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_{\Omega}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})^2}{s(1 - 4s^2c^2\omega^2 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})} \mathbb{1}_s \in I_{1\text{Re}} \\ &\quad + \frac{(-1 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})^2}{s(-1 + 4s^2c^2\omega^2 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})} \mathbb{1}_s \in I_{2\text{Re}} ds \end{aligned} \quad (3.30)$$

Une primitive est donné pour chaque membre par une fonction du type  $\pm \text{signe}(s) \ln(|s|) \pm \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2}}{1 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2}}\right)$ . Lors de l'évaluation de cette primitive en les bornes données par  $I_{1\text{Re}}$  et  $I_{2\text{Re}}$ , on s'aperçoit que l'on peut obtenir une formule simple valable  $\forall \omega$ :

$$M_1(\text{Re } \tilde{H}) = \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_\Omega} \ln\left(\frac{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + c^2\omega^2}\right) \quad (3.31)$$

Pour s'assurer de la pertinence de cette expression, on peut regarder ce qui se passe lorsque l'on fait tendre la fonction uniforme vers un dirac (c'est à dire que l'on se ramène au système moyen déterministe). Pour se faire il faut faire tendre  $\sigma_\Omega$  vers 0, en sachant que  $\Omega_\pm = \Omega_0 \pm \sqrt{3}\sigma_\Omega$  donc après un développement limité, on obtient :

$$M_1(\text{Re } \tilde{H}) = \frac{-\omega^2 + \Omega_0}{(-\omega^2 + \Omega_0)^2 + (c\omega)^2} + O(\sigma_\Omega^2) \quad (3.32)$$

On retombe donc sur la partie réelle en considérant la fréquence propre au carré  $\Omega$  comme une constante.

### 3.2.3.2.b Ecart-type

Pour l'écart-type, il nous faut calculer tout d'abord le moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} M_2(\text{Re } \tilde{H}) = \int_{\mathbb{R}} s^2 f_{\text{Re}(H)}(s) ds &= \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_\Omega} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})^2}{(1 - 4s^2c^2\omega^2 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})} \mathbb{1}_{s \in I_{1\text{Re}}} \\ &+ \frac{(-1 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})^2}{(-1 + 4s^2c^2\omega^2 + \sqrt{1 - 4s^2c^2\omega^2})} \mathbb{1}_{s \in I_{2\text{Re}}} ds \quad (3.33) \end{aligned}$$

Les deux primitives sont de la forme  $\arcsin(2sc\omega)/2c\omega \pm s$ , il reste donc à évaluer cette expression en les bornes de  $I_{1\text{Re}}$  et  $I_{2\text{Re}}$ , d'où l'expression du moment d'ordre 2 en posant les quantités intermédiaires suivantes :

$$A_+ = \arcsin\left(\frac{2c\omega(-\omega^2 + \Omega_+)}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + c^2\omega^2}\right) \quad A_- = \arcsin\left(\frac{2c\omega(-\omega^2 + \Omega_-)}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + c^2\omega^2}\right)$$

$$R = \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_\Omega} \left[ \frac{(-\omega^2 + \Omega_-)}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + c^2\omega^2} - \frac{(-\omega^2 + \Omega_+)}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + c^2\omega^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega < \frac{\sqrt{4\Omega_- + c^2} - c}{2} \text{ ou } \omega \geq \frac{\sqrt{4\Omega_+ + c^2} + c}{2} \\ M_2(\text{Re } \tilde{H}) &= \frac{1}{8\sqrt{3}\sigma_\Omega c\omega} [A_- - A_+] + R \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega > \frac{\sqrt{4\Omega_- + c^2} - c}{2} \text{ et } \omega \leq \frac{\sqrt{4\Omega_- + c^2} + c}{2} \\ M_2(\text{Re } \tilde{H}) &= -\frac{1}{8\sqrt{3}\sigma_\Omega c\omega} [A_- + A_+ - \pi] + R \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega > \frac{\sqrt{4\Omega_- + c^2} + c}{2} \text{ et } \omega \leq \frac{\sqrt{4\Omega_+ + c^2} - c}{2} \\ M_2(\text{Re } \tilde{H}) &= \frac{1}{8\sqrt{3}\sigma_\Omega c\omega} [A_- - A_+ + 2\pi] + R \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega > \frac{\sqrt{4\Omega_- + c^2} + c}{2} \text{ et } \omega \leq \frac{\sqrt{4\Omega_+ + c^2} - c}{2} \\ M_2(\text{Re } \tilde{H}) &= \frac{1}{8\sqrt{3}\sigma_\Omega c\omega} [A_- + A_+ + \pi] + R \end{aligned} \quad (3.37)$$

Nous pouvons à nouveau procéder à un passage à la limite sur  $\sigma_\Omega$  après avoir remplacé  $\Omega_\pm$  par  $\Omega_0 \pm \sqrt{3}\sigma_\Omega$ . Il faut noter que les cas intermédiaires où il y a des repliements (apparition de  $\pi$  ou de  $2\pi$ ) disparaissent car les intervalles tendent vers l'ensemble vide  $\emptyset$ . Un développement limité dans 3.34 nous amène à l'expression suivante :

$$M_2(\text{Re } \tilde{H}) = \frac{(-\omega^2 + \Omega_0)^2}{\left((- \omega^2 + \Omega_0)^2 + (c\omega)^2\right)^2} + O(\sigma_\Omega) \quad (3.38)$$

C'est à dire l'expression déterministe au carré.

L'écart-type est donné par  $\sigma_{\text{Re } \tilde{H}} = \sqrt{M_2(\text{Re } \tilde{H}) - M_1(\text{Re } \tilde{H})^2}$ . Nous avons vu que lorsque l'on passait à la limite en faisant tendre  $\sigma_\Omega$  vers 0 nous retombions sur l'expression déterministe pour  $M_1(\text{Re } \tilde{H})$  et sur l'expression déterministe au carré pour  $M_2(\text{Re } \tilde{H})$ . Au vu de ces deux résultats, il est immédiat que  $\sigma_{\text{Re } \tilde{H}}$  tend également vers 0 quand  $\sigma_\Omega$  tend vers 0. Ce résultat lors du passage à la limite est rassurant car il est naturel que l'écart-type d'une variable aléatoire constante, c'est à dire d'une grandeur déterministe, soit nul.

### 3.2.3.3 Moyenne et écart-type de $\text{Im } \tilde{H}$

#### 3.2.3.3.a Moyenne

Pour la moyenne de la partie imaginaire, on s'intéresse à la quantité suivante :

$$M_1(\text{Im } \tilde{H}) = \int_{\mathbb{R}} t f_{\text{Im}(H)}(t) dt = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_\Omega} \int_{\mathbb{R}} -\frac{\sqrt{c\omega}}{\sqrt{-t(1+t\omega)}} \mathbb{1}_{I_{\text{Im}}} ds \quad (3.39)$$

Une primitive est donnée par  $t \rightarrow -\arcsin(2tc\omega + 1)$ . Il faut également distinguer les différents intervalles d'intégration, surtout l'intervalle central qui témoigne de la non-injectivité de

l'application.

$$\begin{aligned}
 & \text{Si } \omega \leq \sqrt{\Omega_-} \\
 M_1(\text{Im } \tilde{H}) &= \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_\Omega} \left[ \arcsin \left( \frac{-2c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + c^2\omega^2} + 1 \right) - \arcsin \left( \frac{-2c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + c^2\omega^2} + 1 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Si } \omega \in ]\sqrt{\Omega_-}, \sqrt{\Omega_+}[ \\
 M_1(\text{Im } \tilde{H}) &= -\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_\Omega} \left[ \arcsin \left( \frac{-2c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + c^2\omega^2} + 1 \right) + \arcsin \left( \frac{-2c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + c^2\omega^2} + 1 \right) + \pi \right]
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Si } \omega \geq \sqrt{\Omega_+} \\
 M_1(\text{Im } \tilde{H}) &= -\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_\Omega} \left[ \arcsin \left( \frac{-2c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + c^2\omega^2} + 1 \right) - \arcsin \left( \frac{-2c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + c^2\omega^2} + 1 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Là encore un développement limité nous aide à examiner le cas limite où  $\sigma_\Omega$  tends vers 0. De la même manière que pour les passages à la limite précédents, l'intervalle central est réduit à l'ensemble vide. On retombe bien sur l'expression déterministe.

### 3.2.3.3.b Ecart-type

Le moment d'ordre 2  $M_2(\text{Im } \tilde{H})$  est donné par :

$$M_2(\text{Im } \tilde{H}) = \int_{\mathbb{R}} t^2 f_{\text{Im}(H)}(t) dt = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_\Omega} \int_{\mathbb{R}} \frac{-t\sqrt{c\omega}}{\sqrt{-t(1+t\omega)}} \mathbb{1}_{I_{\text{Im}}} ds \tag{3.43}$$

Une primitive est donné par  $t \rightarrow \sqrt{-t(1+tc\omega)}/\sqrt{(c\omega)} + \arcsin(2tc\omega + 1)/2c\omega$ , ce qui donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Si } \omega &\leq \sqrt{\Omega_-} \\
 M_2(\text{Im } \tilde{H}) &= \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_\Omega c\omega} \left[ \arcsin\left(\frac{-2c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + c^2\omega^2} + 1\right) - \arcsin\left(\frac{-2c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + c^2\omega^2} + 1\right) \right] \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_\Omega} \left[ \frac{-\omega^2 + \Omega_+}{\sqrt{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + c^2\omega^2}} - \frac{-\omega^2 + \Omega_-}{\sqrt{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + c^2\omega^2}} \right] \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } \omega &\in ]\sqrt{\Omega_-}, \sqrt{\Omega_+}[ \\
 M_2(\text{Im } \tilde{H}) &= \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_\Omega c\omega} \left[ \arcsin\left(\frac{-2c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + c^2\omega^2} + 1\right) + \arcsin\left(\frac{-2c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + c^2\omega^2} + 1\right) - \pi \right] \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_\Omega} \left[ \frac{-\omega^2 + \Omega_+}{\sqrt{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + c^2\omega^2}} - \frac{-\omega^2 + \Omega_-}{\sqrt{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + c^2\omega^2}} \right] \tag{3.45}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } \omega &\geq \sqrt{\Omega_+} \\
 M_2(\text{Im } \tilde{H}) &= \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_\Omega c\omega} \left[ \arcsin\left(\frac{-2c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + c^2\omega^2} + 1\right) - \arcsin\left(\frac{-2c^2\omega^2}{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + c^2\omega^2} + 1\right) \right] \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_\Omega} \left[ \frac{-\omega^2 + \Omega_-}{\sqrt{(-\omega^2 + \Omega_-)^2 + c^2\omega^2}} - \frac{-\omega^2 + \Omega_+}{\sqrt{(-\omega^2 + \Omega_+)^2 + c^2\omega^2}} \right] \tag{3.46}
 \end{aligned}$$

Un développement limité montre là encore la validité de l'expression par passage à la limite, car on retombe sur la valeur déterministe élevé au carré. La même remarque que celle faite sur la partie réelle s'applique, c'est à dire que  $\sigma_{\text{Im } \tilde{H}}$  tend également vers 0 quand  $\sigma_\Omega$  tend vers 0.

### 3.2.4 Confrontation avec Monte-Carlo

Afin de valider les formules analytiques obtenues au paragraphe 3.2.3, nous allons confrontés les résultats à des simulations numériques de Monte Carlo.

#### 3.2.4.1 Simulations numériques

La technique de Monte Carlo est décrite au chapitre 1. Nous insistons sur le fait qu'il faut générer une suite de variables aléatoires selon une loi uniforme dans l'intervalle  $[\Omega_-, \Omega_+]$ , car c'est cette loi qui a été prise comme hypothèse.

Pour décrire la méthode, nous nous intéresserons uniquement à la partie réelle, mais la méthode s'applique de manière analogue à la partie imaginaire. La convergence de la technique de Monte-Carlo est en  $O\left(\frac{\sigma_{\text{Re}(\tilde{H})}}{\sqrt{n}}\right)$  où  $n$  est le nombre de tirages (c'est à dire le rang maximal de la suite générée). Il est important de noter que l'on ne connaît rien *a priori* sur l'écart-type

$\sigma_{\text{Re}(\tilde{H})}$ . Il est évident que le coût numérique du calcul de la moyenne est très faiblement augmenté avec le calcul simultané du moment d'ordre 2 (une fois que l'élément de la suite a été généré). Nous appliquerons donc l'algorithme suivant qui permet de récupérer également un intervalle de confiance.

1. Initialiser  $M_1 = 0$  et  $M_2 = 0$
2. Pour  $k$  allant de 1 à  $n$ 
  - Générer un élément  $\Omega_k$  selon une loi uniforme
  - Calculer les vecteurs (selon  $\omega$ ) suivants :  $\text{Re}(\Omega_k)$  et  $\text{Re}(\Omega_k)^2$
  - $M_1 = M_1 + \frac{\text{Re}(\Omega_k)}{n}$  et  $M_2 = M_2 + \frac{\text{Re}(\Omega_k)^2}{n}$

Fin de la boucle
3.  $M_1$  est alors une approximation de la moyenne.  
 Une approximation de l'écart-type est donné par  $\sigma_{\text{Re}(\tilde{H})} = \sqrt{M_2 - M_1^2}$ .  
 L'intervalle de confiance à 95% pour la moyenne est donné par  

$$\left[ M_1 - \frac{1,96 \sigma_{\text{Re}(\tilde{H})}}{\sqrt{n}}, M_1 + \frac{1,96 \sigma_{\text{Re}(\tilde{H})}}{\sqrt{n}} \right].$$

Il est clair qu'à la vue de cet algorithme, la vitesse de convergence vers la moyenne dépend fortement de l'écart-type qui est calculé lui-même en cours de route. Il est donc préférable de travailler avec des écart-types faibles d'où les techniques d'accélération de convergence évoquée au chapitre 1.

En pratique ces simulations appliquées à l'oscillateur harmonique manipulent des vecteurs dont la taille dépend du raffinement effectué sur  $\omega$ . Il y a ainsi deux manières de procéder. Soit on génère d'abord un  $\Omega_k$  et on calcule sur toute la bande de fréquence  $\text{Re}(\Omega_k)$ , soit on génère à  $\omega$  donné un  $\Omega_k$  et on procède alors au calcul des différentes quantité à  $\omega$  donné. Les deux façons de faire conserve la convergence presque sûr de la suite vers la limite recherchée, car cela revient à moyenner les éléments des lignes d'une matrice et les valeurs n'ont pas besoin d'être cohérentes d'un  $\omega$  à un autre. Cependant ces deux approches n'ont pas la même signification.

En effet, travailler à  $\omega$  donné avec la méthode de Monte Carlo revient à considérer que la valeur de  $\Omega$  peut changer de manière aléatoire avec la fréquence. Cela implique que l'on possède une description de la dépendance en fréquence de la fréquence propre, ce qui devrait se modéliser correctement par un processus stochastique (en fréquence). Ce n'est pas dans cette optique que nous cherchons à avancer.

Travailler sur un vecteur des fréquences en un seul bloc revient à dire que  $\Omega$  ne dépend pas de la fréquence, mais n'est amené à varier uniquement lorsque l'on change les paramètres intrinsèques du dit système. Nous ne traitons pas ainsi les dépendances en fréquence des paramètres. On peut songer par exemple à une campagne de caractérisation d'un matériau au moyen de méthodes de



vibroacoustique, en testant plusieurs échantillons successifs.

### 3.2.4.2 Confrontation des formules analytiques avec Monte Carlo

La figure 3.2 illustre la vitesse de convergence de la technique de Monte Carlo vers les solutions analytiques précédemment exhibée. Le nombre de 10000 tirages a été choisit par rapport à ce que l'on considère habituellement comme permettant dans la plupart des cas d'approcher la solution désiré. Dans ce cas précis, force est de constater que si cela se vérifie à peu près pour la moyenne, ce n'est pas le cas par contre pour l'écart-type. La raison est justement la valeur de ce dernier qui augmente considérablement le rapport  $\sigma_{\text{Re}(\tilde{H})}/\sqrt{n}$ . *L'a priori* se paye cher dans le cas présent car un écart-type de 20% sur  $\Omega_0$  entraîne un écart-type de 1000% sur  $M_1(\text{Re} \tilde{H})$ , c'est à dire 10 fois supérieur à la valeur moyenne! Cela explique la vitesse réduite de convergence de la technique de Monte Carlo et donc un résultat très peu satisfaisant.

Un réflexe naturel est d'augmenter le nombre de réalisations: il faut monter jusqu'à 7 millions de tirages pour que les résultats de la technique de Monte Carlo se superposent avec la solution analytique. C'est ce qu'illustre la figure 3.3. A noter que c'est surtout la partie imaginaire qui est lente à converger.

Cet exemple possède indéniablement la qualité de convaincre le lecteur que la solution analytique présentée est correcte. De plus son coût numérique se trouve être quasiment nul comparé à celui de la technique de Monte Carlo, ce qui montre la pertinence de l'approche analytique.

## 3.2.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons détaillé la résolution de l'oscillateur harmonique dont la fréquence propre (au carré) a été modélisée comme une variable aléatoire. Nous avons fournis les formules des densités de probabilité de la partie réelle de la FRF  $\text{Re}(\tilde{H})$  ainsi que de la partie imaginaire  $\text{Im}(\tilde{H})$ . Il faut souligner que la difficulté principale réside dans la distinction des cas en fonction de la pulsation  $\omega$ .

La densité étant la meilleure description probabiliste du phénomène, cette dernière nous permet de calculer les premiers moments et donc moyenne et écart-type. Les résultats obtenus ont été validés vis-à-vis des cas limites où l'écart-type initial tend vers 0. Ces résultats ont également été confrontés à une technique de Monte Carlo qui a montré la pertinence des formules analytiques.

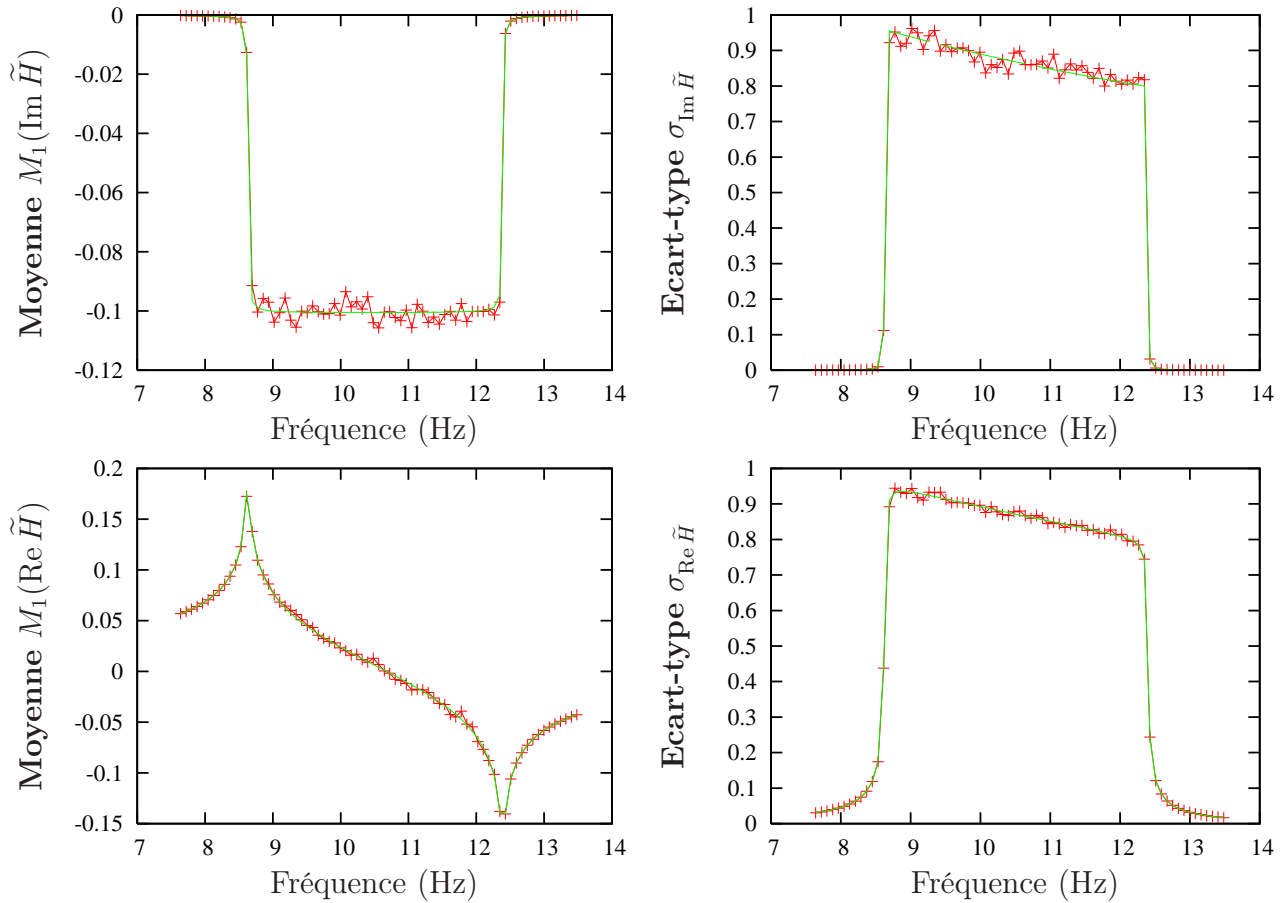


FIG. 3.2 – En rouge (+) les résultats obtenus avec la méthode de Monte Carlo avec 10 000 réalisations. En vert (-) la solution analytique décrite précédemment.  $c = 0.1 \Omega_0 = 4500$   
 $\sigma_\Omega = 20\% \Omega_0$

### 3.3 Amortissement aléatoire

#### 3.3.1 L'approche analytique

##### 3.3.1.1 Formalisme

Nous allons considérer les deux applications suivantes :

$$\mathcal{F}_{\text{re}} : c \rightarrow \text{Re } \tilde{H} \quad (3.47)$$

$$\mathcal{F}_{\text{im}} : c \rightarrow \text{Im } \tilde{H} \quad (3.48)$$

Il faut bien noter que  $c$  dénote l'amortissement visqueux. Le choix de ce modèle d'amortissement est lié au fait que ce dernier permet de rendre compte du décalage en fréquence qu'engendre ce dernier, chose qu'avec d'autres modèles comme celui de l'amortissement hystérétique, il n'est pas possible de refléter ( $c$  ne dépend pas de  $\omega$ ).

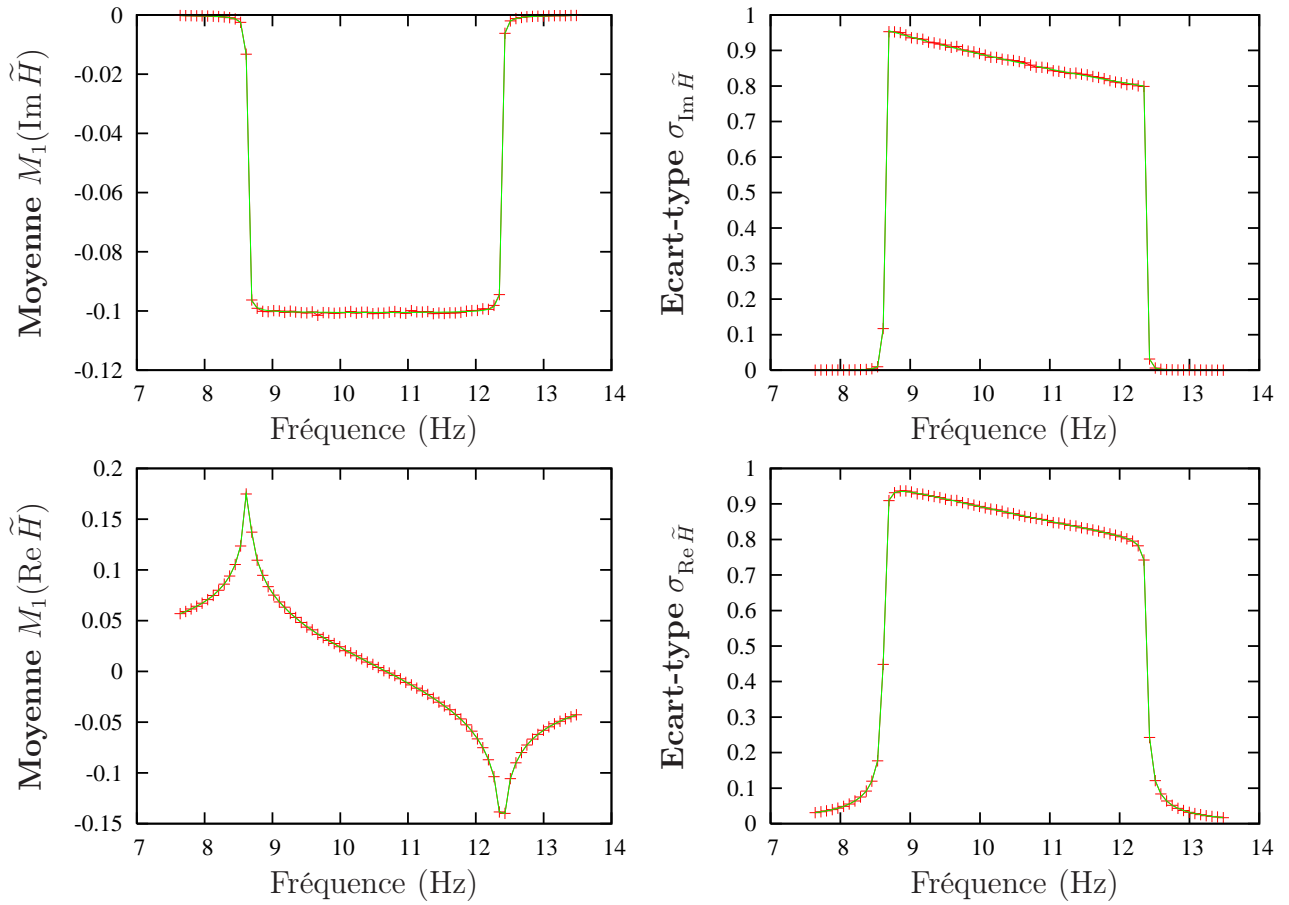


FIG. 3.3 – En rouge (+) les résultats obtenus avec la méthode de Monte Carlo avec 7 millions de réalisations. En vert (-) la solution analytique décrite précédemment.  $c = 0.1$   
 $\Omega_0 = 4500$   $\sigma_\Omega = 20\%\Omega_0$

$\mathcal{F}_{\text{re}}$  et  $\mathcal{F}_{\text{im}}$  peuvent ainsi s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{F}_{\text{re}} : c \rightarrow \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (c\omega)^2} \quad (3.49)$$

$$\mathcal{F}_{\text{im}} : c \rightarrow \frac{-c\omega}{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (c\omega)^2} \quad (3.50)$$

La densité de probabilité de  $c$  sera notée  $f_c$ . Nous allons ainsi donner les expressions analytiques des densités de probabilités de  $\text{Re } \tilde{H}$  et  $\text{Im } \tilde{H}$  prises séparément. Ces densités permettront alors le calcul de la moyenne et des moments d'ordre supérieur (nous nous cantonnerons cependant au moment d'ordre 2).

### 3.3.1.2 Expressions des lois

Il faut en premier lieu calculer les jacobiens de  $J_{\text{re}}$  et  $J_{\text{im}}$  de  $\mathcal{F}_{\text{re}}$  et  $\mathcal{F}_{\text{im}}$ , leurs expressions sont :

$$J_{\text{re}} = \frac{-2c\omega^2(-\omega^2 + \omega_0^2)}{\left((- \omega^2 + \omega_0^2)^2 + c^2\omega^2\right)^2} \quad (3.51)$$

$$J_{\text{im}} = \frac{-\omega\left((- \omega^2 + \omega_0^2)^2 - c^2\omega^2\right)}{\left((- \omega^2 + \omega_0^2)^2 + c^2\omega^2\right)^2} \quad (3.52)$$

Il est nécessaire dans un deuxième temps d'inverser la fonction considérée. Il se trouve que ni  $\mathcal{F}_{\text{re}}$  ni  $\mathcal{F}_{\text{im}}$  n'est injective  $\forall \omega$ .

Afin de rendre les expressions qui vont suivre plus lisibles, nous allons poser la quantité intermédiaire suivante :

$$A_\omega = -\omega^2 + \omega_0^2$$

$$S_1^{\text{re}}(s), S_2^{\text{re}}(s) = \frac{\sqrt{s A_\omega (1 - s A_\omega)}}{s \omega}, -\frac{\sqrt{s A_\omega (1 - s A_\omega)}}{s \omega} \quad s \in \left[ \frac{1}{A_\omega}, 0 \left[ \text{ou} \right] 0, \frac{1}{A_\omega} \right] \quad (3.53)$$

$$S_1^{\text{im}}(t), S_2^{\text{im}}(t) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2}}{2t\omega}, \frac{-1 - \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2}}{2t\omega} \quad t \in \left[ -\frac{1}{2|A_\omega|}, \frac{1}{2|A_\omega|} \right] \quad (3.54)$$

Ces expressions ont un sens car  $s$  par exemple devient négatif dès que  $A_\omega$  le devient également. La dépendance vis-à-vis de la pulsation est très importante et on s'aperçoit en étudiant séparément chacun des cas que ces expressions sont vraies pour tout  $\omega$ .

Nous remplaçons ainsi 3.53 et 3.54 dans 3.51 et 3.52 puis nous appliquons de manière analogue les formules 3.13 et 3.14 déjà décrite au chapitre 3.2:

$$f_{\text{Re}(H)}(s) = \frac{A_\omega}{2s\omega\sqrt{sA_\omega(1-sA_\omega)}} \left[ f_c \left( \frac{\sqrt{sA_\omega(1-sA_\omega)}}{s\omega} \right) + f_c \left( -\frac{\sqrt{sA_\omega(1-sA_\omega)}}{s\omega} \right) \right] \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} f_{\text{Im}(H)}(t) &= \frac{\left(-1 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2}\right)^2}{2t^2\omega\left(\sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2} + 4t^2 A_\omega^2 - 1\right)} f_c \left( \frac{-1 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2}}{2t\omega} \right) \\ &+ \frac{\left(1 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2}\right)^2}{2t^2\omega\left(\sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2} + 1 - 4t^2 A_\omega^2\right)} f_c \left( -\frac{1 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2}}{2t\omega} \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

### 3.3.2 Application à la loi uniforme

Si l'amortissement visqueux  $c$  suit une loi uniforme, on a  $f_c(\theta) = \frac{\mathbb{1}_{\theta \in [c_-, c_+]}}{2\sqrt{3}\sigma_c}$  avec  $c_+ = c_0 + \sqrt{3}\sigma_c$  et  $c_- = c_0 - \sqrt{3}\sigma_c$ .

$$f_{Re(H)}(s) = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_c} \frac{A_\omega}{2s\omega\sqrt{-sA_\omega(1-sA_\omega)}} \mathbb{1}_{s \in J_{Re}} \quad (3.57)$$

$$f_{Im(H)}(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_c} \left[ \frac{\left(1 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2}\right)^2}{2\omega t^2 (1 - 4t^2 A_\omega^2 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2})} \mathbb{1}_{s \in J_{1Im}} + \frac{\left(-1 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2}\right)^2}{2\omega t^2 (-1 + 4t^2 A_\omega^2 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2})} \mathbb{1}_{s \in J_{2Im}} \right] \quad (3.58)$$

Nous allons à présent donner les intervalles  $J_{Re}$ ,  $J_{1Im}$  et  $J_{2Im}$ .

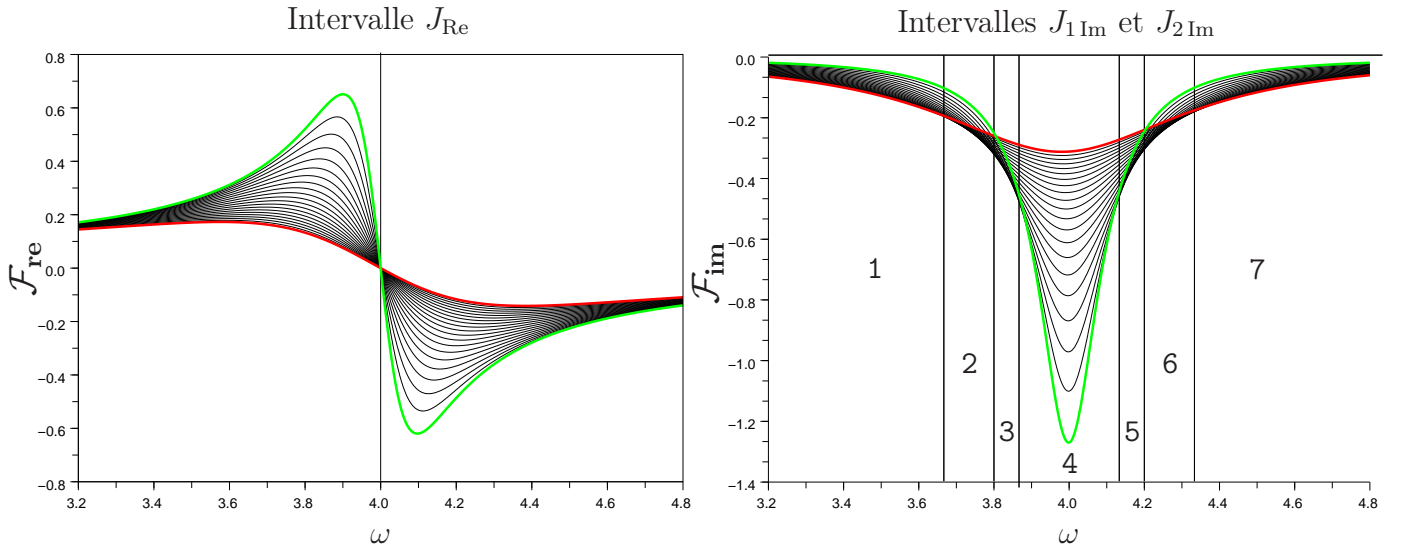


FIG. 3.4 – En rouge (-)  $\mathcal{F}_{re}(c_+)$  (figure de gauche) et  $\mathcal{F}_{im}(c_+)$  (figure de droite). En vert (-)  $\mathcal{F}_{re}(c_-)$  et  $\mathcal{F}_{im}(c_-)$ . En noir (-) des tirages de  $\mathcal{F}_{re}(x)$  et  $\mathcal{F}_{im}(x)$  avec  $x \in [c_-, c_+]$ .

