

THÈSE

PRÉSENTÉE POUR L'OBTENTION DU TITRE DE

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE DE MÉCANIQUE DE LYON (UCBL/INSA/ECL)

PAR

Fabiano ASSIS RODRIGUES

**ÉTUDE de la DYNAMIQUE NON LINÉAIRE
d'AMORTISSEURS du TYPE *SQUEEZE FILM***

Jury :

J. FRÊNE, Professeur du LMS, Université de Poitiers	Rapporteur
L. JÉZÉQUEL, Professeur du LTDS, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
P. KAPSA, Directeur du LTDS	Président du jury
F. LAURANT, Ingénieur Méthodes SNECMA	Examineur
B. PESEUX, Professeur du LMM, École Centrale de Nantes	Rapporteur
F. THOUVEREZ, Professeur du LTDS, École Centrale de Lyon	Examineur

”À vaincre sans péril, on triomphe sans gloire.”

Pierre CORNEILLE

”La seule manière, pour un individu, de demeurer
constant parmi les situations changeantes, c’est
de changer avec elles, tout en ordonnant son action
selon une pensée dominante et directrice.”

Winston CHURCHILL

Résumé

La recherche accrue d'efficacité des machines tournantes engendre une tendance à l'assouplissement et à l'augmentation des vitesses des rotors. Le système mécanique devient ainsi plus susceptible à des problèmes vibratoires aigus, qui englobent des surtensions excessives au voisinage des résonances, l'apparition de plages de fonctionnement instables et l'amplification des charges dynamiques transmises au milieu environnant.

Pour remédier à ces problèmes, l'amortisseur à film écrasé, traduction du terme anglais *squeeze film damper*, constitue l'une des solutions techniques les plus intéressantes proposées ces trente dernières années, du fait de la forte capacité d'amortissement et de la relative simplicité de construction. La conception de ce type d'amortisseur reste toutefois problématique et délicate, à cause de la difficulté de compréhension et de maîtrise numérique de nombreux phénomènes intervenant dans le comportement hydrodynamique du film.

L'étude d'un système mécanique comportant des amortisseurs à film écrasé comprend deux parties principales. La première concerne la modélisation du champ de pression du film d'huile en fonction des variables décrivant la cinématique du système au niveau du palier qui l'incorpore. La deuxième consiste à simuler la dynamique de la machine, ce qui nécessite l'emploi d'outils de calcul non linéaire capables de déterminer les réponses transitoires et stationnaires ainsi que d'analyser leur stabilité.

Outre la recherche dans le sens d'une meilleure compréhension et modélisation des amortisseurs *squeeze film*, des solutions pour l'optimisation de leurs applications se sont développées depuis le début des années 80. Ce contexte nous motive également à mettre en avant une nouvelle stratégie d'optimisation des caractéristiques de l'amortisseur.

Ce doctorat aborde donc plusieurs aspects de la problématique de l'application de l'amortisseur *squeeze film*, allant de la mécanique des fluides à la dynamique des machines tournantes, à savoir : le comportement du film d'huile, l'étude d'outils de calcul en dynamique de structures non linéaires adaptés, la modélisation des forces générées par l'amortisseur et son application optimale.

Mots-clés

amortisseur *squeeze film*, rotor, hydrodynamique, dynamique non linéaire, identification

Abstract

The aim of improving the efficiency of rotating machinery leads to the construction of slender shafts which are designed to operate at increasingly speeds. As an outcome of this tendency, the mechanical system may undergo severe vibrational problems such as excessive whirl amplitude when traversing critical speeds, appearance of instabilities within the operational speed range and amplification of the dynamic loads transmitted to the housing.

The squeeze film damper (SFD) turned out to be one of the most attractive technical solutions to remedy these problems, thanks to its relative constructional simplicity and important damping capability. Despite its beneficial influence in rotordynamics performance, the highly nonlinear squeeze film damper behavior often brings about some difficulties in the prediction of rotor response at the design stage.

The analysis of a mechanical system incorporating squeeze film dampers comprehends two main stages. The first one concerns the modeling of the damper pressure field as a function of the rotor kinematics. The second one entail the simulation of the rotating machinery dynamical behavior , what requires the use of nonlinear methods able to calculate transient as well as steady responses and to analyze rotor stability.

Recently, simultaneously to the efforts intended to improve the comprehension and modeling of the squeeze film damper phenomena, research has been focused on the development of controllable dampers in order to attain optimized performance, thus bettering the rotor behavior as far as, for instance, transmissibility and vibration amplitudes minimization concerns.

The present Ph.D. thesis embraces different spheres of knowledge, from fluid mechanics to rotordynamics. Hence, it deals with several aspects involved in the study of squeeze film dampers : the oil film behavior, the methods used in the dynamic analysis of nonlinear structures, the damper forces modeling and the squeeze film optimal application.

key words

squeeze film damper, rotordynamics, hydrodynamics, nonlinear dynamics, identification

Remerciements

Ce doctorat est le fruit d'un travail de trois ans, effectué au sein de l'équipe Dynamique des Structures et des Systèmes du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) de l'Ecole Centrale de Lyon. Tout d'abord, je remercie vivement M. le Professeur Louis JEZEQUEL de m'avoir accueilli dans son équipe de recherche et de la confiance qu'il m'a témoigné en remettant à mes soins d'importantes responsabilités dans le cadre du projet *squeeze film*. Je tiens à remercier également M. le Professeur Fabrice THOUEVREZ, qui m'a encadré tout au long de cette thèse et dont la gentillesse et la bonne humeur n'ont rendu que plus profitable le partage de son immense savoir scientifique.

Je remercie sincèrement M. Philippe KAPSA, directeur du LTDS, d'avoir accepté de présider le jury, et messieurs les Professeurs FRENE et PESEUX pour leur travail en tant que rapporteurs et pour leur avis favorable concernant mon mémoire de thèse. Je tiens à remercier chaleureusement M. Franck LAURANT, ingénieur SNECMA, d'avoir apporté au jury un point de vue permettant de situer ce travail dans un contexte industriel. Je le remercie également pour l'accueil sympathique qu'il m'a réservé au sein du Département Méthodes du groupe SNECMA Moteurs à Villaroche.

Il m'est difficile de trouver des mots pour exprimer ma gratitude envers Claude GIBERT, ingénieur de recherche du LTDS et fidèle compagnon du G8bis, pour la correction minutieuse de la première version de ce mémoire, pour la contribution scientifique pertinente à ce travail de recherche, pour l'aide technique précise et précieuse apportée au projet ASF et pour la bonne humeur quotidienne qui a détendu les moments difficiles de cette thèse. Je remercie également tous ceux qui ont participé et qui participent encore au projet ASF, en particulier Ludovic DUCOTTE, Patrick PERRARD, Lionel CHARLES, Bernard JEAN-PIERRE et Henri NAVIERE. Je tiens à remercier Olivier DESSOMBZ, alias Magic, d'avoir réglé promptement et patiemment tous mes problèmes informatiques et de m'avoir appris tant d'astuces dans l'utilisation de nombreux logiciels.

Le bon déroulement de cette thèse est en grande partie due à la bonne ambiance régnant dans le laboratoire. Je remercie donc le personnel et les thésards, principalement ceux de ma promotion, à savoir Jean-Jacques SINOUE, David DEMAILLY, Patricia SAAD et Olivier BAREILLE (ok, Olivier, tu as pris un peu de retard, mais je reste optimiste...), qui ont fait le chemin de croix à mes côtés. Merci également à tous les copains footeux de l'école qui ont enrichi mon séjour à Lyon de très bons souvenirs.

Je tiens à remercier affectueusement la famille Fontaine, principalement Magalie, dont la présence chaleureuse a rendu mon adaptation dans cette terre étrangère beaucoup plus agréable. Je la remercie également de m'avoir fait découvrir des endroits magnifiques en France et de m'avoir appris les subtilités de la langue française (et aussi du patois savoyard).

Un petit paragraphe en portugais, para agradecer minha família, cujo apoio irrestrito, apesar de distante, foi fundamental (e continua sendo...) para o meu sucesso do outro lado do Atlântico. Agradeço principalmente a meus pais que me deram a oportunidade de realizar uma parte de meus estudos na França e, sobretudo, uma educação sólida, que me permite enfrentar grandes desafios em qualquer lugar do mundo. Deixo também registrado um agradecimento especial a todos os meus amigos e parentes que sempre me deram força para seguir em frente.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Principe et architecture d'un amortisseur <i>squeeze film</i>	1
1.2	Applications de l'amortisseur <i>squeeze film</i>	2
1.3	Problématique de l'amortisseur fluide	3
1.4	Organisation et objectifs du travail	5
2	Phénoménologie et modélisation du <i>squeeze film</i>	7
2.1	Théorie classique de la lubrification : l'équation de Reynolds	7
2.2	Formulations alternatives à l'équation de Reynolds	14
2.2.1	Fluides amortisseurs non newtoniens	14
2.2.1.1	Fluide avec des couples de contraintes	14
2.2.1.2	Fluides viscoélastiques	15
2.2.1.3	Fluides rhéofluidifiants	17
2.2.1.4	Fluides électro-rhéologiques	18
2.2.2	Effets d'Inertie	19
2.2.2.0.1	Cas 1 : $R\omega/V_c \rightarrow \infty$.	19
2.2.2.0.2	Cas 2 : $R\omega/V_c \rightarrow 0$.	20
2.2.2.0.3	Cas 3 : $R\omega/V_c \approx 1$.	20
2.2.3	Turbulence	27
2.3	Conditions aux limites	30

2.3.1	Etanchéité du <i>squeeze film</i>	31
2.3.2	Système d'alimentation	33
2.3.2.1	Gorge circonférentielle	33
2.3.2.2	Points d'injection	34
2.4	Cavitation	35
2.4.1	Cavitation de vapeur	37
2.4.2	Cavitation Gazeuse	40
2.5	Effets thermiques	42
2.6	Intéraction avec les frontières solides	43
2.7	Forces hydrodynamiques	44
2.8	Techniques de résolution de l'équation de Reynolds	45
2.8.1	Approximation palier court	45
2.8.2	Approximation palier long	46
2.8.3	Méthode des différences finies	47
2.8.4	Méthode des éléments finis	49
2.8.5	Approches analytiques et semi-analytiques	52
2.8.5.1	Correction de l'approximation palier court	53
2.8.5.2	Correction de l'approximation palier long	57
2.9	Conclusion	59
3	Méthodes de calcul en dynamique non linéaire appliquées au <i>squeeze film</i>	61
3.1	Rotor rigide	62
3.2	Rotor Jeffcott	65
3.3	Rotor réel	67
3.3.1	Méthode de la balance harmonique	69
3.3.2	Méthode de la collocation trigonométrique	72
3.3.3	Méthode de tir	77

3.3.4	La continuation <i>pseudo-arc length</i>	79
3.3.5	Analyse de la stabilité - Théorie de Floquet	83
3.3.6	Comparaison des méthodes	89
3.4	Conclusion	96
4	Système d’Alimentation Ponctuelle	97
4.1	Modélisation du Squeeze Film - Problème Hydrodynamique	98
4.2	Modélisation du Système d’Alimentation - Problème Hydraulique	100
4.2.1	La Première Loi de la Thermodynamique	102
4.2.2	Formules des pertes de charge	107
4.3	Influence sur le comportement du SqF	109
4.4	Influence sur la dynamique de rotors flexibles	118
4.4.1	Modèle Jeffcott	118
4.4.1.1	Influence du nombre de points d’alimentation	119
4.4.1.2	Influence de la puissance nette de la pompe	124
4.4.1.3	Comportement du circuit hydraulique d’alimentation	127
4.4.2	Modèle de dynamique d’ensemble	131
4.5	Conclusion	136
5	Représentation du <i>squeeze film</i> pour la dynamique d’ensemble	137
5.1	Lissage des forces hydrodynamiques visqueuses	138
5.1.1	Lissage par régression linéaire	138
5.1.2	Lissage par polynômes de Chebyshev	143
5.1.3	Réduction des modèles	146
5.1.3.1	Régression linéaire <i>stepwise</i>	147
5.1.3.2	Réduction du modèle à polynômes de Chebyshev	149
5.1.4	Comparaison des techniques de lissage proposées	152

5.1.5	Application à la dynamique d'un rotor Jeffcott	159
5.2	Modélisation des effets d'inertie	164
5.2.1	Lissage de l'énergie cinétique et des débits sortant/entrant	168
5.2.2	Analyse des résultats	171
5.2.3	Influence de l'inertie sur la dynamique de rotors flexibles	178
5.2.3.1	Identification des efforts visqueux	179
5.2.3.2	Simulation du rotor Jeffcott	181
5.2.3.3	Simulation du rotor de dynamique d'ensemble	183
5.3	Conclusion	184
6	Application optimale du <i>squeeze film</i>	189
6.1	Etat de l'art	189
6.1.1	Atténuation des effets non linéaires	189
6.1.2	Configurations compactes et simplifiées	191
6.1.3	Contrôle des caractéristiques du SqF	191
6.2	<i>Squeeze film</i> adaptatif : étude d'une nouvelle stratégie de contrôle	194
6.2.1	Modélisation	195
6.2.2	Sensibilité au paramètre de contrôle	199
6.2.2.1	Influence sur les caractéristiques du <i>squeeze film</i>	199
6.2.2.2	Influence sur la réponse au balourd de rotors flexibles	201
6.3	Discussion sur l'implémentation du contrôle	206
6.4	Banc d'essai <i>adaptive squeeze film</i> (ASF)	208
6.4.1	Analyse fonctionnelle du banc d'essais	208
6.4.2	Synthèse organique du banc ASF	213
6.4.2.1	Synthèse mécanique et vibratoire	214
6.4.2.2	Synthèse thermo-hydrodynamique	216
6.4.2.3	Synthèse thermo-mécanique	217

6.4.2.4 Synthèse de performance	219
6.5 Conclusion	219
7 Conclusion générale et perspectives	221
Références bibliographiques	225
Table des figures	239
Liste des tableaux	244

Chapitre 1

Introduction

Comme dans tous les domaines de la mécanique de nos jours, la recherche accrue d'efficacité correspond à l'un des principaux défis des constructeurs de machines tournantes. Il en résulte une tendance au développement de rotors plus légers, et par conséquent plus flexibles, qui doivent atteindre de vitesses plus élevées, afin de minimiser le rapport poids/puissance et ainsi d'améliorer leur rendement. A cet objectif s'ajoute le besoin de réduire les nuisances vibratoires au minimum au niveau du stator, car le confort est indéniablement devenu un facteur majeur dans l'appréciation de la qualité de tels produits.

L'assouplissement des rotors et l'augmentation des vitesses de fonctionnement rendent le système mécanique susceptible à des problèmes vibratoires aigus qui englobent des surtensions excessives au voisinage des résonances ainsi que l'apparition de plages de fonctionnement instables. De plus, ces tendances d'évolution amènent l'amplitude des charges dynamiques synchrones transmises au milieu environnant à s'accroître.

1.1 Principe et architecture d'un amortisseur *squeeze film*

Pour remédier à ces problèmes, l'amortisseur à film écrasé, appelé également film fluide amortisseur, traduction du terme anglais *squeeze film damper* (SqF), constitue l'une des solutions techniques les plus intéressantes proposées ces trente dernières années, du fait de la relative simplicité de construction et de la forte capacité d'amortissement. Il consiste en une lame fluide interposée entre des paliers de la machine et le bâti, comme illustré dans la figure 1.1. Les forces hydrodynamiques générées par l'action d'écrasement du fluide, généralement une huile, s'avèrent capables d'atténuer les vibrations du rotor, d'améliorer la stabilité du système et de réduire la transmissibilité.

La structure du SqF ressemble à celle des paliers hydrodynamiques, la différence étant que ceux-ci assurent la portance du rotor outre la fonction d'amortissement. L'écoulement dans ces derniers est induit par l'entraînement du fluide adhérent aux surfaces, effet dit de Couette, ainsi que par l'écrasement du film, effet dit de Poiseuille. Les frontières solides délimitant le SqF, par contre, ne subissent pas de mouvements relatifs tangentiels, si bien que l'effet de Couette est absent. Le SqF est alors incorporé au système mécanique dans le but spécifique de dissiper de l'énergie, la portance du

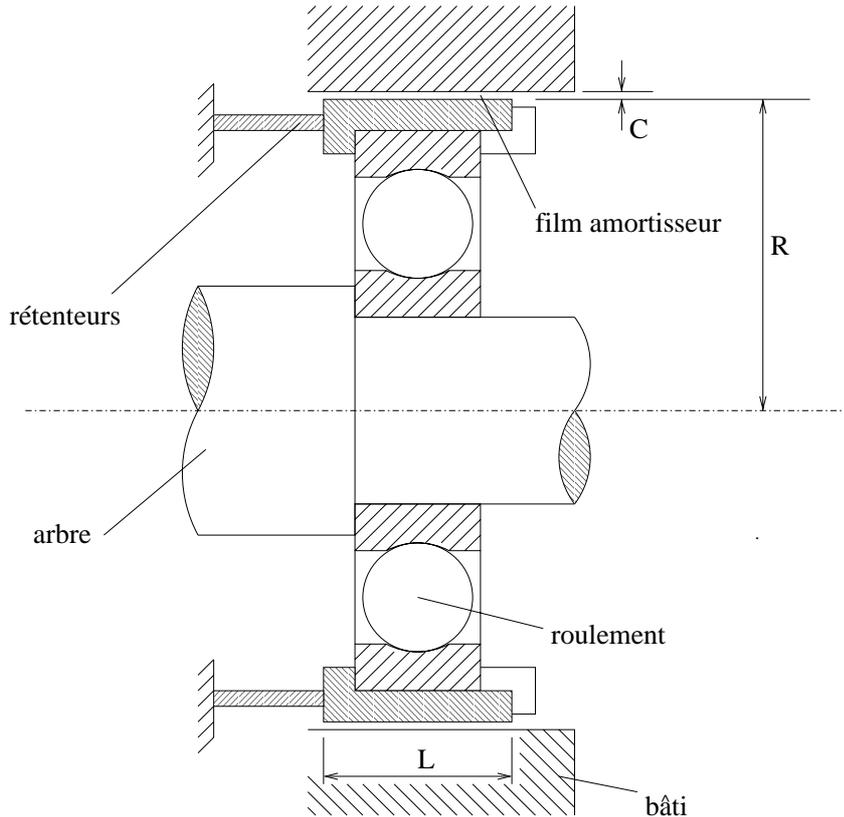


FIG. 1.1: Schéma d'un amortisseur *squeeze film*

rotor devant être fournie par ailleurs.

L'un des éléments de construction les plus importants du SqF est le système de blocage en rotation et de centrage. La piste intérieure de l'amortisseur est généralement en liaison avec le bâti de la machine par l'intermédiaire de rétenteurs, un dispositif mécanique relativement souple dont les fonctions sont d'empêcher la piste de tourner autour de son axe et de compenser la pesanteur. Ce faisant, on évite qu'un éventuel contact entre les pistes du SqF ne se produise, surtout pendant les phases de démarrage du rotor. En modifiant les rétenteurs, il est possible d'altérer la vitesse critique du mode de suspension de la machine. Cependant, leur influence peut diminuer considérablement vis-à-vis de la raideur dynamique du SqF lorsque celui-ci engendre un amortissement excessif. Il existe également des configurations où le palier reste libre dans la cavité annulaire qui comporte le fluide et est bloqué en rotation par des crans, la portance étant générée par effet hydrodynamique au cours de la montée en vitesse. La valeur de l'excentration statique du palier altère sensiblement la performance du SqF.

1.2 Applications de l'amortisseur *squeeze film*

Bien que l'invention de l'amortisseur *squeeze film* soit normalement attribuée à COOPER en 1963, et la première application industrielle à Rolls Royce, CHILDS [30] situe le développement de ce type d'amortisseur beaucoup plus tôt. Il cite PARSONS comme le pionnier du SqF, qui aurait utilisé cette technologie pour atténuer les vibrations d'un compresseur de vapeur en 1889.

L'objectif visé par l'utilisation du SqF dépend de l'application à laquelle la machine tournante est destinée. Dans le cas de compresseurs de vapeur, par exemple, l'isolation vibratoire est un critère de conception secondaire, du fait de la contrainte faible introduite par le poids des bâtis, qui peuvent être très solides et ainsi bien supporter les charges dynamiques. L'utilisation de paliers hydrodynamiques dans ce type de machine est très répandue et vise principalement à garantir la dissipation énergétique nécessaire au passage des vitesses critiques, limitant ainsi les sollicitations de l'arbre. Les paliers hydrodynamiques lisses possèdent toutefois des seuils de vitesse supercritiques au delà desquels ils rendent le système instable, ce qui découle des termes de raideur croisés du film d'huile [106]. Cette instabilité, dénommée *oil whip*, apparaît à une vitesse d'environ le double de la première vitesse critique du rotor, et est caractérisée par un régime sous-synchrone qui dégrade dangereusement la performance de l'ensemble mécanique [28]. L'exigence d'étendre la plage de fonctionnement stable des compresseurs conduit à la recherche de solutions permettant d'apporter de l'amortissement de nature stabilisatrice, donc dans les parties non tournantes de la machine. L'emploi du SqF en série avec le palier hydrodynamique a fait preuve d'efficacité dans la suppression de cette instabilité [154]. Le SqF s'est avéré également capable d'atténuer, voire de supprimer, des vibrations sous-synchrones excitées par des forces déstabilisatrices telles que celles de joints à labyrinthe ou celles engendrées par la non axisymétrie du jeu rotor/stator (forces d'Alford) [75].

Dans le domaine aéronautique, la problématique est sensiblement différente. Pour une question de fiabilité et de sécurité [188], le guidage du rotor est communément assuré par des roulements à billes ou à rouleaux, lesquels ne fournissent qu'un amortissement très faible. Il en résulte des pics de vibration d'amplitude dangereusement importante lorsque des vitesses critiques sont traversées. L'introduction d'une source de dissipation d'énergie devient ainsi fondamentale pour le passage des résonances sans risque de casse pour le système mécanique. Outre l'exigence d'atténuation des vibrations du rotor, la conception de moteurs aéronautiques s'appuie également sur le souhait de minimiser les charges dynamiques transmises à travers les paliers, ce qui permet de réduire la sollicitation des supports, dont le poids constitue une contrainte forte de conception, et d'augmenter le confort vibratoire dans l'avion.

Les applications de l'amortisseur fluide dans le domaine des machines tournantes ne se restreignent pas qu'aux paliers de compresseurs et de moteurs à réaction. Il peut être utilisé, entre autres, dans des pompes centrifuges [31], au niveau du support de trains d'engrenage [24][22] ou encore allié à des paliers magnétiques dans des systèmes de stockage d'énergie [37]. L'action hydrodynamique de films fluides cylindriques est également un phénomène important dans le comportement vibratoire des tubes d'échangeurs de chaleur [139], un domaine qui ne sera pas abordé dans ce travail.

1.3 Problématique de l'amortisseur fluide

L'étude théorique de la dynamique d'un système mécanique comportant un SqF comprend deux étapes principales. La première concerne le développement d'un modèle de comportement qui exprime le champ de pression du film d'huile en fonction des variables décrivant la cinématique du système au niveau du palier qui l'incorpore. La deuxième phase de l'étude consiste à modéliser et simuler la dynamique de l'ensemble mécanique, ce qui nécessite l'emploi d'outils de calcul capables de déterminer les réponses transitoires et stationnaires ainsi que d'analyser leur stabilité.

Le lien entre ces deux étapes correspond aux forces hydrodynamiques obtenues en intégrant le champ de pression du SqF, qui sont ensuite reportées dans la simulation du fonctionnement de la machine. A partir d'un cahier des charges prédéfini pour celle-ci, le modèle du SqF doit permettre également de remonter à la définition des différents paramètres de l'amortisseur influant sur la performance système mécanique. Sachant que la taille des modèles éléments finis industriels ne cesse d'augmenter, il est intéressant d'avoir des expressions permettant une estimation rapide des forces de l'amortisseur, pour que l'analyse de la dynamique du système soit menée de manière efficace. Cependant, la déduction de telles expressions exige très souvent des hypothèses simplificatrices qui peuvent pénaliser la précision du calcul.

Or, les efforts dirigés vers une performance superlative des machines tournantes, alliés à l'évolution remarquable des moyens de calcul des trente dernières années, conduisent à l'adoption de critères de conception précis et dans des marges de sécurité plus étroites, au lieu des critères surdimensionnants de jadis. Afin d'améliorer les études prédictives des applications du SqF, la modélisation des forces hydrodynamiques doit être fiable, sans pour autant rendre le temps de calcul prohibitif dans l'optique industrielle.

Des nombreux travaux théoriques et expérimentaux sur le SqF furent réalisés depuis les années 60, à mesure que ses applications dans le domaine des machines tournantes se répandaient. Ces travaux ont permis de mettre un relief un certain nombre de facteurs d'influence dans le comportement d'un tel amortisseur, dont les principaux sont :

- les effets d'inertie de l'écoulement;
- la cavitation;
- la présence et les caractéristiques des joints d'étanchéité;
- le système d'alimentation;
- les effets thermiques;
- la turbulence;
- la non linéarité de l'équation constitutive du fluide.

La pertinence de ces facteurs dépend de la configuration de l'amortisseur (extrémités ouvertes, extrémités étanches, ...), du type de fluide utilisé et des conditions d'opération du système mécanique (vitesse, excentration statique, ...). On peut s'attendre, par exemple, à une transition d'écoulement laminaire à turbulent pour des rotors à très haute vitesse, montés sur des amortisseurs ayant un jeu radial relativement important. En dépit du progrès dans la compréhension de la phénoménologie du comportement du SqF, le développement de modèles à la fois robustes et expéditifs pose encore beaucoup de difficultés.

Les difficultés persistent lors de la simulation de la dynamique d'ensemble, à cause du comportement non linéaire du SqF, dont les forces sont fonctions de la cinématique du système. Il est fondamental d'employer des méthodes de calcul efficaces et aptes à prendre en compte cette non linéarité dans le cadre d'applications industrielles, surtout pour la réalisation d'études paramétriques d'avant

projet. Des problèmes de convergence et le coût temporel élevé motivent la recherche d’algorithmes répondant au mieux au compromis entre temps et précision de calcul.

1.4 Organisation et objectifs du travail

Nous entreprenons ce mémoire, après ce bref chapitre introductif, par la présentation des aspects théoriques associés à la mécanique des lames fluides, dans le but de circonscrire la phénoménologie pertinente concernant le comportement dynamique du film d’huile. Nous exposerons également des méthodes proposées pour la résolution du champ de pression du SqF donné par l’équation de Reynolds.

Le chapitre suivant est consacré à l’étude comparative de méthodes de calcul non linéaire en dynamique des structures. Nous nous intéresserons principalement à la détermination de la réponse au balourd de machines tournantes. Trois techniques sont considérées, à savoir la balance harmonique, la collocation trigonométrique et la méthode du tir. Nous analyserons les avantages et les inconvénients de chaque méthode à la lumière de simulations de la dynamique d’un rotor flexible. De plus, la technique de continuation *pseudo-arc length* ainsi que la théorie de Floquet de la stabilité seront mises en avant.

Dans le chapitre 4, nous abordons un point fondamental de la modélisation des amortisseurs *squeeze film* : le traitement des conditions aux limites relatives à des systèmes d’alimentation ponctuels. Une approche permettant le couplage du SqF avec le circuit hydraulique d’alimentation est proposée et l’influence de leur interaction sur le comportement dynamique de rotors flexibles est analysée.

Afin de rendre les calculs de dynamique d’ensemble plus efficaces, nous développons dans le chapitre 5 une méthode originale de représentation des forces hydrodynamiques du SqF. Elle s’appuie sur le découplage des deux étapes de l’étude d’un système incorporant de tels amortisseurs. Cette hypothèse rend possible l’utilisation de techniques de lissage pour déduire des expressions permettant une évaluation rapide des efforts visqueux et inertiels du SqF. Les atouts et les limitations de cette procédure sont discutées à partir de simulations numériques.

A l’origine, l’emploi d’amortisseurs *squeeze film* dans le domaine des machines tournantes se justifiait par l’exigence d’amélioration du comportement vibratoire du système mécanique, afin de le rendre davantage efficace. Depuis vingt ans environ, grand nombre d’études vise non seulement la recherche d’efficacité, mais tente également de trouver des solutions pour optimiser l’application du SqF. De différentes configurations de l’amortisseur et des stratégies de contrôle se sont ainsi développées. Ce contexte motive la réalisation du sixième et dernier chapitre de ce mémoire, dans lequel nous mettons en avant une nouvelle méthode d’optimisation des caractéristiques de l’amortisseur. Nous présentons ensuite le banc d’essai en voie de construction au sein de notre laboratoire, qui sera dédié à la vérification expérimentale du potentiel de cette méthode et au recalage du modèle de comportement du SqF.

Ce doctorat s’attaque donc à des aspects différents de la problématique de l’application de l’amortisseur *squeeze film*, allant de la mécanique des fluides à la dynamique non linéaire des machines tournantes. Les simulations menées tout au long de ce travail ciblent plutôt l’étude de la performance de machines tournantes dans le cadre des moteurs à réaction. Cela ne signifie pas pour autant que nos contributions ne pourront pas être exploitées dans d’autres domaines où le SqF joue un rôle important.

Chapitre 2

Phénoménologie et modélisation du *squeeze film*

Comme souligné dans le chapitre précédent, l'étude de la dynamique d'un système comportant des SqF comprend deux parties principales : la modélisation du comportement du fluide amortisseur et la simulation de la dynamique de l'ensemble mécanique. Dans ce chapitre, les points les plus pertinents dans le cadre de la première de ces deux parties sont abordés. Nous exposons ainsi la phénoménologie intervenant dans le comportement du SqF et les modèles développés jusqu'à présent pour en tenir compte. Nous présentons également la justification physique des différentes hypothèses que l'on doit effectuer lors de la modélisation.

2.1 Théorie classique de la lubrification : l'équation de Reynolds

L'application de la loi de Newton du mouvement à un élément fluide infinitésimal satisfaisant l'hypothèse du *continuum* [94] aboutit à l'équation de mouvement de Cauchy,

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_j} \quad (2.1)$$

où la dérivée matérielle, $\frac{DV_i}{Dt}$, comprend les termes suivants [52],

$$\underbrace{\frac{DV_i}{Dt}}_{\text{accélération totale}} = \underbrace{V_1 \frac{\partial V_i}{\partial X_1} + V_2 \frac{\partial V_i}{\partial X_2} + V_3 \frac{\partial V_i}{\partial X_3}}_{\text{partie convective}} + \underbrace{\frac{\partial V_i}{\partial t}}_{\text{partie instationnaire}} \quad (2.2)$$

avec,

ρ : masse volumique du fluide,

$\{V\} \equiv \mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}^t$: vecteur vitesse de la particule fluide,

$\{f\} \equiv \mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3\}^t$: vecteur des forces de volume,

$[\tau]$: tenseur des contraintes de Cauchy,

$\{X\} = \{X_1, X_2, X_3\}$: système de coordonnées spatiales dans la configuration actuelle de l'élément fluide.

La partie instationnaire correspond à l'accélération locale d'une particule fluide et est nulle pour des écoulements en régime permanent. L'accélération convective représente le changement de vitesse résultant du transport de la particule d'un emplacement à un autre où la vitesse est différente.

Pour un fluide dit **newtonien**, l'équation constitutive exprime une relation linéaire entre les contraintes et le taux de déformation :

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + K_{ijmn}D_{mn} \quad (2.3)$$

Le terme $-p\delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, correspond à la partie sphérique des contraintes. La grandeur p est approchée par la **pression thermodynamique**, laquelle est liée à la masse volumique et à la température par une équation d'état. Bien que des quantités thermodynamiques ne soient définies que pour des états d'équilibre, ce qui n'est pas obligatoirement le cas d'un fluide en mouvement, les erreurs dues à cette approximation sont négligeables, pourvu que le temps de relaxation des molécules du fluide soit faible devant l'échelle temporelle de l'écoulement [81].

Dans la partie anisotropique, $[\sigma]$, du tenseur de Cauchy, on identifie le tenseur **taux de déformation** :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial X_j} + \frac{\partial V_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.4)$$

Puisque $[\sigma]$ est un tenseur symétrique, K_{ijmn} doit l'être également. Si l'on suppose en plus que le milieu est isotropique, on démontre que deux termes seulement de K_{ijmn} sont non nuls et que l'équation constitutive peut s'écrire :

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + \lambda D_{mm}\delta_{ij} \quad (2.5)$$

où μ et λ sont deux constantes scalaires appelées les coefficients de Lamé, et $D_{mm} = \nabla \cdot \mathbf{V}$ est le taux de déformation volumétrique.

En définissant la pression moyenne, $-\bar{p}$, comme la moyenne des termes diagonaux de $[\tau]$, lorsque l'on pose $i = j$, la somme sur les indices répétés de 2.5 fournit :

$$p - \bar{p} = \kappa \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (2.6)$$

où $\kappa = \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)$ est une constante de proportionnalité appelée coefficient de viscosité volumique. Dans la majorité des problèmes de la mécanique des fluides, l'hypothèse de Stokes,

$$\frac{2}{3}\mu + \lambda = 0 \quad (2.7)$$

s'avère correcte [52]. L'équation constitutive d'un fluide newtonien 2.5 devient donc :

$$\tau_{ij} = - \left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (2.8)$$

où la constante μ est appelée la **viscosité dynamique** du fluide.

En reportant l'équation constitutive d'un fluide newtonien 2.8 dans l'équation de mouvement de Cauchy 2.1, on obtient l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial X_i} + f_i + \frac{\partial}{\partial X_j} \left[2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{V}) \delta_{ij} \right] \quad (2.9)$$

Bien que la viscosité soit une fonction de la pression et de la température qui caractérisent l'état thermodynamique du fluide, dans la théorie classique de la lubrification, cette propriété est supposée **constante**. Sous cette hypothèse, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial X_i} + f_i + \mu \left[\nabla^2 V_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial X_i} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] \quad (2.10)$$

où $\nabla^2 V_i = \frac{\partial^2 V_i}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial X_3^2}$ est le laplacien de V_i .

Pour des fluides **incompressibles**, le taux de déformation volumétrique, $\nabla \cdot \mathbf{V}$, est nul. Si l'on suppose encore que le vecteur des forces de volume, \vec{f} , est négligeable, l'équation précédente se ramène à :

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial X_i} + \mu \nabla^2 V_i \quad (2.11)$$

L'écoulement d'un fluide newtonien, incompressible et isovisqueux est entièrement décrit par l'équation de Navier-Stokes simplifiée, équation 2.11, et par l'équation de continuité :

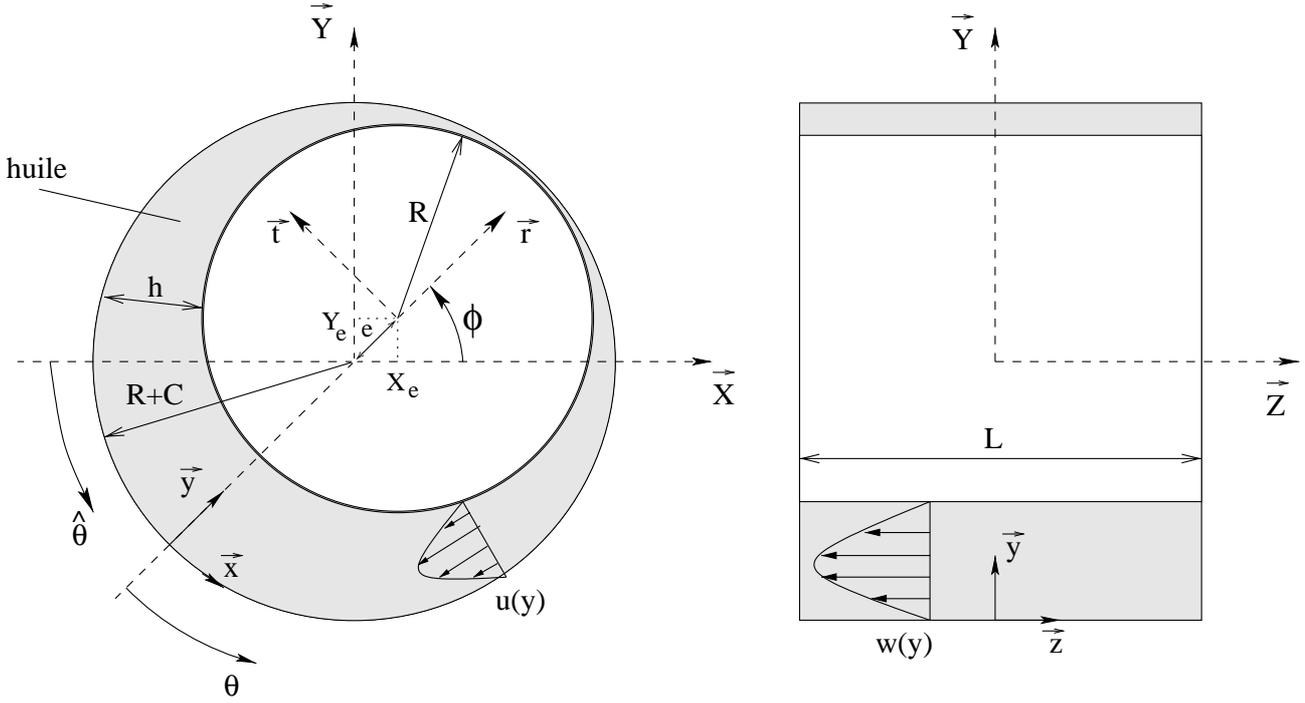


FIG. 2.1: Géométrie et système de repérage d'un SqF

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \stackrel{\text{incompr.}}{\Rightarrow} \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.12)$$

Les équations 2.11 et 2.12 peuvent être simplifiées davantage pour le cas d'un SqF cylindrique ou d'un palier hydrodynamique, au travers d'une analyse dimensionnelle. Pour ce faire, nous adopterons le système de repérage de la figure 2.1, qui présente une vue en coupe de l'amortisseur. Afin d'uniformiser notre notation par rapport à celle communément utilisée dans la littérature scientifique consacrée au SqF, nous désignerons désormais $\{V_1, V_2, V_3\} = \{u, v, w\}$ et $\{X_1, X_2, X_3\} = \{x, y, z\}$. Suivant la référence [170], on définit les variables adimensionnelles suivantes :

$$\hat{x} = \frac{x}{R}; \hat{y} = \frac{y}{C}; \hat{z} = \frac{z}{R}; \hat{u} = \frac{u}{V_c}; \hat{v} = \frac{v}{V_c} \frac{R}{C}; \hat{w} = \frac{w}{V_c}; \hat{p} = Re \frac{C}{R} \frac{p}{\rho V_c^2}; \hat{t} = \omega t$$

où,

R : rayon du SqF,

C : jeu radial du SqF,

V_c : vitesse caractéristique du système,

$Re = \rho V_c C / \mu$: nombre de Reynolds,

ω : fréquence caractéristique d'oscillation du SqF.

Il convient de préciser que, lorsque le palier décrit des orbites circulaires et centrées, la vitesse caractéristique du système devient $V_c = e\omega$, où e correspond à l'excentricité du SqF (voir figure 2.1). En notant $\varepsilon = e/C$ l'excentricité adimensionnelle, le nombre de Reynolds s'écrit dans ce cas : $Re = \rho\varepsilon C^2\omega/\mu$. En supposant que l'amplitude des orbites n'est pas très faible, on a $\varepsilon = O(C)$ et le nombre de Reynolds se ramène à $Re = \rho C^2\omega/\mu$.

L'introduction des variables adimensionnelles dans l'équation de Navier-Stokes simplifiée 2.11 conduit à [170] :

$$\begin{aligned} \frac{\rho C^2\omega}{\mu} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{C}{R} (\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{u}) &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{C}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} \right) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \\ \left(\frac{C}{R}\right)^2 \left[\frac{\rho C^2\omega}{\mu} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{C}{R} (\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{v}) - \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} - \left(\frac{C}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{z}^2} \right) \right] &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\rho C^2\omega}{\mu} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{C}{R} (\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{w}) &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \left(\frac{C}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2} \right) + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dans les applications des SqF et des paliers hydrodynamiques, le rapport $\frac{C}{R}$ est de l'ordre de 10^{-3} [171]. Cela permet, en supposant que toutes les quantités des équations ci-dessus sont de l'ordre de l'unité, d'en enlever tous les termes multipliés par $\left(\frac{C}{R}\right)^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\rho C^2\omega}{\mu} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{C}{R} (\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{u}) &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} &= 0 \\ \frac{\rho C^2\omega}{\mu} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{C}{R} (\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{w}) &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dans la théorie classique de la lubrification, les termes d'inertie sont considérés comme négligeables. Pour $\frac{C}{R} \rightarrow 0$, on conclut à la lumière de l'équation 2.14, que cette approximation est raisonnable si l'on admet que $\omega = O(V_c/R)$ et que Re est borné [170]. Dans ce cas, en reprenant l'utilisation des variables dimensionnelles, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.17)$$

La variable h étant l'épaisseur du film d'huile illustrée dans la figure 2.1, la double intégration des équations 2.15 et 2.17 suivant y , avec les conditions aux limites,

$$\begin{aligned} u = U_1 \quad w = W_1 \quad \text{en } y = h \\ u = U_2 \quad w = W_2 \quad \text{en } y = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

fournit les profils de vitesse classiques de la lubrification [57]¹ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + \frac{y}{h} (U_1 - U_2) + U_2 \\ w &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - hy) + \frac{y}{h} (W_1 - W_2) + W_2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

On identifie dans ces expressions l'écoulement dû à l'**effet de Poiseuille**, induit par les différentiels de pression $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial z}$, et l'écoulement dû à l'**effet de Couette**, associé aux vitesses U_1 , U_2 , W_1 et W_2 des surfaces.

En intégrant l'équation de continuité 2.12 suivant y , après l'introduction des profils de vitesse 2.19, on arrive à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12\mu \left[\frac{(U_1 - U_2)}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{(W_1 - W_2)}{2} \frac{\partial h}{\partial z} + v \Big|_{y=0}^{y=h} \right] \quad (2.20)$$

Sachant que,

$$v \Big|_{y=0}^{y=h} = \frac{\partial h}{\partial t} + (U_2 - U_1) \frac{\partial h}{\partial x} + (W_2 - W_1) \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.21)$$

l'équation 2.20 devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12\mu \left[\frac{(U_2 - U_1)}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{(W_2 - W_1)}{2} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} \right] \quad (2.22)$$

1. Le signe des termes U_2 et W_2 dépend du système de repérage adopté et du sens de ces vitesses par rapport à U_1 et W_1 . Nous définissons ici U_2 et W_2 dans le même sens de U_1 et W_1 , contrairement à d'autres références

ce qui correspond à l'**équation de Reynolds** pour un fluide incompressible et isovisqueux. Il est intéressant de remarquer que la suppression des effets d'inertie rend le problème stationnaire d'un point de vue hydrodynamique, puisque la prise en compte d'un éventuel déphasage temporel entre les variations de l'épaisseur et du champ de pression n'est pas possible [99].

Une forme plus générale de l'équation de Reynolds peut être obtenue si l'on revient sur les hypothèses d'incompressibilité et d'isoviscosité faites auparavant [57] :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \left[\frac{(U_2 - U_1)}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + \frac{(W_2 - W_1)}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \right] \quad (2.23)$$

Compte tenu du fait que les vitesses relatives des surfaces dans le plan du film d'huile, $U_2 - U_1$ et $W_2 - W_1$, sont nulles dans le cas d'un amortisseur *squeeze film*, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (2.24)$$

Pour un SqF cylindrique, délimité par des surfaces rigides et aligné, c'est à dire dont l'axe est parallèle à celui de l'arbre, l'épaisseur h du film d'huile s'écrit :

$$h = C + e \cos(x/R) = C(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (2.25)$$

Cependant, la déflexion de la structure, notamment dans des rotors montés en porte-à-faux, peut rendre l'épaisseur du film fonction de la coordonnée axiale, z , également [35]. L'effet du désalignement devient plus important lorsque le balourd, l'amplitude de l'orbite et le rapport de la longueur, L , sur le jeu radial, C , du SqF augmentent [35]. Le désalignement peut engendrer une élévation des efforts transmis au bâti, les forces hydrodynamiques calculées par le modèle de SqF aligné étant dans ce cas sous-estimées [35]. GUHA [58] prend en compte, outre le désalignement du SqF, la rugosité des surfaces délimitant le film d'huile. Il écrit l'équation de Reynolds en fonction de la densité de probabilité de l'épaisseur du film, h , laquelle est décrite par la somme d'un terme nominal et d'un terme aléatoire. Les simulations mettent en évidence la réduction de la capacité de chargement, l'augmentation de la fuite aux extrémités du SqF et l'amplification du moment dû au désalignement lorsque la rugosité devient plus importante [58].

Pour un fluide incompressible et isovisqueux, en négligeant pour l'instant le phénomène de cavitation, l'équation de Reynolds donnée par l'expression 2.24 est linéaire. Elle ne possède tout de même pas de solutions analytiques. Par conséquent, le calcul du champ de pression doit s'effectuer soit en faisant des hypothèses supplémentaires afin de la simplifier soit à l'aide de méthodes semi-analytiques ou numériques. Les simplifications les plus courantes s'appuient sur les approximations **palier court** et **palier long**. Elles consistent à négliger l'écoulement du fluide dans les directions circonférentielle et axiale, respectivement, de manière à réduire le nombre de variables indépendantes du problème. Il est important de souligner que ces approximations peuvent s'appliquer directement à l'équation de

Navier-Stokes simplifiée 2.14. Lorsque l'amortisseur n'est ni long ni court, il est dit **fini**. Ces simplifications ainsi que d'autres techniques de résolution de l'équation de Reynolds sont exposées en détails à la fin de ce chapitre.

La validité de l'équation de Reynolds 2.24 est restreinte aux hypothèses explicitées plus haut. Cependant, il existe des SqF auxquels ces hypothèses, ou une partie d'entre elles, ne s'appliquent pas. Ainsi, nous présentons ci-après d'autres formulations afin de situer clairement l'état de l'art de la modélisation du SqF et d'analyser d'autres phénomènes pouvant être observés lors de l'application de tels amortisseurs.

2.2 Formulations alternatives à l'équation de Reynolds

2.2.1 Fluides amortisseurs non newtoniens

L'hypothèse que le fluide est newtonien peut être mise en défaut dans le cas de quelques lubrifiants modernes auxquels sont ajoutés des chaînes de polymères afin d'améliorer leurs propriétés sous différentes conditions d'opération [86][15][187]. Le comportement non linéaire qui en résulte change sensiblement les caractéristiques du fluide, d'où la nécessité de théories tenant compte des effets non newtoniens.

Outre la non linéarité engendrée par l'ajout d'additifs, des fluides ayant un comportement non newtonien peuvent être utilisés à dessein comme des fluides intelligents. Il est le cas des fluides électro-rhéologiques, dont les propriétés changent lors de l'application d'un champ électrique. Cette caractéristique permet l'utilisation du SqF en tant qu'un amortisseur actif, ce qui explique l'intérêt porté sur ce type de fluide.

2.2.1.1 Fluide avec des couples de contraintes

Dans la dérivation de l'équation de mouvement de Cauchy 2.1, les efforts extérieurs exercés sur l'élément fluide sont schématisés, suivant le postulat de Cauchy [83], par une répartition surfacique de forces. Lors de l'application de la loi de Newton, la densité de forces massiques est également prise en compte. Une schématisation différente fondée sur la théorie du *microcontinuum* de Stokes permet d'introduire, outre les forces massiques et surfaciques, des couples de contraintes. Pour un fluide incompressible, cela conduit à l'équation suivante [86] :

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{f} - \nabla p + \frac{1}{2} \nabla \times (\rho \Psi) + (\mu - \eta \nabla^2) \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.26)$$

où Ψ est le vecteur densité de couple et η est propriété constante du fluide associée aux couples de contraintes.

En négligeant le vecteur densité de couple et les forces de volume, l'application à l'équation 2.26 d'une procédure analogue à celle menée lors de la simplification de l'équation de Navier-Stokes fournit

[86] :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2\mu} \left\{ y^2 - hy + 2l^2 \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right\} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 w &= \frac{1}{2\mu} \left\{ y^2 - hy + 2l^2 \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right\} \frac{\partial p}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Ces profils de vitesse, lorsque reportés dans l'équation de continuité 2.12, conduisent à la déduction d'une équation de Reynolds modifiée donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f(h, l) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[f(h, l) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.28}$$

où,

$$f(h, l) = h^3 - 12hl^2 + 24l^3 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right)$$

$$l = \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^{1/2}$$

En résolvant l'équation 2.28 par différences finies, Lin [86] simule la performance d'un SqF décrivant une orbite linéique. Il en conclut que les couples de contraintes développés grâce à la présence d'additifs dans le fluide augmente la capacité de chargement de l'amortisseur.

2.2.1.2 Fluides viscoélastiques

L'écoulement décrit par l'équation de Reynolds a une nature quasi-stationnaire. En d'autres termes, le fluide n'a pas de mémoire et les effets temporels ne sont introduits au problème que par les conditions aux limites, à savoir les vitesses des surfaces délimitant l'amortisseur. Cela implique une réponse instantanée du fluide lorsqu'il est soumis à des contraintes. Or les lubrifiants additivés peuvent contenir des polymères ayant un poids moléculaire assez important, de façon à ce que leur structure mette un certain temps à s'ajuster à la suite d'une application soudaine de contraintes [176]. Ce temps, appelé temps de relaxation, met en évidence le phénomène d'élongation du fluide dans l'écoulement caractérisant un comportement viscoélastique. L'importance de ce phénomène est associé au nombre de Deborah [183] :

$$De = \frac{\vartheta}{t_{sq}} \quad (2.29)$$

où ϑ est le temps de relaxation et t_{sq} un temps caractéristique du processus d'écrasement du film d'huile. Si le nombre de Deborah est faible, les effets de cisaillement prédominent dans l'écoulement, tandis que pour un nombre de Deborah important, ce sont les effets d'élongation qui régissent l'écoulement.

L'équation constitutive utilisée pour prendre en compte les phénomènes viscoélastiques relatifs au comportement du fluide est celle de Lodge :

$$[\sigma](t) = \int_0^\infty \frac{\mu}{\vartheta^2} e^{-s/\vartheta} [B_t](t-s) ds \quad (2.30)$$

avec,

$s = t - \tau$: temps passé,

$B_t(\tau) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} + \frac{\partial x_j}{\partial x_{0i}} \right) - \delta_{ij}$: tenseur de déformation de Finger,

$\{x\}$: vecteur position à l'instant présent t ,

$\{x_0\}$: vecteur position à l'instant passé τ ,

$\frac{\mu}{\vartheta^2} e^{-s/\vartheta}$: fonction mémoire.

Pour le cas de mouvements oscillatoires à faible amplitude, l'équation constitutive ci-dessus peut s'écrire sous la forme [181] :

$$[\sigma] = 2\mu^*[D] \quad (2.31)$$

où $\mu^* = \mu - i\frac{G}{\omega}$ correspond à la viscosité complexe, G étant le module de cisaillement du fluide et ω la fréquence.

Les résultats expérimentaux obtenus par TICHY et WINER [183] pour le problème d'écrasement d'un film d'huile entre deux disques parallèles mettent en évidence l'influence de la combinaison des effets viscoélastiques et d'inertie sur la capacité de chargement de l'amortisseur. Ils en concluent que le comportement viscoélastique des solutions à base d'eau, de glycérine et de polymères provoque une augmentation de la capacité de chargement du fluide, tandis que les solutions à base de pétrole présentent plutôt une tendance à faire chuter la capacité de chargement. Ces conclusions, a priori incohérentes, sont vraisemblablement une conséquence des phénomènes inhabituels de résonance en pression et d'inflexion du profil de vitesse, prédits pour certaines combinaisons des nombres de Deborah et de Reynolds [181][176][177].

TICHY [176] resume le comportement de l'amortisseur SqF de la manière suivante : selon la théorie classique de la lubrification, seulement la vitesse du fluide (qui est en phase avec la vitesse des frontières de l'amortisseur) génère les forces hydrodynamiques ; la prise en compte des effets élastiques rend ces forces fonction de la déformation du fluide également ; et enfin, si le nombre de Reynolds est important, les effets d'inertie introduisent une dépendance additionnelle des efforts hydrodynamiques par rapport à l'accélération du fluide.

2.2.1.3 Fluides rhéofluidifiants

Pour un fluide newtonien, la relation entre les contraintes et le taux de déformation s'exprime par une fonction linéaire, équation 2.8. Cependant, l'addition de polymères dans le fluide, ce qui permet d'en augmenter fortement la viscosité apparente, modifie cette relation en la rendant non linéaire. En effet, une chute de cette viscosité apparente est observée lorsque le fluide est soumis à des taux de déformation importants ($10^6 - 10^8 \text{ s}^{-1}$) [15]. Dans ce cas, le fluide est dit rhéofluidifiant. Par contre, si la viscosité s'accroît avec l'augmentation du taux de déformation, le fluide est appelé rhéoépaississant. L'équation constitutive d'un fluide rhéofluidifiant peut s'écrire sous la forme d'une loi de puissance du type [187] :

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2 \left\{ m \left| \sqrt{2([D] : [D])} \right|^{n-1} \right\} D_{ij} \quad (2.32)$$

où n et m sont des constantes empiriques, n correspondant à l'indice de rhéofluidifiante. Bien que cette relation ne puisse pas décrire à la fois les zones à faible et à fort taux de déformation du fluide, elle représente l'une des formes non linéaires les plus simples [15].

Les profils de vitesse non inertiels du SqF, obtenus pour $m = 1$, s'écrivent [15] :

$$\begin{aligned} u &= 2^{(n+1)/n} \bar{u} + \frac{2n+1}{n+1} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left| \frac{1}{2} - \frac{y}{h} \right|^{(n+1)/n} \right] \\ w &= 2^{(n+1)/n} \bar{w} + \frac{2n+1}{n+1} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left| \frac{1}{2} - \frac{y}{h} \right|^{(n+1)/n} \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

où \bar{u} et \bar{w} sont les vitesses moyennes de l'écoulement induit par l'effet de Poiseuille. En supposant que le fluide est incompressible, on en déduit une équation similaire à celle de Reynolds [15] pour décrire le champ de pression du film rhéofluidifiant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ \frac{2(2n+1)}{n} \left\{ (\mu_{y=h} + \mu_{y=0}) \frac{\partial h}{\partial t} - h \left[\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (\mu_{y=h} + \mu_{y=0}) + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} (\mu_{y=h} + \mu_{y=0}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

On observe que l'équation 2.34 permet de prendre en compte la variation de la viscosité le long de l'épaisseur du film, ce qui découle du comportement non newtonien du fluide. Les simulations de BOU SAID et EHRET [15] mettent en évidence la réduction de la capacité du film à supporter des charges dynamiques, engendrée par l'effet de rhéofluidifiante.

2.2.1.4 Fluides électro-rhéologiques

Les fluides électro-rhéologiques sont constitués de particules diélectriques dissoutes dans l'huile. Lorsqu'un champ électrique est appliqué, ces particules s'arrangent entre les électrodes sous la forme de chaînes, ce qui provoque une augmentation de la viscosité apparente du fluide [100]. Si le champ électrique est assez important, le fluide prend l'allure d'une sorte d'époxyde rigide [179]. Les fluides électro-rhéologiques sont relativement récents et leur comportement est régi par le modèle de plastique de Bingham [177] :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2 \left(\mu + \frac{\sigma_0}{\sqrt{2[D] : [D]}} \right) D_{ij} && \text{pour } |[\sigma]| > \sigma_0 \\ D_{ij} &= 0 && \text{pour } |[\sigma]| < \sigma_0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

où $|[\sigma]| = \sqrt{1/2[\sigma] : [\sigma]}$ est l'amplitude de la contrainte de cisaillement.

L'équation 2.35 montre que si l'amplitude de la contrainte de cisaillement devient supérieure au seuil σ_0 , le matériau se comporte comme un fluide newtonien. Autrement, le matériau reste rigide. La contrainte de cisaillement limite, σ_0 , est une fonction quadratique du champ électrique auquel le matériau est soumis [179] :

$$\sigma_0 = AE^2 \quad (2.36)$$

où le champ électrique, E , correspond à la différence de voltage entre les surfaces délimitant le SqF, divisée par l'épaisseur du film. La constante A représente la propriété électro-rhéologique du matériau. On constate ainsi que l'augmentation de la viscosité apparente de l'huile ne découle pas de la variation de la viscosité dynamique, μ , mais de l'élévation de la contrainte de cisaillement limite. Des mesures réalisées par MORISHITA et AN [100] à l'aide d'un viscosimètre tournant montrent que la viscosité apparente s'accroît sensiblement à des faibles taux de cisaillement suite à l'application d'un champ électrique. Cet accroissement est moins remarquable à des taux de cisaillement importants.

En négligeant la densité des forces massiques et les effets d'inertie, l'intégration de l'équation du mouvement de Cauchy, simplifiée pour le cas d'un SqF, aboutit à des profils de vitesse u et w tantôt paraboliques, comme ceux d'un fluide newtonien, tantôt constants [179]. Dans les deux cas de figure, les vitesses sont symétriques et les contraintes de cisaillement antisymétriques par rapport à $y = h/2$. Par conséquent, $\sigma_{yx}(\theta, h/2) = \sigma_{yz}(\theta, h/2) = 0$, si bien qu'un noyau rigide doit se former au voisinage de la mi-épaisseur du film, pourvu que $\sigma_0 \neq 0$ [179]. La modélisation du champ de pression du SqF

nécessite ainsi la décomposition du film en deux domaines, l'un relatif à la région fluide et l'autre correspondant au noyau flottant, l'interface entre les deux étant définie par $|\sigma| = \sigma_0$.

2.2.2 Effets d'Inertie

Les effets d'inertie ont fait l'objet de nombreuses études sur les amortisseurs *squeeze film* ainsi que sur d'autres applications hydrodynamiques. Compte tenu de l'équation 2.2, ces effets sont décomposés en deux termes distincts : l'inertie dite temporelle, relative à l'accélération locale du fluide, et l'inertie appelée convective, associée à l'accélération advective du fluide. En analysant l'équation 2.14, on s'aperçoit que les effets d'inertie deviennent pertinents lorsque $\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} > 1$ et/ou $Re \frac{C}{R} > 1$. Ces conditions reflètent le cas d'amortisseurs ayant des fluides à faible viscosité, tels que des tuyaux d'échangeurs de chaleur entourés d'eau [139], et/ou le cas de paliers incorporés dans des systèmes caractérisés par des fréquences d'oscillation élevées, comme des rotors à hautes vitesses [178].

Si le traitement analytique de l'équation de Reynolds bidimensionnelle pose des difficultés considérables, lorsque les termes inertiels sont gardés dans la formulation du comportement du SqF, la solution du problème se complexifie davantage. Trois cas extrêmes peuvent être analysés indépendamment selon la valeur du rapport $\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} / Re \frac{C}{R} \equiv R\omega / V_c$, lequel permet d'estimer l'importance relative des effets d'inertie temporelle et d'inertie convective.

2.2.2.0.1 Cas 1 : $R\omega / V_c \rightarrow \infty$. Lorsque le SqF subit des mouvements rapides et de faibles amplitudes, tels que $R\omega \gg V_c$, l'accélération advective est négligeable devant l'accélération locale [180]. Les effets dus à l'inertie convective peuvent ainsi être supprimés, et l'équation 2.14 devient linéaire. En variables primitives elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{2.37}$$

Une version bidimensionnelle de l'équation 2.37 peut être obtenue en négligeant soit l'écoulement axial (approximation palier long) soit l'écoulement circonférentiel (approximation palier court) dans le film. Pour $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ par exemple, l'équation de continuité pour un fluide incompressible devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.38}$$

Cette équation étant valable, on peut alors définir une fonction de courant, $\psi(x, y, t)$, telle que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.39)$$

l'équation 2.38 étant ainsi automatiquement satisfaite.

TICHY et MODEST [180][99] et BRENNEN [17] reformulent l'équation du mouvement en introduisant les fonctions de courant. Ils parviennent à développer des solutions pour la version bidimensionnelle du problème, en supposant que le système subit des petites oscillations harmoniques. L'étude de MODEST et TICHY [99] a été reprise récemment par ZHANG [202], qui l'a généralisée de manière à permettre la prise en compte de mouvements périodiques.

Afin d'étudier les effets d'inertie pour un amortisseur fini, c'est à dire sans négliger aucune des composantes de l'écoulement dans le film, SAN ANDRÉS et VANCE [150][151] simplifient l'équation 2.37 en l'intégrant selon l'épaisseur du film, de manière à en supprimer la vitesse v^2 . Ils utilisent ensuite une technique de perturbation pour en déduire des solutions approximatives pour des mouvements à faible amplitude, circulaires et centrés [150] et autour d'une position d'équilibre statique excentrée [151]. L'équation 2.37 étant linéaire, ZHANG et ROBERTS [204] généralisent la formulation de SAN ANDRÉS et VANCE [150] à l'aide du principe de la superposition, en rajoutant une composante radiale à l'orbite centrée, auparavant circulaire.

Les résultats des travaux explicités ci-dessus sont quantitativement similaires et conduisent à des conclusions qualitativement consensuelles : les effets de l'inertie temporelle diminuent lorsque le nombre $\frac{\rho C^2 \omega}{\mu}$ s'accroît; ils restent toutefois quasiment constants dans la plage $0 < \frac{\rho C^2 \omega}{\mu} < 25$. Cette dernière constatation permet de déduire des expressions analytiques pour le champ de pression, valables dans la plage en question, en prenant la limite asymptotique $\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} \rightarrow 0$ [99][150][151].

2.2.2.0.2 Cas 2 : $R\omega/V_c \rightarrow 0$. La condition $R\omega \ll V_c$ est vérifiée dans le cadre de paliers hydrodynamiques en régime stationnaire [170]. Ceux-ci ne décrivant pas de mouvements de translation, l'accélération locale est nulle. Par conséquent, les effets d'inertie résultent uniquement de l'accélération advective engendrée par l'entraînement du fluide au niveau des surfaces solides, à condition que l'épaisseur du film varie sur la circonférence. Ce cas de figure présente très peu d'intérêt pour l'étude d'amortisseurs *squeeze film* et ne sera pas discuté davantage.

2.2.2.0.3 Cas 3 : $R\omega/V_c \approx 1$. L'équation régissant cette troisième condition est la plus complexe des trois cas limites, puisque aucun terme inertiel ne peut être retranché de l'équation 2.14. Dans la littérature concernant la prise en compte simultanée des effets d'inertie temporelle et convective, deux approches ont été développées : la perturbation sur le nombre de Reynolds et la moyenne du gradient de pression selon l'épaisseur du film.

Dans la première approche, la vitesse caractéristique du système est définie comme $V_c = R\omega$, ce qui permet de réécrire l'équation 2.14 de la manière suivante :

2. Cette stratégie, nommée méthode du *momentum*, sera détaillée ci-après

$$\begin{aligned}
Re \frac{C}{R} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{u} \right) &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \\
\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} &= 0 \\
Re \frac{C}{R} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{w} \right) &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

REINHARDT et LUND [129] linéarisent ces équations en définissant des solutions perturbées au premier ordre qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\hat{p} &= \hat{p}^{(0)} + Re \frac{C}{R} \hat{p}^{(1)} \\
\hat{u} &= \hat{u}^{(0)} + Re \frac{C}{R} \hat{u}^{(1)} \\
\hat{v} &= \hat{v}^{(0)} + Re \frac{C}{R} \hat{v}^{(1)} \\
\hat{w} &= \hat{w}^{(0)} + Re \frac{C}{R} \hat{w}^{(1)}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

La résolution de l'équation 2.40 pour les termes d'ordre 0 aboutit à l'équation de Reynolds classique de la lubrification. Une version similaire de cette équation est obtenue pour les termes d'ordre 1. En admettant des mouvements de petite amplitude, REINHARDT et LUND [129] parviennent à déterminer, suite à des manipulations algébriques complexes, la contribution inertielle du fluide au champ de pression. Outre la mise en évidence des effets de l'inertie sur les forces hydrodynamiques, leurs résultats conduisent à une deuxième conclusion très importante : les profils de vitesse $u(y)$ et $w(y)$ ne sont que légèrement affectés par l'inertie du fluide. Bien que restreinte à des nombres de Reynolds faible, cette conclusion a permis à plusieurs études ultérieures de légitimer l'approximation consistant à découpler les contributions inertielle et visqueuse du fluide lors du calcul des forces du SqF. Dans leur étude sur la prise en compte de l'inertie temporelle, ZHANG et ROBERTS [204] démontrent toutefois que cette hypothèse est mise en défaut pour $Re > 20$.

La principale limitation de la résolution de l'équation 2.40 au travers de techniques de perturbation concerne la linéarisation du champ de pression au voisinage d'une position d'équilibre statique. Les amortisseurs *squeeze film* subissent souvent des mouvements qui atteignent des amplitudes assez importantes pour mettre en relief son comportement non linéaire, notamment lors du passage des vitesses critiques. Dans ce cas, la perturbation devrait être poussée à des ordres supérieurs à 1, ce qui rendrait le traitement du problème excessivement laborieux.

La deuxième approche pour résoudre l'équation 2.14 consiste à moyenniser le gradient de pression sur l'épaisseur du film, de manière à éliminer la dépendance du problème dans la vitesse v . Pour

ce faire, trois méthodes ont été développées : la méthode itérative, la méthode du *momentum* et la méthode énergétique.

La méthode itérative a été proposée par KUZMA [82] pour entreprendre l'analyse de la version bidimensionnelle de l'équation 2.14, qui peut représenter aussi bien le cas d'un palier court que celui d'un palier long. Elle peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{2.42}$$

Les conditions aux limites du problème traité par KUZMA [82] sont :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = \frac{h}{2} \quad \text{profil de vitesse symétrique par rapport à } y\tag{2.43}$$

$$u = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad \text{vitesse nulle au niveau de la piste extérieure du film}$$

Dans la méthode itérative originelle, le profil de vitesse purement visqueux, équation 2.19, et ses dérivées temporelle et spatiales sont introduits dans l'équation 2.42. La double intégration selon y à l'aide des conditions aux limites 2.43 fournit un profil de vitesse amélioré, qui doit respecter la condition de continuité suivante [82] :

$$\int_0^h u dy = - \int \frac{dh}{dt} dx\tag{2.44}$$

L'évaluation des intégrales ci-dessus aboutit à une expression pour le gradient de pression moyen dans la direction y , dont l'intégration permet d'obtenir le champ de pression dans le film. Il est intéressant de faire remarquer que le profil de vitesse amélioré trouvé par KUZMA est essentiellement visqueux au voisinage des parois [82]. Compte tenu de l'équation constitutive d'un fluide newtonien, équation 2.8, on en conclut que les contraintes de cisaillement au niveau des parois du SqF sont dominées par les effets visqueux. Cette constatation est corroborée par les résultats de SAN ANDRES et VANCE [150], qui démontrent que l'influence de l'inertie temporelle (ils négligent l'inertie convective dans leur analyse) sur le gradient de vitesse au niveau des parois est négligeable pour $Re < 10$. Le principal inconvénient de la méthode itérative, souligné par SZERI, RAIMONDI et GIRON-DUARTE [171], réside dans la difficulté de l'appliquer à un écoulement tridimensionnel dans une géométrie cylindrique.

Contrairement à la méthode itérative, la méthode du *momentum* peut être employée pour résoudre l'équation 2.14 complète. Il s'agit de calculer la moyenne sur l'épaisseur du film des termes visqueux et inertiels de l'équation du mouvement de la manière suivante [171] :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\mu}{h} \int_0^h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy - \frac{\rho}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla u \right) dy \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\mu}{h} \int_0^h \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy - \frac{\rho}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla w \right) dy\end{aligned}\tag{2.45}$$

En réalisant la même opération pour l'équation de continuité, on obtient [149] :

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0\tag{2.46}$$

où,

$$q_x = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}; \quad q_z = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} : \text{taux d'écoulement surfaciques locaux.}$$

Les intégrales des équations 2.45 et 2.46 peuvent être évaluées pour des profils de vitesse $u(y)$ et $w(y)$ prédéfinis. Il en résulte un système d'équations différentielles dont la résolution donne le champ de pression du SqF.

En supposant que les profils de vitesse visqueux, équation 2.19, ne sont pas sensiblement affectés par les effets d'inertie, SZERI, RAIMONDI et GIRON-DUARTE [171] déduisent au travers de la méthode du *momentum* une équation similaire à celle de Reynolds, qui comporte des termes d'accélération dans le second membre. Ils la résolvent numériquement suite à l'application d'une perturbation sur les vitesses et les accélérations du SqF, ce qui leur permet de construire des graphiques des coefficients d'inertie et d'amortissement fonctions de l'excentricité, pour des différentes valeurs de L/R . Cependant, en linéarisant le problème, ils négligent intrinsèquement les effets de l'inertie convective.

SAN ANDRÉS et VANCE [149] développent un code de calcul éléments finis pour déterminer les forces hydrodynamiques générées par les effets visqueux et inertiels du fluide. Aucune hypothèse n'est faite sur la forme des fonctions $u(y)$ et $w(y)$, le champ de pression étant calculé itérativement en utilisant comme point de départ la solution visqueuse classique. Ils proposent également une approximation valable pour $Re < 1$ et comparent les deux modèles pour le cas d'un SqF décrivant des orbites circulaires et centrées.

TICHY [178] utilise également les profils de vitesse non inertiels dans son analyse. Il emploie le principe de la superposition pour obtenir une solution approximative du champ de pression pour des orbites circulaires et centrées. Son modèle permet de prendre en compte, outre les effets d'inertie, la présence de joints aux extrémités de l'amortisseur. Ses résultats mettent en évidence l'amplification et le déphasage du pic de pression en raison des effets d'inertie.