Pour la partie réelle, il n'y a pas de difficultés, car l'application  $\mathcal{F}_{re}$  est injective pour  $\omega \leq \omega_0^2$  et  $\omega > \omega_0^2$ .

Voici les expressions de analytique de  $J_{\text{Re}}$  :

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega \leq \omega_0 \\ J_{\text{Re}} &= \left[ \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{A_\omega^2 + (c_+ \omega)^2}, \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{A_\omega^2 + (c_- \omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega > \omega_0 \\ J_{\text{Re}} &= \left[ \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{A_\omega^2 + (c_- \omega)^2}, \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{A_\omega^2 + (c_+ \omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

Pour la partie imaginaire, il y a plusieurs zones à distinguer car il y a une perte d'injectivité flagrante de part et d'autre de  $\omega_0$ . La figure 3.4 montre que les courbes correspondant à  $c_-$  et à  $c_+$  viennent même à s'intersecter. La partie hachurée correspondant aux zones 2,3,5 et 6 illustre ainsi le fait que  $\mathcal{F}_{\text{Im}}$  ne soit pas injective sur ces intervalles.

Nous allons à présent donner les expressions de  $J_{1\text{Im}}$  et  $J_{2\text{Im}}$  :

$$\text{Si } \omega < \frac{-c_+ + \sqrt{c_+^2 + 4\omega_0^2}}{2} \quad \text{et } \omega \geq \frac{c_+ + \sqrt{c_+^2 + 4\omega_0^2}}{2} \quad (\text{zone 1 et 7})$$

$$J_{1\text{Im}} = \left[ \frac{-c_+ \omega}{A_\omega^2 + (c_+ \omega)^2}, \frac{-c_- \omega}{A_\omega^2 + (c_- \omega)^2} \right] \quad (3.61)$$

$$J_{2\text{Re}} = \emptyset \quad (3.62)$$

$$\text{Si } \omega \in \left[ \frac{-c_+ + \sqrt{c_+^2 + 4\omega_0^2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{c_+ c_- + 2\omega_0^2 - \sqrt{c_+^2 c_-^2 + 4c_+ c_- \omega_0^2}} \right] \quad (\text{zone 2})$$

$$J_{1\text{Im}} = \left[ -\frac{1}{2A_\omega}, \frac{-c_- \omega}{A_\omega^2 + (c_- \omega)^2} \right] \quad (3.63)$$

$$J_{2\text{Im}} = \left[ -\frac{1}{2A_\omega}, \frac{-c_+ \omega}{A_\omega^2 + (c_+ \omega)^2} \right] \quad (3.64)$$

$$\text{Si } \omega \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{c_+ c_- + 2\omega_0^2 - \sqrt{c_+^2 c_-^2 + 4c_+ c_- \omega_0^2}}, \frac{-c_- + \sqrt{c_-^2 + 4\omega_0^2}}{2} \right] \quad (\text{zone 3})$$

$$J_{1\text{Im}} = \left[ -\frac{1}{2A_\omega}, \frac{-c_+ \omega}{A_\omega^2 + (c_+ \omega)^2} \right] \quad (3.65)$$

$$J_{2\text{Im}} = \left[ -\frac{1}{2A_\omega}, \frac{-c_- \omega}{A_\omega^2 + (c_- \omega)^2} \right] \quad (3.66)$$

$$\text{Si } \omega \in \left[ \frac{-c_+ + \sqrt{c_+^2 + 4\omega_0^2}}{2}, \frac{c_- + \sqrt{c_-^2 + 4\omega_0^2}}{2} \right] \text{ (zone 4)}$$

$$J_{1\text{Im}} = \left[ \frac{-c_- \omega}{A_\omega^2 + (c_- \omega)^2}, \frac{-c_+ \omega}{A_\omega^2 + (c_+ \omega)^2} \right] \quad (3.67)$$

$$J_{2\text{Im}} = \emptyset \quad (3.68)$$

$$\text{Si } \omega \in \left[ \frac{c_- + \sqrt{c_-^2 + 4\omega_0^2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{c_+ c_- + 2\omega_0^2 + \sqrt{c_+^2 c_-^2 + 4c_+ c_- \omega_0^2}} \right] \text{ (zone 5)}$$

$$J_{1\text{Im}} = \left[ -\frac{1}{2A_\omega}, \frac{-c_+ \omega}{A_\omega^2 + (c_+ \omega)^2} \right] \quad (3.69)$$

$$J_{2\text{Im}} = \left[ -\frac{1}{2A_\omega}, \frac{-c_- \omega}{A_\omega^2 + (c_- \omega)^2} \right] \quad (3.70)$$

$$\text{Si } \omega \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{c_+ c_- + 2\omega_0^2 + \sqrt{c_+^2 c_-^2 + 4c_+ c_- \omega_0^2}}, \frac{c_+ + \sqrt{c_+^2 + 4\omega_0^2}}{2} \right] \text{ (zone 6)}$$

$$J_{1\text{Im}} = \left[ -\frac{1}{2A_\omega}, \frac{-c_- \omega}{A_\omega^2 + (c_- \omega)^2} \right] \quad (3.71)$$

$$J_{2\text{Im}} = \left[ -\frac{1}{2A_\omega}, \frac{-c_+ \omega}{A_\omega^2 + (c_+ \omega)^2} \right] \quad (3.72)$$

C'est toujours l'image par  $\mathcal{F}_{\text{re}}$  et de  $\mathcal{F}_{\text{im}}$  de l'intervalle  $[c_-, c_+]$  qui s'avère être la partie délicate de la résolution analytique. Une fois le support exhibé, le problème de trouver une primitive n'est pas très compliqué car les fonctions restent classiques. Nous pouvons dès à présent passer au calcul des moments, mais c'est la même expression qui permettra de définir les enveloppes.

### 3.3.2.1 Moyenne et écart-type de $\text{Re } \tilde{H}$

#### 3.3.2.1.a Moyenne

$$M_1(\text{Re } \tilde{H}) = \int_{\mathbb{R}} s f_{\text{Re}(H)}(s) ds = \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_c \omega} \frac{A_\omega}{\sqrt{s A_\omega (1 - s A_\omega)}} \mathbb{1}_{s \in J_{\text{Re}}}$$

Une primitive est donnée par  $s \rightarrow \frac{\arcsin(2s A_\omega - 1)}{2\omega}$ . Il n'y a pas de problème pour évaluer cette primitive en les bornes de  $J_{\text{Re}}$ . On obtient :

$$M_1(\text{Re } \tilde{H}) = \frac{\text{signe}(A_\omega)}{4\sqrt{3}\sigma_c} \left[ \arcsin \left( \frac{A_\omega^2 - c_-^2 \omega^2}{A_\omega^2 + c_-^2 \omega^2} \right) - \arcsin \left( \frac{A_\omega^2 - c_+^2 \omega^2}{A_\omega^2 + c_+^2 \omega^2} \right) \right] \quad (3.73)$$

Il est intéressant de faire tendre  $\sigma_c$  vers 0, en sachant que  $c_{\pm} = c_0 \pm \sqrt{3}\sigma_c$  donc après un développement limité, on obtient :

$$M_1(\operatorname{Re} \tilde{H}) = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{A_{\omega}^2 + (c_0 \omega)^2} + O(\sigma_c) \quad (3.74)$$

On retombe donc sur la partie réelle en considérant  $c$  constant.

### 3.3.2.1.b Ecart-type

Pour l'écart-type, il nous faut calculer tout d'abord le moment d'ordre 2 :

$$M_2(\operatorname{Re} \tilde{H}) = \int_{\mathbb{R}} s^2 f_{\operatorname{Re}(H)}(s) ds = \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_c\omega} \frac{s A_{\omega}}{\sqrt{s A_{\omega}(1 - s A_{\omega})}} \mathbb{1}_{s \in J_{\operatorname{Re}}}$$

Une primitive est donnée par  $s \rightarrow \frac{\arcsin(2s A_{\omega} - 1)}{2 A_{\omega}} - \frac{\sqrt{A_{\omega}s(1 - s A_{\omega})}}{A_{\omega}}$ . Voici donc l'expression du moment d'ordre 2 de la partie réelle après évaluation en les bornes de  $J_{\operatorname{Re}}$  :

$$\begin{aligned} M_2(\operatorname{Re} \tilde{H}) &= \frac{\operatorname{signe}(A_{\omega})}{8\sqrt{3}\sigma_c\omega} \left[ \arcsin\left(\frac{A_{\omega}^2 - c_-^2\omega^2}{A_{\omega}^2 + c_-^2\omega^2}\right) - \arcsin\left(\frac{A_{\omega}^2 - c_+^2\omega^2}{A_{\omega}^2 + c_+^2\omega^2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{\operatorname{signe}(A_{\omega})}{4\sqrt{3}\sigma_c} \left[ \frac{c_+}{A_{\omega}^2 + (c_+\omega)^2} - \frac{c_-}{A_{\omega}^2 + (c_-\omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.75)$$

Le passage à la limite en faisant tendre  $\sigma_c$  vers 0 nous ramène à la valeur déterministe au carré.

### 3.3.2.2 Moyenne et écart-type de $\operatorname{Im} \tilde{H}$

Les expressions analytiques de la moyenne et de l'écart-type de  $\operatorname{Im} \tilde{H}$  sont un peu moins intuitives que pour la partie imaginaire à cause des repliements de  $\mathcal{F}_{\operatorname{im}}$ .

#### 3.3.2.2.a Moyenne

Commençons par le moment d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} M_1(\operatorname{Im} \tilde{H}) &= \int_{\mathbb{R}} t f_{\operatorname{Im}(H)}(t) ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_c\omega} \left[ \frac{\left(1 + \sqrt{1 - 4t^2 A_{\omega}^2}\right)^2}{t(1 - 4t^2 A_{\omega}^2 + \sqrt{1 - 4t^2 A_{\omega}^2})} \mathbb{1}_{s \in J_{1\operatorname{Im}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(-1 + \sqrt{1 - 4t^2 A_{\omega}^2}\right)^2}{t(-1 + 4t^2 A_{\omega}^2 + \sqrt{1 - 4t^2 A_{\omega}^2})} \mathbb{1}_{s \in J_{2\operatorname{Im}}} \right] \end{aligned} \quad (3.76)$$

Une primitive est donné pour chaque membre par  $\pm \ln(-t) + \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2 c^2 \omega^2}}{1 + \sqrt{1 - 4s^2 c^2 \omega^2}}\right) / 2$ . Lors de l'évaluation de cette primitive en les bornes données par  $J_{1\operatorname{Im}}$  et  $J_{2\operatorname{Im}}$ , on s'aperçoit que l'on peut obtenir une formule simple valable  $\forall \omega$  :

$$M_1(\operatorname{Re} \tilde{H}) = \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_c\omega} \ln\left(\frac{A_{\omega}^2 + c_+^2\omega^2}{A_{\omega}^2 + c_-^2\omega^2}\right) \quad (3.77)$$



Un développement limité pour  $\sigma_c$  proche de 0 donne :

$$M_1(\operatorname{Re} \tilde{H}) = \frac{-c_0 \omega}{A_\omega^2 + (c_0 \omega)^2} + O(\sigma_c) \quad (3.78)$$

### 3.3.2.2.b Ecart-type

Nous allons maintenant calculer l'écart-type de la partie imaginaire et nous allons commencer par le moment d'ordre 2, qui est donné par :

$$M_2(\operatorname{Im} \tilde{H}) = \int_{\mathbb{R}} t^2 f_{\operatorname{Im}(H)}(t) ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_c \omega} \left[ \frac{\left(1 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2}\right)^2}{(1 - 4t^2 A_\omega^2 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2})} \mathbb{1}_{s \in J_{1\operatorname{Im}}} + \frac{\left(-1 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2}\right)^2}{(-1 + 4t^2 A_\omega^2 + \sqrt{1 - 4t^2 A_\omega^2})} \mathbb{1}_{s \in J_{2\operatorname{Im}}} \right] \quad (3.79)$$

Une primitive est donné par  $\pm \frac{t}{2} + \frac{\arcsin(2tA_\omega)}{2A_\omega}$ , ce qui nous mène au résultat suivant :

Si  $\omega$  appartient à la zone 1 ou 7 :

$$M_2(\operatorname{Im} \tilde{H}) = \frac{1}{8\sqrt{3}\omega\sigma_c A_\omega} \left[ \arcsin\left(\frac{2c_+ \omega A_\omega}{A_\omega^2 + c_+^2 \omega^2}\right) - \arcsin\left(\frac{2c_- \omega A_\omega}{A_\omega^2 + c_-^2 \omega^2}\right) \right] + \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_c} \left[ \frac{c_-}{A_\omega^2 + c_-^2 \omega^2} - \frac{c_+}{A_\omega^2 + c_+^2 \omega^2} \right] \quad (3.80)$$

Si  $\omega$  appartient à la zone 2 ou 3 :

$$M_2(\operatorname{Im} \tilde{H}) = -\frac{1}{8\sqrt{3}\omega\sigma_c A_\omega} \left[ \arcsin\left(\frac{2c_+ \omega A_\omega}{A_\omega^2 + c_+^2 \omega^2}\right) + \arcsin\left(\frac{2c_- \omega A_\omega}{A_\omega^2 + c_-^2 \omega^2}\right) \right] + \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_c} \left[ \frac{c_-}{A_\omega^2 + c_-^2 \omega^2} - \frac{c_+}{A_\omega^2 + c_+^2 \omega^2} \right] + \frac{\pi}{4\sqrt{3}\sigma_c \omega A_\omega} \quad (3.81)$$

Si  $\omega$  appartient à la zone 5 ou 6 :

$$M_2(\operatorname{Im} \tilde{H}) = -\frac{1}{8\sqrt{3}\omega\sigma_c A_\omega} \left[ \arcsin\left(\frac{2c_+ \omega A_\omega}{A_\omega^2 + c_+^2 \omega^2}\right) + \arcsin\left(\frac{2c_- \omega A_\omega}{A_\omega^2 + c_-^2 \omega^2}\right) \right] + \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_c} \left[ \frac{c_-}{A_\omega^2 + c_-^2 \omega^2} - \frac{c_+}{A_\omega^2 + c_+^2 \omega^2} \right] - \frac{\pi}{4\sqrt{3}\sigma_c \omega A_\omega} \quad (3.82)$$

Si  $\omega$  appartient à la zone 4 :

$$M_2(\operatorname{Im} \tilde{H}) = \frac{1}{8\sqrt{3}\omega\sigma_c A_\omega} \left[ \arcsin\left(\frac{2c_- \omega A_\omega}{A_\omega^2 + c_-^2 \omega^2}\right) - \arcsin\left(\frac{2c_+ \omega A_\omega}{A_\omega^2 + c_+^2 \omega^2}\right) \right] + \frac{1}{4\sqrt{3}\sigma_c} \left[ \frac{c_-}{A_\omega^2 + c_-^2 \omega^2} - \frac{c_+}{A_\omega^2 + c_+^2 \omega^2} \right] \quad (3.83)$$

En faisant tendre  $\sigma_c$  vers 0, on retombe sur le cas déterministe, car les intervalles où l'application n'était plus injective (zones 2,3,5 et 6) sont réduits à un singleton

en remarquant que 
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{c_0^2 + 2\omega_0^2 \pm \sqrt{c_0^4 + 4c_0^2\omega_0^2}} = \frac{\sqrt{(c_0 \pm \sqrt{c_0^2 + 4\omega_0^2})^2}}{2}.$$

### 3.3.3 Confrontation avec Monte Carlo

Nous allons à nouveau confronter les solutions analytiques obtenues avec la technique de Monte Carlo. Nous ne re-détaillerons pas la technique car nous l'avons déjà fait précédemment. Il faut bien remarquer que la variable aléatoire  $c$  est générée selon une loi uniforme sur l'intervalle  $[c_-, c_+]$ .

Nous avons comparé les moyennes de la partie réelle et de la partie imaginaire de la fonction de réponse en fréquence données par Monte Carlo d'une part et par la solution analytique d'autre part. La convergence de la technique de Monte Carlo est plus rapide dans le cas de l'amortissement visqueux aléatoire. En effet la figure 3.5 compare la solution analytique à un tirage de 1000 réalisations (pour une dispersion de 40%). La solution est déjà quasiment satisfaisante, sauf aux pics (où l'amortissement joue un grand rôle). La figure 3.5 permet de voir que pour 10000 tirages, la convergence est pleinement satisfaisante et cela valide également d'un point de vue numérique notre solution analytique.

La plupart des remarques qui ont été faites pour la fréquence caractéristique aléatoire restent vraies pour le cas présent. Nous ne nous répèterons pas, mais nous attirons l'attention sur l'influence de l'amortissement aux pics qui sera important pour le chapitre suivant.

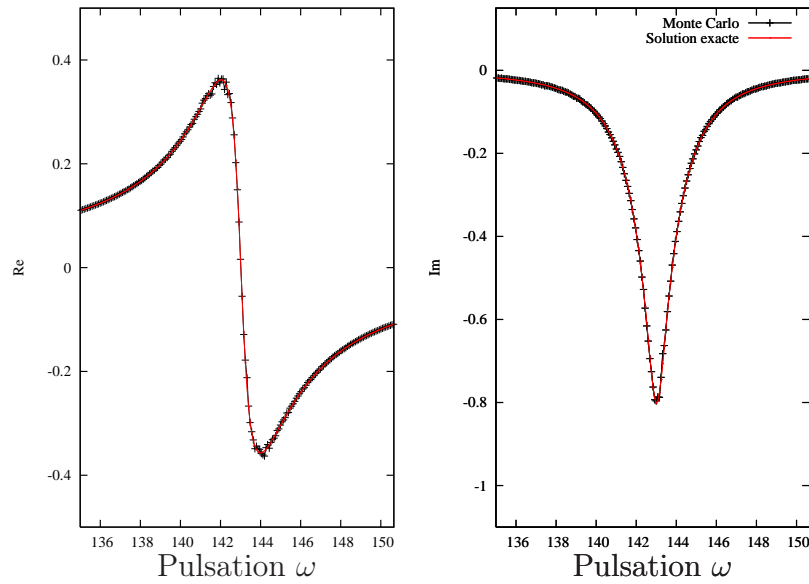


FIG. 3.5 – En rouge (–) la solution analytique. En noir (+) la solution obtenue avec la méthode de Monte Carlo avec 1000 réalisations.  $\omega_0 = 143s^{-1}$   $c_0 = 0.09$   $\sigma_c = 40\%c_0$

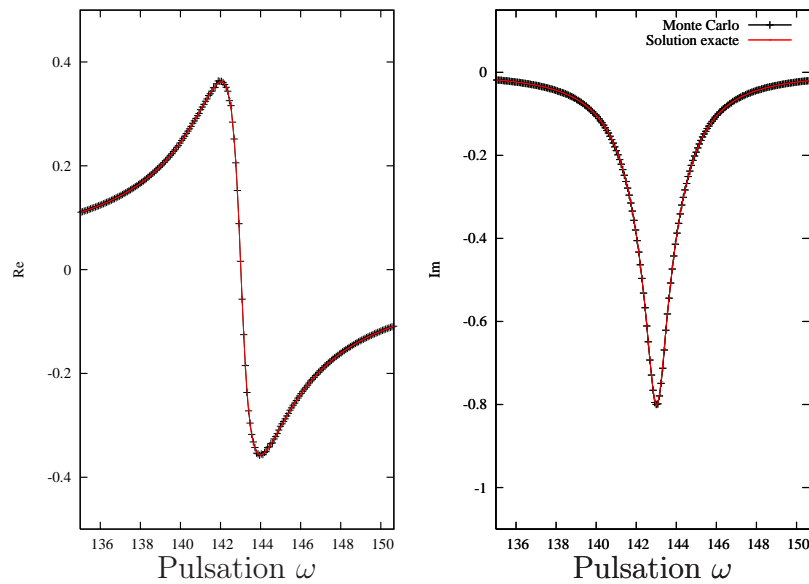


FIG. 3.6 – En rouge (–) la solution analytique. En noir (+) la solution obtenue avec la méthode de Monte-Carlo avec 10 000 réalisations.  $\omega_0 = 143s^{-1}$   $c_0 = 0.09$   $\sigma_c = 40\%c_0$

## Conclusion

Nous avons traité dans ce chapitre l'influence de la fréquence propre et de l'amortissement visqueux pris séparément sur la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction de réponse en fréquence. Nous avons ainsi vu comment chacun de ces deux paramètres pouvait agir. Il est possible de conclure que la fréquence propre caractéristique  $\omega_0^2$  influence davantage les résultats que l'amortissement visqueux  $c$ , comme le montre par exemple les vitesses de convergence dans les techniques de Monte Carlo. C'est donc les paramètres qui influencent la fréquence propre qui pourront affecter davantage la réponse (sur des problèmes de décalage en fréquence par exemple) que ceux qui concernent l'amortissement. Le calcul des probabilités permet de mesurer quantitativement l'impact de l'aléa de ces paramètres sur la réponse en fréquence du système.

Le but du chapitre qui va suivre est d'étudier l'influence conjointe de ces deux paramètres. Ceci est plus compliqué car il faut choisir un couple dans un pavé de  $\mathbb{R}^2$  et la résolution va devoir faire appel à une version vectoriel du calcul de la densité. Le cas de résolution avec un paramètre aléatoire unique facilite le passage au cas plus général qui va suivre.

# Chapitre 4

## L'analyse modale probabiliste

Ce chapitre constitue un apport majeur du travail réalisé dans le cadre de la présente thèse. Nous allons considérer la fréquence propre au carré et l'amortissement visqueux comme étant un couple de variables aléatoires indépendantes. Nous allons alors chercher à écrire analytiquement la densité de probabilité de la partie réelle et de la partie imaginaire de la FRF.

### 4.1 Analyse modale déterministe

Lorsque l'on s'intéresse à un système à plusieurs degrés de liberté on cherche à écrire l'équation (3.2) sous forme vectorielle, ce qui dans le domaine de Fourier donne l'équation suivante :

$$(-\omega^2 \mathbb{M} + i\omega \mathbb{C} + \omega_0^2 \mathbb{K}) \tilde{U}(\omega) = \tilde{F}(\omega) \quad (4.1)$$

Les matrices de masse  $\mathbb{M}$ , de raideur  $\mathbb{K}$  et d'amortissement  $\mathbb{C}$  proviennent de la formulation du problème considéré. Dans la technique très largement répandue des éléments finis, ces matrices sont issues de la formulation variationnelle du problème couplée à l'approximation locale de la solution. Les conditions limites cinématiques du problème sont alors adjointes à (4.1) et jouent toujours un rôle fondamental car elles conditionnent les modes obtenus.

Résoudre directement ce système peut s'avérer généralement coûteux numériquement, car le nombre d'éléments mis en jeu est trop important. Il faut donc avoir recours à des méthodes autres comme celles de la (co-)diagonalisation de l'opérateur pour s'en sortir. Mais ces techniques ne sont applicables que lorsque les matrices présentent des propriétés bien spécifiques (symétriques, définies positives....). Dans ce qui va suivre, nous allons prendre pour hypothèse que les matrices du problème possèdent ces propriétés, ce qui revient à utiliser l'hypothèse de Basile. Cette dernière consiste à assumer que  $\mathbb{C}$  est une combinaison linéaire de  $\mathbb{M}$  et/ou de  $\mathbb{K}$ , ce qui revient à considérer exclusivement les propriétés de ces deux dernières matrices dans la résolution.

### 4.1.1 Hypothèses

L'approche paramétrique de la méthode que nous allons présenter se plie aux mêmes hypothèses que pour le système vibrant déterministe. Ainsi l'hypothèse de Basile va se traduire par  $\mathbb{C} = c\mathbb{K}$ . Cette hypothèse pourrait être améliorée en écrivant  $\mathbb{C} = c_1\mathbb{M} + c_2\mathbb{K}$ , mais cela complique considérablement les expressions analytiques à venir, donc dans un souci de clarté nous resterons sur une l'hypothèse de Basile classique  $\mathbb{C} = c\mathbb{K}$ .

Les deux paramètres incertains considérés sont  $\omega_0^2$  et  $c$ , sur lesquels nous supposons qu'en tant que variables aléatoires, ces dernières sont gouvernées par des lois absolument continues.

Enfin nous allons sommer les contributions modales probabilistes comme pour un système linéaire déterministe. En toute rigueur il devrait y avoir une opération de plus dans le calcul de probabilité que cela implique. Il est possible de se passer de cette étape de calcul en faisant l'hypothèse de la bonne séparation des modes, nous allons donc supposer que les valeurs propres  $(\lambda_j)_j$  vérifient un critère de séparation adéquat.

En reprenant (4.1), si on sait diagonaliser le système en faisant l'hypothèse de Basile, le problème revient à trouver les solutions  $(\lambda_j, \mathbf{p}_j)_{j \leq n}$  du problème aux valeurs propres suivant :  $\mathbb{M} \mathbf{p}_j = \lambda_j \mathbb{K} \mathbf{p}_j$ . Les vecteurs propres  $(\mathbf{p}_j)_{j \leq n}$  permettent d'écrire  $\mathbb{P} = \text{Vect}(\mathbf{p}_j)$  d'où

$$\mathbb{P}^{-1} \mathbb{M} \mathbb{P} = \mathbb{I}_n, \quad \mathbf{p}_j^T \mathbb{K} \mathbf{p}_j = \lambda_j, \quad \forall j \leq n \quad (4.2)$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} \ddots & & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\omega^2 + \lambda_j \omega_0^2 + i c \lambda_j & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \ddots \end{array} \right) \tilde{U}(\omega) = \tilde{F}(\omega) \quad (4.3)$$

Si on désigne par  $\tilde{H}_{jj}$  l'inverse d'un des éléments diagonaux de cette matrice, on s'intéresse à la densité de probabilité de  $\tilde{H}_{jj}$ .

En gardant à l'esprit l'hypothèse de séparation évoquée ci-dessus, nous allons sommer les densités de probabilité des éléments diagonaux en pondérant par des coefficients  $B_j$  qui proviennent de la matrices de passage  $\mathbb{P}$  lors du retour à la base initiale. Nous écrivons donc la densité de probabilité  $f_{\tilde{H}}$  de la réponse en fréquence sous la forme suivante :

$$f_{\tilde{H}}(\omega) = \sum_j B_j f_{\tilde{H}_{jj}}(\omega) \quad (4.4)$$

où  $f_{\tilde{H}_{jj}}$  désigne la densité de probabilité du coefficient (diagonal) de  $\tilde{H}$  en base modale.

### 4.1.2 Méthode de calcul

Nous allons nous intéresser au comportement d'un mode isolé. Cela se traduira par l'étude de l'expression suivante :

$$\tilde{H}_{jj}(\omega) = \frac{(-\omega^2 + \lambda_j \omega_0^2)}{(-\omega^2 + \lambda_j \omega_0^2)^2 + (c \lambda_j \omega)^2} + i \frac{-c \lambda_j \omega}{(-\omega^2 + \lambda_j \omega_0^2)^2 + (c \lambda_j \omega)^2} \quad (4.5)$$

Ceci est l'expression déterministe de la contribution d'un coefficient diagonal de  $\tilde{H}$  en base modale, d'où l'écriture  $\tilde{H}_{jj}$ . A noter la présence de la valeur propre  $\lambda_j$ . Le coefficient de contribution modale  $B_j$  (qui provient du retour à la base initiale) est un paramètre déterministe qui n'intervient pas dans le problème probabiliste du fait de la séparation des modes.

Nous nous concentrerons sur (4.5), qui reste une expression à valeurs dans le plan complexe. Cette dernière peut difficilement être décrite comme une "variable aléatoire complexe", car la finalité d'une variable aléatoire est d'être comparée à une valeur réelle (l'espérance de cette comparaison correspondant à une probabilité), et malheureusement dans le plan complexe, il n'y a pas de relation d'ordre. C'est pour cette raison que même dans la théorie de l'intégration dans  $\mathbb{C}$  et notamment des fonctions holomorphes (voir [Rud96] pour plus de détails), on considère séparément partie réelle et partie imaginaire, sans pour autant oublier que les deux sont étroitement liées. Nous nous contenterons de même de considérer séparément partie réelle et partie imaginaire de  $\tilde{H}$  dans ce qui va suivre.

## 4.2 Extension au système probabilisé

### 4.2.1 Formalisme

Nous allons considérer l'application suivante :

$$\mathcal{F} : (c, \omega_0^2) \rightarrow \left( \operatorname{Re} \tilde{H}_{jj}, \operatorname{Im} \tilde{H}_{jj} \right) \quad (4.6)$$

Il faut bien noter que  $\omega_0^2$  est homogène à une raideur divisée par une masse. Nous avons décidé de garder la grandeur quadratique car cela simplifie grandement les expressions à venir. Nous garderons à l'esprit qu'il s'agit d'une fréquence au carré et nous la noterons  $\Omega$  pour simplifier les notations. Ceci permet d'écrire  $\mathcal{F}$  dans (4.6) sous la forme suivante :

$$\mathcal{F} : (c, \Omega) \rightarrow \left( \frac{(-\omega^2 + \lambda_j \Omega)}{(-\omega^2 + \lambda_j \Omega)^2 + (c \lambda_j \omega)^2}, \frac{-c \lambda_j \omega}{(-\omega^2 + \lambda_j \Omega)^2 + (c \lambda_j \omega)^2} \right) \quad (4.7)$$

Les densités de probabilité de  $\Omega$  et  $c$  seront notées respectivement  $f_\Omega$  et  $f_c$ . Elles sont supposées indépendantes. Nous noterons la densité de probabilité conjointe  $F(c, \Omega)$  et nous aurons donc  $F(c, \Omega) = f_\Omega(\Omega) f_c(c)$ .

## 4.2.2 Changement de variables

Le calcul analytique présenté ici est en fait un changement de variables que nous allons détailler. Il s'agit de passer des variables  $(c, \Omega)$  aux variables  $(\operatorname{Re} \tilde{H}_{jj}, \operatorname{Im} \tilde{H}_{jj})$ . En étant conscient de quelques abus de notations, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{F} : (c, \Omega) = (s, t) \quad (4.8)$$

Concrètement, l'intégrale suivante  $\int_V F(c, \Omega) d\mu(c, \Omega)$  doit pouvoir se réécrire  $\int_{\mathcal{F}(V)} f_{\operatorname{Re}, \operatorname{Im}}(s, t) d\mu(s, t)$ ,

où  $f_{\operatorname{Re}, \operatorname{Im}}$  désigne la densité de probabilité conjointe de  $(\operatorname{Re} \tilde{H}_{jj}, \operatorname{Im} \tilde{H}_{jj})$  et  $d\mu$  la mesure de Lebesgue sur un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  convenable.

Nous allons vérifier point par point les étapes de ce changement de variables.

1.  $\mathcal{F}$  réalise une bijection de  $V$  sur  $\mathcal{F}(V)$ .
2. Le nouvel ensemble d'intégration est obtenu en écrivant que  $(s, t) \in \mathcal{F}(V) \Leftrightarrow (c, \Omega) = \mathcal{F}^{-1}(s, t) \in V$ . On obtient alors l'expression de  $\mathcal{F}^{-1}$  :

$$\begin{cases} \Omega = \frac{\omega^2}{\lambda_j} + \frac{s}{\lambda_j (s^2 + t^2)} \\ c = -\frac{t}{\omega \lambda_j (s^2 + t^2)} \end{cases} \quad (4.9)$$

3. D'après les formules (4.9), il est possible de donner l'expression des dérivées partielles de  $\mathcal{F}^{-1}$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial s} = \frac{1}{\lambda_j (s^2 + t^2)} - \frac{2s^2}{\lambda_j (s^2 + t^2)^2} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{2st}{\lambda_j (s^2 + t^2)^2} \\ \frac{\partial c}{\partial s} = \frac{2st}{\omega \lambda_j (s^2 + t^2)^2} \\ \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{2t^2}{\omega \lambda_j (s^2 + t^2)^2} - \frac{1}{\omega \lambda_j (s^2 + t^2)} \end{cases} \quad (4.10)$$

Toutes les expressions données par (4.10) sont celles de fonctions continues en  $(s, t)$ . Donc  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

4. Le jacobien de  $\mathcal{F}^{-1}$  noté  $J_{\mathcal{F}^{-1}}$  se calcule à partir de (4.10) :

$$J_{\mathcal{F}^{-1}}(s, t) = -\frac{1}{\lambda^2 \omega (s^2 + t^2)^2} \quad (4.11)$$

L'expression de ce jacobien reste simple et montre que le changement de variable n'entraîne pas une complication à outrance du problème.

5. Il reste à appliquer le théorème de changement de variables :

$$\int_V F(\Omega, c) d\mu(\Omega, c) = \int_{\mathcal{F}(V)} F(\mathcal{F}^{-1}(s, t)) |J_{\mathcal{F}^{-1}}(s, t)| d\mu(s, t) \quad (4.12)$$



Donc l'expression de  $G$  est donné par :

$$f_{\text{Re,Im}}(s,t) = \frac{1}{\lambda^2 \omega (s^2 + t^2)^2} f_{\Omega} \left( \frac{\omega^2}{\lambda_j} + \frac{s}{\lambda_j (s^2 + t^2)} \right) f_c \left( -\frac{t}{\omega \lambda_j (s^2 + t^2)} \right) \quad (4.13)$$

$$\text{où } (s,t) \in \mathcal{F}(V) = \left[ \frac{1}{2\lambda_j \max(\Omega\lambda_j - \omega^2)}, \frac{1}{2\lambda_j \min(\Omega\lambda_j - \omega^2)} \right] \times \left[ -\frac{1}{2\omega \lambda_j \min(c)}, 0 \right].$$

### 4.2.3 Présentation du calcul avec deux lois uniformes

Nous procédons comme au chapitre 3, c'est à dire que nous allons particulariser la résolution analytique en considérant deux lois uniformes pour  $c$  et pour  $\Omega$ . Nous considérons donc l'expression 4.13 en considérant que  $f_{\Omega}$  et  $f_c$  sont des lois uniformes.

La difficulté majeure réside dans l'expression du produit des deux indicatrices  $\mathbb{1}_{c(s,t)} \mathbb{1}_{\Omega(s,t)}$ . Il s'agit du point délicat de la méthode. Cela se révèle extrêmement technique car le pavé  $[s_1, s_2] \times [t_1, t_2]$  dépend de  $\omega$ . Pour décrire totalement le pavé d'intégration inclus dans  $\mathcal{F}(V)$  sur lequel  $f_{\text{Re,Im}}$  n'est pas nulle, il y a 15 intervalles de  $\omega$  à distinguer pour la partie imaginaire ( $t$ ) et 15 autres intervalles pour la partie réelle ( $s$ ). Cet aspect combinatoire rend le tout particulièrement lourd à exposer. C'est la raison pour laquelle nous invitons le lecteur à se reporter à l'annexe B.1 pour avoir le détail des expressions analytiques. Nous n'exposerons que la méthode de calcul en reliant les résultats effectifs en annexe.