LU et ROGERS [87] analysent le problème de l'écrasement d'un film d'huile entre deux plaques parallèles. Ils appliquent à la fois la méthode du *momentum* et une procédure similaire à la méthode

itérative pour déduire l'expression des vitesses $u(x, y, t)$ et $v(y, t)$, et des forces d'inertie et visqueuses qui en découlent. Compte tenu de l'analogie entre le problème des plaques parallèles et celui d'un segment d'arc infinitésimal de rayon de courbure négligeable, les forces d'un SqF court sont obtenues en intégrant la solution des plaques parallèles sur le périmètre du film. Ils parviennent ainsi à développer des formules analytiques pour les forces hydrodynamiques fonctions de la cinématique instantanée du SqF.

Le principe de la méthode énergétique diffère de celui de la méthode du *momentum* par la multiplication respective des équations du mouvement dans les directions x et z par les vitesses u et w , avant l'intégration selon l'épaisseur du film. Les gradients de pression moyens qui en résultent s'écrivent :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\int_0^h u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy}{\int_0^h u dy} - \rho \frac{\int_0^h u \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla u \right) dy}{\int_0^h u dy}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\int_0^h w \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy}{\int_0^h w dy} - \rho \frac{\int_0^h w \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla w \right) dy}{\int_0^h w dy}$$

Comme dans la méthode du *momentum*, le champ de pression est déterminé à l'aide de l'équation de continuité, suite au choix des profils de vitesse $u(y)$ et $w(y)$.

EL-SHAFEI [44][45] développe une stratégie équivalente à la méthode énergétique en employant l'équation de Lagrange et le théorème du transport de Reynolds, au lieu de résoudre 2.47. Il s'agit de calculer l'énergie cinétique associée au film d'huile de volume \mathcal{V}_{if} :

$$\mathcal{T}_{if} = \int_{\mathcal{V}_{if}} \frac{1}{2} \rho (\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{V}) d\mathcal{V} \tag{2.48}$$

Conformément à l'analyse d'ordre de grandeur menée lors de la déduction de l'équation classique de Reynolds, la vitesse v est C/R fois inférieure aux composantes u et w et peut être donc négligée [47]. Le terme $(\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{V})$ se réduit ainsi à $(u^2 + w^2)$. On applique ensuite l'équation de Lagrange :

$$\mathcal{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}_{if}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_{if}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{E}_{if}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{W}_{if}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \tag{2.49}$$

où,

$\mathcal{F} = \{f_r, f_t\}^t$: forces extérieures agissant sur le système mécanique, générées par le SqF;

$\mathbf{q} = \{e, \phi\}^t$: déplacements généralisés;

\mathcal{E}_{if} : énergie potentielle de déformation du fluide;

\mathcal{W}_{if} : fonction de dissipation de Rayleigh.

Il est important de faire remarquer que l'énergie potentielle de déformation, \mathcal{E}_{if} , est nulle au cas où le fluide soit considéré comme incompressible. En supposant d'autre part que les effets d'inertie n'affectent pas sensiblement les forces visqueuses, données par le terme $\frac{\partial \mathcal{W}_{if}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$, celles-ci peuvent être calculées indépendamment à partir de la résolution de l'équation de Reynolds. Les forces d'inertie sont alors obtenus de :

$$\mathcal{F}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}_{if}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_{if}}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.50)$$

Le calcul des dérivées de l'équation 2.50 requiert l'utilisation du théorème des dérivées temporelles d'intégrales de volume de Leibnitz. En notant $\Theta(\mathcal{L}, t)$ un tenseur d'ordre quelconque, $\mathcal{V}(t)$ un volume quelconque, stationnaire ou mouvant, et \mathcal{L} la position des particules à l'intérieur de ce volume, le théorème de Leibnitz s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \Theta(\mathcal{L}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \Theta}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}(t)} \Theta(\mathcal{L}, t) \mathbf{V}_A \cdot d\mathcal{A} \quad (2.51)$$

où $\mathcal{A}(t)$ est la surface délimitant $\hat{\mathcal{V}}(t)$ et \mathbf{V}_A correspond à la vitesse de la frontière. L'énergie cinétique \mathcal{T}_{if} étant celle d'un corps d'identité fixe, la surface du volume matériel \mathcal{V}_{if} change de position au cours du temps à mesure que le fluide s'écoule. Par conséquent, la vitesse \mathbf{V}_A est égale à la vitesse du fluide, \mathbf{V} , à la frontière. Le théorème de Leibnitz s'écrit donc pour l'énergie cinétique du film fluide :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}_{if}(t)} \mathcal{T}_{if}(\mathbf{q}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_{if}(t)} \frac{\partial \mathcal{T}_{if}}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}(t)} \mathcal{T}_{if} \mathbf{V} \cdot d\mathcal{A} \quad (2.52)$$

Cette forme du théorème de Leibnitz, relative à la dérivée temporelle d'un volume matériel, est appelée parfois théorème du transport de Reynolds [81]. En rapportant l'équation 2.52 dans 2.50, les forces d'inertie peuvent s'écrire [47] :

$$\mathcal{F}_i = \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (2.53)$$

avec,

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}_{vc}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_{vc}}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\mathbf{r} = \int_{\mathcal{A}_{vc}} \frac{\partial t_v}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathbf{V} \cdot d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_{vc}} t_v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot d\mathcal{A}$$

Le premier terme du second membre de l'équation 2.53 tient compte de l'énergie cinétique \mathcal{T}_{vc} du volume de contrôle coïncidant à un instant donné avec le volume matériel, tandis que le deuxième permet de prendre en compte le flux d'énergie cinétique à travers la frontière. La variable t_v correspond ainsi à l'énergie cinétique par unité de volume sur \mathcal{A}_{vc} , la surface délimitant le volume de contrôle.

EL-SHAFEI [44][45] utilise les profils de vitesse non inertiels pour obtenir, à l'aide de cette approche énergétique, des expressions analytiques pour les forces d'inertie produites par des amortisseurs court et long décrivant des orbites circulaires et centrées. L'inconvénient, d'un point de vue phénoménologique, de cette méthode concerne l'impossibilité d'examiner l'influence des effets d'inertie sur le champ de pression, car elle fournit directement les forces hydrodynamiques. En outre, aucune étude jusqu'à présent n'a réussi à l'appliquer à des amortisseurs finis.

SAN ANDRÉS et VANCE [149] soulignent que la stratégie des méthodes du *momentum* et énergétique d'estimer la moyenne des termes visqueux et inertiels de l'équation du mouvement à l'aide d'intégrales de type Von Karman n'est raisonnable que pour des nombres de Reynolds relativement faibles. Cette condition étant respectée, les inversions de direction de l'écoulement le long de l'épaisseur du film engendrées par les effets d'inertie ne constituent qu'une petite partie du profil de vitesse [149].

EL-SHAFEI et CRANDALL [47] étudient deux problèmes élémentaires qui, combinés, décrivent l'essence du mécanisme physique de l'écoulement dans un SqF. Ils comparent les résultats de la méthode du *momentum* et de la méthode énergétique à des solutions exactes. Ils en concluent que la dernière est la plus précise des deux et que l'hypothèse de profils de vitesse purement visqueux est acceptable pour $Re < 50$.

ZHANG, ELLIS et ROBERTS [203] discutent des contributions temporelle et convective obtenues à l'aide des méthodes du *momentum* et énergétique pour le cas d'un SqF court. Ils démontrent que les deux méthodes fournissent des résultats similaires, l'écart découlant principalement des différentes techniques d'intégration des équations du mouvement. En ce qui concerne l'inertie temporelle associée à des mouvements circulaires et centrés, les deux méthodes semblent en fournir les limites supérieure et inférieure. L'approximation énergétique s'avère plus précise pour des nombres de Reynolds faibles, tandis que la méthode du *momentum* s'approche davantage des résultats exacts lorsque ce paramètre s'accroît. La comparaison des effets de l'accélération advective est plus délicate, car un terme d'origine temporel y est additionné par la méthode énergétique. Une conclusion importante de leur étude concerne la dominance des effets d'inertie convective lorsque le SqF subit des mouvements de grande amplitude. Cependant, cette constatation ne s'applique qu'au cas d'amortisseurs non cavitants. Or, quand les amplitudes de translation du SqF sont importantes, le phénomène de cavitation est souvent observé.

L'application des méthodes du *momentum* et énergétique nécessite une hypothèse très forte, concernant le choix des fonctions $u(y)$ et $w(y)$. Ce choix est très important également dans la méthode itérative, laquelle requiert la définition des profils de vitesse initiaux pour en déduire des expressions améliorées. Comme souligné précédemment, l'utilisation des profils de vitesse purement visqueux doit aboutir à des résultats satisfaisants pour des écoulements à faible nombre de Reynolds (le seuil $Re < 10$ est souvent admis). Afin de rendre la modélisation des effets d'inertie plus précise, surtout pour des nombres de Reynolds importants, HAN et ROGERS [61] proposent l'emploi de profils de vitesse elliptiques à la place des profils paraboliques non inertiels. A la lumière de la solution exacte du problème

d'écrasement d'un fluide entre deux plaques parallèles, ils constatent que l'utilisation de fonctions elliptiques pour décrire $u(y)$ et $w(y)$ apporte une amélioration notamment à l'estimation de l'inertie temporelle.

QINGCHANG, WEI et JUN [121] développent un profil inertiel de la vitesse axial (hypothèse palier court) à partir de l'équation du mouvement dans la direction y :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (2.54)$$

Ils se servent ensuite de l'approximation énergétique pour obtenir des expressions pour les forces hydrodynamiques, en supposant que le SqF décrive des orbites circulaires et centrées. Ce faisant, ils parviennent à une relation non linéaire entre les forces de l'amortisseur et la viscosité du fluide. Bien que contraire aux résultats théoriques traditionnels, cette conclusion est corroborée, du moins en ce qui concerne la force tangentielle, par les mesures expérimentales de SAN ANDRÉS, MENG et YOON [147].

Malgré les nombreuses études théoriques et expérimentales à propos des effets combinés des inerties temporelle et convective du fluide sur le comportement d'amortisseurs *squeeze film*, ce sujet semble encore loin d'être résolu, d'autant plus que les modèles disponibles présentent toujours des points conflictuels [62][63].

2.2.3 Turbulence

Nous avons discuté dans la section précédente de la prise en compte des effets d'inertie du fluide, lesquels deviennent importants lorsque le nombre de Reynolds associé à l'écoulement du SqF augmente. Si ce nombre de Reynolds s'accroît davantage, l'écoulement peut perdre sa stabilité et devenir turbulent [170]. Des amortisseurs *squeeze film* ayant un jeu radial important, opérant avec un fluide de basse viscosité et incorporés dans des machines à très haute vitesse sont particulièrement susceptibles de développer des écoulements turbulents [170].

Les écoulements turbulents sont caractérisés par des fluctuations aléatoires, par la non linéarité, par l'importante diffusivité de moment et de chaleur, par la formation de vortex et par la forte capacité dissipative [81]. L'écoulement turbulent instantané obéit à l'équation de Navier-Stokes, mais il est difficile, voire impossible, de prédire son évolution de manière précise [81]. Il est ainsi plus convenable de le décrire en utilisant la décomposition de Reynolds, selon laquelle les vitesses et la pression sont représentées par la somme des moyennes temporelles locales et des termes de fluctuation stochastique :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \bar{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{v}} \\ p &= \bar{p} + \hat{p} \end{aligned} \quad (2.55)$$

avec,

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \mathbf{V}(t + \tau) d\tau \quad (2.56)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} p(t + \tau) d\tau \quad (2.57)$$

où t_0 doit être compris entre deux échelles de temps distinctes, l'une associée aux fluctuations lentes de l'écoulement et l'autre à des variations très rapides de nature stochastique [170]. Ce paramètre ne doit être ni trop grand, de manière à ce que la moyenne ne soit pas locale, ni trop faible, ce qui pénaliserait la précision des moyennes [81].

Sachant que la moyenne des termes aléatoires est nulle, en négligeant les forces massiques, l'équation du mouvement pour l'écoulement turbulent d'un fluide incompressible et isovisqueux devient [81] :

$$\frac{D\bar{V}_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial X_j} \quad (2.58)$$

avec l'équation constitutive donnée par :

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial X_i} \right) - \rho \overline{\hat{v}_i \hat{v}_j} \quad (2.59)$$

où $\overline{\hat{v}_i \hat{v}_j}$ est la corrélation entre \hat{v}_i et \hat{v}_j . Par rapport à l'équation constitutive d'un fluide newtonien, équation 2.5, on constate l'existence de contraintes supplémentaires associées au terme $-\rho \overline{\hat{v}_i \hat{v}_j}$, qui correspond au tenseur de contraintes de Reynolds. Dans un écoulement turbulent, ces contraintes peuvent être considérablement plus importantes que celles relatives à la contribution visqueuse, à part au voisinage des parois, où les fluctuations sont plus faibles [81].

Sous l'hypothèse d'incompressibilité, l'équation de continuité s'écrit [81] :

$$\frac{\partial \bar{V}_j}{\partial X_j} = 0 \quad (2.60)$$

pour le flux moyen et :

$$\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial X_j} = 0 \quad (2.61)$$

pour le champ turbulent.

L'équation 2.58 peut être simplifiée compte tenu des dimensions caractéristiques de l'amortisseur *squeeze film*. En supposant que $(V_c/\bar{V}_c)^2 = O(1)$ et que $C/R \rightarrow 0$, on obtient au travers d'une analyse d'ordre de grandeur similaire à celle réalisée précédemment [170] :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{\hat{u}\hat{v}} \right) \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \rho \overline{\hat{v}\hat{w}} \right)\end{aligned}\tag{2.62}$$

Il est important d'observer dans l'équation 2.62, que les effets d'inertie sont négligés devant les contraintes visqueuses et turbulentes. Ce résultat découle de l'hypothèse que $(V_c/\bar{V}_c)^2 = O(1)$, laquelle est considérée comme raisonnable pour des écoulements turbulents libres [170], c'est à dire non délimités par des frontières solides, comme celui résultant de la collision entre deux jets. MASSEY [94] souligne que les caractéristiques d'un tel écoulement sont similaires à celles d'une couche turbulente dont le gradient de vitesse dans la direction perpendiculaire au flux principal est très important. Ces conditions sont en effet retrouvées dans un amortisseur *squeeze film* ayant un rapport C/R très faible. Pour des jeux radiaux plus importants néanmoins, en admettant que $(V_c/\bar{V}_c)^2 = O(C/R)$ et que $(C/R)^2 \rightarrow 0$, une forme alternative à l'équation 2.62 est obtenue [170] :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{\hat{u}\hat{v}} \right) + \rho \frac{D\bar{u}}{Dt} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \rho \overline{\hat{v}\hat{w}} \right) + \rho \frac{D\bar{w}}{Dt}\end{aligned}\tag{2.63}$$

L'inspection de cette équation conduit à la conclusion que les effets d'inertie ne peuvent pas être négligés dans un écoulement turbulent.

Les premières tentatives de modélisation d'écoulements turbulents dans le domaine de la lubrification utilisent l'équation 2.62 comme point de départ. Le noyau du problème concerne la définition des contraintes de Reynolds. NG et PAN [107] emploient le concept de viscosité turbulente de Boussinesq, selon lequel les contraintes de Reynolds s'écrivent [81][94] :

$$-\overline{\hat{u}\hat{v}} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad -\overline{\hat{v}\hat{w}} = \mu_t \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\tag{2.64}$$

où la viscosité turbulente, μ_t , n'est pas une propriété du fluide, mais une fonction des conditions de l'écoulement.

La description des contraintes turbulentes en fonction des vitesses moyennes de l'écoulement permet d'arriver, en partant de l'équation 2.62, à une forme modifiée de l'équation de Reynolds qui s'écrit [170] :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu k_x} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu k_z} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.65)$$

où les coefficients k_x et k_z dépendent dans le cas du SqF des nombres de Reynolds locaux de Poiseuille, définis par $Re_{lx} = h\rho\bar{V}_x/\mu$ et $Re_{lz} = h\rho\bar{V}_z/\mu$. La limite inférieure $k_x = k_z = 12$ représentant le cas d'un écoulement laminaire, il en résulte qu'un SqF en régime turbulent génère un champ de pression plus important et, par conséquent, des forces hydrodynamiques plus élevées [170]. L'allure des fonctions k_x et k_z doit être déterminée expérimentalement. Pour des écoulements avec $2000 < Re_l < 10^5$, CONSTANTINESCU [34] en déduit les expressions suivantes :

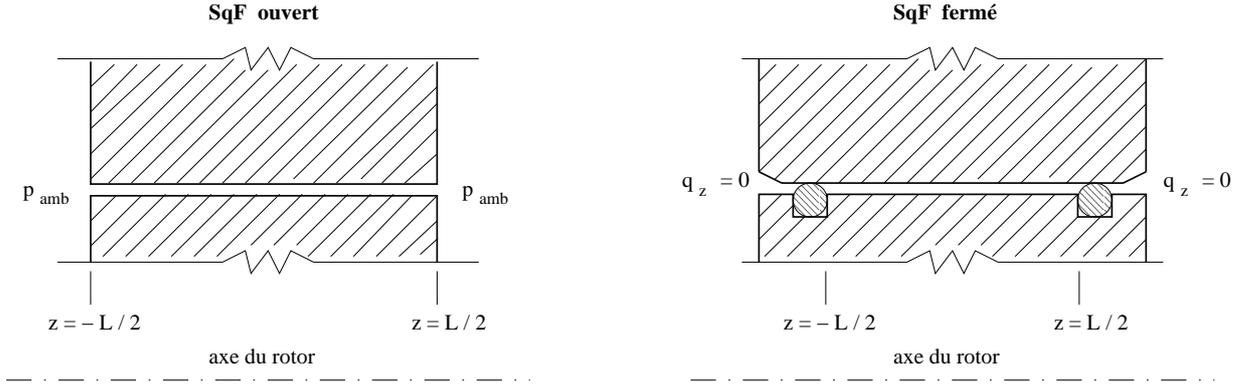
$$k_x = \frac{Re_{lx}^{0,681}}{6,8} \quad k_z = \frac{Re_{lz}^{0,681}}{6,8} \quad (2.66)$$

SAN ANDRES et VANCE [148] et KU et TICHY [78] appliquent la méthode du *momentum* à des formes simplifiées de l'équation 2.63, pour tenir compte à la fois des effets d'inertie et de la turbulence dans la modélisation du comportement d'un SqF décrivant des orbites circulaires et centrées. Les premiers décrivent les contraintes de cisaillement au niveau des parois avec une contribution explicite de l'inertie du fluide et utilisent une formulation hybride théorico-empirique pour la définition des coefficients turbulents. KU et TICHY [78] emploient le modèle de turbulence $k - \epsilon$ pour prédire les contraintes de Reynolds et recourent à la similarité entre les écoulement du SqF et celui entre deux plaques stationnaires pour développer des expressions pour les débits locaux et pour les termes inertiels. Ce qu'il faut retenir des résultats de ces deux travaux est l'amplification de la force tangentielle engendrée par la turbulence, ce qui augmente la capacité d'amortissement du SqF par rapport à son équivalent laminaire.

La modélisation d'amortisseurs *squeeze film* en régime turbulent reste un domaine très ouvert. La définition de la transition d'écoulement laminaire à écoulement turbulent, par exemple, n'est pas encore consensuelle [170].

2.3 Conditions aux limites

A l'exception de l'application de l'équation de Lagrange pour la prise en compte des effets d'inertie du SqF, l'analyse théorique présentée jusqu'ici cherche à décrire le comportement d'une particule fluide, ce que conduit à la déduction de l'équation différentielle régissant la dynamique du film. Bien évidemment, la résolution du problème nécessite encore la définition de conditions aux limites

FIG. 2.2: *Squeeze film ouvert et fermé*

appropriées. Celles-ci sont associées à l'alimentation et à l'étanchéité de l'amortisseur et affectent sensiblement le champ de pression qu'il génère. Ainsi, il est important d'inclure dans ce chapitre phénoménologique les aspects concernant le traitement des conditions aux limites auxquelles le SqF peut être soumis.

2.3.1 Etanchéité du *squeeze film*

Dans la configuration la plus répandue du SqF, l'huile est expulsée de la cavité annulaire qui abrite le film par les extrémités de l'amortisseur, suite à l'action d'écrasement. Trois types de conditions aux limites peuvent être définis pour modéliser le flux axial sortant.

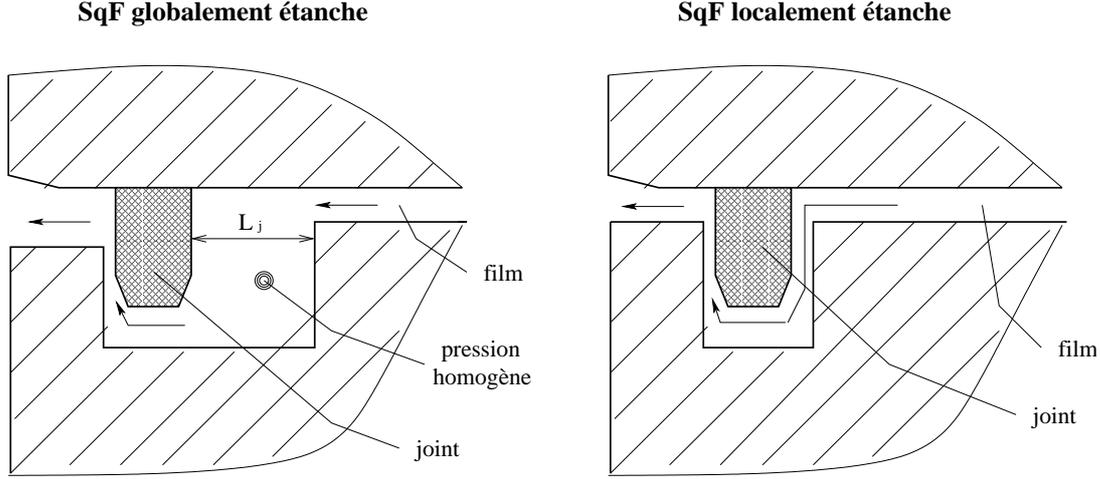
SqF ouvert : Quand aucune restriction n'est imposée au flux axial sortant de l'amortisseur (figure 2.2), celui-ci est dit ouvert et une pression constante, normalement l'ambiante, est définie aux extrémités :

$$p = p_{amb} \text{ à } z = \pm L/2 \quad (2.67)$$

SqF fermé : Il s'agit d'une approximation raisonnable quand le flux à travers les extrémités de l'amortisseur est obstrué par des joints très serrés, tels que les toriques de la figure 2.2. Le SqF est considéré dans ce cas comme parfaitement étanche et les conditions aux limites expriment ainsi un flux axial nul au niveau des extrémités. Sachant que la mécanique de l'écoulement résulte de l'effet de Poiseuille, ces conditions s'écrivent :

$$q_z(z = \pm L/2) = -\frac{h(\theta)^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=\pm L/2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=\pm L/2} = 0 \quad (2.68)$$

SqF partiellement fermé : Cette condition est la plus courante, puisque des joints sont souvent utilisés pour réguler le débit de fuite de manière à permettre une gestion correcte du renouvellement de l'huile [4]. La caractérisation de l'écoulement à travers les extrémités peut s'effectuer de quatre

FIG. 2.3: *Squeeze film partiellement fermé*

manières différentes. La première consiste à introduire un coefficient de fuite global, C_g , qui relie le débit total sortant du SqF à la différence de pression à l'intérieur et à l'extérieur de l'amortisseur [88] :

$$-\frac{1}{12\mu} \int_0^{2\pi} h(\theta)^3 \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=\pm L/2} R d\theta = C_g [p(z = \pm L/2) - p_{amb}] \quad (2.69)$$

Ce modèle est physiquement acceptable s'il existe en amont des joints, par exemple, des gorges circonférentielles où la pression du fluide est homogène. Cette condition est illustrée dans la figure 2.3, où l'étanchéité est réalisée par des segments. Si les gorges sont très étroites, comme dans le deuxième schéma de la figure 2.3, les joints sont installés serrés et sont, par conséquent, adjacents au film d'huile. Dans ce cas, le coefficient de fuite global est remplacé par son équivalent local, C_l , et les conditions aux limites s'écrivent [149][178][88] :

$$q_z(\theta, z = \pm L/2) = -\frac{h(\theta)^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=\pm L/2} = C_l [p(\theta, z = \pm L/2) - p_{amb}] \quad (2.70)$$

MARMOL et VANCE [90] utilisent une expression similaire, mais ils définissent le coefficient de fuite local en fonction de l'épaisseur local du film, $h(\theta)$.

Les joints pouvant être interprétés comme des obstacles qui provoquent une perte de charge singulière lorsque traversés par un écoulement quelconque, une description plus réaliste des conditions aux limites peut être obtenue en exprimant le débit local en fonction de la racine carré du différentiel de pression local [29][143] :

$$q_z(z = \pm L/2) = -\frac{h(\theta)^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=\pm L/2} = \tilde{C}_l \sqrt{p(\theta, z = \pm L/2) - p_{amb}} \quad (2.71)$$

La quatrième manière de prendre en compte la restriction du flux axial aux extrémités de l'amortisseur consiste à modéliser très finement à partir de l'équation de Navier-Stokes l'écoulement

au voisinage de la discontinuité géométrique imposée par la présence des joints [184]. Bien que précise, cette technique nécessite l'emploi de méthodes de résolution numérique, étant par conséquent très lourde en termes de temps de calcul.

Il a été constaté expérimentalement que la restriction de l'écoulement axial par l'intermédiaire de joints permet d'augmenter la capacité d'amortissement du SqF [72][73]. Cependant, la réduction du débit de fuite qui en résulte intervient dans le mécanisme d'évacuation de chaleur du SqF, si bien que la fermeture excessive des extrémités engendre un risque de réchauffement de l'huile au delà de ses limites de tenue en température.

TICHY [178] et ARAUZ et SAN ANDRÉS [2] suggèrent la détermination du coefficient de fuite des joints à l'aide de tests statiques, en mesurant le débit de fuite pour une pression d'alimentation fixée. Cette estimation est toutefois très approximative, si bien que ARAUZ et SAN ANDRÉS [4] mettent en cause la mauvaise caractérisation des joints comme l'un des facteurs prépondérants responsables de l'écart entre leurs résultats analytiques et expérimentaux.

Récemment, CHEN et HAHN [27] ont tenté de prédire le comportement d'un SqF partiellement étanche à l'aide d'un code de calcul commercial, le CFX4.2, dédié à la simulation de la dynamique des fluides par la méthode des volumes finis. Les calculs ont été effectués en définissant un maillage tridimensionnel comprenant l'espace annulaire du SqF ainsi que la géométrie de ses extrémités. Les résultats obtenus montrent que les caractéristiques de l'amortisseur sont très sensibles à la valeur du jeu axial L_j , indiqué dans la figure 2.3, lorsque celui-ci est du même ordre de grandeur du jeu radial C . D'où l'importance de bien contrôler les tolérances de fabrication de l'ensemble [27].

Il est important de souligner encore que les effets d'inertie du fluide s'avèrent, d'après les résultats expérimentaux reportés dans [73] et [89], plus importants lorsque l'amortisseur est plus étanche.

2.3.2 Système d'alimentation

Il y a des évidences expérimentales qui démontrent l'importance du rôle joué par le système d'alimentation dans le comportement du SqF, et par conséquent dans la dynamique du système mécanique qui l'incorpore [185][125][33]. L'alimentation intervient dans le développement du champ de pression dans le film, dans la cavitation, dans la thermique du fluide et également dans les effets d'inertie convective de l'écoulement. Il est ainsi fondamental d'estimer avec une bonne précision aussi bien la pression que le débit ou capacité d'alimentation.

Communément, l'apport d'huile à l'amortisseur s'effectue soit par une gorge circonférentielle soit par des points d'injection. La définition des conditions aux limites associées à ces deux configurations est analysée ci-après.

2.3.2.1 Gorge circonférentielle

La définition classique des conditions aux limites associées à l'alimentation par une gorge circonférentielle s'appuie sur l'hypothèse que la pression régnant dans cette gorge reste constante. En

notant z_g la coordonnée axiale donnant la position de la gorge, les conditions aux limites s'écrivent :

$$p = p_{alim} \quad \text{en} \quad z = z_g \quad (2.72)$$

où la pression p_{alim} découle du dimensionnement du système hydraulique d'alimentation du SqF. La gorge circumférentielle sépare par conséquent l'amortisseur en deux parties qui sont supposées fonctionner indépendamment.

En 1987, RAMLI, ROBERTS et ELLIS [127] mettent en avant une méthode d'identification des coefficients d'amortissement et d'inertie du SqF. Leur corrélation avec les prédictions théoriques s'avère insatisfaisante et ils soulèvent le traitement simplifié de la gorge d'alimentation comme la source de divergence principale. Dans la même année, WALTON II, WALOWIT, ZORZI et SCHRAND [192] observent expérimentalement que l'écoulement dans la gorge circumférentielle ne peut pas être caractérisé par l'hypothèse de pression constante, d'autant plus que la poche de cavitation développée dans le film peut éventuellement l'envahir.

Motivé par ces constatations expérimentales, SAN ANDRÉS [144] remet en question ce traitement des conditions aux limites et propose un modèle tenant compte de l'interaction entre les écoulements dans la gorge d'alimentation et dans les films amortisseurs adjacents. Son analyse est basée sur une forme simplifiée de l'équation de Navier-Stokes, la pression dans la gorge étant obtenue au travers d'un bilan massique à l'interface avec le film. Le système d'équations régissant le problème est résolu pour le cas de mouvements à faible amplitude autour du centre de l'amortisseur. Les résultats théoriques présentés dans le travail en question mettent en évidence la contribution non négligeable de l'écoulement dans la gorge d'alimentation aux coefficients d'amortissement et d'inertie du SqF. Les prédictions du modèle de SAN ANDRÉS sont corroborées qualitativement par les résultats expérimentaux publiés ultérieurement [3][4]. On remarque en fait, que la gorge circumférentielle se comporte de manière similaire à un SqF. L'importance de sa contribution à la force hydrodynamique totale que l'amortisseur produit s'avère dépendante notamment des rapports entre la profondeur et la largeur de la gorge et le jeu radial et la longueur du SqF, respectivement. La pression d'alimentation, auparavant considérée comme constante, se révèle être une fonction de la cinématique de l'amortisseur, pouvant atteindre des valeurs aussi élevées que dans le film.

2.3.2.2 Points d'injection

L'introduction directe de l'huile dans le film par l'intermédiaire de points d'injection est une solution pour augmenter le potentiel d'amortissement du SqF, au détriment de la capacité d'alimentation du système hydraulique [26][193]. En effet, la suppression de la gorge permet d'élargir la surface d'écrasement effective de l'amortisseur, de manière à ce que le développement du champ de pression soit moins affecté par les discontinuités géométriques imposées par le système d'alimentation.

Compte tenu de la forte influence de l'alimentation sur le comportement des amortisseurs *squeeze film*, les travaux théoriques et expérimentaux à propos des systèmes ponctuels n'étant pas très nombreux, un chapitre de la présente dissertation y sera entièrement consacré. Par conséquent, nous nous

limiterons dans cette analyse phénoménologique à ces deux brefs paragraphes. Les modèles et les résultats disponibles dans la littérature seront présentés de façon détaillée ultérieurement.

2.4 Cavitation

La cavitation correspond au développement de cavités remplies de vapeur ou de gaz à l'intérieur d'un liquide, phénomène qui est engendré par le comportement dynamique du fluide [65]. Il est important de préciser que le terme *vapeur* désigne ici la phase gazeuse du liquide, tandis que le mot *gaz* fait allusion à un gaz non condensable tel que l'air dans l'huile. On peut distinguer trois mécanismes pouvant provoquer l'apparition de cavités dans le film d'un SqF [65] :

Cavitation de vapeur : Ce type de cavitation a lieu lorsque la pression de l'huile devient inférieure à sa pression de vaporisation, généralement proche du zéro absolu. Dans ce cas, le liquide subit un effort de traction. Puisque sa tenue à ce genre de sollicitation est très faible, des bulles de vapeur se développent vite. Le retour de ces bulles à l'état liquide est également très rapide et l'énergie qui s'en dégage peut provoquer des dégâts considérables aux surfaces en contact avec le film.

Cavitation gazeuse : Ce phénomène correspond à la formation de cavités gazeuses dans le film due à l'introduction de gaz via les frontières du SqF. La phase gazeuse ne se développe que si l'huile dépasse son seuil de saturation. Lorsque la quantité d'air qui pénètre dans le film est très importante, le fluide amortisseur acquiert un caractère biphasique [198].

Pseudo-cavitation : Parfois confondu avec la cavitation gazeuse, ce type de cavitation est observé lorsque la pression chute au dessous de la pression de saturation du gaz. Celui-ci, auparavant dissous dans l'huile, est ainsi libéré et forme des bulles.

Le premier problème concernant la prise en compte de la cavitation dans la modélisation du SqF consiste alors à déterminer par quel mécanisme se forment les cavités.

SUN et BREWE [167] répondent partiellement à cette question en calculant un temps caractéristique de diffusion de l'air dans l'huile. Leur analyse s'appuie sur la loi d'Henry de la solubilité [70] et la loi de Fick de l'échange massique à l'interface liquide-gaz [81]. Ce temps caractéristique se révèle être sensiblement supérieur à l'échelle temporelle de la dynamique de rotors, ce qui indique que la formation d'un mélange air-huile ne peut résulter que de la pénétration d'air atmosphérique dans le film. Par conséquent, la pseudo-cavitation ne semble pas être un phénomène pertinent au comportement de l'amortisseur.

L'un des travaux les plus complets et éclaircissants sur les régimes de cavitation que l'on peut rencontrer dans les applications du SqF a été publié par ZEIDAN et VANCE [199] en 1990. Ils ont réussi à identifier cinq régimes de fonctionnement vis-à-vis de la formation de zones cavitantes :

- i) Pas de cavitation : Lorsque le SqF subit des mouvements à faibles vitesses et excentricité, aucune rupture du film n'est constatée. On peut atteindre également ce régime à condition de prévoir

un certain niveau de pressurisation dans le système d'alimentation et d'empêcher l'entrée d'air par les extrémités de l'amortisseur. Ce régime est décrit par la condition de cavitation proposée par Sommerfeld en 1904 (conf. [36]) et qui porte par conséquent son nom.

- ii) Cavitation gazeuse émergente : Il s'agit d'un régime de transition lors de la montée en vitesse du rotor. Lorsqu'une partie du champ de pression devient inférieure à la pression ambiante, de l'air est aspiré et pénètre dans le film. On constate que les bulles d'air suivent le mouvement du champ de pression sans jamais intervenir dans la partie sur-ambiante ($p > p_{amb}$) du cycle.
- iii) Fluide amortisseur biphasique : Quand la partie sous-ambiante ($p < p_{amb}$) du champ de pression est très étendue, une quantité importante d'air peut être absorbée par le film, principalement dans le cas d'amortisseurs à extrémités ouvertes. Les bulles d'air ainsi formées résistent dans la portion sur-ambiante du cycle, et se rassemblent dans la partie sous-ambiante pour former des cavités plus volumineuses. Ce régime de cavitation se caractérise par le fonctionnement du SqF avec un fluide biphasique. La présence d'air dans la partie sur-ambiante du champ de pression provoque une réduction des forces hydrodynamiques générées et peut, par conséquent, pénaliser la performance de l'amortisseur.
- iv) Cavitation de vapeur : Ce mode de cavitation peut être observé pourvu que le SqF soit pressurisé au travers de son système d'alimentation et que ses extrémités soient très étanches. Ces mesures permettent à l'huile d'atteindre des pressions inférieures à sa pression de vaporisation, p_{vap} , tout en empêchant la pénétration d'air. Les bulles de vapeur qui se développent dans la partie cavitante ($p < p_{vap}$) du cycle s'effondrent très rapidement lorsque la pression s'accroît. Ces micros explosions peuvent endommager sérieusement les surfaces métalliques délimitant le film d'huile [18].
- v) Cavitations de vapeur et gazeuse : La cavitation gazeuse peut venir perturber le régime précédent au cas où la vitesse du rotor soit augmentée ou la pressurisation du SqF réduite. Une entrée d'air est alors permise, si bien que les deux régimes de cavitation coexistent. La pénétration continue d'air dans le film conduit à une chute de l'amplitude des portions sur-ambiante et sous-ambiante du champ de pression, pouvant éventuellement éliminer complètement la cavitation de vapeur et ainsi réduire les dégâts qu'elle occasionne [198].

Le type de cavitation le plus susceptible d'avoir lieu dépend ainsi de la cinématique du SqF, de son niveau de pressurisation et de ses conditions d'étanchéité. Bien entendu, cela dépend également de la qualité de l'huile qui est introduite dans l'amortisseur. Il est fort possible, pour des questions de simplicité et d'encombrement, que les circuits hydrauliques de lubrification des roulements du rotor et d'alimentation du SqF possèdent des parties communes. Sachant que l'huile destinée à la lubrification est normalement récupérée avec un taux d'air assez important, le fonctionnement de l'amortisseur avec un fluide biphasique peut découler de l'injection directe d'un mélange air-huile par le système d'alimentation. La figure 2.4 résume de manière schématique les types de cavitation observés dans les amortisseurs *squeeze film*.

Il convient de citer encore la contribution de WALTON II, WALOWIT, ZORZI et SCHRAND [192] à la compréhension de la cavitation dans les amortisseurs *squeeze film*. Leur travail expérimental a permis de mettre en évidence la forte influence du système d'alimentation sur la forme et l'étendue de la poche de cavitation. Ils ont constaté en outre, que le phénomène est sensiblement plus complexe lorsque l'apport d'huile au film s'effectue par des points d'injection.

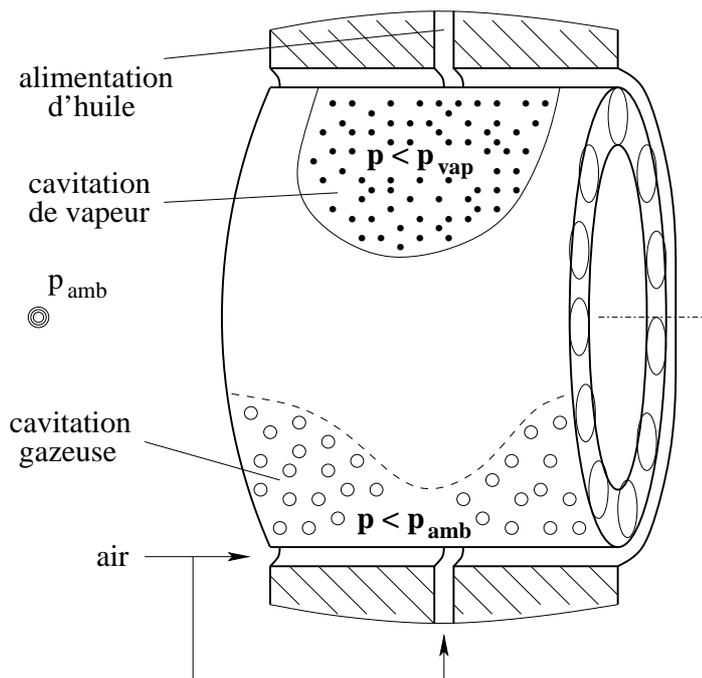


FIG. 2.4: Schématisation des types de cavitation

Dans ce qui suit, nous présentons une synthèse des principaux modèles existants pour le traitement indépendant des cavitations de vapeur et gazeuse.

2.4.1 Cavitation de vapeur

La majorité des modèles proposés pour prendre en compte la cavitation de vapeur dans l'amortisseur *squeeze film* correspond à une extension de l'analyse de ce phénomène pour des paliers hydrodynamiques stationnaires. Classiquement, la problématique de ces derniers concerne le calcul de la position d'équilibre du rotor à sa vitesse d'opération. Il s'agit ainsi d'un calcul beaucoup plus simple que la simulation de la dynamique d'un SqF, si bien que l'utilisation de modèles de cavitation plus sophistiqués [36][155], et par conséquent plus coûteux au niveau temporel, peut être envisagée.

En supposant que l'échelle temporelle caractéristique de la vaporisation de l'huile est sensiblement plus faible que celle associée à la dynamique du rotor, on peut négliger tous les phénomènes de développement/coalescence des bulles et traiter le problème de formation de la poche de cavitation comme un phénomène quasi-statique du point de vue hydrodynamique [167]. Deux conditions de cavitation classiques s'appuient sur cette hypothèse : celle de Gumbel et celle de Swift-Stieber, dite aussi de Reynolds. Il est très difficile de remonter aux travaux originaux, qui datent du début du vingtième siècle, dont découlent ces conditions.

D'après COYNE et ELROD [36], la condition de Gumbel a été proposée en 1914 et stipule que l'huile cavite lorsque sa pression devient négative, définition souvent utilisée par d'autres chercheurs. Il est important de remarquer que cette définition prend comme référence la pression ambiante et non le zéro absolu, comme le souligne PAN [112]. Une définition plus rigoureuse serait donc :

$$p = p_{amb} \quad \text{lorsque} \quad p < p_{amb} \quad (2.73)$$

ETSION propose dans la discussion de l'article de PAN [112] une modification de la condition de Gumbel pour tenir compte du développement de cavités à pression sous-ambiante :

$$p = p_{vap} \quad \text{lorsque} \quad p < p_{vap} \quad (2.74)$$

La pression de vaporisation des huiles minérales étant sensiblement plus faible que la pression atmosphérique, une valeur nulle y est souvent attribuée afin de simplifier les algorithmes de calcul des forces hydrodynamiques. D'où une certaine confusion parfois dans la définition correcte de la condition de cavitation employée, si celle de Gumbel ou celle de Gumbel modifiée. REZVANI et HAHN [133] obtiennent une corrélation plus favorable entre les simulations et des résultats expérimentaux, en utilisant la condition de cavitation de Gumbel modifiée au lieu de la condition de Gumbel classique.

En 1932 et 1933, SWIFT et STIEBER, indépendamment, proposent en s'appuyant sur des faux arguments de continuité et de stabilité la condition de cavitation suivante (conf. [155]) :

$$p = p_{vap} \quad \text{lorsque} \quad p < p_{vap} \quad (2.75)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_{rupture} = 0$$

où n indique la direction normale à l'interface liquide/vapeur. Bien que développée à partir d'une argumentation défailante, FLOBERG démontre en 1957 que cette condition de cavitation est en effet acceptable pour le cas de paliers hydrodynamiques très chargés.

Le traitement de la cavitation suivant la condition de Swift-Stieber rend la résolution de l'équation régissant le champ de pression du SqF encore plus compliquée, car il s'agit d'un problème aux frontières libres. PAN [112] et PAN et IBRAHIM [114] réussissent à obtenir des solutions analytiques approchées pour le cas d'un palier court décrivant des orbites circulaires et centrées. En considérant ce même type d'orbite, JUNG et VANCE [74] utilisent l'approximation palier long et une technique de superposition pour prendre en compte les effets d'inertie du fluide dans leur modèle. Numériquement, l'implémentation de la condition de Swift-Stieber peut être accomplie au travers de techniques itératives. Dans la méthode de la colonne [20], dite également de Christopherson, les pressions inférieures à p_{vap} sont remises à p_{vap} pour chaque itération du processus Gauss-Seidel. L'algorithme de Murty, lequel est décrit dans la référence [10], s'appuie sur une démarche similaire, mais il est mieux adapté pour l'application de techniques implicites de résolution de systèmes d'équations algébriques.

Les conditions de Gumbel et de Gumbel modifiée traitent la cavitation de manière extrêmement simplifiée et négligent tous les phénomènes locaux à l'interface liquide/vapeur. La condition de Swift-Stieber apporte une amélioration, car elle s'avère satisfaisante pour décrire la condition de rupture

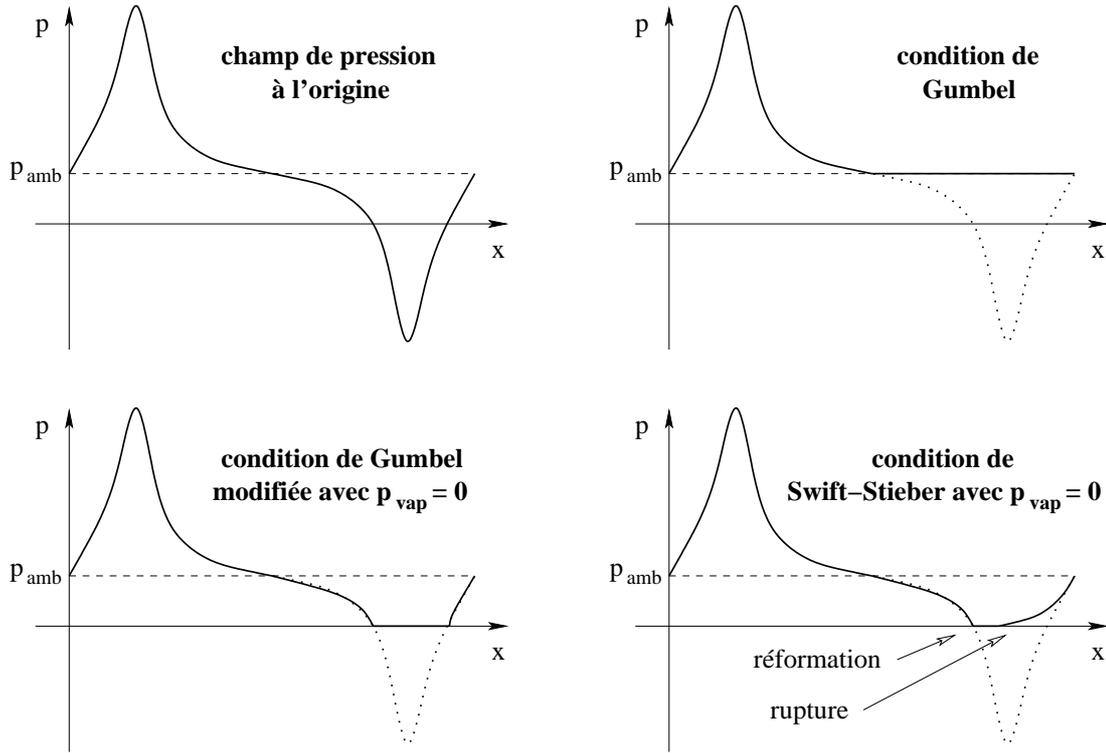


FIG. 2.5: Modèles de cavitation de vapeur

du film d'huile, cependant pas sa réformation. Ces modèles de cavitation, illustrés dans la figure 2.5, enfreignent ainsi le principe de conservation de la masse et sont, par conséquent, inadéquats pour décrire rigoureusement l'écoulement à l'interface liquide/vapeur.

Le manque d'un critère permettant de déterminer la position de réformation du film a été comblé grâce aux études de JAKOBSSON et FLOBERG en 1957, et OLSSON en 1965 (conf. [50]), qui ont abouti au modèle appelé JFO. La conservation de la masse est assurée en imposant les conditions suivantes [50] :

$$\begin{aligned}
 p = p_{vap} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right) = 0 \quad \text{à la rupture du film} \\
 \frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V_n}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right) \quad \text{à la réformation du film}
 \end{aligned}
 \tag{2.76}$$

où V_n est la composante normale de la vitesse du fluide par rapport à l'interface liquide/vapeur et ρ_c la masse volumique de l'huile dans l'état liquide à la pression de vaporisation. La poche de cavitation étant remplie par un mélange vapeur-liquide, la masse volumique de l'huile, ρ , dans cette zone est inférieure à ρ_c .

D'un point de vue pratique, la condition de cavitation de JFO a été considérée dans un premier temps comme inexploitable, parce que très complexe. Afin de rendre l'application de telle condition

envisageable, ELROD [50] propose en 1981 un algorithme relativement simple. Son idée a été de décrire tout le film, cavité ou non, avec une seule expression. Pour ce faire, il introduit un facteur de compressibilité ainsi qu'un indice de cavitation et réécrit le problème en fonction du rapport ρ/ρ_c . Au lieu de traiter la cavitation comme un phénomène quasi-statique en termes hydrodynamiques, l'application de la condition de JFO requiert le calcul de l'évolution temporelle de la poche de cavitation. ELROD [50] teste son algorithme pour des calculs de paliers hydrodynamiques stationnaires, la première application à des problèmes dynamiques étant réalisée par BREWE [18]. L'algorithme d'ELROD est perfectionné une décennie plus tard par PAYVAR et SALANT [117], pour éviter des problèmes de convergence liés à la discrétisation de la surface du film fluide.

L'équation décrivant la condition de réformation du film découle de l'hypothèse qu'une partie de l'huile reste dans l'état liquide et est transportée sous la forme de stries à travers la zone cavitante grâce à un effet de Couette. Or dans le cas d'un amortisseur *squeeze film*, l'écoulement résulte d'un effet de Poiseuille, comme souligné au début de ce chapitre. PAN [113] généralise la théorie de JAKOBSSON, FLOBERG et OLSSON pour prendre en compte les situations où le transfert de masse par l'interface liquide/vapeur n'est pas induit par l'effet Couette.

KUMAR et BOOKER [79][80] publient en 1991 une version éléments finis de l'algorithme d'ELROD [50], modifié pour pouvoir simuler la condition de cavitation de JFO dans sa forme généralisée exprimée par PAN [113]. Plus récemment, BONNEAU, GUINES, FRÊNE et TOPLOSKY [10] et OPTASANU et BONNEAU [110] proposent une méthode de résolution par éléments finis plus efficace, grâce à un traitement simplifié de la condition de réformation du film, basé sur la définition d'un paramètre de vitesse de la frontière de la zone cavitante.

Le choix de la condition de cavitation de vapeur devant être employée dans la modélisation du comportement du SqF reflète le compromis souhaité entre précision et temps de calcul. En dépit du développement de modèles de cavitation plus réalistes et de l'évolution considérable des moyens de calcul, les conditions de Gumbel et de Gumbel modifiée sont encore les plus utilisées lors de la simulation de la dynamique de rotors, surtout pour la réalisation d'études paramétriques.

2.4.2 Cavitation Gazeuse

Comme observé précédemment, la cavitation dite gazeuse correspond à l'apparition de bulles engendrée par la pénétration d'air dans le film d'huile. Lorsque la quantité d'air est assez importante, le fluide amortisseur devient un mélange biphasique air-huile. Bien que non nocif aux surfaces métalliques, ce type de cavitation peut provoquer une chute de performance du SqF, dont la capacité d'amortissement peut décroître selon le taux d'air du mélange [40].

La première difficulté concernant la modélisation de la cavitation gazeuse consiste à déterminer la fraction d'air dans le film d'huile, ce qui est d'autant plus problématique qu'une quantité d'air considérable peut être directement introduite par le circuit hydraulique d'alimentation. DIAZ et SAN ANDRÉS [41] propose l'estimation de la quantité d'air emprisonnée dans le film à partir d'un bilan massique. Leur formule explicite la dépendance de la cavitation gazeuse vis-à-vis de la capacité d'alimentation, de l'excentricité et de la vitesse de précession de l'amortisseur. L'accord entre les résultats théoriques et expérimentaux s'avère satisfaisant [41].

Une fois déterminée la fraction d'air dans l'huile, deux stratégies peuvent être adoptées pour le calcul du champ de pression du SqF. La première s'appuie sur l'hypothèse que le fluide se comporte comme un mélange homogène, avec des propriétés physiques spécifiques. Dans ce cas, l'équation de Reynolds pour un fluide compressible peut être utilisée pour décrire la pression générée dans le film, à condition que les bulles soient suffisamment petites pour ne pas provoquer des flux parasites dans la direction de l'épaisseur du film [163]. L'équation de Reynolds pour un mélange homogène compressible est identique à l'expression 2.24 présentée au début du chapitre, sauf qu'elle s'écrit en fonction de la viscosité et de la masse volumique du mélange et non de l'huile :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_m h^3}{\mu_m} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_m h^3}{\mu_m} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\partial(\rho_m h)}{\partial t} \quad (2.77)$$

où les propriétés du mélange μ_m et ρ_m sont fonctions de la pression et de la quantité d'air dans le film. La précision du calcul basé sur l'équation ci-dessus possède une forte dépendance vis-à-vis des modèles qui fournissent la viscosité et la masse volumique du mélange air-huile à partir de la pression et de sa fraction d'air. ZEIDAN et VANCE [200] décrivent une procédure pour déterminer des lois semi-empiriques pour la masse volumique du fluide biphasique en fonction de la pression. Quant aux modèles de viscosité [51][120], dont les plus connus sont ceux d'Einsten, de Taylor, de Hayward et d'Isbin, ils donnent des résultats différents, voire parfois contradictoires [120]. La difficulté de déterminer de manière précise la viscosité d'un mélange air-huile réside dans le fait que ce paramètre n'est pas une propriété du matériau, mais dépend de la dynamique du fluide [172].

FENG et HAHN [51] comparent les modèles de viscosité d'Isbin et de Hayward en simulant la réponse au balourd d'un rotor rigide. A la lumière de leurs résultats expérimentaux, ils concluent que la relation proposée par Hayward est la plus adéquate, sans toutefois préciser le taux d'air du fluide amortisseur qu'ils utilisent. Il est intéressant de remarquer que ce modèle prédit une viscosité plus élevée pour le mélange air-huile que pour l'huile pure, ce qui conduit à une augmentation de l'amortissement du SqF. ZEIDAN et VANCE [200] confirment expérimentalement ce résultat pour un mélange ayant un taux d'air de 6%. Ils soulignent, toutefois, que pour des fluides biphasiques avec un taux d'air beaucoup plus important la viscosité devrait décroître. En outre, ils démontrent que les effets de compressibilité deviennent dominant sur les effets visqueux lorsque le taux d'air dépasse un certain seuil, ce qui provoque une chute du niveau de pression dans le film par rapport à un fluide incompressible.

Afin de ne pas avoir à aborder le problème concernant le choix du meilleur modèle de viscosité, CHAMNIPRASART, AL-SHARIF, RAJAGOPAL et SZERI [21] utilisent la stratégie de traiter le fluide biphasique comme un mélange binaire non homogène, c'est à dire, en admettant que les vitesses de l'air et de l'huile sont différentes. Ils parviennent à obtenir, au travers d'une analyse théorique très complexe, deux équations différentielles partielles dans les masses volumiques de l'air et de l'huile qui régissent le problème hydrodynamique.

Récemment, TAO, DIAZ, SAN ANDRÉS et RAJAGOPAL [172] ont repris l'optique de considérer le mélange air-huile comme homogène. En partant des équations de la continuité et du mouvement pour chaque composant du mélange et en utilisant le modèle de viscosité de Taylor, ils sont arrivés à une forme de l'équation de Reynolds très similaire à celle présentée ci-dessus. La corrélation entre

leurs résultats théoriques et expérimentaux s'avère moyenne.

Malgré le grand nombre de travaux théoriques et expérimentaux consacrés au problème de la cavitation gazeuse, la caractérisation de la performance d'un SqF fonctionnant avec un fluide biphasique reste un domaine très ouvert. De nos jours, le dimensionnement fiable d'un amortisseur susceptible de subir ce genre de cavitation doit s'appuyer sur des techniques d'identification expérimentale, telles que celle proposée par DIAZ et SAN ANDRÉS [39].

2.5 Effets thermiques

L'hypothèse d'isoviscosité faite au début de ce chapitre nous a permis de décrire le comportement du SqF, indépendamment des équations fondamentales de la thermodynamique. L'intérêt principal de la prise en compte des effets thermiques est de faire intervenir dans le calcul des forces hydrodynamiques le champ de viscosité du fluide amortisseur. Les fondements théoriques qui aboutissent à l'équation de l'énergie [57] sont connus et relativement bien maîtrisés dans la plupart des cas. En supposant que le coefficient de convection, k , et la chaleur spécifique, C_p , de l'huile sont constants, pour un film fluide incompressible cette équation s'écrit [116] :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \Phi_d \quad (2.78)$$

où,

$$\Phi_d = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] : \text{terme de source de chaleur due à la dissipation visqueuse.}$$

L'équation ci-dessus exprime un bilan énergétique local, pour une particule fluide et permet de calculer la température en tout point du fluide. Son couplage avec l'équation régissant le champ de pression du film est courant dans l'analyse de paliers hydrodynamiques stationnaires, dans laquelle le premier membre de l'équation 2.78 est négligé [53]. La résolution du problème couplé requiert un processus itératif qui élève sensiblement le coût temporel du calcul. Ce coût peut être réduit en considérant des temps caractéristiques différents pour le comportement thermique du film et de la structure [116]. Il reste toutefois très important principalement dans le cadre d'analyses dynamiques.

Le coût et la complexité du calcul thermique justifient en partie l'adoption de l'hypothèse de viscosité constante lors de la modélisation du SqF. TICHY et SMITH [182] démontrent que l'utilisation d'une viscosité constante selon l'épaisseur du film (direction radiale) est raisonnable si le produit des gradients de viscosité et de vitesse dans cette direction est beaucoup plus faible que le terme visqueux de l'équation du mouvement. En outre, on peut supposer que la viscosité ne varie pas considérablement dans les directions axiale et circonférentielle, à condition que le débit d'alimentation soit assez important pour éviter un réchauffement sensible du fluide entre son entrée et sa sortie du SqF. Dans ce cas, une viscosité moyenne fonction des conditions d'opération du rotor peut être déterminée itérativement au travers d'un bilan énergétique sur un volume de contrôle englobant le

film d'huile [170]. Par contre, si l'écart entre les températures d'entrée et de sortie est important, cette approche peut introduire des erreurs considérables dans l'estimation des forces hydrodynamiques [2].

2.6 Interaction avec les frontières solides

Les frontières solides délimitant le *squeeze film* sont communément considérées comme parfaitement rigides. En outre, la possibilité d'un éventuel contact solide est écarté par la singularité des forces hydrodynamiques, qui tendent vers l'infini lorsque la surface intérieure de l'amortisseur s'approche de la paroi extérieure.

Cependant, dans les problèmes de contact lubrifié, la valeur du jeu entre les surfaces est très faible, de l'ordre du micron, si bien que les pressions générées dans le film d'huile sont très importantes. Ce haut niveau de pression engendre d'une part une déformation élastique des corps en contact, et d'autre part un changement de viscosité par effet piézovisqueux. Ce comportement caractérise le régime de lubrification dit élastohydrodynamique, typique dans les engrenages par exemple.

Bien que ce régime ne soit pas commun dans les applications du SqF en machines tournantes telles que les moteurs à réaction et les compresseurs, où les jeux radiaux sont de l'ordre du dixième de millimètre, les effets piézovisqueux et la déformation élastique des pistes jouent un rôle effectif dans les problèmes de transmission par bielle [110]. Dans ces cas, la viscosité de l'huile peut être calculée par l'expression de Weibull [170] :

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha p} \quad (2.79)$$

où μ_0 et α sont des propriétés de l'huile. Outre la complexité introduite par la dépendance de la viscosité par rapport à la pression, la résolution du problème nécessite également la modélisation structurale des pistes du SqF et leur couplage avec le problème hydrodynamique.

Il existe des situations dans lesquelles l'interaction du SqF avec les frontières solides peut concerner uniquement la déformabilité de celles-ci, les effets piézovisqueux restant négligeables. Il est le cas lorsque le matériau de ces frontières est très souple, comme pour des joints. L'utilisation d'un modèle élastique ou viscoélastique pour le solide peut alors être envisagée [196]. Même dans les cas où les frontières peuvent être considérées comme localement indéformables, la prise en compte de la souplesse globale des pièces mécaniques, telles que les roulements d'une machine tournante, peut aboutir à des résultats différents de ceux obtenus en négligeant l'interaction entre le SqF et la structure environnante [16].

La modélisation d'un contact éventuel entre les pistes délimitant le film est particulièrement importante dans les problèmes de vibration d'échangeurs de chaleur, du fait de la faible viscosité de l'eau, qui joue le rôle du fluide amortisseur [210]. Un contact entre les pistes du SqF est également observé dans la phase de démarrage de machines tournantes si des rétenteurs ne sont pas employés pour compenser la pesanteur du système [133]. Le traitement numérique du problème nécessite alors la superposition de deux non linéarités : celle du SqF et celle associée au contact [210].

2.7 Forces hydrodynamiques

Après la détermination du champ de pression dans le film d'huile, les forces hydrodynamiques sont obtenues en l'intégrant sur la surface de l'amortisseur. Ces forces sont ensuite reportées dans le calcul du système mécanique incorporant le SqF, faisant ainsi l'interface entre la description du comportement de l'amortisseur et la simulation de la dynamique du rotor.

Si le champ de pression est décrit analytiquement, les forces hydrodynamiques dans le système de repérage local, (\vec{r}, \vec{t}) (voir figure 2.1), sont données par :

$$\begin{aligned} f_r &= \int_{\Omega_l} p(\theta, z) \cos \theta d\Omega_l \\ f_t &= \int_{\Omega_l} p(\theta, z) \sin \theta d\Omega_l \end{aligned} \quad (2.80)$$

où Ω_l représente la zone non cavitée du film d'huile.

Lorsque le champ de pression est discrétisé suite à l'utilisation de méthodes numériques de résolution, les forces hydrodynamiques peuvent être calculées par la règle du trapèze :

$$\begin{aligned} f_r &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{i,j} \cos \theta_j R(\Delta\theta)_j (\Delta z)_i \\ f_t &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{i,j} \sin \theta_j R(\Delta\theta)_j (\Delta z)_i \end{aligned} \quad (2.81)$$

où,

N, M : nombre de noeuds du maillage dans les directions axiale et circonférentielle;

$(\Delta z)_i, (\Delta\theta)_j$: incréments spatiaux de discrétisation dans les directions axiale et circonférentielle;

θ_j : coordonnée circonférentielle discrétisée.

Il est intéressant de souligner que, pour un SqF décrivant des orbites à peu près circulaires et centrées, les composantes radiale et tangentielle de la force hydrodynamique totale ont une interprétation physique importante. La vitesse radiale du SqF étant presque nulle, la force tangentielle est la seule responsable par la dissipation d'énergie engendrée par l'amortisseur. La force radiale ne correspond dans ce cas qu'à une raideur dynamique.

Les forces dans le système de repérage global, (\vec{X}, \vec{Y}) , généralement utilisé comme référence pour la construction du modèle du système mécanique, s'écrivent à partir de l'angle de précession ϕ :

$$\begin{aligned} f_X &= f_r \cos \phi - f_t \sin \phi \\ f_Y &= f_r \sin \phi + f_t \cos \phi \end{aligned} \quad (2.82)$$

L'équation de Reynolds étant corroborée par des résultats expérimentaux pour quelques configurations et conditions d'opération du SqF [185][125][133], on l'utilise encore souvent pour décrire le champ de pression dans le film, malgré les formulations supplémentaires développées pour prendre en compte différents phénomènes pouvant intervenir dans le comportement du fluide. Nous jugeons ainsi pertinent d'exposer dans ce mémoire les techniques les plus répandues de résolution de cette équation, ce qui est fait dans ce qui suit.

2.8 Techniques de résolution de l'équation de Reynolds

2.8.1 Approximation palier court

Dans le cas d'un SqF à extrémités ouvertes, il est possible de démontrer, au travers d'une analyse dimensionnelle [170], que le gradient de pression circonférentielle peut être négligé devant le gradient de pression axial lorsque $L/2R \rightarrow 0$, d'où la désignation "palier court" pour cette approximation. L'équation de Reynolds devient donc :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (2.83)$$

Sous l'hypothèse de fluide incompressible et isovisqueux, l'intégration de l'équation 2.83, avec les conditions aux limites $P = 0$ en $z = \pm L/2$, donne :

$$p_c = \frac{6\mu}{h^3} \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) (e\dot{\phi} \sin \theta + \dot{e} \cos \theta) \quad (2.84)$$

L'approximation palier court est considérée comme valable pour des rapports $L/2R$ inférieurs à 0,25 [170]. Il est important de remarquer que cette approximation ne permet d'imposer d'aucune condition aux limites en pression dans la direction circonférentielle.

Des méthodes d'intégration numérique assez simples [164] peuvent être employées pour approcher les intégrales 2.80. Le calcul des forces hydrodynamiques peut toutefois être accompli de façon analytique, grâce au tableau d'intégrales de Booker [12], qui permet d'évaluer des intégrales du type :

$$I_n^{lm} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin^l \theta \cos^m \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^n} d\theta \quad (2.85)$$

où θ_1 et θ_2 délimitent la zone non cavitée du film d'huile. Lorsque la condition de cavitation de Gumbel est utilisée, ces angles correspondent aux racines de l'équation 2.84. Si l'on emploie la condition de cavitation de Reynolds, θ_2 est obtenu en imposant $\partial P / \partial \theta = 0$.

L'intégration de l'expression 2.84 selon z permet d'écrire les forces radiale et tangentielle sous les formes :

$$\begin{aligned} f_r &= -\frac{\mu RL^3}{C^3} \left(I_3^{02} \dot{e} + I_3^{11} e \dot{\phi} \right) \\ f_t &= -\frac{\mu RL^3}{C^3} \left(I_3^{11} \dot{e} + I_3^{20} e \dot{\phi} \right) \end{aligned} \quad (2.86)$$

On obtient alors à l'aide du tableau d'intégrales de Booker [60] :

$$\begin{aligned} f_r &= -\beta_t \left(\frac{\mu RL^3}{C^3} \frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \right) \dot{e} - \beta_r \left(\frac{\mu RL^3}{C^3} \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \right) e \dot{\phi} \\ f_t &= -\beta_r \left(\frac{\mu RL^3}{C^3} \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \right) \dot{e} - \beta_t \left(\frac{\mu RL^3}{C^3} \frac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \right) e \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Les expressions ci-dessus sont connues comme *l'approximation d'Ocvirk*, et les coefficients β_r et β_t sont fonctions du modèle de cavitation utilisé. Si l'on considère qu'il n'y a pas de rupture dans le film (condition de Sommerfeld), on a $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 2\pi$, et par conséquent, $\beta_r = 0$ et $\beta_t = 2$. En supposant que l'amortisseur décrit des orbites presque circulaires et centrées, on constate que la condition de Gumbel fournit comme seuils de cavitation $\theta_1 \approx \pi$ et $\theta_2 \approx 2\pi$, ce qui correspond au modèle dit π -film. Dans ce cas, on arrive à $\beta_r = 1$ et $\beta_t = 1$.

Il convient de souligner que la condition de Sommerfeld est considérée comme raisonnable à condition que le SqF soit faiblement chargé et que son système d'alimentation le pressurise suffisamment de manière à éviter une rupture du film [123][124]. Quant au modèle π -film, il est important de faire remarquer que des orbites circulaires et centrées sont observées pour des rotors verticaux ainsi que pour des machines horizontales dont la position d'équilibre statique est également centrée [60][174].

2.8.2 Approximation palier long

Si le rapport $L/2R$ d'un SqF à extrémités ouvertes tend vers l'infini au lieu d'approcher zéro comme précédemment, c'est le gradient de pression axiale qui devient négligeable devant le gradient de pression circonférentiel, ce qui conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (2.88)$$

Pour un fluide incompressible et isovisqueux, l'intégration de l'équation 2.88, soumise à la condition de périodicité du champ de pression, laquelle peut s'écrire de manière générale $(P)_{\theta=\pm\pi} = 0$, fournit :

$$p_l = \left(\frac{6\mu R^2}{C^3} \right) \left(\left[\frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)^2} - \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon \cos \theta)^2} \right] \dot{e} - \left[\frac{2 \sin \theta (2 - \varepsilon \cos \theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon \cos \theta)^2} \right] e \dot{\phi} \right) \quad (2.89)$$

L'approximation palier long est raisonnable pour $L/2R > 2$ [170]. Elle est également correcte, quelle que soit la valeur de ce rapport, pour des amortisseurs quasiment fermés [178]. Ce cas de figure est observé lorsque l'on installe des joints aux extrémités du SqF, de façon à contraindre le fluide à s'écouler circonférentiellement. L'utilisation de l'approximation palier long ne permet pas que des conditions aux limites en pression dans la direction axiale soient définies.

A l'aide du tableau d'intégrales de Booker, les forces générées par le SqF avec l'approximation palier long s'écrivent [60] :

$$\begin{aligned} f_r &= -\beta_t \left(\frac{\mu L R^3}{C^3} \frac{6\pi}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \right) \dot{e} - \beta_r \left(\frac{\mu L R^3}{C^3} \frac{24\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)} \right) e \dot{\phi} \\ f_t &= -\beta_r \left(\frac{\mu L R^3}{C^3} \frac{24}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)} \right) \dot{e} - \beta_t \left(\frac{\mu L R^3}{C^3} \frac{12\pi}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right) e \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.90)$$

où $\beta_r = \beta_s = 1$ pour le modèle π -film et $\beta_r = 0, \beta_s = 2$ pour la condition de cavitation Sommerfeld.

2.8.3 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies s'applique à partir de la discrétisation du film, en éléments rectangulaires par exemple, comme le montre la figure 2.6. Les expressions des dérivées d'ordre n de la pression par rapport aux coordonnées spatiales sont obtenues en effectuant un développement de Taylor à l'ordre n au voisinage du point (i, j) . Pour un schéma d'ordre $n = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{i,j}}{\partial \theta} &= \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2} & \frac{\partial^2 p_{i,j}}{\partial \theta^2} &= \frac{2p_{i,j+1}}{\Delta \theta_1(\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2)} - \frac{2p_{i,j}}{\Delta \theta_1 \Delta \theta_2} + \frac{2p_{i,j-1}}{\Delta \theta_2(\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2)} \\ \frac{\partial p_{i,j}}{\partial z} &= \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{\Delta z_1 + \Delta z_2} & \frac{\partial^2 p_{i,j}}{\partial z^2} &= \frac{2p_{i+1,j}}{\Delta z_1(\Delta z_1 + \Delta z_2)} - \frac{2p_{i,j}}{\Delta z_1 \Delta z_2} + \frac{2p_{i-1,j}}{\Delta z_2(\Delta z_1 + \Delta z_2)} \end{aligned} \quad (2.91)$$

On retrouve les expressions classiques des différences finies centrées du deuxième ordre pour un maillage régulier, en imposant $\Delta z_1 = \Delta z_2$ et $\Delta \theta_1 = \Delta \theta_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{i,j}}{\partial \theta} &= \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta \theta} & \frac{\partial^2 p_{i,j}}{\partial \theta^2} &= \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta \theta^2} \\ \frac{\partial p_{i,j}}{\partial z} &= \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta z} & \frac{\partial^2 p_{i,j}}{\partial z^2} &= \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta z^2} \end{aligned} \quad (2.92)$$

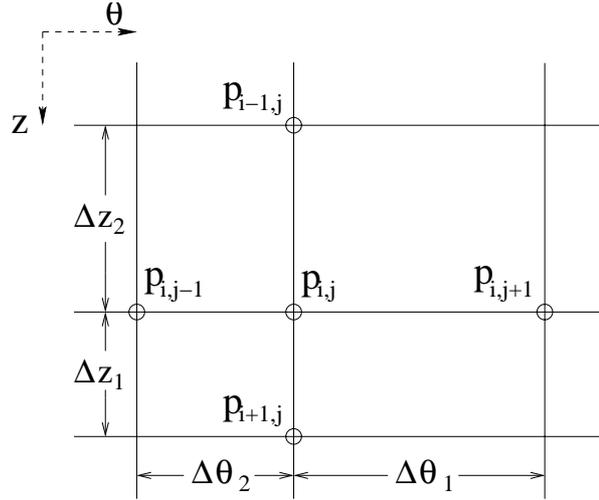


FIG. 2.6: Schéma aux différences finies

Avant de remplacer les différences finies dans l'équation de Reynolds, 2.24, cette dernière est réécrite en tenant compte de l'expression de l'épaisseur du film, équation 2.25, et de l'hypothèse d'incompressibilité :

$$\frac{-3h^2 e \sin \theta}{12R^2 \mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{h^3}{12R^2 \mu} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \dot{e} \cos \theta + e \dot{\phi} \sin \theta \quad (2.93)$$

En introduisant les expressions 2.91, ou 2.92, dans l'équation ci-dessus, on arrive à :

$$\alpha_1 p_{i,j} + \alpha_2 p_{i,j+1} + \alpha_3 p_{i,j-1} + \alpha_4 p_{i+1,j} + \alpha_5 p_{i-1,j} = \beta \quad (2.94)$$

où les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_5, \beta$ sont explicités dans le tableau 2.1.

L'évaluation de ces coefficients aux points intérieurs du maillage fournit un système d'équations algébriques qui peut s'écrire sous la forme générale :

$$[K]\{p\} = \{\beta\} \quad (2.95)$$

où $[K]$ est la matrice de fluidité. Afin de compléter le système ci-dessus, des conditions aux limites doivent être définies pour les points axiaux extrêmes du maillage, $p_{1,j}$ et $p_{N,j}$, $j = 1, \dots, M$. Selon la discussion précédente sur l'étanchéité du SqF, lorsque les extrémités de l'amortisseur sont ouvertes, on impose les conditions aux limites essentielles suivantes :

$$\begin{aligned} p_{1,j} &= p_{gext} && \text{où } p_{gext} \text{ est la pression extérieure à l'extrémité gauche du SqF} \\ p_{N,j} &= p_{dext} && \text{où } p_{dext} \text{ est la pression extérieure à l'extrémité droite du SqF} \end{aligned} \quad (2.96)$$

	maillage irrégulier	maillage régulier
α_1	$-\frac{h^3}{6\mu} \left(\frac{1}{R^2 \Delta\theta_1 \Delta\theta_2} + \frac{1}{\Delta z_1 \Delta z_2} \right)$	$-\frac{h^3}{6\mu} \left(\frac{1}{R^2 \Delta\theta^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)$
α_2	$\frac{1}{12R^2\mu} \left(\frac{-3h^2 e \sin \theta}{\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2} + \frac{2h^3}{\Delta\theta_1(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2)} \right)$	$\frac{1}{12R^2\mu} \left(\frac{-3h^2 e \sin \theta}{2\Delta\theta} + \frac{h^3}{\Delta\theta^2} \right)$
α_3	$\frac{1}{12R^2\mu} \left(\frac{3h^2 e \sin \theta}{\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2} + \frac{2h^3}{\Delta\theta_2(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2)} \right)$	$\frac{1}{12R^2\mu} \left(\frac{3h^2 e \sin \theta}{2\Delta\theta} + \frac{h^3}{\Delta\theta^2} \right)$
α_4	$\frac{h^3}{6\mu} \frac{1}{\Delta z_1(\Delta z_1 + \Delta z_2)}$	$\frac{h^3}{12\mu \Delta z^2}$
α_5	$\frac{h^3}{6\mu} \frac{1}{\Delta z_2(\Delta z_1 + \Delta z_2)}$	$\frac{h^3}{12\mu \Delta z^2}$
β	$\dot{e} \cos \theta + e\dot{\phi} \sin \theta$	$\dot{e} \cos \theta + e\dot{\phi} \sin \theta$

TAB. 2.1: Coefficients de l'expression 2.94

Des conditions aux limites naturelles sont prises en compte au travers de l'utilisation d'un schéma aux différences finies d'ordre 1 à gauche à l'extrémité droite et à droite à l'extrémité gauche du SqF. Pour un maillage rectangulaire les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 -\frac{h_j^3}{12\mu} \frac{p_{1,j} - p_{2,j}}{\Delta z} &= q_g \\
 -\frac{h_j^3}{12\mu} \frac{p_{N,j} - p_{N-1,j}}{\Delta z} &= q_d
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

où q_g et q_d sont les flux linéiques sortant respectivement par les extrémités gauche et droite de l'amortisseur. On remarque que si le SqF est étanche, q_g et q_d sont nuls et par conséquent $p_{1,j} = p_{2,j}$ et $p_{N,j} = p_{N-1,j}$.

Il convient de souligner encore que la géométrie cylindrique du SqF impose une condition de périodicité sur la variable θ . Ce fait doit être pris en compte lors de la définition de la matrice de fluidité de l'équation 2.95.

La résolution du système d'équations composé par 2.95, 2.96 et 2.97 peut s'effectuer soit par des méthodes itératives soit par des méthodes directes. Ces dernières, basées sur l'inversion de $[K]$, permettent un calcul plus rapide, mais requièrent toutefois plus de mémoire.

2.8.4 Méthode des éléments finis

Pour un fluide incompressible, la méthode des éléments finis s'appuie sur une approche variationnelle qui consiste à minimiser la fonctionnelle suivante [128] :

$$\Phi\{p\} = \int_{\Omega} - \left[- \left(\frac{h^3}{12\mu} \nabla p \right) \cdot \nabla p - 2 \frac{\partial h}{\partial t} p \right] d\Omega + 2 \int_{\Gamma_n} q p d\Gamma_n \quad (2.98)$$

où Ω correspond à un domaine borné, délimité par la frontière Γ et défini dans un espace euclidien bidimensionnel, et q est le flux linéaire normal à Γ_n , le segment de la frontière soumis à des conditions aux limites naturelles.

La méthode des éléments finis équivaut essentiellement à l'application de la méthode de Rayleigh-Ritz [56] à N sous-domaines Ω_e , obtenus à partir de la discrétisation du domaine Ω . Le champ de pression à l'intérieur de chaque sous-domaine, dit élément, est supposé décrit par l'interpolation d'un nombre fini J de valeurs de pression dans le sous-domaine. La distribution de pression dans un élément quelconque \mathcal{E} s'écrit ainsi :

$$p_{\mathcal{E}}(x, z) = \{f(x, z)\}\{p_i\} \quad \text{et} \quad (2.99)$$

$$\left\{ \frac{\partial p_{\mathcal{E}}}{\partial x}, \frac{\partial p_{\mathcal{E}}}{\partial z} \right\}^t = [g(x, z)]\{p_i\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

où $\{p_i\}_{J \times 1}$ est le vecteur des pressions nodales de l'élément et $\{f(x, z)\}_{1 \times J}$ le vecteur des fonctions d'interpolation, lesquelles doivent satisfaire notamment les critères suivants [56][128] :

- continuité inter-éléments, pour que le champ de pression soit continu sur tout le domaine;
- complétude, afin de permettre l'évaluation des états de pression constante;
- différentiabilité.

En étendant le vecteur $\{f(x, z)\}$ avec des zéros de façon à ce que les seules valeurs non nulles soient celles associées aux noeuds de l'élément \mathcal{E} , on définit un nouveau vecteur $\{F(x, z)\}$ tel que :

$$p_{\mathcal{E}}(x, z) = \{F(x, z)\}\{P_i\} \quad \text{et} \quad (2.100)$$

$$\left\{ \frac{\partial p_{\mathcal{E}}}{\partial x}, \frac{\partial p_{\mathcal{E}}}{\partial z} \right\}^t = [G(x, z)]\{P_i\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{bmatrix}$$

où $\{P_i\}$ est le vecteur des pressions nodales de tout le domaine discrétisé. La fonctionnelle 2.98 peut alors s'exprimer en tant qu'une somme sur les N éléments de l'assemblage [128] :

$$\Phi\{p\} = \sum_{\mathcal{E}=1}^N \left[\left(\int_{\Omega_{\mathcal{E}}} \{P_i\}^t [G]^t [C_E] [G] + 2 \frac{\partial h_{\mathcal{E}}}{\partial t} \{F\} d\Omega_{\mathcal{E}} + 2 \int_{\Gamma_{n\mathcal{E}}} q_{\mathcal{E}} \{F\} d\Gamma_{n\mathcal{E}} \right) \{P\} \right] \quad (2.101)$$

avec,

$$[C_{\mathcal{E}}] = \text{diag}(0, 0, \dots, h_{\mathcal{E}}^3/12\mu, h_{\mathcal{E}}^3/12\mu, \dots, 0)$$

Les valeurs non nulles de la diagonale de $[C_{\mathcal{E}}]$ sont celles associées aux noeuds de l'élément \mathcal{E} . En notant

$$[K] = \sum_{\mathcal{E}=1}^N \int_{\Omega_{\mathcal{E}}} [G]^t [C_{\mathcal{E}}] [G] d\Omega_{\mathcal{E}} : \text{matrice de fluidité volumétrique;}$$

$$\{H\} = \sum_{\mathcal{E}=1}^N 2 \int_{\Omega_{\mathcal{E}}} \frac{\partial h_{\mathcal{E}}}{\partial t} \{F\} d\Omega_{\mathcal{E}} : \text{vecteur d'écrasement du film fluide;}$$

$$\{Q\} = \sum_{\mathcal{E}=1}^N 2 \int_{\Gamma_{n\mathcal{E}}} q_{\mathcal{E}} \{F\} d\Gamma_{n\mathcal{E}} : \text{vecteur flux aux frontières.}$$

l'équation 2.101 devient :

$$\Phi\{p\} = (\{P\}^t [K] + \{H\} + \{Q\}) \{P\} \quad (2.102)$$

La variation première de cette équation par rapport aux pressions nodales fournit :

$$[K]\{P\} = -\frac{1}{2}(\{H\} + \{Q\}) \quad (2.103)$$

Les références [128] et [13] présentent la matrice de fluidité et les vecteurs d'écrasement du film fluide et des flux aux frontières obtenus à partir de la discrétisation de la surface du SqF en éléments triangulaires à trois noeuds. Ils préconisent le raffinement du maillage au lieu de l'utilisation d'éléments de géométries plus complexes pour améliorer la précision de l'estimation des forces hydrodynamiques. Cependant, d'après les résultats de nos tests numériques, le raffinement requis pour une précision suffisante des calculs lors des fortes excentricités s'avère prohibitif. Ce fait s'explique par le gradient de pression, très important, qui se développe notamment au sommet du champ de pression. Une évaluation plus précise des forces générées par l'amortisseur nécessiterait ainsi l'emploi de fonctions d'interpolations de degré plus élevé.

Les équations résultant de l'application de la méthode des différences finies correspondent à un sous-ensemble des équations issues de la méthode des éléments finis [128]. L'avantage principal de cette dernière concerne sa plus grande souplesse vis à vis de la géométrie devant être discrétisée. Puisque la géométrie du SqF est très simple, la complexité de la programmation de la méthode des éléments finis n'est pas compensée, si bien que nous retiendrons la méthode des différences finies pour la résolution numérique de l'équation de Reynolds.

L'un des principaux goulots d'étranglement des méthodes numériques correspond à la détermination de la matrice de fluidité $[K]$. Afin de rendre plus efficace cette étape du calcul du champ de pression du SqF, nous proposons l'approche suivante. Lorsque le problème est traité dans le système de repérage global (\vec{X}, \vec{Y}) (figure 2.1), l'épaisseur du film d'huile s'écrit :

$$h = C + X_e \cos \hat{\theta} + Y_e \sin \hat{\theta} \quad (2.104)$$

En développant le terme h^3 présent dans la matrice de fluidité, on peut l'écrire sous la forme factorisée :

$$\begin{aligned} [K] = & [K_0] + [K_1]X_e + [K_2]Y_e + [K_3]X_eY_e + [K_4]X_e^2 + [K_5]Y_e^2 + [K_6]X_e^2Y_e \\ & + [K_7]X_eY_e^2 + [K_8]X_e^3 + [K_9]Y_e^3 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Pour un maillage donné, les matrices $[K_i]$, $i = 0, \dots, 9$, sont constantes et n'ont qu'à être calculées une seule fois. La matrice de fluidité est ainsi obtenue à partir de la position (X_e, Y_e) de l'amortisseur en évaluant l'équation ci-dessus, ce qui permet d'éviter la procédure d'assemblage de $[K]$ des méthodes numériques.

2.8.5 Approches analytiques et semi-analytiques

L'intérêt de simplifier l'équation régissant le comportement du SqF au travers des approximations palier court et palier long réside dans la possibilité d'obtenir des formules analytiques pour le champ de pression, ce qui permet une évaluation rapide des forces hydrodynamiques générées par l'amortisseur. La validité de ces approximations dépend néanmoins de la géométrie du SqF aussi bien que des conditions d'étanchéité à ses extrémités. Si l'amortisseur ne peut être classé ni court ni long, il est communément dit *fini*. La détermination du champ de pression dans ce cas nécessite la résolution de l'équation de Reynolds dans sa forme bidimensionnelle, ce qui peut être accompli en employant les méthodes des différences finies ou des éléments finis décrites précédemment. Cependant, la précision requise sur la solution fait que ces méthodes sont considérées comme excessivement longues pour utilisation lors des simulations en dynamique de rotors [156].

Afin d'éviter le haut coût temporel des méthodes numériques, des techniques analytiques et semi-analytiques ont été appliquées à l'équation de Reynolds bidimensionnelle pour en déduire des solutions approximatives. Ces techniques s'appuient sur le fait, déjà souligné auparavant dans ce texte, que l'équation de Reynolds pour un fluide incompressible et isovisqueux est formellement linéaire lorsque la cavitation est négligée. Cela légitime l'utilisation du principe de superposition, la cavitation étant traitée de manière simplifiée a posteriori.

Deux des approches répandues dans la littérature pour modéliser des SqF finis sont : l'introduction de termes de correction dans la solution palier court et l'utilisation de facteurs de fuite avec la solution palier long. Nous exposons ci-après quelques exemples importants de formulation analytique et semi-analytique, classés selon ces deux types d'approche.

2.8.5.1 Correction de l'approximation palier court

L'équation de Reynolds bidimensionnelle appliquée au problème d'un SqF, 2.24, se simplifie à l'expression suivante pour un amortisseur aligné dont le fluide est incompressible et isovisqueux :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 12\mu(\dot{e} \cos \theta + e\dot{\phi} \sin \theta) \quad (2.106)$$

Si le fluide est alimenté par les extrémités de l'amortisseur, les conditions aux limites classiques s'écrivent :

$$\begin{aligned} p &= p_{gext} \quad \text{à } z = -L/2 \\ p &= p_{dext} \quad \text{à } z = L/2 \end{aligned} \quad (2.107)$$

Cet ensemble de conditions aux limites peut décrire de manière simplifiée un amortisseur ouvert dont l'alimentation est effectuée par l'intermédiaire d'une gorge circonférentielle. Dans ce cas, on considère que la gorge sépare le SqF en deux parties et on modélise chacune d'elles indépendamment, la pression à une extrémité étant celle du système d'alimentation et à l'autre celle de l'environnement.

En négligeant à ce stade de l'analyse le phénomène de cavitation, la solution de l'équation 2.106, soumise aux conditions aux limites 2.107, peut s'écrire d'après le principe de superposition [132] :

$$p = \dot{e}p_r + e\dot{\phi}p_t + \frac{p_{gext} - p_{dext}}{2}z + \frac{p_{gext} + p_{dext}}{2} \quad (2.108)$$

où p_r et p_t sont les solutions de :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p_r}{\partial \theta} \right) + h^3 \frac{\partial^2 p_r}{\partial z^2} = 12\mu \cos \theta \quad (2.109)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p_t}{\partial \theta} \right) + h^3 \frac{\partial^2 p_t}{\partial z^2} = 12\mu \sin \theta \quad (2.110)$$

avec les conditions aux limites $p_r = p_t = 0$ à $z = \pm L/2$.

En supposant que la forme du champ de pression ne varie pas dans la direction perpendiculaire à l'écoulement, dans le cas d'un palier court la direction circonférentielle, on propose pour les équations 2.109 et 2.110 une solution du type :

$$p_{r,t}(\theta, z) = \varphi(z)\hat{p}_{r,t}(\theta) \quad (2.111)$$

où $\hat{p}_{r,t}(\theta)$ sont les distributions de pression circonférentielles à une position axiale donnée et $\varphi(z)$ donne l'allure du profil de pression dans la direction axiale. Pour un SqF symétrique par rapport à $z = 0$, O'Donohue et al. [109] et Rohde et Li [141] proposent une fonction parabolique pour décrire ce profil :

$$\varphi(z) = \left(1 - 4\left(\frac{z}{L}\right)^2\right) \quad (2.112)$$

Les distributions de pression $\hat{p}_{r,t}(\theta)$ correspondent ainsi à celles au milieu de l'amortisseur et sont solutions des équations adimensionnelles suivantes [132] :

$$\Upsilon \frac{L^2}{R^2} \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{h}{C}\right)^3 \frac{d\hat{P}_r}{d\theta} \right] - 8 \left(\frac{h}{C}\right)^3 \hat{P}_r = \cos \theta \quad (2.113)$$

$$\Upsilon \frac{L^2}{R^2} \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{h}{C}\right)^3 \frac{d\hat{P}_t}{d\theta} \right] - 8 \left(\frac{h}{C}\right)^3 \hat{P}_t = -\sin \theta \quad (2.114)$$

avec $\hat{P}_{r,t} = \hat{p}_{r,t}C^2/(12\mu\Omega L^2)$. Les équations ci-dessus sont obtenues au travers de méthodes variationnelles, après le remplacement de 2.111 dans 2.109 et 2.110. Pour $\Upsilon = 1$, elles décrivent l'approximation de O'Donohue et al. et pour $\Upsilon = 0,8$, celle de Rohde et Li [132]. La détermination du champ de pression dans le film d'huile se réduit alors à la résolution numérique d'équations **unidimensionnelles**, à savoir 2.113 et 2.114.

Barrett, Allaire et Gunter [6] introduisent une solution de la forme 2.111 directement dans l'équation de Reynolds 2.106, sans la décomposer en termes de mouvement radial, mouvement tangential et conditions aux limites. Ce faisant, ils arrivent à :

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} - \left(\frac{\Theta}{R}\right)^2 \varphi(z) = \varsigma \quad (2.115)$$

avec,

$$\Theta = -\frac{1}{h^3\hat{p}(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(h^3 \frac{d\hat{p}(\theta)}{d\theta} \right)$$

$$\varsigma = \frac{12\mu}{h^3\hat{p}(\theta)} (\dot{e} \cos \theta + e\dot{\phi} \sin \theta)$$

En imposant comme conditions aux limites $\varphi = 0$ à $z = \pm L/2$ (extrémités ouvertes), ils parviennent à obtenir la solution suivante [6] :

$$\varphi = -\varsigma \left(\frac{R}{\Theta} \right)^2 \left[1 - \frac{\cosh(\Theta z/R)}{\cosh(\Theta L/2R)} \right] \quad (2.116)$$

Le terme multipliant ς dans l'équation ci-dessus peut être interprété comme un facteur de correction qui modifie la distribution de pression au milieu du SqF obtenue selon l'approximation palier court. Le champ de pression dans le film peut s'écrire alors en fonction de la solution palier court à $z = 0$, notée $\hat{p}_c(\theta)$, et de ce terme correctif [6] :

$$p(\theta, z) = 2\hat{p}_c(\theta) \left(\frac{2R}{L\Theta} \right)^2 \left[1 - \frac{\cosh(\Theta z/R)}{\cosh(\Theta L/2R)} \right] \quad (2.117)$$

Il reste encore à définir la fonction Θ pour déterminer le champ de pression. Barrett, Allaire et Gunter [6] en choisissent une expression asymptotique, dérivée lorsque $L/2R \rightarrow \infty$. En analysant l'équation 2.115, on constate qu'à cette limite $d\varphi/dz \rightarrow 0$ et $\varphi \rightarrow 1$, si bien que l'on obtient :

$$\Theta_{L/2R \rightarrow \infty}^2 = \psi^2 = -R^2 \frac{12\mu}{h^3 p_l} (\dot{e} \cos \theta - e \dot{\phi} \sin \theta) \quad (2.118)$$

où p_l est la solution palier long (expression 2.89). Afin de développer des formules semi-analytiques pour les forces hydrodynamiques, des moyennes pondérées des composantes radiale et tangentielle de la fonction ψ sont définies en adoptant la condition de cavitation π -film [6] :

$$\begin{aligned} \psi_r^2 &= \int_{\pi}^{2\pi} (\psi \cos \theta)^2 d\theta \\ \psi_t^2 &= \int_{\pi}^{2\pi} (\psi \sin \theta)^2 d\theta \end{aligned} \quad (2.119)$$

Pour des mouvements de précession ($\dot{e} = 0$), l'intégration des composantes radiale et tangentielle du champ de pression sur la surface de l'amortisseur fournit [6] :

$$\begin{aligned} f_{rt} &= \frac{8R^3}{L} \frac{1}{\psi_{rt}^2} \left[1 - \left(\frac{2R}{\psi_{rt}L} \right) \tanh \left(\frac{\psi_{rt}L}{2R} \right) \right] \int_{\theta_1}^{\theta_2} \hat{p}_{ct} \cos \theta d\theta \\ f_{tt} &= \frac{8R^3}{L} \frac{1}{\psi_{tt}^2} \left[1 - \left(\frac{2R}{\psi_{tt}L} \right) \tanh \left(\frac{\psi_{tt}L}{2R} \right) \right] \int_{\theta_1}^{\theta_2} \hat{p}_{ct} \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.120)$$

où \hat{p}_{ct} est la distribution de pression engendrée par un mouvement de précession, donnée par l'approximation palier court en $z = 0$. Les moyennes pondérées ψ_{rt}^2 et ψ_{tt}^2 ont pour expressions :

$$\psi_{rt}^2 = \frac{\pi(2 + \varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - \frac{4}{\sqrt{4 - \varepsilon^2}} \right]$$

$$\psi_{tt}^2 = \frac{\pi(2 + \varepsilon^2)}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 - \varepsilon^2}} \right]$$

On obtient de manière analogue pour des mouvements purement radiaux ($\dot{\phi} = 0$) :

$$f_{rr} = \frac{8R^3}{L} \frac{1}{\psi_{rr}^2} \left[1 - \left(\frac{2R}{\psi_{rr}L} \right) \tanh \left(\frac{\psi_{rr}L}{2R} \right) \right] \int_{\theta_1}^{\theta_2} \hat{p}_{cr} \cos \theta d\theta$$

$$f_{tr} = \frac{8R^3}{L} \frac{1}{\psi_{tr}^2} \left[1 - \left(\frac{2R}{\psi_{tr}L} \right) \tanh \left(\frac{\psi_{tr}L}{2R} \right) \right] \int_{\theta_1}^{\theta_2} \hat{p}_{cr} \sin \theta d\theta$$

(2.121)

où \hat{p}_{cr} est la pression engendrée par un mouvement radial, décrite par l'approximation palier court en $z = 0$. Les moyennes pondérées ψ_{rr}^2 et ψ_{tr}^2 sont données par :

$$\psi_{rr}^2 = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[\pi + \frac{2 \left(\pi - \arctan \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} / \varepsilon \right) \right)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - \frac{8 \left(\pi - \arctan \left(\sqrt{4 - \varepsilon^2} / \varepsilon \right) \right)}{\sqrt{4 - \varepsilon^2}} \right]$$

$$\psi_{tr}^2 = 2 \left[\frac{\pi - \arctan \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} / \varepsilon \right)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - \frac{\pi - \arctan \left(\sqrt{4 - \varepsilon^2} / \varepsilon \right)}{\sqrt{4 - \varepsilon^2}} \right]$$

En utilisant le principe de superposition, les forces hydrodynamiques du SqF pour un mouvement quelconque s'écrivent :

$$\begin{aligned} f_r &= f_{rt} + f_{rr} \\ f_t &= f_{tt} + f_{tr} \end{aligned} \quad (2.122)$$

Il est important de souligner les limites des méthodes semi-analytiques exposées ci-dessus. On remarque tout d'abord qu'elles utilisent comme conditions aux limites celles d'un SqF à extrémités ouvertes. Par conséquent, elles ne permettent pas la prise en compte d'une restriction sur l'écoulement axial due à la présence de joints. Dans ce cas, l'hypothèse de profil parabolique est mise en défaut et conduit à des résultats incorrects [55]. Hahn et Rezvani [132] montrent que cette hypothèse ne fournit

des résultats satisfaisants que pour des SqF ayant un rapport $L/2R < 1$. La correction proposée par Barrett, Allaire et Gunter [6] s'avère limitée à une plage de valeurs intermédiaires de $L/2R$, à cause de l'approche asymptotique employée [6]. De plus, dans tous les travaux cités, la cavitation et le système d'alimentation sont traités de manière simplifiée et le fluide est supposé isovisqueux et incompressible.

Dans le contexte des approximations du type 2.111, il convient de citer encore le travail de Rohde [140]. Il montre comment appliquer un principe de maximum pour des équations elliptiques pour encadrer en tout point la solution de l'équation de Reynolds.

2.8.5.2 Correction de l'approximation palier long

Afin d'introduire dans la solution palier long des termes permettant la prise en compte d'un certain niveau de fuite par les extrémités du SqF, on propose des solutions du type suivant pour résoudre l'équation de Reynolds :

$$p(x, z) = p_p(x) + p_{hc}(x)p_{ha}(z) \quad (2.123)$$

où $p_p(x)$ est la solution particulière de l'équation de Reynolds et le produit $p_{hc}(x)p_{ha}(z)$ la solution de l'équation homogène associée :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h(x)^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + h(x)^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (2.124)$$

La solution particulière est supposée dépendre uniquement de la coordonnée circonférentielle, si bien que l'on retrouve l'équation de Reynolds unidimensionnelle 2.88, dont la solution correspond à la distribution de pression selon l'approximation palier long, 2.89. Pour la partie homogène de la solution on obtient :

$$p_{ha} \left(3h^2 \frac{dh}{dx} \frac{dp_{hc}}{dx} + h^3 \frac{d^2 p_{hc}}{dx^2} \right) + p_{hc} h^3 \frac{d^2 p_{ha}}{dz^2} = 0 \quad (2.125)$$

L'expression de la solution homogène sous la forme d'un produit de variables permet de réduire le problème à la résolution de deux équations différentielles ordinaires, reliées par leurs valeurs propres [157] [54] :

$$\frac{3 \frac{dh}{dx} \frac{dp_{hc}}{dx} + \frac{d^2 p_{hc}}{dx^2}}{p_{hc}} = - \frac{\frac{d^2 p_{ha}}{dz^2}}{p_{ha}} = -\lambda^2 \quad (2.126)$$

$$\frac{d^2 p_{ha}}{dz^2} - \lambda^2 p_{ha} = 0 \quad (2.127)$$

$$\frac{3}{h} \frac{dh}{dx} \frac{dp_{hc}}{dx} + \frac{d^2 p_{hc}}{dx^2} + \lambda^2 p_{hc} = 0 \quad (2.128)$$

La résolution de l'équation 2.127 est relativement simple et peut être accomplie directement par intégration [157] [54] :

$$p_{ha}(z) = a \cosh(\lambda z) \quad (2.129)$$

La résolution de l'équation 2.128, par contre, est sensiblement plus complexe. FUERST, WEBER et BRITO [54] étudient le problème d'un palier à patin, pour lequel l'épaisseur du film est une fonction linéaire de x . L'équation différentielle 2.128 devient dans ce cas un problème de valeurs aux frontières du type Sturm-Liouville [54]. En imposant comme conditions aux limites des pressions constantes aux bords du patin, ils mettent en avant une solution basée sur une série de Bessel-Fourier³.

SHAWKI, MOKHTAR et SAFAR [157] analysent le cas d'un palier hydrodynamique et déduisent des termes correctifs associés à l'effet de Couette et à l'effet de Poiseuille. Pour ce dernier, ils définissent les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} p_{hc}(R\pi/2)p_{ha}(z) &= p_{hc}(R3\pi/2)p_{ha}(z) = 0 \\ p_{hc}(x)p_{ha}(L/2) &= p_{hc}(x)p_{ha}(-L/2) = -p_l(x) \end{aligned} \quad (2.130)$$

où $p_l(x)$ est la distribution de pression engendrée par l'effet de Poiseuille selon l'approximation palier long. L'application d'une méthode de calcul variationnel à une forme adimensionnelle de l'équation 2.128 aboutit à :

$$p_{hc}(x)p_{ha}(z) = \frac{R^2 \mu \omega}{C^2} \sum_k \sum_n B_k \frac{x_{kn} \sin(n(\theta - \pi/2)) \cosh(\lambda_k z/R)}{(h/C)^{3/2}} \quad (2.131)$$

où ω est la vitesse angulaire du rotor et x_{kn} est déterminé en résolvant le problème aux valeurs propres [157] :

$$([\Xi] - [\lambda^2])\{x\} = 0 \quad (2.132)$$

3. L'expression obtenue pour le champ de pression est omise ici, car elle ne s'applique pas directement au problème d'un SqF.

avec,

$$\Xi_{mn} = S_{mn} + mn\delta_{mn}$$

$$S_{mn} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{3}{2h^2\pi} \left[\left(\frac{dh}{d\theta} \right)^2 + 2h \frac{d^2h}{d\theta^2} \right] \sin \left[m \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] \sin \left[n \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] d\theta$$

Les coefficients B_k , calculés à partir des conditions aux limites 2.130, valent [157] :

$$B_k = -\frac{R^2\mu\omega}{C^2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{(h/C)^{3/2} p_l \Psi_k}{\frac{\pi}{2} \cosh \left(\lambda_k \frac{L}{2R} \right)} d\theta \quad (2.133)$$

avec,

$$\Psi_k(\theta) = \sum_n x_{kn} \sin \left[n \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

Après l'évaluation du terme correctif donné par l'équation 2.131, on superpose celui-ci la solution palier long pour obtenir le champ de pression dans le film d'huile.

Bien que la méthode de correction de l'approximation palier long soit illustrée ci-dessus pour la résolution de l'équation de Reynolds, TICHY [178], SAN ANDRÉS et VANCE [151] et ZHANG et ROBERTS [204] utilisent des approches similaires sur des formes simplifiées de l'équation de Navier-Stokes afin de tenir compte des effets d'inertie, ainsi que du caractère fini du SqF.

Il est important d'observer que les formulations ayant pour but de corriger la distribution de pression prédite par l'approximation palier long s'appuient, comme celles visant à généraliser le modèle palier court, sur l'hypothèse d'incompressibilité et d'isoviscosité du fluide amortisseur ainsi que sur un traitement simplifié de la condition de cavitation et du système d'alimentation.

2.9 Conclusion

Ce chapitre tente d'englober les phénomènes les plus importants pouvant intervenir dans le comportement dynamique d'un film fluide. On peut constater que la modélisation d'un amortisseur *squeeze film* repose sur une théorie très vaste et riche, qui touche de nombreux domaines de la mécanique des fluides, si bien qu'il est très difficile de développer une description générale du problème. Il convient ainsi de cibler les applications auxquelles ce travail est censé apporter une contribution significative, pour réduire le spectre théorique devant être abordé. Comme souligné dans le chapitre introducteur, nous nous intéresserons principalement à l'influence du SqF sur la dynamique des machines tournantes, plus particulièrement dans le cadre d'applications aéronautiques. Les propriétés attribuées au fluide amortisseur seront ainsi proches de celles d'une huile minérale et les hypothèses adoptées tout au long

de ce travail sont :

1. Le fluide est newtonien
2. L'écoulement est laminaire
3. Le fluide est incompressible et isovisqueux
4. Les pistes délimitant le film sont indéformables

Nous discuterons de ces hypothèses dans les perspectives présentées lors de la conclusion de ce mémoire.

Chapitre 3

Méthodes de calcul en dynamique non linéaire appliquées au *squeeze film*

La simulation de la dynamique d'un ensemble mécanique comprend en général le calcul de réponses transitoires et d'orbites stationnaires, ainsi que l'analyse de leur stabilité.

Pour obtenir des réponses transitoires, de nombreuses méthodes d'intégration numérique temporelle, souvent disponibles dans des logiciels commerciaux, peuvent être utilisées. Subbaraj et Dokainish [165][42] présentent une description détaillée des techniques implicites et explicites les plus répandues. L'intégration temporelle est indispensable quand on cherche à déterminer, par exemple, la réponse d'un rotor lors d'une montée en vitesse rapide, quand les dispositifs de freinage sont actionnés ou encore lorsque l'orbite stationnaire du système est perturbée par une charge soudaine.

L'intégration temporelle devient néanmoins trop coûteuse en terme de temps de calcul pour la réalisation d'études paramétriques sur la réponse en fréquence de l'ensemble. Dans ce cas, des méthodes spécifiques pour le calcul d'orbites stationnaires, de la transmissibilité (rapport entre la force transmise par le palier et la charge dynamique agissant sur le rotor) et pour l'analyse de la stabilité s'avèrent plus adéquates d'un point de vue industriel parce que plus performantes. En ce qui concerne les problèmes linéaires, les bases mathématiques nécessaires à ces méthodes sont depuis longtemps bien établies. L'intérêt porté au développement d'outils de calcul appliqués à la dynamique non linéaire s'est considérablement accru à partir des années 80 [104].

Dans la littérature, l'étude de l'influence du SqF sur le comportement de systèmes mécaniques se restreint presque exclusivement à la dynamique de machines tournantes. Les modèles de rotors utilisés se sont complexifiés au fur et à mesure que les méthodes de calcul non linéaire, aussi bien que les moyens informatiques pour les mettre en œuvre, se sont développés. En partant du modèle de rotor rigide employé dans les années 70, on est arrivé aux modèles éléments finis à plusieurs degrés de liberté actuels, en passant par un modèle intermédiaire très important, celui du rotor Jeffcott.

Ce chapitre est consacré à la présentation de l'évolution des modèles de machines tournantes, ainsi que des outils de calcul non linéaire permettant d'en simuler le comportement dynamique. Nous nous attacherons plus particulièrement aux méthodes de détermination d'orbites stationnaires et d'analyse

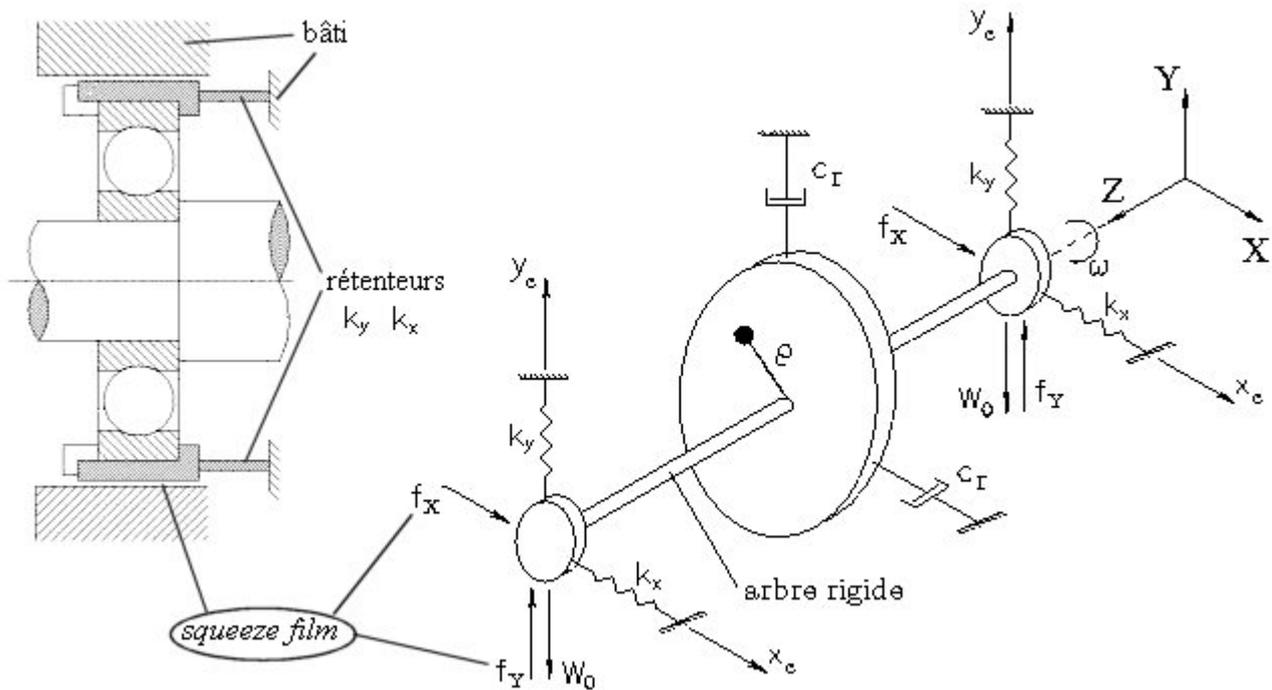


FIG. 3.1: Modèle du rotor rigide

de la stabilité les plus répandues actuellement pour le traitement de systèmes à plusieurs degrés-de-liberté comportant des SqF. Ainsi, nous mettrons en relief les méthodes du tir, de la balance harmonique et de la collocation trigonométrique. Une étude explicite sur les méthodes d'intégration temporelle ne sera pas effectuée. Cependant, on pourra en tirer quelques conclusions à partir de la performance de la méthode de tir, dont la formulation se situe dans le domaine temporel.

3.1 Rotor rigide

Un rotor peut être considéré comme rigide lorsqu'il tourne à des vitesses sensiblement inférieures aux vitesses critiques associées à la flexion de l'arbre [43]. Outre la simplicité du modèle découlant d'une telle hypothèse, la réalisation de calculs pour un rotor rigide est intéressante d'un point de vue de dimensionnement du bâti. En effet, puisque les éléments tournants ne se déforment pas, la charge dynamique est entièrement transmise au palier, si bien que la transmissibilité calculée est maximale [188].

Le modèle, présenté dans la figure 3.1, se traduit par un système masse-ressort-amortisseur qui décrit des mouvements de translation dans deux directions perpendiculaires, couplées par l'intermédiaire de l'action du SqF :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_r & 0 \\ 0 & m_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_e \\ \ddot{Y}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_r & 0 \\ 0 & c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_e \\ \dot{Y}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_e \\ Y_e \end{Bmatrix} = \\
& \begin{Bmatrix} \varrho m_r \omega^2 \cos(\omega t) \\ \varrho m_r \omega^2 \sin(\omega t) - W_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_X(X_e, Y_e, \dot{X}_e, \dot{Y}_e, \ddot{X}_e, \ddot{Y}_e) \\ f_Y(X_e, Y_e, \dot{X}_e, \dot{Y}_e, \ddot{X}_e, \ddot{Y}_e) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

où,

X_e, Y_e : déplacements du rotor dans les directions x et y ;

f_X, f_Y : forces non linéaires du SqF;

ω : vitesse de rotation du rotor;

k_x, k_y : raideur des rétenteurs dans les directions x et y ;

m_r : masse totale du rotor;

c_r : amortissement visqueux;

ϱ : excentration de la masse du rotor;

W_0 : force de pesanteur.

PAN et TONNESEN [115] utilisent le modèle de rotor rigide pour vérifier l'influence de l'excentration initiale du SqF due à la pesanteur sur le comportement dynamique de l'ensemble. En modélisant l'amortisseur selon l'approximation palier court et les conditions de cavitation π -film et 2π -film, ils calculent les orbites synchrones autour d'une position d'équilibre excentrée, les termes asynchrones de la réponse étant pris en compte au travers d'une technique de perturbation. Leurs résultats mettent en évidence l'effet de portance des forces hydrodynamiques visqueuses, qui tendent à recentrer l'amortisseur au cours de la montée en vitesse. Ils constatent également la possibilité de dédoublement de période à basse vitesse (composante synchrone faible) lorsque l'excentration initiale est importante (composante statique forte).

HAHN [60] utilise l'approximation palier court et une correction de l'approximation palier long, avec les modèles de cavitation π -film et 2π -film, pour étudier l'influence du SqF sur le comportement dynamique d'un rotor rigide. Sous l'hypothèse que l'amortisseur décrit des orbites circulaires et centrées, il obtient une expression permettant le calcul itératif de l'excentricité du SqF. En perturbant les orbites ainsi déterminées dans le système de repérage local (\vec{r}, \vec{t}) (voir figure 2.1), la stabilité est analysée selon le critère de Routh-Hurwitz [97]. HAHN [60] met en évidence l'existence de plages d'opération bi-stable ainsi que des phénomènes de saut. Il conclut que le SqF pressurisé (non cavitant) élimine la possibilité d'opération bi-stable, à condition d'être monté avec des retenteurs. Cette configuration procure, par contre, une capacité d'isolation vibratoire moins importante que celle du SqF non pressurisé (cavitant).

TAYLOR et KUMAR [173] analysent la dynamique d'un rotor rigide monté sur des SqF, décrits

selon l'approximation palier court et les conditions de cavitation π -film et 2π -film. Ils calculent des orbites stationnaires ainsi que des mouvements transitoires en intégrant l'équation de mouvement à l'aide de la méthode de Runge-Kutta-Merson à pas de temps variable. Le travail permet de soulever un certain nombre d'inconvénients associés à l'étude du SqF par intégration temporelle, à savoir : temps de calcul élevé, incertitude sur l'obtention de toutes les réponses possibles, difficulté de définir un critère d'arrêt sur la convergence d'un régime stationnaire et complexité d'interprétation des résultats.

Afin de surmonter les inconvénients de l'intégration temporelle, TAYLOR et KUMAR [174] proposent ultérieurement une méthode itérative de calcul de l'excentricité de l'orbite stationnaire du SqF. Cette méthode s'applique à une expression algébrique découlant de manipulations de l'équation de mouvement adimensionnelle du rotor rigide, en admettant que celui-ci décrive des orbites circulaires et centrées.

LI et TAYLOR [85] reprennent plus tard la stratégie d'intégration temporelle pour étudier des régimes asynchrones de la dynamique de rotors rigides montés sur des SqF. Pour une configuration centrée (pas d'excentration statique), ils identifient par l'analyse de diagrammes de Poincaré [105] des mouvements quasi-périodiques, lesquels sont observés à haute vitesse de rotation pour un fluide amortisseur à basse viscosité. Ils confirment les soupçons de PAN et TONNESEN [115] à propos de l'existence de régimes d'opération sous-harmoniques. Ils constatent en effet des dédoublements de la période de la réponse du rotor lorsque la pesanteur provoque une excentration importante au niveau du SqF.

FENG et HAHN [51] examinent les effets de la pénétration d'air dans le film d'huile sur la dynamique d'un rotor rigide. Ils utilisent les modèles de Hayward et d'Isbin [200] pour déterminer la viscosité du mélange air-huile. Les résultats des simulations numériques montrent que le comportement du SqF est très sensible au modèle de viscosité employé. FENG et HAHN constatent également que le modèle de cavitation classique de Gumbel (pressions tronquées à $p = p_{amb}$) aboutit à des prédictions similaires à celles obtenues avec le modèle de viscosité de Hayward. La corrélation de ces deux modèles avec des mesures expérimentales se révèle être satisfaisante pour quelques conditions d'opération.

ZHAO, LINNETT et MCLEAN [209] appliquent la méthode de la collocation trigonométrique et des techniques d'intégration numérique pour analyser la dynamique non linéaire d'un rotor rigide monté sur des paliers *squeeze film* statiquement excentrés. Les forces hydrodynamiques visqueuses sont déterminées à partir de l'approximation palier court et de la condition de cavitation de Gumbel. Compte tenu de la complexité du comportement dynamique du système, l'emploi de l'intégration temporelle s'avère parfois nécessaire pour la caractérisation complète de la réponse au balourd du rotor.

EL-SHAFEI et ERANKI [49] utilisent le modèle de rotor rigide pour illustrer l'application de la méthode de la linéarisation équivalente pour la détermination d'orbites elliptiques légèrement excentrées. Cette méthode permet l'extension des outils de calcul linéaire à l'analyse de la dynamique non linéaire de systèmes incorporant des SqF.

QINGCHANG, XAOHUA et DAWEI [122] étudient l'influence de l'alimentation du SqF par une gorge circonférentielle sur la performance du rotor rigide. Au lieu d'admettre l'hypothèse classique de pression constante dans la gorge, ils modélisent l'écoulement dans celle-ci afin d'en avoir une description plus réaliste. Ils constatent que la présence de la gorge réduit la capacité d'amortissement du SqF et

engendre une transmissibilité plus importante. Cet effet négatif s'accroît lorsque l'on augmente la largeur et la profondeur de la gorge.

HUSSAIN, KANKI et MUREITHI [69] ont mené récemment une étude sur le comportement d'un rotor rigide similaire à celui analysé par ZHAO, LINNETT et MCLEAN [209], l'objet du travail étant également les phénomènes non linéaires associés à l'amortisseur. En utilisant le modèle de cavitation π -film et l'approximation palier court, ils sont parvenus à simuler différents régimes asynchrones, notamment des mouvements sous-harmoniques et chaotiques.

D'autres études ont été réalisées sur le modèle de rotor rigide qui, malgré son extrême simplicité, permet de caractériser quelques aspects du comportement dynamique des amortisseurs *squeeze film* et d'identifier les principaux phénomènes non linéaires qu'ils peuvent engendrer. Des références supplémentaires sur la dynamique de rotors rigides montés sur des SqF peuvent être trouvées dans l'article de ADILETTA et PIETRA [1].

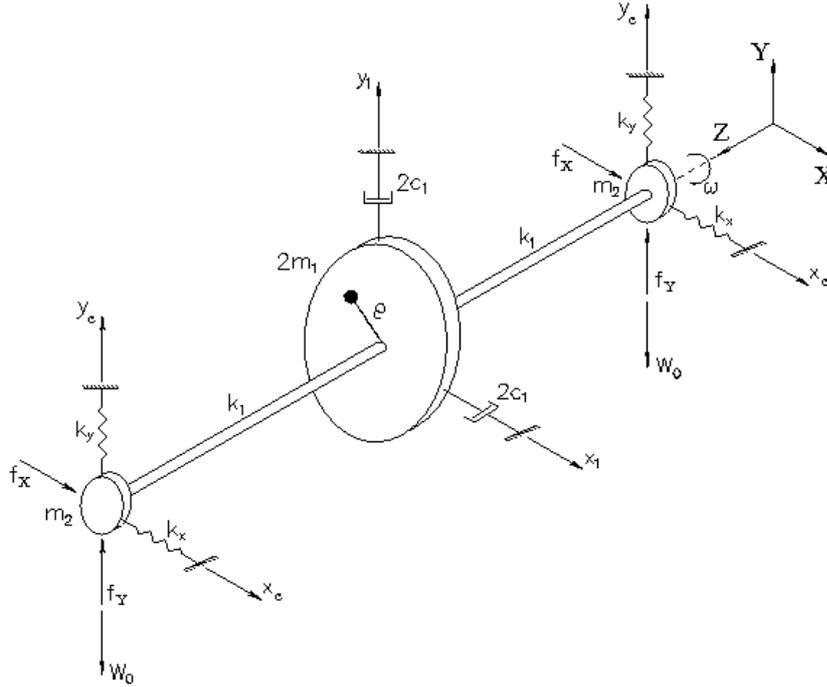
3.2 Rotor Jeffcott

Le modèle du rotor Jeffcott, montré dans la figure 3.2, correspond à un arbre monté sur des rotors souples en parallèle avec des amortisseurs *squeeze film*. La modélisation originelle de l'arbre comporte deux éléments finis hermitiens du type poutre d'Euler-Bernoulli [56]. Dans la configuration la plus répandue pour l'analyse de la dynamique du SqF, les rotations des noeuds sont supprimées, auquel cas les effets gyroscopiques sont négligés. La masse du système est concentrée au milieu et aux extrémités du rotor. On suppose qu'il existe au niveau du disque un déséquilibre résiduel donnant naissance à un balourd d'amplitude $\rho m_1 \omega^2$, et une trainée aérodynamique qui se traduit par un amortissement de type visqueux. Par rapport au modèle de rotor rigide, le Jeffcott permet de tenir compte de la flexibilité de l'arbre et de mieux décrire l'excitation synchrone due au déséquilibre [188].

En supposant que les paliers sont identiques et que le disque est placé au milieu du rotor, le système est symétrique. Par conséquent, il suffit de n'en modéliser qu'une moitié pour la description de sa dynamique. L'équation du mouvement dans le système de repérage global s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{X}_e \\ \ddot{Y}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{X}_e \\ \dot{Y}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ -k_1 & 0 & k_1 + k_x & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 + k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ X_e \\ Y_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho m_1 \omega^2 \cos(\omega t) \\ \rho m_1 \omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \\ -W_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_X \\ f_Y \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

où,

FIG. 3.2: *Modèle du rotor Jeffcott*

k_1 : rigidité en flexion de l'arbre;

$2m_1, m_2$: masses concentrées au milieu et aux extrémités du rotor, respectivement;

c_1 : amortissement visqueux au milieu du rotor;

ρ : excentration de la masse du disque;

Afin de généraliser les analyses dynamiques du rotor Jeffcott et d'éviter des problèmes de conditionnement numérique lors des simulations, l'équation ci-dessus est communément traitée sous forme adimensionnelle. Pour ce faire, on divise l'équation 3.2 par $(m_1+m_2)C\omega^2$, et on définit le temps adimensionnel $\tau = \omega t$, et la vitesse de rotation adimensionnelle $\omega_{ad} = \omega/\omega_c$ [96]. Le paramètre $\omega_c = \sqrt{k_1/m_1}$ correspond à la fréquence propre du rotor appuyé-appuyé.

RABINOWITZ et HAHN [123][124] étudient de manière détaillée la performance d'un rotor Jeffcott monté sur des SqF préchargés (excentration statique nulle). Sous l'hypothèse d'orbites circulaires et centrées, ils utilisent l'approximation palier court et les modèles de cavitation π -film et 2π -film pour obtenir la réponse au balourd du rotor et pour analyser sa stabilité. Le problème est traité en condensant les équations, exprimées dans un système de repérage tournant, sur les degrés-de-liberté non linéaires du modèle. Ils parviennent ainsi à calculer les orbites stationnaires du rotor à partir d'une équation algébrique non linéaire et à inférer de leur stabilité selon le critère de Routh-Hurwitz. En termes de phénomènes non linéaires pouvant advenir lors de l'utilisation d'un SqF, leurs résultats corroborent ceux obtenus avec le rotor rigide. En ce qui concerne l'influence des supports sur le comportement dynamique de l'ensemble, ils concluent que la réponse est dominée par le mode de

corps rigide lorsque l'amortissement généré par le SqF est faible. Par contre, la rigidification dynamique engendrée par un niveau d'amortissement trop important conduit le système à se comporter comme s'il était monté sur des paliers rigides. Ces mêmes chercheurs construisent plus tard des diagrammes pour le choix optimal d'amortisseurs pressurisés (modèle de cavitation 2π -film), installés dans des rotors fonctionnant au-dessous de sa deuxième vitesse critique [126].

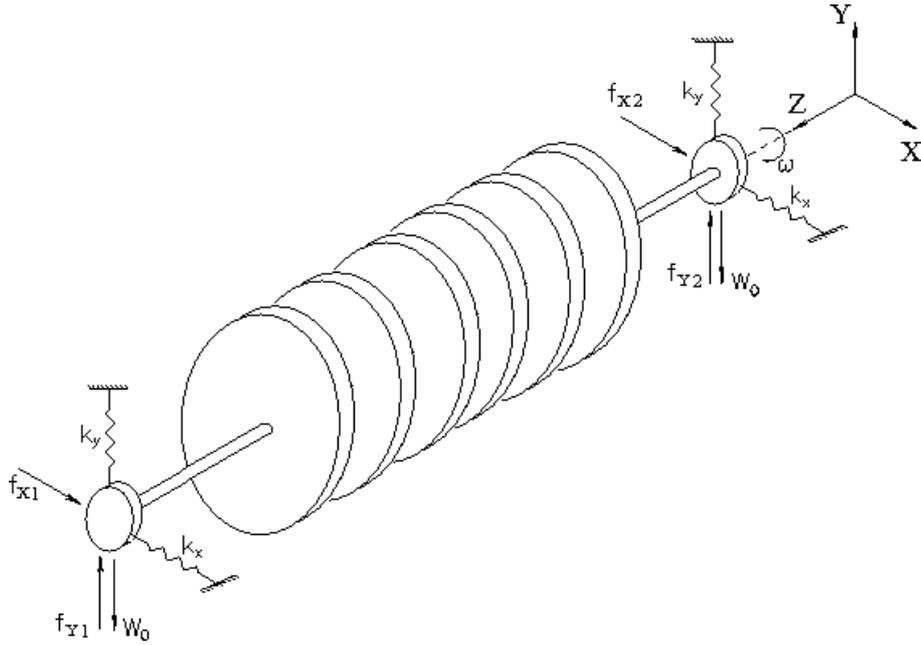
SAN ANDRÉS et VANCE [152] et EL-SHAFEI [44] [45] utilisent le modèle Jeffcott pour vérifier l'influence des effets d'inertie du fluide sur la réponse synchrone au balourd d'un rotor flexible. Le travail de SAN ANDRÉS et VANCE met en évidence l'augmentation de la masse effective du système, phénomène qui résulte de l'inertie rajoutée par l'écoulement du fluide. Pour un SqF court et non pressurisé décrivant des orbites circulaires et centrées, ils observent que ce phénomène engendre un accroissement du coefficient d'amortissement effectif direct et une diminution du coefficient d'amortissement effectif croisé, ce qui réduit la possibilité d'apparition de régimes d'opération bi-stable et de sauts lors du passage de la première vitesse critique du rotor. Par contre, la deuxième vitesse critique chute et l'amplitude vibratoire au niveau du disque devient sensiblement plus importante, notamment pour un SqF pressurisé (modèle de cavitation 2π -film). En ce qui concerne la transmissibilité, les effets d'inertie la font décroître sur le premier pic de résonance, mais engendre une augmentation sur le deuxième. Les résultats de l'étude de EL-SHAFEI pour un palier court non pressurisé (modèle de cavitation π -film) [44] corroborent les conclusions de SAN ANDRÉS et VANCE. EL-SHAFEI souligne encore l'éventuelle incompatibilité entre les besoins d'atténuation de l'amplitude de la réponse du rotor et de minimisation des charges transmises au bâti. Il examine dans un deuxième article [45] l'influence des effets d'inertie d'un palier long non pressurisé sur la dynamique du rotor Jeffcott. Il constate que cette configuration de l'amortisseur dégrade sa capacité d'isolation vibratoire et provoque des sauts sur la deuxième résonance du système lorsque les effets d'inertie deviennent très importants.

Le rotor Jeffcott a été également utilisé, outre dans le but de caractériser la performance d'un rotor flexible incorporant des SqF, en guise d'exemple pour illustrer l'application de méthodes de calcul non linéaire, développées suivant une formulation plus générale permettant le traitement de modèles plus complexes. Il est le cas de la collocation trigonométrique [208], de la balance harmonique [159][25] et de la méthode proposée McLEAN et HAHN [96] pour la détermination d'orbites synchrones.

3.3 Rotor réel

Les rotors rigide et Jeffcott ne représentent que de manière très approximative la dynamique d'un rotor réel. Par le terme *rotor réel*, nous désignons des machines tournantes complexes (voir figure 3.3), telles que des turbines d'avion, des compresseurs ou des pompes. Les modèles simples présentés dans les sections précédentes sont très souvent utilisés dans un but phénoménologique, car ils permettent une interprétation plus directe de l'influence de l'amortisseur *squeeze film* sur le comportement du système.

Afin de développer des modèles plus réalistes, on dispose principalement de la méthode des éléments finis [84][9]. Des modèles à paramètres concentrés (masses-ressorts-amortisseurs) sont également utilisés [32], mais ils ne permettent pas de tenir compte des effets gyroscopiques du système. Il convient de citer encore la méthode proposée par SHIAU, HWANG et CHANG [158], qu'ils nomment *Generalized Polynomial Expansion Method*, laquelle correspond fondamentalement à une généralisation de la

FIG. 3.3: *Modèle d'un rotor réel*

méthode de Rayleigh-Ritz.

La simulation de la dynamique de modèles complexes incorporant des éléments non linéaires requiert l'emploi de techniques de calcul assez robustes. La nécessité de la robustesse est encore plus aiguë quand on ne fait aucune hypothèse simplificatrice concernant le type de mouvement du SqF (synchrone, circulaire, centré,...). D'après notre recherche bibliographique, les méthodes les plus répandues pour l'analyse de la dynamique non linéaire de rotors montés sur des amortisseurs *squeeze film* sont la balance harmonique, la collocation trigonométrique et la méthode de tir. Ces trois méthodes seront exposées ci-après pour un système non linéaire dont l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$[M]\{\ddot{s}\} + [C]\{\dot{s}\} + [K]\{s\} = \{f_e\} + \{f_{nl}(s, \dot{s}, \ddot{s})\} \quad (3.3)$$

où,

$[M]$: matrice de masse;

$[C]$: matrice d'amortissement;

$[K]$: matrice de raideur;

$\{s\}$: vecteur des déplacements;

$\{f_e\}$: vecteur des forces d'excitation linéaires;

$\{f_{nl}(s, \dot{s}, \ddot{s})\}$: vecteur des forces non linéaires;

$\dot{}$: dérivée par rapport au temps.

Nous noterons n_{nl} le nombre de degrés de liberté non linéaires du modèle, n_t le nombre de degrés de liberté total et $n_l = n_t - n_{nl}$ le nombre de degrés de liberté linéaires.

Les problèmes en dynamique non linéaire présentant souvent des phénomènes particuliers tels que des sauts et des réponses multiples, il est alors nécessaire d'employer une technique de continuation couplée aux méthodes de calcul d'orbites stationnaires. Afin de suivre la solution lorsqu'elle varie de façon continue avec un paramètre, par exemple la fréquence de l'excitation, nous utiliserons la technique *pseudo-arc length*, dont la mise en œuvre sera expliquée à la suite de la présentation des trois méthodes citées plus haut.

L'analyse de la stabilité est une étape supplémentaire indispensable qui doit suivre le calcul des orbites stationnaires. Il convient de souligner que cette étape n'est pas requise lors des simulations par intégration temporelle, puisque les orbites stationnaires ainsi déterminés sont intrinsèquement stables [173]. Pour l'analyse de la stabilité, nous nous servirons de la théorie de Floquet [105], laquelle fera le sujet de la section 3.3.5 de ce chapitre.

3.3.1 Méthode de la balance harmonique

La méthode de la balance harmonique s'appuie sur l'hypothèse qu'un système excité par une force périodique du type,

$$\{f_e\} = \mathcal{R}e \left\{ \sum_{n=0}^{N_p} P_n e^{in\omega t} \right\} \quad \{P_0\} \text{ réel et } \{P_n\}, n = 1, \dots, N_p \text{ complexes} \quad (3.4)$$

possède une réponse stationnaire qui est elle aussi périodique. Par conséquent, elle peut s'écrire sous la forme d'une série de Fourier,

$$\{s(t)\} = \mathcal{R}e \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} S_n e^{in\omega t} \right\} \quad (3.5)$$

laquelle, tronquée à un certain ordre N , fournit une solution approximative de la réponse [142],

$$\{\tilde{s}(t)\} = \mathcal{R}e \left\{ \sum_{n=0}^N S_n e^{in\omega t} \right\} \quad \{S_0\} \text{ réel et } \{S_n\}, n = 1, \dots, N \text{ complexes} \quad (3.6)$$

telle que $\{\tilde{s}(t)\} \rightarrow \{s(t)\}$ lorsque $N \rightarrow \infty$ [118]. On obtient ainsi pour les vecteurs de vitesse et d'accélération :

$$\begin{aligned}\{\dot{\tilde{s}}\} &= \mathcal{R}e \left\{ \sum_{n=1}^N in\omega S_n e^{in\omega t} \right\} \\ \{\ddot{\tilde{s}}\} &= \mathcal{R}e \left\{ \sum_{n=1}^N -n^2\omega^2 S_n e^{in\omega t} \right\}\end{aligned}\tag{3.7}$$

Il convient de remarquer que dans l'équation 3.7 on suppose, pour une question de simplicité d'écriture, que la réponse du système n'est composée que de l'harmonique fondamental et de super-harmoniques. Une formulation similaire permettant la prise en compte de termes sous-harmoniques, ultra sous-harmoniques et ultra super-harmoniques s'écrit [71] :

$$\{\tilde{s}(t)\} = \mathcal{R}e \left\{ \sum_{n=0}^N S_n e^{ip_n\omega t} \right\}\tag{3.8}$$

où $p_n = \frac{a_n}{b_n}$, $n = 0, 1, \dots, N$, les variables a_n et b_n étant des nombres entiers, positifs et non nuls tels que p_n soit une fraction irréductible. La période fondamentale de cette solution est αT , où α correspond au plus petit commun multiple des b_n , et $T = 2\pi/\omega$ (période associée à la fréquence ω).

Les forces du SqF, fonctions de $\{s\}$, de $\{\dot{s}\}$ et éventuellement de $\{\ddot{s}\}$, dans le cas où les effets d'inertie du fluide sont pris en compte, sont également périodiques. Ainsi, le vecteur des forces non linéaires $\{f_{nl}(s, \dot{s}, \ddot{s})\}$ peut être approché par une série de Fourier tronquée au même ordre de la réponse :

$$\{\tilde{f}_{nl}(s, \dot{s})\} = \mathcal{R}e \left\{ \sum_{n=0}^N F_n e^{in\omega t} \right\} \quad \{F_0\} \text{ réel et } \{F_n\} \ n = 1, \dots, N \text{ complexes}\tag{3.9}$$

où les coefficients de Fourier des forces non linéaires, $\{F_n\}$, dépendent des coefficients de Fourier de la réponse, $\{S_n\}$.

Des expressions explicites de $\{F_n\}$ fonction de $\{S_n\}$ peuvent être parfois obtenues, à condition que la description mathématique de la non linéarité le permette. Si cela n'est pas possible, comme dans le cas des forces hydrodynamiques visqueuses calculées à partir de l'équation de Reynolds bidimensionnelle, une méthode AFT (*alternating frequency/time domain*) peut être utilisée [130]. Les coefficients $\{F_n\}$ sont alors estimés en suivant le schéma :

$$\{S^n\} \Rightarrow \{s(t)\}, \{\dot{s}(t)\}, \{\ddot{s}(t)\} \Rightarrow \{f_{nl}(s, \dot{s}, \ddot{s})\} \Rightarrow \{F^n\}$$

Les coefficients des forces non linéaires peuvent ainsi être déterminés en évaluant numériquement l'intégrale :

$$\{F_n\} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{f_{nl}(s, \dot{s}, \ddot{s})\} e^{-in\omega t} dt \quad (3.10)$$

où la période fondamentale T est donnée par $T = 2\pi/\omega$.

L'introduction des expressions 3.4, 3.6, 3.7 et 3.9 dans 3.3, et la mise en équation ultérieure des composants harmoniques de même ordre nous amènent au système de $(2N+1)n_t$ équations algébriques non linéaires,

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad [K]\{S^0\} - \{P^0\} - \{F^0\} = 0 \\ n = 1 & \quad \mathcal{R}e \left((-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{S^1\} - \{P^1\} - \{F^1\} \right) = 0 \\ n = 1 & \quad \mathcal{I}m \left((-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{S^1\} - \{P^1\} - \{F^1\} \right) = 0 \\ & \quad \vdots \\ n = N & \quad \mathcal{R}e \left((-N^2\omega^2[M] + iN\omega[C] + [K])\{S^N\} - \{P^N\} - \{F^N\} \right) = 0 \\ n = N & \quad \mathcal{I}m \left((-N^2\omega^2[M] + iN\omega[C] + [K])\{S^N\} - \{P^N\} - \{F^N\} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

dont la solution correspond aux coefficients $\{S_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ de la série de Fourier tronquée 3.6.

Une méthode de résolution de systèmes non linéaires pourrait être appliquée directement à 3.11. Cependant, une condensation sur les degrés de liberté non linéaires similaire à celle de Guyan [68] peut être réalisée avant, afin de réduire le nombre d'équations du problème et d'épargner ainsi du temps et de la mémoire lors du calcul. CHEN et HAHN [25] et SHIAU et JEAN [159] effectuent cette condensation au travers d'opérations linéaires sur les matrices de masse, d'amortissement et de raideur, ce qui procure une réduction du système 3.11 de $(2N+1)n_t$ à $(2N+1)n_{nl}$ équations. Il est important d'observer que la taille du système non linéaire à résoudre devient ainsi indépendante du nombre de degrés de liberté linéaires du modèle.

REN et BEARDS [130][131] obtiennent ce même niveau de réduction, mais par une condensation basée sur la partition de la matrice de réceptance du système. Outre plus simple que la démarche adoptée dans les références [25] et [159], la méthode de condensation qu'ils préconisent permet l'utilisation directe de modèles construits à partir de mesures expérimentales [8], si bien qu'elle sera retenue dans notre formulation de la balance harmonique. En notant i et j les noeuds associés respectivement aux n_{nl} degrés de liberté non linéaires et aux n_l degrés de libertés linéaires, le système est réparti de la manière suivante :

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad \left\{ \begin{array}{c} S_0^j \\ S_0^i \end{array} \right\} - \left[\begin{array}{c|c} D_{jj} & D_{ji} \\ \hline D_{ij} & D_{ii} \end{array} \right] \left(\left\{ \begin{array}{c} P_0^j \\ P_0^i \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ F_0^i \end{array} \right\} \right) = 0 \\ n = 1 & \quad \left\{ \begin{array}{c} S_1^j \\ S_1^i \end{array} \right\} - \left[\begin{array}{c|c} H_1^{jj} & H_1^{ji} \\ \hline H_1^{ij} & H_1^{ii} \end{array} \right] \left(\left\{ \begin{array}{c} P_1^j \\ P_1^i \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ F_1^i \end{array} \right\} \right) = 0 \\ & \quad \vdots \\ n = N & \quad \left\{ \begin{array}{c} S_N^j \\ S_N^i \end{array} \right\} - \left[\begin{array}{c|c} H_N^{jj} & H_N^{ji} \\ \hline H_N^{ij} & H_N^{ii} \end{array} \right] \left(\left\{ \begin{array}{c} P_N^j \\ P_N^i \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ F_N^i \end{array} \right\} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec,

$$[D] = [K]^{-1}$$

$[H]_n = (-n^2\omega^2[M] + in\omega[C] + [K])^{-1}$ = matrice de réceptance expérimentale ou numérique associée au n ème harmonique.

En résolvant les équations 3.12 pour les coefficients de Fourier des degrés de liberté non linéaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
n = 0 & \quad \{S_0^i\} - [D_{ij}]\{P_0^j\} - [D_{ii}] (\{P_0^i\} + \{F_0^i\}) = 0 \\
n = 1 & \quad \mathcal{R}e \left(\{S_1^i\} - [H_1^{ij}]\{P_1^j\} - [H_1^{ii}] (\{P_1^i\} + \{F_1^i\}) \right) = 0 \\
n = 1 & \quad \mathcal{I}m \left(\{S_1^i\} - [H_1^{ij}]\{P_1^j\} - [H_1^{ii}] (\{P_1^i\} + \{F_1^i\}) \right) = 0 \\
& \quad \vdots \\
n = N & \quad \mathcal{R}e \left(\{S_N^i\} - [H_N^{ij}]\{P_N^j\} - [H_N^{ii}] (\{P_N^i\} + \{F_N^i\}) \right) = 0 \\
n = N & \quad \mathcal{I}m \left(\{S_N^i\} - [H_N^{ij}]\{P_N^j\} - [H_N^{ii}] (\{P_N^i\} + \{F_N^i\}) \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

La résolution du système d'équations non linéaires 3.13 fournit les coefficients de Fourier des approximations de la réponse aux degrés de liberté non linéaires. La réponse aux degrés de liberté linéaires du modèle peut ensuite être retrouvée à l'aide des équations 3.12.

3.3.2 Méthode de la collocation trigonométrique

Comme la balance harmonique, la méthode de la collocation trigonométrique s'appuie sur l'hypothèse que le système 3.3, excité par la force périodique 3.4, possède une réponse également périodique. Au lieu d'écrire l'approximation de cette réponse sous forme complexe, équation 3.6, on utilisera ici l'expression analogue suivante :

$$\{\tilde{s}(t)\} = \{c_0\} + \sum_{n=1}^N \{c_n\} \cos(n\omega t) + \{d_n\} \sin(n\omega t) \tag{3.14}$$

Une fois de plus, afin de simplifier la présentation de la méthode, seulement l'harmonique fondamental et des super-harmoniques seront retenus dans la formulation. Des termes sous-harmoniques, ultra sous-harmoniques et ultra super-harmoniques peuvent être pris en compte en utilisant l'équation 3.8.