La méthode analytique est simple mais fastidieuse. Remarquons d'une part que les conditions d'application du théorème de Fubini sont réunies (sur un intervalle compact) et que d'autre part il est possible d'exhiber une primitive de la fonction dans tous les cas. Une fois que les bornes du changement variables sont correctement déterminées en fonction de  $\omega$ , il suffit alors d'intégrer (par rapport à  $s$  ou par rapport à  $t$ ) et d'évaluer cette primitive en les bornes.

Avant d'intégrer par rapport à  $t$  ou à  $s$ , il faut déterminer les bornes d'intégration qui dépendent respectivement de  $s$  et de  $t$ . On se retrouve confronté aux quantités suivantes :

$$M_1^{\text{Re}} = \int_{s_1}^{s_2} \left( s \int_{t_1(s)}^{t_2(s)} f_{\text{Re,Im}}(s,t) dt \right) ds \quad (4.14)$$

$$M_1^{\text{Im}} = \int_{t_1}^{t_2} \left( t \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} f_{\text{Re,Im}}(s,t) ds \right) dt \quad (4.15)$$

Dans le cas de lois uniformes, il est possible de simplifier en :

$$M_1^{\text{Re}} = \frac{1}{2\lambda^2 \omega} \int_{s_1}^{s_2} \left[ \frac{t}{s(t^2 + s^2)} + \frac{\arctan(t/s)}{s^2} \right]_{t_1(s)}^{t_2(s)} ds \quad (4.16)$$

$$M_1^{\text{Im}} = \frac{1}{2\lambda^2 \omega} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{s}{t(t^2 + s^2)} + \frac{\arctan(s/t)}{t^2} \right]_{s_1(t)}^{s_2(t)} dt \quad (4.17)$$

Remarquons au passage que l'intégration en elle-même est facile, et que  $s$  et  $t$  jouent des rôles symétriques. Le passage délicat se situe dans l'expression des bornes.

La notation  $t_i(s)$  exprime que les bornes dépendent des valeurs de  $s$  possibles à  $\omega$  donné lorsque l'on intègre par rapport à  $t$ . Les cas à distinguer ainsi sont nombreux car en fonction de la pulsation, il y a plusieurs intervalles d'intégration différents. Il en va de même si on intègre d'abord par rapport  $s$ . Ceci est illustré à une fréquence fixée sur les figures 4.1 et 4.2 où l'ensemble d'intégration pour  $s \times t$  est colorié en bleu et où les lignes en pointillés montrent les intervalles successifs à considérer. L'annexe B.1 liste tous ces intervalles pour toutes les fréquences remarquables. Dans ce tableau figurent les bornes de  $s$  en fonction de  $t$  ou les bornes de  $t$  en fonction de  $s$ . Ces bornes sont déterminées par des fonctions  $G$ ,  $F_+$  et  $F_-$  qui sont les équations des cercles et des ellipses représentés sur les figures 4.1 et 4.2. Les expressions des fréquences remarquables pour chaque compact d'intégration sont également données dans l'annexe ainsi que les expressions de  $G$ ,  $F_+$  et  $F_-$ .

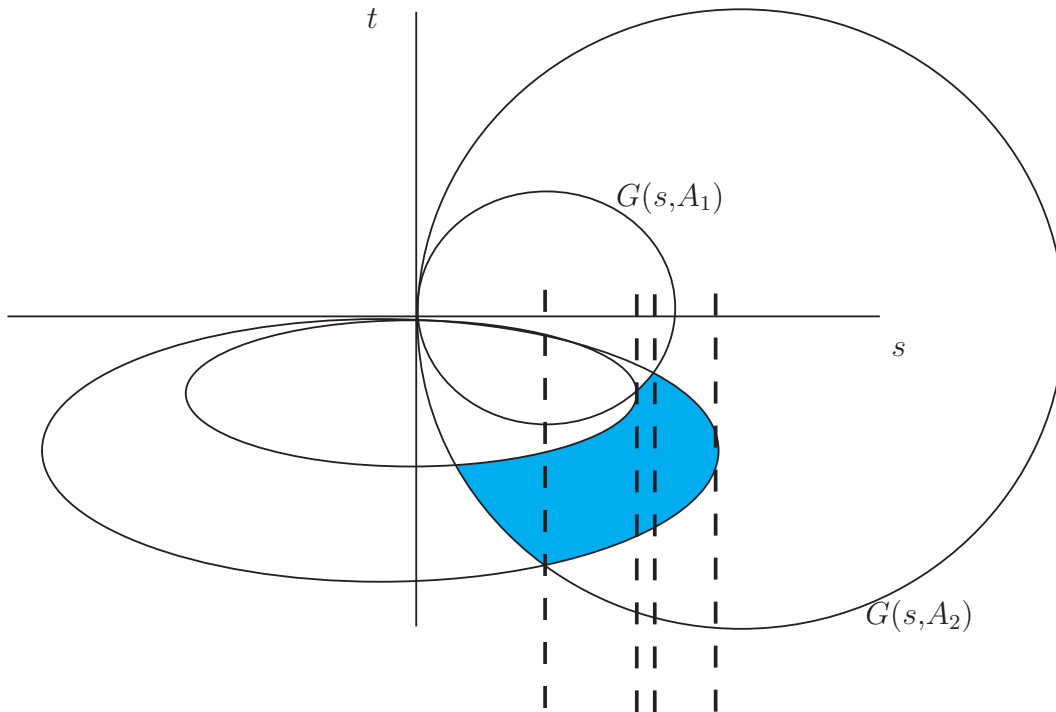


FIG. 4.1 – Exemple du compact  $\mathcal{F}(V)$  (en bleu) à considérer lors de l'intégration en  $t$  avec 4 intervalles  $[t_1(s), t_2(s)]$ .

#### 4.2.4 Application

Les figures 4.3 et 4.4 représentent la moyenne de la partie réelle et la moyenne de la partie imaginaire. Les couleurs montrent l'aspect combinatoire des différents cas traités (il y a évidemment

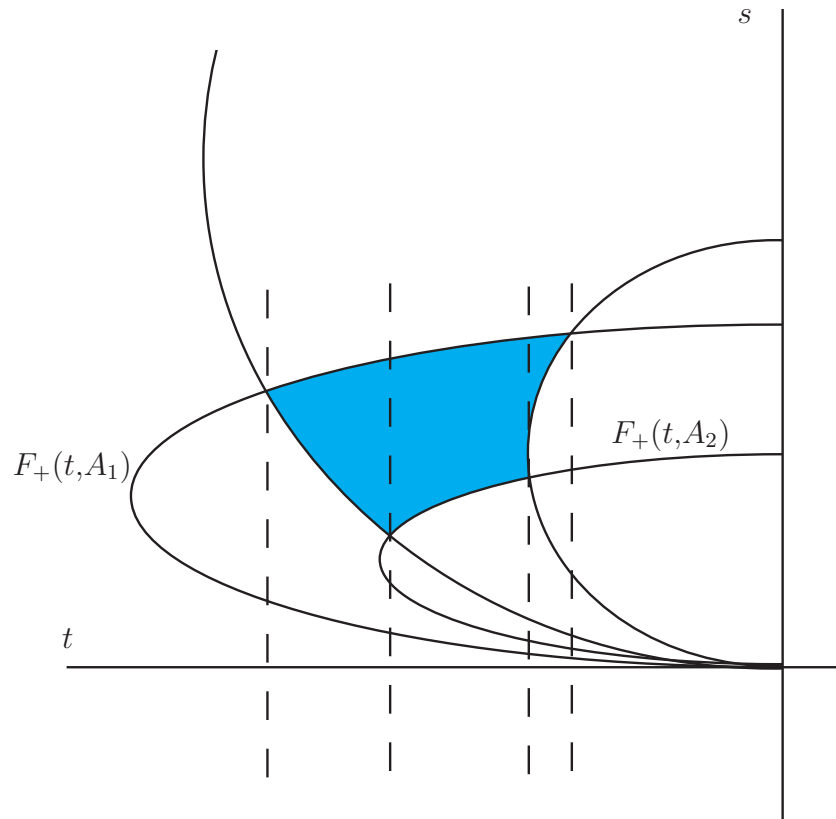


FIG. 4.2 – Exemple du compact  $\mathcal{F}(V)$  (en bleu) à considérer lors de l'intégration en  $s$  avec 3 intervalles  $[s_1(t), s_2(t)]$ .

continuité de la moyenne). Ces expressions ont été obtenues à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Les applications numériques réellement utilisables seront codées ultérieurement, car par manque de temps nous ne pouvons pas fournir une version propre de cette implantation. Le fichier de calcul formel est fourni en annexe sous format électronique.

## 4.3 Application à la poutre d'Euler-Bernoulli

### 4.3.1 Equations du problème

La poutre d'Euler-Bernoulli est traitée ici dans le cadre de la théorie des poutres minces, c'est à dire que la hauteur de la section de poutre est négligeable devant la largeur. Le cisaillement et les effets d'inertie rotationnelle sont négligés et les sections restent planes au cours de la déformation.

On considère le problème de la poutre en flexion pure, en sachant que la poutre est encastree-libre. La poutre est de longueur  $L$  et est soumise à une force ponctuelle  $F$  de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $f_o$  en  $L/2$  (voir 4.5). L'équation est donnée par :

$$-\omega^2 \rho S \hat{v}(x, \omega) + EI \frac{\partial^4 \hat{v}(x, \omega)}{\partial x^4} = \hat{F} \quad (4.18)$$

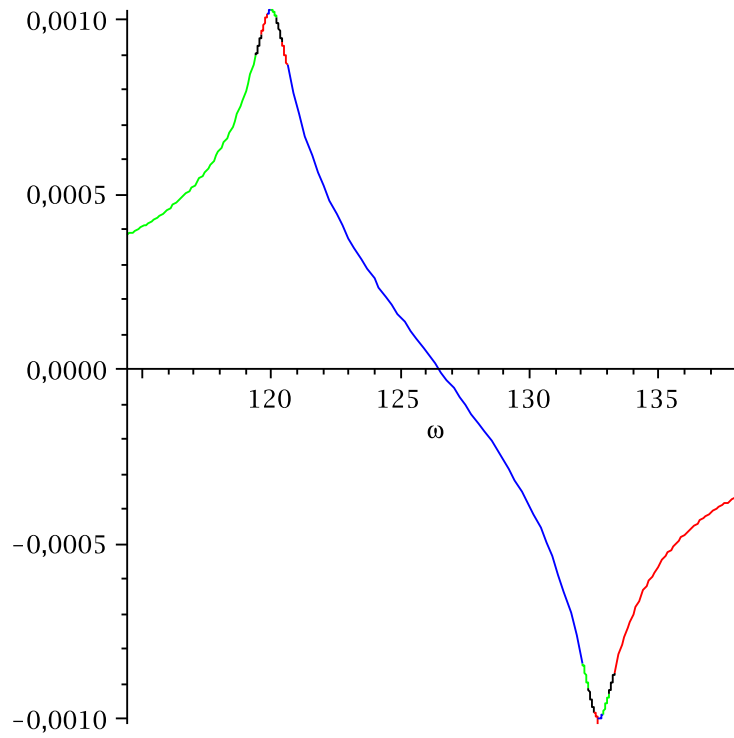


FIG. 4.3 – partie réelle

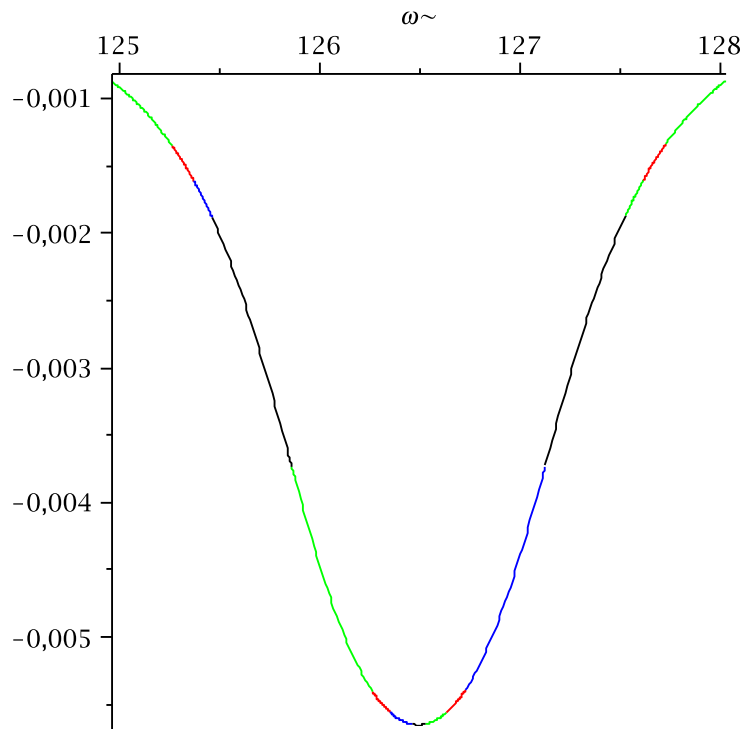


FIG. 4.4 – partie imaginaire

Ceci est l'équation de la poutre sans amortissement. Il est courant de diviser (4.18) par  $\rho S$ . Nous ajoutons ensuite un terme d'amortissement visqueux  $c'$  dans l'équation, c'est à dire que la dérivée par rapport au temps intervient dans l'expression de l'amortissement. Cependant nous laissons l'opérateur  $\varphi$  décider si l'amortissement porte sur le terme de flexion et/ou sur un autre terme (en  $x$ ):

$$-\omega^2 \hat{v}(x, \omega) + i c' \omega \varphi \cdot \hat{v}(x, \omega) + \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 \hat{v}(x, \omega)}{\partial x^4} = \frac{\hat{F}}{\rho S} \quad (4.19)$$

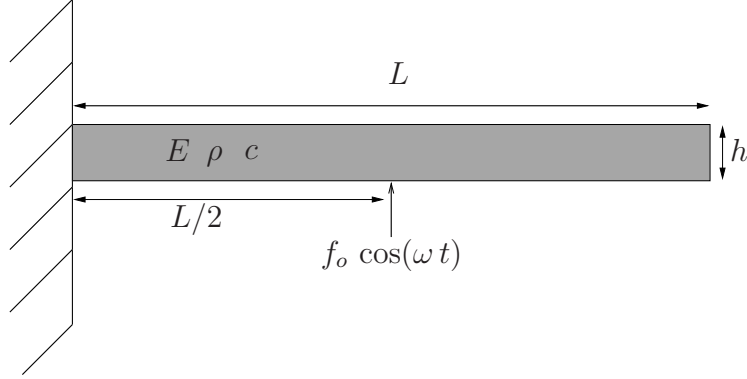


FIG. 4.5 – Poutre encastrée-libre

### 4.3.2 Résolution par éléments finis

Pour le système présenté, nous ne connaissons pas de solution analytique. Ceci est la cas de nombreux systèmes rencontrés en physique. Une technique largement répandue alors est de chercher une solution à l'aide de la méthode des éléments finis.

On procède donc à une formulation variationnelle discrète de (4.19) que l'on applique à un maillage régulier de la poutre dans la longueur. Après avoir choisi une base de polynômes de degré 3 par élément de longueur  $l$  (à chaque noeud il y a 2 inconnues : le déplacement et la rotation), on obtient les matrices élémentaires  $4 \times 4$  explicites suivantes (dont le calcul est donné dans [ZT89]) :

$$\mathbf{M}_{el} = \frac{l}{420} \begin{pmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{K}_{el} = \frac{1}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

On obtient également une matrice d'amortissement  $\mathbf{C}_{el}$  qui dépend bien sûr de l'opérateur  $\varphi$ . Nous utilisons l'hypothèse de Basile pour écrire que  $\mathbf{C}_{el} = \alpha \mathbf{K}_{el}$ , et nous notons  $c = \alpha c'$ .

L'assemblage des matrices élémentaires nous mène aux matrices globales de masse  $\mathbf{M}_d$  et de raideur  $\mathbf{K}_d$  (qui sont issues directement de la discrétisation et de la formulation variationnelle). Nous obtenons alors

$$\left[ -\omega^2 \mathbf{M}_d + \left( \frac{EI}{\rho S} + i c \omega \right) \mathbf{K}_d \right] \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.22)$$

Les conditions limites (la poutre est encastree-libre) sont adjointes au système et font alors que  $\mathbf{K}_d$  est définie positive. Il est alors possible de trouver une base de co-diagonalisation entre  $\mathbf{M}_d$  et  $\mathbf{K}_d$ .

Soient  $(\lambda_j, \mathbf{p}_j)_{j \leq n}$  les solutions du problème aux valeurs propres suivant :  $\mathbf{M}_d \mathbf{p}_j = \lambda_j \mathbf{K}_d \mathbf{p}_j$ . Les vecteurs propres vérifient  $(\mathbf{p}_j)_{j \leq n}$ , où  $\mathbf{P} = \text{Vect}(\mathbf{p}_j)$  :

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_d \mathbf{P} = \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{p}_j^T \mathbf{K}_d \mathbf{p}_j = \lambda_j, \quad \forall j \leq n \quad (4.23)$$

L'obtention des couples  $(\lambda_j, \mathbf{p}_j)_{j \leq n}$  est assurée par un algorithme qui ne nécessite pas l'inversion de  $\mathbf{M}_d$ , car cela est beaucoup trop coûteux numériquement d'une part, et surtout car l'erreur commise sur les valeurs propres est alors trop importante lorsque l'on repasse dans la base initiale. L'algorithme utilisé met en oeuvre à la fois la factorisation de Cholesky et la décomposition QR. Il s'agit de l'algorithme **QZ**. Ce dernier est exposé dans [GL96] et rappelé dans C.1.

En posant alors  $\omega_0^2 = \frac{EI}{\rho S}$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \ddots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\omega^2 + i c \omega \lambda_j + \lambda_j \omega_0^2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \ddots \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{g} \quad (4.24)$$

où  $\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{u}$  et  $\mathbf{g} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f}$ .  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{g}$  sont les vecteurs généralisés des déplacements et d'excitation. Le problème est maintenant de résoudre un système algébrique  $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{g}$  où  $\mathbf{H}$  est la fonction de réponse en fréquence.

Pour les applications à venir, le nombre d'éléments est fixé à 40, afin de découpler l'approche probabiliste et la résolution déterministe sur laquelle repose la méthode. Les 40 éléments nous permettent de disposer d'une convergence raisonnable vers la solution déterministe.

### 4.3.3 Première étape : description des paramètres du système vibrant

La méthode exposée ci-dessus repose sur la factorisation des paramètres intrinsèques  $E, \rho$  et  $c$  devant les matrices de discrétisation  $\mathbf{M}_d$  et  $\mathbf{K}_d$ . En ce sens la résolution (discrète) du problème est découplée du problème probabiliste. La fréquence propre  $\omega_0^2$  est un des paramètres aléatoires qui nous est nécessaire pour appliquer l'analyse modale probabiliste.

Il faut donc décrire les paramètres  $\omega_0^2$  et  $c$  avec un modèle probabiliste. Ce travail en amont revient à étudier les paramètres amenés à varier. Par exemple, on peut considérer un défaut dans le processus industriel de fabrication de la poutre et se dire que les dimensions sont variables,

donc l'influence du rapport  $I/S$  sur  $\omega_0^2$  doit être étudiée. Mais le cas le plus courant est l'incertitude due aux paramètres intrinsèques comme le module d'Young  $E$ , qui ne se mesure pas aussi facilement qu'une longueur ou une masse.

Pour procéder de manière rigoureuse dans le cas du module d'Young  $E$  et de la densité  $\rho$ , on pose  $h(E, \rho) = (\omega_0^2, \rho)$ . On fabrique alors à partir de  $h$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $\tilde{h}$ , en appliquant une méthode de régularisation si besoin est. Si  $F_{E, \rho}$  est la densité conjointe de  $E$  et de  $\rho$ , la densité de  $F_{\omega_0^2}$  de  $\omega_0^2$  est donnée par

$$F_{\omega_0^2}(s) = \int \frac{F_{E, \rho}(\tilde{h}^{-1}(s, t))}{|J_{\tilde{h}}(\tilde{h}^{-1}(s, t))|} (s, t) dt \quad (4.25)$$

où  $J_{\tilde{h}}$  désigne le jacobien de  $\tilde{h}$ .

Dans notre cas d'application de l'analyse modale probabiliste, nous avons exposé la résolution du problème avec une loi uniforme sur  $\omega_0^2$  et sur  $c$ . (4.25) serait à utiliser si on savait résoudre analytiquement le problème quelque soit la loi, mais pour une loi uniforme, il suffit de connaître les bornes extrêmes de  $\omega_0^2$  en fonction des bornes de  $E$  et de  $\rho$ . Une rapide étude de fonction fournit  $\frac{E_{\min} I}{\rho_{\max} S}$  et  $\frac{E_{\max} I}{\rho_{\min} S}$ . La densité (uniforme) que l'on retiendra est alors :

$$f_{\omega_0^2} = \frac{S}{I} \frac{\rho_{\min} \rho_{\max}}{E_{\max} \rho_{\max} - E_{\min} \rho_{\min}} \mathbb{1}_{[E_{\min} I / \rho_{\max} S, E_{\max} I / \rho_{\min} S]} \quad (4.26)$$

Pour ce qui est de l'amortissement visqueux  $c$ , étant donné la façon dont le problème a été posé et l'utilisation de l'hypothèse de Basile, nous prenons des valeurs arbitraires dans un intervalle  $[c_{\min}, c_{\max}] \subset \mathbb{R}^+$ .

L'étude dans le cas d'une poutre homogène peut-être étendue à une poutre sandwich, notamment quand on procède en exhibant les paramètres équivalents de la poutre sandwich homogénéisée. Cette approche peut s'avérer fastidieuse car on augmente le nombre de paramètres physiques décrivant le système. Cependant, il est possible de négliger certaines valeurs devant d'autres (comme l'amortissement de l'aluminium devant celui d'un polymère) lorsque l'on procède à la description probabiliste de l'ensemble. Ainsi des systèmes plus complexes peuvent être étudiés et c'est surtout cette étape de description probabiliste qui se compliquera.

#### 4.3.4 Deuxième étape : utilisation des résultats théoriques

Notre exemple est basé sur une loi uniforme et il est pertinent de remarquer qu'il est sûrement faux de considérer cette loi pour les paramètres du système vibrant. Le grand intérêt de la loi uniforme est d'être à support compact. Cette compacité est très utilisée dans la résolution analytique, mais elle possède également un sens très important d'un point de vue probabiliste.

Comme il a été rappelé en 2.1.1, la loi uniforme maximise l'entropie lorsque l'on est en présence d'un cas où l'on ne possède aucune information. Peu de travaux existent pour pouvoir affirmer quelles lois gouvernent les paramètres intrinsèques d'un système, et d'un point de vue théorique, la loi uniforme constitue donc une approche prudente. Cette approche est d'autant plus prudente qu'elle interdit de modéliser des paramètres par une description qui ne correspondrait pas à la physique, chose qui n'est absolument pas acquise dans le cas d'une loi gaussienne (dont les valeurs aberrantes sont tronquées, pour ne pas dire occultées). A ce titre, force est de constater que dans notre exemple, toutes les valeurs extrêmes de  $E$  et  $\rho$  interviennent dans (4.26) et dire que  $E$  ou  $\rho$  pourraient être infinis (même avec une probabilité nulle) ne saurait avoir un sens pour les applications pratiques comme celle qui nous concerne.

L'application des formules demandent de résoudre le problème aux valeurs propres dans un premier temps, et cela a exactement le même coût que lors de la résolution numérique du système déterministe. Une fois les couples  $(\lambda_j, \mathbf{p}_j)$  déterminés, on utilise les formules données dans l'annexe B.1 en utilisant la valeur de  $\lambda_j$  pour le mode  $j$  considéré. On revient à la base initiale par deux multiplications matrice-vecteur. Le coût de cette méthode probabiliste est du même ordre que la méthode déterministe, ce qui constitue son intérêt majeur.

Pour l'application numérique qui nous concerne, nous prenons  $h = 0.005m$ ,  $E_{\min} = 68Mpa$ ,  $E_{\max} = 72Mpa$ ,  $\rho_{\min} = 2650kg/m^3$ ,  $\rho_{\max} = 2700kg/m^3$ : on a donc  $\omega_0^2 \in [12089, 13585]$ . Pour l'amortissement nous prenons un intervalle  $c \in [0.08, 0.2]$ .

La résolution effective du problème aux valeurs propres avec  $L = 0.6m$  et 40 éléments donne  $\lambda_1 = 1.103277$ ,  $\lambda_2 = 95.442656$ ,  $\lambda_3 = 4015.813466$ . Notons au passage que l'on vérifie bien numériquement l'hypothèse de séparation. Ces valeurs sont à rapprocher des valeurs du problème aux valeurs propres classique par la formule  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i \omega_0^2}$  (ce qui fait un ordre de grandeur de 19Hz, 174Hz, 1128Hz pour les trois premiers modes de flexion avec  $\omega_0^2 = 12500$ ).

Les figures 4.6 et 4.7 sont une illustration de l'application de la méthode. Elles représentent la moyenne de la partie réelle et la moyenne de la partie imaginaire pour le premier mode de vibration qui correspond à la valeur propre  $\lambda_1$ . La combinatoire du problème est toujours illustrée par des changements de couleur d'un cas à un autre. Certains intervalles en fréquence sont très petits et interviennent donc très peu, ils ne font que confirmer la continuité de la moyenne. Ces intervalles dépendent beaucoup des valeurs extrêmes de l'amortissement et peuvent être plus importantes si on considère des amortissements plus faibles. Dans ce cas là, les pics possèdent une amplitude plus élevée et ces intervalles revêtent plus d'importance dans le résultat final. A noter que la poutre est un système vibrant dont les modes sont bien séparés, ce qui permet d'appliquer confortablement la méthode. Cet aspect séparé a également un grand intérêt lors de l'identification modale déterministe, et cela explique pourquoi nous l'avons retenue pour illustrer la méthode.



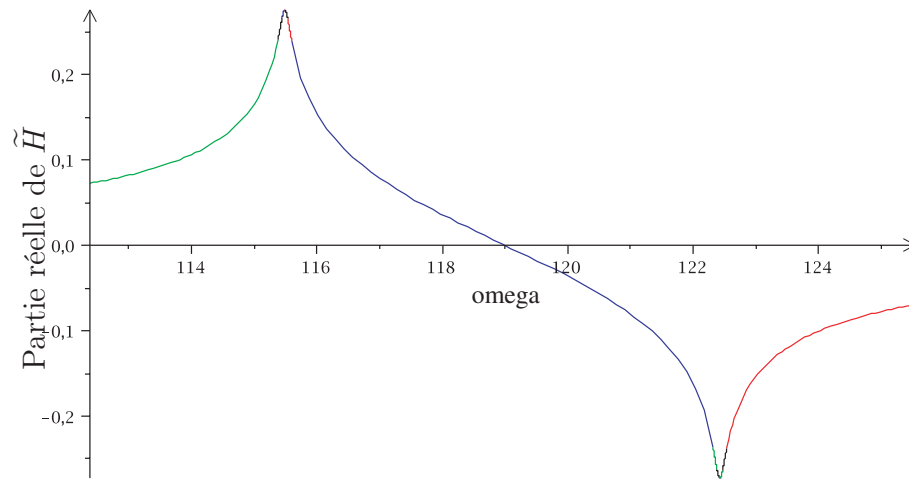


FIG. 4.6 – Moyenne de la partie réelle de  $\tilde{H}$  sur le deuxième mode de réponse de la poutre encastrée-libre excitée en son centre.

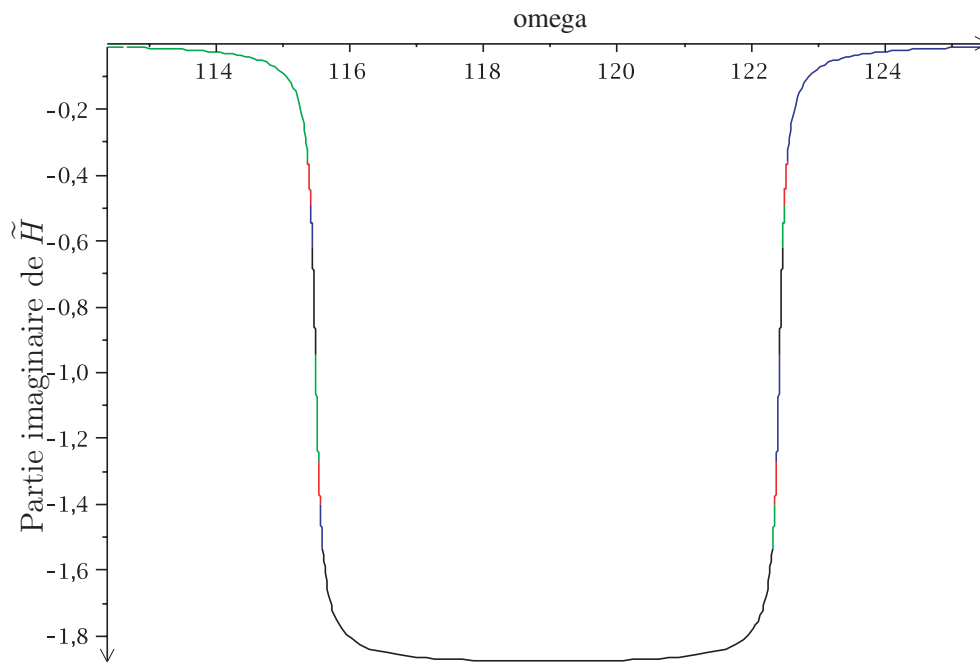


FIG. 4.7 – Moyenne de la partie imaginaire de  $\tilde{H}$  sur le deuxième mode de réponse de la poutre encastrée-libre excitée en son centre.

## Conclusion

Nous avons donné à cette démarche le nom d'*analyse modale probabiliste*.

La méthode développée consiste à modéliser les paramètres  $\omega_0^2$  et  $c$  comme des variables aléatoires de loi uniforme, c'est à dire comme des intervalles compacts. Puis d'appliquer le formalisme des probabilités pour déterminer comment le produit de deux lois uniformes sur un pavé sont transformés sur un mode de vibration. Nous avons séparé partie réelle et partie imaginaire et montré comment se développent les calculs.

Il faut remarquer que ces deux paramètres suffisent à caractériser un mode linéaire de vibration, mais que la dépendance du mode vis-à-vis de ces deux paramètres n'est en aucun cas linéaire. La résolution proposée passe par plusieurs étapes et les calculs présentés résolvent un système à un unique degré de liberté. Sous certaines hypothèses, la démarche a été étendue à des systèmes à plusieurs degrés de libertés, ce qui permet d'envisager d'appliquer la méthode aux cas des éléments finis notamment. L'exemple de la poutre apporte une illustration physique à l'exposé de la méthode.

Dans le chapitre qui va suivre nous allons nous baser sur des résultats acquis dans ce chapitre, par exemple les formules analytiques des moyennes, que l'on va essayer de superposer à une moyenne obtenue expérimentalement. Ce sera alors la démarche inverse qui va nous intéresser, à savoir non plus de prédire analytiquement le résultat, mais partir du résultat et essayer de remonter aux paramètres aléatoires.

# Chapitre 5

## Méthodes numériques

L'obtention de la probabilité d'un évènement dépend de la définition de cet évènement sur une tribu. Cette remarque triviale est à l'origine de nombreux paradoxes qui ont été souvent mentionnés par les probabilistes. Un paradoxe naît en général quand on considère un évènement sortit de son contexte (la tribu). On s'aperçoit que si on construit le dit évènement de deux façons différentes, le résultat in fine restant le même, la probabilité obtenue peut ne pas être la même. Un exemple classique est celui du paradoxe de Bertrand [Ber89].

Ce paradoxe illustre que même dans le cas de constructions géométriques simples, choisir une corde par ses extrémités, par sa direction ou par son milieu n'est pas équivalent. Il en va de même pour une manipulation expérimentale, mis à part que le problème est infiniment plus complexe, car on ne trace pas simplement des droites et leurs perpendiculaires, mais on observe des comportements conditionnés par une très grande part d'implicite (rarement accessible), et que l'observable repose sur des appareils de mesure (qu'il faut étalonner et qui faussent aussi la réalité). Nous allons par conséquent nous reposer sur des techniques déterministes existantes et ainsi choisir un mode d'obtention d'une grandeur physiquement mesurable. Nous garderons à l'esprit que l'on a déjà fait un choix important à ce stade en termes de probabilisation du système étudié.

Ce chapitre est une illustration numérique des travaux de la thèse. Nous présentons trois approches relativement différentes. La première est une variante de la méthode des polynômes chaotiques. La deuxième est une technique d'identification non-paramétrique relative aux estimateurs décrits dans 2.3.1. Enfin la troisième méthode repose sur la résolution directe du problème inverse à l'aide de l'analyse modale probabiliste en utilisant d'abord la technique du recuit simulé et en se basant ensuite sur les enveloppes.

## 5.1 Projection sur le chaos polynômial

### 5.1.1 Les polynômes de chaos

Les polynômes de chaos ont été introduit pour l'analyse spectrale dans [GD91]. La méthode présentée ici est légèrement différente.

Considérons un système à paramètres  $(p_i)_{i \in [1..K]}$  considérés comme incertains. Nous allons considérer les paramètres  $p_i(\theta)$  comme des variables aléatoires absolument continues. Il est possible de se ramener à des variables aléatoires centrées réduites, en écrivant  $p_i(\theta) = \bar{p}_i + \sigma_{p_i} \xi_i(\theta)$  et en considérant les variables aléatoires  $\xi_i$  ( $\bar{p}_i$  est la moyenne et  $\sigma_{p_i}$  l'écart-type). Pour la Méthode des Eléments Finis Stochastiques (MEFS), on prend pour hypothèse que la loi des  $\xi_i$  est une loi de Gauss, ainsi il suffira de prendre des  $(\xi_i)$  décorréllées pour obtenir des variables aléatoires indépendantes.

La réponse  $\mathbf{H}(\theta)$  du système est une nouvelle variable aléatoire, que l'on va développer sur une base polynomiale, constituée des polynômes de Hermite  $\Psi_j$  à  $K$  indéterminées. Le nombre  $K$  de variables des  $\Psi_j$  correspond au nombre de paramètres incertains et on se donne dès à présent un degré maximal  $d$ . Cette base polynomiale est appelée *chaos polynomial*: il est *d'ordre  $K$  de degré  $d$* .