La collocation trigonométrique exige que la solution approximative 3.14 soit satisfaite en L points de collocation, lesquels correspondent à des instants, équi-espacés par exemple, sur la période fondamentale [71] :

$$t_k = \frac{2\pi}{\omega} \frac{k}{L} \quad k = 0, 1, \dots, L - 1$$

L'évaluation de la solution 3.14 aux points de collocation fournit [71] :

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}_1(t_0) & \tilde{s}_2(t_0) & \cdots & \tilde{s}_{n_t}(t_0) \\ \tilde{s}_1(t_1) & \tilde{s}_2(t_1) & \cdots & \tilde{s}_{n_t}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{s}_1(t_{L-1}) & \tilde{s}_2(t_{L-1}) & \cdots & \tilde{s}_{n_t}(t_{L-1}) \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} c_0(\tilde{s}_1) & c_0(\tilde{s}_2) & \cdots & c_0(\tilde{s}_{n_t}) \\ c_1(\tilde{s}_1) & c_1(\tilde{s}_2) & \cdots & c_1(\tilde{s}_{n_t}) \\ d_1(\tilde{s}_1) & d_1(\tilde{s}_2) & \cdots & d_1(\tilde{s}_{n_t}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_N(\tilde{s}_1) & c_N(\tilde{s}_2) & \cdots & c_N(\tilde{s}_{n_t}) \\ d_N(\tilde{s}_1) & d_N(\tilde{s}_2) & \cdots & d_N(\tilde{s}_{n_t}) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

où $[T]$ est une matrice de transformation de dimensions $L \times (2N + 1)$ donnée par [71][104] :

$$\begin{cases} T_{i1} = 1 & i = 1, 2, \dots, L \\ T_{ij} = \cos[(i-1)j\frac{\pi}{L}] & j = 2, 4, 6, \dots, 2N \\ T_{ij} = \cos[(i-1)(j-1)\frac{\pi}{L}] & j = 3, 5, 7, \dots, 2N + 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

En écrivant le système 3.15 sous la forme compacte $[S] = [T][Cf]$, les matrices des vitesses et des accélérations aux points de collocation s'écrivent, compte tenu de 3.14 :

$$[\dot{S}] = \omega [T][G][Cf] \quad (3.17)$$

$$[\ddot{S}] = \omega^2 [T][G]^2 [Cf]$$

où $[G]$ est une matrice tri-diagonale carrée, de dimension $(2N + 1)$, définie par :

$$G_{i,(i+1)} = -G_{(i+1),i} = \frac{i}{2} \quad i = 2, 4, \dots, 2N \quad (3.18)$$

En évaluant l'équation du mouvement 3.3 aux points de collocation, on obtient :

$$\begin{aligned}
[\ddot{S}][M]^T + [\dot{S}][C]^T + [S][K]^T = & \begin{bmatrix} f_{e1}(t_0) & \cdots & f_{en_t}(t_0) \\ f_{e1}(t_1) & \cdots & f_{en_t}(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{e1}(t_{L-1}) & \cdots & f_{en_t}(t_{L-1}) \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} \{0\}_{1 \times n_l} & f_{nl1}(t_0) & \cdots & f_{nl_{n_t}}(t_0) \\ \{0\}_{1 \times n_l} & f_{nl1}(t_1) & \cdots & f_{nl_{n_t}}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{0\}_{1 \times n_l} & f_{nl1}(t_{L-1}) & \cdots & f_{nl_{n_t}}(t_{L-1}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

En rapportant les expressions 3.15 et 3.17 dans l'équation ci-dessus, on arrive à :

$$[T] (\omega^2 [G]^2 [Cf][M]^T + \omega [G][Cf][C]^T + [Cf][K]^T) = [[F_{ej}] \mid [F_{ei}]] + [[0] \mid [F_{nl}]] \tag{3.20}$$

où,

$[F_{nl}]$: matrice des forces non linéaires évaluées aux points de collocation;

$[F_{ei}]$: matrice des forces linéaires appliquées aux degrés de liberté non linéaires évaluées aux points de collocation;

$[F_{ej}]$: matrice des forces linéaires appliquées aux degrés de liberté linéaires évaluées aux points de collocation.

Le système 3.20 contient $L \times n_t$ équations algébriques non linéaires fonctions des $(2N + 1)n_t$ coefficients de Fourier de la réponse. Il faut par conséquent un nombre de points de collocation $L \geq (2N + 1)$ pour le calcul des $(2N + 1)n_t$ inconnues du problème.

Comme pour la méthode de la balance harmonique, au lieu de résoudre le système 3.20 directement, il est plus intéressant de le condenser sur les degrés de liberté non linéaires d'abord. En utilisant la même notation que celle de la section précédente, le système est réparti de la manière suivante :

$$[M] = \left[\begin{array}{c|c} M_{jj} & M_{ji} \\ \hline M_{ij} & M_{ii} \end{array} \right]; [C] = \left[\begin{array}{c|c} C_{jj} & C_{ji} \\ \hline C_{ij} & C_{ii} \end{array} \right];$$

$$[K] = \left[\begin{array}{c|c} K_{jj} & K_{ji} \\ \hline K_{ij} & K_{ii} \end{array} \right]; [Cf] = \left[\begin{array}{c|c} Cf_j & Cf_i \end{array} \right];$$

compte tenu de cette partition, on écrit :

$$\begin{aligned}
& [T] (\omega^2 [G]^2 [Cf_j] [M_{jj}]^T + \omega [G] [Cf_j] [C_{jj}]^T + [Cf_j] [K_{jj}]^T) + \\
& [T] (\omega^2 [G]^2 [Cf_i] [M_{ji}]^T + \omega [G] [Cf_i] [C_{ji}]^T + [Cf_i] [K_{ji}]^T) - [F_{ej}] = 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
& [T] (\omega^2 [G]^2 [Cf_j] [M_{ij}]^T + \omega [G] [Cf_j] [C_{ij}]^T + [Cf_j] [K_{ij}]^T) + \\
& [T] (\omega^2 [G]^2 [Cf_i] [M_{ii}]^T + \omega [G] [Cf_i] [C_{ii}]^T + [Cf_i] [K_{ii}]^T) - [F_{ei}] - [F_{nl}] = 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

La matrice de transformation $[T]$ sera carrée si l'on choisit $L = (2N + 1)$. Pour $L > (2N + 1)$, cette matrice n'étant pas carrée, elle ne pourra pas être inversée. Dans ce cas, les équations ci-dessus doivent être pré-multipliées par $[T]^T$ et ensuite par $([T]^T [T])^{-1}$, ce qui fournit :

$$\begin{aligned}
& \omega^2 [G]^2 [Cf_j] [M_{jj}]^T + \omega [G] [Cf_j] [C_{jj}]^T + [Cf_j] [K_{jj}]^T + \\
& \omega^2 [G]^2 [Cf_i] [M_{ji}]^T + \omega [G] [Cf_i] [C_{ji}]^T + [Cf_i] [K_{ji}]^T - [R_{ej}] = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
& \omega^2 [G]^2 [Cf_j] [M_{ij}]^T + \omega [G] [Cf_j] [C_{ij}]^T + [Cf_j] [K_{ij}]^T + \\
& \omega^2 [G]^2 [Cf_i] [M_{ii}]^T + \omega [G] [Cf_i] [C_{ii}]^T + [Cf_i] [K_{ii}]^T - [R_{ei}] - [R_{nl}] = 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

avec,

$$[R_{ej}] = ([T]^T [T])^{-1} [T]^T [F_{ej}]$$

$$[R_{ei}] = ([T]^T [T])^{-1} [T]^T [F_{ei}]$$

$$[R_{nl}] = ([T]^T [T])^{-1} [T]^T [F_{nl}]$$

Du point de vue de la programmation de la méthode, une forme plus convenable des équations 3.23 et 3.24 est obtenue en utilisant le produit de Kronecker à droite de deux matrices et la fonction vecteur d'une matrice [71]. L'application du produit de Kronecker à droite aux matrices $[\mathcal{M}]_{m \times m}$ et $[\mathcal{N}]_{p \times q}$ résulte en une matrice de dimensions $pm \times qm$ donnée par :

$$[\mathcal{M}] \otimes [\mathcal{N}] = \left[\begin{array}{c|cc} \mathcal{M}_{11}[\mathcal{N}] & \cdots & \mathcal{M}_{1m}[\mathcal{N}] \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathcal{M}_{m1}[\mathcal{N}] & \cdots & \mathcal{M}_{mm}[\mathcal{N}] \end{array} \right] \tag{3.25}$$

L'application de la fonction vecteur à une matrice $[\mathcal{R}]_{o \times r}$ aboutit à :

$$vec[\mathcal{R}] = \{\mathcal{R}\}_{or \times 1} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{R}_{11} \\ \vdots \\ \mathcal{R}_{o1} \\ \vdots \\ \mathcal{R}_{1r} \\ \vdots \\ \mathcal{R}_{or} \end{array} \right\} \quad (3.26)$$

Ainsi, une équation matricielle linéaire du type :

$$\left(\sum_c [\mathcal{M}]_c [\mathcal{R}] [\mathcal{M}]_c^T \right)^T = [\mathcal{Q}]^T \quad (3.27)$$

devient [71] :

$$\left(\sum_c [\mathcal{M}]_c \otimes [\mathcal{M}]_c \right) vec[\mathcal{R}]^T = vec[\mathcal{Q}]^T \quad (3.28)$$

L'application du produit de Kronecker à droite et de la fonction vecteur aux équations 3.23 et à 3.24, compte tenu de 3.28, fournit :

$$\begin{cases} [E_{jj}]\{Cf_j\} + [E_{ji}]\{Cf_i\} - \{R_{ej}\} = 0 \\ [E_{ij}]\{Cf_j\} + [E_{ii}]\{Cf_i\} - \{R_{ei}\} - \{R_{nl}\} = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

avec,

$$[E_{jj}] = \omega^2[G]^2 \otimes [M_{jj}] + \omega[G] \otimes [C_{jj}] + [I] \otimes [K_{jj}]$$

$$[E_{ji}] = \omega^2[G]^2 \otimes [M_{ji}] + \omega[G] \otimes [C_{ji}] + [I] \otimes [K_{ji}]$$

$$[E_{ij}] = \omega^2[G]^2 \otimes [M_{ij}] + \omega[G] \otimes [C_{ij}] + [I] \otimes [K_{ij}]$$

$$[E_{ii}] = \omega^2[G]^2 \otimes [M_{ii}] + \omega[G] \otimes [C_{ii}] + [I] \otimes [K_{ii}]$$

$$\{Cf_j\} = vec[Cf_j]^T \quad \{Cf_i\} = vec[Cf_i]^T$$

$$\{R_{ej}\} = vec[R_{ej}]^T \quad \{R_{ei}\} = vec[R_{ei}]^T \quad \{R_{nl}\} = vec[R_{nl}]^T$$

[I] : matrice identité.

La résolution du système 3.29 pour $\{Cf_i\}$ donne :

$$([E_{ii}] - [E_{ij}][E_{jj}]^{-1}[E_{ji}])\{Cf_i\} + [E_{ij}][E_{jj}]^{-1}\{R_{ej}\} - \{R_{ei}\} - \{R_{nl}\} = 0 \quad (3.30)$$

L'expression ci-dessus représente un système de $(2N + 1)n_{nl}$ équations algébriques non linéaires, fonctions des $(2N + 1)n_{nl}$ coefficients de Fourier de la réponse aux degrés-de-liberté non linéaires du modèle. Comme pour la balance harmonique, la condensation rend la taille du système non linéaire à résoudre indépendante de la taille du modèle.

3.3.3 Méthode de tir

La méthode de tir s'attaque à l'équation différentielle 3.3, mise sous la forme du premier ordre :

$$\left[\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline C & M \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{s} \\ \dot{s} \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{c|c} 0 & -M \\ \hline K & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} s \\ \dot{s} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ f_e + f_{nl} \end{array} \right\} \quad (3.31)$$

Le système d'équations ci-dessus peut être réécrit de la manière suivante [168][169] :

$$\{\dot{\mathbf{q}}\} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \alpha), \quad \mathbf{q} = \{s, \dot{s}\}^T, \quad \mathbf{q}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{2n_t}, \quad t, \alpha \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \quad (3.32)$$

La variable α est le paramètre de bifurcation, lequel correspond dans notre cas à la fréquence de rotation du rotor, ω . Le système 3.32 est dit non autonome, puisque la fonction $\mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \alpha)$ dépend explicitement du temps.

Le système différentiel décrit par l'équation 3.32 donne lieu à un problème de valeurs aux frontières lorsque l'on impose la condition de périodicité suivante :

$$\mathbf{q}(t = 0) = \mathbf{q}(t = T) \quad (3.33)$$

où T est la période supposée de la réponse. On est ainsi amené à résoudre le problème :

$$\Psi(\mathbf{q}_0, \alpha) = [I]\mathbf{q}(t = 0, \mathbf{q}_0, \alpha) - [I]\mathbf{q}(t = T, \mathbf{q}_0, \alpha) = 0 \quad (3.34)$$

avec $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t = 0)$. La fonction $\Psi(\mathbf{q}_0, \alpha)$ est appelée fonction résidu.

Le vecteur \mathbf{q}_0 , solution de l'équation 3.34, représente ainsi un point fixe du diagramme de Poincaré associé au mouvement du système [111]. Il peut être calculé par la méthode Newton-Raphson, dont le schéma itératif peut s'écrire :

$$\Psi(\mathbf{q}_0^{k+1}, \alpha) \approx \Psi(\mathbf{q}_0^k, \alpha) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_0} \right)_{(\mathbf{q}_0^k, \alpha)} (\mathbf{q}_0^{k+1} - \mathbf{q}_0^k) \quad (3.35)$$

Compte tenu de la condition de périodicité, exprimée par $\Psi(\mathbf{q}_0^{k+1}, \alpha) = 0$, le schéma itératif ci-dessus devient :

$$\mathbf{q}_0^{k+1} = \mathbf{q}_0^k - \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_0} \right)_{(\mathbf{q}_0^k, \alpha)} \right]^{-1} \Psi(\mathbf{q}_0^k, \alpha) \quad (3.36)$$

Si le processus donné par l'équation 3.36 ne converge pas, alors la période admise T ne correspond pas à la période de la réponse du système. L'algorithme doit ainsi être répété pour des multiples entiers croissants de T jusqu'à ce que la solution soit trouvée.

Le point principal de la méthode de tir consiste à calculer la jacobienne de $\Psi(\mathbf{q}_0, \alpha)$ par rapport à \mathbf{q}_0 . Pour ce faire, SUNDARARAJAN et NOAH [168][169] proposent l'utilisation de la procédure de Newton-Fox, expliquée dans ce qui suit.

Compte tenu de la définition de la fonction résidu, équation 3.34, on a :

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_0} \right)_{(\mathbf{q}_0, \alpha)} = [I] \frac{\partial \mathbf{q}(t=0, \mathbf{q}_0, \alpha)}{\partial \mathbf{q}_0} - [I] \frac{\partial \mathbf{q}(t=T, \mathbf{q}_0, \alpha)}{\partial \mathbf{q}_0} = [I] - [W_{t=T}] \quad (3.37)$$

En considérant t et \mathbf{q}_0 comme des variables indépendantes, on peut écrire :

$$[\dot{W}_t] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}_0} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_0} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}_0} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}_0} = [J][W_t] \quad (3.38)$$

où la matrice $[J]$ est la jacobienne de $\mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \alpha)$ par rapport \mathbf{q} en $\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0, \alpha)$. A l'instant $t = 0$ on a :

$$[W_{t=0}] = \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}_0} \right)_{(t=0, \mathbf{q}_0, \alpha)} = I \quad (3.39)$$

ce qui correspond aux conditions initiales du système d'équations différentielles 3.38.

Pour une valeur quelconque de α et à partir d'une condition initiale $\mathbf{q}_0^{k=0}$, le processus itératif donné par 3.36 est exécuté de la manière suivante :

1. On intègre simultanément l'équation de mouvement 3.32 et le système 3.38 de $t = 0$ à $t = T$.
2. On calcule le jacobien $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_0}\right)_{(\mathbf{q}_0, \alpha)}$ à partir de la matrice $[W_{t=T}]$ issue de l'intégration temporelle de l'équation 3.38.
3. On réactualise \mathbf{q}_0 selon l'équation 3.36.

Le processus s'arrête selon un critère appliqué classiquement sur la suite des normes des solutions $\|\mathbf{q}_0^k\|$ ou des résidus $\|\Psi^k\|$. La condition initiale $\mathbf{q}_0^{k=0}$ associé au paramètre α courant est déterminée en fonction de la solution au point précédent.

Les méthodes de réduction utilisées dans le cadre de la balance harmonique et de la collocation trigonométrique ne sont pas applicables dans le cas de la méthode de tir. La taille du système à résoudre reste par conséquent égale au double du nombre de degrés de liberté du modèle. Cependant, la réduction peut s'effectuer avant l'application de la méthode de tir, au travers de techniques de synthèse modale, comme proposé dans la référence [168]. Par contre, la méthode de tir ne fait aucune hypothèse concernant le spectre de la réponse du système. Elle est ainsi plus adéquate que la balance harmonique et que la collocation trigonométrique quand la solution périodique est composée d'un nombre élevé d'harmoniques, comme dans le cas d'un palier hydrodynamique monté en série avec un SqF [201]. De plus, en modifiant légèrement son algorithme, la méthode de tir permet de déterminer des mouvements quasi-périodiques et chaotiques, outre des orbites stationnaires [168].

3.3.4 La continuation *pseudo-arc length*

Les techniques de continuation permettent de déterminer la manière dont la solution d'un système varie en fonction d'un paramètre quelconque. Dans la balance harmonique et la collocation trigonométrique, la solution en question correspond aux coefficients de Fourier de la réponse approximative, et dans la méthode de tir, aux valeurs des variables d'état au début de la période. Ces trois méthodes étant employées ici pour tracer des courbes de réponse au balourd du rotor, le paramètre de variation correspond à la fréquence de rotation ω . Ce paramètre est représenté ici de manière générique par α .

Nous avons choisi la méthode de *pseudo-arc length* comme technique de continuation, grâce à la simplicité [168] et à l'efficacité lors du passage de bifurcations [105]. La figure 3.4 présente de manière simplifiée l'interprétation graphique de cette méthode de continuation.

Le principe de la continuation *pseudo-arc length* s'appuie sur un changement de paramétrage dans la formulation du problème. Au lieu de traiter le vecteur solution, noté \mathbf{z} , comme une fonction du paramètre α , on considère ces deux variables comme fonctions d'une troisième, λ , qui correspond à un paramétrage de la courbe $\mathbf{g}(\mathbf{z}(\lambda), \alpha(\lambda)) = 0$. Soit (\mathbf{z}_0, α_0) une solution de cette courbe avant le point de bifurcation. Le point (\mathbf{z}_1, α_1) est estimé en utilisant le prédicteur tangent, dit également d'Euler, qui s'écrit :

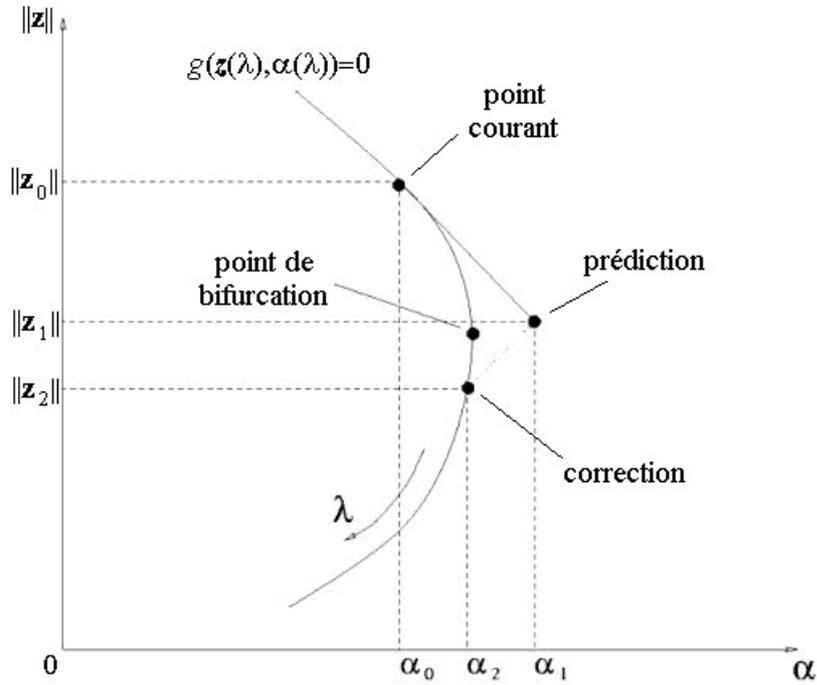


FIG. 3.4: Illustration de la continuation pseudo-arc length

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0 + \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} \Delta\lambda \quad (3.40)$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} \Delta\lambda \quad (3.41)$$

où $\Delta\lambda$ est l'incrément dans la direction de la tangente.

La correction du point (\mathbf{z}_1, α_1) fourni par le prédicteur d'Euler, est recherchée le long du chemin représenté dans la figure 3.4 par la ligne en pointillée. Cette ligne a pour origine le point (\mathbf{z}_1, α_1) et est normale à la tangente à (\mathbf{z}_0, α_0) . La solution correspondra ainsi à l'intersection entre cette ligne et la courbe $\mathbf{g}(\mathbf{z}(\lambda), \alpha(\lambda)) = 0$. Mathématiquement, on cherche la solution (\mathbf{z}_2, α_2) sur $\mathbf{g}(\mathbf{z}(\lambda), \alpha(\lambda)) = 0$ telle que les vecteurs,

$$\mathbf{v}_{12} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \end{array} \right\} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{v}_{01} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} \\ \left(\frac{d\alpha}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} \end{array} \right\}$$

satisfassent la condition d'orthogonalité :

$$\mathbf{v}_{12}^T \mathbf{v}_{01} = 0 \quad (3.43)$$

En rapportant les équations 3.40 et 3.41 dans 3.43, on obtient :

$$(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_0)^T \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} + (\alpha_2 - \alpha_0) \left(\frac{d\alpha}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} - \left[\left(\frac{d\alpha}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0}^2 + \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0}^T \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} \right] \Delta\lambda = 0 \quad (3.44)$$

Cette équation peut prendre une forme plus simple si l'on applique une normalisation euclidienne au vecteur \mathbf{v}_{01} telle que,

$$\left(\frac{d\alpha}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0}^2 + \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0}^T \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} = 1 \quad (3.45)$$

L'expression 3.44 devient par conséquent :

$$\Lambda(\mathbf{z}, \alpha, \Delta\lambda) = (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_0)^T \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} + (\alpha_2 - \alpha_0) \left(\frac{d\alpha}{d\lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} - \Delta\lambda = 0 \quad (3.46)$$

Cette expression constitue une équation de contrainte, à rajouter au système d'équations non linéaires issu des méthodes de calcul de solutions périodiques. Si l'incrément $\Delta\lambda$ est trop important, soit la ligne en pointillée de la figure 3.4 n'interceptera pas la courbe $\mathbf{g}(\mathbf{z}(\lambda), \alpha(\lambda)) = 0$ soit la convergence de la solution sera très longue. Dans ces cas, l'incrément $\Delta\lambda$ doit être réduit.

L'obtention des termes du vecteur \mathbf{v}_{01} s'effectue au travers d'un développement en série de Taylor de $\mathbf{g}(\mathbf{z}(\lambda), \alpha(\lambda)) = 0$ au voisinage du point (\mathbf{z}_0, α_0) [111]. Cette courbe étant paramétrée en λ , on a :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} = 0 \quad (3.47)$$

Cette expression doit être satisfaite en même temps que l'équation de normalisation du vecteur \mathbf{v}_{01} , équation 3.45.

Or ce calcul ne fournit que la direction de \mathbf{v}_{01} . La définition du sens de ce vecteur est cruciale pour que le calcul ne revienne pas en arrière sur la courbe $\mathbf{g}(\mathbf{z}(\lambda), \alpha(\lambda)) = 0$, ou ne reste pas bloqué entre deux points [168]. Pour éviter ces problèmes, le signe du vecteur \mathbf{v}_{01} est choisi de façon à ce que le

produit scalaire entre la tangente au point courant et la tangente au point précédent soit positif [169]. On obtient ainsi pour les termes du vecteur tangent :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda}\right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} = l \zeta \quad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}\right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} = l$$

où,

$$l = \pm (1 + \zeta^T \zeta)^{-1/2}$$

$$\zeta = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0} \right]^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha}\right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0}$$

En utilisant l'indice -1 pour désigner le point antérieur à (\mathbf{z}_0, α_0) , le signe de l doit être choisi tel que :

$$l \left(\left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda}\right)_{\mathbf{z}_{-1}, \alpha_{-1}}^T \zeta + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}\right)_{\mathbf{z}_{-1}, \alpha_{-1}} \right) > 0 \quad (3.48)$$

Lorsque l'on utilise la continuation *pseudo-arc length* avec la balance harmonique ou la collocation trigonométrique, la matrice $\left[\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0}\right]$ et le vecteur $\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha}\right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0}$ peuvent être calculés par différences finies. En ce qui concerne la méthode de tir, la matrice $\left[\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)_{\mathbf{z}_0, \alpha_0}\right] \equiv \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}_0}\right)_{(\mathbf{q}_0, \alpha)}\right]$ est déjà un sous-produit de la procédure Newton-Fox. Cette procédure peut être étendue pour fournir également le vecteur $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$. Compte tenu de la définition de la fonction résidu, équation 3.34, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right)_{\mathbf{q}_0, \alpha} &= [I] \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}\right)_{(t=0, \mathbf{q}_0, \alpha)} - [I] \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}\right)_{(t=T, \mathbf{q}_0, \alpha)} = \\ &- [I] \left[\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}\right)_{(t=T, \mathbf{q}_0, \alpha)} + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}\right)_{(t=T, \mathbf{q}_0, \alpha)} \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right)_{t=T} \right] \end{aligned}$$

En notant $\{\mathcal{Y}\}$ le vecteur dérivée $\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}\right)_{(t, \mathbf{q}_0, \alpha)}$, le premier terme du deuxième membre de l'équation ci-dessus peut être obtenu en intégrant de $t = 0$ à $t = T$ le système d'équations :

$$\{\dot{\mathcal{Y}}\} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} = \{U\} + [A]\{\mathcal{Y}\} \quad (3.49)$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\{\mathcal{Y}_{t=0}\} = \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} \right)_{(t=0, \mathbf{q}_0, \alpha)} = \{0\} \quad (3.50)$$

Ainsi, lorsque la méthode de tir est couplée à la continuation *pseudo-arc length*, l'équation du mouvement 3.32 et les systèmes différentiels 3.38 et 3.49 doivent être intégrés de $t = 0$ à $t = T$ simultanément.

3.3.5 Analyse de la stabilité - Théorie de Floquet

Une fois calculée une solution périodique, notée $\{s_p\}$, de l'équation de mouvement 3.3, pour une valeur de fréquence spécifique ω_p , on doit déterminer si cette solution est stable ou instable.

Le critère de Routh-Hurwitz [97] permet d'analyser la stabilité de systèmes autonomes. Il peut ainsi être appliqué au SqF, à condition que celui-ci exécute des orbites circulaires et centrées. Dans ce cas, la description du mouvement dans un système de repérage tournant rend les équations indépendantes du temps. L'utilisation de ce critère est intéressante pour des systèmes à faible nombre de degrés de liberté, pour lesquels des expressions analytiques du polynôme caractéristique associé au mouvement perturbé peuvent être déduites [161]. Elle devient, toutefois, complexe pour des systèmes comportant un nombre élevé de degrés de liberté. De plus, le critère de Routh-Hurwitz ne fournit pas la fréquence d'instabilité. Il a été utilisé notamment par HAHN et RABINOWITZ [60][123] pour étudier l'influence d'amortisseurs *squeeze film* sur la stabilité de rotors rigides et flexibles du type Jeffcott.

Lorsque le SqF est considéré comme un élément linéaire, l'analyse de la stabilité peut s'effectuer au travers de l'examen des valeurs propres du système d'équations du mouvement perturbé.

L'étude de la stabilité au travers des méthodes citées ci-dessus restreignent l'analyse à des cas de figure particuliers, à savoir lorsque le SqF décrit des mouvements circulaires et centrés, ou lorsque qu'il est décrit par des modèles linéaires. Une méthode plus générale s'appuie sur la théorie de Floquet, laquelle permet d'analyser, dans le sens linéaire, la stabilité de systèmes à coefficients périodiques.

Le premier pas de l'analyse consiste à appliquer au vecteur de la solution périodique \mathbf{s}_p une petite perturbation $\delta \mathbf{s}$, qui conduit le système à un nouvel état d'équilibre décrit par l'équation :

$$[M]\{\ddot{s}_p + \delta \ddot{s}\} + [C]\{\dot{s}_p + \delta \dot{s}\} + [K]\{s_p + \delta s\} = \{f_e\} + \{f_{nl}(\mathbf{s}_p + \delta \mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}_p + \delta \dot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{s}}_p + \delta \ddot{\mathbf{s}})\} \quad (3.51)$$

Un développement de Taylor au premier ordre au voisinage de \mathbf{s}_p permet d'estimer les forces non linéaires en $(\mathbf{s}_p + \delta \mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}_p + \delta \dot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{s}}_p + \delta \ddot{\mathbf{s}})$:

$$\begin{aligned} \{f_{nl}(\mathbf{s}_p + \delta \mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}_p + \delta \dot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{s}}_p + \delta \ddot{\mathbf{s}})\} &= \{f_{nl}(\mathbf{s}_p, \dot{\mathbf{s}}_p, \ddot{\mathbf{s}}_p)\} + \\ &\left[\frac{\partial \{f_{nl}\}}{\partial \{s\}} \right]_{\mathbf{s}_p, \dot{\mathbf{s}}_p, \ddot{\mathbf{s}}_p} \delta \mathbf{s} + \left[\frac{\partial \{f_{nl}\}}{\partial \{\dot{s}\}} \right]_{\mathbf{s}_p, \dot{\mathbf{s}}_p, \ddot{\mathbf{s}}_p} \delta \dot{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial \{f_{nl}\}}{\partial \{\ddot{s}\}} \right]_{\mathbf{s}_p, \dot{\mathbf{s}}_p, \ddot{\mathbf{s}}_p} \delta \ddot{\mathbf{s}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

En remplaçant le vecteur des forces non linéaires de l'équation 3.51 par l'expression ci-dessus, on obtient :

$$[M - M_{nl}]\{\delta\ddot{s}\} + [C - C_{nl}]\{\delta\dot{s}\} + [K - K_{nl}]\{\delta s\} = 0 \quad (3.53)$$

avec,

$$[M_{nl}] = \left[\frac{\partial\{f_{nl}\}}{\partial\{\ddot{s}\}} \right]_{\mathbf{s}_p, \dot{\mathbf{s}}_p, \ddot{\mathbf{s}}_p}$$

$$[C_{nl}] = \left[\frac{\partial\{f_{nl}\}}{\partial\{\dot{s}\}} \right]_{\mathbf{s}_p, \dot{\mathbf{s}}_p, \ddot{\mathbf{s}}_p}$$

$$[K_{nl}] = \left[\frac{\partial\{f_{nl}\}}{\partial\{s\}} \right]_{\mathbf{s}_p, \dot{\mathbf{s}}_p, \ddot{\mathbf{s}}_p}$$

L'équation 3.53 peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\{\dot{q}\} = [L](t)\{q\} \quad (3.54)$$

où on identifie :

$$\{q\} = \{\delta\mathbf{s}, \delta\dot{\mathbf{s}}\}^T$$

$$[L](t) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline [M - M_{nl}]^{-1}[K_{nl} - K] & [M - M_{nl}]^{-1}[C_{nl} - C] \end{array} \right]$$

La matrice $[L](t)$ contient les dérivées partielles des forces non linéaires fonctions de la position, de la vitesse et de l'accélération du SqF et est, par conséquent, T -périodique. L'analyse de la stabilité est locale, puisque les forces non linéaires sont linéarisées autour de l'orbite \mathbf{s}_p après l'application de la perturbation.

Si $\{q\}$ est un vecteur de dimension $n = 2n_t$, le système 3.54 possède n solutions linéairement indépendantes $\mathbf{q}_j(t), j = 1, 2, \dots, n$ [105]. On définit ainsi la matrice-solution fondamentale, $[Q](t) = [\mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t), \dots, \mathbf{q}_n(t)]$, laquelle satisfait l'équation :

$$[\dot{Q}] = [L](t)[Q] \quad (3.55)$$

Compte tenu de la T -périodicité de la matrice $[L](t)$, le changement de variable $\tau = t + T$ donne :

$$\frac{d[Q]}{d\tau} = [L](\tau - T)[Q] = [L](\tau)[Q] \quad (3.56)$$

Par conséquent, si $[Q](t) = [\mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t), \dots, \mathbf{q}_n(t)]$ est une matrice-solution fondamentale, $[Q](\tau) = [\mathbf{q}_1(\tau), \mathbf{q}_2(\tau), \dots, \mathbf{q}_n(\tau)]$ l'est également. Or le système 3.54 n'a, au maximum, que n solutions linéairement indépendantes. Les solutions $\mathbf{q}_j(\tau)$ sont alors des combinaisons linéaires de $\mathbf{q}_j(t)$:

$$[Q](\tau) = [Q](t)[H] \quad (3.57)$$

où $[H]$ est une matrice constante carré de dimension n qui dépend du choix de la matrice-solution fondamentale $[Q](t)$. En précisant comme conditions initiales :

$$[Q](0) = [I] \quad (3.58)$$

où $[I]$ est la matrice identité, on obtient :

$$[H] = [Q](T) \quad (3.59)$$

La matrice $[H]$, appelée matrice de Floquet ou matrice monodrome, peut être interprétée comme une transformation qui régit l'accroissement sur la période des perturbations apportées à la solution périodique décrite par \mathbf{s}_p , $\hat{\mathbf{s}}_p$ et $\ddot{\mathbf{s}}_p$.

En définissant une fonction $[v](t)$ qui a les valeurs de $[Q](t)$ à $t = \dots, 0, T, 2T, 3T, \dots$, on peut écrire à partir de l'équation 3.57 [66] :

$$[v]((m+1)T) = [v](mT)[H], \quad m \text{ entier} \quad (3.60)$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$[v] = [\Upsilon]e^{\varsigma t}, \quad \varsigma = \chi + i\sigma \quad (3.61)$$

En notant ρ les valeurs propres de la matrice H , on a donc :

$$\rho = e^{\varsigma T} \quad \text{et} \quad [v](mT) : \text{matrice des vecteurs propres à gauche de } [H] \quad (3.62)$$

Compte tenu des équations 3.61 et 3.62, la stabilité de la solution périodique du système peut être analysée dans le sens de Liapunov [105] : le système est dit asymptotiquement stable si $\chi < 0$, condition

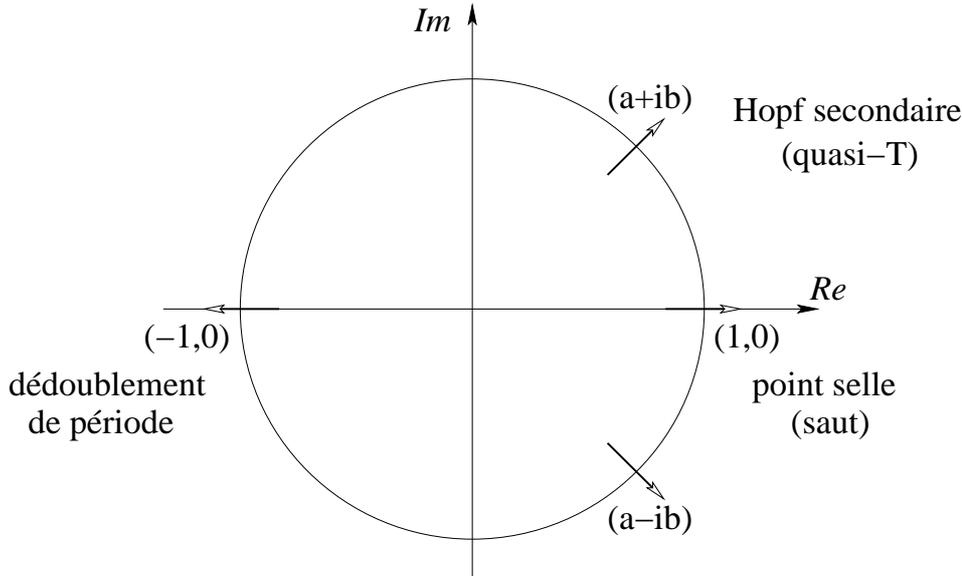


FIG. 3.5: Analyse des bifurcations à l'aide des multiplicateurs de Floquet

équivalente à $|\rho| < 1$ [66]. Physiquement, la vérification de ces conditions signifie que l'amplitude des variables d'état des perturbations, $\{q\}$, décroît au cours du temps [25].

Ces sont donc les valeurs propres de la matrice de Floquet, $[H]$, appelées multiplicateurs de Floquet, qui fournissent l'information sur la stabilité de la solution périodique du système non linéaire. Si aucun des multiplicateurs de Floquet ne se trouve sur le cercle unité dans le plan complexe, la solution périodique est dite hyperbolique. Sinon, elle est appelée non hyperbolique. Si toutes les valeurs propres de la matrice $[H]$ sont à l'intérieur du cercle unité, la solution correspondante est appelée un cycle limite stable ou un point d'attraction périodique [105]. Si un multiplicateur au moins est en dehors du cercle unité, la solution est instable. Si tous les multiplicateurs sont à l'extérieur du cercle unité, la solution périodique correspond à un point de répulsion. Et si aucun des multiplicateurs de Floquet associés à une solution non hyperbolique ne se trouvent en dehors du cercle unité, une analyse non linéaire est nécessaire pour statuer sur la stabilité de la solution périodique $\{s_p\}$. Pour ce faire, il est nécessaire de réaliser le développement en série de Taylor des forces non linéaires au delà du premier ordre.

Lorsque la fréquence de rotation ω évolue, il existe trois types d'instabilités qui peuvent avoir lieu. Ils sont identifiés selon la manière dont les multiplicateurs de Floquet traversent le cercle unité (voir figure 3.5). Si ce franchissement arrive par $(1,0)$, on a une instabilité du type point selle, qui cause le phénomène de saut dans la réponse au balourd du rotor [208]. Dans ce cas, une perturbation quelconque fait sauter le rotor d'un cycle limite stable à un autre. Si l'un des multiplicateurs de Floquet traverse le cercle unité par $(-1,0)$, la solution subit un dédoublement de période. Et enfin, si le cercle unité est franchi par une paire de complexes conjugués, une bifurcation de Hopf secondaire a lieu et la solution périodique se dégénère à une solution quasi-périodique.

La détermination de la matrice $[H]$ à partir des solutions périodiques obtenues par la balance harmonique et la collocation trigonométrique constitue une étape supplémentaire à effectuer après le calcul de l'orbite stationnaire. La méthode de tir, par contre, fournit déjà la matrice de Floquet en

tant que sous-produit de la procédure de Newton-Fox. En effet, si l'on note :

$\bar{\mathbf{q}}(t, \bar{\mathbf{q}}_0)$: la solution de l'équation 3.32 pour $\mathbf{q}_{t=0} = \bar{\mathbf{q}}_0$, et,

$\hat{\mathbf{q}}(t, \bar{\mathbf{q}}_0 + \delta_0)$: la solution relative à une condition initiale perturbée $\mathbf{q}_{t=0} = \bar{\mathbf{q}}_0 + \delta_0$,

l'écart entre les deux solutions à $t = T$ s'écrit [105] :

$$\Delta_{t=T} = \hat{\mathbf{q}}(t = T, \bar{\mathbf{q}}_0 + \delta_0) - \bar{\mathbf{q}}(t = T, \bar{\mathbf{q}}_0) \quad (3.63)$$

En prenant $\|\delta_0\|$ petit, l'écart ci-dessus peut être approché par :

$$\Delta_{t=T} = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \bar{\mathbf{q}}_0} \right)_{(T, \bar{\mathbf{q}}_0)} \delta_0 = [H] \delta_0 \quad (3.64)$$

Ainsi, la matrice $[H]$ indique si la perturbation initiale, δ_0 , appliquée à l'orbite $\bar{\mathbf{q}}(t, \bar{\mathbf{q}}_0)$ s'accroît ou décroît au cours du temps. Sachant que $\bar{\mathbf{q}}_{t=0} = \bar{\mathbf{q}}_0$, on a :

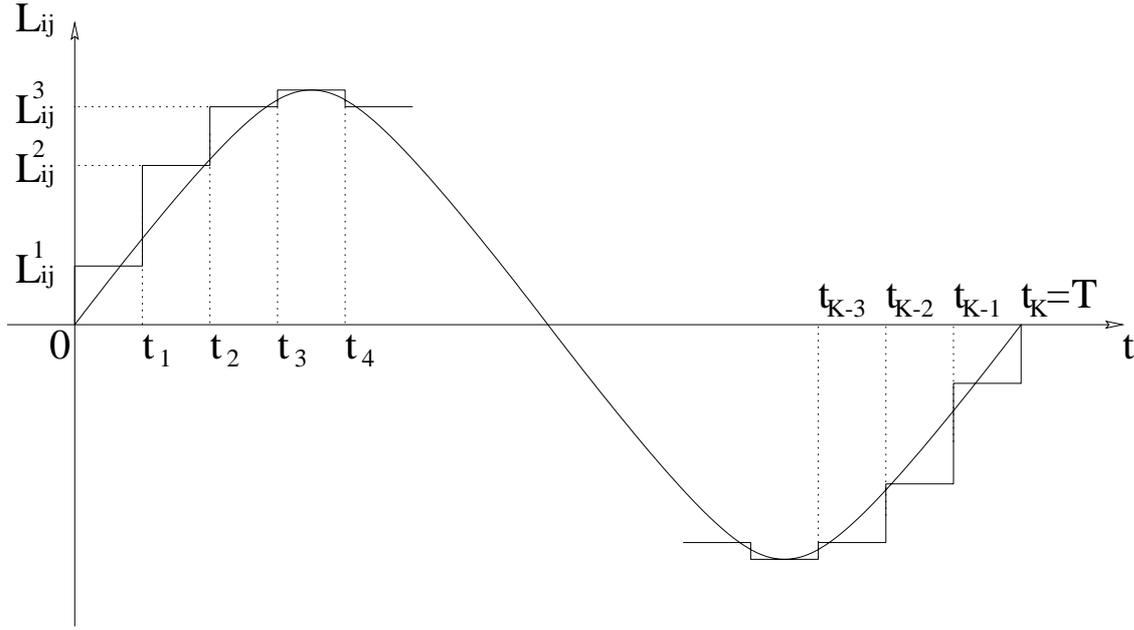
$$\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \bar{\mathbf{q}}_0} \right)_{t=0} = I \quad (3.65)$$

En rappelant la notation adoptée pour la présentation de la méthode de tir, on s'aperçoit que la matrice $[W_t]$ de l'équation 3.38 correspond à $\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \bar{\mathbf{q}}_0}$. Cette matrice est obtenue en intégrant l'équation 3.38, soumise aux conditions initiales données par l'équation 3.39. Ces deux équations sont identiques à 3.57 et 3.58, respectivement, d'où on conclut que la matrice de Floquet $[H]$ est égale à $[W_{t=T}]$.

En ce qui concerne les méthodes de la balance harmonique et de la collocation trigonométrique, la détermination de la matrice de Floquet s'effectue ultérieurement au calcul de la solution périodique. SHIAU, HWANG et CHANG [158] ainsi que CHEN et HAHN [25] intègrent numériquement l'équation 3.54 de $t = 0$ à $t = T$ pour calculer $[H]$. CHEN et HAHN [25] allèguent que l'intégration temporelle est le seul moyen d'assurer une bonne précision au calcul des multiplicateurs de Floquet. Cependant, ZHAO, LINNETT et MCLEAN [208][209] utilisent avec succès la méthode développée par HSU [66], laquelle s'avère plus efficace que l'intégration temporelle.

Cette méthode s'appuie sur une discrétisation de la période T en K sous-intervalles, dans lesquels la matrice $[L](t)$ est approchée par des matrices constantes, comme le montre la figure 3.6. Cette démarche permet de traiter la matrice périodique $[L](t)$ comme un ensemble de fonctions échelons, de façon à ce que le problème devienne similaire à celui examiné par HSU [66], d'un système soumis à une excitation paramétrique impulsive. La solution de l'équation 3.54 entre $t = 0$ et $t = t_1$ (voir figure 3.6) s'écrit :

$$\{q\}(t) = e^{[L]t} \{q\}(t = 0) \quad (3.66)$$

FIG. 3.6: *Discretisation de la matrice périodique $[L](t)$*

A $t = t_{1-}$, juste avant le passage de $[L^1]$ à $[L^2]$, on a :

$$\{q\}(t = t_{1-}) = e^{[L^1]t_1} \{q\}(t = 0) \quad (3.67)$$

De manière analogue, pour l'intervalle entre $t = t_1$ et $t = t_2$ la solution peut s'écrire :

$$\{q\}(t) = e^{[L^2](t-t_1)} \{q\}(t = t_{1-}) \quad (3.68)$$

Compte tenu de l'expression 3.67, l'équation ci-dessus devient :

$$\{q\}(t) = e^{[L^2](t-t_1)} e^{[L^1]t_1} \{q\}(t = 0) \quad (3.69)$$

A $t = t_{2-}$, cela donne :

$$\{q\}(t = t_{2-}) = e^{[L^2](t_2-t_1)} e^{[L^1]t_1} \{q\}(t = 0) \quad (3.70)$$

La poursuite de ce calcul pour chaque intervalle aboutit, à la fin de la période, à :

$$\{q\}(t = t_{K-}) = e^{[L^K](t_K-t_{K-1})} e^{[L^{K-1}](t_{K-1}-t_{K-2})} \dots e^{[L^2](t_2-t_1)} e^{[L^1]t_1} \{q\}(t = 0) \quad (3.71)$$

où on identifie l'approximation de la matrice de Floquet $[H]$:

$$\begin{aligned} [\tilde{H}] &= e^{[L^K](t_K-t_{K-1})} e^{[L^{K-1}](t_{K-1}-t_{K-2})} \dots e^{[L^2](t_2-t_1)} e^{[L^1]t_1} \\ &= \prod_{k=K}^1 e^{[L^k](t_k-t_{k-1})} \end{aligned} \quad (3.72)$$

avec,

$$[L^k] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline [M - M_{nl}^k]^{-1} [K_{nl}^k - K] & [M - M_{nl}^k]^{-1} [C_{nl}^k - C] \end{array} \right] \quad k = 1, 2, 3, \dots, K$$

$$[K_{nl}^k] = \frac{1}{(t_k - t_{k-1})} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [K_{nl}](t) dt$$

$$[C_{nl}^k] = \frac{1}{(t_k - t_{k-1})} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [C_{nl}](t) dt$$

$$[M_{nl}^k] = \frac{1}{(t_k - t_{k-1})} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [M_{nl}](t) dt$$

Il est important de remarquer que $[\tilde{H}] \rightarrow [H]$ lorsque $K \rightarrow \infty$ [208], si bien que la précision du calcul des multiplicateurs de Floquet dépend de la finesse de discrétisation de la matrice périodique $[L](t)$.

Bien que la théorie de Floquet soit exposée ici suivant une description physique du modèle, il convient de souligner qu'elle peut également s'appliquer aux équations modales du système [8].

3.3.6 Comparaison des méthodes

Afin de comparer la performance des méthode de tir, de la balance harmonique et de la collocation trigonométrique, nous les appliquons dans cette section à la simulation de la dynamique d'un rotor Jeffcott. En outre, les caractéristiques du rotor et du SqF sont choisies pour valider, à partir des résultats de la littérature scientifique concernant le SqF, la programmation de ces méthodes de calcul. En suivant ainsi les références [208] et [96], nous définissons (voir figure 1.1 pour la géométrie du SqF et figure 3.2 pour les paramètres du rotor Jeffcott):

$L=30$ [mm] : longueur du SqF;

$R=155$ [mm] : rayon du SqF;

$C=0,3$ [mm] : jeu radial du SqF;

$\mu=0,01898$ [Pa.s] : viscosité dynamique du fluide amortisseur;

$m_1=45$ [kg] : moitié de la masse concentrée au niveau du disque;

$m_2=15$ [kg] : masse concentrée aux paliers;

$k_1 = 3 \times 10^7$ [N/m] : rigidité en flexion de l'arbre;

$c_1 = 367$ [N.s/m] : moitié de l'amortissement visqueux au niveau du disque;

$k_x = 10^7$ [N/m] : raideur des rétenteurs dans la direction x ;

$k_y = 10^7$ [N/m] : raideur des rétenteurs dans la direction y ;

$\rho = 1.2 \times 10^{-4}$ [m] : excentration du disque;

$W_0 = 0$: force statique.

L'approximation palier court et la condition de cavitation de Gumbel sont admises pour la modélisation des forces hydrodynamiques visqueuses du SqF.

La force statique étant supposée nulle ($W_0 = 0$), le rotor décrit des orbites circulaires et centrées, ce qui permet d'appliquer la balance harmonique et la collocation trigonométrique avec $N = 1$ (réponse tronquée au premier harmonique) et de négliger le coefficient de Fourier associé au terme statique. Le système d'équations condensé sur les degrés-de-liberté non linéaires est résolu à l'aide de la fonction *fsolve* du logiciel MATLAB, dont l'algorithme est basé sur une méthode de moindres carrés non linéaire du type Levenberg-Marquardt [95]. Afin d'améliorer la convergence, lorsque le processus de résolution atteint le nombre maximal de 100 itérations, l'incrément *pseudo-arc length* $\Delta\lambda$ est divisé par 2. Le critère d'arrêt, auquel la valeur 10^{-5} est attribuée, porte sur la valeur absolue du résidu du système et sur la variation des inconnues entre deux itérations.

Le calcul de la réponse au balourd est réalisé dans la plage de vitesse $0 < \omega_{ad} < 10$, $\omega_{ad} = \omega / \sqrt{k_1/m_1}$, avec l'incrément $\Delta\lambda = 0,03$. Les résultats, quasiment identiques pour les deux méthodes, sont présentés dans la figure 3.7.

Le nombre d'itérations nécessaires avant d'atteindre le critère d'arrêt de la solution est montré dans la figure 3.8 en fonction de la rotation. Le trait horizontal indique le nombre maximal d'itérations au delà duquel l'incrément *pseudo-arc length* est réduit. On constate que les deux méthodes ont une performance très semblable à ce niveau. On observe également que, pour l'exemple étudié, 20 à 40 itérations suffisent en général pour que la solution converge. Au voisinage de $\omega_{ad} = 1$ toutefois, région où les effets non linéaires sont plus importants et où la courbe a une forme plus complexe, le nombre d'itérations est sensiblement plus élevé.

La balance harmonique et la collocation trigonométrique ne diffèrent de manière considérable qu'en termes de temps de calcul : 333 secondes pour la première et 120 secondes pour la deuxième. Cet écart s'explique par le nombre d'évaluations des forces hydrodynamiques requis par chaque méthode. En prenant le nombre minimal de points de collocation, on effectue trois évaluations des efforts du SqF par itération, alors qu'il en faut sensiblement plus pour évaluer les coefficients de Fourier des forces non linéaires lors de l'application de la stratégie AFT de la balance harmonique. D'après les tests numériques que nous avons réalisés, l'effet de l'augmentation du nombre de points de collocation sur la convergence du système d'équations non linéaires s'est avéré quasiment négligeable, pour l'exemple analysé.

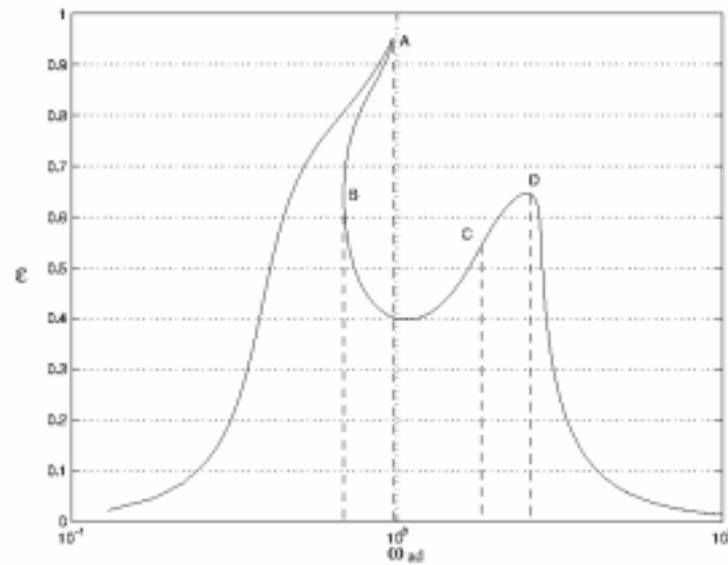


FIG. 3.7: Réponse au balourd au niveau du SqF obtenue par la balance harmonique et par la collocation trigonométrique

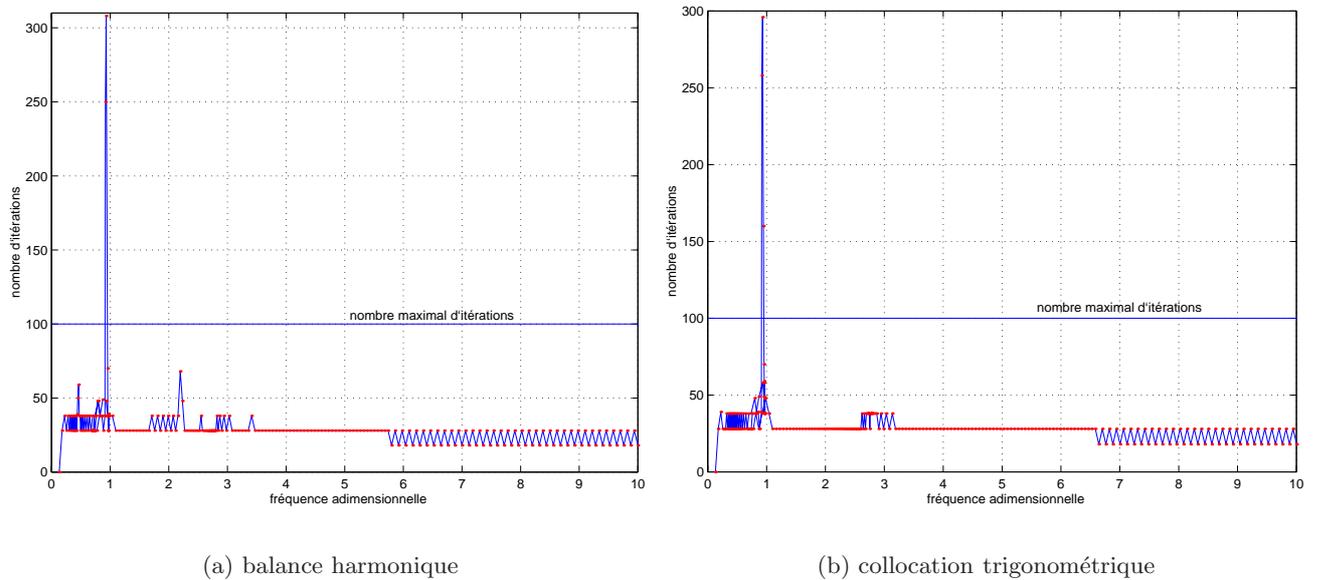


FIG. 3.8: Nombre d'itérations nécessaires avant d'atteindre le critère d'arrêt

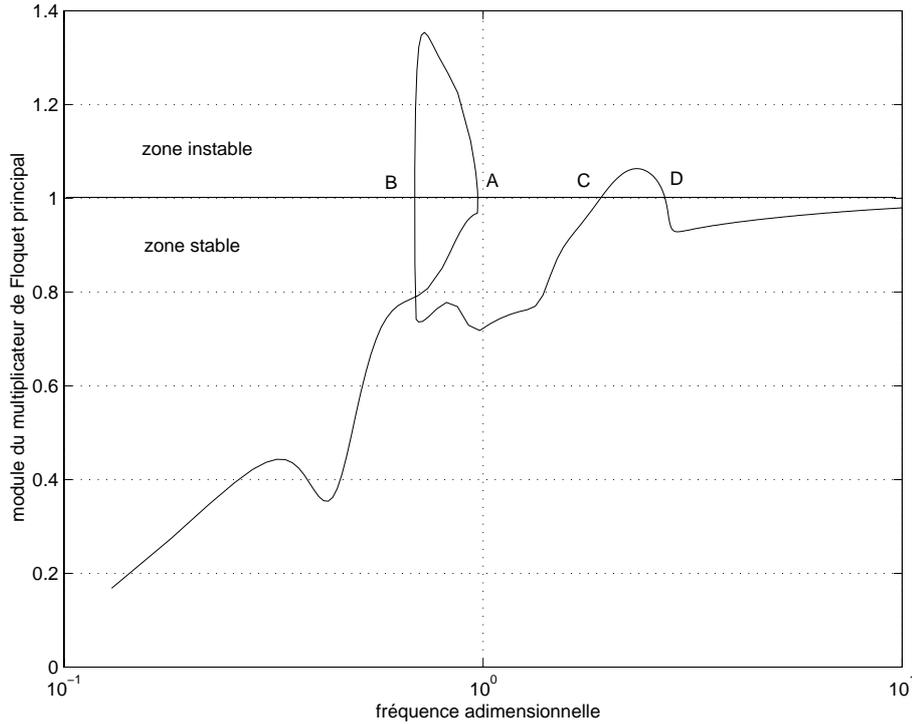


FIG. 3.9: Analyse de la stabilité des solutions périodiques du rotor Jeffcott

Pour l'analyse de la stabilité des solutions périodiques, la matrice de Floquet est déterminée au travers de la technique proposée par HSU [66], les dérivées des forces non linéaires étant calculées par différences finies. Il convient de souligner que SHIAU, HWANG et CHANG [158] déduisent des formes analytiques pour les dérivées des forces visqueuses, décrites selon l'approximation palier court et le modèle de cavitation π -film. Les matrices $[K^k]_{nl}$ et $[C^k]_{nl}$ issues de la discrétisation de la période sont évaluées par la règle du trapèze. La figure 3.9 présente le module du multiplicateur de Floquet principal fonction de la vitesse de rotation adimensionnelle du Jeffcott, pour $K = 200$. On constate l'existence de deux plages d'opération instable, délimitées par \overline{AB} et \overline{CD} .

En examinant l'évolution du multiplicateur de Floquet principal sur le plan complexe, il est possible d'identifier par quel type de bifurcation le système perd sa stabilité. La figure 3.10 indique que la première région d'instabilité, \overline{AB} , est associée à une bifurcation du type point selle. Une éventuelle perturbation du rotor dans cette plage de vitesse le fait sauter à une position d'équilibre stable sur la branche supérieure ou inférieure de la réponse au balourd. La deuxième instabilité, \overline{CD} , correspond à une bifurcation de Hopf secondaire. Dans cette région, une perturbation apportée au système conduit le rotor à un mouvement quasi-périodique.

En ce qui concerne la détermination de la matrice de Floquet, nos tests numériques nous ont permis de conclure qu'au delà de $K = 90$, ses valeurs propres n'ont plus d'altération sensible. Cependant, le choix de K dépendra toujours de la forme de la matrice périodique $[L](t)$, si bien qu'une étude sur la convergence des multiplicateurs de Floquet en fonction de ce paramètre doit être menée pour chaque problème spécifique.

Passons maintenant à la méthode de tir. L'intégration temporelle est exécutée premièrement par

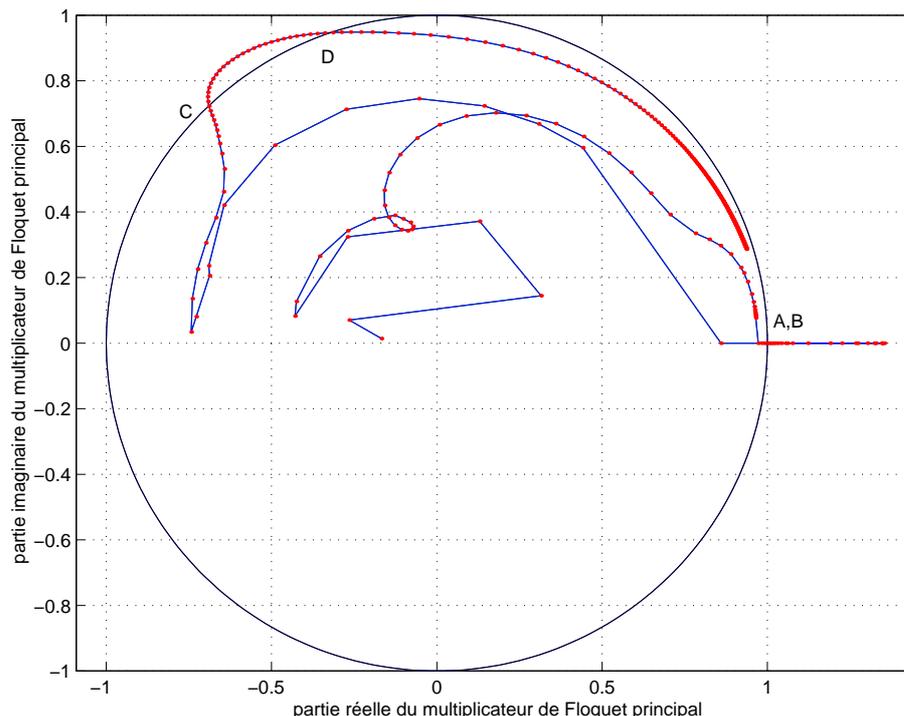


FIG. 3.10: Identification des types de bifurcation pour le rotor Jeffcott

la méthode Runge-Kutta du 4^{ieme} ordre à pas de temps constant. Le nombre maximal d'itérations du schéma Newton-Raphson pour la résolution du système d'équations non linéaires est fixé en 10. Lorsque cette limite est atteinte, l'incrément *pseudo-arc length* $\Delta\lambda$ est réduit à sa moitié. La convergence de la solution est vérifiée par le critère d'arrêt suivant :

$$\frac{\|\mathbf{q}_0\|}{\|\mathbf{q}_0\|} \leq 10^{-9}$$

où $\Delta\mathbf{q}_0$ est la solution du système :

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{q}_0} & \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} \\ \hline \frac{\partial\mathbf{q}_0}{\partial\lambda} & \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta\mathbf{q}_0 \\ \Delta\alpha \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} \Psi \\ \Lambda \end{array} \right\} \quad (3.73)$$

Un calcul préliminaire est effectué avec un pas de temps $\Delta\tau = 2\pi/100$ et un incrément $\Delta\lambda = 0, 1$. Aucune stratégie spéciale n'est adoptée pour la gestion de l'incrément $\Delta\lambda$. Nous optons pour une approche très simple, qui consiste à remettre $\Delta\lambda$ à une valeur standard prédéfinie lorsque le calcul passe à un nouveau point sur la plage de fréquence. La méthode de tir ainsi appliquée échoue lors du passage de la première vitesse critique, à cause de problèmes de convergence. Pour les surmonter, il a fallu que le pas de temps soit réduit à $\Delta\tau = 2\pi/300$, la diminution de l'incrément $\Delta\lambda$ n'ayant apporté aucune amélioration à la convergence. Malgré la faible amplitude du pas de temps, la précision du

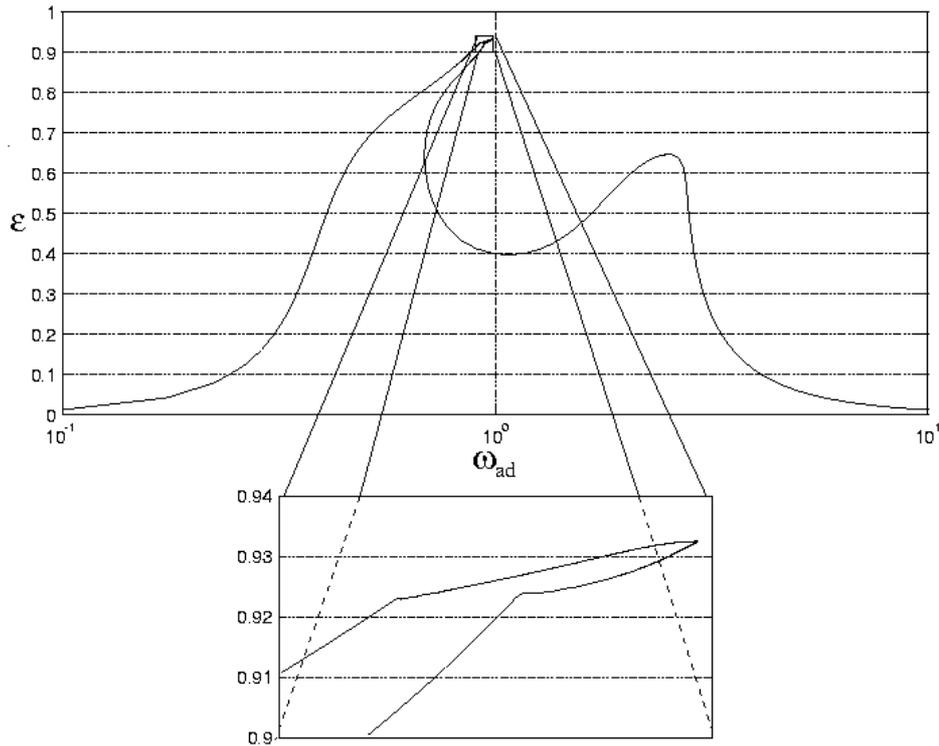


FIG. 3.11: Réponse au balourd du Jeffcott au niveau du SqF - Méthode de tir avec intégration temporelle Runge-Kutta du 4^{ème} ordre à pas de temps constant

calcul sur le premier pic de résonance se révèle être insatisfaisante, comme le mettent en évidence les figures 3.11 et 3.12.

En réduisant progressivement le pas de temps de l'intégration temporelle, les résultats obtenus par la méthode de tir convergent vers ceux de la balance harmonique et de la collocation trigonométrique, à un coût temporel extrêmement élevé. Pour $\Delta\tau = 2\pi/600$ et $\Delta\lambda = 0,3$, les résultats atteignent enfin la précision souhaitée sur la réponse au balourd et sur l'analyse de la stabilité, la réalisation du calcul prenant 3,2 heures, sans jamais dépasser la limite d'itérations. On en conclut que le contrôle du pas de temps est fondamental lorsque l'on emploie une technique d'intégration temporelle explicite avec la méthode de tir. En effet, un gain d'efficacité peut être acquis si l'on définit un pas de temps plus grand pour les vitesses où les effets non linéaires sont faibles, et beaucoup plus fin où la non linéarité affecte sensiblement la dynamique du système.

Nous avons alors testé la performance de la méthode de tir en utilisant une technique d'intégration temporelle plus élaborée, la fonction *ode45* du logiciel MATLAB. Son algorithme est fondé sur une méthode Runge-Kutta hybride des 4^{ème} et 5^{ème} ordres, avec pas de temps adaptatif [95]. Les courbes obtenues au terme des 2,5 heures de calcul, pour $\Delta\lambda = 0,3$, sont identiques à celles des figures 3.7 et 3.9. Ces résultats mettent en relief l'importance du choix de la technique d'intégration temporelle devant être utilisée lors de l'application de la méthode de tir.