La dimension d'un chaos polynomial est donnée par  $n_P = \mathbf{C}_{K+d}^d$ . Par exemple pour  $K = 2$  et  $d = 3$ , le chaos polynomial est constitué des 10 polynômes  $(\Psi_j)_{j \in [1..10]}$  suivants :

$$1, \xi_1, \xi_2, \xi_1^2 - 1, \xi_1 \xi_2, \xi_2^2 - 1, \xi_1^3 - 3 \xi_1, \xi_2(\xi_1^2 - 1), \xi_1(\xi_2^2 - 1) \text{ et } \xi_2^3 - 3 \xi_2$$

La réponse  $\mathbf{H}(\theta)$  est alors développée sur le chaos polynomial :

$$\mathbf{H}(\theta) = \tilde{\mathbf{H}}(\underline{\xi}(\theta)) = \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\xi}) = \sum_{j=0}^{P-1} \mathbf{A}_j \Psi_j(\underline{\xi}) \quad \text{where } \underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_K) \quad (5.1)$$

Cette expression est une approximation de la densité de probabilité de la réponse du système. Le problème se ramène alors à déterminer les coefficients  $\mathbf{A}_j$  de la décomposition. On peut alors donner une valeur approchée de la moyenne ou des moments d'ordre supérieurs de  $\tilde{\mathbf{H}}$ .

### 5.1.2 Résolution pratique

Les polynômes de Hermite  $\Psi_j$  forment une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R}^K)$ . On peut donc obtenir l'expression suivante pour les  $\mathbf{A}_j$  :

$$\mathbf{A}_j = \frac{\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{A}}(\underline{\xi}) \Psi_j(\underline{\xi})]}{\mathbb{E}[(\Psi_j)^2]} \quad (5.2)$$

où  $\mathbb{E}[\cdot]$  est l'espérance se référant à l'élément de mesure de  $\mathbb{R}^K$   $\varphi_K(\underline{\xi}) = e^{-\xi_1^2/2 \dots - \xi_K^2/2}$ .

Le dénominateur possède une expression analytique et le numérateur est donné par :

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{A}} \Psi_j] = \int_{\mathbb{R}^K} \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\xi}) \Psi_j(\underline{\xi}) \varphi_K(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \quad \text{où } \underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_K) \quad (5.3)$$

Le problème probabilisé a donc été plongé dans une structure hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R}^K)$ , muni du produit scalaire pondéré par la fonction poids  $\varphi_K(\underline{\xi})$ , pour lequel les polynômes de Hermite sont bien orthonormaux. A noter que l'on n'utilise pas la densité de cette base hilbertienne.

Le problème numérique se ramène alors à l'évaluation des intégrales (5.3). Ce n'est pas une étape que l'on peut se permettre de négliger étant donné que la précision des coefficients  $\mathbf{A}_j$  conditionne la précision de tous les calculs qui suivent se basant sur cette approximation de la densité.

On se retrouve avec  $n_P$  intégrales sur  $\mathbb{R}^K$ . On peut à ce stade envisager plusieurs options, par exemple l'intégration par une méthode de Monte-Carlo. Cependant la pratique courante privilégie le calcul numérique de ces intégrales via des formules de quadrature de Gauss, pour la bonne raison qu'il s'agit des quadratures optimales pour les polynômes de Hermite.

Si on considère une quadrature d'ordre  $n$ , les  $x_i$  sont les racines de  $\Psi_n(x)$ . Les expressions dans le cas monodimensionnel (voir [AS70]) sont données par :

$$w_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 (\Psi_{n-1}(x_i))^2} \quad (5.4)$$

Pour les petites valeurs de  $n$ ,  $w_i$  possède une expression analytique.

L'intégrale est alors approchée par :

$$\int_{\mathbb{R}^K} \tilde{\mathbf{A}}(\underline{\xi}) \Psi_j(\underline{\xi}) \varphi_K(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \approx \sum_{q \in \mathcal{C}_n^K} w_{q_1} \dots w_{q_K} \tilde{\mathbf{A}}(x_{q_1}, \dots, x_{q_K}) \Psi_j(x_{q_1}, \dots, x_{q_K}) \quad (5.5)$$

où  $q$  désigne un  $K$ -upplet de  $\{1, \dots, n\}$ , i.e.  $q = (q_1, \dots, q_K)$  où  $q_i \in [1, \dots, n] \forall i$ .

Cette technique d'intégration nécessite  $n^K$  évaluations de  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

Par exemple pour une quadrature de Gauss-Hermite d'ordre 4, les couples de points/poids d'intégration  $(x_i; w_i)$  s'écrivent :

$$\left( -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{6}}{2}}; \frac{\sqrt{\pi}}{4(3 + \sqrt{6})} \right), \left( -\sqrt{\frac{3 - \sqrt{6}}{2}}; \frac{\sqrt{\pi}}{4(3 - \sqrt{6})} \right), \\ \left( \sqrt{\frac{3 - \sqrt{6}}{2}}; \frac{\sqrt{\pi}}{4(3 - \sqrt{6})} \right), \left( \sqrt{\frac{3 + \sqrt{6}}{2}}; \frac{\sqrt{\pi}}{4(3 + \sqrt{6})} \right)$$

Le nombre d'évaluations de  $\tilde{\mathbf{A}}$  pour un chaos d'ordre  $K = 2$  et de degré  $d = 3$  est  $n^K \times (K + d)!/d! K! = 4^2 \times 10 = 160$ .

### 5.1.3 Inconvénients

La première remarque que l'on peut faire concerne la modélisation d'un paramètre incertain par une variable aléatoire gaussienne de manière arbitraire. Ceci peut mener à des abérations où le paramètre prend des valeurs qui ne reflètent pas la physique. Ainsi la méthode présuppose aussi que la densité in fine de la réponse du système soit également une variable aléatoire gaussienne, ce qui est évidemment faux dans le cas général (c'est déjà faux sur un oscillateur harmonique). L'extension à d'autres lois que la loi gaussienne a été cependant proposé par exemple dans [BS06] ou [JM07].

Une autre complication vient du fait qu'il faille choisir une moyenne  $\bar{p}_i$  et un écart-type  $\sigma_{p_i}$  pour chaque variable aléatoire  $p_i$  qui doit garder un sens physique. Se pose alors le problème du choix de ces paramètres probabilistes concernant des paramètres pour lesquels on ne possède usuellement que peu d'information. Un mauvais choix peut mener à des situations absurdes physiquement sur la réponse du système, car les variables aléatoires prennent leurs valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Par exemple, un paramètre comme l'amortissement ne peut pas être négatif, ce qui oblige à fixer une moyenne et un écart-type de telle sorte que la probabilité pour que cette variable aléatoire prenne une valeur négative soit (quasi) nulle.

Mais le vrai problème vient de la convergence de l'expression de  $\mathbf{A}(\theta)$  dans (5.1). D'une part les gaussiennes sont tronquées, ce qui fausse les propriétés de convergence. Cette troncature est cependant nécessaire d'un point de vue physique et d'un point de vue numérique. D'autre part il n'existe aucune inégalité de convergence a priori car la méthode utilise une convergence  $L^2$  pour approcher une convergence presque sûre (qui possède un sens moins fort). Ce fait est illustré par la validation usuelle de la méthode en comparant les résultats avec Monte Carlo. Ainsi l'efficacité de la méthode est surtout testée a posteriori, ce qui est un peu contradictoire avec le fait d'exhiber une méthode prédictive performante qui traite les incertitudes des paramètres.

Le choix du degré du chaos est évidemment déterminant dans l'efficacité de la méthode, afin que la somme finie (5.1) approche au mieux la densité de probabilité de la réponse du système. D'après [MB05] dans le cas de quatre paramètres incertains, on trouve de très bons résultats pour  $d = 3$ .

Le dernier inconvénient de la méthode est sa sensibilité à la dimension, au sens du nombre de paramètres. En effet à partir d'un chaos d'ordre 4 et de degré 3 avec 4 points de quadrature, le nombre d'évaluations avoisine le nombre nécessaire à une technique de Monte Carlo (8960) et la

méthode devient ensuite bien plus coûteuse, alors que la technique de Monte Carlo est insensible à la dimension et devient alors plus performante.

#### 5.1.4 Avantages

La structure hilbertienne fournit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^K$  et peut s'adapter à de nombreux problèmes de mécanique dont on possède une résolution déterministe, une fois les paramètres aléatoires identifiés. La résolution peut être analytique ou peut s'appuyer sur une méthode numérique telle que les éléments finis.

Le problème est de calculer des intégrales avec une méthode adaptée. Il est facile alors d'imaginer des variantes concernant la méthode d'intégration. Il faut cependant ne pas négliger cette étape, car la vitesse d'intégration conditionne la vitesse de convergence de la méthode.

L'avantage de la méthode est d'accéder à une approximation de la densité de probabilité du résultat final. Cette méthode est un peu plus performante que les polynômes chaotiques classiques, car la loi de probabilité est la meilleure description probabiliste que l'on puisse avoir d'une grandeur aléatoire. De plus, le grand intérêt est qu'il s'agit d'une méthode non intrusive, c'est à dire que l'on s'appuie au maximum sur une résolution déterministe existante pour décrire le système probabiliste. Cet aspect est très intéressant lorsque l'on songe à valoriser et à exploiter l'existant, sans venir modifier le coeur des algorithmes pour certains très utilisés et parfaitement validés.

La méthode directe de Monte Carlo est rarement pertinente lorsque l'on songe à des résolutions numériquement lourdes, car c'est le coût numérique d'une résolution unitaire qui pèse sur la vitesse de convergence. La technique de Monte Carlo est de l'ordre de  $\mathcal{O}(\sigma_{\tilde{\mathbf{A}}}/\sqrt{N})$ , où  $\sigma_{\tilde{\mathbf{A}}}$  est l'écart-type de  $\tilde{\mathbf{A}}$  (qui est a priori inconnu) et  $N$  le nombre de tirages nécessaires, qui est usuellement considéré comme satisfaisant à partir de 10 000. Ainsi si on songe aux 160 évaluations précédentes, la méthode présentée peut s'avérer pertinente tant que l'on ne monte pas en ordre et en degré du chaos, ni en précision sur la quadrature.

#### 5.1.5 Exemple

Nous nous intéressons au modèle de Miki, qui est un modèle empirique fournissant l'impédance caractéristique ainsi que la constante de propagation  $k$  (en fonction de la fréquence), ces deux grandeurs permettant par la suite d'accéder au coefficient d'absorption  $\alpha$  du matériau. Nous prenons pour paramètres aléatoires la résistivité effective à l'air  $\sigma_e$ , la porosité  $\Phi$ , ainsi que la tortuosité oblique  $q$ . Nous ne donnons pas ici les détails des calculs analytiques, puisqu'ils seront exposés dans la troisième partie du présent chapitre. Voici ainsi un court exemple d'application de la méthode. Les figures 5.1 et 5.2 représentent les deux premiers moments obtenus

par projection sur le chaos polynomial d'une part et par la technique de Monte-Carlo d'autre part (10 000 itérations). Les écart-types initiaux ont été fixés de façon à garder un sens physique concernant les paramètres (notamment pour la porosité toujours très proche de 1 par valeurs inférieures). Le chaos est d'ordre 3 et nous avons choisi un degré 2 pour la projection. La moyenne colle parfaitement au Monte Carlo, par contre le moment d'ordre 2 présente un petit décalage, qui ne laisse rien augurer de bon pour les moments suivants. Ne disposant pas de critère de convergence, on ne peut que constater a posteriori qu'il faudrait augmenter le degré du chaos. C'est à notre sens une lacune importante de la méthode.

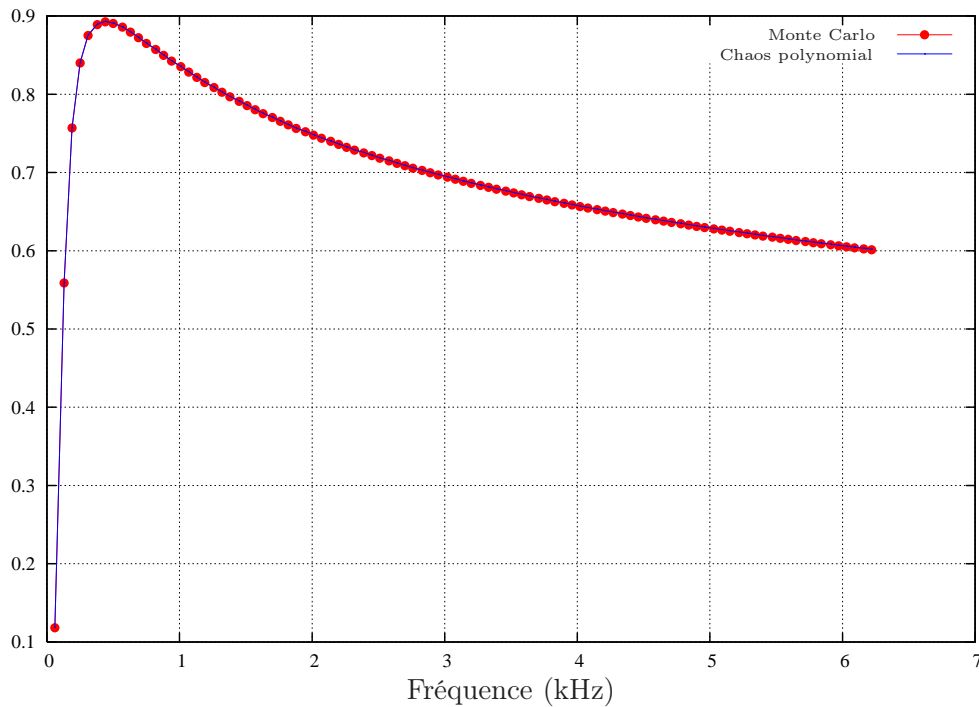


FIG. 5.1 – Moyenne du coefficient d'absorption donnée par le modèle de Miki par projection sur le chaos polynomial.

## 5.2 Identification non-paramétrique

Nous allons présenter la méthode sur un exemple qui est la mesure du coefficient d'absorption d'un matériau poreux au tube de Kundt. Nous nous sommes basés sur un échantillon expérimental qui permet d'obtenir dans la pratique le coefficient d'absorption  $\alpha$  du matériau. Nous rappelons brièvement le mode d'obtention de  $\alpha$ , puis nous mettrons en application les estimateurs décrits dans la section 2.3.1.



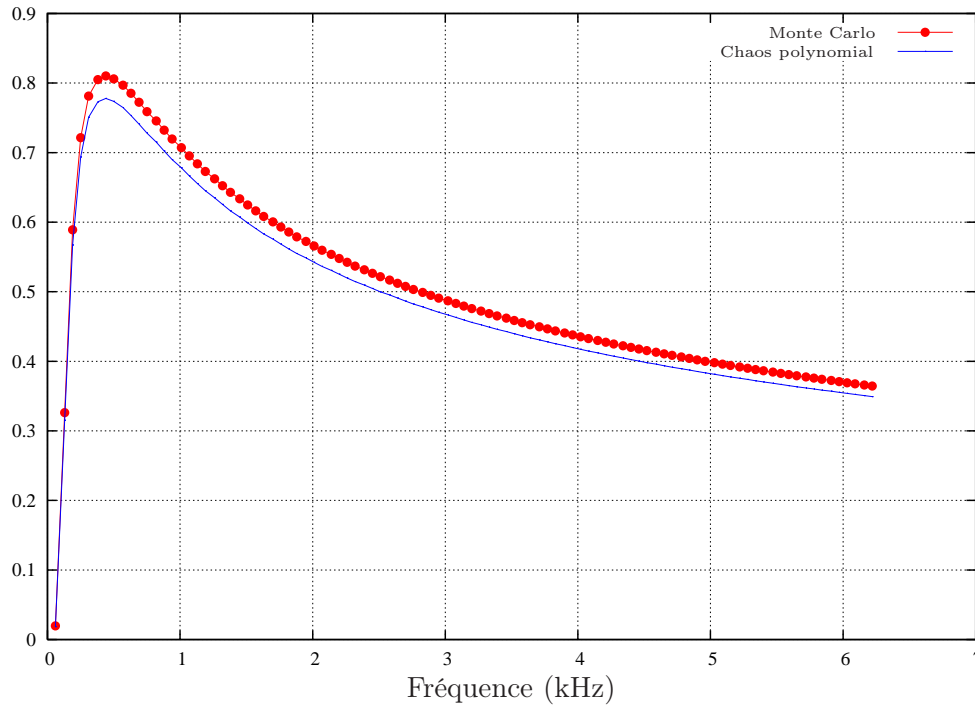


FIG. 5.2 – Moment d'ordre 2 du coefficient d'absorption donnée par le modèle de Miki par projection sur le chaos polynomial.

### 5.2.1 Mode d'obtention de $\alpha$

Le tube de Kundt, ou tubes à ondes stationnaires, permet de générer un champ d'ondes planes résultant de la somme des ondes incidentes et réfléchies sur un matériau placé en l'extrémité du tube. Les FRF sont mesurées directement et sont données sous la forme d'un couple module et phase ( $|H_i|, \varphi(H_i)$ ) à chaque fréquence. La figure 5.3 montre le dispositif de la manipulation.

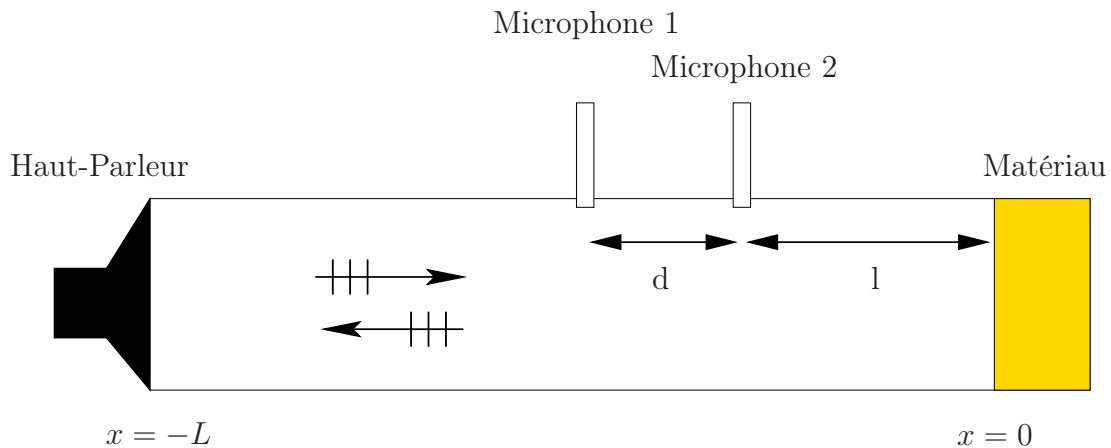


FIG. 5.3 – Schéma du tube de Kundt.

A partir de ces données, les formules suivantes permettent de calculer le coefficient d'absorp-

tion  $\alpha$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{H}_1 = |H_1| \exp(i \varphi(H_1)) \quad (5.6) \\ \tilde{H}_2 = |H_2| \exp(i \varphi(H_2)) \quad (5.7) \\ \tilde{H} = \tilde{H}_1 \cdot \tilde{H}_2 \quad (5.8) \\ R = e^{2ik(l+d)} \left( \tilde{H} - e^{-ikl} \right) \left( e^{ikl} - \tilde{H} \right) \quad (5.9) \\ Z_s = \rho_0 \cdot c_0 \frac{1+R}{1-R} \quad (5.10) \\ \alpha = 1 - |R|^2 \quad (5.11) \end{array} \right.$$

L'échantillon utilisé est composé de 30 FRF (30 modules et 30 phases) qui donnent un échantillon de 30 coefficients d'absorption. C'est sur cet échantillon que nous allons travailler.

### 5.2.2 Estimateur de Parzen-Rosenblatt

La variable aléatoire considérée est le coefficient d'absorption, dont l'échantillon expérimental est considéré comme 30 réalisations indépendantes. A une fréquence  $f_k$  donnée, il faut souligner que l'estimateur ne considère que les 30 valeurs  $(\alpha_i(f_k))_{i=1..30}$  et ne tient ainsi pas compte des données  $(\alpha_i(f_p))_{i=1..30}$  pour  $k \neq p$ .

A  $\omega$  fixé, l'estimateur de Parzen-Rosenblatt s'écrit :

$$\widehat{f}_{\alpha}(z) = \frac{1}{nh} \sum_i \mathcal{K} \left( \frac{z - \alpha_i}{h} \right) \quad (5.12)$$

Il s'agit donc d'une densité tabulée en fonction de  $z \in [0,1]$  (un coefficient d'absorption est compris entre 0 et 1 par définition). L'intervalle  $[0,1]$  est donc subdivisé avec un pas  $dz$ . Le noyau  $\mathcal{K}$  est choisi gaussien centré-réduit comme décrit dans 2.3.1.2 et  $n = 30$ .  $h$  désigne la largeur de la fenêtre et doit être choisi proportionnel à  $n^{1/5}$ , mais nous ne connaissons pas le coefficient  $K_h$  de proportionnalité *a priori*. Pour déterminer  $K_h$ , nous remarquons que l'expression (5.12) nous fournit une expression qui est un diagramme dont l'épaisseur des colonnes est  $dz$ . On procède ainsi à une recherche dichotomique en s'efforçant que  $\sum_j \widehat{f}_{\alpha}(z_j)$  soit aussi proche possible de 1 pour tout  $\omega$ .

Dans le cas présent, on trouve  $K_h = 0.0025$ . On possède alors une expression tabulée de la densité, le calcul des moments se fait donc par des sommes discrètes. Il est judicieux de comparer ce calcul de moments (moyenne et écart-type) avec les estimateurs sans biais classiques (A.3). La figure 5.4 montre que les deux coïncident.

Le fait d'accéder à la loi, même numérique, nous permet d'envisager de tracer pour notre cas des enveloppes. En effet, il suffit de sommer des éléments  $\widehat{f}_{\alpha}(z_j)$  en fonction des  $z_j$  en ne dépassant pas une certaine valeur (95% ou 98% le plus classiquement, mais rien n'empêche de

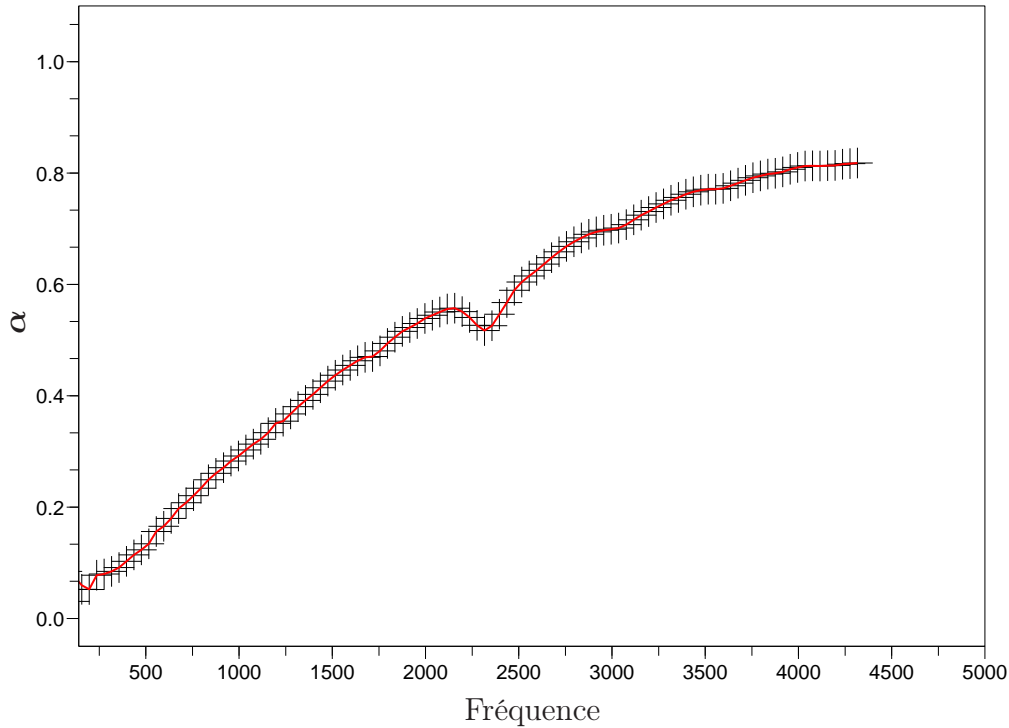


FIG. 5.4 – *Comparaison des deux estimateurs sur la moyenne du coefficient d'absorption : la moyenne obtenue avec la densité estimée (-) et la moyenne obtenue par l'estimateur classique (+).*

considérer une enveloppe à 100%). C'est ce qui est représenté sur la figure 5.5. La zone des basses fréquences (0-250 Hz) est déjà très bruitée d'un point de vue déterministe, et ces valeurs ne sont pas prises en compte usuellement (les phénomènes en basse fréquence sont difficiles à mesurer). On s'aperçoit sur les valeurs expérimentales utilisées que l'écart-type est quasiment constant : cela est révélateur que la dispersion des valeurs est surtout dû ici à la mesure. En effet, nous n'avons pas des valeurs expérimentales effectuées pour 30 échantillons différents, et cette redondance nécessite de relativiser la pertinence de cet exemple. Cependant nous tenions à illustrer la méthode sur des valeurs mesurées physiquement et non simulées numériquement. Il conviendrait de développer cet outil et de le tester par la suite en menant en parallèle une réflexion sur la qualité et la pertinence des données expérimentales à prendre en compte.

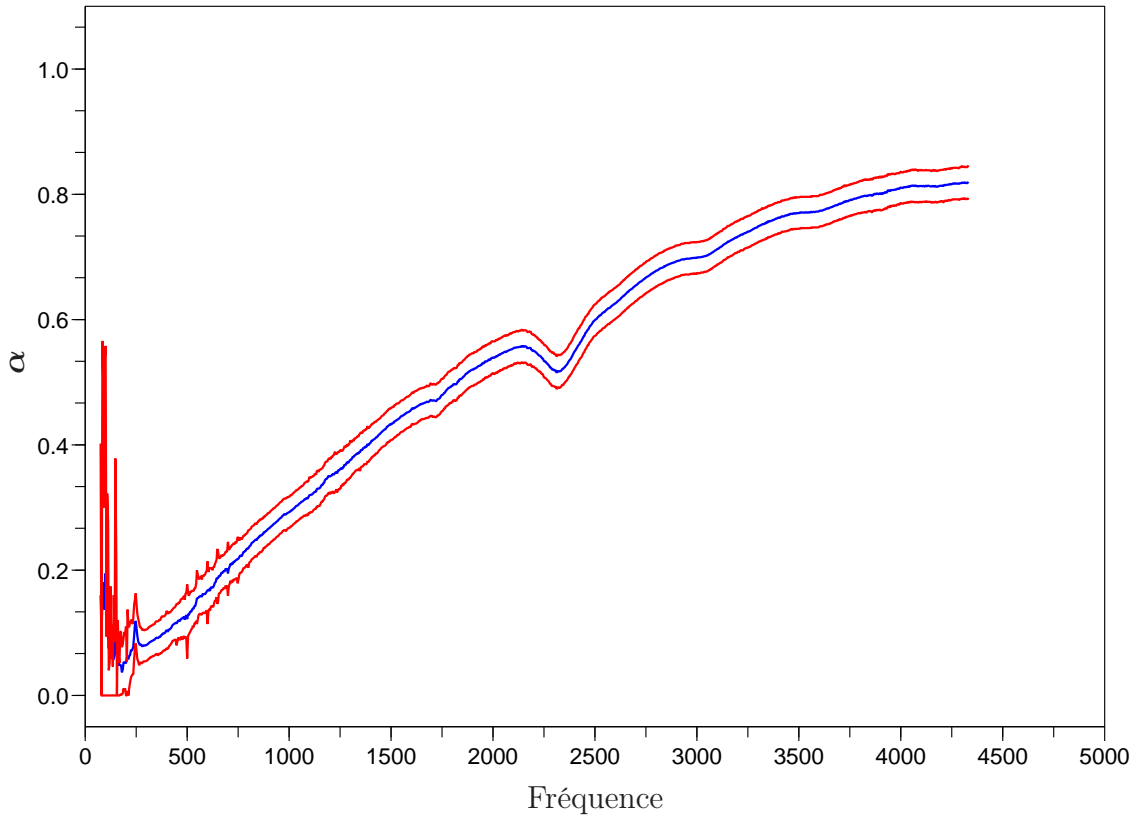


FIG. 5.5 – Enveloppe numérique à 98% obtenue d’après la densité estimée (-) avec la moyenne (-) du coefficient d’absorption.

## 5.2.3 Robustesse d’un modèle vis-à-vis des données expérimentales

### 5.2.3.1 Calcul théorique

On possède la loi de  $\alpha$  tabulée numériquement. Donnons nous un modèle reposant sur  $p$  paramètres  $(x_i)_{i=1..p}$ . On peut voir ce modèle comme une application de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ . Posons alors l’application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (x_1, \dots, x_p) &\rightarrow (\alpha(x_1, \dots, x_p), x_2, \dots, x_p) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ainsi, si  $J_{\mathcal{F}}$  désigne le jacobien de  $\mathcal{F}$ , et si l’on considère que les paramètres  $(x_1, \dots, x_p)$  sont indépendants, la densité de probabilité conjointe de  $(x_1, \dots, x_p)$  est donnée par :

$$G(x_1, \dots, x_p) = \frac{f(\mathcal{F}^{-1}(x_1, \dots, x_p))}{|J_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}^{-1}(x_1, \dots, x_p))|} \quad (5.14)$$

Il se trouve que formulé de la sorte, le jacobien  $J_{\mathcal{F}}$  se calcule facilement, on obtient

$$J_{\mathcal{F}} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(x_1, \dots, x_p)}{\partial x_1}$$

Comme on a choisit l'identité sur les composantes de  $x_2$  à  $x_p$ , l'inversion de  $\mathcal{F}$  se réduit à résoudre en  $x_1$ :

$$x_1 = \boldsymbol{\alpha}(x_1, \dots, x_p) \quad (5.15)$$

Notons  $\Psi(X|x_2, \dots, x_p)$  la solution de (5.15). Cette solution n'est pas toujours accessible analytiquement (nous sommes au coeur du problème inverse), mais comme la loi empirique est déjà numérique, cette recherche de point fixe peut être réalisée à l'aide de méthodes elle-même numériques qui se trouvent être nombreuses (Newton-Raphson et dérivées).

Nous pouvons alors écrire :

$$G(X, \dots, x_p) = \frac{f(\Psi(X|x_2, \dots, x_p))}{|J_{\mathcal{F}}(\Psi(X|x_2, \dots, x_p))|} \quad (5.16)$$

On considère que l'on a fixé  $x_2, \dots, x_p$  (c'est à dire que l'on considère la loi de  $x_1$  sachant  $x_2, \dots, x_p$ , donc que ces paramètres sont gouvernés par une densité de Dirac).

Donc en supposant que l'on possède la loi  $f_{\boldsymbol{\alpha}}$  de  $\boldsymbol{\alpha}$ , on va chercher à obtenir  $G$  en considérant que  $x_2, \dots, x_p$  sont fixés. On obtient alors :

$$f_{X|x_2, \dots, x_p}(X) = \frac{f_{\boldsymbol{\alpha}}(\Psi(X|x_2, \dots, x_p))}{\left| \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial X}(\Psi(X|x_2, \dots, x_p)) \right|} \quad (5.17)$$

$f_{X|x_2, \dots, x_p}$  est la densité du paramètre  $x_1$  du modèle sachant les paramètres  $x_2$  à  $x_p$ . En pratique  $f_{\boldsymbol{\alpha}}$  est tabulée et dans le cas des modèles analytiques, il est toujours possible de donner une expression analytique de  $\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial X}$  que l'on évalue éventuellement par la suite numériquement en fonction de la résolution de (5.15).

On peut refaire le calcul en translatant l'expression de  $\boldsymbol{\alpha}$  sur la position  $k$  et obtenir ainsi la loi partielle du paramètre  $x_k$ . La méthode peut ainsi s'adapter à n'importe quel paramètre, sous réserve que le problème inverse partiel admette une solution.

### 5.2.3.2 Application au modèle de Miki

Le modèle de Miki a déjà servi de support d'illustration pour la projection sur la chaos polynomial, nous allons à présent l'expliciter en donnant les formules analytiques.

Les paramètres incertains que l'on peut considérer sont la résistivité effective à l'air  $\sigma_e$ , la porosité  $\Phi$ , la tortuosité oblique  $q$ , mais également l'épaisseur du matériau  $d$ . On supposera que la densité de l'air  $\rho_0$  et la constance  $c_0$  sont considérés comme constants.

La seule difficulté consiste à résoudre les équations (5.15) pour chaque paramètre. La dérivation étant quant à elle facile, sans que l'expression analytique soit triviale pour autant. Voici les expressions analytiques du modèle de Miki. Pour l'impédance caractéristique  $Z_c$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_c(f) = R(f) + \mathbf{j} X(f) \\ R(f) = \frac{q}{\phi} \left[ 1 + 0.070 \left( \frac{f}{\sigma_e} \right)^{-0.632} \right] \\ X(f) = -0.107 \frac{q}{\phi} \left( \frac{f}{\sigma_e} \right)^{-0.632} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.18) \\ (5.19) \\ (5.20) \end{array}$$

Pour le coefficient de propagation  $k$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} k(f) = a(f) + \mathbf{j} b(f) \\ a(f) = \frac{2\pi f q}{c_0} \left[ 0.160 \left( \frac{f}{\sigma_e} \right)^{-0.618} \right] \\ b(f) = \frac{2\pi f q}{c_0} \left[ 1 + 0.109 \left( \frac{f}{\sigma_e} \right)^{-0.618} \right] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.21) \\ (5.22) \\ (5.23) \end{array}$$

L'impédance de surface pour un matériau positionné devant une paroi rigide est

$$Z = Z_c \coth(kd)$$

où  $d$  est l'épaisseur du matériau. On obtient alors le rapport  $R$ :

$$R = \frac{Z - \rho_0 c_0}{Z + \rho_0 c_0}$$

Et le coefficient d'absorption est donné par :

$$\alpha = 1 - |R|^2$$

Si on désire par exemple connaître la densité de la tortuosité oblique du matériau  $q$ , il se trouve que ce paramètre se met en facteur dans l'expression de l'impédance caractéristique  $Z_c$ , donc dans  $Z$ , ce qui permet de trouver  $\Psi(q|\Phi, \sigma, d)$  analytiquement après avoir explicité la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z$ . En utilisant pour  $f_\alpha$  l'estimateur (5.12), on obtient la densité de probabilité représentée sur la figure 5.6. Cette densité est proche d'une gaussienne car le noyau de l'estimateur de Parzen-Rosenblatt est gaussien. La quantité au dénominateur possède un comportement de droite affine, donc nous obtenons une gaussienne légèrement dissymétrique. Nous montrons ce résultat pour la fréquence  $f = 500$  Hz, en sachant que les allures des densités pour les autres fréquences sont très proches. La raison est d'une part que nos données expérimentales ont déjà montré que la dispersion des valeurs était similaire en fonction de la fréquence et d'autre part la tortuosité oblique du modèle ne dépend pas de la fréquence.

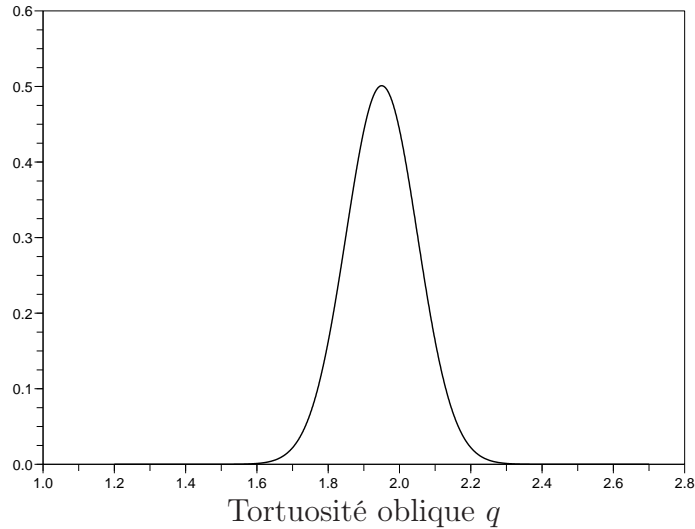


FIG. 5.6 – Densité de probabilité de la tortuosité oblique à 500 Hz.

### 5.2.3.3 Généralisation de la méthode

Dans la théorie des matériaux poreux, le modèle de Miki (3 paramètres) est une amélioration du modèle trop utilisé de Delaney et Bazley (2 paramètres). Viennent ensuite les modèles de Wilson (4 paramètres), Johnson-Champoux-Allard (5 paramètres), Johnson-Champoux-Allard-Lafarge (6 paramètres) et enfin Johnson-Champoux-Allard-Prude-Lafarge (8 paramètres). Ces modèles poussent ainsi chacun la description du phénomène un peu plus loin et nécessitent plus de paramètres descriptifs. Se posent alors naturellement la question de la dispersion de ces paramètres et de l'influence de cette dispersion sur les grandeurs calculées à partir de chacun de ces modèles. La méthode exposée ci-dessus peut s'appliquer dans chaque cas, avec évidemment une charge de travail plus importante en fonction du nombre de paramètres. En effet, une fois la loi "expérimentale" estimée et le modèle choisi, l'inversion partielle et le calcul des dérivées peut s'avérer plus ou moins chronophage.

L'avantage principal de la méthode est que l'on part de l'expérimental pour remonter à l'aléa des paramètres, ce qui revient à s'appuyer sur l'observable (ici la mesure du coefficient d'absorption). On peut ainsi imaginer une application systématique de la méthode pour obtenir une ébauche de discrimination des paramètres pour déterminer l'influence de l'aléa d'un paramètre par rapport à un autre. Ceci est bien plus pertinent en pratique que l'idée malheureusement assez répandue concernant des études de "sensibilité", qui se contentent trop souvent de majorer uniquement la dérivée et d'appliquer le théorème des accroissements finis, ce qui donne une approximation relativement grossière (bien sûr cette remarque n'est pas valable pour les approches fiabilistes qui traitent également cette problématique).

La démarche présentée ici dépend évidemment de l'observable et donc de la qualité de réalisation de l'expérience car il est nécessaire de la répéter plusieurs fois. Il faut noter que la loi donnée est une loi partielle sachant que les autres paramètres sont fixés, donc les éventuelles corrélations entre les paramètres ne sont pas prises en compte.

Concernant la théorie générale des matériaux poreux, la perspective ultime serait de traiter carrément la théorie de Biot avec cette démarche. Ceci est très ambitieux et constitue une étude qui se suffirait à elle-même, car il devrait apparaître des complications dans l'application de la méthode proposée qui nous échappent pour le moment. Cependant l'idée est intéressante non seulement pour la théorie de Biot, mais également pour d'autres domaines où la description physique des phénomènes nécessitent le recours à des paramètres intrinsèques.

## 5.3 Identification paramétrique

Cette section s'intéresse aux méthodes d'identification des paramètres du système vibrant. Il ne s'agit pas uniquement de remonter aux paramètres, mais également à leur variabilité. Ceci constitue une résolution du problème inverse qui est d'observer la dispersion de la réponse et de remonter à travers un modèle aux paramètres initiaux. Nous allons ainsi chercher à inverser en quelque sorte l'outil prédictif qui a été mis en place. Nous nous reposerons donc sur les acquis du chapitre précédent comme résolution du problème probabiliste direct.

### 5.3.1 Méthode des moindres carrés

Puisque l'on possède l'expression analytique de la moyenne de la partie réelle et de la partie imaginaire, il est possible de faire varier les paramètres qui nous intéressent et d'adapter "au mieux" la moyenne analytique à une moyenne estimée à partir des données mesurées. L'expression "au mieux" va se traduire par une distance minimale aux moindres carrés, car nous supposons que les variables aléatoires sont de variance finie, c'est-à-dire dans  $L^2$ .

L'idée est donc de considérer les moyennes expérimentales  $M_{\text{Re}}^{\text{exp}}$  et  $M_{\text{Im}}^{\text{exp}}$ , c'est à dire la moyenne numérique à chaque fréquence de la partie réelle et de la partie imaginaire et de trouver le quadruplet  $(\Omega_1, \Omega_2, c_1, c_2)$  tel que les quantités  $\|M_{1, \text{Re}}(\Omega_1, \Omega_2, c_1, c_2) - M_{\text{Re}}^{\text{exp}}\|^2$  et  $\|M_{1, \text{Im}}(\Omega_1, \Omega_2, c_1, c_2) - M_{\text{Im}}^{\text{exp}}\|^2$  soient minimales.

Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contraintes sur un domaine non convexe. Pour résoudre ce problème nous proposons d'utiliser la technique du recuit simulé, qui est une technique qui découle directement de l'algorithme de Metropolis-Hasting. Nous considérons la fonction coût



suivante à  $\omega$  fixé:

$$f_{\text{coût}}(\Omega_1, \Omega_2, c_1, c_2) = \|M_{1, \text{Re}}(\Omega_1, \Omega_2, c_1, c_2) - M_{\text{Re}}^{\text{exp}}\|^2 \quad (5.24)$$

ou

$$f_{\text{coût}}(\Omega_1, \Omega_2, c_1, c_2) = \|M_{1, \text{Im}}(\Omega_1, \Omega_2, c_1, c_2) - M_{\text{Im}}^{\text{exp}}\|^2 \quad (5.25)$$

L'algorithme du recuit simulé fonctionne de la manière suivante :

1. Choisir un quadruplet initial  $X^0 = (\Omega_1^0, \Omega_2^0, c_1^0, c_2^0)$ , ainsi qu'une température  $T^0$ .  
Calculer le coût de  $X^0$ :  $K = f_{\text{coût}}(X^0)$ .  
Prendre  $T = T_0$ .
2. Tant que  $T \geq 0$ 
  - Générer un élément  $X^k = (\Omega_1^k, \Omega_2^k, c_1^k, c_2^k)$ , voisin de  $X^k$ .
  - Calculer le coût de  $X^k$ :  $K_k = f_{\text{coût}}(X^k)$
  - Si  $K \leq K_{k-1}$ , on retient le candidat  $X^k$  et  $K = K_{k-1}$
  - On applique la règle de rejet de Metropolis :  
Soit  $Y$  est une réalisation de la loi uniforme sur  $[0,1]$ .  
Si  $K \geq K_{k-1}$  et  $Y \leq \exp -\frac{K - K_{k-1}}{T}$ , on retient le candidat  $X^k$  et  $K = K_{k-1}$ .
  - Sinon on garde le candidat  $X^{k-1}$  et  $K$  est inchangé.
  - On diminue la température  $T = k.T$  avec  $k < 1$ .

Fin de la boucle
3. Le dernier candidat  $X$  accepté est un jeu de paramètres dont l'écart au sens des moindres carrés possède le cout minimal  $K$ .

Cet algorithme repose donc sur la technique du rejet de Métropolis-Hasting. Pour que cet algorithme soit performant, il est nécessaire de fixer une température assez élevée au départ ( $T_0$  grand) et de ne pas l'abaisser trop rapidement ( $k$  proche de 1), sans toutefois l'abaisser trop lentement, car l'algorithme est alors trop lent à converger.

### 5.3.1.1 Application

Nous reprenons la formule analytique de la moyenne de la partie réelle d'un mode à deux paramètres aléatoires  $\omega_0^2$  et  $c$  de loi uniforme. Nous nous plaçons dans une bande de fréquence gouvernée par une seule formule analytique: il est préférable de se concentrer sur une bande fréquence centrée sur la fréquence propre moyenne, car ailleurs la combinatoire des intervalles rend les choses plus délicates.

Les paramètres à identifier sont  $(\Omega_1, \Omega_2, c_1, c_2)$ , mais à partir de données expérimentales, il y a également la valeur propre du mode considéré  $\lambda_j$  ainsi que le coefficient modal  $B_j$ . Pour l'ins-

tant, ces deux derniers paramètres sont supposés connus, mais il y a moyen de les retrouver en améliorant la méthode. Nous allons éviter de rajouter dans un premier temps deux paramètres supplémentaires au problème.

Pour ce qui est de la valeur propre  $\lambda_j$ , cette dernière est toujours en facteur de  $\Omega$  ou de  $c$ . Nous allons donc identifier dans la pratique  $(\lambda_j\Omega_1, \lambda_j\Omega_2, \lambda_j c_1, \lambda_j c_2)$  et chercher à déduire par la suite les valeurs qui nous intéressent. Nous allons également considérer pour simplifier que  $B_j = 1$ .

A présent nous appliquons la méthode du recuit simulé avec le quadruplet  $(\lambda_j\Omega_1, \lambda_j\Omega_2, \lambda_j c_1, \lambda_j c_2)$ .

Pour faire tourner l'algorithme, il nous faut décrire la méthode pour générer un élément voisin. Nous nous donnons une subdivision des intervalles  $I_\Omega = [\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$  et  $I_c = [c_{\min}, c_{\max}]$  avec respectivement deux pas réguliers  $h_\Omega$  et  $h_c$ , de façon à ce que la solution appartienne à ces intervalles. Il est possible de se donner des intervalles  $I_\Omega$  et  $I_c$  très importants, mais la méthode sera évidemment plus coûteuse en temps. Il y a donc  $N_\Omega$  valeurs possibles pour  $\Omega$  et  $N_c$  valeurs possibles pour  $c$ , le nombre de possibilités dépendant évidemment du pas choisi et si le raffinement est très important, le temps de calcul sera également très important.

La matrice de transition  $Q$  est composée de 2 blocs diagonaux  $N_\Omega \times N_\Omega$  et  $N_c \times N_c$  car les deux paramètres sont supposés indépendants. Dans le premier bloc,  $Q(x, y) = Q(y, x) = 2/N_\Omega^2$  si  $x$  et  $y$  sont voisins,  $Q(x, x) = 1/N_\Omega^2$  et  $Q(x, y) = 0$  si  $x$  et  $y$  ne sont pas voisins. De même dans le deuxième bloc avec  $N_c$  à la place de  $N_\Omega$ .

Soit un élément de  $I_\Omega \times I_c$  repéré par ses coordonnées  $(n_\Omega^1, n_\Omega^2, n_c^1, n_c^2)$ . Pour générer un élément voisin, on tire un entier  $i_\Omega$  selon une loi uniforme dans  $[1, N_\Omega]$  et un entier  $i_c$  dans  $[1, N_c]$ .

- Si  $i_\Omega < \frac{n_\Omega^1 + n_\Omega^2}{2}$  (respectivement  $i_c < \frac{n_c^1 + n_c^2}{2}$ )
  - $N_\Omega^1 = n_\Omega^1$  (respectivement  $N_c^1 = n_c^1$ )
  - $N_\Omega^2$  est tiré aléatoirement selon une loi uniforme dans  $[n_\Omega^1, N_\Omega]$   
(respectivement  $N_c^2$  est tiré aléatoirement selon une loi uniforme dans  $[n_c^1, N_c]$ )
- Si  $i_\Omega \geq \frac{n_\Omega^1 + n_\Omega^2}{2}$  (respectivement  $i_c \geq \frac{n_c^1 + n_c^2}{2}$ )
  - $N_\Omega^2 = n_\Omega^2$  (respectivement  $N_c^2 = n_c^2$ )
  - $N_\Omega^1$  est tiré aléatoirement selon une loi uniforme dans  $[1, n_\Omega^2]$   
(respectivement  $N_c^1$  est tiré aléatoirement selon une loi uniforme dans  $[1, n_c^2]$ )

Nous fixons la température  $T_0 = 1000$  et la vitesse de décroissance  $k = 0.99$ . Ces deux paramètres sont les deux grandeurs guidant le compromis entre rapidité et convergence du recuit-simulé. Notons au passage l'analogie avec la métallurgie et la valeur minimale d'un potentiel : si on refroidit trop vite le métal, on se retrouve piégé dans un état minimal qui n'est pas le minimum global de potentiel. D'un point de vue pratique, il est aussi possible de fixer le nombre d'itérations de l'algorithme et d'adapter le schéma de température.

### 5.3.1.2 Intérêt pratique

La méthode fonctionne bien pour retrouver les valeurs de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , mais elle n'est pas très performante pour retrouver les valeurs de  $c_1$  et  $c_2$ . Le tableau suivant donne le résultat avec 10000 et 20000 itérations : Nous avons adapté le schéma de température au nombre d'itérations. La

	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$c_1$	$c_2$
Valeurs simulées	128	192	0.008	0.012
10000 itérations	124.2	198.1	0.0075	0.01
60000 itérations	127.4	191.5	0.008	0.016

TAB. 5.1 – Résultats de la méthode du recuit simulé.

méthode du recuit-simulé n'est pas une méthode déterministe au sens où il est possible d'obtenir très rapidement la meilleure solution et que les itérations restantes ne soient qu'une prospection inutile. Il est intéressant de noter que c'est l'amortissement qui guide principalement la recherche des solutions. Le fait de sélectionner une bande de fréquence pour la formule analytique complique d'une part la tâche de l'algorithme, mais permet d'autre part de remonter à une grande précision sur les quatre paramètres  $(\Omega_1, \Omega_2, c_1, c_2)$ .

## 5.3.2 Identification à partir des enveloppes

### 5.3.2.1 Définition des enveloppes

La définition d'une  $\alpha$ -enveloppe est donnée sur un mode isolé, c'est à dire que l'on néglige la contribution des autres modes au voisinage du mode considéré. Cette approche se justifie dans le cas d'un système vibrant dont les modes sont bien séparés : un critère de séparation peut être donné en terme de valeurs propres de l'opérateur de discrétisation dans la méthode des éléments finis. Cette définition est détaillée dans [CPFL06].

La loi des paramètres initiaux est à support compact. Cette propriété se conserve pour la loi de la réponse en fréquence, comme les formules analytiques du chapitre précédent.

Par soucis de clarté de l'exposé, nous définissons uniquement l'enveloppe de la partie réelle  $\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})$ , mais il est très facile de l'étendre à la partie imaginaire  $\text{Im}(\mathbf{H}_{jj})$ .

$f_{\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})}(s, t)$  est définie sur l'intervalle  $[s_1^{\lambda_j}, s_2^{\lambda_j}] \times [t_1^{\lambda_j}, t_2^{\lambda_j}]$ , où  $\lambda_j$  désigne la valeur propre du mode considéré. Comme  $f_{\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})}$  est une densité de probabilité, on a la propriété :

$$\int_{s_1^{\lambda_j}}^{s_2^{\lambda_j}} \int_{t_1^{\lambda_j}}^{t_2^{\lambda_j}} f_{\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})}(s, t) dt ds = 1 \quad (5.26)$$

De plus  $\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})$  appartient à l'intervalle  $[s_1^{\lambda_j}, s_2^{\lambda_j}]$ . Ainsi une enveloppe contenant toutes les valeurs possibles de  $\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})$  est donnée par :

$$\bigcup_{\omega} [s_1^{\lambda_j}, s_2^{\lambda_j}] \quad (5.27)$$

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux probabilités données et on cherche les valeurs  $\{\beta_1^{\lambda_j}, \beta_2^{\lambda_j}\}$  telles que :

$$\int_{s_1^{\lambda_j}}^{s_1^{\lambda_j} + \beta_1^{\text{Re}, \lambda_j}} f_{\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})}(s) ds = \alpha_1 \quad (5.28)$$

$$\int_{s_2^{\lambda_j} - \beta_2^{\text{Re}, \lambda_j}}^{s_2^{\lambda_j}} f_{\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})}(s) ds = \alpha_2 \quad (5.29)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \quad (5.30)$$

On appelle alors  $\alpha$ -enveloppe de  $\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})$  et on note  $\Upsilon_{\text{Re}, \lambda_j}^\alpha$  l'adhérence du complémentaire de la réunion des intervalles  $[s_1^{\lambda_j}, s_1^{\lambda_j} + \beta_1^{\text{Re}, \lambda_j}]$  et  $[s_2^{\lambda_j} - \beta_2^{\text{Re}, \lambda_j}, s_2^{\lambda_j}]$  :

$$\Upsilon_{\text{Re}, \lambda_j}^\alpha = \overline{\bigcup_{\omega} [x_1^{\lambda_j} + \beta_1^{\text{Re}, \lambda_j}, x_2^{\lambda_j} - \beta_2^{\text{Re}, \lambda_j}]} \quad (5.31)$$

Les  $\alpha$ -enveloppes  $\Upsilon_{\text{Re}}^\alpha$  et  $\Upsilon_{\text{Im}}^\alpha$  sont donnés sur toute la bande de fréquence par :

$$\Upsilon_{\text{Re}}^\alpha = \bigcup_{\lambda_j} \Upsilon_{\text{Re}, \lambda_j}^\alpha \quad \text{et} \quad \Upsilon_{\text{Im}}^\alpha = \bigcup_{\lambda_j} \Upsilon_{\text{Im}, \lambda_j}^\alpha \quad (5.32)$$

Cette définition laisse le choix de  $\alpha_1$  et de  $\alpha_2$  relativement ouvert. Le sens de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  correspond aux probabilités qu'une réalisation de  $\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})$  n'appartiennent pas à l'enveloppe. Ainsi dans la pratique on remplace plus facilement le terme de  $\alpha$ -enveloppe par le terme 'enveloppe à  $(1 - \alpha)\%$ '. Par exemple, une 0.20-enveloppe est une enveloppe à 80%, c'est à dire que 80% des réalisations de  $\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})$  appartiennent à l'enveloppe.

Une  $\alpha$ -enveloppe où  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$  est une  $\alpha$ -enveloppe équiprobable.

### 5.3.2.2 Expressions des enveloppes à 100%

Le problème des  $\alpha$ -enveloppes revient à résoudre le système suivant :

$$\int_{s_1^{\lambda_j}}^{s_1^{\lambda_j} + \beta_1^{\text{Re}, \lambda_j}} f_{\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})}(s) ds = \alpha_1 \quad (5.33)$$

$$\int_{s_2^{\lambda_j} - \beta_2^{\text{Re}, \lambda_j}}^{s_2^{\lambda_j}} f_{\text{Re}(\mathbf{H}_{jj})}(s) ds = \alpha_2 \quad (5.34)$$

où les inconnues indéterminées sont  $\beta_1^{\text{Re}, \lambda_j}$  et  $\beta_2^{\text{Re}, \lambda_j}$ . On a de même les expressions de  $\beta_1^{\text{Im}, \lambda_j}$  et  $\beta_2^{\text{Im}, \lambda_j}$  à déterminer.

Étant donnée la combinatoire du problème, il y a un grand nombre de cas à traiter en fonction de l'intervalle considéré. Ce travail est très fastidieux et nous n'alourdiront pas le présent manuscrit avec l'exposé de ces calculs. Nous resterons sur les acquis du chapitre précédent, dans

le sens où nous nous concentrons sur les enveloppes à 100%, car ce ne sont ni plus ni moins les intervalles d'intégration décrits dans l'annexe B.2. Ces intervalles sont donnés pour la partie réelle et pour la partie imaginaire et vont nous permettre de nous attaquer au problème inverse, c'est à dire l'identification des paramètres aléatoires du système vibrant à partir des observations expérimentales de la fonction de réponse en fréquence.

Cette démarche n'est pas sans risque et il serait plus rassurant de considérer des enveloppes à 85 ou 90 % et de se laisser ainsi une marge de sécurité, car une fois de plus rien n'assure que l'observable est représentatif de l'ensemble des états. Une évolution (considérable) de ce travail serait d'étendre la méthode avec cette marge de sécurité.

### 5.3.2.3 Identification du support de densité

Nous rappelons que nous avons supposé que les paramètres initiaux  $\omega_0^2$  et  $c$  étaient des variables aléatoires absolument continues à support compact. Cette modélisation probabiliste a débouché sur la résolution d'un problème modal qui permet de décrire l'enveloppe d'un mode isolé. Nous allons à partir de données expérimentales déterminer une enveloppe de ce mode, laquelle servira de référence dans la méthode d'identification. La détermination pratique (c'est-à-dire numérique) de cette enveloppe est discutée dans 5.3.3.1.

Le fait que l'on se soit placé sous l'hypothèse d'une loi uniforme nous ramène à l'identification du support des densités, ie des intervalles dans lesquels  $\omega_0^2$  et  $c$  sont amenés à varier. On cherche donc à remonter à  $(\Omega_1, \Omega_2, c_1, c_2)$  via les données expérimentales observées.

La figure 5.7 représente les enveloppes de la partie réelle et de la partie imaginaire, ainsi que 25 réalisations aléatoires du pavé  $[\Omega_1, \Omega_2] \times [c_1, c_2]$ .

### 5.3.2.4 Méthodes ponctuelles

Les enveloppes expérimentales qui vont être prises comme étant les enveloppes à 100% prennent à certaines fréquences des valeurs caractéristiques. Nous avons 4 inconnues  $(\Omega_1, \Omega_2, c_1, c_2)$ , il nous faut donc 4 équations pour constituer un système en s'intéressant à des fréquences particulières. Il faut ensuite voir si on peut résoudre le système.

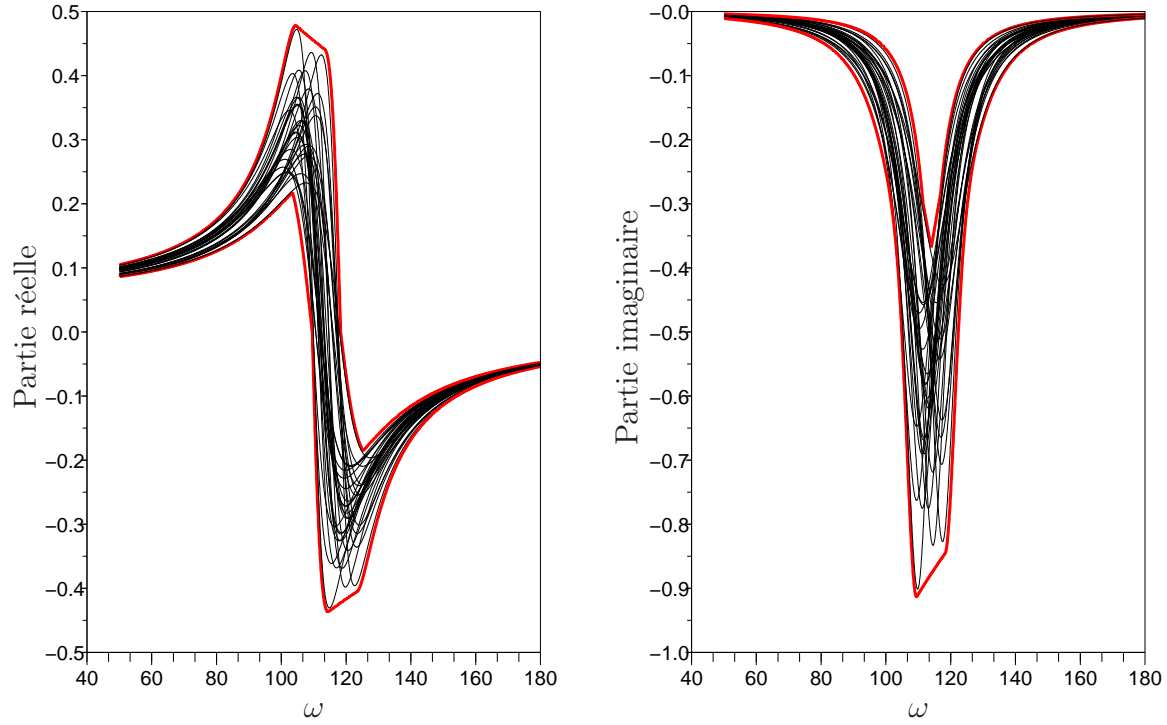


FIG. 5.7 – Enveloppes à 100% de la partie réelle et de la partie imaginaire (-) ainsi que 25 tirages aléatoires dans le pavé considéré (-).

Les valeurs choisies sont indiquées sur la figure 5.8.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \sqrt{\lambda \Omega_1 - \lambda c_2 \sqrt{\lambda \Omega_1}} \quad (5.35) \\ s_1 = \frac{B}{\lambda c_2 (2\sqrt{\lambda \Omega_1} - \lambda c_2)} \quad (5.36) \\ \omega_2 = \sqrt{\lambda \Omega_2 + \lambda c_1 \sqrt{\lambda \Omega_2}} \quad (5.37) \\ s_2 = \frac{B}{\lambda c_1 (2\sqrt{\lambda \Omega_2} + \lambda c_1)} \quad (5.38) \\ \omega_3 = \sqrt{\lambda \Omega_1 - \lambda c_1 \sqrt{\lambda \Omega_2}} \quad (5.39) \\ s_3 = \frac{B}{\lambda c_1 (2\sqrt{\lambda \Omega_1} - \lambda c_1)} \quad (5.40) \\ \omega_4 = \sqrt{\lambda \Omega_2 + \lambda c_2 \sqrt{\lambda \Omega_2}} \quad (5.41) \\ s_4 = \frac{B}{\lambda c_2 (2\sqrt{\lambda \Omega_2} + \lambda c_2)} \quad (5.42) \end{array} \right.$$

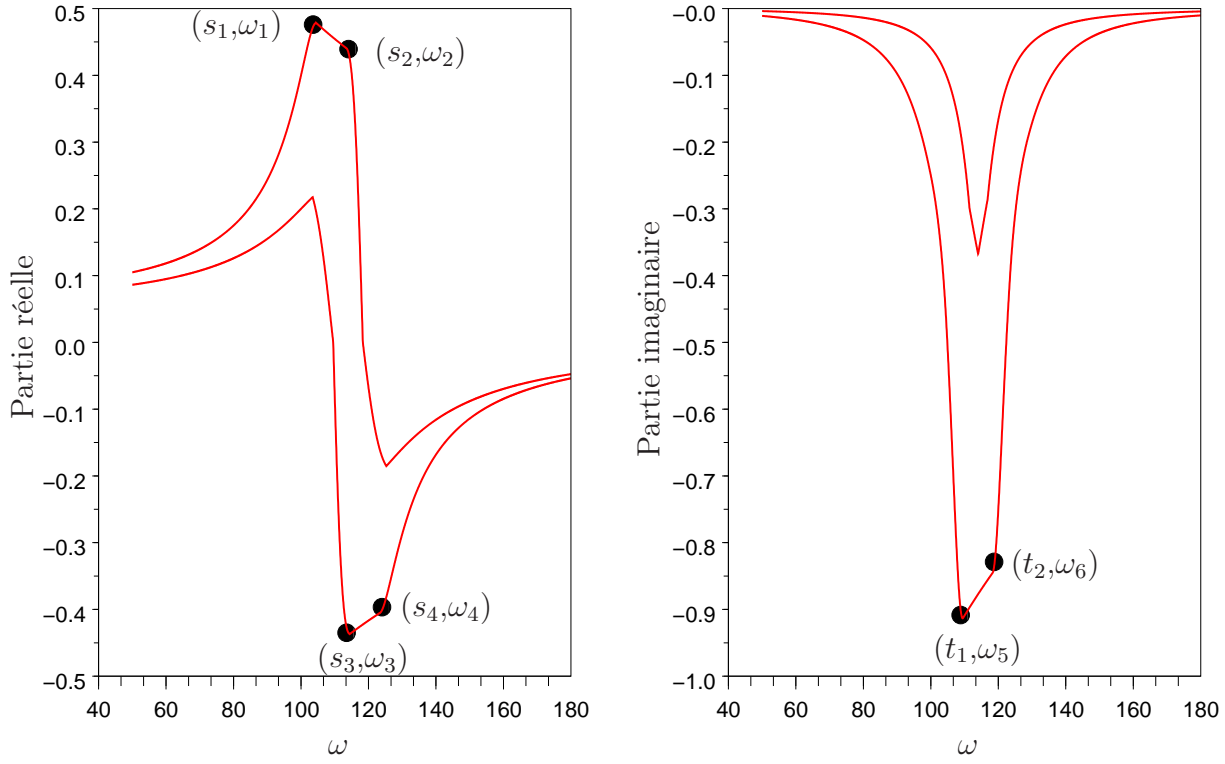


FIG. 5.8 – Enveloppes à 100% de la partie réelle et de la partie imaginaire (-) ainsi que 6 points caractéristiques.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_5 = \sqrt{\lambda \Omega_1} \\ t_1 = \frac{-B}{c_1 \lambda \sqrt{\lambda \Omega_1}} \end{array} \right. \quad (5.43) \quad (5.44)$$

$$\omega_6 = \sqrt{\lambda \Omega_2} \quad (5.45)$$

$$t_2 = \frac{-B}{c_1 \lambda \sqrt{\lambda \Omega_2}} \quad (5.46)$$

Il existe plusieurs méthodes ponctuelles, il est possible de constituer d'autres systèmes d'équations issues d'autres valeurs caractéristiques. Un exemple de résolution est donné par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \frac{\omega_5^2}{\lambda} \end{array} \right. \quad (5.47)$$

$$\Omega_6 = \frac{\omega_6^2}{\lambda} \quad (5.48)$$

$$c_1 = \frac{\omega_5^2 - \omega_3^2}{\lambda \omega_6^2} \quad (5.49)$$

$$c_2 = \frac{\omega_5^2 - \omega_1^2}{\lambda \omega_6^2} \quad (5.50)$$

## 5.3.2.5 Méthodes globales

Une méthode dite globale consiste à prendre en compte les valeurs des enveloppes de la partie réelle et de la partie imaginaire et de résoudre un système sur toute une bande de fréquence. Cette méthode s'applique là où la combinatoire des intervalles n'apparaît ni sur la partie réelle, ni sur la partie imaginaire, c'est à dire sur les zones extrêmes du mode. C'est ce que montre la figure 5.9. Pour les deux systèmes à venir, la pulsation  $\omega$  est fixée.

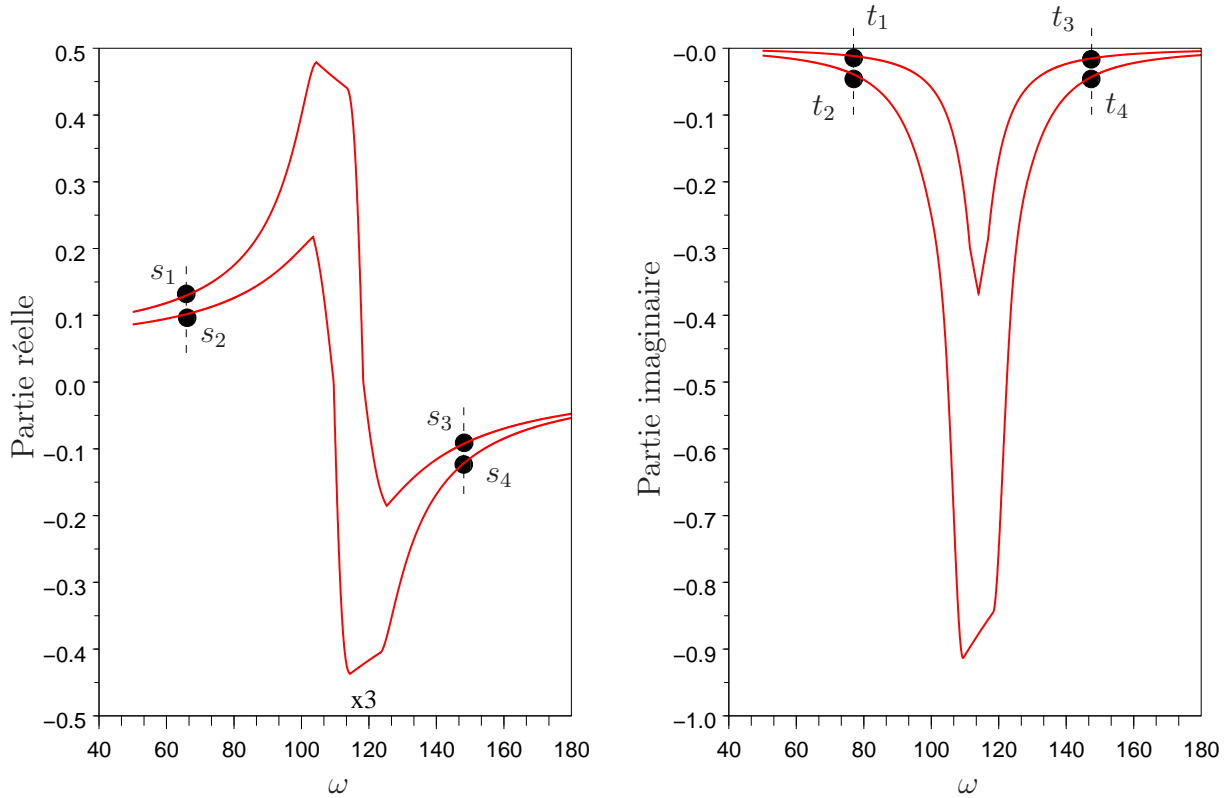


FIG. 5.9 – Enveloppes à 100% de la partie réelle et de la partie imaginaire (-).