Dans les calculs réalisés avec $\Delta\lambda = 0,3$, nous avons remarqué que le nombre d'itérations de la résolution du système d'équations non linéaires se limitait généralement à 2 ou 3. Cela indique que

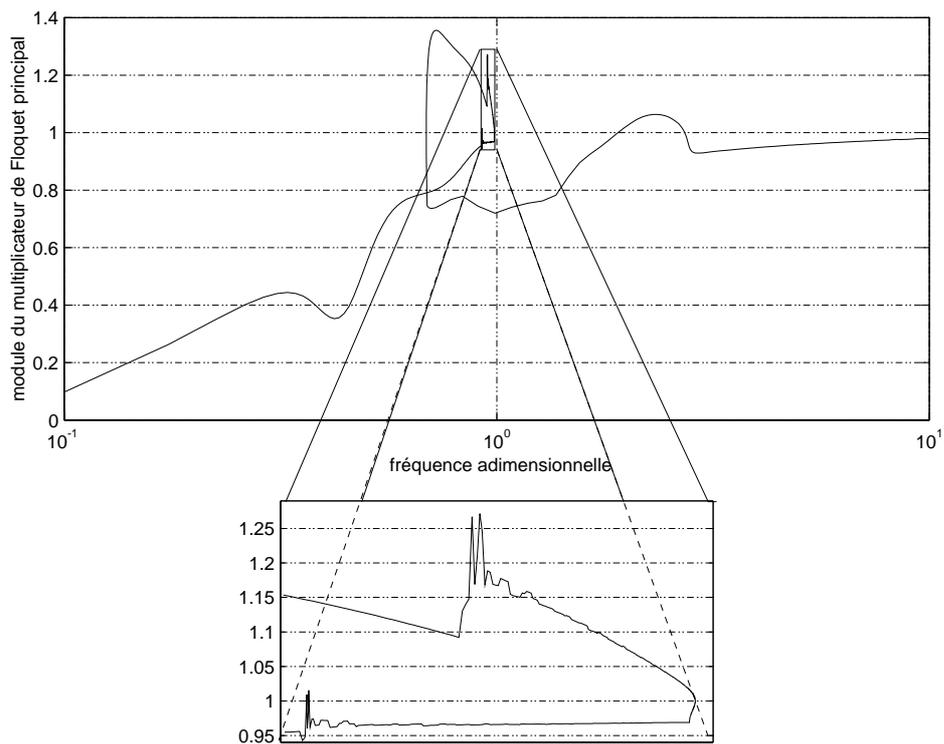


FIG. 3.12: *Multiplicateur de Floquet principal - Méthode de tir avec intégration temporelle Runge-Kutta du 4^{ème} ordre à pas de temps constant*

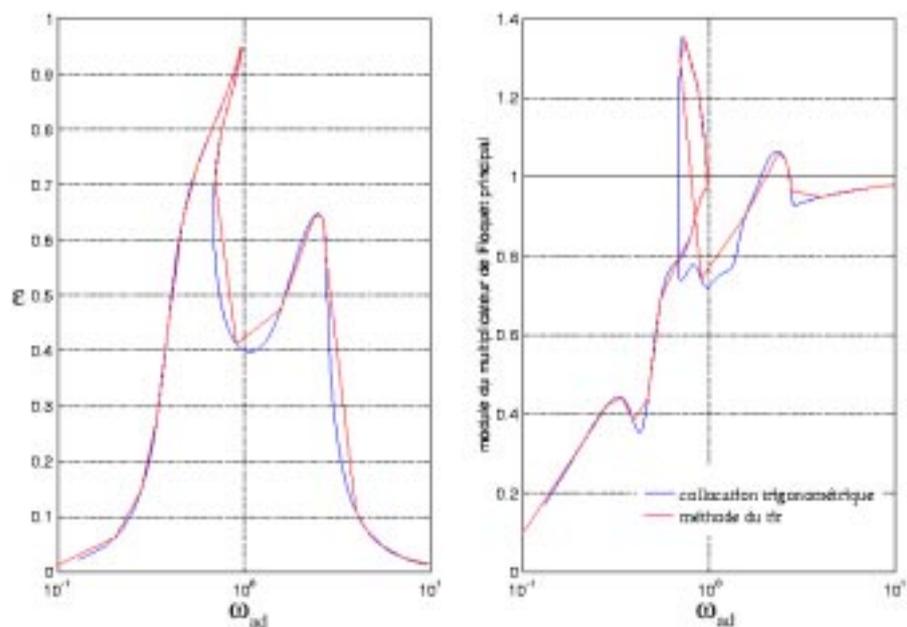


FIG. 3.13: *Réponse au balourd du Jeffcott au niveau du SqF - Méthode de tir avec la gestion de $\Delta\lambda$ proposée en [168]*

l'incrément *arc length* aurait pu être augmenté pendant le calcul. Afin de tenter de rendre la méthode de tir plus efficace, la gestion de l'incrément *pseudo-arc length* $\Delta\lambda$ proposée par SUNDARARAJAN et NOAH [168] est implémentée. Selon cette gestion, l'actualisation de $\Delta\lambda$ suit la règle d'adaptation suivante :

$$\Delta\lambda_i = 2^{(6-N_{it})/4} \Delta\lambda_{i-1} \quad (3.74)$$

où N_{it} correspond au nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la précision sur la solution au point de calcul précédent. En utilisant la stratégie donnée par la formule 3.74 et la fonction *ode45*, le temps de calcul chute à 38,6 minutes. Ce gain d'efficacité résulte néanmoins en une diminution du nombre de points calculés sur la plage de fréquence. Bien que les courbes de réponse au balourd et d'analyse de la stabilité soient plus grossières, le calcul n'éprouve aucune perte de précision sensible, comme le montre la figure 3.13.

3.4 Conclusion

L'adéquation des méthodes de calcul non linéaires testées ici à la caractérisation de la dynamique d'amortisseurs *squeeze film* est analysée à la lumière des simulations menées pour un rotor Jeffcott. Nous concluons que les trois méthodes fournissent des résultats similaires en termes de réponse au balourd et de stabilité, à condition que la technique d'intégration temporelle utilisée avec la méthode de tir marche de manière satisfaisante. En effet, la robustesse de cette méthode est étroitement liée à la performance de l'intégration temporelle. Pour des schémas d'intégration explicites, l'optimisation de la méthode de tir dépendra d'un contrôle optimal du pas de temps $\Delta\tau$ ainsi que d'une gestion optimale de l'incrément *arc length* $\Delta\lambda$.

Pour l'exemple étudié dans ce chapitre, la collocation trigonométrique se révèle être la méthode la plus performante. Il est important de remarquer toutefois, qu'elle est favorisée par la nature des solutions périodiques (circulaires et centrées), laquelle permet la définition d'un nombre minimale de points de collocation. L'application de la méthode de tir sera un choix plus intéressant pour déterminer des réponses dont le spectre est assez riche en harmoniques. Par contre, si les solutions périodiques ne sont composées que de 4 ou 5 harmoniques principaux, l'emploi de la collocation trigonométrique et de la balance harmonique est d'autant plus avantageux que ces méthodes permettent une condensation du modèle sur ses degrés de libertés non linéaires d'une manière assez simple.

Chapitre 4

Système d’Alimentation Ponctuelle

Le système d’alimentation peut intervenir dans la performance d’un SqF de plusieurs manières. Lorsque la pression d’alimentation est faible devant celles développées dans le film, la présence de points ou de gorges d’alimentation se traduit par une réduction de la surface d’écrasement effective de l’amortisseur. Cela provoque une chute locale dans la zone positive du champ de pression et, par conséquent, l’atténuation des efforts hydrodynamiques. Par contre, si les pressions d’alimentation sont du même ordre de grandeur que les pressions dans le film, le système d’alimentation peut générer des forces hydrostatiques non négligeables qui jouent le rôle d’un ressort non linéaire. Outre l’influence directe sur le champ de pression, le système d’alimentation peut également interférer indirectement sur le comportement du SqF. En effet, si l’alimentation est insuffisante, le film d’huile se mélange à l’air ambiant aspiré à travers les extrémités du SqF, donnant origine à un fluide biphasique [41] qui peut provoquer une baisse de performance de l’amortisseur. Ainsi, le modèle du système d’alimentation doit permettre de déterminer de manière assez précise la capacité d’alimentation aussi bien que les pressions aux points d’injection.

L’intérêt de l’injection ponctuelle d’huile par rapport à une configuration d’alimentation par gorge réside dans le fait qu’elle permet d’augmenter le potentiel d’amortissement du SqF, en dépit d’une diminution de la capacité d’alimentation [26][193]. Malgré la forte influence du système d’alimentation sur la performance du SqF, l’apport d’huile du type ponctuel a été peu étudié jusqu’à présent, comme nous l’avons souligné précédemment. La réalisation d’une étude spécifique à ce propos dans le cadre de ce doctorat est ainsi motivée par la pénurie d’articles et d’informations disponibles dans la littérature scientifique.

En ce qui concerne la modélisation de systèmes d’alimentation ponctuel, MARMOL et VANCE [90] proposent une résolution à l’aide de la méthode des différences finies, le système d’équations régissant le problème étant composé de l’équation de Reynolds et des expressions des bilans massiques aux points d’injection. Ils préconisent la définition d’un maillage ayant des pas de discrétisation supérieurs au diamètre des conduites d’alimentation et supposent linéaire la résistance à l’écoulement à travers ceux-ci. LUND, SMALLEY, TECZA et WALTON [88] utilisent une stratégie de modélisation similaire, mais considèrent les trous d’injection d’huile comme des sources ponctuelles, dans le sens géométrique du terme. La validité de cette hypothèse est analysée par HAHN et CHEN [26] pour des SqF ouverts, à la lumière d’un modèle semi-analytique développé pour éviter l’emploi de méthodes numériques

et rendre ainsi l’estimation du champ de pression plus rapide et précise. Ces auteurs concluent que l’erreur introduite par l’approche de LUND, SMALLEY, TECZA et WALTON [88] est négligeable lorsque le rapport entre la longueur du SqF et le diamètre des trous d’injection est supérieure à 6.

Tous ces modèles s’appuient sur l’hypothèse que la pression est constante dans une certaine partie du système d’alimentation relativement proche du film. Or, le SqF peut parfois agir lui même comme une pompe et refouler l’huile dans le système hydraulique d’alimentation, provoquant ainsi des fluctuations de pression à la sortie de la pompe d’alimentation générale du système.

Afin d’avoir une description plus réaliste des conditions aux limites du problème, cette étude sera basée sur un modèle développé en couplant l’équation de comportement du SqF à celles non linéaires régissant l’écoulement dans le système hydraulique d’alimentation. La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre le système d’équations résultant. L’influence des principaux paramètres du système d’alimentation, à savoir le nombre de points d’injection et la puissance de la pompe du circuit hydraulique, sur le comportement dynamique de rotors flexibles sera analysée. Le calcul de la réponse en fréquence s’effectue au travers de la méthode de la collocation trigonométrique, la continuité étant assurée par la technique *pseudo-arc length*. La stabilité est étudiée à la lumière de la théorie de Floquet.

4.1 Modélisation du Squeeze Film - Problème Hydrodynamique

Le champ de pression dans le SqF est modélisé par l’équation de Reynolds classique de la lubrification. En considérant les propriétés du fluide comme constantes, on a :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.1)$$

Cette équation, valable sur toute la surface de l’amortisseur hormis les points d’injection, est discrétisée par la méthode des différences finies, de façon à ce que l’on aboutisse à un système d’équations algébriques linéaires. Trois approches distinctes peuvent être employées pour la définition du maillage, deux d’entre elles déjà commentées dans l’introduction de ce chapitre. MARMOL et VANCE [90] restreignent les incréments du maillage, Δz et $R\Delta\theta$, à des dimensions supérieures au diamètre des trous d’injection d’huile. Une approche plus grossière d’un point de vue physique, selon laquelle les conduites d’alimentation sont considérées comme idéalement ponctuelles, est adoptée par LUND, SMALLEY, TECZA et WALTON [88]. La troisième approche consiste à définir un maillage irrégulier, physiquement cohérent vis-à-vis du diamètre de la section transversale des conduites d’alimentation et assez fin sur le reste de la surface de l’amortisseur. On évite ainsi de pénaliser la précision du calcul à cause d’un maillage excessivement grossier, tout en respectant la restriction dimensionnelle imposée par les trous d’injection.

Aux points d’alimentation, des équations reliant la pression dans le film et le flux dans les conduites sont obtenues à partir de bilans massiques, voire volumiques compte tenu de l’hypothèse d’incompressibilité du fluide. Soit la surface de contrôle de frontière Γ de la figure 4.1, représentée par le rectangle en tiret et englobant le point d’injection P_{ij} . Le bilan volumique exprime que le flux total induit par l’effet de Poiseuille à travers Γ , doit égaler l’écoulement à travers la conduite d’injection :

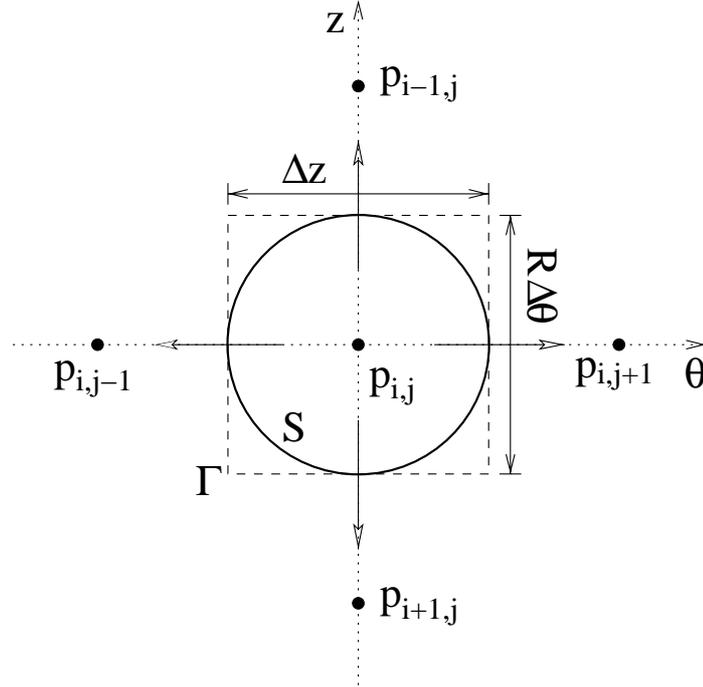


FIG. 4.1: Frontière d'établissement du bilan massique au point d'injection de section S

$$-\frac{h^3 R \Delta \theta}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{\Gamma} - \frac{h^3 \Delta z}{12R\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{\Gamma} + Q_{inj} = 0 \quad (4.2)$$

Après discrétisation par différences finies du premier ordre, l'équation 4.2 s'écrit :

$$-\frac{h_{i,j}^3 R \Delta \theta}{12\mu} \left(\frac{p_{i,j} - p_{i+1,j}}{\Delta z} + \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta z} \right) - \frac{h_{i,j}^3 \Delta z}{12R\mu} \left(\frac{p_{i,j} - p_{i,j+1}}{\Delta \theta} + \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta \theta} \right) + Q_{inj} = 0 \quad (4.3)$$

Cette équation permet de coupler le champ de pression dans le film d'huile avec le système hydraulique d'alimentation. Il convient de faire remarquer dans la discrétisation de 4.2, que nous avons considéré l'épaisseur $h(\theta)$ comme constante sur le volume de contrôle et égale à l'épaisseur approchée du film au point d'injection, $h_{i,j}$, ce qui vise à simplifier l'implémentation du modèle.

Le système obtenu suite à la discrétisation des équations 4.1, 4.2 et de celles associées aux étanchéités (voir section 2.3) peut être partitionné de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{surf} \\ p_{inj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{surf} \\ -Q_{inj} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

où,

$\{p_{surf}\}$: vecteur des pressions sur la surface du SqF;

$\{p_{inj}\}$: vecteur des pressions aux points d’injection;

$\{H_{surf}\}$: vecteur d’écrasement du film et des conditions d’étanchéité;

$\{Q_{inj}\}$: vecteur des débits à travers les conduites d’alimentation.

En résolvant le système ci-dessus pour les pressions aux points d’injection, on arrive à :

$$([K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]) \{p_{inj}\} = -\{Q_{inj}\} - [K_{21}][K_{11}]^{-1}\{H_{surf}\} \quad (4.5)$$

Une fois calculé $\{p_{inj}\}$, on retrouve le champ de pression dans le film par l’intermédiaire de l’équation :

$$\{p_{surf}\} = [K_{11}]^{-1} (\{H_{surf}\} - [K_{12}]\{p_{inj}\}) \quad (4.6)$$

Pour une alimentation par n points d’injection, le système 4.5 possède n équations et le double d’inconnues, à savoir les pressions $\{p_{inj}\}$ et les débits $\{Q_{inj}\}$. La résolution du problème nécessite ainsi des équations supplémentaires et la définition de conditions aux limites. On subvient à ce besoin au travers de la modélisation du circuit hydraulique, laquelle est présentée ci-après.

4.2 Modélisation du Système d’Alimentation - Problème Hydraulique

La modélisation du système d’alimentation est effectuée en utilisant des principes classiques de dimensionnement de circuits hydrauliques [67] [52]. Bien que la géométrie du circuit d’alimentation puisse varier sensiblement, ces principes peuvent être appliqués à n’importe quelle configuration, pourvu que l’on en connaisse les formules des pertes de charge singulières.

Le schéma du circuit hydraulique d’alimentation considéré dans ce travail est présenté dans la figure 4.2. Il est constitué d’une pompe qui aspire l’huile d’un réservoir non pressurisé et la refoule dans une couronne hydraulique de section constante, par laquelle le fluide est distribué à des points d’injection identiques. Dans le cas d’une alimentation par n trous, les $4n + 4$ inconnues du problème sont :

$p_i, i = 1, \dots, n$: pressions aux points d’injection;

$Q_i, i = 1, \dots, n$: débits à travers les conduites d’injection;

$p_i, i = n + 1, \dots, 2n$: pressions aux intersections entre la couronne hydraulique et les conduites d’injection;

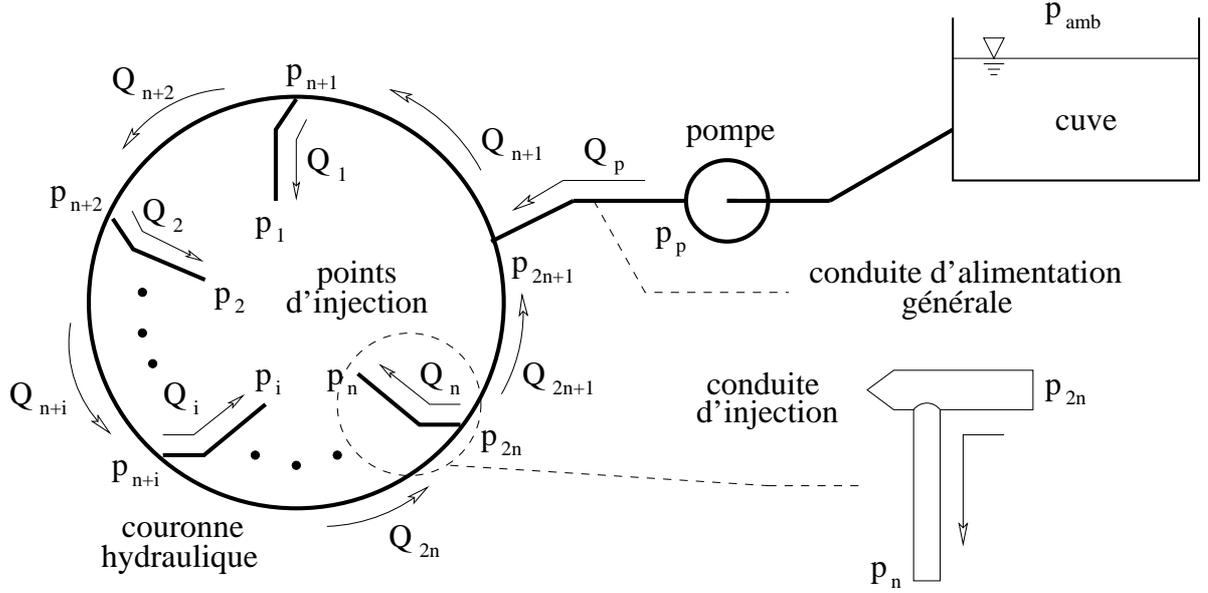


FIG. 4.2: Architecture type du circuit hydraulique d'alimentation du SqF

p_{2n+1} : pression à l'intersection entre la couronne hydraulique et la conduite d'alimentation générale;

Q_i , $i = n + 1, \dots, 2n + 1$: débits dans les tronçons de la couronne hydraulique;

p_p : pression en sortie de pompe;

Q_p : débit de la pompe.

Conformément à la notation adoptée, on identifie $\{p_{inj}\} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}^t$ et $\{Q_{inj}\} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}^t$. La nomenclature des paramètres géométriques du circuit hydraulique est donnée dans le tableau 4.1.

Sachant que le fluide est considéré comme incompressible, l'application de l'équation de la continuité aux intersections du système fournit :

$$\begin{aligned}
 Q_p + Q_{2n+1} - Q_{n+1} &= 0 \\
 Q_{n+1} - Q_1 - Q_{n+2} &= 0 \\
 &\vdots \\
 Q_{n+i} - Q_i - Q_{n+i+1} &= 0 \\
 &\vdots \\
 Q_{2n} - Q_n - Q_{2n+1} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Pour éviter des problèmes de conditionnement matriciel lors des calculs, les équations du système 4.7 sont écrites en fonction des nombres de Reynolds et adimensionnées de la manière suivante :

A_p	aire de la section de la conduite d’alimentation générale
D_{hp}	diamètre hydraulique de la conduite d’alimentation générale
l_p	longueur de la conduite d’alimentation générale
A_{ch}	aire de la section de la couronne hydraulique
D_{hch}	diamètre hydraulique de la couronne hydraulique
R_{ch}	rayon de courbure de la couronne hydraulique
$l_i \ i = n + 1, \dots, 2n + 1$	longueur des tronçons de la couronne hydraulique
A_c	aire de la section de la conduite d’injection côté couronne
D_{hc}	diamètre hydraulique de la conduite d’injection côté couronne
l_c	longueur de la conduite d’injection côté couronne
A_s	aire de la section de la conduite d’injection côté SqF
D_{hs}	diamètre hydraulique de la conduite d’injection côté SqF
l_s	longueur de la conduite d’injection côté SqF

TAB. 4.1: Nomenclature des paramètres du circuit hydraulique d’alimentation

$$\begin{aligned}
Re_p \frac{A_p}{D_{hp}} \frac{D_{hch}}{A_{ch}} + Re_{2n+1} - Re_{n+1} &= 0 \\
Re_{n+1} - Re_1 \frac{A_c}{D_{hc}} \frac{D_{hch}}{A_{ch}} - Re_{n+2} &= 0 \\
&\vdots \\
Re_{n+i} - Re_i \frac{A_c}{D_{hc}} \frac{D_{hch}}{A_{ch}} - Re_{n+i+1} &= 0 \\
&\vdots \\
Re_{2n} - Re_n \frac{A_c}{D_{hc}} \frac{D_{hch}}{A_{ch}} - Re_{2n+1} &= 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

où $Re_i = \frac{\rho Q_i D_{hi}}{\mu A_i}$ est le nombre de Reynolds associé au flux Q_i , à travers le tronçon de diamètre hydraulique D_{hi} et de section d’aire A_i .

La conservation de la masse étant assurée par les équations 4.8, il reste à modéliser les fluctuations de pressions engendrées par des variations de vitesse du fluide et par la perte d’énergie à cause du frottement. Pour ce faire, on dispose du principe de conservation de l’énergie. Dans ce qui suit, nous l’appliquons à un tronçon quelconque du circuit hydraulique pour en déduire une forme simplifiée qui régit le comportement énergétique du fluide.

4.2.1 La Première Loi de la Thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique, aussi dit loi de conservation de l’énergie, exprime que la variation de l’énergie totale du système, \mathcal{E} , est égale à la quantité de chaleur apportée au système par unité de temps, \dot{Q} , moins la puissance des efforts intérieurs développée par le système, \dot{W} . Mathématiquement :

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D\mathcal{E}}{Dt} \quad (4.9)$$

où l’énergie totale du système est donnée par :

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{V}} e\rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left(u + \frac{\mathbf{V}^t\mathbf{V}}{2} + gZ \right) \rho d\mathcal{V} \quad (4.10)$$

avec,

e : énergie totale massique;

u : énergie interne spécifique;

\mathbf{V} : vecteur vitesse de la particule de volume $d\mathcal{V}$;

Z : hauteur de la particule par rapport à un repère fixe;

g : accélération de pesanteur.

L’énergie \mathcal{E} est associée à un système suivi dans son mouvement. Si l’on définit à un instant donné un volume de contrôle \mathcal{V}_c , délimité par une surface de contrôle \mathcal{A}_c et coïncidant avec le volume matériel \mathcal{V} , l’équation 4.9 peut s’écrire à l’aide du théorème de Leibnitz (équation 2.51) [81] :

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}_c} e\rho d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_c} e\rho\mathbf{V} \cdot d\mathcal{A} \quad (4.11)$$

La puissance développée par le volume de contrôle peut être décomposée de la manière suivante [52] :

$$\dot{W} = \dot{W}_{axe} + \dot{W}_{normal} + \dot{W}_{cis} + \dot{W}_{autres} \quad (4.12)$$

Le terme \dot{W}_{axe} désigne la puissance transmise à travers la surface de contrôle par l’intermédiaire d’un organe mécanique. La puissance exercée par les contraintes normales à la surface de contrôle, τ_n , est donnée par [52] :

$$\dot{W}_{normal} = - \int_{\mathcal{A}_c} \tau_n \mathbf{V} \cdot d\mathcal{A} \quad (4.13)$$

La puissance résultant de l’action des contraintes de cisaillement dans le plan de la surface de contrôle, τ_c , s’écrit [52] :

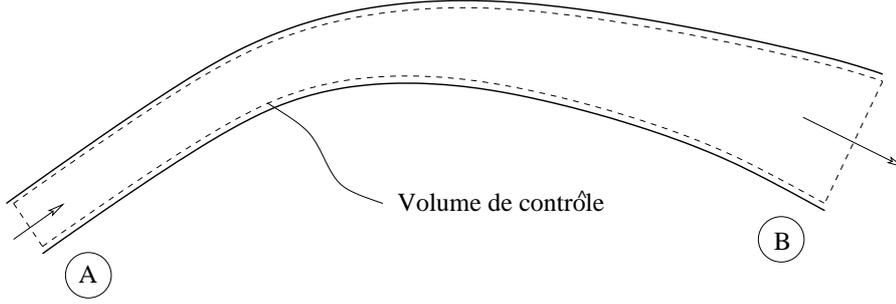


FIG. 4.3: Schéma et volume de contrôle d'un tronçon quelconque du circuit hydraulique

$$\dot{W}_{cis} = - \int_{\mathcal{A}_c} \tau_c dA \cdot \mathbf{V} = - \int_{\mathcal{A}_c} \tau_c \cdot \mathbf{V} dA \quad (4.14)$$

Si le volume de contrôle est délimité par des surfaces rigides, la condition de non glissement au niveau des parois se traduit par $\mathbf{V} = 0$. De plus, en définissant la surface de contrôle de manière à ce qu'elle soit perpendiculaire à l'écoulement, alors τ_c est perpendiculaire à \mathbf{V} , et la puissance \dot{W}_{cis} devient nulle. Le terme \dot{W}_{autres} englobe toutes les formes d'énergie autres que la mécanique, telles que l'énergie électrique, l'énergie électromagnétique, etc. Dans le problème hydraulique en question, ces formes d'énergie sont absentes, si bien que la puissance \dot{W}_{autres} est négligée. La loi de conservation de l'énergie devient donc :

$$\dot{Q} - \dot{W}_{axe} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}_c} e \rho d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_c} (e - \tau_n v) \rho \mathbf{V} \cdot d\mathcal{A} \quad (4.15)$$

où $v = 1/\rho$ est le volume spécifique du fluide.

Les effets visqueux peuvent rendre le niveau de contrainte normale à la surface de contrôle, τ_n , différent du niveau de pression thermodynamique. Cependant, dans la majorité des écoulements, $\tau_n \approx -p$ est une approximation raisonnable [52]. On obtient ainsi :

$$\dot{Q} - \dot{W}_{axe} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}_c} \left(u + \frac{\mathbf{V}^t \mathbf{V}}{2} + gZ \right) \rho d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_c} \left(u + \frac{\mathbf{V}^t \mathbf{V}}{2} + gZ + pv \right) \rho \mathbf{V} \cdot d\mathcal{A} \quad (4.16)$$

Soit un tronçon quelconque du circuit d'alimentation du SqF, représenté par le schéma de la figure 4.3. En supposant que l'écoulement à travers ce tronçon est incompressible et en régime permanent, et que l'énergie interne, u , et la pression, p , sur les sections A et B sont uniformes, l'application de l'équation de l'énergie, équation 4.16, au volume de contrôle indiqué sur le schéma fournit :

$$\dot{Q} - \dot{W}_{axe} = \dot{m} \left[(u_B - u_A) + \left(\frac{p_B}{\rho} - \frac{p_A}{\rho} \right) + g(Z_B - Z_A) \right] + \int_{\mathcal{A}_B} \frac{V_B^2}{2} \rho V_B dA - \int_{\mathcal{A}_A} \frac{V_A^2}{2} \rho V_A dA \quad (4.17)$$

où \dot{m} est le flux massique traversant le tronçon et V_A et V_B sont les composantes de la vitesse du fluide perpendiculaires aux sections A et B, respectivement. Ces composantes ne sont pas obligatoirement uniformes sur la surface de contrôle. Afin d’éliminer les intégrales de l’équation 4.17, nous introduisons le coefficient d’énergie cinétique [67][52] :

$$\alpha = \frac{\int_A \rho V^3 dA}{\dot{m} \bar{V}^2} \quad (4.18)$$

et l’équation de conservation de l’énergie devient :

$$\left(\frac{p_A}{\rho} + \frac{\alpha_A \bar{V}_A^2}{2} + gZ_A \right) - \left(\frac{p_B}{\rho} + \frac{\alpha_B \bar{V}_B^2}{2} + gZ_B \right) - \frac{\delta W_{axe}}{dm} = (u_B - u_A) - \frac{\delta Q}{dm} \quad (4.19)$$

où $\bar{V}_{A,B}$ sont les vitesses moyennes de l’écoulement sur les sections A et B de la conduite. Le terme $(u_B - u_A) - \frac{\delta Q}{dm}$, dénommé perte de charge, correspond à la différence d’énergie par unité de masse entre les sections A et B. Il traduit la conversion d’énergie mécanique en énergie thermique $(u_B - u_A)$, plus la perte d’énergie par transfert de chaleur $\frac{\delta Q}{dm}$.

L’équation 4.19 peut être simplifiée davantage lorsque l’on néglige le différentiel d’énergie potentielle gravitationnelle et si l’on suppose que l’écoulement est laminaire, pour lequel $\alpha = 2$ [52]. En notant la perte de charge H , on arrive ainsi à :

$$\left(\frac{p_A}{\rho} + \bar{V}_A^2 \right) - \left(\frac{p_B}{\rho} + \bar{V}_B^2 \right) - \frac{\delta W_{axe}}{dm} = H \quad (4.20)$$

L’équation ci-dessus correspond à la forme simplifiée de la première loi de la thermodynamique qui sera utilisée pour la modélisation du circuit hydraulique d’alimentation du SqF. L’hypothèse simplificatrice la plus forte faite dans sa déduction est celle d’écoulement en régime permanent. Le couplage entre le SqF et le système d’alimentation engendre certainement des écoulements plus complexes. La formulation énergétique proposée permet néanmoins de décrire le problème de manière assez simple, tandis qu’une modélisation complète de l’écoulement rendrait la résolution du problème excessivement lourde.

En supposant que l’écoulement dans les tronçons du circuit est laminaire, l’utilisation de la forme simplifiée de l’équation de l’énergie donnée par 4.20 permet d’obtenir, suite à une procédure d’adimensionnalisation :

$$\begin{aligned}
(p_{n+1} - p_1) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_1}{|Re_1|} + \left(\frac{D_{hch}^2}{D_{hc}^2} - \frac{D_{hc}^2}{D_{hs}^2} \frac{D_{hch}^2}{D_{hs}^2} \right) \frac{Re_1^3}{|Re_1|} - H_1 \frac{\rho^2 D_{hch}^2}{\mu^2} &= 0 \\
(p_{n+2} - p_2) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_2}{|Re_2|} + \left(\frac{D_{hch}^2}{D_{hc}^2} - \frac{D_{hc}^2}{D_{hs}^2} \frac{D_{hch}^2}{D_{hs}^2} \right) \frac{Re_2^3}{|Re_2|} - H_2 \frac{\rho^2 D_{hch}^2}{\mu^2} &= 0 \\
\vdots & \\
(p_{2n} - p_n) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_n}{|Re_n|} + \left(\frac{D_{hch}^2}{D_{hc}^2} - \frac{D_{hc}^2}{D_{hs}^2} \frac{D_{hch}^2}{D_{hs}^2} \right) \frac{Re_n^3}{|Re_n|} - H_n \frac{\rho^2 D_{hch}^2}{\mu^2} &= 0 \\
(p_p - p_{2n+1}) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_p}{|Re_p|} - H_p \frac{\rho^2 D_{hch}^2}{\mu^2} &= 0 \\
(p_{2n+1} - p_{n+1}) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_{n+1}}{|Re_{n+1}|} - H_{n+1} \frac{\rho^2 D_{hch}^2}{\mu^2} &= 0 \\
(p_{n+1} - p_{n+2}) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_{n+2}}{|Re_{n+2}|} - H_{n+2} \frac{\rho^2 D_{hch}^2}{\mu^2} &= 0 \\
\vdots & \\
(p_{2n} - p_{2n+1}) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_{2n+1}}{|Re_{2n+1}|} - H_{2n+1} \frac{\rho^2 D_{hch}^2}{\mu^2} &= 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

où H_i est la perte de charge totale associée au flux Q_i . Le terme $\frac{Re_i}{|Re_i|}$ est utilisé dans l’écriture des équations, car le sens de l’écoulement dans chaque tronçon n’est pas connu à l’avance.

En notant \dot{W}_p la puissance fournie à la pompe, η_p son rendement et p_{amb} la pression ambiante, pour le volume de contrôle englobant l’huile du réservoir jusqu’en aval de la pompe, l’équation de conservation de l’énergie simplifiée s’écrit :

$$-\left(\frac{p_p - p_{amb}}{\rho} \right) - \frac{\bar{V}_p^2 - \bar{V}_s^2}{2} + \frac{\dot{W}_p}{\eta_p \rho Q_p} - H_a = 0 \tag{4.22}$$

où p_{amb} est la pression ambiante régnant dans le réservoir et H_a correspond à la perte de charge dans la partie aspirante du réseau. Puisque nous visons à étudier l’interaction entre le système d’alimentation et le SqF, nous nous intéresserons surtout à l’écoulement dans l’espace de refoulement de la pompe. La perte de charge dans son espace d’aspiration, H_a , sera alors négligée. En admettant que la vitesse moyenne du fluide dans le réservoir, \bar{V}_s , est négligeable devant celle à la sortie de la pompe, \bar{V}_p , après adimensionnalisation l’équation 4.22 se réduit à :

$$(p_{amb} - p_p) \frac{Re_p \rho D_{hp}^2}{\mu^2} - \frac{Re_p^3}{2} + \frac{\dot{W}_p}{\eta_p} \frac{\rho^2 D_{hp}^3}{\mu^3 A_p} \tag{4.23}$$

Les équations 4.8, 4.21 et 4.23 composent le système d’équations non linéaires permettant de calculer les $4n + 4$ inconnues du problème. La méthode de Newton-Raphson est employée pour le résoudre, les conditions aux limites étant définies par la puissance de la pompe et la pression dans le réservoir d’huile. Il convient de souligner que la matrice jacobienne peut être déterminée analytiquement, ce qui rend le processus de résolution plus efficace.

La description complète du comportement du circuit hydraulique requiert encore la modélisation des pertes de charge, ce qui est accompli dans la section qui suit.

4.2.2 Formules des pertes de charge

Deux mécanismes dissipatifs distincts provoquent les pertes de charge dans un circuit hydraulique : le frottement au niveau des parois des tronçons droits, dit perte de charge distribuée, et les écoulements secondaires développés lorsque le fluide traverse les divers obstacles du réseau, ce qui engendre des pertes de charge appelées singulières.

Pour un écoulement laminaire de profil complètement développé dans une conduite de longueur l et de diamètre hydraulique D_h , la perte de charge par frottement s’écrit [52] :

$$H_f = 32 \frac{l}{D_h^3} \frac{\mu^2}{\rho^2} |Re| \quad [J/kg] \quad (4.24)$$

Les pertes de charge singulières peuvent s’exprimer de la manière générale suivante :

$$H_s = \zeta \frac{\bar{V}^2}{2} = \zeta \frac{\mu^2}{\rho^2 D_h^2} \frac{Re^2}{2} \quad [J/kg] \quad (4.25)$$

où ζ est appelé coefficient de perte de charge singulière.

En supposant que les diamètres hydrauliques des conduites du circuit sont tous du même ordre de grandeur et que les effets de courbure de la couronne hydraulique sont négligeables, les pertes de charge singulières suivantes peuvent être identifiées dans le système d’alimentation (conf. figure 4.2):

- perte de charge due à la séparation/réunion des courants aux intersections,
- perte de charge associée à la géométrie des conduites d’injection,
- perte de charge associée aux jets d’huile sortant des conduites d’injection et heurtant la surface intérieure du SqF.

Les pertes de charge dues à la séparation/réunion des courants dépendent de la configuration de l’écoulement à l’intersection, c’est à dire du sens des flux dans les branches convergeant au point commun. Les abaques relatives à ce type de perte de charge, extraites de la référence [67], sont exposées dans les figures 4.4, 4.5 et 4.6.

Les diamètres hydrauliques des conduites du circuit d’alimentation du SqF étant communément de l’ordre du millimètre, pour des écoulements caractérisés par des flux massiques faibles, les pertes de charge singulières provoquées par la réunion/séparation des courants s’avèrent très petites devant

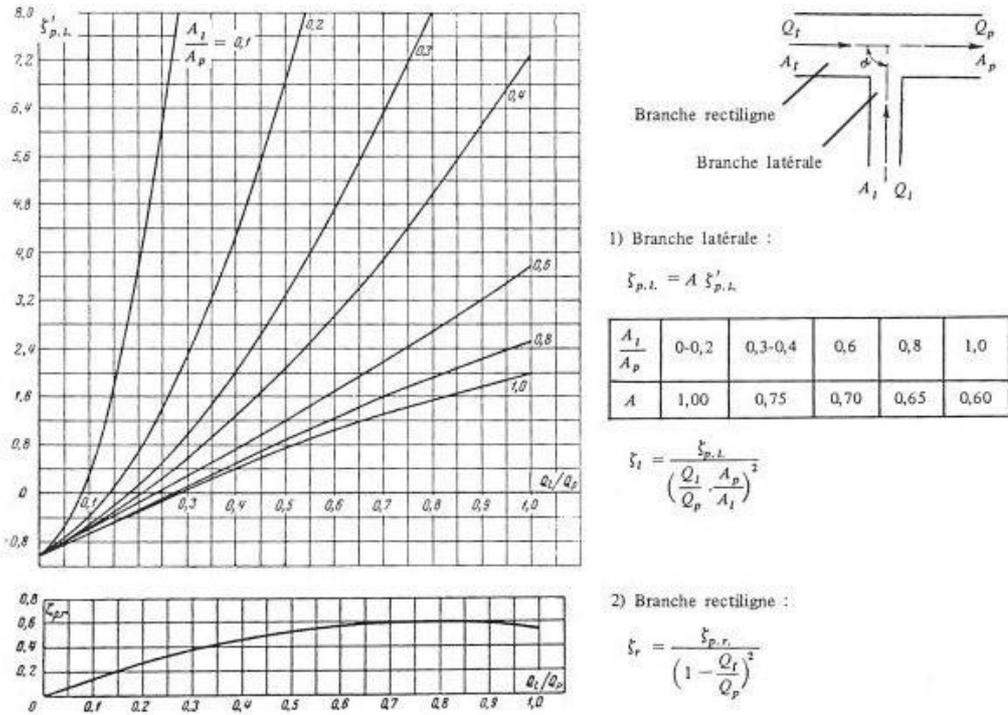


FIG. 4.4: Réunion des courants du type $A_r = A_p$, $\alpha = 90^\circ$ (d’après [67])

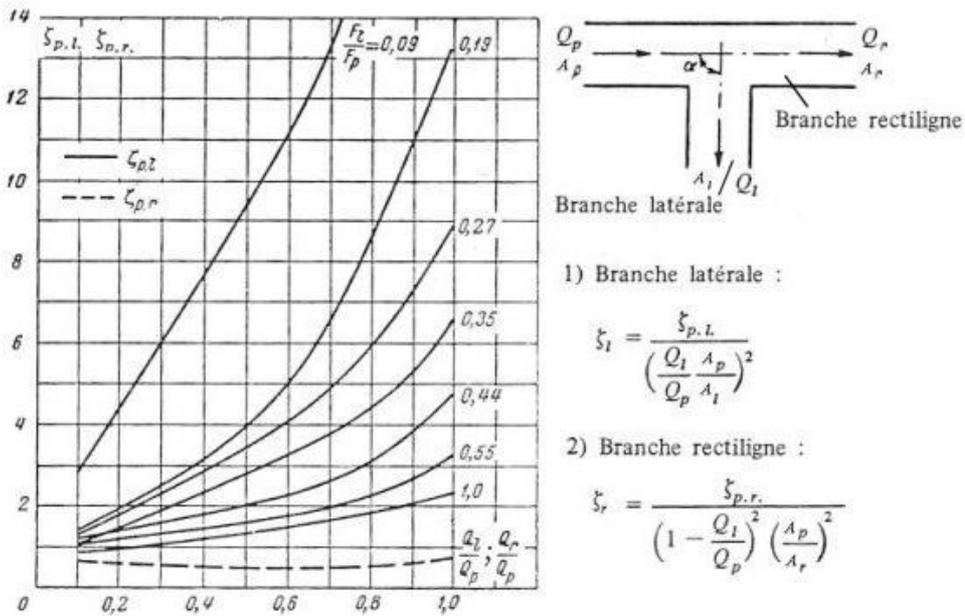


FIG. 4.5: Séparation des courants du type $A_r = A_p$, $\alpha = 90^\circ$ (d’après [67])

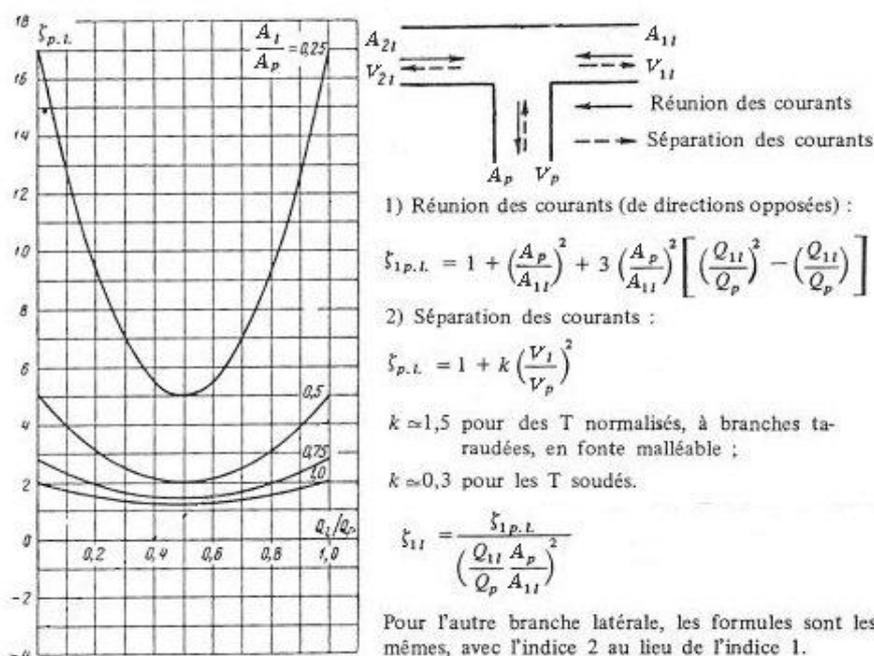


FIG. 4.6: Branchement symétrique en T (d'après [67])

la somme des autres pertes du système. Par conséquent, afin de simplifier la résolution numérique du problème, ces pertes sont négligées.

Les coefficients de perte de charge associés à la géométrie des conduites d'injection et à la collision du jet d'huile contre la surface du SqF sont obtenus de façon approximative à partir des abaques présentées dans les figures 4.7, 4.8 et 4.9, tirées de la référence [67].

Il est intéressant de remarquer dans les abaques 4.7 et 4.8 que l'expression de la perte de charge dans la conduite d'injection dépend du sens de l'écoulement. La formulation possède ainsi une singularité au changement de sens de l'écoulement.

Sachant que l'épaisseur du film d'huile aux points d'injection varie au cours du temps, l'implémentation du modèle hydraulique requiert la déduction d'une formule pour décrire la courbe de la figure 4.9. Un lissage polynomial pour $r/D_0 = 0,2$ effectué sur la plage $0,05 \geq h/D_0 \geq 0,20$ fournit :

$$\zeta = 483,3 \left(\frac{h}{D_0}\right)^2 - 128,8 \frac{h}{D_0} + 8,95 \quad (4.26)$$

4.3 Influence sur le comportement du SqF

Avant d'étudier l'influence du système d'alimentation ponctuel sur la dynamique de rotors flexibles, il convient de vérifier à **cinématique imposée** la manière dont il affecte le comportement du SqF. Prenons comme exemple un amortisseur caractérisé par :

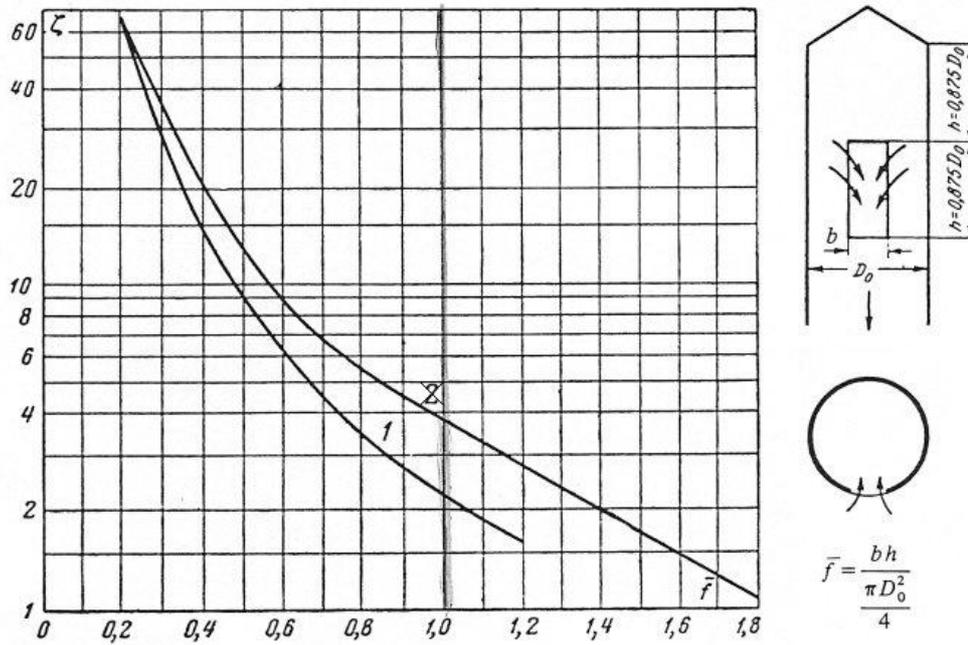


FIG. 4.7: Entrée latérale par une ouverture au bout d'un tube droit à section circulaire (courbe 1, d'après [67])

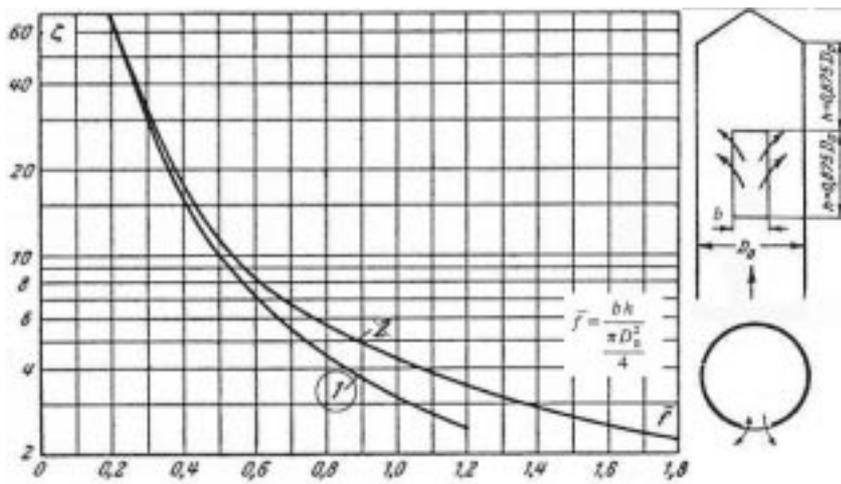


FIG. 4.8: Sortie latérale par une ouverture au bout d'une conduite à section circulaire (courbe 1, d'après [67])

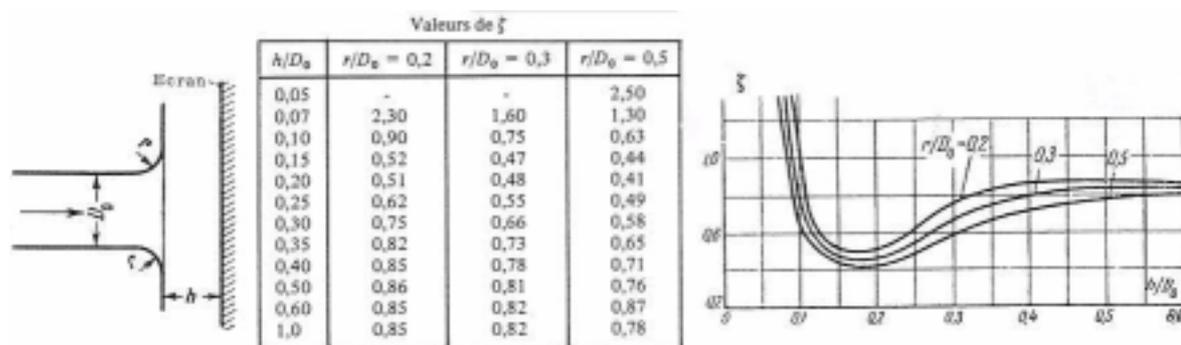
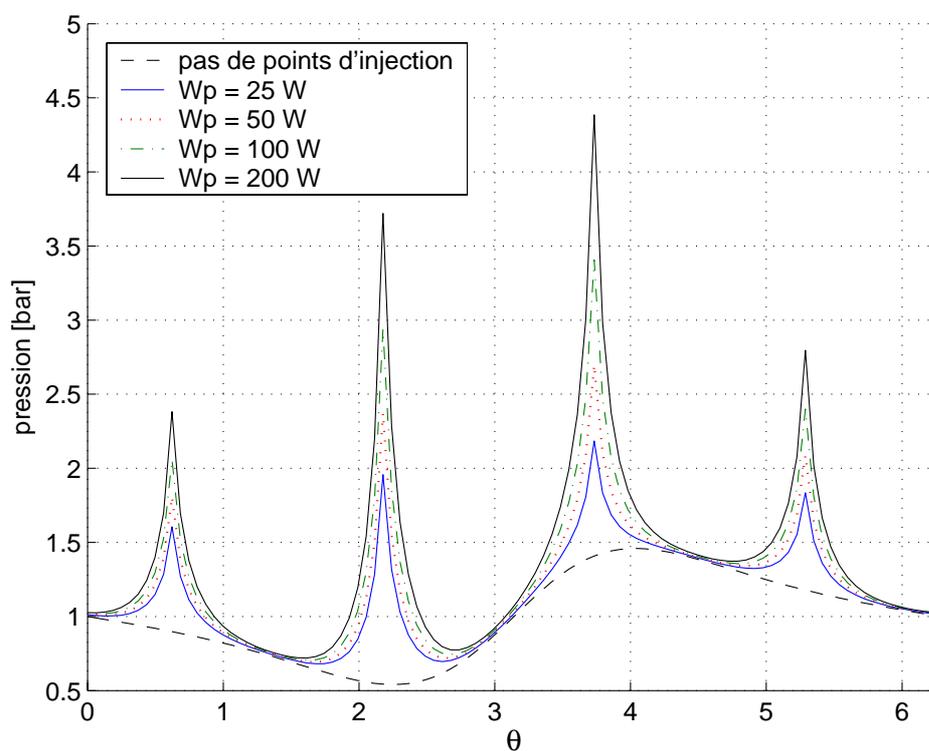


FIG. 4.9: Sortie d'un tronçon droit à bords arrondis sur un écran (d'après [67])

FIG. 4.10: Profil du champ de pression au milieu ($z = 0$) d'un SqF ouvert - $\varepsilon = 0,3$

$L=40$ [mm] : longueur du SqF;

$R=75$ [mm] : rayon du SqF;

$C=0,3$ [mm] : jeu radial du SqF;

$\mu=0,008$ [Pa.s] : viscosité de l’huile;

$\rho=950$ [kg/m³] : masse volumique de l’huile;

Les dimensions L , R et C simulent une application aéronautique. La viscosité et la masse volumique du fluide sont celles de l’huile minérale ESSO 2380, utilisée dans la lubrification de moteurs à réaction, à la température de 80°C . On considère que le SqF est alimenté par l’intermédiaire de quatre points d’injection. Les dimensions du circuit hydraulique sont les suivantes (voir nomenclature dans le tableau 4.1) :

$D_{hc}=8$ [mm]; $D_{hs}=4,5$ [mm]; $D_{hp}=10$ [mm]; $D_{hch}=10$ [mm];

$A_c = \pi D_{hc}^2/4$; $A_s = \pi D_{hs}^2/4$; $A_p = \pi D_{hp}^2/4$; $A_{ch} = D_{hch}^2$;

$R_{ch}=125$ [mm]; $l_{n+1} = l_{2n+1} = R_{ch}\pi/4$; $l_{n+2} = l_{n+3} = l_{n+4} = R_{ch}\pi/2$;

$l_p=1$ [m]; $l_s=50$ [mm]; $l_c=30$ [mm];

On impose une cinématique correspondant à une orbite circulaire et centrée ($\dot{e} = 0$) avec $\dot{\phi} = 5000$ *tr/mn*. La valeur de l’angle ϕ (voir système de repérage dans la figure 2.1) est telle que le pic de pression se situe devant un point d’injection. La cavitation est prise en compte après la détermination du champ de pression, au travers de la condition de Gumbel modifiée avec une pression de vaporisation de 1000 [Pa]. Le calcul itératif des variables du circuit hydraulique atteint une précision suffisante généralement après cinq à dix itérations.

Les figures 4.10 et 4.11 présentent le profil circonférentiel du champ de pression au milieu d’un SqF à extrémités ouvertes ($C_l = 5000$ [mm²/Pa.s]), pour $\varepsilon = 0,3$ et $\varepsilon = 0,8$ et plusieurs valeurs de puissance de la pompe. Pour une question de simplicité, nous admettons que le rendement de la pompe vaut 1. Les courbes en tiret représentent la solution obtenue en négligeant le système d’alimentation, laquelle est **antisymétrique** par rapport à $\theta = \pi$ lorsque le SqF décrit des orbites circulaires et centrées et ne cavite pas. Souvent, le système d’alimentation est négligé dans la modélisation du SqF, d’où l’intérêt de comparer les résultats du modèle tenant compte de la présence de points d’injection avec ceux obtenus en considérant les surfaces délimitant le film comme idéalement lisses.

Dans la figure 4.10, on observe que la pressurisation du circuit hydraulique permet d’augmenter le niveau de pression dans le film et défait l’anti-symétrie du profil. Cet effet est d’autant plus important que la puissance de la pompe est élevée. Afin d’en déduire l’influence sur les efforts hydrodynamiques, il est important d’avoir en tête que les forces tangentielle et radiale découlent d’une décomposition du champ de pression suivant le sinus et le cosinus de l’angle θ (voir figure 2.1), respectivement. En analysant le tableau 4.2, on observe que l’injection d’huile pressurisée engendre une force radiale non nulle qui correspond à une action hydrostatique du SqF. Cette action pourrait, par exemple, avoir

	SqF ouvert				SqF presque fermé			
	$\varepsilon = 0,3$		$\varepsilon = 0,8$		$\varepsilon = 0,1$		$\varepsilon = 0,6$	
	f_r	f_t	f_r	f_t	f_r	f_t	f_r	f_t
*	0,0	-229,8	-1403,4	-1386,9	-74,0	-1982,8	-4025,6	-9312,6
$W_p=25$ W	-19,9	-208,2	-1102,7	-1218,1	36,9	-981,8	75,5	-7893,6
$W_p=50$ W	-33,5	-209,6	-1117,4	-1231,1	47,2	-995,5	724,1	-8349,2
$W_p=100$ W	-53,7	-211,0	-1143,5	-1248,3	61,3	-1017,2	1171,7	-8530,5
$W_p=200$ W	-83,0	-212,7	-1189,1	-1270,0	80,2	-1052,3	1464,8	-8606,4

TAB. 4.2: Forces radiale et tangentielle générées par les SqF ouvert et fermé pour des différentes valeurs de ε et de W_p - Orbite circulaire et centrée avec $\dot{\phi} = 5000$ tr/min (*pas d'alimentation)

l'utilité de fournir une portance non négligeable à faible vitesse de rotation. La force tangentielle, responsable de la dissipation d'énergie lorsque le rotor décrit des orbites circulaires et centrées, diminue par rapport à la configuration sans points d'injection.

Lorsque l'excentricité du SqF s'accroît, l'amplitude du pic de pression chute lors du passage à proximité d'un des points d'injection, comme le montre la figure 4.11. Bien que l'augmentation de la puissance de la pompe permette d'atténuer cette chute, on constate dans le tableau 4.2 que l'amplitude de la force tangentielle est plus faible que celle générée en l'absence de trous d'alimentation. Contrairement à l'exemple précédent, où le phénomène de cavitation n'a pas lieu, le champ de pression pour la configuration sans injection n'a plus la propriété d'anti-symétrie par rapport à $\theta = \pi$, si bien que l'amplitude de la force radiale tend également à décroître lorsque l'on prend en compte le système d'alimentation (voir tableau 4.2). Le fluide s'écoulant principalement dans la direction axiale du palier ouvert, la réduction de la poche de cavitation grâce à l'introduction ponctuelle d'huile est peu remarquable. Un système d'alimentation par gorge serait plus efficace à cet effet, grâce à un apport d'huile plus homogène dans la direction circonférentielle.

Les figures 4.10 et 4.11 montrent que l'influence de la puissance de la pompe sur l'allure du champ de pression est assez faible. Cette conclusion n'est valable que pour un SqF court ayant les extrémités ouvertes. En effet, en définissant un coefficient de fuite sensiblement plus petit qu'auparavant, $C_l = 5 \times 10^{-5}$ [$mm^2/Pa.s$], l'amortisseur s'approche d'une configuration presque fermée. Le rôle joué par la puissance de la pompe devient dans ce cas beaucoup plus net, comme le mettent en évidence les figures 4.12 et 4.13. Il est intéressant de remarquer que, le fluide étant contraint de s'écouler dans la direction circonférentielle, on peut réduire de manière efficace l'étendu de la zone cavitante grâce à l'utilisation d'une pompe plus puissante. Cela permet notamment d'atténuer l'endommagement occasionné par les micro-explosions des bulles de vapeur. Cependant, la comparaison des figures 4.10 et 4.12 montre que la cavitation apparaît à des excentricités plus faibles pour des amortisseurs plus étanches.

Les effets hydrostatiques produits sur l'amortisseur presque fermé sont considérablement plus importants que ceux sur l'amortisseur ouvert, du fait que le fluide s'écoule dans la direction le long de laquelle l'épaisseur du film varie. Le SqF fonctionne dans ce cas non seulement en tant qu'un amortisseur, mais également comme un ressort non linéaire. L'évaluation de la résultante des forces hydrodynamiques et hydrostatiques au travers de l'intégration du champ de pression sur la surface du SqF montre que, par rapport à la configuration sans points d'injection, la force tangentielle est plus

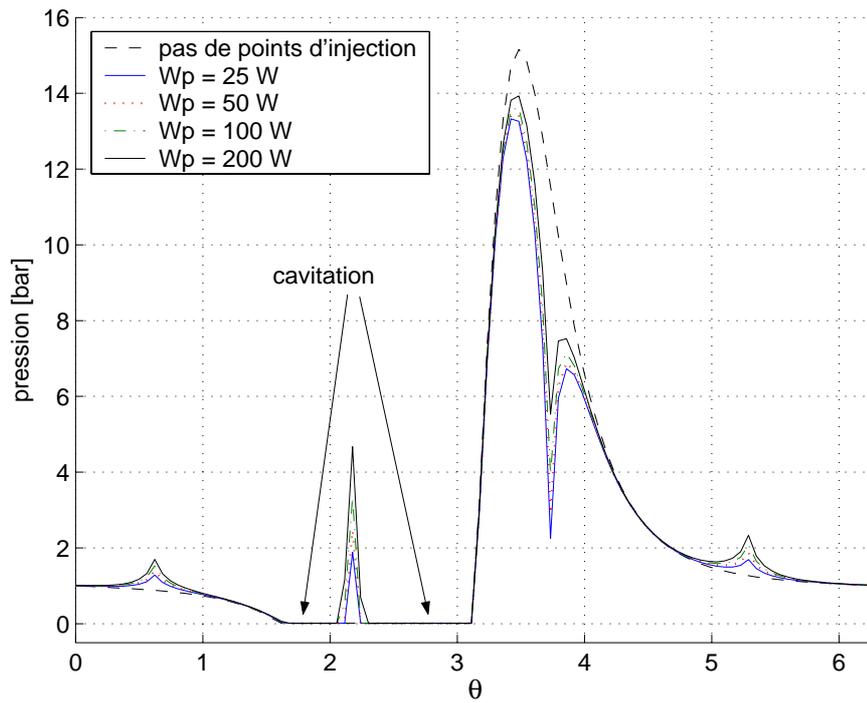


FIG. 4.11: Profil du champ de pression au milieu ($z = 0$) d'un SqF ouvert - $\varepsilon = 0,8$

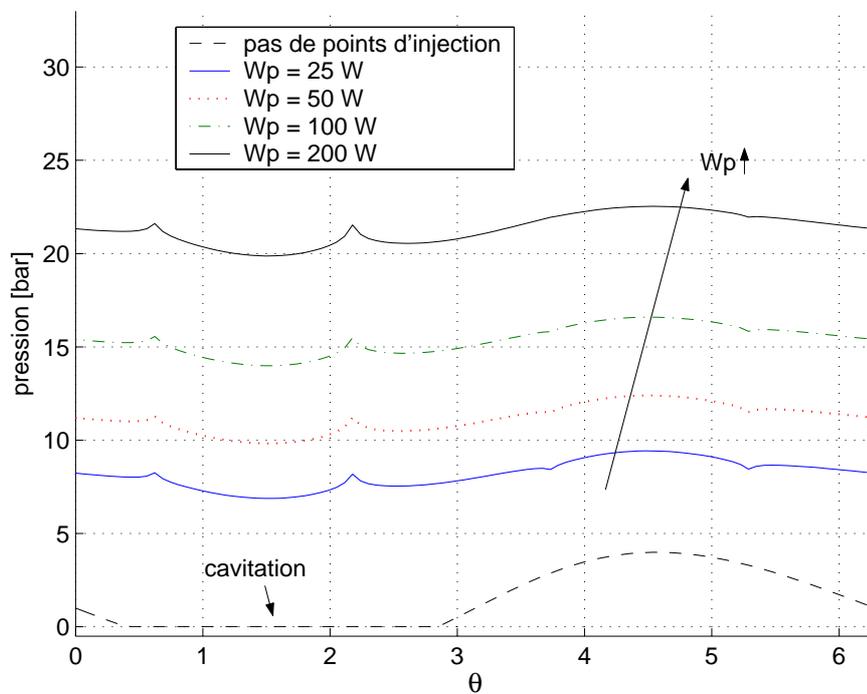


FIG. 4.12: Profil du champ de pression au milieu ($z = 0$) d'un SqF quasi fermé - $\varepsilon = 0,1$

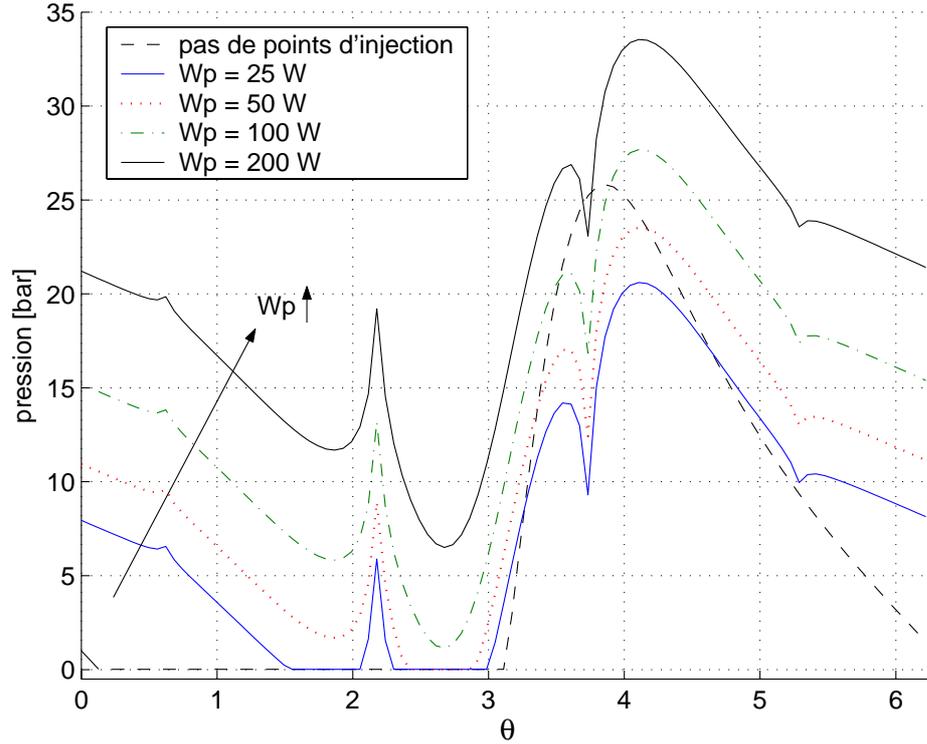


FIG. 4.13: Profil du champ de pression au milieu ($z = 0$) d'un SqF quasi fermé - $\varepsilon = 0,6$

basse et la force radiale change de signe, devenant ainsi positive (voir tableau 4.2). On observe encore qu'en augmentant la puissance de la pompe, l'amplitude des deux composantes de la force totale du SqF s'accroît.

Il est intéressant de discuter de la signification physique d'une force radiale positive générée par un SqF qui décrit des orbites circulaires et centrées. En négligeant les effets d'inertie du fluide, les forces non linéaires de l'amortisseur peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$-\begin{Bmatrix} f_r \\ f_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{rr}(t) & c_{rt}(t) \\ c_{tr}(t) & c_{tt}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{e} \\ e\dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{rr}(t) & k_{rt}(t) \\ k_{tr}(t) & k_{tt}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ e\phi \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

où le signe négatif multipliant le vecteur des forces du SqF indique le passage de celui-ci du deuxième au premier membre de l'équation du mouvement du système (équation 3.3). Ce faisant, l'interprétation des termes des matrices de raideur et d'amortissement équivalentes de l'amortisseur devient plus directe. Sachant que la vitesse radiale \dot{e} est nulle si l'orbite du SqF est circulaire et centrée et que l'excentricité e est une variable strictement positive, une force radiale, f_r , positive peut découler aussi bien d'une raideur k_{rr} négative que d'un terme d'amortissement croisé c_{rt} négatif. Ces deux effets de la pressurisation du SqF ont un caractère destabilisant vis-à-vis de la dynamique du rotor.

La différence entre les résultats obtenus pour les configurations ouverte et presque fermée du SqF met en relief la forte interaction entre les conditions aux limites d'alimentation et d'étanchéité de l'amortisseur. Pour la même vitesse de rotation imposée précédemment et $\varepsilon = 0,6$, l'influence de

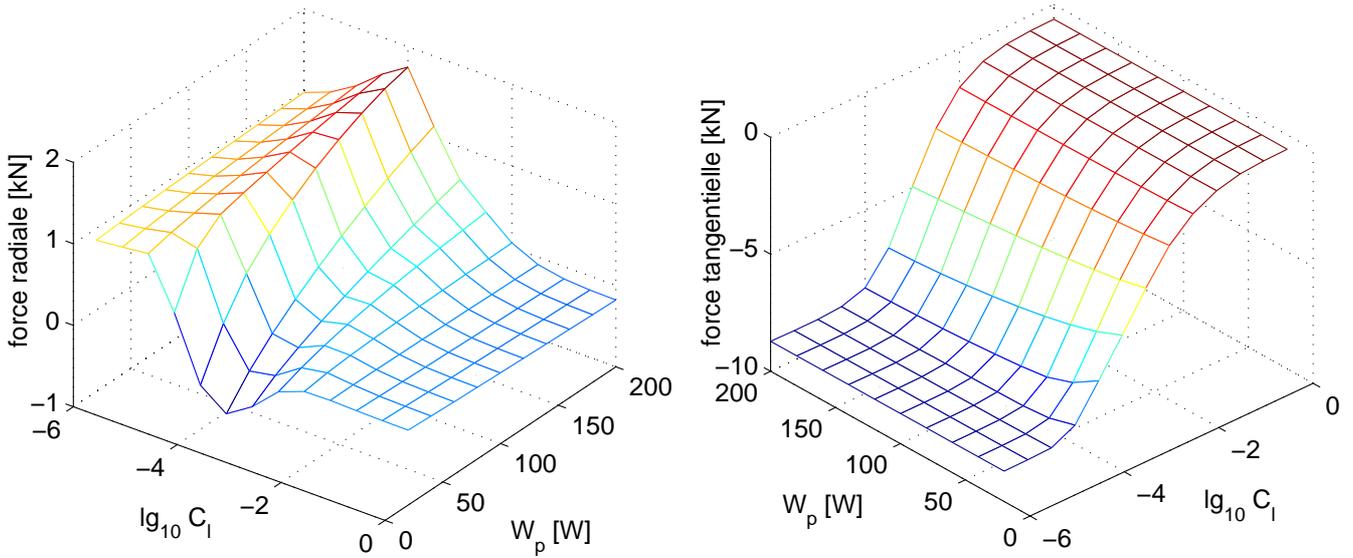


FIG. 4.14: Evolution des efforts radial et tangential du SqF en fonction du coefficient de fuite et de la puissance de la pompe

cette interaction sur les forces du SqF est illustrée dans la figure 4.14. Pour un coefficient de fuite $C_l > 1$ [$mm^2/Pa.s$] ($\lg_{10} C_l > 0$) le SqF peut être déjà considéré comme ouvert et la sensibilité des forces par rapport à ce paramètre devient négligeable. On constate que, pour une orbite circulaire et centrée, la force tangentielle est sensible notamment à la valeur du coefficient de fuite, en d’autres termes, aux conditions d’évacuation de l’huile. La force radiale présente une forme beaucoup plus complexe, s’avérant aussi sensible à la puissance de la pompe qu’au coefficient de fuite. Il convient d’analyser également, pour ces mêmes conditions cinématiques, la variation du débit en fonction des conditions aux limites du SqF. Comme l’on pouvait s’y attendre, le débit d’alimentation augmente avec la puissance fournie à la pompe et diminue lorsque l’on ferme davantage les extrémités de l’amortisseur (figure 4.15).