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \frac{B(-\omega^2 + \lambda \Omega_1)}{(-\omega^2 + \lambda \Omega_1)^2 + \lambda^2 c_1^2 \omega^2} \quad (5.51) \\ s_2 = \frac{B(-\omega^2 + \lambda \Omega_2)}{(-\omega^2 + \lambda \Omega_2)^2 + \lambda^2 c_2^2 \omega^2} \quad (5.52) \\ s_3 = \frac{B(-\omega^2 + \lambda \Omega_1)}{(-\omega^2 + \lambda \Omega_1)^2 + \lambda^2 c_2^2 \omega^2} \quad (5.53) \\ s_4 = \frac{B(-\omega^2 + \lambda \Omega_2)}{(-\omega^2 + \lambda \Omega_2)^2 + \lambda^2 c_1^2 \omega^2} \quad (5.54) \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{-B \lambda c_1 \omega}{(-\omega^2 + \lambda \Omega_2)^2 + \lambda^2 c_1^2 \omega^2} \quad (5.55) \\ t_2 = \frac{-B \lambda c_2 \omega}{(-\omega^2 + \lambda \Omega_1)^2 + \lambda^2 c_2^2 \omega^2} \quad (5.56) \\ t_3 = \frac{-B \lambda c_1 \omega}{(-\omega^2 + \lambda \Omega_1)^2 + \lambda^2 c_1^2 \omega^2} \quad (5.57) \\ t_4 = \frac{-B \lambda c_2 \omega}{(-\omega^2 + \lambda \Omega_2)^2 + \lambda^2 c_2^2 \omega^2} \quad (5.58) \end{array} \right.$$

Comme pour les méthodes ponctuelles, il y a plusieurs moyens équivalents de procéder, ce qui montre qu'il existe un certain choix dans la construction des systèmes que l'on souhaite résoudre. A titre d'exemple, nous donnons l'exemple suivant de résolution :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{\omega [s_2(t_2 - t_3) - s_3(t_4 - t_1)]}{\lambda (s_1 s_2 - s_3 s_4)} \quad (5.59) \\ c_2 = \frac{\omega [s_4(t_2 - t_3) - s_1(t_4 - t_1)]}{\lambda (s_1 s_2 - s_3 s_4)} \quad (5.60) \\ \Omega_1 = \frac{\omega^2}{\lambda} \left( \frac{s_1 s_2 (t_2 - t_3) - s_1 s_3 (t_4 - t_1)}{s_1 s_2 - s_3 s_4} + t_3 \right) \quad (5.61) \\ \Omega_2 = \frac{\omega^2}{\lambda} \left( \frac{s_4 s_2 (t_2 - t_3) - s_4 s_3 (t_4 - t_1)}{s_1 s_2 - s_3 s_4} + t_1 \right) \quad (5.62) \end{array} \right.$$

### 5.3.2.6 Intérêts pratiques

Nous n'avons pas explicité tous les systèmes possibles que l'on peut résoudre, mais donné qu'un exemple dans chaque cas, par soucis de clarté. Cela aurait rajouter beaucoup de formules qui n'aident pas à la compréhension de la démarche proposée. Toutes ces valeurs caractéristiques sont des acquis de la résolution analytique et il faut rappeler qu'elles ne s'appliquent que pour des lois à support compact. Il est important de noter que ces différents systèmes permettent également de déterminer la valeur propre  $\lambda$  et le coefficient modal  $B$ , en gardant à l'esprit que cette technique d'identification fonctionne uniquement sur un mode séparé.

Les méthode ponctuelles sont relativement faciles à mettre en oeuvre, mais elles sont très dépendantes de la qualité des données caractérisant l'enveloppe. Ainsi si on estime mal l'enveloppe, on ne récupère pas des résultats très pertinents. La figure 5.10 illustre le cas où les réalisations expérimentales amènent à sous estimer l'enveloppe.

Les méthodes globales fournissent de meilleurs résultats car il est possible de considérer 2 autres fréquences différentes pour récupérer rapidement plusieurs résultats que l'on peut comparer entre eux, ce qui présente un aspect plus "rassurant" que les méthodes ponctuelles.

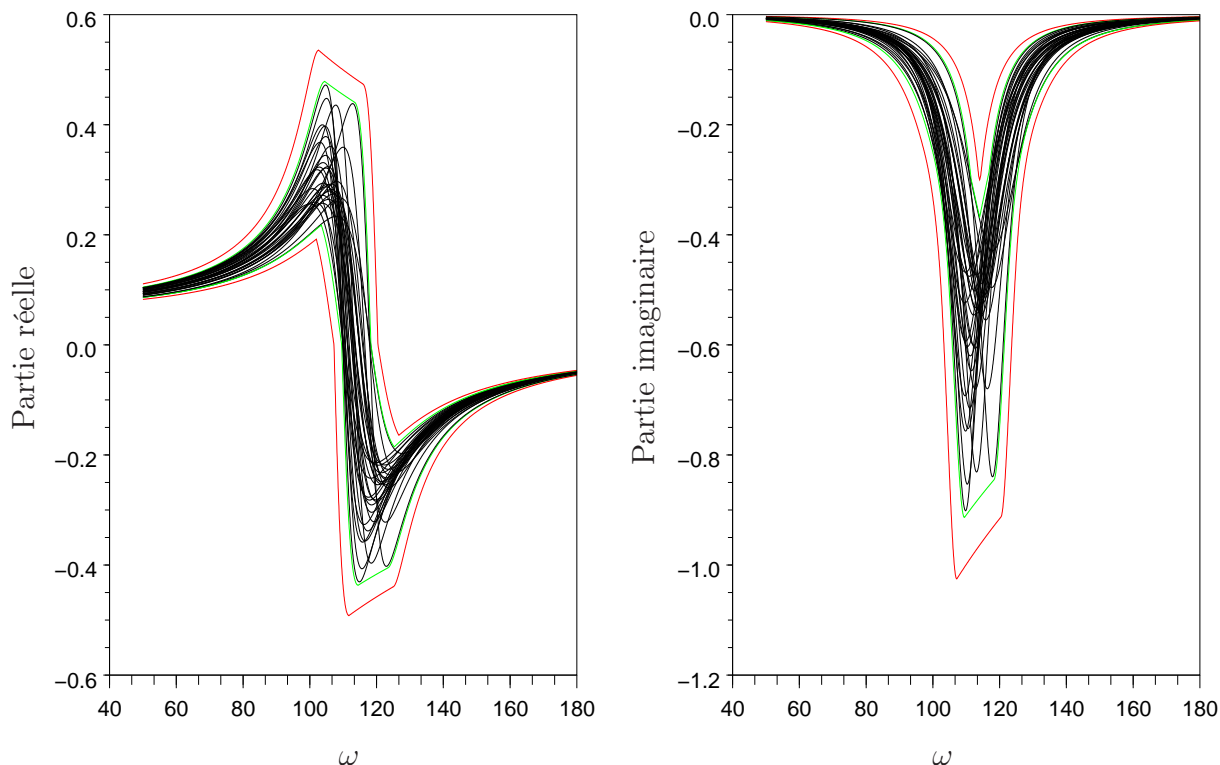


FIG. 5.10 – Enveloppes à 100% de la partie réelle et de la partie imaginaire (-) sous-évaluée par rapport à la véritable enveloppe (-).

### 5.3.3 Pertinence pratique des méthodes paramétriques

#### 5.3.3.1 Nombre de réalisation

La question du nombre de réalisations nécessaire appelle la question plus générale de l'information disponible. Mis en parallèle avec tous les paradoxes face auxquels on peut se retrouver confrontés, on se trouve un peu démunis avec un observable qui n'est qu'un fragment de ce qu'on voudrait contrôler. L'approche développée dans ce document est une approche fréquentielle des probabilités, c'est à dire que les probabilités fournissent un modèle permettant d'idéaliser la distribution des évènements en observant leur répétition dans le temps. Cette approche s'oppose aux approches bayésiennes, non développées ici, qui consistent à attribuer un degré de croyance en certaines propositions. Ces degrés de croyance s'affinent au regard du renouvellement de l'expérience en appliquant le théorème de Bayes (probabilités conditionnelles).

Ainsi le premier outil qui s'impose dans l'approche fréquentielle si on cherche à analyser des données fluctuantes est l'estimateur de la moyenne. Il s'agit donc de pouvoir appliquer la loi des grands nombres. La convention usuelle est de considérer qu'à partir de  $n = 30$ , la loi s'applique.

Ainsi pour ce qui est de la détermination expérimentale de l'enveloppe, nous nous en tiendrons également à 30 échantillons de mesure. Afin d'assurer un "tracé" cohérent de l'enveloppe, on

pourrait très bien imaginer retenir les valeurs extrêmes des 30 échantillons à chaque fréquence, puis essayer de déterminer au sens des moindres carrés l'enveloppe analytique (méthode de "fit"). La combinatoire des intervalles nous empêche de réaliser la chose sur toute la bande fréquentielle du mode, mais elle reste envisageable dans les zones où cette combinatoire intervient moins (comme autour de la fréquence propre moyenne). Cette méthode n'a pas été développée ici par manque de temps. En pratique, nous nous contenterons de retenir les valeurs extrémales à chaque fréquence et nous appliquons directement les méthodes exposées ci-dessus.

### 5.3.3.2 Origine et prise en compte du bruit

Le bruit est un concept très fréquemment évoqué, mais rarement bien formulé. Pour l'expérimentateur, il s'agit généralement d'une perte de fiabilité de son appareil de mesure qui explique la variation entre la réalité mesurée et le modèle qu'il utilise. D'autres parlent de bruit numérique en se référant aux troncatures de mantisse dans le traitement des flottants par un ordinateur. Il existe plusieurs sources possibles de perturbations des données expérimentales qui ne se réfèrent pas uniquement dans la fluctuation physique des grandeurs mesurées.

Nous ne modélisons pas à part ces perturbations, mais nous les intégrons au modèle proposé. L'approximation consiste à ignorer la présence de ces facteurs "expérimentaux" et de postuler que les variations sont dues uniquement aux paramètres du système. Si les perturbations concernent la sollicitation du système vibrant, comme nous nous concentrons sur la réponse en fréquence, les conséquences peuvent s'en trouver diminuées, de même pour une défaillance de l'appareil de mesure qui ne se produirait pas en dessous de la fréquence d'échantillonnage de la carte d'acquisition. La méthode proposée possède certes un côté "globalisant", car l'expérimental est difficile à maîtriser. Nous exagérons certainement les effets de l'aléa des paramètres, mais il s'agit d'une réponse partielle (et sans doute partielle) à l'identification de l'aléa des paramètres d'un système vibrant à partir de la réponse en fréquence de ce dernier.

## Conclusion

Ce dernier chapitre est assez éclectique. Nous avons passé en revue plusieurs méthodes numériques que nous avons illustrés sur des exemples pratiques simples. Ces exemples ont été pris dans la thématique de la caractérisation des matériaux poreux. La grandeur observée est le coefficient d'absorption du matériaux pour les deux premières méthodes, à savoir la projection sur le chaos polynomial et l'identification non-paramétrique. La troisième méthode présentée est une technique d'identification paramétrique se basant sur les résultats analytiques décrits précédemment et permettant d'identifier le support des deux paramètres aléatoires. Cette dernière méthode n'a pas été validée sur des résultats expérimentaux pour le moment.



# Chapitre 6

## Conclusion et Perspectives

Modéliser les probabilités consistent à modéliser le doute, l'incertain. Ce ne sont pas des domaines faciles à appréhender d'un point de vue épistémologique et si on considère le problème dans toute sa généralité on s'aperçoit que tout comporte une incertitude: il y a toujours des données entachées d'erreurs, des hypothèses simplificatrices ou des maladresses humaines qui jettent des zones d'ombre sur la totalité des problèmes que l'on peut rencontrer.

Notre démarche a été de nous placer dans le sillage de la résolution classique déterministe. Ainsi, dans le cadre linéaire de la théorie des modes normaux, nous nous sommes focalisés sur l'oscillateur harmonique pour système élémentaire, puis nous avons proposé une extension à un systèmes à  $n$  degrés de libertés qui permet lui-même d'approcher le problème continu initial. C'est sous cette approche que nous avons mis en oeuvre le formalisme des probabilités pour appréhender l'impact des variations de l'amortissement et de la fréquence propre sur la réponse modale d'un système vibrant.

Nous n'avons pas considéré de sollicitation stochastique pour le système vibrant. Nous avons étudié sa réponse en fréquence en considérant que l'amortissement et la fréquence propre étaient aléatoires. Les calculs ont été menés jusqu'à leur terme avec deux lois uniformes et déjà dans ce cas-là, les expressions s'avèrent assez lourdes à manipuler. Le cas de l'étude de la loi uniforme sur un intervalle permet d'envisager par la suite n'importe quelle loi définie par morceaux, constituée de la somme de plusieurs lois uniformes sur des supports disjoints. Cependant, ces dernières sont écrites une seule fois et permettent d'envisager d'approcher n'importe quelle loi comme une approximation par une fonction étagée de  $\mathbb{R}^2$ . C'est un problème essentiellement technique qui consiste à utiliser plusieurs fois le résultat obtenu en adaptant convenablement une constante de normalisation. Une autre extension envisageable est de faire dépendre de la fréquence l'amortissement ou la fréquence propre (c'est à dire la raideur), comme cela peut-être le cas pour les matériaux visqueux. En effet il est possible d'attribuer à certaines fréquences un support plus large aux lois uniformes et obtenir dans ce cas une meilleure description des

paramètres intrinsèques. Il s'agit là encore d'un développement relativement technique, mais il renforce l'intérêt de la résolution du problème avec des lois uniformes et cette compacité des supports permet d'ouvrir une perspective intéressante pour l'évolution des modèles.

Nous n'avons pas étudié des systèmes mécaniques très compliqués; notamment les matériaux poreux dans la théorie générale de Biot n'ont été qu'évoqués. Nous nous sommes concentrés sur la résolution d'un problème simple afin de faire avancer les modèles probabilistes dans le cadre de la vibroacoustique. La démarche est chronophage pour plusieurs raisons. La première réside sans aucun doute dans le fait que toute opération que l'on effectue dans le cadre déterministe pose des difficultés pour le calcul des probabilités. Par exemple si on divise par un facteur  $m$  dans un calcul déterministe, le calcul est élémentaire, mais si  $m$  représente un ensemble de valeurs comme l'image d'une variable aléatoire, l'opération doit rester valable pour toutes les valeurs de  $m$ . Le calcul analytique de la densité après cette opération se plie à des contraintes qu'il faut absolument respecter, au risque de se retrouver rapidement face à une incohérence. En effet, probabiliser pour arriver à un modèle probabiliste incohérent avec la physique ne nous paraît guère judicieux, et de nombreux choix dans cette thèse proviennent de cet état de fait. C'est pourquoi nous nous sommes concentrés sur des lois à support compact et que nous avons probabilisé des grandeurs "physiques", comme la fréquence propre de l'oscillateur. La résolution rigoureuse du problème ainsi posé nécessite plusieurs précautions que nous avons détaillées au chapitre 3 et nous avons illustré les problèmes rencontrés, notamment les pertes d'injectivité qui pouvaient survenir. La résolution à deux paramètres obéit au même formalisme, mais elle s'est révélée très combinatoire. Ce n'est pas une perte d'injectivité qui pose problème dans ce cas-là, mais l'image du pavé qui dépend très fortement de la fréquence. Sans doute peut-on poser le problème autrement et s'affranchir de l'aspect combinatoire très lourd de la méthode, mais nous avons mené les résultats de front jusqu'à leur terme et fourni tous les résultats analytiques en annexe. Une réponse numérique à cette approche analytique peut être le calcul avec des méthodes par intervalles, mais l'aspect algorithmique efface un peu la compréhension profonde du phénomène et ne permet pas d'envisager le problème inverse.

La méthode développée ici pour la mécanique est valable pour le domaine des basses fréquences car on s'appuie sur la théorie des modes normaux. Nous avons donc retenu en fin de compte seulement deux paramètres pour étudier un mode de vibration linéaire probabilisé. Le fait qu'il soit probabilisé rend le problème non-linéaire vis-à-vis des paramètres. Nous avons utilisé une résolution du problème en deux temps en considérant une étape amont qui consiste à déterminer quels paramètres physiques amènent à faire varier l'amortissement et la fréquence propre. Comme nous l'avons déjà souligné, cette étape amont peut se révéler également compliquée en fonction des systèmes étudiés. Nous en avons donné un exemple avec la poutre d'Euler-Bernoulli. Dès lors que l'on a traité le cas linéaire, il est légitime d'envisager un mode complexe ou un mode non linéaire de vibration. Pour ce qui est du mode complexe, se pose le problème d'une variable

---

aléatoire sur  $\mathbb{C}$ , comme nous l'avons déjà évoqué. L'absence de relation d'ordre pose le même problème de comparaison in fine de la variable aléatoire, cependant il est possible de mettre en place un critère énergétique (dans  $\mathbb{R}$ ) ou une autre grandeur exprimant une grandeur intuitive et à notre sens comparable. Pour les modes non-linéaires, il est admis que la résolution passe par la recherche de sous-espaces invariants dont on ne possède que rarement l'expression analytique. La valeur d'un paramètre dans le cadre non-linéaire peut entraîner des régimes variés (équilibre, solutions périodiques, quasi-périodiques ou chaotiques) et si ce paramètre est une variable aléatoire continue pouvant prendre plusieurs de ces valeurs, le problème probabilisé va déboucher sur des probabilités conditionnelles, c'est à dire qu'il faudra avoir recours la formule de Bayes pour déterminer le régime obtenu. Ainsi la résolution du problème va se scinder en une multitude de cas particuliers et dresser une zoologie exhaustive demandera un travail énorme. Une autre difficulté de taille réside dans le fait que déjà dans le cas linéaire, il est nécessaire de prendre en compte l'amortissement dans le modèle, autrement les valeurs à la résonance perdent leur sens. C'est donc dans le cadre des modes non-linéaires amortis qu'il faudrait progresser et la théorie déterministe actuelle ne permet pas à ce jour de traiter pleinement le problème.

Nous avons présenté également plusieurs méthodes numériques avec leurs avantages et leurs limitations. La méthode de projection sur le chaos polynomial constitue une méthode prédictive non intrusive dont la vitesse de convergence n'est pas forcément acquise ni avantageuse. Les méthodes numériques non-paramétriques ont été présentées ici car elles donnent une estimation directement de la densité de probabilité d'une part, et d'autre part elles permettent d'ouvrir les portes à un critère d'appréciation de robustesse d'un modèle vis-à-vis des paramètres du modèle utilisé. Cette voie mérite un approfondissement, car elle ne prend pas en compte actuellement les éventuelles corrélations entre les paramètres. Ainsi si le but est de quantifier la sensibilité du modèle à un paramètre, il faut garder à l'esprit que pour l'instant cela n'est réalisé qu'en ayant fixé tous les autres : on se déplace selon une droite dans  $\mathbb{R}^k$  pour un phénomène non linéaire, il est donc difficile de se représenter aisément le problème car on l'observe sous un angle très particulier. Enfin, la dernière méthode propose de se servir des résultats analytiques développés auparavant pour identifier les supports des lois uniformes. La méthode du recuit-simulé est présentée ainsi comme une sorte de clin d'oeil aux méthodes stochastiques auxquelles nous sommes intéressés, mais que nous n'avons pas exploitées en tant que telles dans cette thèse. La définition des enveloppes à support compact nous a permis de proposer une première méthode d'identification de l'aléa des paramètres (à savoir l'amortissement et la fréquence propre). On n'identifie que le support des lois uniformes, mais c'est déjà un premier pas important. Nous n'avons guère eu le temps de recroiser cette méthode avec des relevés expérimentaux, mais nous avons montré qu'il était possible d'obtenir de différentes façons des résultats en résolvant différents systèmes. Cet ensemble de méthodes pourrait donner lieu à un logiciel d'identification dont l'implémentation ne serait pas très coûteuse, et qui pourrait servir grandement à un expérimentateur.

Il demeure toujours un problème de taille qui concerne l'observable. En effet dans une approche fréquentielle des probabilités, l'information disponible en pratique est rarement satisfaisante. Il est convenu que la loi des grands nombres s'applique à partir de 30 réalisations, mais la mesure des données physiques n'est pas toujours fidèle, et la reproductibilité d'une expérience n'est jamais garantie. Ainsi recroiser les résultats théoriques acquis dans cette thèse avec des relevés expérimentaux constitue en soi une perspective importante.

Notre méthode analytique permet de résoudre le problème de l'oscillateur harmonique probabilisé. L'extension à plusieurs degrés de liberté montre que l'étude d'un système simple peut déboucher relativement vite sur des systèmes plus complexes. Nous avons initié des techniques de résolution concrètes, comme l'identification à base des enveloppes, mais nous n'avons pas implémenté l'ensemble de ces méthodes. Cet aspect technique devient rapidement limitant et les développements informatiques avaient uniquement vocation à tester et à étayer le discours d'exemples concrets. Une valorisation évidente de ce travail de thèse serait d'implémenter proprement dans un projet transversal ces résultats, mais le temps manque. Nous tenons à souligner qu'il est possible d'utiliser les formules présentées conjointement à n'importe quel programme éléments finis, avec des modifications mineures qui consistent à en faire ressortir les valeurs pertinentes (comme les valeurs propres de l'opérateur discrétisé). Nous avons mis en place par le biais de l'analyse modale probabiliste une solution peu coûteuse en calculs, étant donné que la résolution numérique est de même complexité que le calcul déterministe. Les méthodes numériques présentées visent également à ne pas enfermer la résolution dans une "boîte noire" et comme pour les exemples d'identification non-paramétrique, nous avons tenu à présenter des illustrations claires.

La théorie des matériaux poreux est un domaine fertile pour donner lieu à de multiples applications de ce qui a été développé dans cette thèse. L'aléa sur les paramètres peut ainsi être pris en compte dans le cadre de modèles simples, mais pour des problèmes compliqués avec un grand nombre de paramètres comme dans la théorie de Biot, il est nécessaire de pousser encore l'étude. C'est surtout dans l'étape amont dans la description des paramètres globaux du système vibrant que le travail est à parfaire, et il faut pour cela avoir une bonne connaissance de la résolution déterministe. Nous avons apporté une première réponse en proposant des méthodes basées sur la résolution analytique, mais il reste également à vérifier que ces méthodes sont pertinentes vis-à-vis de données expérimentales. Ceci permettrait de développer la compréhension des phénomènes d'une part en validant rigoureusement la prépondérance de certains paramètres, mais cela permettrait également de parfaire les méthodes de caractérisation des matériaux poreux en tenant compte des disparités inévitables concernant les processus de fabrication et même de vieillissement du matériau.



---

Cette thèse ne constitue qu'un début dans le domaine, de nombreux points méritent d'être approfondis, développés ou tout simplement implémentés. Maintenant que cette première étape est franchie, nous espérons que ce travail se révélera fructueux et sera valorisé dans l'avenir.



# Bibliographie

- [AD82] J.H. AHRENS et U. DIETER. « Generating gamma variates by a modified rejection technique ». *Communications of the ACM*, 25:47–54, 1982.
- [A.F97] A.F. VAKAKIS. « Nonlinear normal modes (NNMs) and their applications in vibration theory ». *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11:3–22, 1997.
- [Arn98] Ludwig ARNOLD. *Random Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998.
- [AS70] M. ABRAMOWITZ et I.A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, 9th edition, 1970.
- [Ban76] G. BANON. « Sur un estimateur de la densité de probabilité ». *Revue de statistique appliquée*, 24:61–73, 1976.
- [Ber89] J. BERTRAND. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, 1889.
- [BP00] M. BRIANE et G. PAGES. *Théorie de l'intégration. Licence de mathématiques. Cours et exercices*. Librairie Vuibert, 2000.
- [BS06] M. Lemaire B. SUDRET, M. Berveiller. « A stochastic finite element procedure for moment and reliability analysis ». *European Journal of Computational Mechanics*, 15:825–866, 2006.
- [Chu67] K.L. CHUNG. *Markov chains with stationary transition probabilities*. Springer Verlag, 1967.
- [CPFL06] C. HEINKELE, S. PERNOT, F. SGARD et C.-H. LAMARQUE. « Vibration of an oscillator with random damping: analytical expression for the probability density function ». *Journal of Sound and Vibration*, 296:383–400, 2006.
- [Deh73] P. DEHEUVEULS. « Sur l'estimation séquentielle de la densité ». *Compte rendu de l'académie des sciences*, 276:1119–1121, 1973.
- [Duf96] M. DUFLO. *Algorithmes stochastiques, Mathématiques et Applications 23*. Springer Verlag, 1996.
- [Epa69] V.A. EPANECHNIKOV. « Nonparametric Estimation of a Multivariate Probability Density ». *Theory of Probability and Its Applications*, 14:153–158, 1969.
- [GD91] Roger G. GHANEM et Pol D. SPANOS. *Stochastic Finite Elements: A spectral Approach*. Springer-Verlag, New-York, 1991.

- [GL96] G.H. GOLUB et C.F. Van LOAN. *Matrix Computations, Third Edition*. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [Hä90] W. HÄRDLE. *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge University Press, 1990.
- [Jay57] E.T. JAYNES. « Information theory and statistical mechanics ». *Physical Review*, 106 and 108:620–630 and 171–190, 1957.
- [JM07] C.Chauvière J.BAROTH, Ph.Bressollette et M.FOGLI. « An efficient SFE method using Lagrange polynomials: Application to nonlinear mechanical problems with uncertain parameters ». *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196:4419–4429, 2007.
- [Knu97] Donald E. KNUTH. *The Art of Computer Programming (Vol 2) Seminumerical Algorithms 3rd Ed.* Addison-Wesley, 1997.
- [KP00] P. KLOEDEN et E. PLATEN. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 2000.
- [LC91] L.JEZEQUEL et C.H.LAMARQUE. « Analysis of nonlinear dynamical systems by normal form theory ». *Journal of Sound and Vibration*, 149:429–459, 1991.
- [LDH95] R. H. LYON, R. G. DEJONG et M. HECKL. « Theory and Application of Statistical Energy Analysis, Second Edition ». *Acoustical Society of America Journal*, 98, décembre 1995.
- [MB05] M. Lemaire M. BERVEILLER, B. Sudret. « Éléments finis stochastiques non linéaires en mécanique de la rupture ». *17ème Congrès Français de Mécanique*, 2005.
- [Nei92] H. NEIDERREITER. *Random Number Generation and Quasi Monte Carlo Methods*. Society for industrial mathematics, 1992.
- [OL01] J.-P.Lainé O.DESSOMBZ, F.Thouverez et L.JEZEQUEL. « Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods ». *Journal of Sound and Vibration*, 239:949–968, 2001.
- [PM94] P.BRESSOLETTE et M.FOGLI. « Quelques méthodes de résolution de problèmes de dynamique stochastique non linéaire ». *Annales mathématiques Blaise Pascal*, 1:43–60, 1994.
- [PU99] A.R. PAGAN et A. ULLAH. *Nonparametric Econometrics*. Cambridge University Press, 1999.
- [R.E06] R.ELIE. « Contrôle stochastique et méthodes numériques en finance mathématique ». PhD thesis, Université Paris-Dauphiné, 2006.
- [Ros56] M. ROSENBLATT. « Remarks on some nonparametric estimates of a density function ». *Annals of Mathematical Statistics*, 27:832–837, 1956.
- [Rud96] W. RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. Masson et Cie, 1996.
- [SC91] S.W.SHAW et C.PIERRE. « Non-linear normal modes and invariant manifolds ». *Journal of sound and vibration*, 150:170–173, 1991.

- [Sco92] D.W. SCOTT. *Multivariate Density Estimation*. John Wiley and Sons, 1992.
- [SH04] C. SOIZE et H.CHEBLI. « Random uncertainties model in dynamic substructuring using a nonparametric probabilistic model ». *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, 129:449–457, 2004.
- [Sha48] C.E. SHANNON. « A Mathematical Theory of Communication ». *The Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 1948.
- [Soi00] C. SOIZE. « A Nonparametric model of random uncertainties on reduced matrix model in structural dynamics ». *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15:277–294, 2000.
- [Soi01] C. SOIZE. « Transient responses of dynamical systems with random uncertainties ». *Probabilistic Engineering Mechanics*, 6:363–372, 2001.
- [Soi02] C. SOIZE. « Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics ». *Journal of the Acoustical Society of America*, 106:1979–1996, 2002.
- [Soi03] C. SOIZE. « Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis ». *Journal of Sound and Vibration*, 263:893–916, 2003.
- [Soi05] C. SOIZE. « A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics ». *Journal of Sound and Vibration*, 288:623–652, 2005.
- [SR05] S.BELLIZZI et R.BOUC. « A new formulation for the existence and calculation of non-linear normal modes ». *Journal of Sound and Vibration*, 287:545–569, 2005.
- [Wil91] D. WILLIAMS. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.
- [Yam72] H. YAMATO. « Sequential estimation of a continuous probability density function and mode ». *Bulletin of Mathematical Statistics in Japan*, 14:1–12, 1972.
- [Yca02] B. YCART. *Modèles et Algorithmes Markoviens, Mathématiques et Applications 39*. Springer Verlag, 2002.
- [ZT89] O.-C. ZIENKIEWICZ et R.-L.s TAYLOR. *The finite element method: basic formulation and linear problems*, volume 1. McGraw Hill, London, Great Britain, 4th édition, 1989.



# Table des figures

3.1	En rouge (-) $\mathcal{F}_{\text{re}}(\Omega_+)$ (figure de gauche) et $\mathcal{F}_{\text{im}}(\Omega_+)$ (figure de droite). En vert (-) $\mathcal{F}_{\text{re}}(\Omega_-)$ et $\mathcal{F}_{\text{im}}(\Omega_-)$ . En noir (-) des tirages de $\mathcal{F}_{\text{re}}(z)$ et $\mathcal{F}_{\text{im}}(z)$ avec $z \in [\Omega_-, \Omega_+]$ .	58
3.2	En rouge (+) les résultats obtenus avec la méthode de Monte Carlo avec 10 000 réalisations. En vert (-) la solution analytique décrite précédemment. $c = 0.1$ $\Omega_0 = 4500$ $\sigma_\Omega = 20\% \Omega_0$	66
3.3	En rouge (+) les résultats obtenus avec la méthode de Monte Carlo avec 7 millions de réalisations. En vert (-) la solution analytique décrite précédemment. $c = 0.1$ $\Omega_0 = 4500$ $\sigma_\Omega = 20\% \Omega_0$	67
3.4	En rouge (-) $\mathcal{F}_{\text{re}}(c_+)$ (figure de gauche) et $\mathcal{F}_{\text{im}}(c_+)$ (figure de droite). En vert (-) $\mathcal{F}_{\text{re}}(c_-)$ et $\mathcal{F}_{\text{im}}(c_-)$ . En noir (-) des tirages de $\mathcal{F}_{\text{re}}(x)$ et $\mathcal{F}_{\text{im}}(x)$ avec $x \in [c_-, c_+]$ .	69
3.5	En rouge (-) la solution analytique. En noir (+) la solution obtenue avec la méthode de Monte Carlo avec 1000 réalisations. $\omega_0 = 143s^{-1}$ $c_0 = 0.09$ $\sigma_c = 40\% c_0$	75
3.6	En rouge (-) la solution analytique. En noir (+) la solution obtenue avec la méthode de Monte-Carlo avec 10 000 réalisations. $\omega_0 = 143s^{-1}$ $c_0 = 0.09$ $\sigma_c = 40\% c_0$	75
4.1	Exemple du compact $\mathcal{F}(V)$ (en bleu) à considérer lors de l'intégration en $t$ avec 4 intervalles $[t_1(s), t_2(s)]$ .	82
4.2	Exemple du compact $\mathcal{F}(V)$ (en bleu) à considérer lors de l'intégration en $s$ avec 3 intervalles $[s_1(t), s_2(t)]$ .	83
4.3	partie réelle	84
4.4	partie imaginaire	84
4.5	Poutre encastree-libre	85
4.6	Moyenne de la partie réelle de $\tilde{H}$ sur le deuxième mode de réponse de la poutre encastree-libre excitée en son centre.	89
4.7	Moyenne de la partie imaginaire de $\tilde{H}$ sur le deuxième mode de réponse de la poutre encastree-libre excitée en son centre.	89
5.1	Moyenne du coefficient d'absorption donnée par le modèle de Miki par projection sur le chaos polynomial.	96

5.2	Moment d'ordre 2 du coefficient d'absorption donnée par le modèle de Miki par projection sur le chaos polynomial. . . . .	97
5.3	Schéma du tube de Kundt. . . . .	97
5.4	Comparaison des deux estimateurs sur la moyenne du coefficient d'absorption : la moyenne obtenue avec la densité estimée (-) et la moyenne obtenue par l'estimateur classique (+). . . . .	99
5.5	Enveloppe numérique à 98% obtenue d'après la densité estimée (-) avec la moyenne (-) du coefficient d'absorption. . . . .	100
5.6	Densité de probabilité de la tortuosité oblique à 500 Hz. . . . .	103
5.7	Enveloppes à 100% de la partie réelle et de la partie imaginaire (-) ainsi que 25 tirages aléatoires dans le pavé considéré (-). . . . .	110
5.8	Enveloppes à 100% de la partie réelle et de la partie imaginaire (-) ainsi que 6 points caractéristiques. . . . .	111
5.9	Enveloppes à 100% de la partie réelle et de la partie imaginaire (-). . . . .	112
5.10	Enveloppes à 100% de la partie réelle et de la partie imaginaire (-) sous-évaluée par rapport à la véritable enveloppe (-). . . . .	114
A.1	Schéma bilan des convergences en probabilités. . . . .	135



## Annexe A

# Rappels de probabilité

## A.1 Fondamentaux de la théorie de probabilités

### A.1.1 La théorie de la mesure

La théorie des probabilités découle directement de la théorie de la mesure. Cette dernière est dû d'une part à Emile Borel, qui définit les ensembles négligeables et les ensembles mesurables, et à Henri Lebesgue, qui définit quand à lui la mesure sur ces ensembles. Nous allons exposer rapidement les jalons essentiels de cette théorie. [BP00] et [Wil91] restent de très bonnes références pour plus de détails.

Pour définir une mesure sur un ensemble quelconque, il faut travailler à la manière "d'organiser" cet ensemble ou du moins comment il faut considérer les éléments de cet ensemble pour pouvoir définir une mesure dessus. Cette étape en amont fait naître le besoin de définir une tribu **sur** cet ensemble : on parle alors d'un ensemble  $\Omega$ , muni d'une tribu  $\mathcal{F}$ .

#### Définition A.1

Une partie  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  est une tribu sur  $\Omega$  si :

(a)  $\Omega \in \mathcal{F}$ .

(b) Si  $\Delta \in \mathcal{F}$ , alors  $\Delta^c \in \mathcal{F}$ .

(c) Si  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante d'éléments dans  $\mathcal{F}$ , alors  $\bigcup \Delta_n \in \mathcal{F}$ . □

$\Delta^c$  désigne le complémentaire de  $\Delta$ .

La propriété (c) est très importante pour le comportement des ensembles dénombrables, c'est-à-dire des suites. Par construction, cette propriété figure dans la définition d'une tribu pour pouvoir définir la mesure d'un ensemble de cardinal infini (mais dénombrable cependant). Il y a beaucoup de résultats qui découlent de cette définition. Rappelons la tribu borélienne, qui permet de rendre les parties de  $\mathbb{R}$  mesurables et qui est engendrée par l'ensemble des ouverts de  $\mathbb{R}$ .

Le couple  $(\Omega, \mathcal{F})$  s'appelle un ensemble mesurable. Nous pouvons à présent passer à la définition d'une mesure.

## Définition A.2

Une mesure positive  $\mu$  sur l'ensemble mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$  est une application de  $\mathcal{F}$  dans  $\overline{\mathbb{R}^+} = [0, +\infty]$  telle que :

(i)  $\mu(\emptyset) = 0$ .

(ii) Pour toute famille  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$  deux à deux disjoints, tels que  $\Delta_n \cap \Delta_m = \emptyset$  si  $n \neq m$ ,  
alors  $\mu\left(\bigcup_n \Delta_n\right) = \sum_n \mu(\Delta_n)$ . □

La propriété (ii) est appelée propriété de  $\sigma$ -additivité, car elle traite de l'addition des mesures de parties d'un ensemble dénombrable. Cette propriété peut être obtenue justement sur une tribu (pour les ensembles de cardinal non fini bien entendu).

A titre d'exemple, nous rappelons ici la mesure de Dirac, car nous l'utilisons comme un cas limite de la mesure de probabilité. Soit  $a$  un élément de  $\Omega$ . La mesure de Dirac est définie par l'application  $\delta_a$  telle que :

$$\forall F \in \mathcal{F}, \delta_a = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in F \\ 0 & \text{si } a \notin F \end{cases}$$

## A.1.2 Principaux théorèmes

Les résultats puissants obtenus sur la mesure de suites découlent de la propriété de  $\sigma$ -additivité. Le résultat le plus important est le théorème suivant:

### Théorème A.1:

(1) Soit  $\Delta_n$  une suite de  $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ , croissante au sens de l'inclusion, i.e.  $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ .

On a alors  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Delta_n)$

(2) Soit  $\Delta_n$  une suite de  $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ , décroissante au sens de l'inclusion, i.e.  $\Delta_n \supset \Delta_{n+1}$ .

On a alors  $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Delta_n)$  □

Lebesgue définit une intégrale basée sur la théorie de la mesure en considérant l'image de la fonction à intégrer, ce qui ramène le problème à la mesure de l'image réciproque (c'est à dire l'ensemble de départ). Cette approche est très performante car cette intégrale permet de traiter "naturellement" les suites de fonctions. Le théorème A.1 permet d'obtenir le théorème de convergence monotone, aussi appelé le théorème de Beppo-Levy :

### Théorème A.2 (Théorème de Beppo-levy):

Soit  $f_n$  une suite croissante (presque partout) de fonctions mesurables positives

telle que  $f_n \rightarrow f$ . On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Ce théorème A.2 permet alors de montrer le lemme de Fatou :

**Lemme A.1 (Lemme de Fatou):**

Soit  $f_n$  une suite de fonctions mesurables non négatives. On a alors :

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu$$

Qui à son tour donne le théorème très utile de la convergence dominée :

**Théorème A.3 (Théorème de convergence dominée):**

Soit  $f_n$  une suite de fonctions mesurables telle que  $f_n \rightarrow f$  p.p. Si il existe une fonction  $g$  mesurable et  $\mu$ -intégrable telle que  $\forall n \geq 0 |f_n| \leq g$  p.p., alors  $f_n$  et  $f$  sont  $\mu$ -intégrables et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

### A.1.3 Axiomatique de Kolmogorov

Voici les axiomes que publie Andreï Nikolaïevich Kolmogorov en 1933 dans *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, "Des fondements de la théorie des probabilités".

On se donne  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable ( $\Omega$  est l'espace des états et  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des évènements). On définit une mesure de probabilité sur  $\mathcal{F}$  de la façon suivante :

**Définition A.3**

$\mathbb{P}$  est une mesure de probabilité sur  $\mathcal{F}$  si

(i)  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

(ii) Pour toute famille finie ou dénombrable  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$  deux à deux disjoints

$$\text{alors } \mathbb{P}\left(\bigcup_n \Delta_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(\Delta_n).$$

□

On parle ainsi de la probabilité d'un évènement. Comme la probabilité d'un évènement est une mesure, si la la probabilité d'un évènement est nulle, cela n'implique que cet évènement soit réduit pour autant à  $\emptyset$ . Ainsi la notion de propriété vraie *presque partout* en théorie de la mesure (à savoir que la propriété est vraie à un ensemble de mesure nulle près) est transposée au cadre des probabilités en *presque sûr* (abrégé *p.s.*). Ainsi on dira qu'un évènement  $\Lambda$  est vérifié *p.s.* si son complémentaire  $\Lambda^c$  a une probabilité nulle.

Considérons à présent une suite d'évènements (ceci est possible grâce aux propriétés de  $\sigma$ -additivité). Le résultat qui suit permet de déterminer la probabilité de la limite d'une suite d'évènements  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Lemme A.2 (Lemme de Borel-Cantelli):**

⊕ Si la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\Delta_n)$  est convergente, alors  $\mathbb{P}(\Delta) = 0$ .

⊖ Si les évènements  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont indépendantes et si la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\Delta_n)$  diverge, alors  $\mathbb{P}(\Delta) = 1$ . □

### A.1.4 Variables aléatoires

**Définition A.4 (Variable aléatoire)**

Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable (on prendra souvent pour  $E$  la droite réelle ou un espace euclidien et  $\mathcal{E}$  sera la tribu borélienne). On appelle variable aléatoire à valeurs dans  $E$  (abrégé v.a.), toute application mesurable  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow E$ . □

Ainsi la terminologie de "variable" aléatoire est assez malheureuse, car il s'agit d'une application de l'espace des états dans un ensemble dans lequel il est possible de comparer deux éléments.

A présent nous allons considérer une mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$ .

**Définition A.5 (Espérance)**

Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable et  $\mathbf{X}$  une v.a. à valeurs dans  $E$ . On dit que  $\mathbf{X}$  admet un moment d'ordre 1 si  $\int_{\Omega} |\mathbf{X}(\omega)| d\mathbb{P}(\omega)$  existe et est fini. On note alors  $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \int_{\Omega} \mathbf{X}(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$  où le terme de gauche se dit "espérance" ou "moyenne" de  $\mathbf{X}$ . □

On note ainsi  $L^p(\Omega, \mathbb{P})$  l'espace de v.a.  $\mathbf{X}$  telles que  $\mathbb{E}[|\mathbf{X}|^p] < \infty$ , qui est un espace complet pour la norme indice  $p$  ( $\|\mathbf{X}\|_p = \mathbb{E}[|\mathbf{X}|^p]^{1/p}$ ) d'après le théorème de Riesz-Fisher ( $1 \leq p < \infty$ ).

**Définition A.6 (Variance)**

Soit  $\mathbf{X}$  une v.a. à valeurs dans  $E$  telle que  $\mathbb{E}[|\mathbf{X}|^2] < \infty$ . On appelle Variance de  $\mathbf{X}$  et on note  $\text{Var}(\mathbf{X})$ , la quantité  $\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^2]$ . On note également  $\sigma_{\mathbf{X}}^2 = \text{Var}(\mathbf{X})$ , où  $\sigma_{\mathbf{X}}$  est appelé écart-type. □

On remarque par ailleurs que par les propriétés de linéarité de l'espérance, on a

$$\text{Var}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[\mathbf{X}^2 - 2\mathbf{X}\mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbb{E}[\mathbf{X}^2]] = \mathbb{E}[\mathbf{X}^2] - 2\mathbb{E}[\mathbf{X}]\mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbb{E}[\mathbf{X}^2] = \mathbb{E}[\mathbf{X}^2] - \mathbb{E}[\mathbf{X}]^2.$$

**Définition A.7 (Covariance)**

Soit  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  dans  $L^2$ . On appelle covariance de  $\mathbf{X}$  et de  $(\mathbf{Y})$  et on note  $\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , la quantité  $\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}])]$ . On appelle coefficient de corrélation le nombre  $\rho = \frac{\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\sqrt{\text{var}(\mathbf{X})\text{var}(\mathbf{Y})}}$ . □

A noter que si les variables aléatoires sont indépendantes, elles sont nécessairement décorréllées ( $\rho = 0$ ), mais la réciproque est évidemment fausse.

Avec la juxtaposition de la théorie de la mesure et du formalisme des probabilités, il est rapide de voir que les trois théorèmes A.2, A.1 et A.3 s'obtiennent de manière analogue en remplaçant la suite de fonction mesurables  $f_n$  par une suite de variables aléatoires, donc les propriétés sont vérifiées *presque sûrement*.

## A.2 Différents modes de convergence

### A.2.1 Définitions et propriétés

**Définition A.8 (convergence p.s.)**

On dit qu'une suite  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $\mathbf{X}$  s'il existe un évènement  $\Delta \in \Omega$  avec  $\mathbb{P}(\Delta) = 1$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_n(\omega) = \mathbf{X}(\omega) \quad \forall \omega \in \Delta$ .

Nous noterons  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbf{X}$ . □

**Définition A.9 (convergence en probabilité)**

On dit qu'une suite  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers une variable aléatoire  $\mathbf{X}$  si

$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}| > \epsilon) = 0$ . Nous noterons  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbf{X}$ . □

**Proposition A.1:**

1.  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbf{X}$

2. Si  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbf{X}$ , alors il existe une suite extraite telle que  $\mathbf{X}_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbf{X}$  □

**Définition A.10 (convergence  $L^p$ )**

$\forall p \geq 1$ , on dit qu'une suite  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $L^p(\Omega, \mathbb{P})$  vers une variable aléatoire  $\mathbf{X} \in L^p(\Omega, \mathbb{P})$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}|^p] = 0$ .

Nous noterons  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} \mathbf{X}$ . □

**Proposition A.2:**

1.  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbf{X}$

2. Si  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbf{X}$ , alors il existe  $\mathbf{Y} \in L^p$  où  $|\mathbf{X}_n| < \mathbf{Y}$  telle que  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} \mathbf{X}$ .  $\square$

**Définition A.11 (convergence en loi)**

On dit qu'une suite  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $\mathbf{X}$  si pour toute fonction continue bornée  $f$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(\mathbf{X}_n)] = \mathbb{E}[f(\mathbf{X})]$ .

Nous noterons  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathbf{X}$ .  $\square$

**Proposition A.3:**

1.  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathbf{X}$
2. Si  $\mathbf{X}_n$  est une suite de v.a. tend en loi vers une constante  $a$  presque sûrement, alors  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} a$ .  $\square$

### A.2.2 Schéma Bilan des convergences

La figure A.1 présente un schéma récapitulatif sur les différents types de convergence rencontrés en probabilités. A noter que seul la convergence  $L^p$  est représenté, car si  $1 \leq p < q \leq \infty$  on a l'inclusion  $L^q \subset L^p$ , donc  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^q} \mathbf{X}$ . Les flèches en trait plein et gras sont des conséquences automatiques, celles en pointillés désigne l'existence d'une suite extraite et les flèches en trait plein simple nécessitent des conditions supplémentaires indiquées sur le schéma.

Il est important de noter que la convergence en loi est la convergence la plus faible, car elle est une implication automatique de tous les autres modes de convergence. Seule une réciproque très partielle existe pour avoir la convergence en probabilités.

### A.2.3 Loi d'une variable aléatoire

Les terminologies varient entre "densité de probabilité d'une v.a." et "loi d'une v.a.". Le terme de "densité" se réfère directement au terme de mesure (parfois noté  $d\mu(x)$ ) alors que le terme de "loi" est consacré uniquement aux probabilités.

**Définition A.12 (Loi d'une variable aléatoire)**

Soit  $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$  une variable aléatoire. On appelle loi de  $\mathbf{X}$  la mesure image de  $\mathbb{P}$  par  $\mathbf{X}$ , c'est à dire la mesure de probabilité  $P_{\mathbf{X}}$  définie sur l'espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$  qui est donnée par :  $A \in \mathcal{E} \quad P_{\mathbf{X}}(A) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \mathbf{X}(\omega) \in A\})$ .  $\square$

Cette définition théorique possède une formulation équivalente qui est celle utilisée en pratique :

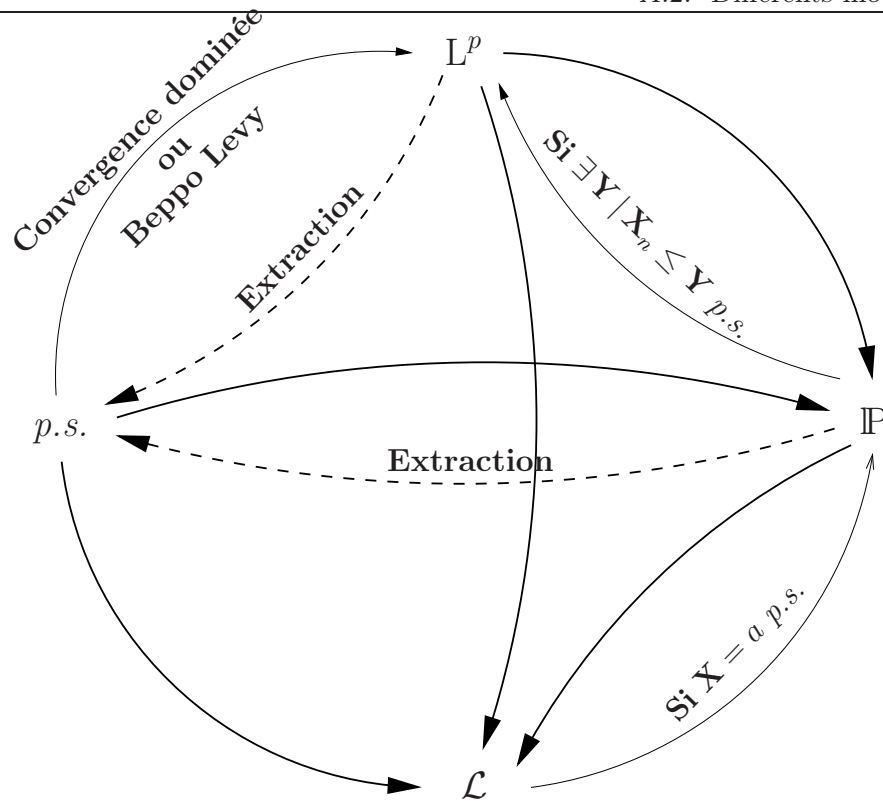


FIG. A.1 – Schéma bilan des convergences en probabilités.

**Proposition A.4:**

L'unique mesure  $P_{\mathbf{X}}$  sur  $(E, \mathcal{E})$  de la v.a.  $\mathbf{X}$ , appelée "loi de  $\mathbf{X}$ ", est telle que pour toute fonction mesurable et bornée  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  on ait  $\mathbb{E}[f(\mathbf{X})] = \int_E f(x) dP_{\mathbf{X}}(x)$ .  $\square$

Pour nous, la loi (ou la densité de probabilité) d'une variable aléatoire est une mesure sur  $\mathbb{R}$  (muni de la tribu borélienne) de masse 1. Une loi est dite absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue si elle admet une fonction de densité de probabilité. Dans ce qui va suivre, nous allons donner des exemples de lois absolument continues.

**Exemple (La loi uniforme)**

La loi uniforme sur  $[0,1]$  est la mesure de Lebesgue  $dx$  sur  $[0,1]$ . C'est une mesure de probabilités absolument continue.

De manière générale, la loi uniforme sur  $[a,b]$  est  $(b-a)^{-1} \mathbb{1}_{[a,b]} dx$ . Si on considère la variable aléatoire  $\mathbf{X}$  à valeur dans  $[a,b]$ , sa moyenne est donné par  $\frac{a+b}{2}$  et son écart-type par  $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$ .

**Exemple (La loi triangulaire)**

Soient  $a > b > c$  3 réels. La loi triangulaire atteint son maximum en  $b$  et est nulle en  $a$  et en  $c$ . Son expression est  $\frac{2}{(c-a)(b-a)} \mathbb{1}_{[a,b]}(x-a) + \frac{2}{(c-a)(c-b)} \mathbb{1}_{[a,b]}(-x+c)$ . Sa moyenne est

## Annexe A. Rappels de probabilité

---

$\frac{a+b+c}{3}$  et sa variance est  $\frac{1}{18}(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc))$ .

### Exemple (La loi normale)

$\forall m \in \mathbb{R}$  et  $\sigma^2 > 0$ , la mesure sur  $\mathbb{R}$  de densité  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$  est de masse 1 et s'appelle la loi normale ou la loi de Gauss de variance  $\sigma^2$  centrée en  $m$ . On la note  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  désigne une loi normale centrée et  $\mathcal{N}(m, 1)$  désigne une loi normale réduite.

### Exemple (La loi log-normale)

La loi log-normale est la loi d'une variable aléatoire  $\mathbf{Y}$  à valeurs dans  $]0, +\infty[$  dont le logarithme suit une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ . Elle est donnée par  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\ln(y)-m)^2}{2\sigma^2}\right)$  pour  $y > 0$  et 0 sinon. On a  $\mathbb{E}[Y] = e^{m+\sigma^2/2}$  et  $\text{Var}(\mathbf{Y}) = e^{2m+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$ .

## A.2.4 Fonction de répartition

### Définition A.13

Si  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$  est la loi d'une variable aléatoire réelle  $\mathbf{X}$ , on appelle la fonction de répartition de  $\mathbf{X}$  (ou de  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ ) la fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  suivante :  $F_{\mathbf{X}}(x) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(-\infty, x) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq x)$ .

C'est une fonction croissante, continue à droite. □

La fonction de répartition est une caractérisation de  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ . On a  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(dx) = dF_{\mathbf{X}}(x)$ . Le terme anglo-saxon pour cette caractérisation d'une loi est "distribution". Dans le cas d'une loi absolument continue, on caractérise la fonction de répartition au moyen de la densité de probabilité (notée  $f_{\mathbf{X}}$ ) :  $F_{\mathbf{X}}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\mathbf{X}}(t) dt$ .

Voyons à présent comme se comporte une suite de fonctions de répartition.

### Proposition A.5 (Convergence d'une suite de fonctions de répartition):

Soient  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de va réelles, de fonctions de répartition  $F_{\mathbf{X}_n}$ . Soit  $F_{\mathbf{X}}$  la fonction de répartition d'une va réelle  $\mathbf{X}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathbf{X}$ .

(ii) Si  $F_{\mathbf{X}}$  est continu en  $x_0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \text{infy}} F_{\mathbf{X}_n} = F_{\mathbf{X}}$ . □

## A.2.5 Inégalités remarquables

### Proposition A.6 (Inégalités de Markov et de Bienaymé Tchebicheff):

Soit  $\mathbf{X}$  telle que  $\mathbb{E}[|\mathbf{X}|^2] = \sigma^2 < \infty$  et  $a > 0$ . On a les inégalités suivantes :

$$\mathbb{P}(|\mathbf{X}| > a) \leq \frac{\mathbb{E}[\mathbf{X}]}{a} \text{ (Markov) et } \mathbb{P}(|\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}]| > a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \text{ (Bienaymé Tchebicheff).} \quad \square$$



**Preuve**

Pour l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(x) \geq \int_{|x|>a} x d\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(x) \geq \int_{|x|>a} a d\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(x) = a \mathbb{P}(|\mathbf{X}| > a).$$

Pour l'inégalité de Bienyamé Tchebicheff, une démarche similaire donne :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{X}) &= \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^2\right] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}[x])^2 d\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(x) \geq \int_{|x - \mathbb{E}[x]| > a} (x - \mathbb{E}[x])^2 d\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(x) \\ &\geq a^2 \int_{|x - \mathbb{E}[x]| > a} d\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(x) = a^2 \mathbb{P}(|\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}]| > a). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### A.2.6 Fonction caractéristique

**Définition A.14**

Soit  $\mathbf{X}$  une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$  sa loi. L'application  $\Phi_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  donnée par

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i\langle \lambda, \mathbf{X} \rangle}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \lambda, \mathbf{x} \rangle} \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x}) \text{ s'appelle la fonction caractéristique de } \mathbf{X}. \quad \square$$

En d'autres termes, la fonction caractéristique d'une variable aléatoire est la transformée de Fourier de sa loi. Une propriété importante est la propriété A.7 :

**Proposition A.7:**

Deux variables aléatoires réelles  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  ont même loi si et seulement si  $\Phi_{\mathbf{X}} = \Phi_{\mathbf{Y}}$ . □

Nous ne rappelons pas toutes les propriétés des fonctions caractéristiques qui découlent des propriétés de la transformation de Fourier et qui permettent de faciliter le calcul des moments (s'ils existent) ou de calculer des produits de convolution de mesures. Nous nous contentons de rappeler que si  $\mathbf{X}$  admet un moment d'ordre  $k$ , alors  $\Phi_{\mathbf{X}}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , mais nous nous garderons bien de croire que si  $\Phi_{\mathbf{X}}$  admet une dérivée d'ordre  $k$ , alors  $\mathbb{E}[X^k] = \Phi_{\mathbf{X}}^k(0)!$

Voici à présent un théorème important dû à Paul Levy :

**Théorème A.4 (Théorème de Levy):**

On considère une suite de v.a.  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n, \dots$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\mathbf{X}_n$  converge en loi vers  $\mathbf{X}$ .
- (ii)  $\Phi_{\mathbf{X}_n}$  converge simplement vers  $\Phi_{\mathbf{X}}$ .

□

(Pour la convergence en loi, voir la section suivante A.2.).

Le théorème A.4 débouche sur le critère utilisé dans la pratique :

**Proposition A.8 (Critère de Levy):**

Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi_{\mathbf{X}_n}$  est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité sur  $\mathbb{R}^d$  et si  $\Phi_{\mathbf{X}_n}$  converge simplement vers une fonction  $\Phi$  continue en 0, alors  $\Phi$  est la fonction caractéristique

d'une loi de probabilité sur  $\mathbb{R}^d$ . □

### A.3 Théories statistiques

Nous avons parlé jusqu'à présent de probabilités, c'est à dire de la modélisation d'un phénomène aléatoire qui peut être amené à se répéter. Pour cela nous avons considéré des suites de variables aléatoires indépendantes et de même loi, cette loi étant connue ou prise comme hypothèse. La théorie statistique s'intéresse au problème inverse, à savoir qu'à partir d'une observation d'une suite de valeurs, on postule qu'il s'agit d'une suite de réalisations d'une variable aléatoire dont on essaye d'identifier la loi. Voici la définition d'une statistique :

#### Définition A.15 (modèle statistique)

On se donne un espace d'états  $\Omega$ , qui est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience réalisée.  $\Omega$  est muni d'une tribu  $\tau$ . On se donne un ensemble  $\Theta$  et une famille de probabilités  $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  sur  $(\Omega, \tau)$ .

On appelle statistique toute variable aléatoire sur cet espace. □

La suite (de variables aléatoires) observée est appelée *échantillon*. Les outils statistiques visent soit à identifier la loi de l'échantillon (on parle d'estimation), soit à accepter ou à rejeter une hypothèse que l'on a conjecturé sur cet échantillon (on parle alors de test). Si  $\Theta$  est une partie de  $\mathbb{R}^d$ , on dit que le problème est *paramétrique*. La plupart du temps c'est le cas où on fait l'hypothèse d'une loi de probabilité dépendant de paramètres (loi exponentielle, loi normale...) et on cherche à déterminer la valeur de ces paramètres (qui ne sont pas aléatoires). Si  $\Theta$  est l'espace de toutes les probabilités sur un ensemble donné, on est en présence d'un problème *non-paramétrique*.

#### A.3.1 L'estimation

##### A.3.1.1 Estimateurs classiques

On se donne un modèle statistique  $(\Omega, \tau, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ . Soit  $f$  une fonction connue sur  $\Theta$ . On cherche à estimer la quantité inconnue  $f(\theta)$ .

#### Définition A.16 (Estimateur)

Soit  $\omega$  une valeur observée de l'expérience. Au vu de  $\omega$ , on choisit une variable aléatoire  $\mathbf{T}$  telle que  $\mathbf{T}(\omega) = f(\theta)$ .  $\mathbf{T}$  est un estimateur de  $f(\theta)$ . □

Lors de la mise en place d'un estimateur, il s'agit bien de faire un choix plus ou moins arbitraire des valeurs discrètes d'une application. Plusieurs choix sont possibles et se pose alors le problème de la comparaison de deux estimateurs  $S$  et  $T$ . Nous allons donc donner un critère d'appréciation d'un estimateur.

**Définition A.17 (Risque quadratique)**

On appelle risque quadratique de l'estimateur  $\mathbf{T}$  de  $f(\theta)$  la quantité suivante :

$$R_{\mathbf{T}}(\theta) = \mathbb{E}[(\mathbf{T} - f(\theta))^2]$$

où  $\mathbb{E}[\cdot]$  désigne l'espérance au sens de la probabilité  $P_{\theta}$ . □

On peut à présent chercher donc comparer  $S$  et  $T$  en comparant éventuellement  $R_{\mathbf{S}}$  et  $R_{\mathbf{T}}$ . Cependant la détermination d'un meilleur estimateur générale est un problème mathématique difficile car la classe de tous les estimateurs est trop vaste et il se peut que  $R_{\mathbf{S}}$  et  $R_{\mathbf{T}}$  ne soient pas comparables. En pratique on se restreint alors à une classe particulière qui est celle des estimateurs sans biais.

**Définition A.18 (Estimateur sans biais)**

L'estimateur  $\mathbf{T}$  de  $f(\theta)$  est dit sans biais si  $\mathbb{E}[\mathbf{T}] = f(\theta) \forall \theta \in \Theta$  et le risque quadratique  $R_{\mathbf{T}}(\theta)$  est la variance de  $\mathbf{T}$  relative à  $P_{\theta}$ . □

On peut alors parler de meilleur estimateur sans biais.

**Exemple**

Soit  $(\mathbf{X}_i)_{i=1..n}$  un échantillon.

- La moyenne empirique  $\bar{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_n}{n}$  est un estimateur sans biais de  $\mathbb{E}[\mathbf{X}]$ . Il s'agit même du meilleur estimateur de  $\mathbb{E}[\mathbf{X}]$  parmi tous les estimateurs linéaires sans biais.
- La variance empirique  $S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^2$  est le meilleur estimateur sans biais de  $\text{Var}(\mathbf{X})$ .

L'inconvénient du risque quadratique est que l'erreur  $\mathbf{T}(\omega) - f(\theta)$  commise en remplaçant  $f(\theta)$  par  $\mathbf{T}(\omega)$  dépend encore de la valeur inconnue de  $\theta$ . On utilise donc en pratique la notion d'intervalle de confiance, qui donne une "fourchette d'estimation".

**Définition A.19 (Intervalle de confiance)**

On fixe a priori un nombre  $\alpha \in ]0,1[$ , en général proche de 1 (0.9, 0.95, 0.98...). Soit  $\mathbf{T}$  l'estimateur de  $f(\theta)$ . On appelle intervalle de confiance de niveau  $\alpha$  un intervalle de la forme  $[\mathbf{T}(\omega) - A(\omega), \mathbf{T}(\omega) + A(\omega)]$  où  $A$  est une variable aléatoire positive souvent prise constante et telle que :

$$P_{\theta} (|\mathbf{T}(\omega) - f(\theta)| \geq A) \leq \alpha \forall \theta \in \Theta$$

On possède des résultats généraux pour les intervalles de confiance de variables aléatoires dont on s'est donné la loi. Par exemple c'est le cas pour une variable aléatoire gaussienne dont on a estimé la moyenne  $m$  par  $\bar{\mathbf{X}}$  et la variance  $\sigma^2$  par  $S$ , l'intervalle de confiance à 95% de la moyenne est donné par  $[\bar{\mathbf{X}} - 1,96\sqrt{\frac{S}{n}}, \bar{\mathbf{X}} + 1,96\sqrt{\frac{S}{n}}]$ .

### A.3.1.2 Estimateurs bayésiens

Nous allons terminer cette section en indiquant 2 autres méthodes d'estimation qui appartiennent à l'approche bayésienne, qui comme son nom l'indique repose sur la formule de Bayes des probabilités conditionnelles. L'idée est de se donner une probabilité  $\mu$  sur  $\Theta$ , dite *probabilité a priori* et de définir un *risque quadratique bayésien* par  $\rho_{\mathbf{T}} = \int \mathbb{E}[(\mathbf{T} - f(\theta))^2] \mu(d\theta)$  relatif à la mesure de probabilité  $\mu$ .

La première méthode nous amène à exhiber directement un estimateur bayésien :

**Définition A.20 (Estimateur bayésien)**

On appelle *estimateur bayésien* de  $f(\theta)$  relatif à la probabilité  $\mu$ , un estimateur  $\mathbf{T}$  tel que  $\rho_{\mathbf{T}} < \rho_{\mathbf{S}}$  pour toute autre statistique  $S$ . □

L'intérêt majeure est que l'on peut toujours comparer  $\rho_{\mathbf{S}}$  et  $\rho_{\mathbf{T}}$  alors que ce n'est pas le cas de  $R_{\mathbf{S}}$  et  $R_{\mathbf{T}}$ . L'inconvénient est évidemment le choix arbitraire de  $\mu$ , cependant le calcul de ces estimateurs est possible dans de nombreux cas.

Posons  $\Omega = \mathbb{R}^d$  et que  $P_{\theta}$  admet une densité  $h_{\theta}(x) = h(\theta, x)$ . Soit  $\mathbf{T}$  un estimateur de  $f(\theta)$ . On a :

$$\rho_{\mathbf{T}} = \int \mu(d\theta) \int [\mathbf{T}(x) - f(\theta)]^2 h(\theta, x) dx = \int dx \int [\mathbf{T}(x) - f(\theta)]^2 h(\theta, x) \mu(d\theta)$$

en supposant que Fubini s'applique. Choisissons l'estimateur  $\mathbf{T}$  qui minimise cette expression (on s'est placé dans un cadre où un tel estimateur existe). En dérivant la deuxième intégrale (qui ne dépend pas de  $x$ ) par rapport à  $\mathbf{T}$ , on obtient :

$$T(x) = \frac{\int f(\theta) h(\theta, x) \mu(d\theta)}{\int h(\theta, x) \mu(d\theta)} \tag{A.1}$$

En posant  $T(x) = 0$  si le dénominateur est nul. (A.1) est un estimateur bayésien de  $f(\theta)$ .

La deuxième méthode permet d'estimer directement  $\theta$  quel que soit la nature de  $\Theta$ . Nous supposons encore  $h(\theta, x)$  désigne la densité de  $P_{\theta}$ .

**Définition A.21**

Un estimateur  $\mathbf{T}$  à valeurs dans  $\Theta$  est appelé *estimateur du maximum de vraisemblance* si

$$h(\mathbf{T}(x), x) = \sup_{\theta \in \Theta} h(\theta, x) \quad \forall x \in \Omega = \mathbb{R}^d$$

où  $h$  est appelée "*fonction de vraisemblance*". □

Il s'agit d'une méthode d'obtention de l'estimateur  $\mathbf{T}$ , mais ce dernier n'existe pas toujours, cela dépend de  $h$ . Son grand avantage est qu'il est invariant par changement de paramètre, ce qui n'est pas du tout le cas pour les estimateurs précédents.

### A.3.2 Les tests

Il s'agit de l'autre grand pan de la théorie statistique. On se donne donc un modèle statistique. L'ensemble  $\Theta$  est divisé en une partie  $\Theta_0$  et son complémentaire  $\Theta_1$ . Au vu de  $\omega$ , il s'agit de "décider" si  $\theta$  appartient à  $\Theta_0$  ou à  $\Theta_1$ .

#### A.3.2.1 Définitions

Voici un ensemble de définitions concernant la terminologie des tests en statistique :

##### Définition A.22

1. On dit tester l'hypothèse  $H_0$  selon laquelle  $\theta \in \Theta_0$ , contre l'alternative  $H_1$  selon laquelle  $\theta \in \Theta_1$ .
2. La région critique est la partie ou l'évènement  $D$  de  $\Omega$  sur lequel on rejette l'hypothèse  $H_0$ . Si  $\omega \in D$ , on dit que  $H_1$  est satisfaite. On dit aussi que  $D$  est un "test".
3. Si  $\theta \in \Theta_0$ , la probabilité  $P_\theta(D)$  de rejeter  $H_0$  alors qu'elle est vraie s'appelle l'erreur de première espèce.
4. Si  $\theta \in \Theta_1$ , la probabilité  $1 - P_\theta(D) = P_\theta(D^c)$  d'accepter  $H_0$  alors qu'elle est fautive s'appelle l'erreur de deuxième espèce.
5. Le nombre  $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(D)$  est le niveau du test ou de la région critique.
6. La fonction  $\theta \rightarrow P_\theta(D)$  s'appelle la fonction puissance du test. □

On construit ainsi généralement un test de la manière suivante :

1. On fixe une borne au niveau  $\alpha$  (0.1, 0.05, 0.01 ...).
2. Parmi toutes les régions critiques de niveau  $\alpha$ , on cherche à maximiser la fonction puissance sur  $\Theta_1$ , c'est à dire minimiser les erreurs de seconde espèce.

On se retrouve devant les mêmes problèmes que pour minimiser les risques des estimateurs, car les fonctions puissances de deux régions critiques ne sont pas comparables. Cette méthode conduit par ailleurs à énoncer un critère de qualité selon la puissance d'un test par rapport à un autre.

Nous n'entrerons pas plus dans les détails pour ce qui est de la théorie des tests. Nous signalons simplement que l'on considère comme plus grave une erreur de première espèce qu'une erreur de seconde espèce, c'est à dire que l'on cherche toujours à ne pas sous-évaluer le niveau d'acceptation pour garantir la fiabilité du test.

### A.3.3 Test d'adéquation

Nous présentons rapidement deux tests qui rentrent dans une approche non paramétrique. Soit  $(\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_n)$  un échantillon. On veut tester l'hypothèse  $H_0$ : "On a  $\mu = \mu_0$  où  $\mu_0$  est une loi donnée" contre  $H_1$ : "On a  $\mu \neq \mu_0$ ". Nous présentons deux tests d'adéquation de la loi  $\mu_0$  à la loi de l'échantillon: le test du  $\chi^2$  et le test de Kolmogorov-Smirnov.