La figure 4.16 présente la pression de sortie de la pompe et celle au point d’injection placé dans la poche de cavitation, toutes les deux en fonction de la cinématique (imposée) de l’amortisseur, pour $W_p = 100$ [W] et les configurations ouverte ($C_l = 5000$ [$mm^2/Pa.s$]) et fermée ($C_l = 5 \times 10^{-5}$ [$mm^2/Pa.s$]). Le couplage entre les problèmes hydrodynamique et hydraulique est plus important pour la configuration très étanche. On observe également que la pression en aval de la pompe augmente sensiblement lorsque l’excentricité et la vitesse de précession du SqF s’accroissent. La valeur de la pression au point d’alimentation apportant de l’huile dans la zone cavitante se révèle être encore plus sensible à la cinématique de l’amortisseur. Ces résultats montrent que la condition aux limites communément admise de pression constante dans le circuit hydraulique n’est pas toujours réaliste pour des systèmes d’alimentation ponctuelle.

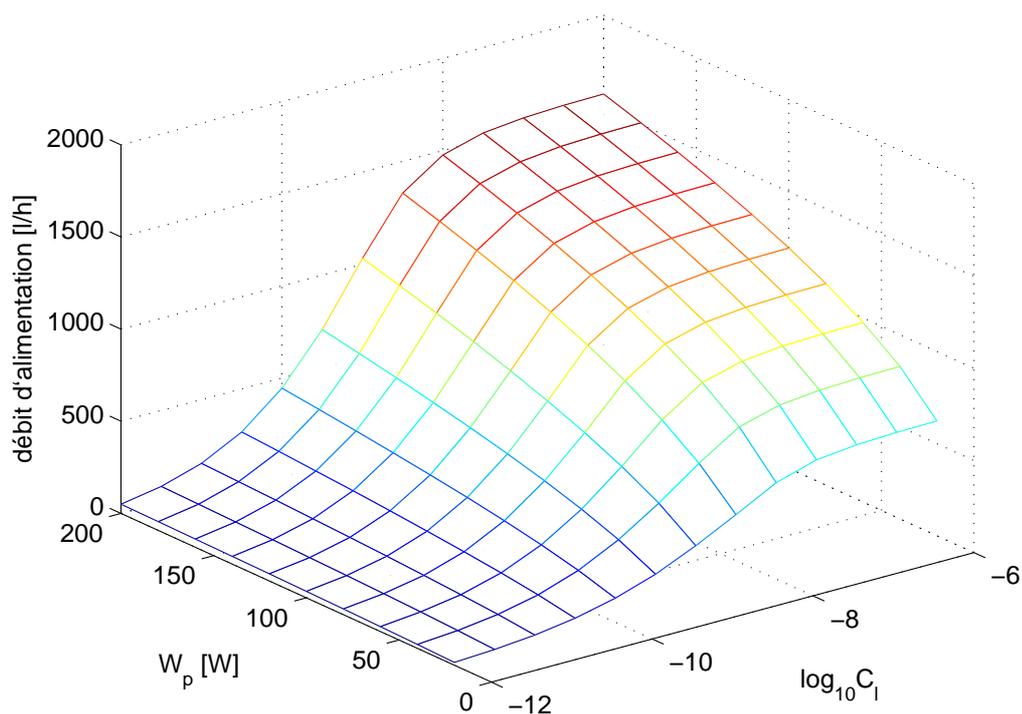
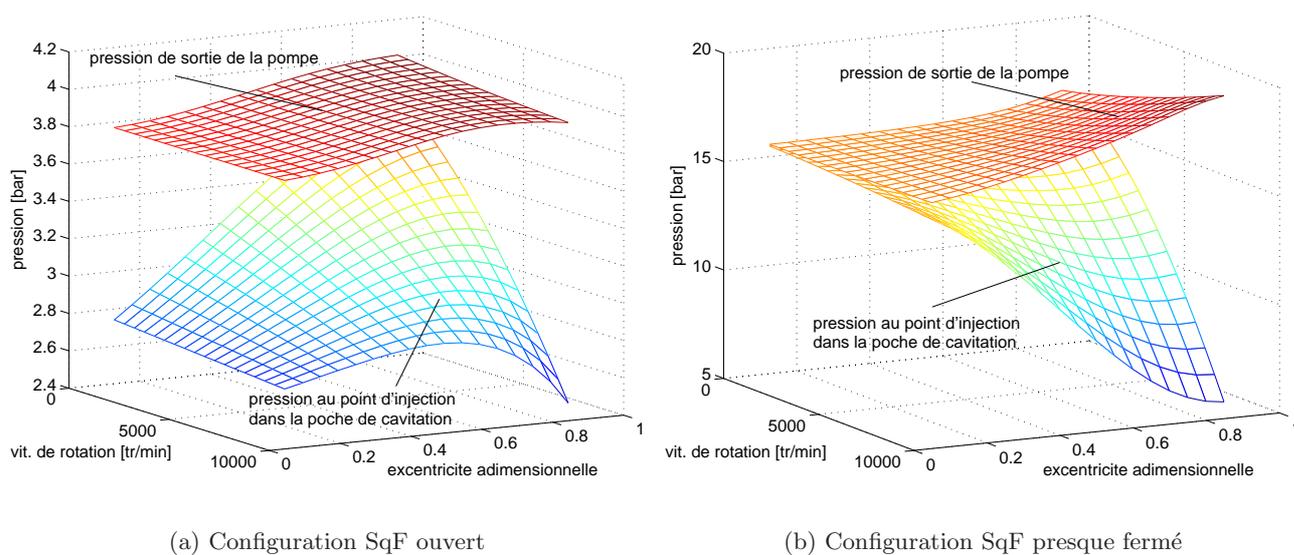


FIG. 4.15: Evolution du débit d'alimentation en fonction du coefficient de fuite et de la puissance de la pompe



(a) Configuration SqF ouvert

(b) Configuration SqF presque fermé

FIG. 4.16: Pressions dans le circuit hydraulique d'alimentation en fonction de la cinématique de l'amortisseur - $W_p = 100$ [W]

4.4 Influence sur la dynamique de rotors flexibles

La discussion des résultats de la section précédente est intéressante pour la compréhension physique du comportement du SqF avec un système d’alimentation ponctuel. Cependant, ceux-ci sont obtenus pour des orbites imposées, alors que l’amortisseur étant un dispositif passif, son régime de fonctionnement s’établit en interaction avec la dynamique du rotor. Ainsi, l’évaluation de l’influence de l’alimentation sur la performance d’un rotor nécessite la simulation du fonctionnement du système mécanique et dépend de la configuration et des paramètres d’opération de celui-ci. Cette étude s’effectuera par conséquent sur deux modèles de rotor flexible distincts. Nous analyserons d’abord la réponse au balourd et la stabilité d’un rotor Jeffcott et passerons ensuite à un modèle plus complexe, correspondant à un banc réel de dynamique d’ensemble, développé par l’équipe Dynamique des Systèmes et des Structures au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique de Systèmes de l’Ecole Centrale de Lyon.

4.4.1 Modèle Jeffcott

Le rotor Jeffcott est le même qu’au chapitre III. Ses caractéristiques sont rappelés ci-dessous :

$$m_1=45 \text{ [kg]}; m_2=15 \text{ [kg]}; k_1 = 3 \times 10^7 \text{ [N/m]}; c_1=367 \text{ [N.s/m]};$$

$$k_x = 10^7 \text{ [N/m]}; k_y = 10^7 \text{ [N/m]}; \varrho = 1.2 \times 10^{-4} \text{ [m]}; W_0=0;$$

Aucune force statique n’agissant sur le rotor et les raideurs k_x et k_y étant identiques, le SqF décrirait des orbites circulaires si l’alimentation était axisymétrique, telle une gorge circonférentielle. La présence des points d’injection rend toutefois le système non axisymétrique, de telle sorte que le spectre de la réponse du rotor peut contenir des harmoniques autre que le fondamental.

Quant à l’étanchéité de l’amortisseur, nous nous intéresserons plus particulièrement à la configuration d’extrémités presque fermées, caractérisée par le coefficient de fuite $C_l = 5 \times 10^{-5} \text{ [mm}^2\text{/Pa.s]}$. Ces conditions d’évacuation sont proches de celles des moteurs d’avion, dont le système hydraulique est dimensionné de manière à réduire au maximum le débit d’huile, et par conséquent l’encombrement du circuit [143]. En outre, la restriction de l’écoulement axial permet d’atteindre des niveaux d’amortissement plus élevés et de réduire la poche de cavitation grâce à la pressurisation du système d’alimentation.

La réponse dynamique du rotor Jeffcott est déterminée à l’aide de la méthode de la collocation trigonométrique en retenant 5 harmoniques, la réponse étant suivie en fonction de la vitesse de rotation par la technique *pseudo-arc length*. La stabilité des orbites périodiques est analysée par la théorie de Floquet. Le calcul est réalisé sur la plage de fréquence $0 < \omega_{ad} < 5$, où $\omega_{ad} = \frac{\omega}{\sqrt{k_1/m_1}}$ est la fréquence de rotation adimensionnelle. Le système d’équations non linéaires décrivant le mouvement périodique du rotor est condensé sur les degrés de liberté non linéaires afin de réduire le nombre d’inconnues du problème.

Nous examinerons la sensibilité de la dynamique du rotor et du comportement du circuit hydrau-

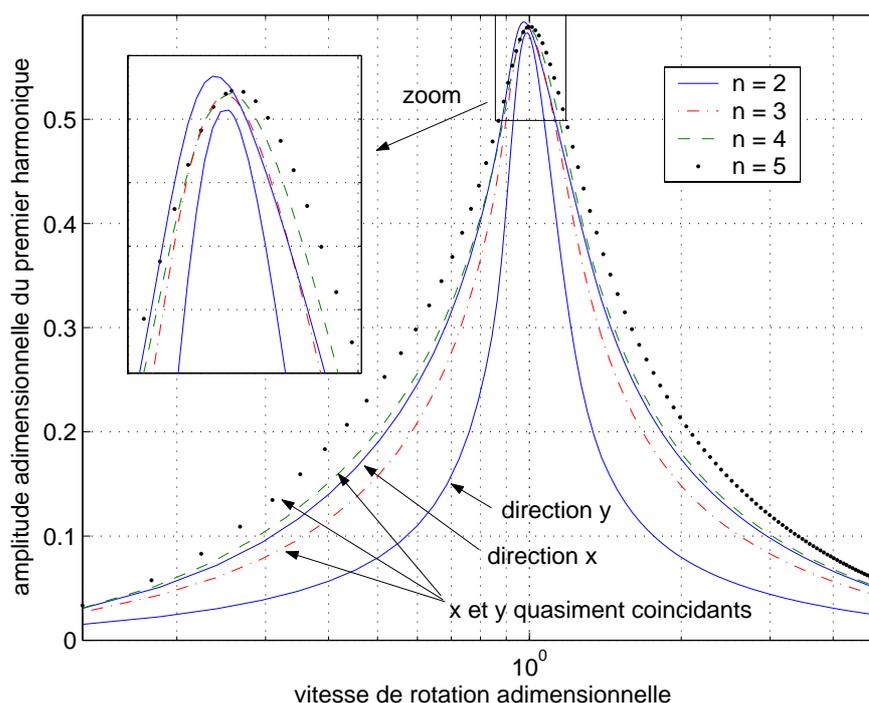


FIG. 4.17: Influence du nombre de points d'injection sur la réponse au balourd au niveau du SqF - Harmonique fondamentale

lique à l'égard de la puissance nette (W_p) fournie à la pompe et du nombre de points d'injection. Nous vérifierons également la capacité d'alimentation du circuit hydraulique en fonction de ces deux paramètres.

4.4.1.1 Influence du nombre de points d'alimentation

La figure 4.17 présente l'amplitude du premier harmonique, adimensionnée par rapport au jeu radial C , de la réponse du rotor au niveau du SqF, pour $W_p = 100 [W]$ et deux, trois, quatre et cinq points d'injection. On peut remarquer tout d'abord l'existence d'une seule vitesse critique, quelque soit le nombre de points d'injection. Cette vitesse critique coïncide avec la fréquence propre du rotor appuyé-appuyé, donnée par $\sqrt{k_1/m_1}$. Physiquement, ce phénomène traduit un blocage du rotor au niveau de ses supports et la suppression de la vitesse critique associée à la raideur des rétenteurs. En d'autres termes, l'amortissement fourni par les SqF est tel qu'ils deviennent dynamiquement trop rigides, ce qui rend les rétenteurs non opérationnels (en anglais on dit qu'ils sont *locked out*), puisque ceux-ci sont en parallèle avec l'amortisseur. Ce phénomène a été mis en évidence théoriquement par RABINOWITZ et HAHN [124] en 1978 et constaté expérimentalement par ces mêmes chercheurs un peu plus tard [125]. Plus récemment, les travaux expérimentaux de CHU et HOLMES ont également permis d'observer le blocage du support-palier suite à l'augmentation de l'amortissement du SqF.

Les paliers étant bloqués, l'influence du nombre de points d'alimentation sur le pic de résonance du premier harmonique au niveau du SqF est très faible. Ailleurs, on s'aperçoit que l'amplitude de l'harmonique fondamental devient plus faible lorsque l'on diminue le nombre de points d'alimentation,

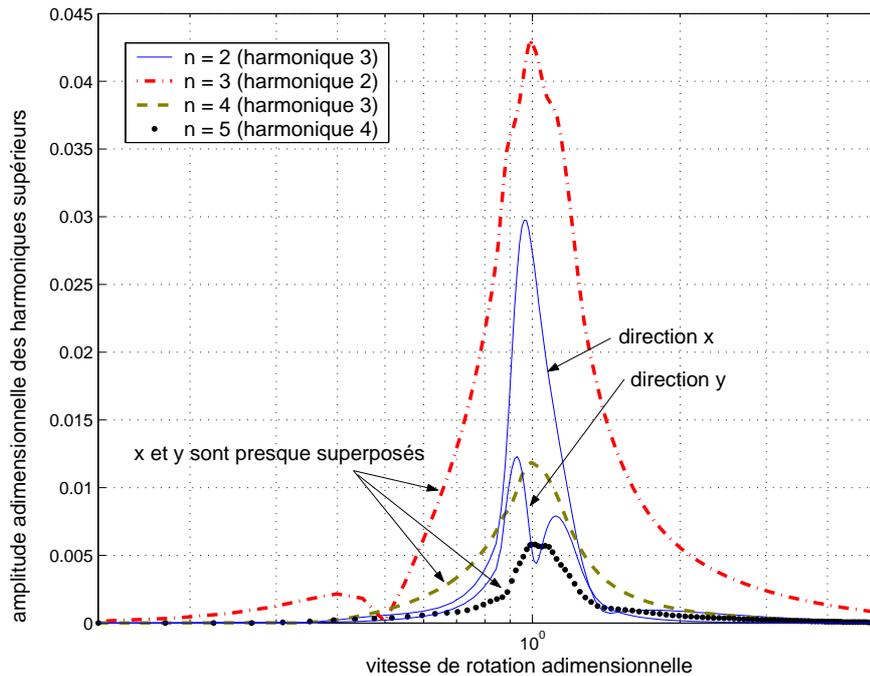


FIG. 4.18: Influence du nombre de points d’injection sur la réponse au balourd au niveau du SqF - Harmoniques supérieurs non négligeables

ce qui découle de l’augmentation de la surface d’écrasement effective de l’amortisseur. Quant aux harmoniques supérieurs calculés et non négligeables, ils sont entre 10 ($n = 3$) et 100 ($n = 5$) fois plus faibles que l’harmonique fondamental, comme le montre la figure 4.18. Les orbites sont ainsi quasiment circulaires pour $n = 3, 4$ et 5 et pratiquement elliptiques pour $n = 2$. Bien que faibles, ces harmoniques doivent être pris en compte lors de l’application de la méthode de la collocation trigonométrique, autrement la résolution ne converge pas. On peut observer également que les harmoniques impaires sont les plus importants pour un nombre pair de points d’injection et vice-versa.

La figure 4.19 montre que l’influence du nombre de points d’alimentation sur la réponse du rotor est sensiblement plus nette en termes d’amplitude de vibration au niveau du disque. On constate qu’au passage de la vitesse critique, l’augmentation du nombre de points d’injection conduit à une réduction du pic de vibration du disque. A première vue, ces résultats peuvent sembler contradictoires, car la diminution de n engendre une perturbation moindre dans le champ de pression, car la surface d’écrasement effective du film possède moins de points de rupture géométrique. Par conséquent, le niveau de pression atteint est plus important et l’amortissement plus fort. Cependant, le SqF étant un élément passif, l’accroissement de cet amortissement ne conduit pas nécessairement à une dissipation d’énergie plus élevée. Comme nous l’avons souligné précédemment, les configurations de SqF traités ici sont dynamiquement trop rigides à cause de leur amortissement excessif. Cela empêche les paliers de se déplacer davantage à l’intérieur du jeu rempli d’huile et de procurer ainsi au SqF un potentiel de dissipation plus conséquent. En effet, lorsque le rotor décrit des orbites circulaires et centrées, la puissance dissipée par le SqF peut être estimée au travers de l’expression :

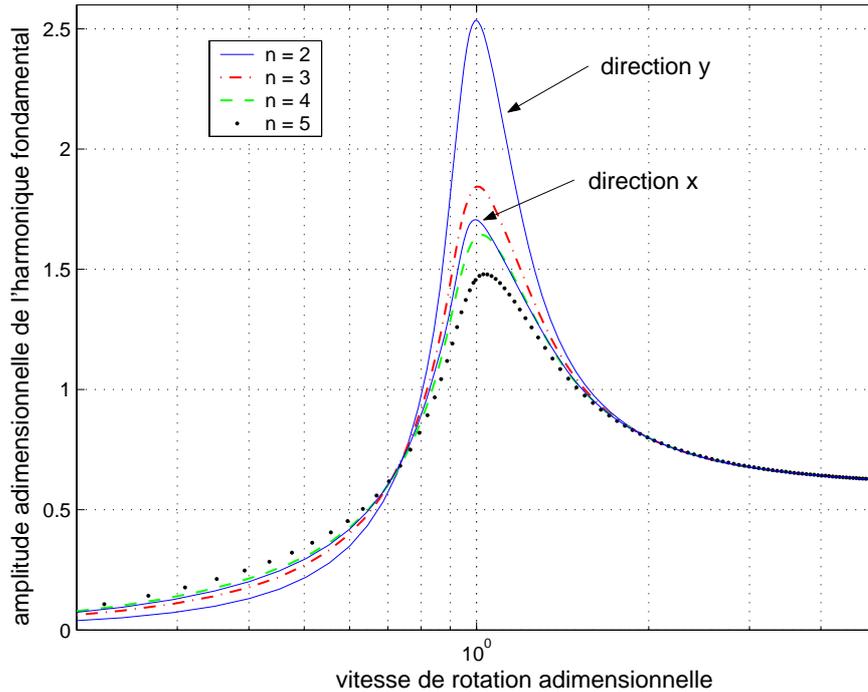


FIG. 4.19: Influence du nombre de points d'injection sur la réponse au balourd au niveau du disque - Harmonique fondamentale

$$\dot{E}_{SqF} = f_{tv}e\omega \quad (4.28)$$

où f_{tv} est la force tangentielle visqueuse du SqF, e le rayon de l'orbite circulaire au niveau de l'amortisseur et ω sa vitesse de précession en $[rad/s]$. Pour des forces hydrodynamiques plus importantes, le rayon de l'orbite est plus petit, si bien que l'on peut avoir une dissipation plus élevée tout en ayant des efforts visqueux plus faibles. Le zoom de la figure 4.17 montre que l'excentricité e au voisinage de la vitesse critique est en effet plus importante (largeur de bande plus grande) pour $n = 5$, ce qui permet à cette configuration d'être la plus dissipative bien qu'elle produise des forces tangentielles plus petites.

Les résultats concernant la stabilité du système sont cohérents avec la discussion ci-dessus. La figure 4.20 présente l'évolution du module du multiplicateur de Floquet principal en fonction de la vitesse du rotor. Ce paramètre permet d'analyser la stabilité dans le sens de Lyapounov, fournissant ainsi une indication du temps que le système met à retrouver son orbite initiale après l'application d'une perturbation. Par conséquent, plus il est faible, plus rapidement le transitoire résultant de cette perturbation est amorti. On en conclut alors que l'augmentation du nombre de points d'injection permet d'améliorer la stabilité, puisque l'énergie introduite lorsque le système est perturbé est plus vite dissipée. Cette conclusion n'est évidemment valable que pour le rotor spécifique étudié ici, car l'influence de l'alimentation dépend de la configuration de la machine incorporant le SqF.

L'alimentation du SqF par un nombre plus élevé de points d'injection s'avère également bénéfique en termes de la transmissibilité maximum, comme le met en évidence la figure 4.21. Il est important

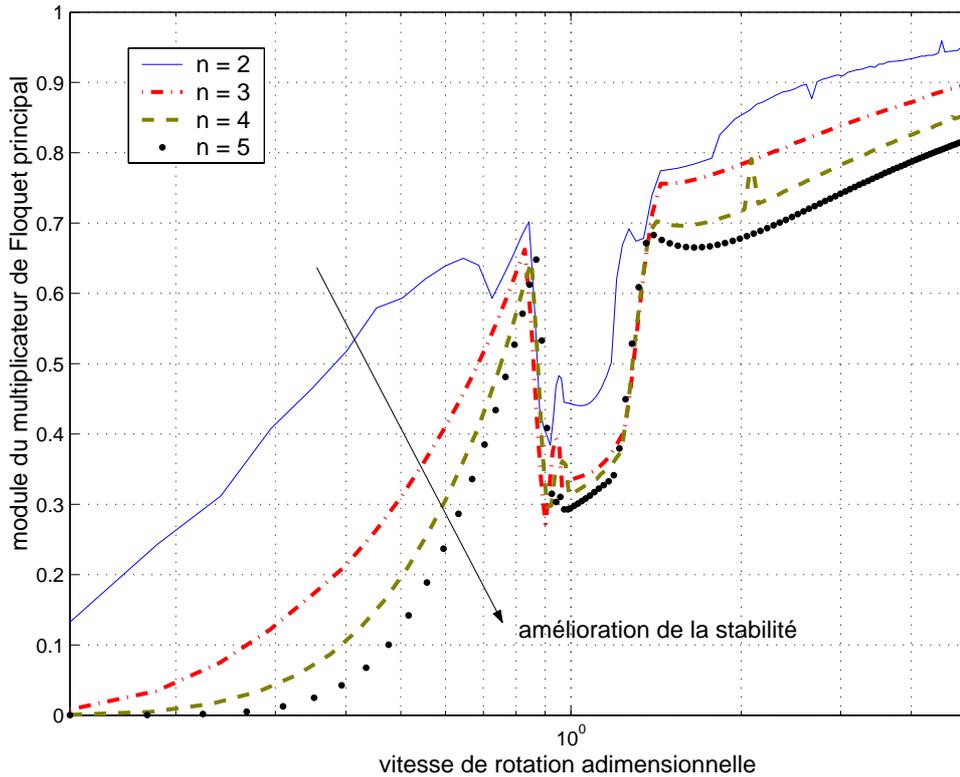
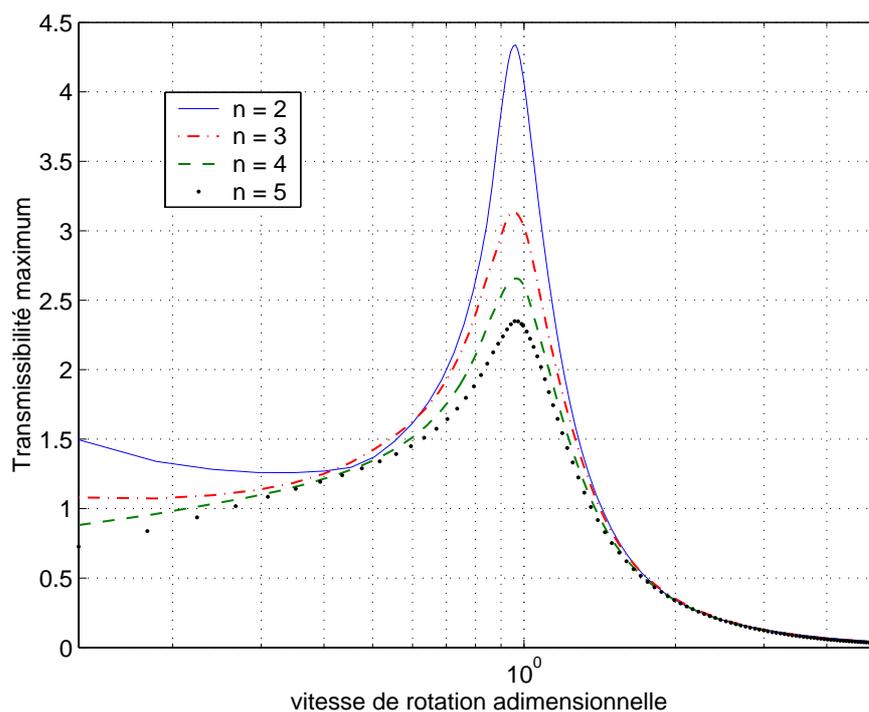
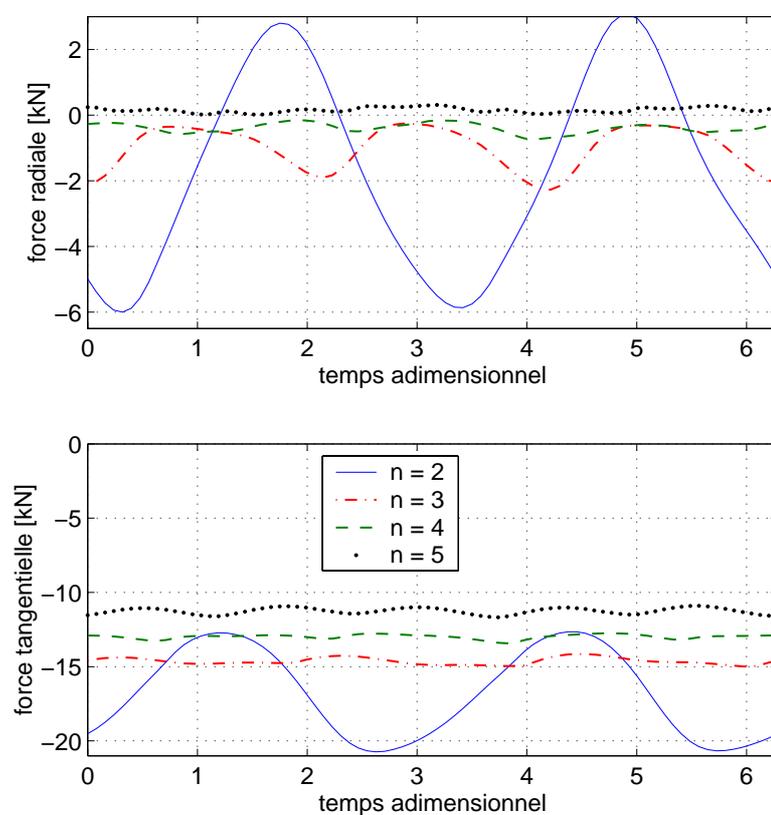


FIG. 4.20: *Stabilité en fonction du nombre de points d'alimentation*

de souligner que la transmissibilité varie, à une fréquence donnée, au cours d'une période de rotation, puisque les forces radiale et tangentielle oscillent également. Ces fluctuations découlent de la non axisymétrie du problème due à la présence des points d'injection. La transmissibilité maximum est ainsi plus importante pour $n = 2$ non seulement parce que les forces moyennes sont plus élevées, mais aussi à cause des fortes amplitudes crête-à-crête des forces hydrodynamiques sur la période. Au delà de $\omega_{ad} = 2$, on observe toutefois que l'isolation du bâti (efforts transmis par le SqF) est similaire quelque soit le nombre de points d'injection.

La figure 4.22 illustre l'oscillation des forces hydrodynamiques au cours d'une période de rotation, à la vitesse $\omega_{ad} = 0,96$, le temps adimensionnel correspondant à ωt . On remarque, comme nous avons souligné dans le paragraphe ci-dessus, que les amplitudes crête-à-crête chutent sensiblement lorsque l'on augmente le nombre de points d'alimentation. D'autre part, on constate que la force radiale tend vers zéro pour $n = 5$. Ceci indique, sachant que les orbites sont quasiment circulaires et centrées, une absence de cavitation, si bien que l'amortisseur présente un comportement purement dissipatif. Les effets hydrostatiques associés au système d'alimentation se traduisent par les forces radiales positives observés dans la figure 4.22. Il convient de faire remarquer que la considération de l'amplitude ainsi que de la fréquence des fluctuations des forces hydrodynamiques est fondamentale pour le dimensionnement du support, compte tenu de la fatigue des matériaux.

FIG. 4.21: *Transmissibilité maximum en fonction du nombre de points d'injection*FIG. 4.22: *Evolution des forces hydrodynamiques à $\omega_{ad} = 0,96$ en fonction du nombre de points d'injection*

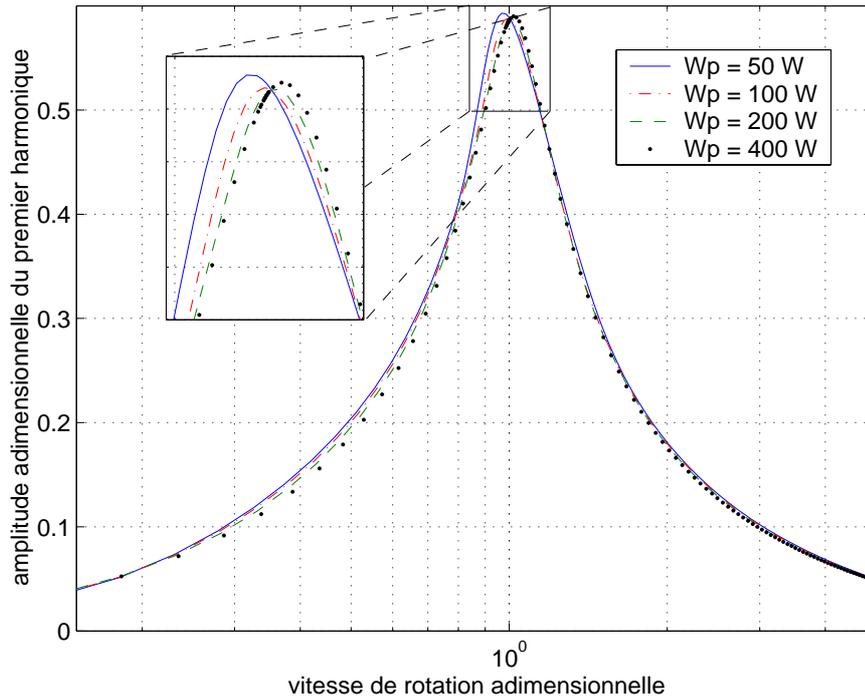


FIG. 4.23: *Influence de la puissance de la pompe sur la réponse au balourd au niveau du SqF - Harmonique fondamentale*

4.4.1.2 Influence de la puissance nette de la pompe

L’influence de la puissance nette de la pompe est analysée pour la configuration avec quatre points d’injection d’huile. Les niveaux de puissance considérés sont : $W_p = 50, 100, 200$ et 400 [W]. La figure 4.23 présente la réponse au balourd au niveau de l’amortisseur. Bien que faibles, quelques différences entre les courbes peuvent être observées. On remarque, par exemple, que l’augmentation de la puissance de la pompe provoque une légère translation du pic de résonance vers des vitesses plus élevées et atténue l’amplitude de vibration sur la plage d’opération sous-critique. Ces constatations sont valables également pour les harmoniques supérieures. Les réponses au balourd au niveau du SqF sur la plage de vitesse super-critique ne sont pratiquement pas affectées par la puissance de la pompe.

La sensibilité de la dynamique du rotor à la puissance de la pompe est plus perceptible dans la réponse du disque, comme le montre la figure 4.24. Comme dans l’analyse de la section précédente, l’accroissement de l’amortissement des SqF, ici au travers de l’augmentation de la puissance de la pompe, engendre leur rigidification dynamique, ce qui conduit à une amplification de l’amplitude de vibration au niveau du disque lors du passage de la vitesse critique. Ces résultats montrent clairement qu’il existe un amortissement critique au delà duquel la performance du rotor se dégrade. Cet amortissement critique, dont discutent RABINOWITZ et HAHN [126], varie, bien entendu, selon la configuration du rotor.

L’influence de la puissance nette de la pompe sur la stabilité du rotor est mise en évidence dans la figure 4.25. On constate encore une fois l’effet négatif de la rigidification dynamique excessive du SqF sur la stabilité du système. En outre, l’examen des multiplicateurs de Floquet sur le plan

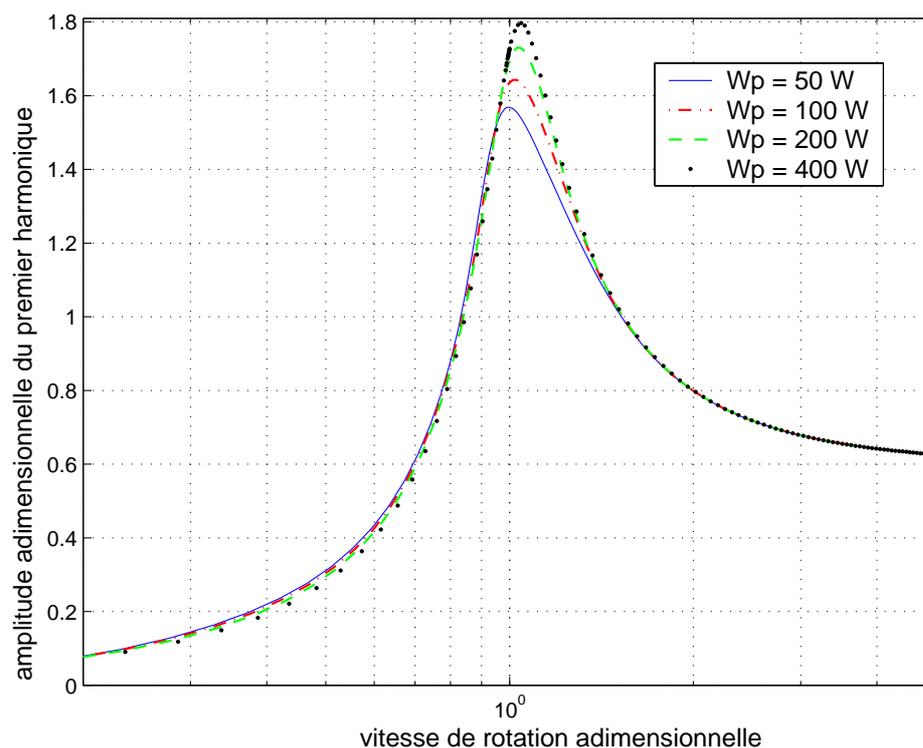


FIG. 4.24: Influence de la puissance de la pompe sur la réponse au balourd à la position du disque - Harmonique fondamentale

complexe, associés aux plages de vitesse instables permet de détecter l'existence de bifurcations de Hopf secondaires, qui conduisent le système, comme souligné dans le chapitre précédent, à des cycles limites quasi-périodiques.

Pour expliquer la déstabilisation du rotor, il suffit d'examiner l'allure de la force radiale en fonction de la puissance de la pompe, à une vitesse donnée dans la plage d'opération instable (voir les résultats pour $\omega_{ad} = 0,96$ exposés dans la figure 4.26). En effet, quand la puissance de la pompe est faible ($W_p = 50 [W]$), les forces radiales sont négatives, à cause de la présence d'une poche de cavitation. L'augmentation de la puissance de la pompe a initialement un effet bénéfique à ce niveau, car la force radiale tendant vers zéro révèle une réduction de la zone cavitante. Cependant, en augmentant davantage la puissance de la pompe, les forces radiales générées par le SqF deviennent positives.

Comme nous l'avons souligné précédemment, dans le cas d'orbites circulaires et centrées, ces forces radiales positives peuvent être interprétées comme de l'amortissement croisé négatif ou comme de la raideur négative, tous les deux étant potentiellement déstabilisants dans la dynamique de machines tournantes [188]. En effet, si l'on analyse les coefficients d'amortissement et de raideur de l'équation 4.27 pour $W_p = 400 [W]$, linéarisés sur un tour à une vitesse instable ($\omega_{ad} = 0,96$) (figure 4.27), on s'aperçoit que le coefficient d'amortissement c_{rt} est négatif par endroit et que le coefficient de raideur k_{rr} est négatif sur quasiment la totalité du cycle. Physiquement, cela correspond à des forces qui poussent le rotor vers l'extérieur de son orbite rendant le système instable, ce qui est observé lorsque les effets de pressurisation atteignent des valeurs assez importantes.

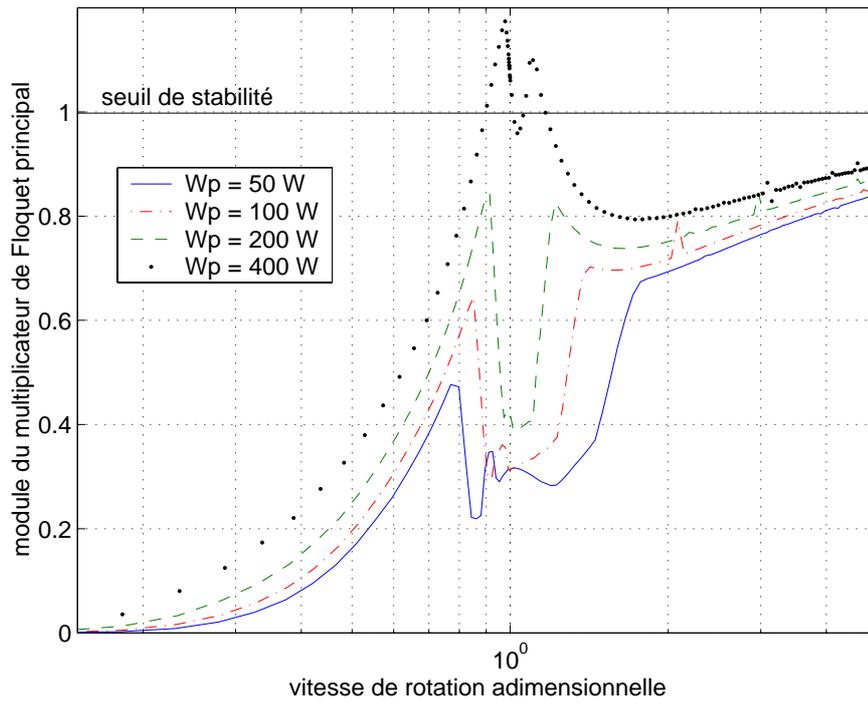


FIG. 4.25: *Stabilité en fonction de la puissance de la pompe*

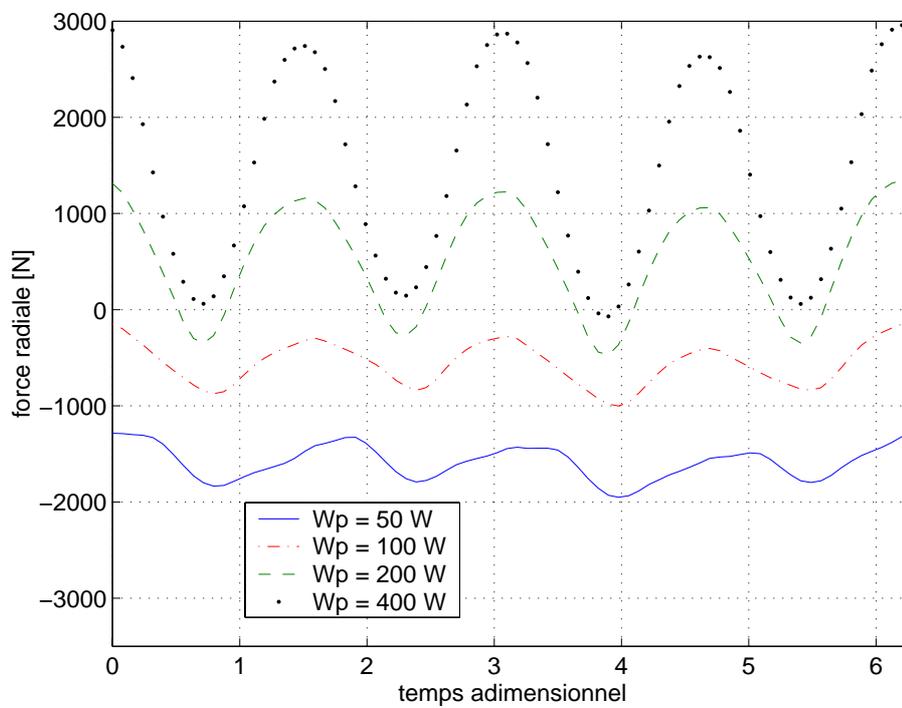


FIG. 4.26: *Force radiale en fonction de la puissance de la pompe à $\omega_{ad} = 0,96$*

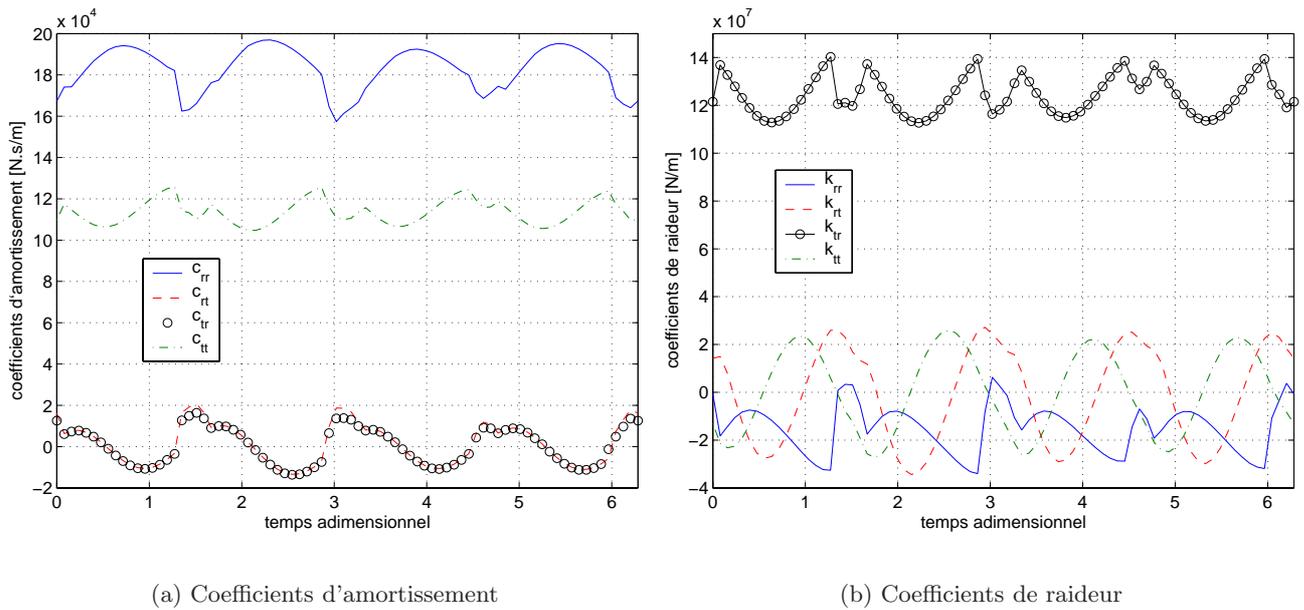


FIG. 4.27: Coefficients de raideur et d'amortissement linéarisés du SqF à $\omega_{ad} = 0,96$ pour $W_p = 400$ [W]

Il est important de souligner que l'apparition de cette instabilité ne résulte pas du modèle développé pour décrire le couplage entre le film et le circuit d'alimentation. Nous avons constaté qu'en imposant des pressions constantes assez élevées ($p \approx 32$ [bar]) aux points d'injection, la bifurcation de Hopf secondaire est également détectée.

En ce qui concerne l'isolation vibratoire procurée par le SqF, les courbes de la figure 4.28 montrent qu'elle décroît avec l'utilisation d'une pompe plus puissante. Ce résultat découle d'une part de la rigidification dynamique de l'amortisseur et d'autre part de l'amplification des effets hydrostatiques. Cette influence de la puissance de la pompe n'est remarquable qu'à des vitesses inférieures au double de la vitesse critique du rotor.

4.4.1.3 Comportement du circuit hydraulique d'alimentation

Le modèle développé ici permet d'étudier en détails le comportement du système hydraulique devant assurer l'alimentation du SqF. Ce modèle s'appuie certes sur des hypothèses simplificatrices assez fortes telles que celle d'un rendement de la pompe constant, alors qu'il dépend en réalité du débit et des pertes de charge dans le système englobant le circuit hydraulique et le SqF. Nous croyons tout de même que le couplage de l'approche énergétique avec la description du problème hydrodynamique doit fournir des informations pertinentes à propos du comportement du système d'alimentation.

Examinons premièrement la variation de la pression à la sortie de la pompe, pour $W_p = 100$ [W] et $n = 2, 3, 4$ et 5. La figure 4.29 présente l'évolution de la valeur moyenne de cette variable en fonction de la vitesse du rotor. Le pic observé lors du passage de la vitesse critique met en évidence l'action du SqF similaire à celle d'une deuxième pompe installée en série avec la première. Ce pic

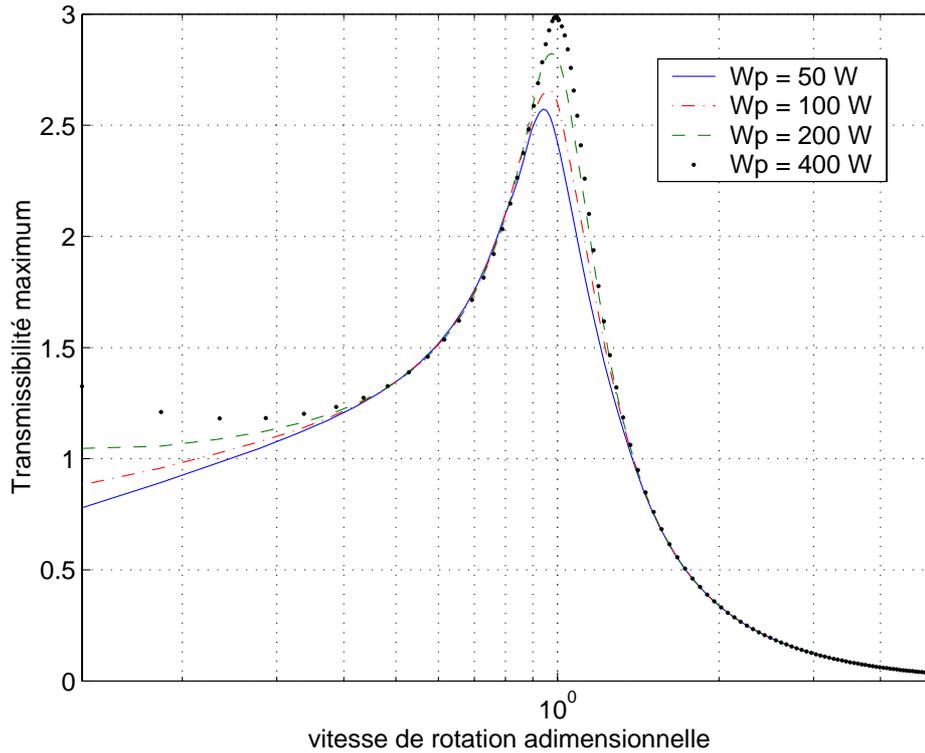


FIG. 4.28: *Transmissibilité maximum en fonction de la puissance de la pompe*

augmente avec l’amplitude de l’orbite décrite par l’amortisseur. On remarque encore que le nombre de points d’injection a très peu d’influence sur la pression moyenne à la sortie de la pompe. Ces résultats montrent que l’hypothèse de pression constante dans le système hydraulique n’est pas réaliste et pourrait engendrer des erreurs considérables notamment sur le calcul du débit d’alimentation.

Les variations de la pression dans le système hydraulique peuvent être encore plus importantes au cours d’une période de rotation, à une vitesse donnée, comme le montre la figure 4.30. On constate qu’en réduisant le nombre de points d’injection, l’amplitude crête-à-crête de la pression de la pompe s’accroît. Cette amplitude devient assez faible pour $n > 4$, mais la pression reste toujours une fonction de la vitesse du rotor. L’analyse de l’oscillation de la pression à l’un des points d’injection permet d’identifier les parties de la période où l’huile est injectée dans le film ou refoulée dans le circuit hydraulique. Entre $0 < \omega t < \pi$ la pression au point d’injection en question est supérieure à celle à la sortie de la pompe, ce qui indique un retour de l’huile de l’amortisseur dans le système d’alimentation. Entre $\pi < \omega t < 2\pi$, la pression est inférieure à celle de la pompe, si bien que l’huile est introduite dans le film amortisseur. La forte différence entre les pressions maximum et minimum résulte de la géométrie des conduites d’injection, lesquelles présentant un changement de diamètre provoquent une transformation de pression dynamique ($\alpha \bar{V}^2/2$) en pression thermodynamique et vice-versa selon le sens de l’écoulement.

Les fluctuations de pression peuvent être dangereuses au cas où la fréquence propre d’un composant du système d’alimentation soit excitée. De plus, la montée en pression lorsque le rotor traverse une vitesse critique doit être prise en compte pour le dimensionnement du circuit hydraulique. Afin de remédier aux problèmes pouvant découler de ces fluctuations de pression, l’utilisation d’un accu-

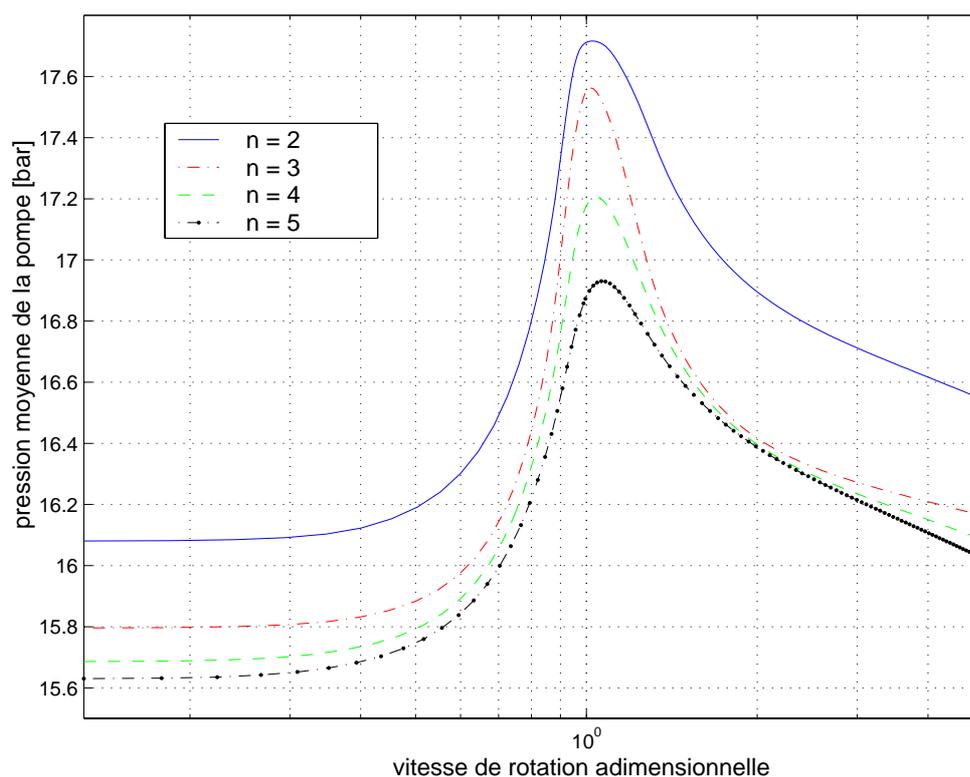
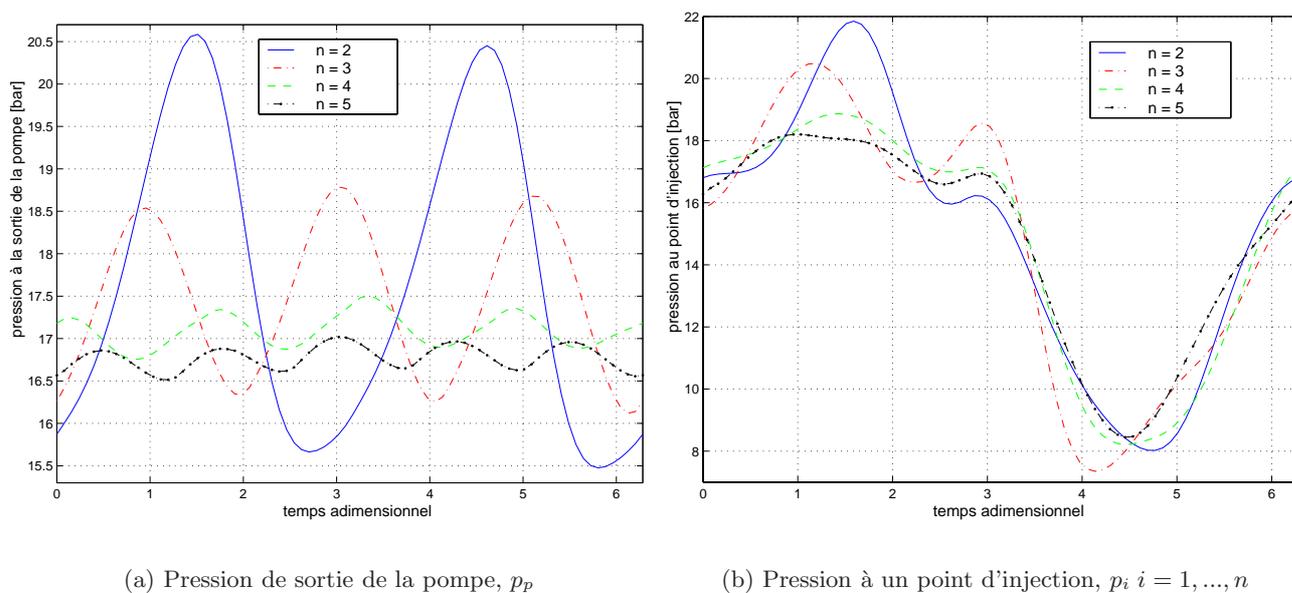


FIG. 4.29: Evolution de la pression moyenne de sortie de la pompe, p_p



(a) Pression de sortie de la pompe, p_p

(b) Pression à un point d'injection, p_i $i = 1, \dots, n$

FIG. 4.30: Fluctuations de pression dans le système hydraulique à $\omega_{ad} = 0,96$

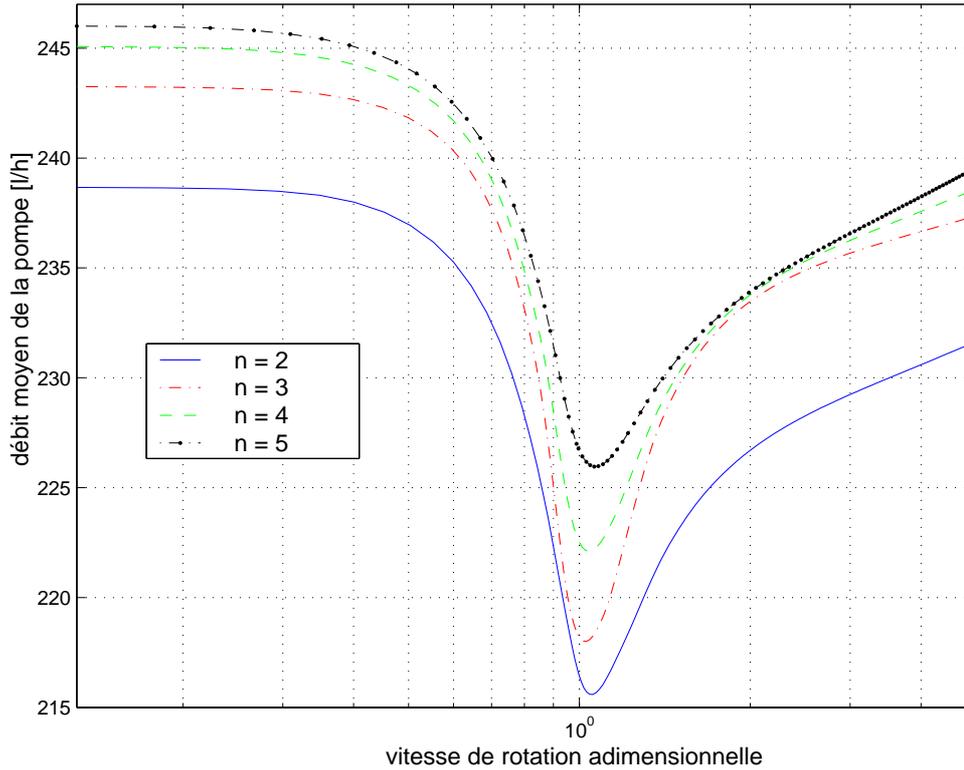


FIG. 4.31: Evolution du débit moyen de la pompe

mulateur ou l’installation de clapets anti-retour dans les conduites d’injection pourrait être envisagée.

L’influence de la cinématique du SqF sur le système hydraulique s’observe également sur le débit moyen livré par la pompe en fonction de la vitesse du rotor, comme le montre la figure 4.31. La capacité d’alimentation diminue lorsque l’excentration et la vitesse de précession de l’amortisseur s’accroissent. On s’aperçoit d’autre part que le nombre de points d’injection n’a pas d’effet sensible sur le débit d’alimentation, lequel est plutôt régit par la puissance de la pompe, ce qui est un résultat logique à la lumière de l’approche énergétique employée.

La figure 4.32 présente une comparaison entre le débit de fuite par les extrémités de l’amortisseur et le débit d’alimentation, pour $n = 4$. Sachant que la cavitation est traitée selon la condition de Gumbel modifiée, laquelle ne vérifie pas la conservation de la masse, des débits d’alimentation et de fuite égaux sont une indication d’absence de cavitation. Lorsque le débit de fuite est supérieur à celui livré par la pompe, ce qui est observé au voisinage de la vitesse critique pour $W_p = 50, 100$ et $200 [W]$, on conclut que la pressurisation de l’amortisseur n’est pas suffisante pour éviter la cavitation de l’huile. L’analyse de l’évolution des courbes pour des valeurs croissantes de la puissance de la pompe permet de mettre en évidence la capacité de réduire, voire d’éliminer, la zone cavitante au travers de la régulation des paramètres hydrauliques du problème.

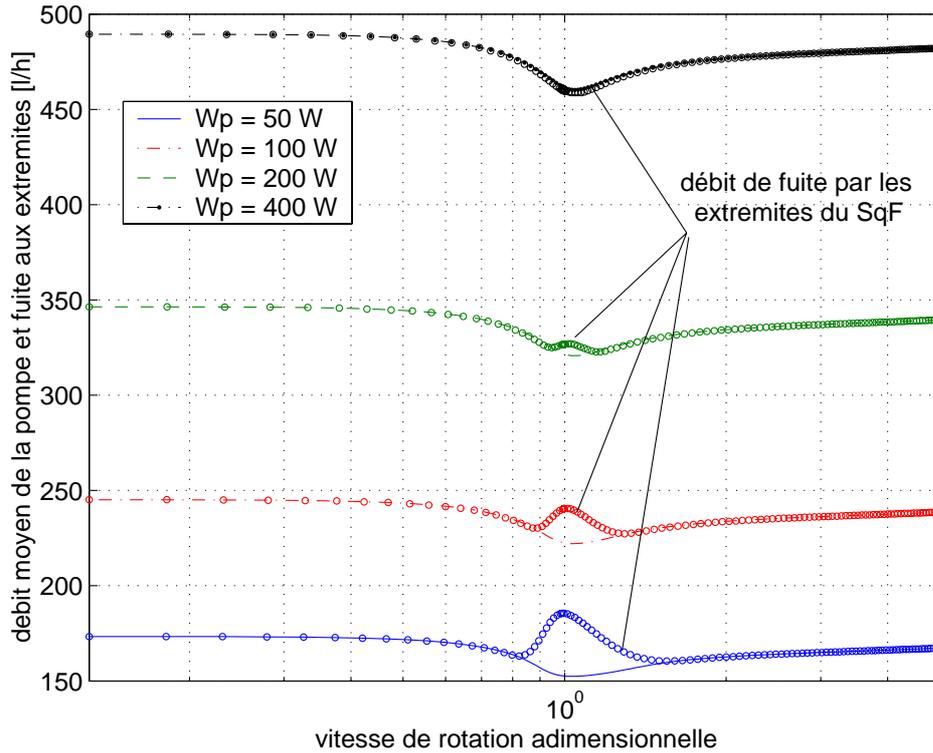


FIG. 4.32: Comparaison des débits d'alimentation et de fuite

4.4.2 Modèle de dynamique d'ensemble

Le modèle Jeffcott pris comme exemple pour illustrer l'interaction entre la dynamique d'un rotor flexible et le système d'alimentation du SqF s'est avéré être très particulier, comme nous avons pu le constater, du fait de l'amortissement excessif fourni par le SqF. Ainsi, ce deuxième exemple a pour objectif d'étudier la dynamique d'un modèle plus réaliste et de rendre plus générales les conclusions que l'on pourra tirer à la fin de ce chapitre.

Le schéma du rotor est exposé dans la figure 4.33. Il s'agit d'une version similaire au banc d'essais développé au sein de l'équipe Dynamique des Systèmes et des Structures du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon. Le banc fut conçu dans le but de décrire le comportement dynamique d'un moteur à réaction réel [38]. Les données principales du rotor sont les suivantes :

$m_d = 20 \text{ kg}$: masse du disque,

$k_r = 1,5 \times 10^9 \text{ N/m}$: raideur des roulements,

$k_x = k_z = 15 \times 10^6 \text{ N/m}$: raideur du support palier dans les directions x et z ,

$d_a = 40 \text{ mm}$: diamètre principal de l'arbre,

$l_i = 500 \text{ mm}$: distance inter-paliers,

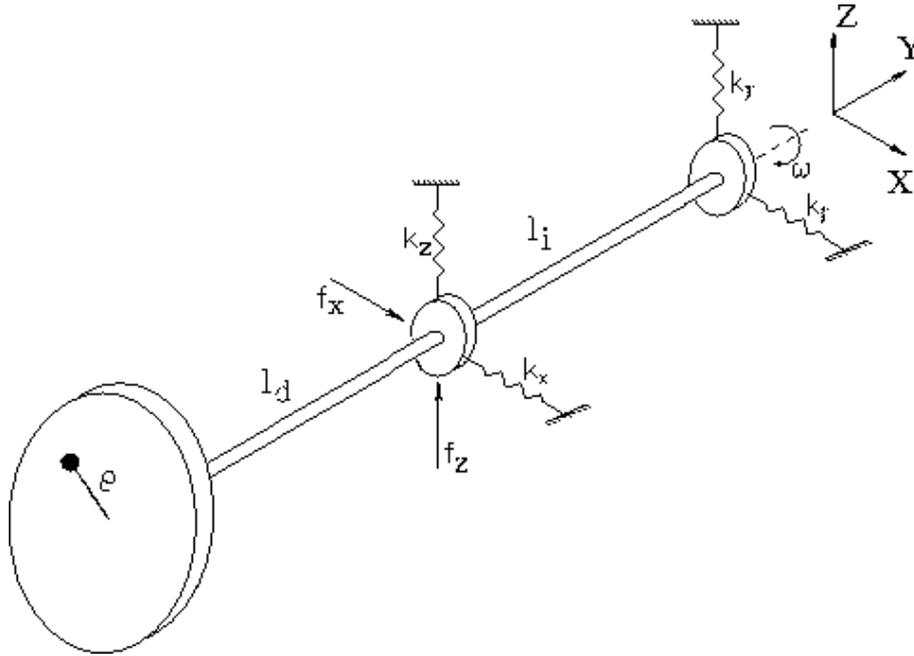


FIG. 4.33: Schéma du rotor de dynamique d'ensemble

$l_d = 150 \text{ mm}$: longueur du porte-à-faux,

f_x, f_z : forces de l'amortisseur.

Nous supposons que le palier à l'extrémité de l'arbre est monté rigidement sur le bâti et nous introduisons un amortisseur *squeeze film* au niveau du palier du porte-à-faux. En ce qui concerne la modélisation de l'ensemble, l'arbre est discrétisé en six éléments de type poutre de Bernouilli, dont les matrices de masse, de raideur et gyroscopique sont données dans la référence [84]. La prise en compte du disque s'effectue en rajoutant des matrices de masse et gyroscopique, cet élément étant considéré comme indéformable. Les roulements sont traités comme des masses concentrées et sont supposés rigides, puisque leur raideur, k_r , est sensiblement plus élevée que les raideurs du rétenteur, k_x et k_z .

Les caractéristiques du SqF et du système d'alimentation correspondent à celles du banc d'essai décrit ultérieurement dans le chapitre VI de ce mémoire. Elles sont les suivantes :

$$L=30 \text{ [mm]}; R=65 \text{ [mm]}; C=0,3 \text{ [mm]}; \mu=0,007 \text{ [Pa.s]}; \rho=950 \text{ [kg/m}^3\text{]};$$

$$D_{hc}=5 \text{ [mm]}; D_{hs}=3 \text{ [mm]}; D_{hp}=7 \text{ [mm]}; D_{hc}=7 \text{ [mm]};$$

$$R_{ch}=115 \text{ [mm]}; l_p=1 \text{ [m]}; l_s=50 \text{ [mm]}; l_c=30 \text{ [mm]};$$

La pression de vaporisation et ambiante ainsi que le coefficient de fuite ne sont pas modifiés.

Pour la réalisation des simulations, la pesanteur est négligée et la valeur de $gm_d = 4,5 \text{ kg.mm}$ est attribuée au balourd localisé au niveau du disque. La vitesse de rotation est adimensionnalisée par

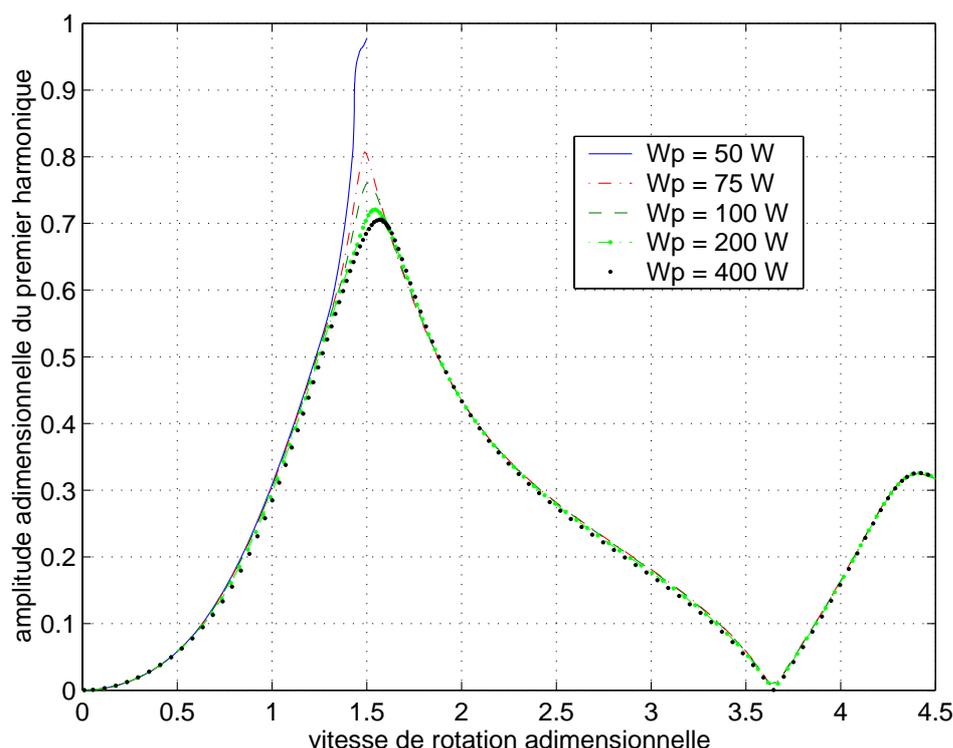


FIG. 4.34: Influence de la puissance de la pompe sur la réponse au balourd au niveau du SqF - Harmonique fondamentale

rapport à la première fréquence propre du rotor, estimée à $73,8 [Hz]$ ($4430 [tr/min]$).

D'après les résultats obtenus avec le rotor Jeffcott, on sait que les configurations avec deux et trois points d'injection possèdent l'inconvénient de provoquer des fluctuations importantes des pressions dans le circuit hydraulique et des forces transmises au bâti. En outre, l'utilisation de quatre ou cinq points d'injection s'est avérée plus efficace dans la prévention de la cavitation de vaporisation. Par conséquent, les calculs avec le modèle Dynamique d'Ensemble se concentrent uniquement sur l'influence de la puissance de la pompe sur le comportement dynamique du rotor, le nombre de points d'injection étant fixé à quatre.

Les figures 4.34 et 4.35 présentent la réponse au balourd du SqF et du disque, respectivement, pour cinq niveaux de puissance de la pompe. La réponse étant largement dominée par l'harmonique fondamental, l'évolution des harmoniques supérieures sera omise. On observe que les effets gyroscopiques et l'amortissement du SqF provoquent un décalage considérable de la vitesse critique par rapport à la première fréquence propre du système. L'effet de l'augmentation de la puissance de la pompe est très positif en terme d'amplitude de vibration du rotor : une réduction d'environ 20% est obtenue au passage de la vitesse critique lorsque la puissance est élevée de 75 à 400 [W].