#### A.3.3.1 Test du $\chi^2$

Considérons une variable aléatoire  $\mathbf{X}$  qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans  $\{1..k\}$ . On se donne un échantillon  $(\mathbf{X}_i)_{i=1..n}$  de taille  $n$  de la loi qui gouverne cette variable aléatoire.

On note  $\bar{p}_n(i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\mathbf{X}_j=i}$   $i \in \{1..k\}$ .  $\bar{p}_n(i)$  l'estimateur empirique de  $p(i)$  sur l'échantillon.

Le test du  $\chi^2$  repose sur le résultat suivant :

**Proposition A.9 (Test du  $\chi^2$ ):**

Si pour chaque  $n \geq 1$ ,  $(\mathbf{X}_i)_{i=1..n}$  est un échantillon de taille  $n$  d'une loi discrète  $p$  à valeurs dans  $\{1..k\}$ . avec  $p(i) > 0 \forall i = 1, \dots, k$ . Alors on a :

$$n \sum_{i=1}^k \frac{(p(i) - \bar{p}_n(i))^2}{p(i)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(k-1)$$

□

On construit alors des tests pour accepter ou rejeter une hypothèse du type "la loi correspondant à l'échantillon  $(\mathbf{X}_i)_{i=1..n}$  est  $p$ " en décidant si l'écart observé entre la loi présumée  $p$  et la loi empirique est de l'ordre de ce qui est prédit par la théorie.

#### A.3.3.2 Test Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test utilisé pour déterminer si un échantillon suit bien une loi donnée par sa fonction de répartition continue. On se donne un échantillon  $(\mathbf{X}_i)_{i=1..n}$ . On appelle *Fonction de répartition empirique* la quantité suivante:  $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\mathbf{X}_i \leq t}$ .

On note  $F(t) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq t)$  la fonction de répartition de la loi de  $\mathbf{X}$ . On a alors le résultat suivant :

**Proposition A.10 (Test Kolmogorov-Smirnov):**

Soit  $S$  la loi dont la fonction de répartition est donnée par  $\mathbb{P}(S \leq t) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 t^2}$ .

Alors  $\sqrt{n} \sup_t (|F_n(t) - F(t)|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} S$ .

□

## Annexe B

# Expressions analytiques

## B.1 Formules analytiques

### B.1.1 Partie réelle

#### B.1.1.1 Fréquences remarquables

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left( -\lambda c_2 + \sqrt{\lambda c_2^2 + 4\lambda\Omega_1} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left( -\lambda c_1 + \sqrt{\lambda c_1^2 + 4\lambda\Omega_1} \right) \quad (\text{B.2})$$

$$\omega_3 = \frac{\frac{1}{2} \left( -\lambda c_1^2 + \sqrt{\lambda(\lambda c_1^4 + 8c_2^2\Omega_1 + 8c_2\sqrt{c_2^2 - c_1^2}\Omega_1 - 4\Omega_1 c_1^2)} \right)}{c_2 + \sqrt{c_2^2 - c_1^2}} \quad (\text{B.3})$$

$$\omega_4 = \sqrt{\lambda\Omega_1} \quad (\text{B.4})$$

$$\omega_5 = \frac{\frac{1}{2} \left( \lambda c_1^2 + \sqrt{\lambda(\lambda c_1^4 + 8c_2^2\Omega_1 + 8c_2\sqrt{c_2^2 - c_1^2}\Omega_1 - 4\Omega_1 c_1^2)} \right)}{c_2 + \sqrt{c_2^2 - c_1^2}} \quad (\text{B.5})$$

$$\omega_6 = \frac{1}{2} \left( \lambda c_1 + \sqrt{\lambda c_1^2 + 4\lambda\Omega_1} \right) \quad (\text{B.6})$$

$$\omega_7 = \frac{1}{2} \left( \lambda c_2 + \sqrt{\lambda c_2^2 + 4\lambda\Omega_1} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$\omega_8 = \frac{1}{2} \left( -\lambda c_2 + \sqrt{\lambda c_2^2 + 4\lambda\Omega_2} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$\omega_9 = \frac{1}{2} \left( -\lambda c_1 + \sqrt{\lambda c_1^2 + 4\lambda\Omega_2} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\omega_{10} = \frac{\frac{1}{2} \left( -\lambda c_1^2 + \sqrt{\lambda(\lambda c_1^4 + 8c_2^2\Omega_2 + 8c_2\sqrt{c_2^2 - c_1^2}\Omega_2 - 4\Omega_2 c_1^2)} \right)}{c_2 + \sqrt{c_2^2 - c_1^2}} \quad (\text{B.10})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{11} = \sqrt{\lambda \Omega_2} \quad (B.11) \\ \omega_{12} = \frac{1}{2} \frac{\lambda c_1^2 + \sqrt{\lambda(\lambda c_1^4 + 8c_2^2 \Omega_2 + 8c_2 \sqrt{c_2^2 - c_1^2 \Omega_2} - 4\Omega_2 c_1^2)}}{c_2 + \sqrt{c_2^2 - c_1^2}} \quad (B.12) \\ \omega_{13} = \frac{1}{2} \left( \lambda c_1 + \sqrt{\lambda c_1^2 + 4\lambda \Omega_2} \right) \quad (B.13) \\ \omega_{14} = \frac{1}{2} \left( \lambda c_2 + \sqrt{\lambda c_2^2 + 4\lambda \Omega_2} \right) \quad (B.14) \end{array} \right.$$

### B.1.1.2 Intervalles d'intégration

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = -\omega^2 + \lambda \Omega_1 \\ A_2 = -\omega^2 + \lambda \Omega_2 \\ B_1 = \lambda c_1 \omega \\ B_2 = \lambda c_2 \omega \end{array} \right. \quad (B.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_+(s, B) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s^2 B^2}}{2B} \\ F_-(s, B) = -\frac{1 + \sqrt{1 - 4s^2 B^2}}{2B} \\ G(s, A) = \frac{\sqrt{-sA(1+sA)}}{A} \end{array} \right. \quad (B.16)$$

$\omega \in ] -\infty, \omega_1[$ $I_1$ $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Re}(A_2, B_2) < s < \text{Re}(A_2, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < -G(s, A_2)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < \text{Re}(A_1, B_2)$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$\text{Re}(A_1, B_2) < s < \text{Re}(A_1, B_1)$	$-G(s, A_1) < t < F_+(t, B_1)$
$\omega_1 < \omega < \omega_2$ $I_2$ $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Re}(A_2, B_2) < s < \text{Re}(A_2, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < -G(s, A_2)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/2 B_2$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$1/2 B_2 < s < \text{Re}(A_1, B_1)$	$-G(s, A_1) < t < F_+(s, B_1)$
	$\text{Re}(A_1, B_2) < s < 1/2 B_2$	$-G(s, A_1) < t < F_-(t, B_2)$
$\omega_2 < \omega < \omega_3$ $I_3$ $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Re}(A_2, B_2) < s < \text{Re}(A_2, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < -G(s, A_2)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/2 B_2$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$1/2 B_2 < s < \text{Re}(A_1, B_1)$	$-G(s, A_1) < t < F_+(s, B_1)$
	$\text{Re}(A_1, B_1) < s < 1/2 B_1$	$F_-(s, B_1) < t < F_+(s, B_1)$
	$\text{Re}(A_1, B_2) < s < 1/2 B_2$	$-G(s, A_1) < t < F_-(s, B_2)$



$\omega_3 < \omega < \omega_4$ $I_4$ $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Re}(A_2, B_2) < s < \text{Re}(A_2, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < -G(s, A_2)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/2 B_2$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$1/2 B_2 < s < 1/2 B_1$	$F_-(s, B_1) < t < F_+(s, B_1)$
	$\text{Re}(A_1, B_2) < s < \text{Re}(A_1, B_1)$	$-G(s, A_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$\text{Re}(A_1, B_1) < s < 1/2 B_2$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
$\omega_4 < \omega < \omega_5$ $I_5$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Re}(A_2, B_2) < s < \text{Re}(A_2, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < -G(s, A_2)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/2 B_2$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$1/2 B_2 < s < 1/2 B_1$	$F_-(s, B_1) < t < F_+(s, B_1)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/2 B_2$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/2 B_2$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$\text{Re}(A_1, B_1) < s < \text{Re}(A_1, B_2)$	$F_-(s, B_1) < t < G(s, A_1)$
$\omega_5 < \omega < \omega_6$ $I_6$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Re}(A_2, B_2) < s < \text{Re}(A_2, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < -G(s, A_2)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/2 B_2$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$1/ B_2 < s < 1/ B_1$	$F_-(s, B_1) < t < F_+(s, B_1)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/ B_2$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/ B_2$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$\text{Re}(A_1, B_1) < s < \text{Re}(A_1, B_2)$	$F_-(s, B_1) < t < G(s, A_1)$
$\omega_6 < \omega < \omega_7$ $I_7$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Re}(A_2, B_2) < s < \text{Re}(A_2, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < -G(s, A_2)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/2 B_2$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$1/ B_2 < s < 1/ B_1$	$F_-(s, B_1) < t < F_+(s, B_1)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/ B_2$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/ B_2$	$F_-(s, B_2) < t < F_-(s, B_1)$
	$\text{Re}(A_1, B_2) < s < 1/2 B_2$	$F_-(s, B_2) < t < G(s, A_1)$
$\omega_7 < \omega < \omega_8$ $I_8$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Re}(A_2, B_2) < s < \text{Re}(A_2, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < -G(s, A_2)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/2 B_2$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$1/ B_2 < s < 1/ B_1$	$F_-(s, B_1) < t < F_+(s, B_1)$
	$1/ B_2 < s < \text{Re}(A_1, B_1)$	$F_-(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$\text{Re}(A_1, B_1) < s < \text{Re}(A_1, B_2)$	$F_-(s, B_2) < t < G(s, A_1)$
$\omega_8 < \omega < \omega_9$ $I_9$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Re}(A_2, B_2) < s < \text{Re}(A_2, B_1)$	$F_-(s, B_1) < t < -G(s, A_2)$
	$\text{Re}(A_2, B_1) < s < 1/2 B_2$	$F_-(s, B_1) < t < F_+(s, B_1)$
	$1/ B_2 < s < 1/ B_1$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$1/ B_2 < s < \text{Re}(A_1, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$\text{Re}(A_1, B_1) < s < \text{Re}(A_1, B_2)$	$F_+(s, B_2) < t < G(s, A_1)$

Annexe B. Expressions analytiques

$\omega_9 < \omega < \omega_{10}$ $I_{10}$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$\operatorname{Re}(A_2, B_2) < s < \operatorname{Re}(A_2, B_1)$	$F_-(s, B_1) < t < -G(s, A_2)$
	$\operatorname{Re}(A_2, B_2) < s < 1/2 B_2$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$1/ B_2 < s < 1/ B_1$	$F_-(s, B_1) < t < F_+(s, B_1)$
	$1/ B_2 < s < \operatorname{Re}(A_1, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$\operatorname{Re}(A_1, B_1) < s < \operatorname{Re}(A_1, B_2)$	$F_+(s, B_2) < t < G(s, A_1)$

$\omega_{10} < \omega < \omega_{11}$ $I_{11}$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$\operatorname{Re}(A_2, B_2) < s < \operatorname{Re}(A_2, B_1)$	$F_-(s, B_1) < t < -G(s, A_2)$
	$\operatorname{Re}(A_2, B_2) < s < 1/2 B_2$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$1/ B_2 < s < 1/ B_1$	$F_-(s, B_1) < t < F_+(s, B_1)$
	$1/ B_2 < s < \operatorname{Re}(A_1, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$\operatorname{Re}(A_1, B_1) < s < \operatorname{Re}(A_1, B_2)$	$F_+(s, B_2) < t < G(s, A_1)$

$\omega_{11} < \omega < \omega_{12}$ $I_{12}$ $A_1 < 0$ et $A_2 < 0$	$\operatorname{Re}(A_2, B_1) < s < \operatorname{Re}(A_2, B_2)$	$G(s, A_2) < t < F_-(s, B_2)$
	$1/2 B_2 < s < \operatorname{Re}(A_2, B_2)$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$1/ B_2 < s < 1/ B_1$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$1/ B_2 < s < \operatorname{Re}(A_1, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$\operatorname{Re}(A_1, B_1) < s < \operatorname{Re}(A_1, B_2)$	$F_+(s, B_2) < t < G(s, A_1)$

$\omega_{12} < \omega < \omega_{13}$ $I_{13}$ $A_1 < 0$ et $A_2 < 0$	$\operatorname{Re}(A_2, B_1) < s < \operatorname{Re}(A_2, B_2)$	$G(s, A_2) < t < F_-(s, B_2)$
	$1/2 B_2 < s < \operatorname{Re}(A_2, B_1)$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$1/ B_2 < s < 1/ B_1$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$1/ B_2 < s < \operatorname{Re}(A_1, B_1)$	$F_+(s, B_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$\operatorname{Re}(A_1, B_1) < s < \operatorname{Re}(A_1, B_2)$	$F_+(s, B_2) < t < G(s, A_1)$

$\omega_{13} < \omega < \omega_{14}$ $I_{14}$ $A_1 < 0$ et $A_2 < 0$	$1/2 B_2 < s < \operatorname{Re}(A_2, B_2)$	$G(s, A_2) < t < F_-(s, B_2)$
	$1/2 B_2 < s < \operatorname{Re}(A_2, B_1)$	$F_+(s, B_1) < t < G(s, A_2)$
	$\operatorname{Re}(A_2, B_1) < s < 1/2 B_2$	$F_-(s, B_1) < t < F_-(s, B_2)$
	$\operatorname{Re}(A_1, B_1) < s < \operatorname{Re}(A_1, B_2)$	$F_+(s, B_2) < t < G(s, A_1)$

$\omega \in [\omega_{14}, \infty[$ $I_{15}$ $A_1 < 0$ et $A_2 < 0$	$\operatorname{Re}(A_2, B_1) < s < \operatorname{Re}(A_2, B_2)$	$G(s, A_2) < t < F_+(s, B_1)$
	$\operatorname{Re}(A_2, B_2) < s < \operatorname{Re}(A_1, B_1)$	$F_+(s, B_1) < t < F_+(s, B_2)$
	$\operatorname{Re}(A_1, B_1) < s < \operatorname{Re}(A_1, B_2)$	$F_+(s, B_2) < t < G(s, A_1)$

## B.1.2 Partie imaginaire

### B.1.2.1 Fréquences remarquables

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left( -\lambda c_2 + \sqrt{\lambda c_2^2 + 4\lambda\Omega_1} \right) \quad (\text{B.17})$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2c_2c_1\lambda^2 + 4\lambda\Omega_1 - 2\lambda\sqrt{c_2^2c_1^2\lambda^2 + 4c_2c_1\lambda\Omega_1}} \quad (\text{B.18})$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left( -\lambda c_1 + \sqrt{\lambda c_1^2 + 4\lambda\Omega_1} \right) \quad (\text{B.19})$$

$$\omega_4 = \sqrt{\lambda\Omega_1} \quad (\text{B.20})$$

$$\omega_5 = \frac{1}{2} \left( \lambda c_1 + \sqrt{\lambda c_1^2 + 4\lambda\Omega_1} \right) \quad (\text{B.21})$$

$$\omega_6 = \frac{1}{2} \sqrt{2c_2c_1\lambda^2 + 4\lambda\Omega_1 + 2\lambda\sqrt{c_2^2c_1^2\lambda^2 + 4c_2c_1\lambda\Omega_1}} \quad (\text{B.22})$$

$$\omega_7 = \frac{1}{2} \left( \lambda c_2 + \sqrt{\lambda c_2^2 + 4\lambda\Omega_1} \right) \quad (\text{B.23})$$

$$\omega_8 = \frac{1}{2} \left( -\lambda c_2 + \sqrt{\lambda c_2^2 + 4\lambda\Omega_2} \right) \quad (\text{B.24})$$

$$\omega_9 = \frac{1}{2} \sqrt{2c_2c_1\lambda^2 + 4\lambda\Omega_2 - 2\lambda\sqrt{c_2^2c_1^2\lambda^2 + 4c_2c_1\lambda\Omega_2}} \quad (\text{B.25})$$

$$\omega_{10} = \frac{1}{2} \left( -\lambda c_1 + \sqrt{\lambda c_1^2 + 4\lambda\Omega_2} \right) \quad (\text{B.26})$$

$$\omega_{11} = \sqrt{\lambda\Omega_2} \quad (\text{B.27})$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} \left( \lambda c_1 + \sqrt{\lambda c_1^2 + 4\lambda\Omega_2} \right) \quad (\text{B.28})$$

$$\omega_{13} = \frac{1}{2} \sqrt{2c_2c_1\lambda^2 + 4\lambda\Omega_2 + 2\lambda\sqrt{c_2^2c_1^2\lambda^2 + 4c_2c_1\lambda\Omega_2}} \quad (\text{B.29})$$

$$\omega_{14} = \frac{1}{2} \left( \lambda c_2 + \sqrt{\lambda c_2^2 + 4\lambda\Omega_2} \right) \quad (\text{B.30})$$

### B.1.2.2 Intervalles d'intégration

$$\begin{cases} A_1 = -\omega^2 + \lambda\Omega_1 \\ A_2 = -\omega^2 + \lambda\Omega_2 \\ B_1 = \lambda c_1 \omega \\ B_2 = \lambda c_2 \omega \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_+(t,A) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4t^2 A^2}}{2A} \\ F_-(t,A) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2 A^2}}{2A} \\ G(t,B) = \frac{\sqrt{-t(1+tB)}}{B} \end{array} \right. \quad (\text{B.32})$$

$\omega \in ] -\infty, \omega_1[$ $I_1$ $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Im}(B_1, A_1) < t < \text{Im}(B_2, A_1)$ $\text{Im}(B_1, A_1) < t < \text{Im}(B_2, A_1)$ $\text{Im}(B_1, A_1) < t < \text{Im}(B_2, A_1)$	$G(t, B_2) < s < F_+(t, A_1)$ $G(t, B_2) < s < G(t, B_1)$ $F_+(t, A_2) < s < G(t, B_1)$
$\omega_1 < \omega < \omega_2$ $I_2$ $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$	$-1/2 A_1  < t < \text{Im}(B_2, A_1)$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < \text{Im}(B_1, A_1)$ $\text{Im}(B_1, A_1) < t < \text{Im}(B_2, A_2)$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < \text{Im}(B_1, A_2)$	$F_-(t, A_1) < s < F_+(t, A_1)$ $G(t, B_2) < s < F_+(t, A_1)$ $G(t, B_2) < s < G(t, B_1)$ $F_+(t, A_2) < s < G(t, B_1)$
$\omega_2 < \omega < \omega_3$ $I_3$ $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$	$-1/2 A_1  < t < \text{Im}(B_1, A_1)$ $\text{Im}(B_1, A_1) < t < \text{Im}(B_2, A_1)$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < \text{Im}(B_2, A_2)$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < \text{Im}(B_1, A_2)$	$F_-(t, A_1) < s < F_+(t, A_1)$ $F_-(t, A_1) < s < G(t, B_1)$ $G(t, B_2) < s < G(t, B_1)$ $F_+(t, A_2) < s < G(t, B_1)$
$\omega_3 < \omega < \omega_4$ $I_4$ $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Im}(B_1, A_1) < t < \text{Im}(B_2, A_1)$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < \text{Im}(B_2, A_2)$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < \text{Im}(B_1, A_2)$	$F_-(t, A_1) < s < G(t, B_1)$ $G(t, B_2) < s < G(t, B_1)$ $F_+(t, A_2) < s < G(t, B_1)$
$\omega_4 < \omega < \omega_5$ $I_5$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Im}(B_1, A_1) < t < \text{Im}(B_2, A_1)$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < 0$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < \text{Im}(B_1, A_2)$ $\text{Im}(B_1, A_2) < t < 0$	$-G(t, B_1) < s < F_-(t, A_1)$ $-G(t, B_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_2) < s < F_+(t, A_2)$ $-G(t, B_2) < s < -G(t, B_1)$
$\omega_5 < \omega < \omega_6$ $I_6$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$-1/2 A_1  < t < \text{Im}(B_1, A_1)$ $\text{Im}(B_1, A_1) < t < \text{Im}(B_2, A_1)$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < 0$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < \text{Im}(B_1, A_2)$ $\text{Im}(B_1, A_2) < t < 0$	$F_+(t, A_1) < s < F_-(t, A_1)$ $-G(t, B_1) < s < F_-(t, A_1)$ $-G(t, B_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_2) < s < F_+(t, A_2)$ $-G(t, B_2) < s < -G(t, B_1)$
$\omega_6 < \omega < \omega_7$ $I_7$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$-1/2 A_1  < t < \text{Im}(B_2, A_1)$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < \text{Im}(B_1, A_1)$ $\text{Im}(B_1, A_1) < t < 0$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < \text{Im}(B_1, A_2)$ $\text{Im}(B_1, A_2) < t < 0$	$F_+(t, A_1) < s < F_-(t, A_1)$ $F_+(t, A_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_2) < s < F_+(t, A_2)$ $-G(t, B_2) < s < -G(t, B_1)$

$\omega_7 < \omega < \omega_8$ $I_8$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Im}(B_2, A_1) < t < \text{Im}(B_1, A_1)$ $\text{Im}(B_1, A_1) < t < 0$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < \text{Im}(B_1, A_2)$ $\text{Im}(B_1, A_2) < t < 0$	$F_+(t, A_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_2) < s < F_+(t, A_2)$ $-G(t, B_2) < s < -G(t, B_1)$
$\omega_8 < \omega < \omega_9$ $I_9$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$-1/2 A_2  < t < \text{Im}(B_2, A_2)$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < \text{Im}(B_1, A_2)$ $\text{Im}(B_1, A_2) < t < 0$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < \text{Im}(B_1, A_1)$ $\text{Im}(B_1, A_1) < t < 0$	$F_-(t, A_2) < s < F_+(t, A_2)$ $G(t, B_2) < s < F_+(t, A_2)$ $G(t, B_2) < s < G(t, B_1)$ $F_+(t, A_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_1) < s < -G(t, B_2)$
$\omega_9 < \omega < \omega_{10}$ $I_{10}$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$-1/2 A_2  < t < \text{Im}(B_1, A_2)$ $\text{Im}(B_1, A_2) < t < \text{Im}(B_2, A_2)$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < 0$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < \text{Im}(B_1, A_1)$ $\text{Im}(B_1, A_1) < t < 0$	$F_-(t, A_2) < s < F_+(t, A_2)$ $F_-(t, A_2) < s < G(t, B_1)$ $G(t, B_2) < s < G(t, B_1)$ $F_+(t, A_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_1) < s < -G(t, B_2)$
$\omega_{10} < \omega < \omega_{11}$ $I_{11}$ $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$	$\text{Im}(B_1, A_2) < t < \text{Im}(B_2, A_2)$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < 0$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < \text{Im}(B_1, A_1)$ $\text{Im}(B_1, A_1) < t < 0$	$F_-(t, A_2) < s < G(t, B_1)$ $G(t, B_2) < s < G(t, B_1)$ $F_+(t, A_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_1) < s < -G(t, B_2)$
$\omega_{11} < \omega < \omega_{12}$ $I_{12}$ $A_1 < 0$ et $A_2 < 0$	$\text{Im}(B_1, A_2) < t < \text{Im}(B_2, A_2)$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < \text{Im}(B_2, A_1)$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < \text{Im}(B_1, A_1)$	$-G(t, B_1) < s < F_-(t, A_2)$ $-G(t, B_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_1) < s < F_+(t, A_1)$
$\omega_{12} < \omega < \omega_{13}$ $I_{13}$ $A_1 < 0$ et $A_2 < 0$	$-1/2 A_2  < t < \text{Im}(B_1, A_2)$ $\text{Im}(B_1, A_2) < t < \text{Im}(B_2, A_2)$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < \text{Im}(B_2, A_1)$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < \text{Im}(B_1, A_1)$	$F_+(t, A_2) < s < F_-(t, A_2)$ $-G(t, B_1) < s < F_-(t, A_2)$ $-G(t, B_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_1) < s < F_+(t, A_1)$
$\omega_{13} < \omega < \omega_{14}$ $I_{14}$ $A_1 < 0$ et $A_2 < 0$	$-1/2 A_2  < t < \text{Im}(B_2, A_2)$ $\text{Im}(B_2, A_2) < t < \text{Im}(B_1, A_2)$ $\text{Im}(B_1, A_2) < t < \text{Im}(B_2, A_1)$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < \text{Im}(B_1, A_1)$	$F_+(t, A_2) < s < F_-(t, A_2)$ $F_+(t, A_2) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_1) < s < F_+(t, A_1)$
$\omega \in [\omega_{14}, \infty[$ $I_{15}$ $A_1 < 0$ et $A_2 < 0$	$\text{Im}(B_2, A_2) < t < \text{Im}(B_1, A_2)$ $\text{Im}(B_1, A_2) < t < \text{Im}(B_2, A_1)$ $\text{Im}(B_2, A_1) < t < \text{Im}(B_1, A_1)$	$F_+(t, A_2) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_1) < s < -G(t, B_2)$ $-G(t, B_1) < s < F_+(t, A_1)$

## B.2 Enveloppe à 100%

### B.2.1 Partie réelle

#### B.2.1.1 Enveloppe inférieure

$$(B.33) \quad \begin{cases} \omega_1^{Re,-} = \sqrt{\frac{\lambda_j}{2}} \sqrt{c_2^2 \lambda_j + \Omega_1 + \Omega_2 + \sqrt{c_2^2 \lambda_j (c_2^2 \lambda_j - 2(\Omega_1 + \Omega_2)) + (\Omega_2 \Omega_1)^2}} \\ \omega_2^{Re,-} = \sqrt{\lambda_j \Omega_1} \\ \omega_3^{Re,-} = \sqrt{\lambda_j \Omega_1 + \lambda_j c_1 \sqrt{\lambda_j \Omega_1}} \\ \omega_4^{Re,-} = \sqrt{\lambda_j \Omega_2 + \lambda_j c_1 \sqrt{\lambda_j \Omega_2}} \end{cases}$$

$$\text{Ces 4 fréquences définissent 5 intervalles : } \begin{cases} I_1^{Re,-} = ] - \infty, \omega_1^{Re,-} [ \\ I_2^{Re,-} = ] \omega_1^{Re,-}, \omega_2^{Re,-} [ \\ I_3^{Re,-} = ] \omega_2^{Re,-}, \omega_3^{Re,-} [ \\ I_4^{Re,-} = ] \omega_3^{Re,-}, \omega_4^{Re,-} [ \\ I_5^{Re,-} = ] \omega_4^{Re,-}, + \infty [ \end{cases}$$

#### B.2.1.2 Enveloppe supérieure

$$(B.2.1.2) \quad \begin{cases} \omega_1^{Re,+} = \sqrt{\lambda_j \Omega_1 - \lambda_j c_1 \sqrt{\lambda_j \Omega_1}} \\ \omega_2^{Re,+} = \sqrt{\lambda_j \Omega_2 - \lambda_j c_1 \sqrt{\lambda_j \Omega_2}} \\ \omega_3^{Re,+} = \sqrt{\lambda_j \Omega_2} \\ \omega_4^{Re,+} = \sqrt{\frac{\lambda_j}{2}} \sqrt{c_2^2 \lambda_j + \Omega_1 + \Omega_2 + \sqrt{c_2^2 \lambda_j (c_2^2 \lambda_j + 2(\Omega_1 + \Omega_2)) + (\Omega_2 - \Omega_1)^2}} \end{cases}$$

De même que pour l'enveloppe inférieure, ces 4 fréquences définissent 5 intervalles,  $I_1^{Re,+}$ ,  $I_2^{Re,+}$ ,  $I_3^{Re,+}$ ,  $I_4^{Re,+}$  et  $I_5^{Re,+}$ .

## B.2.2 Partie imaginaire

### B.2.2.1 Enveloppe inférieure

$$(B.2.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1^{Im,-} = -\frac{c_2 \lambda}{2} + \frac{\sqrt{c_2^2 \lambda^2 + 4\lambda\Omega_1}}{2} \\ \omega_2^{Im,-} = -\frac{c_1 \lambda}{2} + \frac{\sqrt{c_1^2 \lambda^2 + 4\lambda\Omega_1}}{2} \\ \omega_3^{Im,-} = \sqrt{\frac{\lambda}{6}} \sqrt{2\Omega_1 - c_1^2 \lambda + \sqrt{c_1^4 \lambda^2 - 4c_1^2 \Omega_1 \lambda + 16\Omega_1^2}} \\ \omega_4^{Im,-} = \sqrt{\frac{\lambda}{6}} \sqrt{2\Omega_2 - c_1^2 \lambda + \sqrt{c_1^4 \lambda^2 - 4c_1^2 \Omega_2 \lambda + 16\Omega_2^2}} \\ \omega_5^{Im,-} = \frac{c_1 \lambda}{2} + \frac{\sqrt{c_1^2 \lambda^2 + 4\lambda\Omega_2}}{2} \\ \omega_6^{Im,-} = \frac{c_2 \lambda}{2} + \frac{\sqrt{c_2^2 \lambda^2 + 4\lambda\Omega_2}}{2} \end{array} \right.$$

Ces 6 fréquences définissent 7 intervalles,  $I_1^{Im,-}$ ,  $I_2^{Im,-}$ ,  $I_3^{Im,-}$ ,  $I_4^{Im,-}$ ,  $I_5^{Im,-}$ ,  $I_6^{Im,-}$  et  $I_7^{Im,-}$ .

### B.2.2.2 Enveloppe supérieure

$$(B.2.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1^{Im,+} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{\lambda c_1 c_2 + 2\Omega_1 + \sqrt{c_1^2 c_2^2 \lambda^2 + 4c_1 c_2 \lambda \Omega_1}} \\ \omega_2^{Im,+} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{\Omega_1 + \Omega_2} \\ \omega_3^{Im,+} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{\lambda c_1 c_2 + 2\Omega_2 - \sqrt{c_1^2 c_2^2 \lambda^2 + 4c_1 c_2 \lambda \Omega_2}} \end{array} \right.$$

Ces 4 fréquences définissent 5 intervalles,  $I_1^{Im,+}$ ,  $I_2^{Im,+}$ ,  $I_3^{Im,+}$  et  $I_4^{Im,+}$ .





## Annexe C

# Algorithme

### C.1 Algorithme de Golub et Von Loan

Cet algorithme est désigné dans la littérature par l'algorithme **QZ**.

Soit des matrices définies positives  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

La procédure qui suit fournit une matrice non singulière  $\mathbf{X}$  telle que  $\mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{X} = I_n$  et  $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ :

- Procéder à la décomposition de Choleski  $\mathbf{B} = \mathbf{G} \mathbf{G}^T$
- Calculer  $\mathbf{C} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{G}^{-T}$
- Utiliser l'algorithme **QR** pour obtenir la décomposition de Schur  $\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$
- Prendre  $\mathbf{X} = \mathbf{G}^{-T} \mathbf{Q}$





THÈSE SOUTENUE DEVANT L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

**Nom :** HEINKELE

**Date de soutenance :** le 30 Mai 2008

**Prénoms :** Christophe

**Titre :** Synthèse modale probabiliste. Théorie et applications.

**Nature :** Doctorat

**Numéro d'ordre :** 2008-10

**École doctorale :** Mécanique, Énergétique, Génie civil et Acoustique

**Spécialité :** Mécanique

**Résumé :** Le travail de cette thèse est focalisé sur le traitement des incertitudes des paramètres d'un système vibroacoustique. Après plusieurs rappels des techniques numériques pour traiter l'impact de l'aléa de ces paramètres sur le comportement du système, nous avons initié une méthode analytique en nous appuyant d'une part sur les calculs de probabilités classiques et d'autre part sur l'analyse modale. Nous avons ainsi commencé par écrire l'expression analytique de la densité de probabilité de la réponse en fréquence d'un oscillateur harmonique en considérant dans un premier temps que seul la fréquence propre était aléatoire de loi uniforme, puis dans un deuxième temps que seul l'amortissement visqueux était aléatoire (de loi uniforme également). Dans un troisième temps nous avons considéré un couple de variables aléatoires. Cette dernière résolution nous a permis d'envisager ensuite la superposition de  $n$  oscillateurs et d'écrire la densité de probabilité d'un système vibrant à  $n$  degrés de liberté: c'est ce que nous avons désigné par l'analyse modale probabiliste. Nous présentons une application à la poutre d'Euler-Bernoulli traitée par la méthode des éléments finis. Dans cette thèse, nous présentons des techniques numériques de traitement de l'aléa (Projection sur un chaos polynômial), mais un pas vers l'identification des paramètres et de leur aléa a également été tenté. Dans ce cadre, nous utilisons d'abord des méthodes d'identification non paramétrique, puis nous exposons une famille de méthodes basées sur les enveloppes de la réponse du système données par la résolution analytique.

**Abstract :** The work developed in this phd-thesis is focused on the treatment of the uncertainties of the parameters of a vibro-acoustical system. After several recalls of numerical techniques to treat the impact of the randomness of these parameters on the behaviour of the system, we initiated an analytical method by using on one hand classical calculations of probability and on the other hand the modal analysis. So we began by writing the analytical expression of the probability density function of the frequency response of a harmonic oscillator by considering at first that only the natural frequency is random and governed by an uniform law, then in a second time that only viscous damping was random (of uniform law too). In a third time we considered the couple as being random. By using this last resolution allowed us to superpose  $n$  oscillators and to write the probability density function of a vibrating system of  $n$  degrees of freedom: we called this method the probabilistic modal analysis. We introduce an application on the Euler-Bernoulli beam treated by finite elements method. In this thesis, we introduce numerical techniques about the treatment of the randomness upon parameters (projection on the polynomial chaos), but a step towards the identification of parameters and their randomness was also tried. In this frame, first we use methods of nonparametric identification, then we display a family of methods based on the envelopes of the frequency response of the system given by the analytical resolution.

**Mots-clés :** vibroacoustique, paramètres incertains, modes normaux, identification

**Laboratoire de recherches :** Département Génie Civil et Bâtiment, École Nationale des Travaux Publics de L'État

**Directeurs de Thèse :** Claude-Henri LAMARQUE et Franck SGARD

**Président du jury :** Alain BERLIOZ

<b>Composition du jury :</b>	Sergio BELLIZZI	Rapporteur
	Michel FOGLI	Rapporteur
	Franck SGARD	Directeur de Thèse
	Stéphane PERNOT	Membre du jury
	Fabrice THOUVEREZ	Examineur
	Claude-Henri LAMARQUE	Directeur de Thèse