Pour $W_p = 50 [W]$, la non linéarité des forces hydrodynamiques à forte excentricité de l'amortisseur pose des problèmes de convergence à la méthode de résolution (moindres carrés non linéaires de type Levenberg-Marquardt) du système d'équations issu de l'application de la collocation trigonométrique. Cette non linéarité correspond à un phénomène de raidissement qui conduit à une bifurcation de

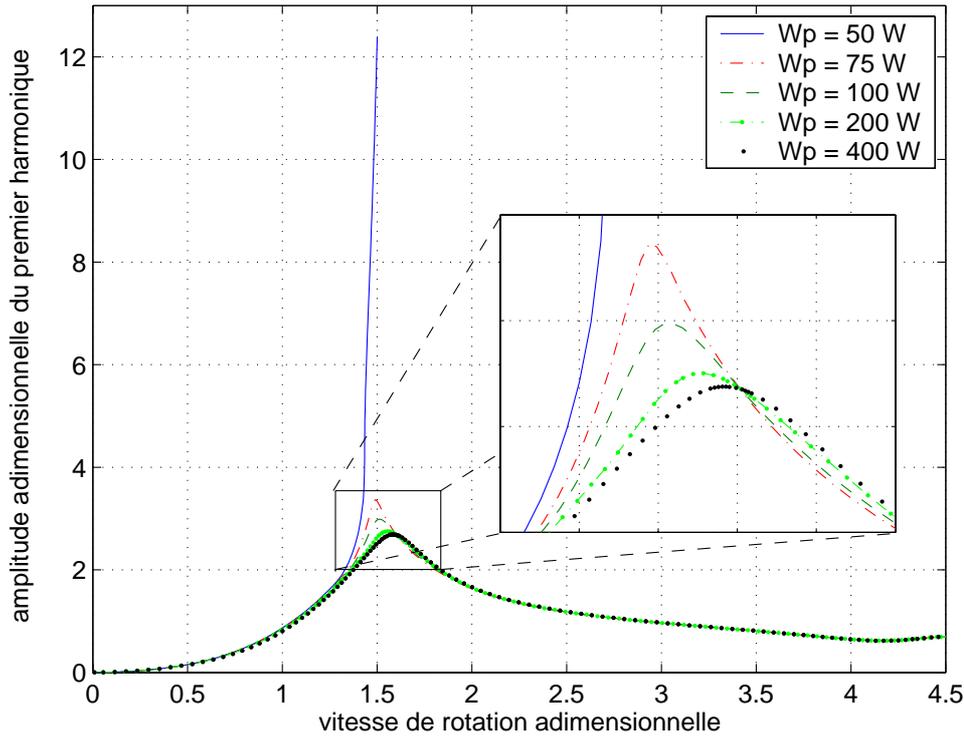


FIG. 4.35: Influence de la puissance de la pompe sur la réponse au balourd au niveau du disque - Harmonique fondamentale

type point-selle, engendrant un saut dans la réponse du rotor. L’emploi d’une pompe légèrement plus puissante suffit pour faire chuter sensiblement l’excentricité maximale du SqF et ainsi éviter le saut dans la réponse et les problèmes de convergence du calcul.

En ce qui concerne la stabilité du rotor, aucune bifurcation n’est détectée et le module du multiplicateur de Floquet principal se révèle être pratiquement indépendant de la valeur de la puissance de la pompe. L’influence de cette dernière sur la transmissibilité maximale de l’amortisseur est, par contre, plus perceptible, comme le montre la figure 4.36. On remarque que la transmissibilité décroît initialement avec l’augmentation de la puissance de la pompe. Cependant, si l’on augmente davantage cette puissance, il existe un seuil au delà duquel la tendance initiale est inversée et la transmissibilité maximum commence à s’accroître. On constate également que pour $\omega_{ad} < 1$, moins la pompe est puissante meilleure est l’isolation vibratoire procurée par l’amortisseur.

Le comportement du circuit hydraulique d’alimentation est qualitativement similaire à celui du système étudié précédemment. La figure 4.37 montre que les fluctuations de pression en fonction de la vitesse du rotor et de la cinématique du SqF restent très importantes. Il est intéressant de souligner que la comparaison des débits entrant et sortant montre que la cavitation est éliminée lorsque la pompe de puissance $W_p = 400 [W]$ est utilisée, et cela malgré la forte excentricité de l’amortisseur, $\varepsilon = 0,7$, atteinte à la première vitesse critique du rotor, autour de $7000 \text{ tr}/\text{min}$.

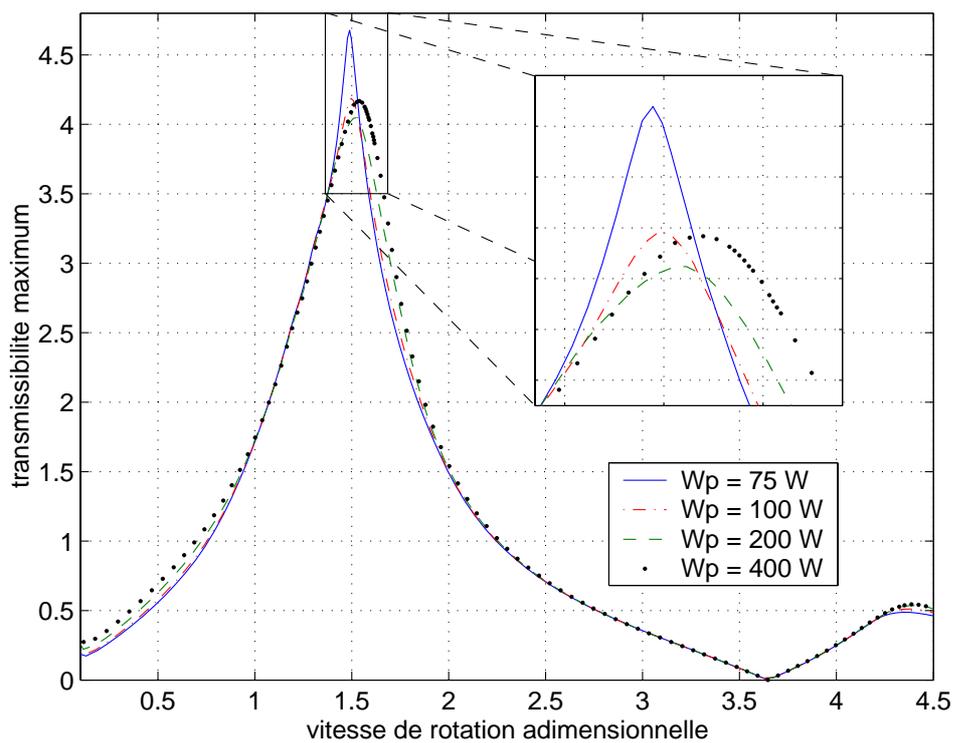


FIG. 4.36: *Transmissibilité maximum en fonction de la puissance de la pompe*

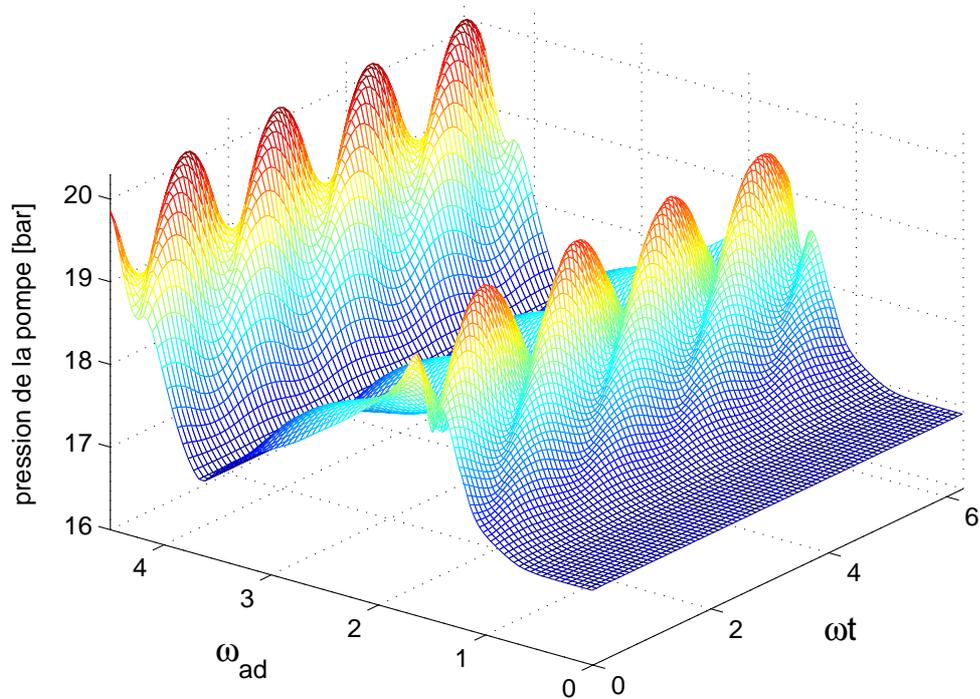


FIG. 4.37: *Variation de la pression de sortie de la pompe, p_p , pour $W_p = 100$ [W]*

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les frontières de la modélisation d’amortisseurs *squeeze film* sont poussées au delà des surfaces délimitant le film d’huile. Les problèmes hydrodynamique et hydraulique sont traités de manière couplée, si bien que le SqF et son système d’alimentation ponctuelle sont considérés comme un tout. Les résultats obtenus à partir des simulations numériques de la dynamique d’un rotor Jeffcott et du banc Dynamique d’Ensemble mettent en relief l’influence de cette interaction sur la performance de rotors flexibles. Il est important de retenir que cette influence dépend de la configuration du rotor elle même, puisque le SqF est un élément passif.

Nous avons pu constater que l’augmentation de la puissance de la pompe d’alimentation et la réduction du nombre de points d’injection permettent d’amplifier l’amortissement fourni par le SqF. Cependant, lorsque cet amortissement devient excessif, la rigidification dynamique du SqF empêche l’exploitation de son potentiel de dissipation énergétique, car les mouvements de translation du rotor au niveau des paliers sont alors limités.

Afin d’éviter des oscillations de pression importantes dans le circuit hydraulique et de réduire l’amplitude des forces transmises au bâti, l’injection de l’huile par plus de quatre points nous semble un choix technique plus intéressant, dans le cadre d’amortisseurs partiellement fermés, comme ceux étudiés dans ce chapitre. Cette solution permet d’autre part une alimentation plus homogène sur la circonférence du film amortisseur, ce qui favorise la prévention de la cavitation de vaporisation. On peut remédier ainsi à la dégradation des surfaces métalliques en contact avec le film que peut causer ce phénomène, dont l’étendue peut être également réduite par l’utilisation d’une pompe plus puissante. Il en résulte une pressurisation plus importante de l’amortisseur et une augmentation de la capacité d’alimentation du circuit hydraulique.

Les effets engendrés par la pressurisation de l’alimentation peuvent être considérables, à condition que la restriction de l’écoulement axial soit effective, ce qui peut être accompli par l’installation de joints très serrés aux extrémités du SqF. On rajoute ainsi au SqF une fonction portance d’origine hydrostatique, outre la fonction amortissement. Cette application, appelée amortisseur *squeeze film* hydrostatique (abréviation en anglais HSFD), a été mise en avant par SAN ANDRÉS en 1992 [143]. Nous avons remarqué dans les simulations de la dynamique du rotor Jeffcott, que la pressurisation excessive du circuit hydraulique peut toutefois avoir un effet destabilisant sur la dynamique du système, ce qui physiquement s’interprète par le développement d’amortissement croisé et de raideur négatifs.

Une description plus réaliste du comportement du système d’alimentation ponctuelle peut être obtenue en incluant dans le modèle la courbe caractéristique d’opération de la pompe. Ce faisant, la variation de son rendement en fonction du débit et de la perte de charge du système peut être prise en compte.

Chapitre 5

Représentation du *squeeze film* pour la dynamique d'ensemble

Dans le chapitre III de ce mémoire, les principales méthodes de résolution de l'équation de Reynolds ont été exposées. Nous avons souligné le manque d'une technique à la fois robuste et efficace de calcul des forces hydrodynamiques visqueuses du SqF. Bien que les solutions numériques par différences finies et par éléments finis puissent être assez précises, elles sont considérées comme prohibitives pour des études paramétriques du fait de leur temps de calcul élevé.

Nous avons fait remarquer également que la modélisation des effets d'inertie repose sur un traitement simplifié des conditions aux limites du problème et du phénomène de cavitation. La construction de modèles plus robustes est très difficile, du fait de la complexité des équations régissant le problème et des restrictions imposées par le besoin de coût temporel minimal pour la simulation de la dynamique d'ensemble.

Afin de surmonter les limitations des modèles actuels de description des forces visqueuses et inertielles produites par l'action du SqF, nous proposons ici une nouvelle approche du problème. Elle consiste à découpler les étapes de modélisation du champ de pression de l'amortisseur et d'étude de la dynamique de l'ensemble mécanique. L'hypothèse forte derrière cette stratégie réside dans la considération des forces hydrodynamiques comme fonctions de la cinématique instantanée du système. En d'autres termes, l'écoulement dans le film fluide est supposé quasi-statique d'un point de vue hydrodynamique.

Cette hypothèse rend possible le lissage des efforts visqueux calculés au travers de la résolution numérique de l'équation de Reynolds, pour un ensemble de conditions cinématiques prédéfini et pour un amortisseur de géométrie donnée. On parvient ainsi à obtenir des expressions des forces visqueuses radiale et tangentielle fonctions de ε , ϕ , $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$, qui peuvent être ensuite utilisées dans la simulation de la dynamique d'ensemble, découplée avec l'analyse du film d'huile.

En ce qui concerne la prise en compte des effets d'inertie, une procédure de lissage similaire est menée sur l'énergie cinétique et les débits d'alimentation et de fuite. On en déduit ainsi des expressions en fonction de la cinématique l'amortisseur. Des formules pour les forces inertielles peuvent alors être

obtenues au travers de la méthode énergétique mise en avant par EL SHAFEI [44][45]. Il est important de remarquer que cette approche s'appuie sur l'hypothèse que les effets visqueux et d'inertie sont indépendants.

Des approximations pour les forces visqueuses et inertielles sont identifiées à l'aide de techniques de lissage, menées sur des données générées numériquement. Le but principal est de construire des formules qui conjuguent rapidité d'évaluation, robustesse et fidélité de la description physique du problème.

5.1 Lissage des forces hydrodynamiques visqueuses

Pour la construction de modèles des forces visqueuses, deux techniques de lissage sont analysées : une régression linéaire fondée sur une procédure de minimisation de résidus de type moindres carrés, et une méthode d'identification non paramétrique basée sur la projection des efforts sur les polynômes de Chebyshev.

5.1.1 Lissage par régression linéaire

La théorie de la régression linéaire est l'un des outils les plus importants de l'analyse statistique [162]. Elle peut servir à déterminer des relations, linéaires ou non, entre les variables dépendantes et indépendantes impliquées dans un problème quelconque. Dans le cas du SqF, les variables dépendantes correspondent aux forces hydrodynamiques visqueuses et les variables indépendantes à des combinaisons des paramètres cinématiques.

L'idée principale de notre approche se résume à développer des modèles non linéaires pour les forces hydrodynamiques à partir d'une relation linéaire du type :

$$\begin{aligned} f_{rv}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) &= b_{r0} + b_{r1}X_1 + b_{r2}X_2 + \cdots + b_{rP}X_P + \epsilon_r \\ f_{tv}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) &= b_{t0} + b_{t1}X_1 + b_{t2}X_2 + \cdots + b_{tP}X_P + \epsilon_t \end{aligned} \tag{5.1}$$

où,

f_{rv}, f_{tv} : forces hydrodynamiques visqueuses radiale et tangentielle,

X_1, X_2, \dots, X_P : P variables indépendantes du modèle,

$b_{r1}, b_{t1}, b_{r2}, b_{t2}, \dots, b_{rP}, b_{tP}$: coefficients de régression à déterminer.

Les paramètres ϵ_r et ϵ_t sont des variables aléatoires inconnues qui mesurent respectivement la dispersion de f_{rv} et f_{tv} autour de la dépendance linéaire exacte fonction des p variables indépendantes.

En supposant que les forces hydrodynamiques visqueuses ne sont fonctions que de la position

(ε, ϕ) et des vitesses ($\dot{\varepsilon}, \dot{\phi}$) de l'amortisseur, les variables indépendantes X_1, X_2, \dots, X_P s'écrivent sous la forme générale :

$$X_p = g_i(\varepsilon)g_j(\phi)g_k(\dot{\varepsilon})g_l(\dot{\phi}) \quad \begin{cases} p = 1, 2, \dots, P; \\ i = 0, 1, \dots, P_i; \\ j = 0, 1, \dots, P_j; \\ k = 0, 1, \dots, P_k; \\ l = 0, 1, \dots, P_l; \end{cases} \quad (5.2)$$

Si l'on choisit, par exemple, des monômes pour les fonctions g_i, g_j, g_k, g_l , les constantes P_i, P_j, P_k, P_l équivaudront aux puissances maximales de $\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$, respectivement. Les $P = (P_i + 1)(P_j + 1)(P_k + 1)(P_l + 1) - 1$ variables X_p seraient dans ce cas données par :

$$X_p = \varepsilon^i \phi^j \dot{\varepsilon}^k \dot{\phi}^l \quad (5.3)$$

Les variables dépendantes f_{rv} et f_{tv} seront dorénavant représentées par f , tout comme b_r, b_t par b , de façon à généraliser le développement de l'analyse.

Les coefficients b doivent être estimés à partir de N réalisations,

$$(X_1^n, X_2^n, \dots, X_P^n, f_n), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

sur les variables indépendantes X_1, X_2, \dots, X_P et sur la variable dépendante f . Ces n épreuves correspondent à l'ensemble de valeurs des forces visqueuses f_{rv} et f_{tv} calculées pour un SqF de géométrie donnée, en résolvant l'équation de Reynolds par la méthode des différences finies avec la précision voulue, pour des valeurs prédéfinies de $\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$. Ainsi, la précision des formules obtenues par le lissage est a priori limitée aux plages établies pour ces paramètres cinématiques. Cependant, ces plages dépendent de la dynamique du système dans lequel le SFD est incorporé. Elles doivent alors être définies de manière à englober un vaste ensemble de conditions cinématiques, afin d'éviter que les formules sortent de leur domaine d'application.

On doit supposer que les épreuves satisfont les N relations :

$$f_n = b_0 + b_1 X_1^n + b_2 X_2^n + \dots + b_P X_P^n + \epsilon_n \quad (5.4)$$

Ce modèle linéaire s'écrit sous forme matricielle :

$$\{f\} = [X]\{b\} + \{\epsilon\} \quad (5.5)$$

avec,

$$\{f\}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix}; [X]_{N \times (P+1)} = \begin{bmatrix} 1 & X_1^1 & X_2^1 & \cdots & X_P^1 \\ 1 & X_1^2 & X_2^2 & \cdots & X_P^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_1^N & X_2^N & \cdots & X_P^N \end{bmatrix};$$

$$\{b\}_{(P+1) \times 1} = \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_P \end{Bmatrix}; \{\epsilon\}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{Bmatrix};$$

En supposant que $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_P$ sont des estimations de la population des coefficients de régression b_0, b_1, \dots, b_P , l'évaluation de la n -ième valeur de la variable dépendante f fournit :

$$\tilde{f}_n = \beta_0 + \beta_1 X_1^n + \beta_2 X_2^n + \cdots + \beta_P X_P^n = f_n - \epsilon_n \quad (5.6)$$

La qualité de l'approximation obtenue avec $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_P$ peut être jaugée par la somme des carrés des résidus :

$$\mathcal{J}(b) = \sum_{n=1}^N \epsilon_n^2 = \sum_{n=1}^N (f_n - \beta_0 - \beta_1 X_1^n - \beta_2 X_2^n - \cdots - \beta_P X_P^n)^2 \quad (5.7)$$

En utilisant le principe des moindres carrés, on cherche à calculer les coefficients β de manière optimale, telle que [103] :

$$\left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \beta} \right]_{b=\beta} = 0 \quad (5.8)$$

Ainsi, la somme des carrés des résidus atteint une valeur minimale lorsque les coefficients β satisfont le système d'équations algébriques linéaire suivant [162] :

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{n=1}^N X_1^n & \cdots & \sum_{n=1}^N X_P^n \\ \sum_{n=1}^N X_1^n & \sum_{n=1}^N (X_1^n)^2 & \cdots & \sum_{n=1}^N X_1^n X_P^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^N X_P^n & \sum_{n=1}^N X_1^n X_P^n & \cdots & \sum_{n=1}^N (X_P^n)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^N f_n \\ \sum_{n=1}^N X_1^n f_n \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^N X_P^n f_n \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

ou encore sous forme compacte :

$$([X]^t[X])\{\beta\} = [X]^t\{f\} \quad (5.10)$$

Le vecteur $\{\beta\}$ est déterminé en inversant la matrice $([X]^t[X])$, laquelle est non singulière si le nombre d'épreuves N est supérieur au nombre P de coefficients du modèle [162]. Son inverse est appelé matrice de variance-covariance.

La condition d'optimalité 5.8 conduit à la minimisation de \mathcal{J} , toutes les observations ayant un même poids lors de la détermination des β . En d'autres termes, on minimise un critère d'erreur absolue. Par conséquent, l'approximation sera de meilleure qualité pour des fortes valeurs de la variable dépendante, des écarts relatifs importants pouvant être observés à faible niveau de f . Il convient d'analyser l'influence de ce fait sur les simulations de la dynamique d'un système mécanique. En ce qui concerne la détermination des orbites stationnaires et des mouvements transitoires, elle n'en serait pas sensiblement affectée, puisque les efforts extérieurs doivent dominer sur les forces hydrodynamiques lorsque celles-ci sont faibles. L'analyse de la stabilité, toutefois, peut être pénalisée, car elle nécessite le calcul des dérivées des forces du SqF par rapport aux variables cinématiques. Une alternative pour rendre la qualité de l'approximation plus homogène sur toute l'étendue des valeurs des forces hydrodynamiques visqueuses, consiste à définir une condition d'optimalité portant sur un critère d'erreur relative :

$$\mathcal{J}(b) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{f_n - \beta_0 - \beta_1 X_1^n - \beta_2 X_2^n - \dots - \beta_P X_P^n}{f_n} \right)^2 \quad (5.11)$$

Cela revient à introduire dans la définition de la somme des carrés des résidus une matrice de pondération donnée par :

$$[W] = \begin{bmatrix} 1/f_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/f_N^2 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

de façon à ce que l'on aboutisse au système d'équations suivant pour le calcul des coefficients β optimaux [103] :

$$([X]^t[W][X])\{\beta\} = [X]^t[W]\{f\} \quad (5.13)$$

La régression est plus souvent menée à partir d'un modèle linéaire normalisé qui s'écrit :

$$f_n - \bar{f} = y_n = \beta_1(X_1^n - \bar{X}_1) + \beta_2(X_2^n - \bar{X}_2) + \dots + \beta_P(X_P^n - \bar{X}_P) + \hat{\epsilon}_n \quad (5.14)$$

où le symbole $\bar{\cdot}$ désigne la moyenne sur les N épreuves. On introduit encore le changement de variable :

$$\beta_p^* = \frac{\sigma_p}{\sigma_f} \beta_p \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (5.15)$$

avec,

$\sigma_p = \sqrt{\sum_{n=1}^N (X_p^n - \bar{X}_p)^2}$: écart type des variables dépendantes;

$\sigma_f = \sqrt{\{y\}^t \{y\}}$: écart type de la variable dépendante.

En notant :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_P \end{bmatrix};$$

$$[\mathcal{X}] = \begin{bmatrix} X_1^1 - \bar{X}_1 & \dots & X_P^1 - \bar{X}_P \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^N - \bar{X}_1 & \dots & X_P^N - \bar{X}_P \end{bmatrix}.$$

on arrive à :

$$[\sigma]^{-1} [\mathcal{X}]^t [\mathcal{X}] [\sigma]^{-1} \{\beta^*\} = \frac{1}{\sigma_f} [\sigma]^{-1} [\mathcal{X}]^t \{y\} \quad (5.16)$$

On identifie dans l'équation ci-dessus :

$[\sigma]^{-1} [\mathcal{X}]^t [\mathcal{X}] [\sigma]^{-1}$: matrice des coefficients de corrélation simple entre les variables indépendantes;

$\frac{1}{\sigma_f} [\sigma]^{-1} [\mathcal{X}]^t \{y\}$: vecteur des coefficients de corrélation simple entre la variables dépendante et les variables indépendantes.

Le système d'équations 5.16 peut s'écrire également [7] :

$$\begin{bmatrix} r_{X_1 X_1} & r_{X_1 X_2} & \cdots & r_{X_1 X_P} \\ r_{X_2 X_1} & r_{X_2 X_2} & \cdots & r_{X_2 X_P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{X_P X_1} & r_{X_P X_2} & \cdots & r_{X_P X_P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \vdots \\ \beta_P^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{f X_1} \\ r_{f X_2} \\ \vdots \\ r_{f X_P} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

avec,

$$r_{X_a X_b} = \frac{\sum_{n=1}^N (X_a^n - \bar{X}_a)(X_b^n - \bar{X}_b)}{\sigma_a \sigma_b} \quad a, b = 1, 2, \dots, P \quad (5.18)$$

$$r_{f X_p} = \frac{\sum_{n=1}^N (f_n - \bar{f})(X_p^n - \bar{X}_p)}{\sigma_f \sigma_p} \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (5.19)$$

On peut obtenir de manière analogue pour la minimisation de l'erreur relative :

$$[\sigma]^{-1} [\mathcal{X}]^t [W] [\mathcal{X}] [\sigma]^{-1} \{\beta^*\} = \frac{1}{\sigma_f} [\sigma]^{-1} [\mathcal{X}]^t [W] \{y\} \quad (5.20)$$

Le terme constant de la régression est calculé, après la détermination des coefficients β_p , par l'intermédiaire de l'équation [162] :

$$\beta_0 = \bar{f} - \sum_{p=1}^P \bar{X}_p \beta_p; \quad (5.21)$$

5.1.2 Lissage par polynômes de Chebyshev

Les méthodes d'identification non paramétriques ont été développées pour la construction de lois d'effort de systèmes non linéaires dont la description par des paramètres physiques est problématique ou mal maîtrisée [92] [93][91]. Ces méthodes sont communément appliquées à des données expérimentales, ce qui résulte en des lois non paramétriques empiriques.

La méthode utilisée ici consiste à projeter les forces du SqF sur une base orthogonale de polynômes. L'avantage de l'utilisation d'une base orthogonale réside dans la possibilité de calculer des coefficients associés à d'ordres de troncature plus élevés sans altérer les coefficients d'ordres inférieurs calculés auparavant [98]. Ainsi, l'identification peut s'effectuer progressivement jusqu'à ce que les ordres de troncature se révèlent être suffisants pour l'obtention d'un bon lissage des données de simulation.

Les forces visqueuses du SqF étant considérées comme fonctions de sa position et de ses vitesses, on peut les approcher par une série de la forme :

$$\begin{aligned} f_{rv}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) &\simeq \sum_{i=0}^{P_i^r} \sum_{j=0}^{P_j^r} \sum_{k=0}^{P_k^r} \sum_{l=0}^{P_l^r} C_{i,j,k,l}^r T_i(\varepsilon) T_j(\phi) T_k(\dot{\varepsilon}) T_l(\dot{\phi}) = \tilde{f}_{rv}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) \\ f_{tv}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) &\simeq \sum_{i=0}^{P_i^t} \sum_{j=0}^{P_j^t} \sum_{k=0}^{P_k^t} \sum_{l=0}^{P_l^t} C_{i,j,k,l}^t T_i(\varepsilon) T_j(\phi) T_k(\dot{\varepsilon}) T_l(\dot{\phi}) = \tilde{f}_{tv}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) \end{aligned} \quad (5.22)$$

où,

$C_{i,j,k,l}^{r,t}$: constantes à identifier;

T_i, T_j, T_k, T_l : base de fonctions sur laquelle l'effort non-linéaire est projeté;

P_i, P_j, P_k, P_l : ordres de troncature des polynômes dans les directions ε , ϕ , $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$, respectivement.

La base de fonctions orthogonales que nous avons choisie pour la projection des forces non linéaires est celle des polynômes de Chebyshev. Outre l'avantage explicité précédemment procuré par leur orthogonalité, ces polynômes permettent une détermination assez facile des coefficients $C_{i,j,k,l}$ [194]. Le polynôme de Chebyshev d'ordre n est donné par :

$$T_n(\zeta) = \cos(n \arccos(\zeta)) \quad -1 \leq \zeta \leq 1 \quad (5.23)$$

et vérifie les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\int_{-1}^1 w(\zeta) T_a(\zeta) T_b(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0 & a \neq b \\ \frac{\pi}{2} & a = b \neq 0 \\ \pi & a = b = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

où $w(\zeta) = (1 - \zeta^2)^{-1/2}$ est une fonction de pondération

Le terme $\arccos(\zeta)$ dans la définition des polynômes de Chebyshev 5.23 exige que $T_n(\zeta)$ soit une fonction d'une variable normalisée. Il est par conséquent nécessaire d'effectuer une opération de normalisation sur les variables généralisées du problème ε , ϕ , $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$. En notant ε_{max} , ϕ_{max} , $\dot{\varepsilon}_{max}$, $\dot{\phi}_{max}$, ε_{min} , ϕ_{min} , $\dot{\varepsilon}_{min}$ et $\dot{\phi}_{min}$ leurs valeurs extrêmes, on a :

$$\eta = \frac{2\varepsilon - \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}$$

$$\psi = \frac{2\phi - \phi_{max} - \phi_{min}}{\phi_{max} - \phi_{min}}$$

$$\kappa = \frac{2\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{max} - \dot{\varepsilon}_{min}}{\dot{\varepsilon}_{max} - \dot{\varepsilon}_{min}}$$

$$\xi = \frac{2\dot{\phi} - \dot{\phi}_{max} - \dot{\phi}_{min}}{\dot{\phi}_{max} - \dot{\phi}_{min}}$$

Comme déjà souligné dans la section précédente, le lissage est exécuté sur des forces visqueuses calculées en résolvant l'équation de Reynolds bidimensionnelle. Cela implique une définition au préalable des limites de normalisation ε_{max} , ε_{min} , ϕ_{max} , ϕ_{min} , $\dot{\varepsilon}_{max}$, $\dot{\varepsilon}_{min}$, $\dot{\phi}_{max}$ et $\dot{\phi}_{min}$. Les variables donnant la position du SqF, ε et ϕ , sont naturellement limitées entre 0 et 1 et 0 et 2π , respectivement. Les vitesses, par contre, dépendent de la dynamique du système mécanique. Pour éviter que l'évaluation des forces dépasse les plages cinématiques prédéfinies, les bornes de $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$ doivent être assez étendues.

En plus, au lieu d'utiliser les polynômes de Chebyshev tels que donnés par 5.23, mieux vaut se servir de leur équivalent polynomial :

$$T_n(\zeta) = \zeta^n - \binom{n}{2} \zeta^{n-2}(1 - \zeta^2) + \binom{n}{4} \zeta^{n-4}(1 - \zeta^2)^2 - \dots \quad (5.25)$$

En effet, l'utilisation de l'équation 5.25 permet un certain niveau d'extrapolation lors de l'évaluation des forces hydrodynamiques, ce qui n'est pas possible avec l'équation 5.23 à cause de la limitation de ζ entre -1 et 1. Quelques polynômes de Chebyshev dérivés de cette formule sont présentés dans l'annexe A.

Afin de déterminer les coefficients $C_{i,j,k,l}$, considérons l'intégrale suivante :

$$A_{m,n,o,p} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\eta, \psi, \kappa, \xi) T_m(\eta) T_n(\psi) T_o(\kappa) T_p(\xi) w(\eta) w(\psi) w(\kappa) w(\xi) d\eta d\psi d\kappa d\xi \quad (5.26)$$

En remplaçant le terme $f(\eta, \psi, \kappa, \xi)$, lequel représente de manière générique les efforts f_{rv} et f_{tv} , par les approximations données par 5.22, on obtient :

$$\begin{aligned} A_{m,n,o,p} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 C_{0,0,0,0} T_0(\eta) T_m(\eta) T_0(\psi) T_n(\eta) T_0(\kappa) T_o(\kappa) T_0(\xi) T_p(\xi) \\ & w(\eta) w(\psi) w(\kappa) w(\xi) d\eta d\psi d\kappa d\xi + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^{P_i} \sum_{j=1}^{P_j} \sum_{k=1}^{P_k} \sum_{l=1}^{P_l} C_{i,j,k,l} \\ & T_i(\eta) T_m(\eta) T_j(\psi) T_n(\psi) T_k(\kappa) T_o(\kappa) T_l(\xi) T_p(\xi) w(\eta) w(\psi) w(\kappa) w(\xi) d\eta d\psi d\kappa d\xi \end{aligned} \quad (5.27)$$

L'utilisation des propriétés d'orthogonalité des polynômes de Chebyshev, équation 5.24, fournit :

$$A_{0,0,0,0} = \pi^4 C_{0,0,0,0} \quad (5.28)$$

et :

$$\begin{aligned} A_{m,n,o,p} &= \sum_{i=1}^{P_i} \sum_{j=1}^{P_j} \sum_{k=1}^{P_k} \sum_{l=1}^{P_l} C_{i,j,k,l} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \delta_{mi} \delta_{nj} \delta_{ok} \delta_{pl} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 C_{m,n,o,p} \quad \text{pour } m, n, o, p \neq 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

où δ est le delta de Kronecker.

A partir des équations 5.27, 5.28 et 5.29, l'expression des coefficients $C_{i,j,k,l}$ s'écrit :

$$C_{i,j,k,l} = \frac{16}{(1 + \delta_{i0})(1 + \delta_{j0})(1 + \delta_{k0})(1 + \delta_{l0})\pi^4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\eta, \psi, \kappa, \xi) T_i(\eta)T_j(\psi)T_k(\kappa)T_l(\xi)w(\eta)w(\psi)w(\kappa)w(\xi)d\eta d\psi d\kappa d\xi \quad (5.30)$$

La résolution de 5.30 peut s'exécuter à l'aide de la méthode de quadrature de Gauss-Chebyshev. Soient,

$$\begin{aligned} \eta_q &= \cos\left(\frac{2q-1}{2Q_\eta}\pi\right) & q &= 1, \dots, Q_\eta \\ \psi_r &= \cos\left(\frac{2r-1}{2Q_\psi}\pi\right) & r &= 1, \dots, Q_\psi \\ \kappa_s &= \cos\left(\frac{2s-1}{2Q_\kappa}\pi\right) & s &= 1, \dots, Q_\kappa \\ \xi_t &= \cos\left(\frac{2t-1}{2Q_\xi}\pi\right) & t &= 1, \dots, Q_\xi \end{aligned} \quad (5.31)$$

les coordonnées des points d'intégration, au nombre de Q_η , Q_ψ , Q_κ et Q_ξ dans chaque direction. En évaluant les polynômes de Chebyshev et les fonctions de pondération en ces points, l'équation 5.30 devient :

$$C_{i,j,k,l} = \frac{16}{Q_\eta(1 + \delta_{i0})Q_\psi(1 + \delta_{j0})Q_\kappa(1 + \delta_{k0})Q_\xi(1 + \delta_{l0})} \sum_{q=1}^{Q_\eta} \sum_{r=1}^{Q_\psi} \sum_{s=1}^{Q_\kappa} \sum_{t=1}^{Q_\xi} f(\eta, \psi, \kappa, \xi) \cos\left(\frac{2q-1}{2Q_\eta}i\pi\right) \cos\left(\frac{2r-1}{2Q_\psi}j\pi\right) \cos\left(\frac{2s-1}{2Q_\kappa}k\pi\right) \cos\left(\frac{2t-1}{2Q_\xi}l\pi\right) \quad (5.32)$$

Pour résoudre l'équation ci-dessus, on doit avoir les valeurs des efforts f aux points de quadrature. Par conséquent, lors de la génération de l'ensemble des forces, les variables ε , ϕ , $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$ sont définies directement sur les points de quadrature, afin d'éliminer la nécessité d'interpoler ou d'extrapoler les données du lissage.

5.1.3 Réduction des modèles

Dans les approximations obtenues pour f_{rv} et f_{rt} , il existe des variables indépendantes dont l'influence dans le modèle peut s'avérer négligeable. Sachant qu'il est toujours convenable d'avoir des expressions les plus petites possible afin de rendre plus rapide l'évaluation des forces visqueuses du SqF, il est intéressant d'employer une technique d'identification dite *stepwise*. Cette technique permet

d'inclure dans le modèle seulement les variables auxquelles il est sensible, sans une perte de précision importante dans l'approximation.

Dans le cas du lissage par régression linéaire, la procédure *stepwise* s'effectue à l'aide d'un algorithme spécifique : l'élimination de Gauss-Jordan modifiée. Bien que l'application de cet algorithme au cas du lissage par polynômes de Chebyshev ne puisse pas être envisagée, puisque les coefficients β_p et $C_{i,j,k,l}$ sont estimés de manière différente, on peut utiliser le même principe pour sélectionner les termes les plus pertinents pour la projection des efforts.

5.1.3.1 Régression linéaire *stepwise*

Si la régression linéaire est accomplie en résolvant directement le système d'équations 5.16, ou 5.20, toutes les variables indépendantes X_p sont incluses dans le modèle. L'idée fondamentale de la régression *stepwise* est de construire l'approximation en prenant une variable indépendante à la fois. Le choix de la variable à introduire dans le modèle est basé sur la contribution relative à la somme des carrés de la régression [162] :

$$SSR = \sum_{p=1}^P \beta_p \left(\sum_{n=1}^N X_p^n f_n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_p^n \sum_{n=1}^N f_n \right) \quad (5.33)$$

Le premier pas de la régression *stepwise* consiste à définir les variables indépendantes du problème. Ensuite, la première à être intégrée au modèle est celle dont la contribution à la variation de la variable dépendante est la plus importante. La mesure de cette contribution est fournie par le carré du coefficient de corrélation simple [162], noté $r_{fX_p}^2$ et donné par l'équation 5.19. Soit X_{w1} la première variable indépendante introduite dans le modèle. La fonction de régression s'écrit alors :

$$\tilde{f}_n^{(1)} = \beta_0^{(1)} + \beta_1^{(1)} X_{w1}^n \quad (5.34)$$

La somme des carrés de cette régression peut s'exprimer :

$$SSR^{(1)} = r_{fX_{w1}}^2 SST \quad (5.35)$$

où $SST = \sum_{n=1}^N (f_n)^2 - \frac{1}{N} (\sum_{n=1}^N f_n)^2$ est la somme des carrés de la variable dépendante. Ainsi, en choisissant la variable dont le carré du coefficient de corrélation simple est le plus important, on maximise la somme des carrés de la régression SSR . Cela revient à minimiser la somme des carrés des résidus, ce qui indique un lissage optimal à une variable.

On rajoute ensuite une deuxième variable indépendante au modèle. En cherchant toujours à maximiser SSR , le choix de cette variable s'appuie sur les coefficients de corrélation partielle du premier

ordre, noté $r_{fX_p.X_{w1}}$, $p \neq w1$. Ces coefficients traduisent la participation des variables indépendantes restantes dans la régression, hors l'influence de X_{w1} . Soit,

$$\epsilon_n^{(1)} = f_n - \beta_0^{(1)} - \beta_1^{(1)} X_{w1}^n \quad (5.36)$$

les N résidus de la régression de f sur X_{w1} . Si l'on calcule de manière analogue des régressions des variables X_p sur X_{w1} , on obtient $p - 1$ vecteurs de résidus associés aux n réalisations :

$$\check{\epsilon}_n^{(p)} = X_p^n - \check{\beta}_0^{(p)} - \check{\beta}_1^{(p)} X_{w1}^n \quad (5.37)$$

Les coefficients de corrélation simple entre les ensembles de résidus $(\epsilon^{(1)}, \check{\epsilon}^{(p)})$ fournissent une mesure de la linéarité entre f et chaque X_p , mise à part la dépendance linéaire entre f et X_{w1} . Ainsi, la deuxième variable à inclure dans le modèle, X_{w2} , est celle dont le carré du coefficient de corrélation partielle du premier ordre, $(r_{fX_{w2}.X_{w1}})^2$, est le plus important. La proportion de la variation totale de la variable dépendante prise en compte par X_{w2} , hors l'influence de X_{w1} , est donnée par [162] :

$$r_{fX_{w2}}^2 = (1 - r_{fX_{w1}}^2) r_{fX_{w2}.X_{w1}}^2 \quad (5.38)$$

La fonction de régression après l'introduction de la variable X_{w2} devient :

$$\tilde{f}_n^{(2)} = \beta_0^{(2)} + \beta_1^{(2)} X_{w1}^n + \beta_2^{(2)} X_{w2}^n \quad (5.39)$$

et la somme des carrés de la régression :

$$SSR^{(2)} = (r_{fX_{w1}}^2 + r_{fX_{w2}}^2) SST \quad (5.40)$$

On peut poursuivre ce processus jusqu'à la prise en compte de toutes les variables indépendantes, qui sont donc introduites dans le modèle selon l'ordre *stepwise*. Un critère doit être néanmoins établi pour que le processus s'arrête au moment où toutes les variables ayant une influence significative dans la fonction de régression aient été sélectionnées. Ce critère est normalement déterminé suivant un test d'hypothèse, qui consiste à vérifier qu'à la m ème étape de la régression *stepwise*, les $P - m$ variables indépendantes restantes n'exercent pas d'influence sur la variable dépendante, en d'autres termes, que les coefficients $\beta_p^{(m)}$, $p = m + 1, \dots, P$ sont nuls.

SMILLIE [162] propose des tests statistiques basés soit sur un paramètre d'une distribution de Fisher-Snedécour soit à partir d'un coefficient de corrélation multiple. Le premier critère requiert des

résidus et possédant une distribution normale avec une valeur moyenne nulle et une variance constante. En ce qui concerne le test basé sur le coefficient de corrélation multiple, il est valable si les valeurs de la variable dépendante sont stochastiques.

Au lieu d'utiliser un test statistique, nous définissons un critère d'arrêt portant sur la variation de la somme des carrés des résidus entre chaque étape de la régression. Le processus s'arrête lorsque cette variation devient inférieure à une certaine valeur, ce qui indique que l'ajout d'une nouvelle variable n'améliorera pas davantage la précision de l'approximation.

Outre le test de l'hypothèse que les coefficients $\beta_p^{(m)}$, $p = m + 1, \dots, P$ sont négligeables, on pourrait encore vérifier si à l'étape m de la régression, l'influence des m variables indépendantes déjà incluses dans le modèle reste toujours importante [7]. Cette vérification peut également se réaliser à l'aide d'un test statistique suivant une loi de Fisher-Snédecor.

La régression *stepwise* peut être menée de manière sensiblement plus efficace que celle décrite plus haut, grâce à l'application d'une forme modifiée de l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan au système d'équations 5.16, ou 5.20. Dans la méthode de Gauss-Jordan classique [164], on prend comme pivot les éléments de la diagonale principale de la matrice. Dans le contexte de la régression linéaire, l'ordre dans lequel les pivots sont choisis correspond à l'ordre d'introduction des variables indépendantes dans le modèle. Ainsi, au lieu de prendre systématiquement les éléments le long de la diagonale principale, les pivots doivent être choisis selon l'ordre *stepwise*. A la m ème étape de la régression *stepwise*, l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan modifié se résume à 5 pas principaux :

1. Choisir la variable indépendante X_{wm} , $wm \neq wp$, $p = 1, 2, \dots, m - 1$, dont le terme $r_{fX_{wm}}^2$ est le plus important, et l'introduire dans la régression.
2. Echanger les colonnes m et wm ainsi que les lignes m et wm de la matrice des coefficients de corrélation entre les variables dépendantes au cas où $wm \neq m$.
3. Exécuter la m ème étape de la méthode Gauss-Jordan.
4. Calculer les coefficients $\beta^{(m)}$ et la somme des carrés des résidus de la régression.
5. Vérifier le critère d'arrêt.

Outre la capacité à réduire la taille des modèles des forces visqueuses, la procédure *stepwise* est moins susceptible que la régression directe d'avoir des instabilités numériques. En effet, quand il existe des variables indépendantes, X_p , dont l'influence sur la variation de la variable dépendante, f , est négligeable, les coefficients de corrélation simple associés, r_{fX_p} , sont très faibles, ce qui engendre des problèmes de conditionnement lors de la résolution du système d'équations 5.16, ou 5.20. La régression *stepwise* n'éprouve pas ce genre de problème, puisque seulement les variables indépendantes pertinentes au modèle sont prises en compte.

5.1.3.2 Réduction du modèle à polynômes de Chebyshev

Comme la régression linéaire directe, la projection des forces visqueuses sur les polynômes de Chebyshev peut introduire dans le modèle des variables indépendantes dont l'influence est très faible, voire

négligeable. En comparant les deux méthodes de lissage, on observe que les variables indépendantes X_p , $p = 1, 2, \dots, P$ correspondent aux combinaisons $T_i(\eta)T_j(\phi)T_k(\kappa)T_l(\xi)$, avec $i, j, k, l = 0, 1, 2, \dots$

Le principe de la régression linéaire *stepwise* peut également être appliqué aux modèles construits avec les polynômes de Chebyshev. Il y a toutefois une différence très importante : les coefficients $C_{i,j,k,l}$ n'ont pas à être recalculés à chaque étape de la procédure *stepwise*. En effet, grâce à l'orthogonalité des polynômes de Chebyshev, une fois déterminés au travers de la quadrature Gauss-Chebyshev, ces coefficients ne sont plus altérés par l'ajout ou par la suppression d'un terme des séries données par 5.22. Il en résulte un algorithme considérablement plus simple que l'élimination Gauss-Jordan modifiée pour la réduction du modèle à polynômes de Chebyshev.

Soit l'ensemble des variables indépendantes défini par :

$$\begin{aligned}
X_1 &= T_1(\eta)T_0(\psi)T_0(\kappa)T_0(\xi) \\
&\vdots \\
X_{P_i} &= T_{P_i}(\eta)T_0(\psi)T_0(\kappa)T_0(\xi) \\
X_{P_i+1} &= T_0(\eta)T_1(\psi)T_0(\kappa)T_0(\xi) \\
X_{P_i+2} &= T_1(\eta)T_1(\psi)T_0(\kappa)T_0(\xi) \\
&\vdots \\
X_{2P_i} &= T_{P_i}(\eta)T_1(\psi)T_0(\kappa)T_0(\xi) \\
&\vdots \\
X_{(P_i+1)(P_j+1)-1} &= T_{P_i}(\eta)T_{P_j}(\psi)T_0(\kappa)T_0(\xi) \\
X_{(P_i+1)(P_j+1)} &= T_0(\eta)T_0(\psi)T_1(\kappa)T_0(\xi) \\
&\vdots \\
X_{(P_i+1)(P_j+1)(P_k+1)(P_l+1)-1} &= T_{P_i}(\eta)T_{P_j}(\psi)T_{P_k}(\kappa)T_{P_l}(\xi)
\end{aligned} \tag{5.41}$$

et qui s'écrit de manière générale :

$$X_p = T_i(\eta)T_j(\psi)T_k(\kappa)T_l(\xi) \tag{5.42}$$

Les variables cinématiques normalisées η , ψ , κ et ξ étant définies sur les points de quadrature de Gauss-Chebyshev selon les expressions 5.31, les polynômes de Chebyshev peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
T_i(\eta_q) &= \cos \left(i \arccos \left(\cos \left(\frac{2q-1}{2Q_\eta} \pi \right) \right) \right) = \cos \left(i \frac{2q-1}{2Q_\eta} \pi \right), \quad q = 1, \dots, Q_\eta \\
T_j(\psi_r) &= \cos \left(j \arccos \left(\cos \left(\frac{2r-1}{2Q_\psi} \pi \right) \right) \right) = \cos \left(j \frac{2r-1}{2Q_\psi} \pi \right), \quad r = 1, \dots, Q_\psi \\
T_k(\kappa_s) &= \cos \left(k \arccos \left(\cos \left(\frac{2s-1}{2Q_\kappa} \pi \right) \right) \right) = \cos \left(k \frac{2s-1}{2Q_\kappa} \pi \right), \quad s = 1, \dots, Q_\kappa \\
T_l(\xi_t) &= \cos \left(l \arccos \left(\cos \left(\frac{2t-1}{2Q_\xi} \pi \right) \right) \right) = \cos \left(l \frac{2t-1}{2Q_\xi} \pi \right), \quad t = 1, \dots, Q_\xi
\end{aligned} \tag{5.43}$$

En ordonnant les $N = Q_\eta Q_\psi Q_\kappa Q_\xi$ réalisations des variables indépendantes de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
X_p^1 &= T_i(\eta_1) T_j(\psi_1) T_k(\kappa_1) T_l(\xi_1) \\
&\vdots \\
X_p^{Q_\eta} &= T_i(\eta_{Q_\eta}) T_j(\psi_1) T_k(\kappa_1) T_l(\xi_1) \\
X_p^{Q_\eta+1} &= T_i(\eta_1) T_j(\psi_2) T_k(\kappa_1) T_l(\xi_1) \\
X_p^{Q_\eta+2} &= T_i(\eta_2) T_j(\psi_2) T_k(\kappa_1) T_l(\xi_1) \\
&\vdots \\
X_p^{Q_\eta Q_\psi} &= T_i(\eta_{Q_\eta}) T_j(\psi_{Q_\psi}) T_k(\kappa_1) T_l(\xi_1) \\
X_p^{Q_\eta Q_\psi+1} &= T_i(\eta_1) T_j(\psi_1) T_k(\kappa_2) T_l(\xi_1) \\
X_p^{Q_\eta Q_\psi+2} &= T_i(\eta_2) T_j(\psi_1) T_k(\kappa_2) T_l(\xi_1) \\
&\vdots \\
X_p^N &= T_i(\eta_{Q_\eta}) T_j(\psi_{Q_\psi}) T_k(\kappa_{Q_\kappa}) T_l(\xi_{Q_\xi})
\end{aligned} \tag{5.44}$$

les termes $\bar{X}_{a,b} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_{a,b}^n$ et $\sum_{n=1}^N X_a^n X_b^n$ de l'expression du coefficient de corrélation simple entre les variables indépendantes, équation 5.18, peuvent s'écrire :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_{a,b}^n = \frac{1}{N} \sum_{r,s,t} \left\{ \left[\sum_{q=1}^{Q_\eta} T_i(\eta_q) \right] T_j(\psi_r) T_k(\kappa_s) T_l(\xi_t) \right\} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N X_a^n X_b^n &= \sum_{n=1}^N [T_i(\eta) T_j(\psi) T_k(\kappa) T_l(\xi)]_a^n [T_i(\eta) T_j(\psi) T_k(\kappa) T_l(\xi)]_b^n \\
&= \sum_{r,s,t} \left\{ \left[\sum_{q=1}^{Q_\eta} T_{ia}(\eta_q) T_{ib}(\eta_q) \right] [T_j(\psi_r) T_k(\kappa_s) T_l(\xi_t)]_a [T_j(\psi_r) T_k(\kappa_s) T_l(\xi_t)]_b \right\}
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Or, compte tenu de la première expression de 5.43 :

$$\sum_{q=1}^{Q_\eta} T_i(\eta_q) \equiv \int_0^\pi \cos(i\vartheta) d\vartheta = 0, \quad i = 0, 1, \dots, P_i \quad (5.47)$$

$$\sum_{q=1}^{Q_\eta} T_{i_a}(\eta_q) T_{i_b}(\eta_q) \equiv \int_0^\pi \cos(i_a\vartheta) \cos(i_b\vartheta) d\vartheta = 0, \quad i_a, i_b = 0, 1, \dots, P_i, \quad i_a \neq i_b \quad (5.48)$$

avec,

$$\vartheta = \left(\frac{2q-1}{2Q_\eta} \pi \right), \quad q = 1, \dots, Q_\eta$$

On s'aperçoit ainsi que la matrice des coefficients de corrélation simple entre les variables indépendantes est diagonale. En d'autres termes, il n'existe aucune association entre les variables indépendantes X_a et X_b , pour $a, b = 1, 2, \dots, P$ et $a \neq b$. Cela découle de l'orthogonalité des polynômes de Chebyshev et de la normalisation des variables généralisées du problème.

Cette constatation nous permet de réduire le modèle des forces visqueuses, suivant le principe de la régression *stepwise*, de manière très simple. Il suffit de réordonner de façon décroissante (ordre *stepwise*) le vecteur des coefficients de corrélation simple entre la variable dépendante et les variables indépendantes. Le critère d'arrêt du processus de sélection des combinaisons $T_i(\eta)T_j(\phi)T_k(\kappa)T_l(\xi)$ et de calcul des coefficients $C_{i,j,k,l}$ est le même que celui défini auparavant pour la régression linéaire.

5.1.4 Comparaison des techniques de lissage proposées

Pour illustrer et comparer l'application des deux méthodes de lissage, on prendra comme exemple un SqF à extrémités ouvertes avec les caractéristiques suivantes :

$L=30$ [mm] : longueur de l'amortisseur;

$R=65$ [mm] : rayon de l'amortisseur;

$C=0,3$ [mm] : jeu radial de l'amortisseur;

$\mu=0,007$ [Pa.s] : viscosité dynamique du fluide amortisseur.

L'introduction d'huile est effectuée par une gorge circonférentielle au milieu de l'amortisseur, la pression d'alimentation ayant une valeur supposée constante de 2 [bar]. Il est important de faire remarquer que cette configuration est axisymétrique. La variable ϕ , par conséquent, n'intervient pas dans le problème et le lissage fournit des expressions des forces visqueuses fonctions de ε , $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$, seulement. Dans ce cas, les approximations de la projection sur polynômes de Chebyshev et de la régression linéaire s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}
f_{rv}(\varepsilon, \dot{e}, \dot{\phi}) &\simeq \sum_{i=0}^{P_i^r} \sum_{k=0}^{P_k^r} \sum_{l=0}^{P_l^r} C_{i,k,l}^r T_i(\varepsilon) T_k(\dot{e}) T_l(\dot{\phi}) = \tilde{f}_{rv}(\varepsilon, \dot{e}, \dot{\phi}) \\
f_{tv}(\varepsilon, \dot{e}, \dot{\phi}) &\simeq \sum_{i=0}^{P_i^t} \sum_{k=0}^{P_k^t} \sum_{l=0}^{P_l^t} C_{i,k,l}^t T_i(\varepsilon) T_k(\dot{e}) T_l(\dot{\phi}) = \tilde{f}_{tv}(\varepsilon, \dot{e}, \dot{\phi})
\end{aligned} \tag{5.49}$$

et :

$$\begin{aligned}
f_{rv}(\varepsilon, \dot{e}, \dot{\phi}) &= br_0 + br_1 X_1 + br_2 X_2 + \dots + br_P X_P + \epsilon_r \\
f_{tv}(\varepsilon, \dot{e}, \dot{\phi}) &= bt_0 + bt_1 X_1 + bt_2 X_2 + \dots + bt_P X_P + \epsilon_t
\end{aligned} \tag{5.50}$$

avec,

$$X_p = g_i(\varepsilon) g_k(\dot{e}) g_l(\dot{\phi}), \quad i = 0, 1, \dots, P_i; \quad k = 0, 1, \dots, P_k; \quad l = 0, 1, \dots, P_l; \tag{5.51}$$

Nous tenons à souligner que pour des valeurs données de ε , \dot{e} et $\dot{\phi}$, la force tangentielle est une fonction impaire de $\dot{\phi}$, tandis que la force radiale en est une fonction paire. De ce fait, le lissage peut être réduit à des valeurs soit positives soit négatives de la vitesse de précession $\dot{\phi}$.

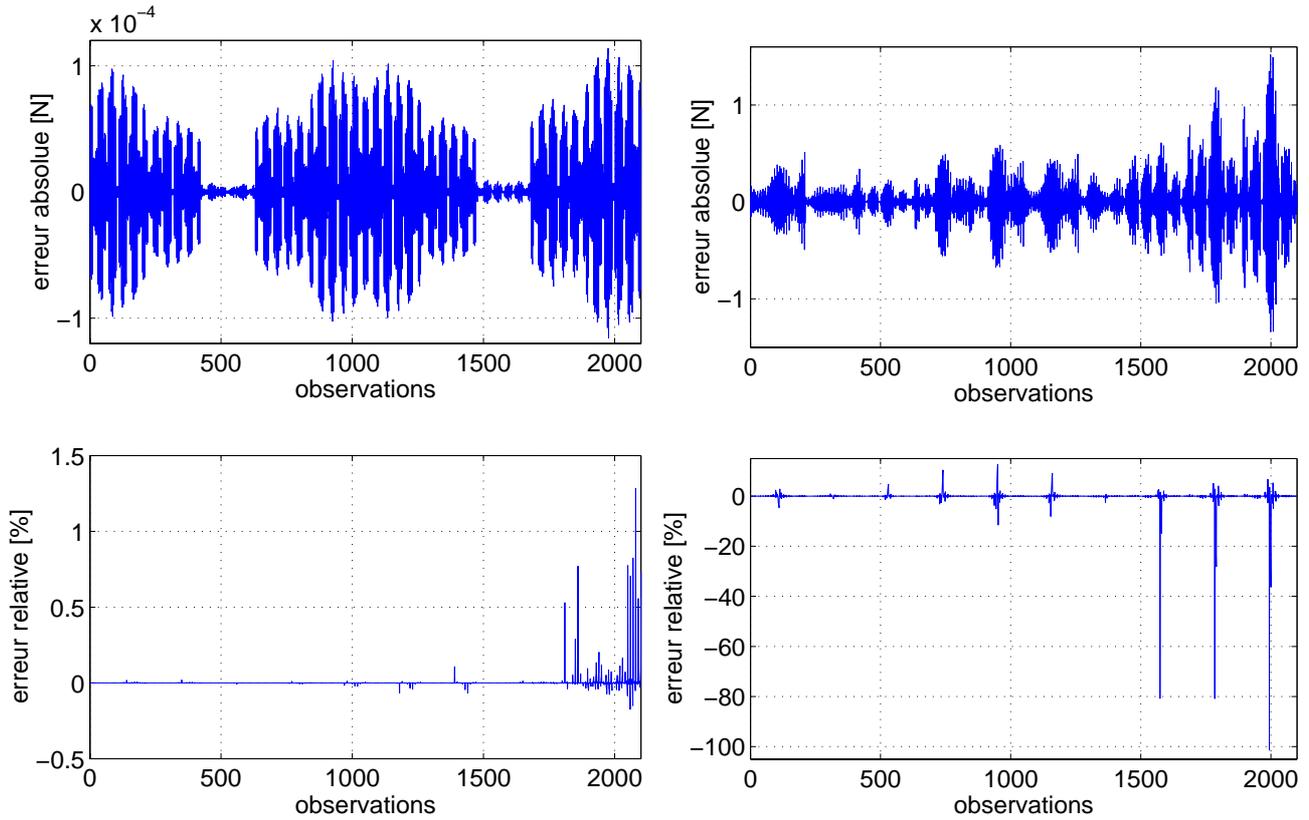
Les données pour le lissage ont été générées en résolvant l'équation de Reynolds par différences finies avec un maillage de 25 points dans la direction axiale et 84 points dans la direction circonférentielle. La cavitation a été prise en compte selon la condition de cavitation de Gumbel modifiée, avec une pression de vaporisation de 0,01 [bar]. Les conditions cinématiques ont été définies en fixant les bornes de ε , \dot{e} et $\dot{\phi}$ et le nombre de points de Gauss dans chaque direction. Les valeurs suivantes ont été attribuées :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{min} &= 0; & \varepsilon_{max} &= 0,9; \\
\dot{e}_{min} &= -0,5 \text{ [m/s]}; & \dot{e}_{max} &= 0,5 \text{ [m/s]}; \\
\dot{\phi}_{min} &= 0; & \dot{\phi}_{max} &= 2000 \text{ [rad/s]}; \\
Q_\eta &= 10; & Q_\kappa &= 21; & Q_\xi &= 10;
\end{aligned}$$

Prenons d'abord comme variables indépendantes pour le lissage par régression linéaire les monômes :

$$X_p = \varepsilon^i \dot{e}^k \dot{\phi}^l \tag{5.52}$$

La qualité du lissage est très sensible aux paramètres P_i , P_k et P_l , lesquels correspondent aux puissances maximales des monômes de la régression linéaire et aux ordres de troncatures des polynômes de Chebyshev. En général, plus ils sont élevés, plus précis est le lissage.

(a) Force tangentielle - $P_i = 5; P_k = 5; P_l = 2$ (b) Force radiale - $P_i = 8; P_k = 4; P_l = 2$ FIG. 5.1: *Ecart entre les deux techniques de lissage*

L'inspection de la qualité des approximations peut être réalisée de deux manières distinctes : au travers de graphiques fonctions de deux variables pour une valeur fixée de la troisième (figure 5.2), ou sous forme vectorielle (figure 5.6). Bien que d'interprétation plus difficile, cette dernière technique de visualisation permet d'analyser tout le domaine de lissage à partir d'une seule courbe.

Les résultats obtenus montrent que les deux techniques de lissage fournissent des approximations quasiment identiques, comme le met en évidence la figure 5.1, si l'on effectue la régression linéaire sans pondération. Les écarts plus importants observés pour la force radiale découlent des puissances maximales plus élevées, ce qui engendre des problèmes de conditionnement lors de la résolution du système d'équations algébriques de la régression linéaire. Les erreurs relatives importantes sont une conséquence des faibles valeurs d'effort pour quelques conditions cinématiques.

Analysons maintenant la qualité des approximations polynomiales, en les comparant avec les forces calculées par différences finies. Les figures 5.2 et 5.3 présentent la force tangentielle fonction de ε et $\dot{\varepsilon}$ pour $\dot{\phi} \approx 0$ et $\dot{\phi} \approx 2000$, respectivement. On remarque que l'approximation est assez précise à haut niveau d'effort, tandis que des erreurs relatives considérables existent pour des valeurs faibles de la force tangentielle, f_{tv} .

Afin d'apporter une amélioration au lissage principalement à faible niveau d'effort, on dispose de la

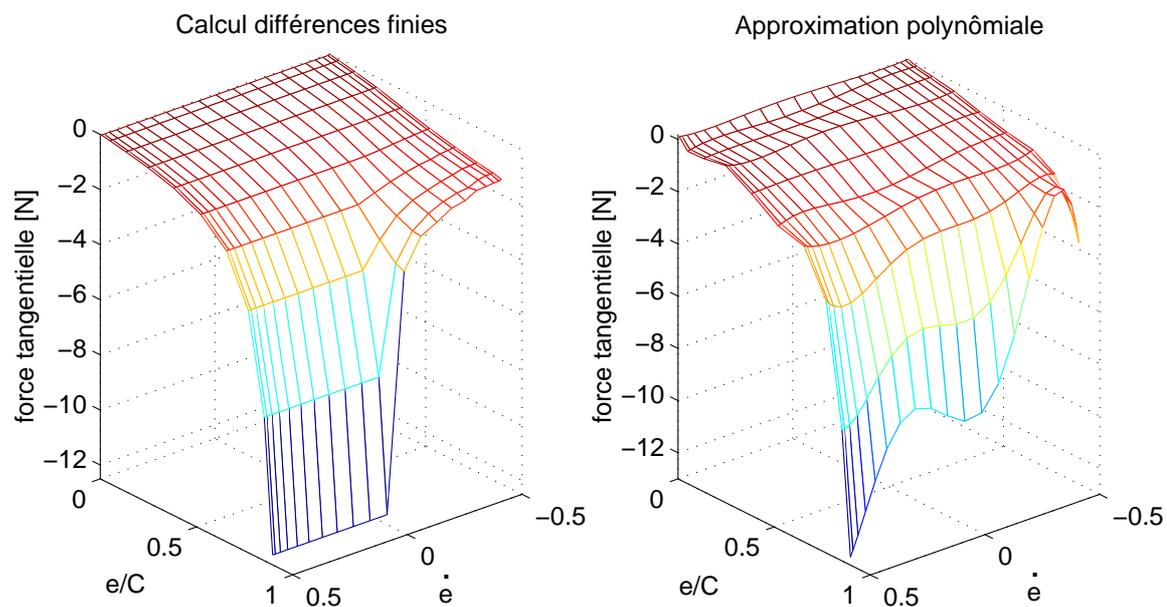


FIG. 5.2: Force tangentielle à $\dot{\phi} \approx 0$ - $P_i = 5$; $P_k = 5$; $P_l = 2$

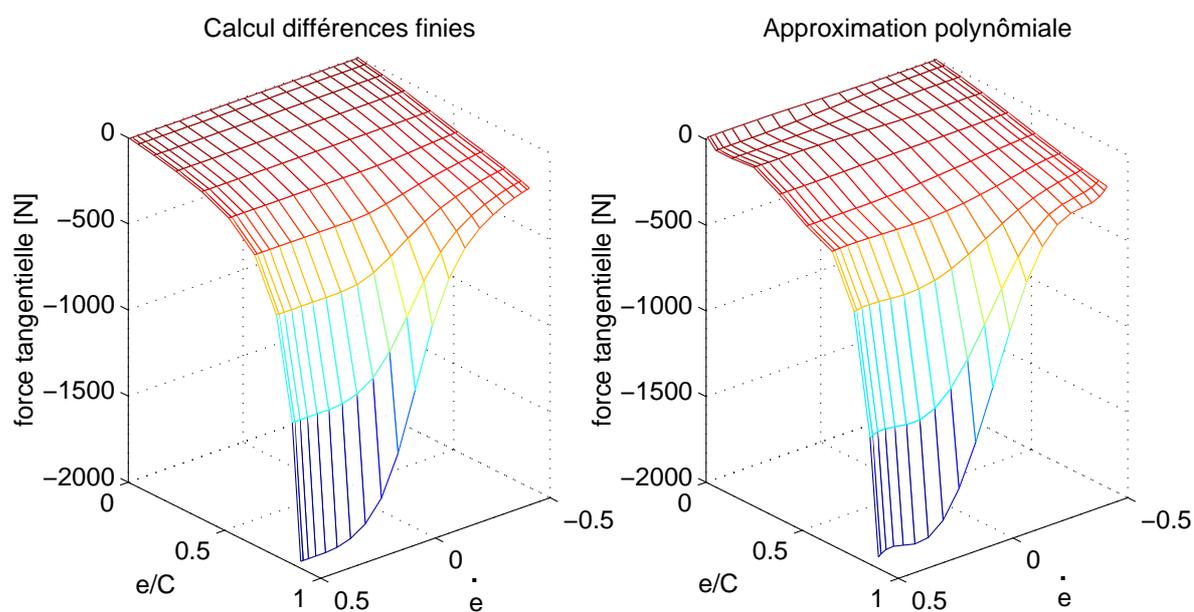


FIG. 5.3: Force tangentielle à $\dot{\phi} \approx 2000$ - $P_i = 5$; $P_k = 5$; $P_l = 2$

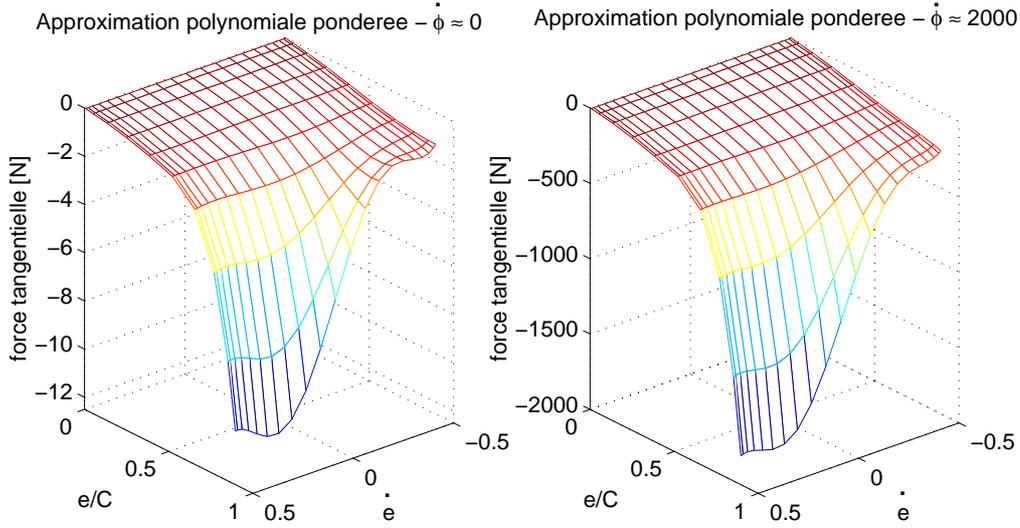


FIG. 5.4: Approximation pondérée de la force tangentielle à $\dot{\phi} \approx 0$ et $\dot{\phi} \approx 2000$ - $P_i = 5; P_k = 5; P_l = 2$

régression linéaire pondérée, laquelle s'applique à partir de l'équation 5.20. Les résultats obtenus sont exposés dans la figure 5.4. On constate une nette évolution du lissage pour $\dot{\phi} \approx 0$, sans pour autant pénaliser de manière sensible l'approximation à $\dot{\phi} \approx 2000$. Contrairement à la régression linéaire, le lissage par polynômes de Chebyshev ne permet pas de pondérer le poids des observations lors de l'identification. Ainsi, la projection sur ces polynômes suivant la méthode de Gauss-Chebyshev conduit nécessairement à une approximation de meilleure qualité à haut niveau d'effort en détriment de la description des forces de faible valeur.

La possibilité de pondérer le poids des observations est un premier avantage de la régression linéaire. Le deuxième concerne sa souplesse au niveau du choix de la base de fonctions sur laquelle les forces sont projetées. La description des forces hydrodynamiques visqueuses du SqF à l'aide de polynômes peut donner des résultats satisfaisants. Cependant, la prise en compte de la forte non linéarité par rapport à ε requiert un ordre de troncature important dans cette direction, surtout pour l'approximation de la force radiale. Il est intéressant d'observer que la non linéarité en question possède la singularité suivante :

$$f_{rv,tv} \rightarrow \infty \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 1 \text{ pour } \dot{e} > 0.$$

Cette singularité est également constatée pour des valeurs négatives de la vitesse radiale, \dot{e} , si la vitesse de précession, $\dot{\phi}$, est assez élevée. Afin de mieux décrire cette non linéarité, au lieu de définir les variables indépendantes comme des combinaisons de monômes, nous proposons une base de fonctions de la forme :

$$X_p = \frac{1}{(1-\varepsilon)^i} e^k \dot{\phi}^l \quad (5.53)$$

La figure 5.5 présente la force radiale fonction de ε et \dot{e} pour $\dot{\phi} \approx 2000$, calculée par différences

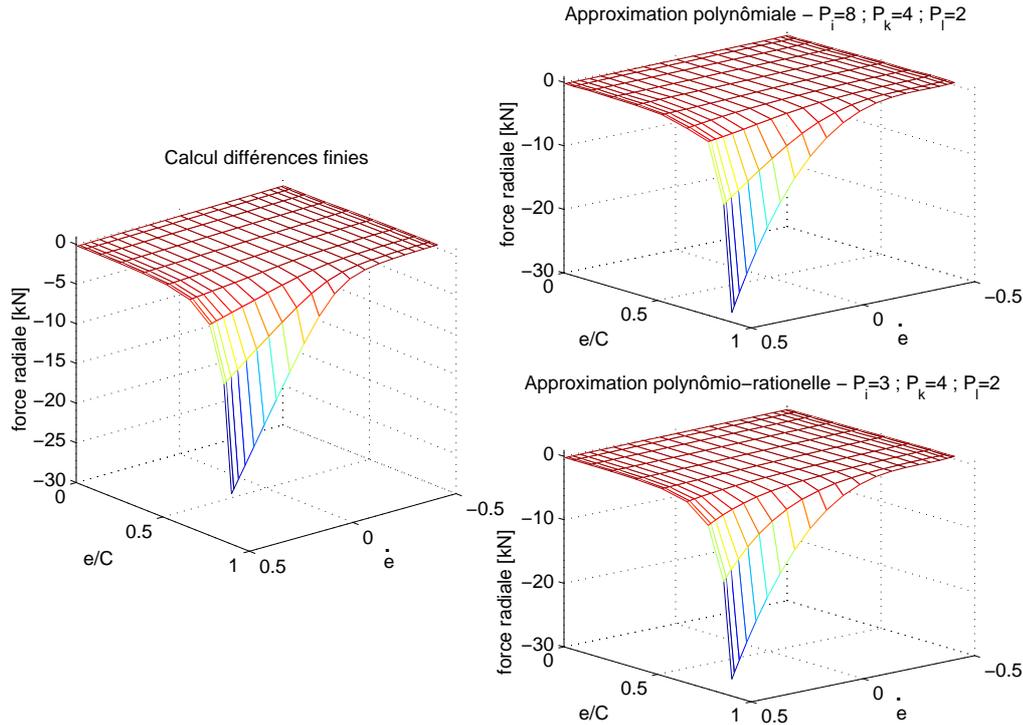


FIG. 5.5: Approximation pondérée de la force radiale - $\dot{\phi} \approx 2000$

finies et par les approximations obtenues au travers de la régression linéaire pondérée, en utilisant des fonctions polynomiales et polynômio-rationnelles. Il en ressort de la comparaison des trois courbes que les deux approximations décrivent assez bien la force radiale à la vitesse considérée. Le lissage polynômio-rationnel nécessite toutefois moins de variables indépendantes pour atteindre une qualité similaire, voire supérieure, à celle associée au lissage polynomial. Cette différence de qualité s'accroît si l'on augmente davantage la borne supérieure de l'excentricité adimensionnelle, ε_{max} .

Sachant que le comportement des forces visqueuses du SqF est très différent selon le signe de la vitesse radiale, on pourrait augmenter la précision des approximations en menant indépendamment des lissages dans des plages de valeurs de \dot{e} positive et négative. Ce faisant, on découperait le domaine d'identification, et deux expressions pour chaque composante, radiale et tangentielle, de la force visqueuse seraient déduites. Cependant, l'utilisation de cette technique crée une discontinuité à $\dot{e} = 0$, qui peut pénaliser la précision des simulations dynamiques, qu'elles soient dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Il convient de souligner encore que, si l'on sait au préalable que les orbites du SqF seront circulaires et centrées, des lissages à 2 variables, ε et $\dot{\phi}$, peuvent fournir des expressions assez simples pour les forces hydrodynamiques. Un traitement analytique du problème pourrait être alors envisagé.

La qualité du lissage peut être appréciée globalement à l'aide du graphique de l'erreur des approximations sur les N observations, arrangées sous forme vectorielle, comme le montre la figure 5.6. Si le lissage n'est pas pondéré, l'erreur absolue doit être analysée, tandis que l'erreur relative est évidemment plus parlante lorsque la régression linéaire est accomplie en pondérant toutes les données. Il convient d'avoir également des paramètres statistiques pour estimer quantitativement la précision

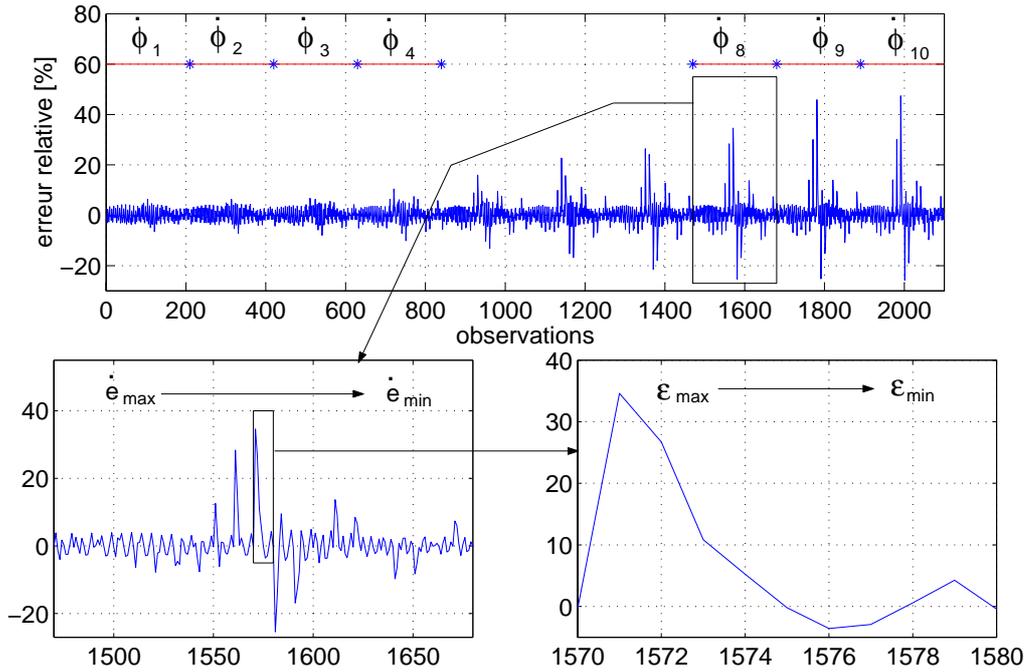


FIG. 5.6: Force tangentielle lissée par régression linéaire pondérée - $P_i = 5$; $P_k = 5$; $P_l = 3$

des approximations. La somme des carrés des résidus permet de comparer deux approximations pour le même ensemble de données, mais son analyse seule n'apporte pas d'informations directes à propos de la qualité du lissage. La moyenne des écarts absolus ou relatifs, par contre, en fournit une indication d'interprétation très simple. Pour l'approximation de la figure 5.6, par exemple, l'erreur relative moyenne vaut 2,6% tandis que l'écart absolu moyen est de 4,3 [N].

Jusqu'ici, toutes les variables indépendantes ont été prises en compte dans la construction des modèles. L'expression de la force tangentielle de la figure 5.6, par exemple, comprend $P = 6.6.4 = 144$ termes. Des expressions réduites peuvent être obtenues en utilisant la régression *stepwise*. La figure 5.7 présente l'évolution de la somme des carrés des résidus, SSE , au fur et à mesure que les variables indépendantes sont introduites dans l'approximation. Le critère d'arrêt a été fixé à 0,1% sur la variation de SSE entre deux étapes. De l'ensemble des variables indépendantes de l'approximation polynômio-rationnelle, seulement 43 sont retenues dans la régression *stepwise*. L'écart relatif moyen monte de 2,6 à 2,7% seulement et l'erreur absolue moyenne de 4,3 à 4,8 [N]. Outre le temps appréciable épargné lors des simulations dynamiques grâce à la compactation des modèles, l'algorithme Gauss-Jordan modifié évite des problèmes de conditionnement au niveau du calcul des coefficients du lissage.

L'application du principe *stepwise* au lissage par polynômes de Chebyshev aboutit à une réduction plus faible des modèles. Les variables indépendantes étant constituées de combinaisons de polynômes et non de monômes, des termes pertinents à l'approximation sont liés à des termes d'influence négligeable. Par conséquent, plus de variables indépendantes doivent être sélectionnés dans les approximations pour que tous les composants apportant une contribution importante soient pris en compte.

A la lumière du cas étudié dans cette section, nous pouvons conclure que la régression linéaire est une méthode de lissage plus intéressante que la projection sur les polynômes de Chebyshev. En effet,

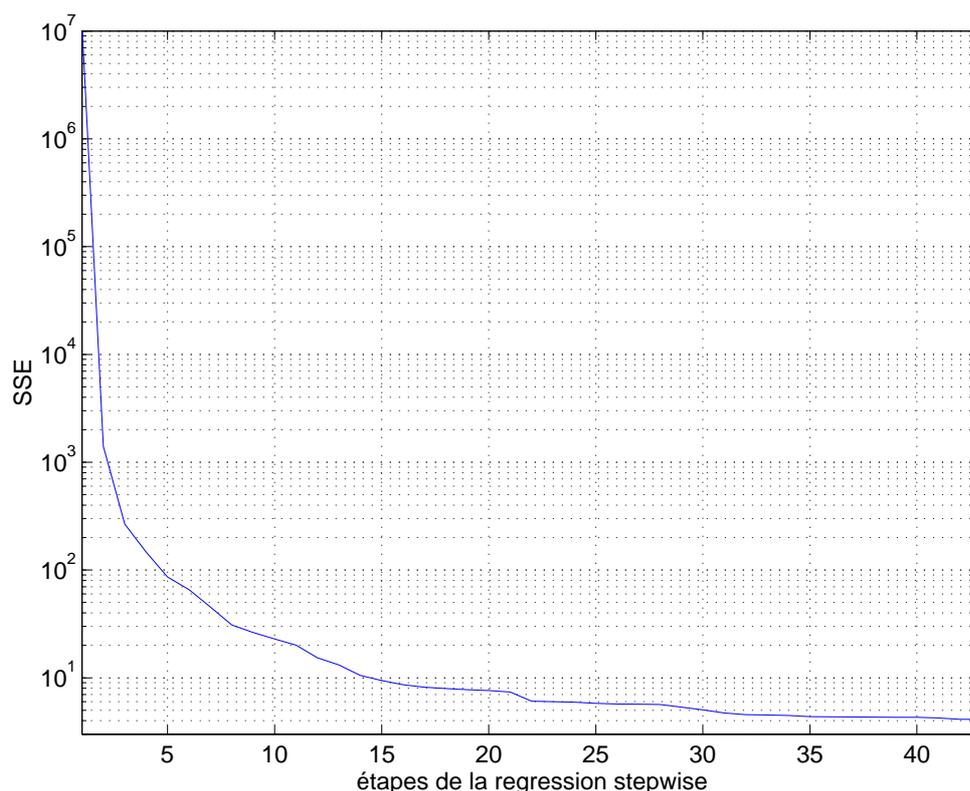


FIG. 5.7: Evolution de SSE au cours de la régression stepwise

elle rend possible la pondération des données à lisser, elle est souple au niveau du choix des fonctions de description des forces visqueuses et elle permet une réduction plus importante des modèles au travers de la procédure *stepwise*. Le seul avantage du lissage par polynômes de Chebyshev réside dans la plus grande vitesse d'exécution des algorithmes de calcul des coefficients et de réduction du modèle.

5.1.5 Application à la dynamique d'un rotor Jeffcott

Dans cette section, nous illustrons et vérifions les potentialités des méthodes de lissage pour l'étude de la dynamique de rotors comportant des amortisseurs *squeeze film*. Pour ce faire, des calculs dans les domaines fréquentiel et temporel sont menés pour le Jeffcott du chapitre précédent, soumis à un balourd de $m_1 g = 0,0035$ [kg.m]. Les dimensions du SqF sont celles définies plus haut. Par contre, au lieu d'avoir les extrémités ouvertes, l'amortisseur est quasiment fermé au niveau des extrémités par des joints caractérisés par le coefficient de fuite $C_l = 10^{-5}$ [mm²/Pa.s].

Sachant que le SqF décrira des orbites circulaires et centrées, on pourrait réaliser des lissages à deux variables cinématiques, ε et $\dot{\phi}$, pour obtenir des expressions des forces visqueuses. Nous avons constaté que le calcul des orbites stationnaires ainsi effectué est très précis. L'analyse de la stabilité selon la théorie de Floquet donne, toutefois, des résultats incorrects. Cela s'explique par le fait que l'orbite perturbée dans le système de repérage global n'est plus circulaire et centrée, de manière à ce que la dépendance des forces en ε doive être considérée.

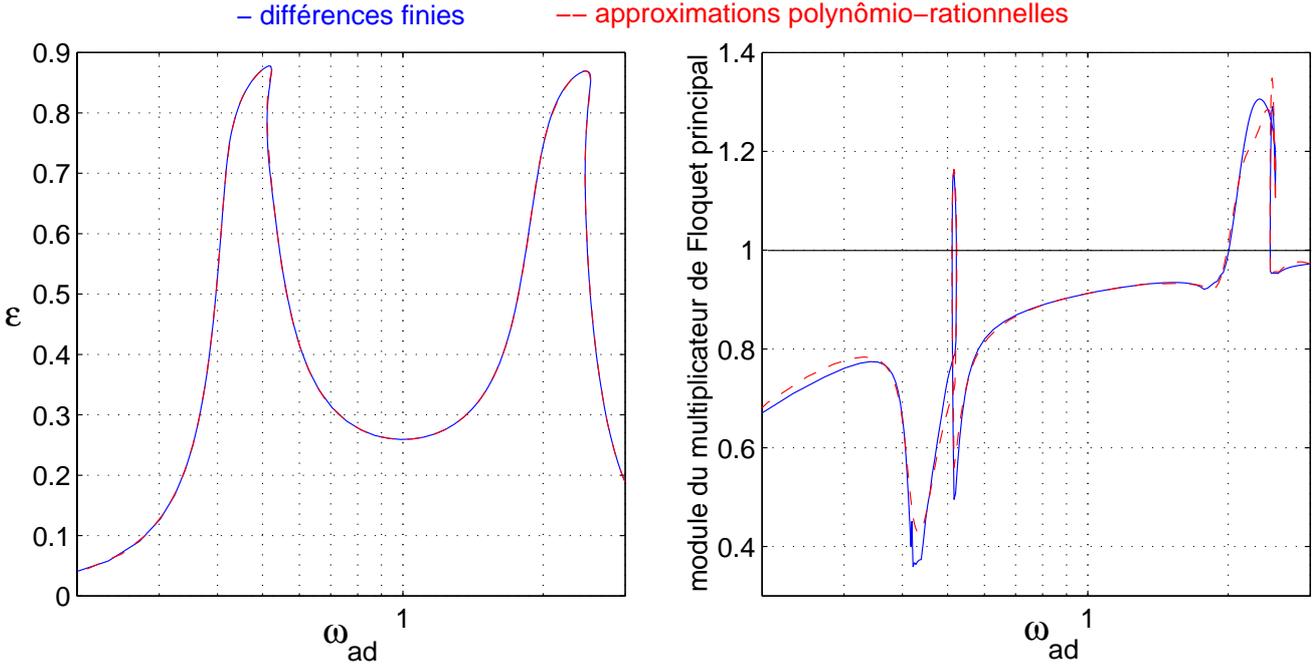


FIG. 5.8: Réponse au balourd et analyse de la stabilité - Comparaison différences finies \times approximations polynômio-rationnelles

Comme souligné auparavant, le comportement des forces visqueuses est sensiblement différent selon le signe de la vitesse radiale, \dot{e} . Par conséquent, le lissage peut manquer de précision au voisinage de $\dot{e} = 0$, notamment lorsque l'on cherche à calculer des orbites circulaires et centrées. Afin d'avoir des approximations de meilleure qualité dans cette région, le lissage à trois variables cinématiques est menée en réduisant les valeurs extrêmes de la vitesse radiale de $\pm 0,5$ à $\pm 0,15$ [m/s]. Le lissage des forces radiale et tangentielle s'effectue par la régression *stepwise* non pondérée, avec une base de fonctions polynômio-rationnelles et $P_i^r = 5; P_k^r = 4; P_l^r = 7$ et $P_i^t = 5; P_k^t = 4; P_l^t = 5$. Les expressions qui en découlent sont présentées à titre illustratif dans l'annexe B.

La précision des approximations s'avèrent très satisfaisante aussi bien pour la détermination de la réponse au balourd que pour l'analyse de la stabilité, comme le met en évidence la figure 5.8. Les résultats du calcul avec les forces hydrodynamiques visqueuses estimée par les expressions polynômio-rationnelles sont presque identiques à ceux du calcul réalisé en évaluant les forces du SqF par différences finies. La courbe de transmissibilité et l'évolution du multiplicateur de Floquet principal sur le plan complexe, figure 5.9, confirment la bonne qualité des lissages. Il est intéressant de remarquer qu'à la vitesse maximale de rotation, laquelle est supérieure à la borne du lissage $\dot{\phi}_{max}$, les résultats restent assez précis. Une extrapolation des approximations vis-à-vis de ε , néanmoins, provoque une dégradation substantielle de l'estimation des forces hydrodynamiques visqueuses, et ce à cause de la forte non linéarité par rapport à cette variable.

En ce qui concerne le temps de calcul, la simulation avec la méthode des différences finies prend environ 15 heures, tandis que l'emploi des expressions des forces lissées aboutit à des résultats très semblables en 3,1 minutes. La génération des données pour le lissage nécessite l'évaluation des efforts non linéaires à $Q_\eta Q_\kappa Q_\xi = 2100$ conditions cinématiques. La réponse au balourd et l'analyse de la

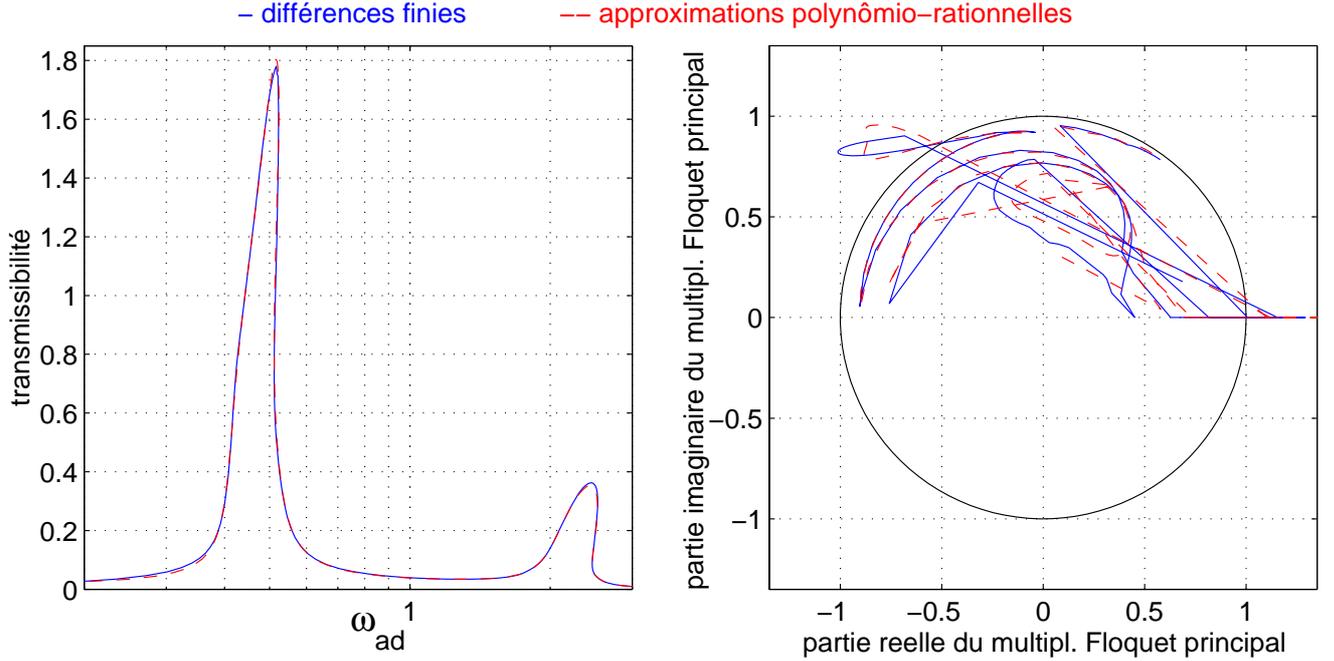


FIG. 5.9: *Transmissibilité et évolution du multiplicateur de Floquet principal - Comparaison différences finies \times approximations polynômio-rationnelles*

stabilité de la figure 5.8 requierent à peu près 110000 évaluations des forces visqueuses. Le temps nécessaire à la déduction des approximations est ainsi largement compensé, d'autant plus que celles-ci peuvent être réutilisées pour d'autres cas de chargement, à condition que la géométrie et les conditions d'évacuation et d'alimentation de l'amortisseur ne soient pas modifiées. Un changement de viscosité peut être pris en compte en considérant les forces comme des fonctions linéaires de ce paramètre.

Après avoir constaté l'intérêt des lissages pour des simulations dans le domaine fréquentiel, examinons maintenant la performance des approximations dans le cadre des calculs temporels. Pour cela, la méthode d'intégration Runge-Kutta du 4^{ème} ordre à pas de temps constant est utilisée.

Afin de bien traverser le régime transitoire de l'intégration temporelle, il a fallu étendre les intervalles définissant les conditions cinématiques. Par conséquent, le lissage est mené avec les paramètres suivants :

$$\varepsilon_{min}=0; \quad \varepsilon_{max}=0,93;$$

$$\dot{\varepsilon}_{min}=-0,5 \text{ [m/s]}; \quad \dot{\varepsilon}_{max}=0,5 \text{ [m/s]};$$

$$\dot{\phi}_{min}=0; \quad \dot{\phi}_{max}=20000 \text{ [rad/s]};$$

La force visqueuse tangentielle est projetée cette fois-ci sur une base de fonctions polynomiales, car les fonctions polynômio-rationnelles se sont avérées inadéquates pour en fournir une bonne approximation à forte excentricité et $\dot{\varepsilon} \approx 0$. Ces dernières permettent, par contre, une représentation assez précise de la force radiale. Les ordres de troncature utilisés lors des lissages sont : $P_i^r = 3$, $P_k^r = 8$,

$P_l^r = 6$, $P_i^t = 10$, $P_k^t = 8$ et $P_l^t = 8$. Les approximations sont obtenues au travers de la régression *stepwise*.

Lors de la génération des données pour le lissage, les forces visqueuses les plus importantes calculées par différences finies découlent de conditions cinématiques extrêmes, à savoir excentricité, vitesses radiale et tangentielle très élevées. D'un point de vue dynamique, l'observation de ces conditions est toutefois improbable, compte tenu des caractéristiques de la non linéarité du SqF. En effet, le mouvement de l'amortisseur est freiné par les forces visqueuses lorsqu'il approche les parois du support. Il est alors difficile de conjuguer haute vitesse, radiale principalement, et forte excentricité. Cette observation conduit à la définition de la matrice de pondération de manière à réduire le poids des efforts excessivement élevés et à augmenter celui des forces trop faibles. Cela permet d'améliorer la précision des approximations sur la plage d'efforts les plus susceptibles d'être rencontrés. Ainsi, la matrice de pondération $[W]$, équation 5.12, est construite de la façon suivante :

$$W_{nn} = \begin{cases} 1/f_n^2 & \text{si } f_n \leq 1 \text{ [N] ou } f_n \geq 5 \times 10^4 \text{ [N]} \\ 1 & \text{si } 1 \text{ [N]} < f_n < 5 \times 10^4 \text{ [N]} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (5.54)$$

L'évolution du multiplicateur de Floquet sur le plan complexe, figure 5.9, indique l'existence d'une bifurcation de Hopf secondaire à $\omega_{ad} \approx 2$. L'intégration temporelle des équations de mouvement pour $\omega_{ad} = 2,07$ révèle ainsi le développement d'un mouvement quasi-périodique. La figure 5.10 présente les orbites du SqF et les spectres de puissance de son déplacement normalisé dans la direction X , X_e/C . Compte tenu de la complexité du mouvement, l'accord entre les deux simulations peut être considéré comme très satisfaisant. Côté temps de calcul, l'utilisation des approximations le réduit de 70 fois par rapport aux différences finies.

L'intérêt des lissages pour la réalisation de calculs dans le domaine temporel est corroboré par les résultats exposés dans la figure 5.11. Celle-ci met en évidence des phénomènes non linéaires qui sont observés à des vitesses relativement faibles, lorsque l'on applique un effort statique au niveau des paliers. Une charge d'amplitude $W_0 = 3500$ [N] est définie ici afin d'illustrer le développement de mouvements sous-harmoniques. Les gains de temps lors de l'intégration temporelle sont du même ordre de celui relatif au calcul de l'orbite quasi-périodique.

Nous tenons à faire remarquer que la réalisation de calculs temporels à partir des forces lissées nécessite une approximation supplémentaire, concernant le mouvement de l'amortisseur. La vitesse tangentielle étant donnée par :

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{Y}_e X_e - \dot{X}_e Y_e}{e^2} \quad (5.55)$$

elle peut atteindre des valeurs très importantes à des excentricités trop faibles. La vitesse $\dot{\phi}$ peut alors dépasser considérablement la limite $\dot{\phi}_{max}$, de façon à provoquer une sensible distorsion dans l'évaluation des forces hydrodynamiques visqueuses. Afin de vaincre ce problème, on pourrait augmenter davantage $\dot{\phi}_{max}$. Or, à très faible excentricité, l'influence de la vitesse radiale sur les forces

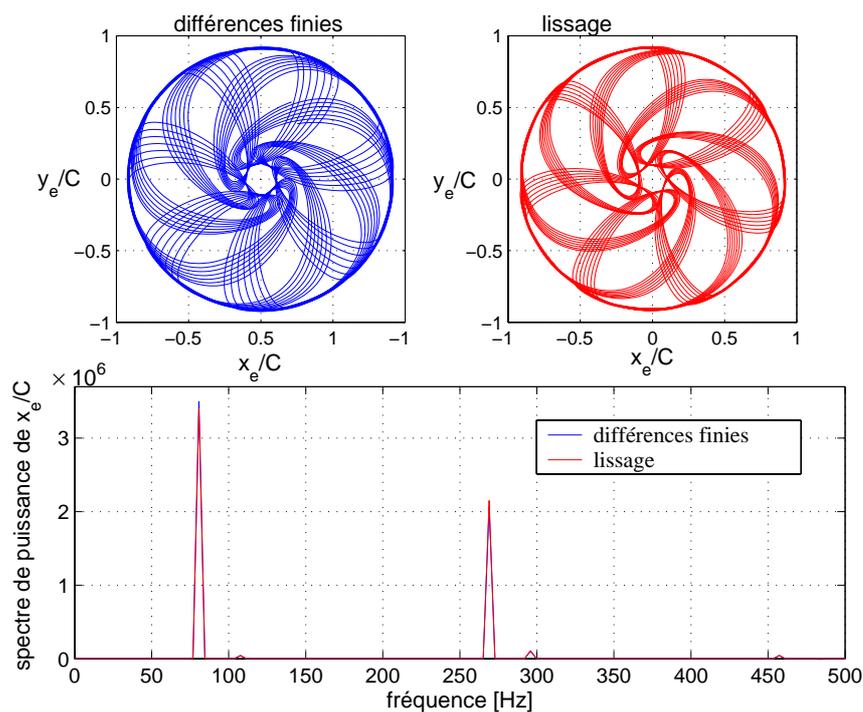


FIG. 5.10: Résultats de l'intégration temporelle pour $\omega_{ad} = 2,07$ - Comparaison différences finies \times lissage

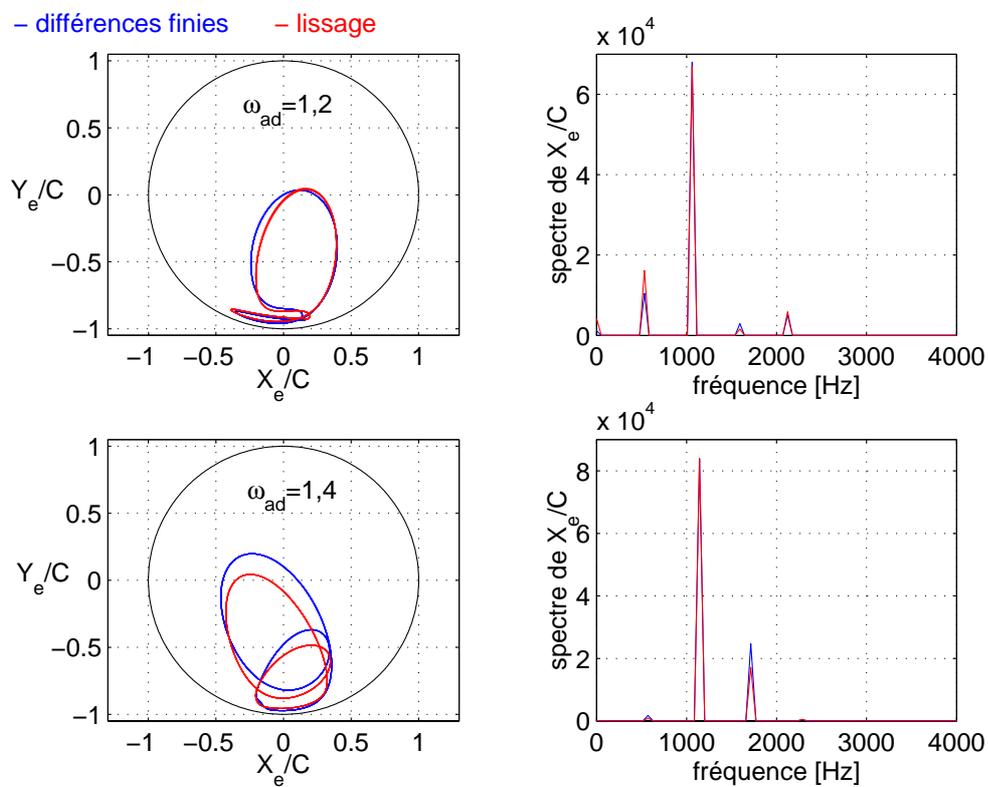


FIG. 5.11: Mouvements sous-harmoniques - Comparaison différences finies \times lissage

du SqF est largement prépondérante devant la vitesse tangentielle. Une solution plus intéressante consiste ainsi à rendre nulle la vitesse tangentielle lorsque l'excentricité devient inférieure à un certain seuil. En d'autres termes, la cinématique instantanée de l'amortisseur est approché par un mouvement purement radial.

Nous avons présenté dans cette section l'application de la régression linéaire *stepwise* pour approcher les forces visqueuses du SqF, déterminées à partir de l'équation de Reynolds couplée à la condition de cavitation de Gumbel modifiée. Le lissage par polynômes de Chebyshev fournit également des bons résultats. Le gain temporel est encore plus remarquable lorsque l'on utilise la condition de cavitation de Reynolds [138].

5.2 Modélisation des effets d'inertie

La complexité des équations régissant le comportement visco-inertiel du SqF, équations 2.14, rend la recherche de solutions pour les forces hydrodynamiques très problématique.

L'approche que nous utilisons ici s'appuie sur la méthode énergétique proposée par EL-SHAFEI [44][45], détaillée dans la section **Effets d'inertie** du chapitre II de ce mémoire. Lors de la génération des données pour le lissage des forces visqueuses, l'énergie cinétique du volume de contrôle englobant la zone non cavitée du film d'huile est calculée, pour chaque condition cinématique, suivant la formule :

$$\mathcal{T}_{vc} = \frac{1}{2} \int_0^h \int_{\mathcal{A}_{nc}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} dy d\mathcal{A} \quad (5.56)$$

où,

\mathcal{A}_{nc} : zone non cavitante,

ρ : masse volumique du fluide,

$\mathbf{V} = \{u, v, w\}^t$: vecteur vitesse locale du fluide,

h : épaisseur locale du film.

Sachant que $v = O(uC/R) = O(wC/R)$ et que $C/R = O(10^{-3})$, pour un fluide incompressible l'équation 5.56 devient :

$$\mathcal{T}_{vc} = \frac{1}{2} \rho \int_0^h \int_{\mathcal{A}_{nc}} (u^2 + w^2) dy d\mathcal{A} \quad (5.57)$$

En supposant que les profils de vitesse ne sont pas sensiblement affectés par les effets d'inertie, pour un écoulement de Poiseuille ils s'écrivent :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) \quad (5.58)$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - hy)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide, x et z désignent respectivement les directions circonférentielle et axiale du SqF et y la direction selon l'épaisseur du film (voir figure 2.1). Il convient de rappeler que l'hypothèse de découplage entre les effets d'inertie et visqueux est considérée comme valable pour $Re < 10$, où Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement du SqF.

En introduisant les profils de vitesse visqueux 5.58 dans l'équation 5.57, on obtient :

$$\mathcal{T}_{vc} = \frac{\rho}{8\mu^2} \int_0^h \int_{\mathcal{A}_{nc}} (y^2 - yh)^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] dy d\mathcal{A} \quad (5.59)$$

Compte tenu de l'équation 2.14, qui indique que la pression ne varie pas dans la direction y , on arrive à :

$$\mathcal{T}_{vc} = \frac{\rho}{8\mu^2} \int_{\mathcal{A}_{nc}} \int_0^h (y^2 - yh)^2 dy \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] d\mathcal{A} \quad (5.60)$$

La résolution de l'intégrale selon y donne :

$$\mathcal{T}_{vc} = \frac{\rho}{8\mu^2} \int_{\mathcal{A}_{nc}} \frac{h^5}{30} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] d\mathcal{A} \quad (5.61)$$

La résolution de l'équation de Reynolds étant accomplie par la méthode des différences finies avec un maillage régulier, l'énergie cinétique du SqF peut s'écrire :

$$\mathcal{T}_{vc} = \frac{\rho}{240\mu^2} \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{i=2}^{N-1} h_{i,j}^5 \left[\left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta z} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta\theta} \right)^2 \right] R\Delta\theta\Delta z + \right. \\ \left. h_{1,j}^5 \left[\left(\frac{p_{2,j} - p_{1,j}}{\Delta z} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{p_{1,j+1} - p_{1,j-1}}{2\Delta\theta} \right)^2 \right] R\Delta\theta \frac{\Delta z}{2} + \right. \\ \left. h_{N,j}^5 \left[\left(\frac{p_{N,j} - p_{N-1,j}}{\Delta z} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{p_{N,j+1} - p_{N,j-1}}{2\Delta\theta} \right)^2 \right] R\Delta\theta \frac{\Delta z}{2} \right\} \quad (5.62)$$

où N et M correspondent au nombre de nœuds du maillage dans les directions axiale et circonférentielle, respectivement.

Nous nous retrouvons ainsi avec un ensemble de \mathcal{T}_{vc} évalué aux conditions cinématiques prédéfinies pour la génération des données à lisser. Cela nous permet de mener une procédure d'identification similaire à celles utilisées pour les forces visqueuses, de manière à déduire une approximation de l'énergie cinétique fonction de ε , ϕ , $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$. Les expressions des forces inertielles radiale et tangentielle associées au volume de contrôle peuvent ensuite être obtenues en appliquant l'équation de Lagrange :

$$f_{ri} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}_{vc}}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) - \frac{1}{C} \frac{\partial \mathcal{T}_{vc}}{\partial \varepsilon} \quad (5.63)$$

$$f_{ti} = \frac{1}{e} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}_{vc}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{1}{e} \frac{\partial \mathcal{T}_{vc}}{\partial \phi} \quad (5.64)$$

Les effets d'inertie relatifs au transport d'énergie cinétique à travers les frontières du volume de contrôle sont donnés par :

$$r_{ri} = \int_{\mathcal{A}_{vc}} \frac{\partial t_v}{\partial \dot{\varepsilon}} \mathbf{V} \cdot d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_{vc}} t_v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{\varepsilon}} \cdot d\mathcal{A} \quad (5.65)$$

$$r_{ti} = \frac{1}{e} \int_{\mathcal{A}_{vc}} \frac{\partial t_v}{\partial \dot{\phi}} \mathbf{V} \cdot d\mathcal{A} - \frac{1}{e} \int_{\mathcal{A}_{vc}} t_v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{\phi}} \cdot d\mathcal{A} \quad (5.66)$$

ou encore par [44][45] :

$$r_{ri} = \int_{\mathcal{A}_{vc}} \frac{\partial t_v}{\partial \dot{\varepsilon}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_{vc}} t_v \frac{\partial (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})}{\partial \dot{\varepsilon}} d\mathcal{A} \quad (5.67)$$

$$r_{ti} = \frac{1}{e} \int_{\mathcal{A}_{vc}} \frac{\partial t_v}{\partial \dot{\phi}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} - \frac{1}{e} \int_{\mathcal{A}_{vc}} t_v \frac{\partial (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})}{\partial \dot{\phi}} d\mathcal{A} \quad (5.68)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface \mathcal{A}_{vc} , dirigé vers l'extérieur du volume de contrôle.

Quelques simplifications doivent être faites pour estimer de manière approximative les termes inertiels ci-dessus. La première consiste à négliger l'échange d'énergie cinétique entre les zones cavitante et non cavitante du film. La deuxième concerne l'évaluation du produit scalaire $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})$. Pour un transport d'énergie à travers les extrémités du SqF, en admettant que le débit de fuite, Q_s , se répartit sur une moitié du périmètre du film, la vitesse axiale locale du fluide est approché par :

$$Q_s = \int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} \int_0^h \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} R d\theta dy \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \approx \frac{Q_s}{R\pi h(\theta)} \quad (5.69)$$

L'énergie cinétique par unité de volume à la frontière s'écrit par conséquent :

$$t_v = \frac{1}{2} \rho \frac{Q_s^2}{\pi^2 R^2 h^2} \quad (5.70)$$

En remplaçant les équations 5.69 et 5.70 dans les expressions 5.67 et 5.68 on arrive à :

$$r_{ri} = -\frac{1}{2} \frac{\rho Q_s^2}{\pi^3 R^2} \frac{\partial Q_s}{\partial \dot{e}} \int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} \frac{1}{h^2} d\theta \quad (5.71)$$

$$r_{ti} = -\frac{1}{2} \frac{\rho Q_s^2}{e \pi^3 R^2} \frac{\partial Q_s}{\partial \dot{\phi}} \int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} \frac{1}{h^2} d\theta \quad (5.72)$$

Selon la théorie classique de la lubrification, la valeur de θ_1 est une fonction de la cinématique de l'amortisseur et du système d'alimentation. En négligeant ce dernier, l'approximation palier court fournit $\theta_1 \approx \pi/2$ et $\theta_1 \approx 3\pi/2$ lorsque le mouvement est respectivement purement radial avec $\dot{e} > 0$ et purement radial avec $\dot{e} < 0$, et $\theta_1 \approx \pi$ si l'orbite est circulaire et centrée. Afin de généraliser notre approche, l'expression suivante est proposée pour θ_1 :

$$\theta_1 = \pi - \arctan \left(\frac{\dot{e}}{\dot{\phi}} \right) \quad (5.73)$$

L'analogie avec l'approximation palier court est justifiée par le fait que la contribution relative des termes r_{ri} et r_{ti} aux forces inertielles totales est plus importante pour cette configuration que pour le SqF partiellement étanche. Pour un amortisseur long, ces termes sont nuls, car il n'y a pas de fuite au niveau des extrémités.

Lorsque le transport d'énergie cinétique s'effectue par des points d'alimentation ou d'évacuation, t_v et \mathbf{V} sont approchés par des valeurs moyennes constantes sur \mathcal{A}_{vc} . On définit ainsi :

$$\overline{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})}_{e,s} \approx \frac{Q_{e,s}}{A_{e,s}} = \bar{V}_{e,s} \quad (5.74)$$

$$\bar{t}_v^{e,s} \approx \frac{1}{2} \rho \bar{V}_{e,s}^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q_{e,s}}{A_{e,s}} \right)^2 \quad (5.75)$$

où Q_e désigne le débit volumique entrant dans le volume de contrôle et $A_{e,s}$ est obtenu en multipliant le nombre de points d'alimentation, ou d'évacuation, par l'aire de section transversale des conduites. En rapportant ces approximations dans les équations 5.67 et 5.68, on obtient :

$$r_{ri}^{e,s} = \frac{1}{2} \rho \frac{Q_{e,s}^2}{A_{e,s}^2} \frac{\partial Q_{e,s}}{\partial \dot{e}} \quad (5.76)$$

$$r_{ti}^{e,s} = \frac{1}{2e} \rho \frac{Q_{e,s}^2}{A_{e,s}^2} \frac{\partial Q_{e,s}}{\partial \dot{\phi}} \quad (5.77)$$

Les forces inertielles relatives au transport d'énergie cinétique par les frontières du système peuvent ainsi être déterminées en évaluant les dérivées des débits entrant et sortant par rapport aux vitesses radiale et tangentielle du SqF. Pour ce faire, les débits d'alimentation, Q_e , et de fuite, Q_s , sont également lissés à partir des données numériques issues de la résolution des équations régissant le champ de pression du film.

En l'absence d'hypothèses simplificatrices supplémentaires, l'estimation des forces r_{ri} et r_{ti} données par 5.67 et 5.68 est très complexe. Les approximations que nous mettons en avant ici devraient permettre de déterminer au moins l'importance de ces forces devant celles associées à l'énergie cinétique du volume de contrôle. On s'attend à ce que la contribution de r_{ri} et r_{ti} aux efforts inertiels soit faible pour des amortisseurs étanches ou partiellement étanches, du fait du débit de fuite plus petit, et également pour un SqF pressurisé. En effet, malgré l'interaction entre le système d'alimentation et le film fluide, la pressurisation devrait créer une dépendance primordiale de $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})$ sur la puissance de la pompe, l'influence des vitesses \dot{e} et $\dot{\phi}$ sur ce terme devenant ainsi secondaire, voire négligeable.

Quant à la simplification concernant la cavitation, à savoir pas d'échange énergétique entre les zones cavitante et non cavitante, nous la justifions en argumentant que la description de ce phénomène est déjà elle-même approximative, puisque le principe de la continuité de la masse n'est pas respecté. Nous croyons qu'attribuer une force inertielle à un flux massique dont l'existence et la modélisation ne sont bien maîtrisées n'apportera pas d'améliorations à la prise en compte des effets d'inertie.

L'approche développée dans ce travail possède l'inconvénient de ne pas permettre l'identification de l'origine, temporelle ou convective, des effets d'inertie. Par contre, elle rend possible la prise en compte des effets associés à l'accélération convective du fluide induite par le système d'alimentation de l'amortisseur. L'influence de la pressurisation doit s'accroître lorsque l'excentricité du SqF augmente et si l'on restreint davantage l'écoulement axial du fluide.

5.2.1 Lissage de l'énergie cinétique et des débits sortant/entrant

Afin d'illustrer la prise en compte des effets d'inertie à l'aide des lissages, le cas d'un amortisseur alimenté par quatre points d'injection est considéré. Deux valeurs de puissance de la pompe sont analysées : $W_p = 50$ et $W_p = 100$ [W]. Conformément à la notation adoptée dans le chapitre précédent, les données du SqF et du système hydraulique sont :

$$L=30 \text{ [mm]}; R=65 \text{ [mm]}; C=0,3 \text{ [mm]}; \mu=0,007 \text{ [Pa.s]}; \rho=950 \text{ [kg/m}^3\text{]};$$

$$D_{hc}=5 \text{ [mm]}; D_{hs}=4 \text{ [mm]}; D_{hp}=5 \text{ [mm]}; D_{hch}=5 \text{ [mm]};$$

$$A_c = \pi D_{hc}^2/4; A_s = \pi D_{hs}^2/4; A_p = \pi D_{hp}^2/4; A_{ch} = D_{ch}^2;$$

$$R_{ch}=100 \text{ [mm]}; l_5 = l_8 = R_{ch}\pi/4; l_6 = l_7 = l_8 = R_{ch}\pi/2;$$

$$l_p=1 \text{ [m]}; l_s=35 \text{ [mm]}; l_c=30 \text{ [mm]};$$

Les valeurs de \mathcal{T}_{vc} , Q_e et Q_s sont déterminées à partir de la résolution de l'équation de Reynolds par différences finies, avec un maillage régulier de 25 points dans la direction axiale et 84 points dans la direction circonférentielle. La condition de Gumbel modifiée avec une pression de vaporisation de 0,01 [bar] est utilisée comme modèle de cavitation. La plage de conditions cinématiques est délimitée par :

$$\varepsilon_{min}=0; \quad \varepsilon_{max}=0,93;$$

$$\phi_{min}=0; \quad \phi_{max} = \pi/2 \text{ [rad]};$$

$$\dot{\varepsilon}_{min}=-0,5 \text{ [m/s]}; \quad \dot{\varepsilon}_{max}=0,5 \text{ [m/s]};$$

$$\dot{\phi}_{min}=0; \quad \dot{\phi}_{max}=10000 \text{ [rad/s]};$$

La définition de l'intervalle de variation de la position angulaire, ϕ , repose sur l'hypothèse que la pression est homogène dans la couronne hydraulique. Cela garantit une périodicité circonférentielle de l'énergie cinétique, des débits d'alimentation et de fuite ainsi que des forces visqueuses, pour une excentricité et des vitesses données. On peut établir d'une façon générale que pour l'étude d'un SqF possédant n points d'alimentation, le lissage doit être mené sur $0 \leq \phi \leq 2\pi/n$.

En ce qui concerne la technique de lissage à appliquer, nous avons retenu la régression linéaire *stepwise* pondérée. La pondération est importante pour la déduction des expressions des forces inertielles, car celles-ci découlent des dérivées de l'énergie cinétique et des débits entrant et sortant par rapport aux paramètres cinématiques de l'amortisseur. Compte tenu de l'hypothèse d'homogénéité de la pression dans la couronne hydraulique, les conditions suivantes doivent être respectées :

$$\begin{aligned} f_{ri}(\varepsilon, \phi = 0, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) &= f_{ri}(\varepsilon, \phi = \pi/2, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) & f_{ti}(\varepsilon, \phi = 0, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) &= f_{ti}(\varepsilon, \phi = \pi/2, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) \\ r_{ri}(\varepsilon, \phi = 0, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) &= r_{ri}(\varepsilon, \phi = \pi/2, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) & r_{ti}(\varepsilon, \phi = 0, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) &= r_{ti}(\varepsilon, \phi = \pi/2, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) \end{aligned} \quad (5.78)$$

d'où la nécessité de définir une base de fonctions pour la projection des grandeurs à lisser telle que :

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \phi}(\phi = 0) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \phi}(\phi = \pi/2) \quad (5.79)$$

où \mathcal{G} représente l'énergie cinétique du volume de contrôle, le débit d'alimentation ou le débit de fuite.

Suite à l'inspection de $\mathcal{T}_{vc}(\phi)$, $Q_e(\phi)$ et $Q_s(\phi)$ pour plusieurs valeurs de ε , $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$, nous nous sommes

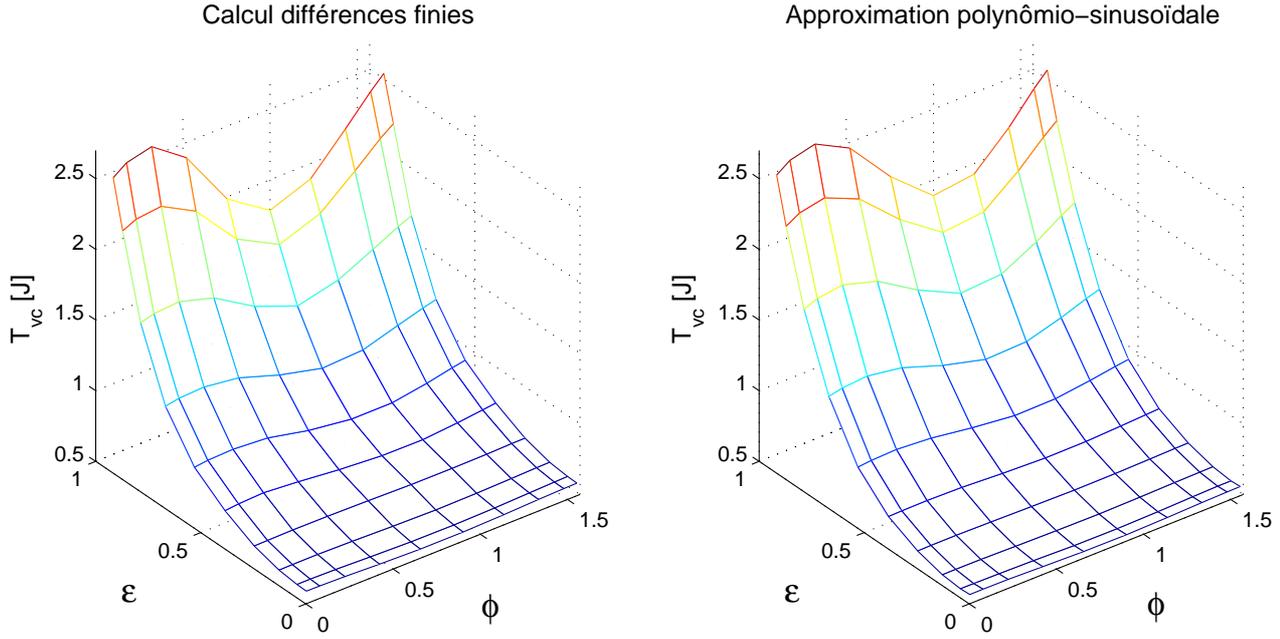


FIG. 5.12: Lissage de l'énergie cinétique du film fluide - Coupe $\mathcal{T}_{vc}(\varepsilon, \phi)$ à $\dot{e} = -0,19$ [m/s] et $\dot{\phi} = 670$ rad/s

aperçus que l'allure de ces courbes peut s'exprimer par une fonction du type $\cos(4\phi + C_1) + C_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes. De ce fait, le lissage s'effectue par des approximations suivantes :

$$\mathcal{G} \simeq \sum_{i=0}^{P_i} \sum_{k=0}^{P_k} \sum_{l=0}^{P_l} C_{i,k,l}^0 \varepsilon^i \dot{e}^k \dot{\phi}^l + \sum_{i=0}^{P_i} \sum_{k=0}^{P_k} \sum_{l=0}^{P_l} C_{i,k,l}^1 \varepsilon^i \dot{e}^k \dot{\phi}^l \cos(4\phi) + \sum_{i=0}^{P_i} \sum_{k=0}^{P_k} \sum_{l=0}^{P_l} C_{i,k,l}^2 \varepsilon^i \dot{e}^k \dot{\phi}^l \sin(4\phi) \quad (5.80)$$

Le nombre de variables indépendantes est donc $p = 3(P_i + 1)(P_k + 1)(P_l + 1) - 1$. L'adéquation des approximations polynômio-sinusoidales proposées est mise en évidence dans la figure 5.12, qui expose un exemple de lissage de \mathcal{T}_{vc} réalisé avec $P_i = 5$, $P_k = 5$ et $P_l = 5$.

Suite à l'application de la méthode énergétique suivant les approximations palier court [44] et palier long [45], EL-SHAFEI déduit des expressions pour l'énergie cinétique qui s'écrivent :

$$\mathcal{T}_{vc} = \frac{1}{2} m_{rr}(\varepsilon) \dot{e}^2 + \frac{1}{2} m_{tt}(\varepsilon) (\dot{e}\dot{\phi})^2 + m_{rt}(\varepsilon) \dot{e}\dot{\phi} \quad (5.81)$$

où les coefficients $m_{rr}(\varepsilon)$, $m_{tt}(\varepsilon)$ et $m_{rt}(\varepsilon)$ peuvent être interprétés comme des masses équivalentes du fluide en mouvement, fonctions de l'excentricité de l'amortisseur. En employant la technique de lissage, l'expression de l'énergie cinétique peut prendre la forme :

$$\mathcal{T}_{vc} = \beta_0(\varepsilon, \phi) + \beta_1(\varepsilon, \phi) \dot{e} + \beta_2(\varepsilon, \phi) \dot{\phi} + \beta_3(\varepsilon, \phi) \dot{e}^2 + \beta_4(\varepsilon, \phi) \dot{\phi}^2 + \beta_5(\varepsilon, \phi) \dot{e}\dot{\phi} + \dots \quad (5.82)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{vc} = & \left(\hat{\beta}_0(\varepsilon, \phi, \dot{e}, \dot{\phi}) + \hat{\beta}_1(\varepsilon, \phi, \dot{e}, \dot{\phi}) + \dots \right) \dot{e}^2 + \left(\tilde{\beta}_0(\varepsilon, \phi, \dot{e}, \dot{\phi}) + \tilde{\beta}_1(\varepsilon, \phi, \dot{e}, \dot{\phi}) + \dots \right) (e\dot{\phi})^2 \\ & + \left(\check{\beta}_0(\varepsilon, \phi, \dot{e}, \dot{\phi}) + \check{\beta}_1(\varepsilon, \phi, \dot{e}, \dot{\phi}) + \dots \right) \dot{e}e\dot{\phi} \end{aligned} \quad (5.83)$$

Nous permettons ainsi aux masses équivalentes du fluide de dépendre des vitesses du SqF, en plus de sa position.

5.2.2 Analyse des résultats

Il est intéressant tout d'abord de comparer les résultats de l'approche énergétique conjuguée à la stratégie de lissage avec ceux obtenus de formulations disponibles dans la littérature. Il convient de souligner qu'il n'existe actuellement, à notre connaissance, aucun modèle publié tenant compte des effets d'inertie d'un amortisseur *squeeze film* à alimentation ponctuelle.

Considérons premièrement le cas d'un SqF non cavitant. La comparaison des débits entrant, Q_e , et sortant, Q_s , permet de statuer sur l'existence ou non d'une poche de cavitation. Comme souligné précédemment, la condition de Gumbel modifiée ne respectant pas le principe de conservation de la masse, lorsque $Q_e \neq Q_s$ on conclut que le film développe une zone cavitante. Afin de pouvoir étudier la corrélation entre les forces inertielles déterminées par notre modèle et celles calculées à l'aide de formules disponibles dans la littérature, le lissage de l'énergie cinétique et des débits s'effectue uniquement sur la plage de conditions cinématiques dans lesquelles le SqF ne cavite pas.

Compte tenu du rapport L/R de l'amortisseur analysé, l'approximation palier court est simulée en définissant un coefficient de fuite très important, $C_l = 5000$ [mm²/Pa.s]. Pour cette configuration et $W_p = 50$ [W], nous avons constaté que le film ne cavite pas pour : $\varepsilon < 0,54$, $-0,5 < \dot{e} < 0,5$ [m/s] et $\dot{\phi} < 3300$ [rad/s]. L'influence de la position angulaire, ϕ , sur la formation de la zone cavitante s'avère faible devant les autres paramètres cinématiques. Les ordres de troncatures utilisés pour le lissage sont $P_i = 4$, $P_k = 6$, $P_l = 4$ pour \mathcal{T}_{vc} , et $P_i = 3$, $P_k = 2$, $P_l = 2$ pour $Q_{e,s}$.

La figure 5.13 présente la force d'inertie radiale en fonction du nombre de Reynolds, $Re = \rho C^2 \dot{\phi} / \mu$, pour trois valeurs d'excentricité et des orbites circulaires et centrées ($\dot{e} = \ddot{e} = \ddot{\phi} = 0$). Notre méthode est comparée avec le modèle de SAN ANDRÉS et VANCE [148], obtenu au travers de la méthode du *momentum*, et également avec le modèle de HAN et ROGERS [62], dérivé de la méthode énergétique. On constate que les résultats sont qualitativement similaires, mais que notre approche fournit des efforts plus élevés. La puissance de la pompe n'a qu'une faible influence sur l'amplitude de la force inertielle radiale.

La contribution des termes de transport d'énergie cinétique, r_{ri} et r_{ti} , se révèle être négligeable (inférieure à 1 [N]). Pour un SqF non cavitant décrivant des orbites circulaires et centrées, les modèles de SAN ANDRÉS et VANCE [148] et HAN et ROGERS [62] prédisent une force tangentielle nulle, puisqu'ils simulent une configuration axisymétrique. Notre SqF n'étant pas axisymétrique à cause de la présence des points d'alimentation, une oscillation de la force inertielle tangentielle est observée sur un tour, comme le montre la figure 5.14.

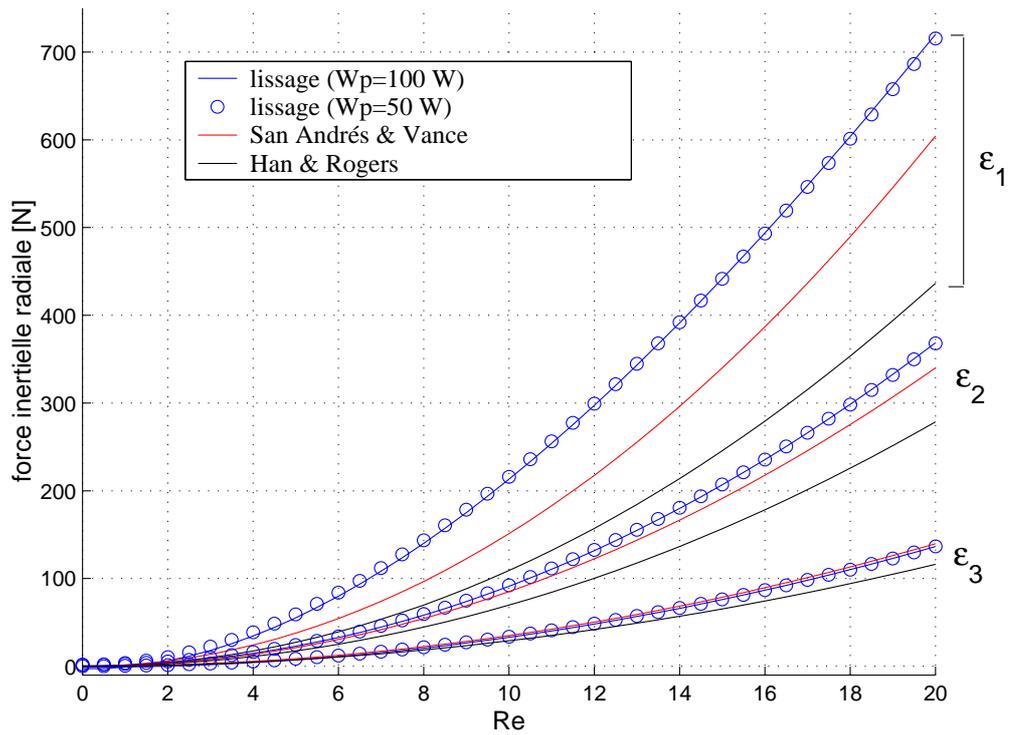


FIG. 5.13: Force inertielle radiale fonction de Re - $\varepsilon_1 = 0,55$; $\varepsilon_2 = 0,25$; $\varepsilon_3 = 0,1$

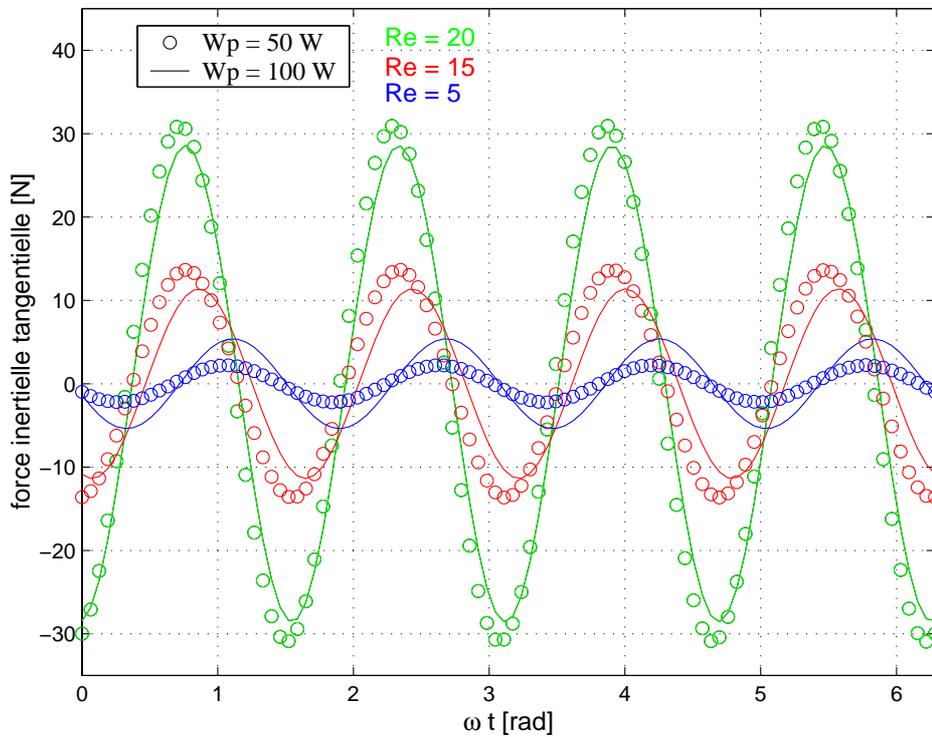
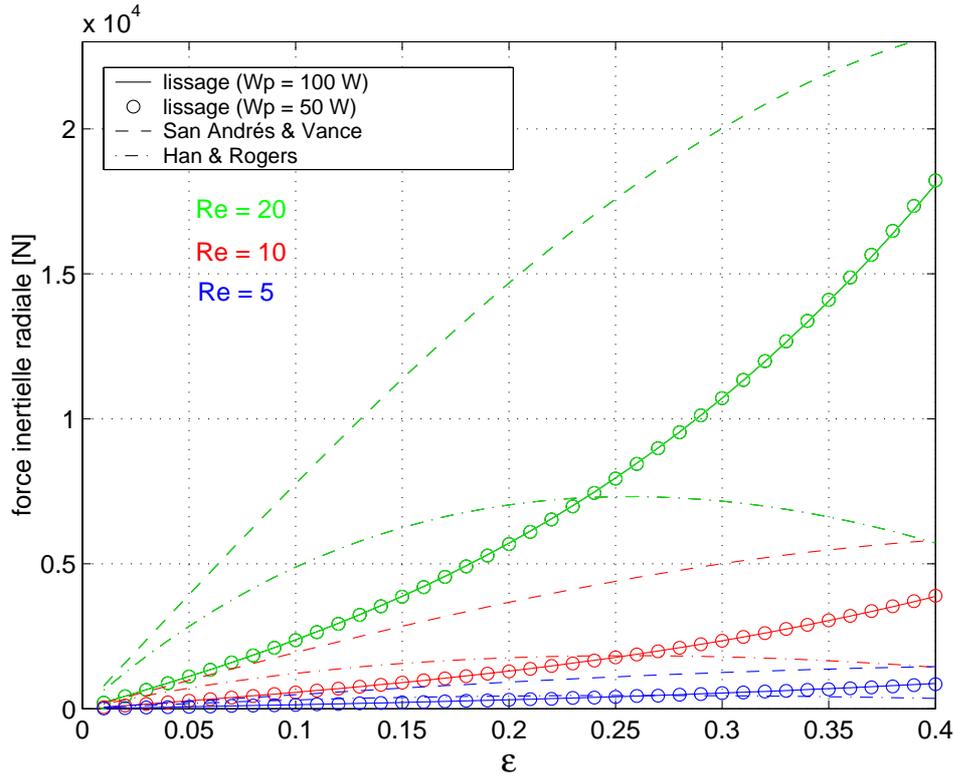


FIG. 5.14: Evolution de la force inertielle tangentielle sur un tour

FIG. 5.15: Force inertielle radiale fonction de ε

Un coefficient de fuite très petit, $C_l = 10^{-5}$ [mm²/Pa.s], est utilisé maintenant pour simuler l'approximation palier long. Pour cette configuration, la cavitation a lieu pour des vitesses et des excentricités plus basses qu'auparavant. La plage cinématique sur laquelle le lissage est mené se restreint ainsi à : $\varepsilon < 0,4$, $-0,18 < \dot{\varepsilon} < 0,18$ [m/s] et $\dot{\phi} < 3300$ [rad/s]. Les ordres de troncatures utilisés pour lisser \mathcal{T}_{vc} sont $P_i = 4$, $P_k = 4$, $P_l = 4$. Les termes associés au transport d'énergie cinétique par la frontière sont négligés, parce que très faibles.

L'évolution de la force inertielle radiale avec l'excentricité, pour des orbites circulaires et centrées et trois valeurs de Re est exposée dans la figure 5.15. On s'aperçoit que l'écart entre les résultats est sensiblement plus important que celui observé pour l'amortisseur ouvert. HAN et ROGERS expliquent la différence entre leurs résultats et ceux de ANDRÉS et VANCE à partir des profils de vitesse utilisés dans les modèles respectifs, puisqu'ils rajoutent un terme supplémentaire au profil parabolique visqueux. Quant à l'écart entre notre approche et le modèle de SAN ANDRÉS et VANCE [148], nous croyons qu'il découle principalement de la prise en compte du système d'alimentation ponctuelle. Celui-ci engendre des gradients de pression non nuls dans la direction axiale, contrairement à l'approximation palier long, et perturbe également le champ de pression au voisinage des points d'injection.

Il est intéressant de remarquer que les forces inertielles déterminées par les lissages sont, pour le palier court, plus importantes que celles calculées à partir des autres formulations, et pour le palier long, plus petites, hormis le modèle de HAN et ROGERS. Ce fait indique que l'alimentation amplifie les effets d'inertie dans la configuration courte, tandis qu'elle les réduit dans la configuration longue. En analysant les champs de pression des paliers court et long obtenus à $\varepsilon = 0,4$ et $Re = 16$ ($\dot{\phi} \approx 1300$

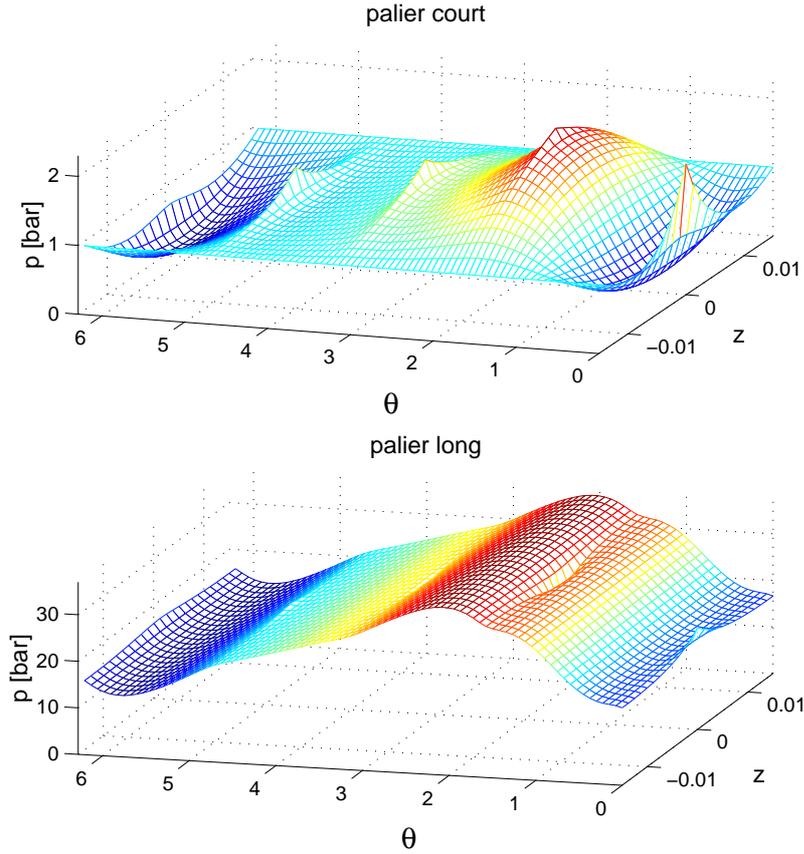


FIG. 5.16: *champ de pression des SqF court ($C_l = 5000 [mm^2/Pa.s]$) et long ($C_l = 10^{-5} [mm^2/Pa.s]$)*

[rad/s]) (figure 5.16), on observe que l'injection d'huile a pour effet d'augmenter les gradients de pression du premier et de diminuer ceux du deuxième, par rapport un SqF idéalement lisse. Il en résulte donc une tendance similaire à l'égard de l'accélération convective, ce qui explique l'influence antagonique de l'alimentation sur les efforts inertiels des deux configurations d'amortisseur étudiées.

Avant de passer aux résultats relatifs à des amortisseurs cavitants, il convient d'analyser les forces inertielles générées, cette fois-ci, par des trajectoires purement radiales, au lieu des circulaires et centrées. Considérons ainsi un mouvement sinusoïdal décrit par :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \varepsilon_0 \sin(\omega t) \\
 \dot{\varepsilon} &= \omega \varepsilon_0 C \cos(\omega t) \\
 \ddot{\varepsilon} &= -\omega^2 \varepsilon_0 C \sin(\omega t)
 \end{aligned}
 \tag{5.84}$$

Le nombre de Reynolds peut s'écrire dans ce cas $Re = \rho \varepsilon_0 C \omega / \mu$. La figure 5.17 présente l'évolution de la force inertielle radiale développée par le SqF à extrémités ouvertes, entre $\omega t = 0$ et $\omega t = \pi$, pour trois valeurs de Re . Suite à la description des masses équivalentes du fluide en tant que fonctions de la position et des vitesses du SqF, notre modèle met en évidence un comportement non linéaire des forces

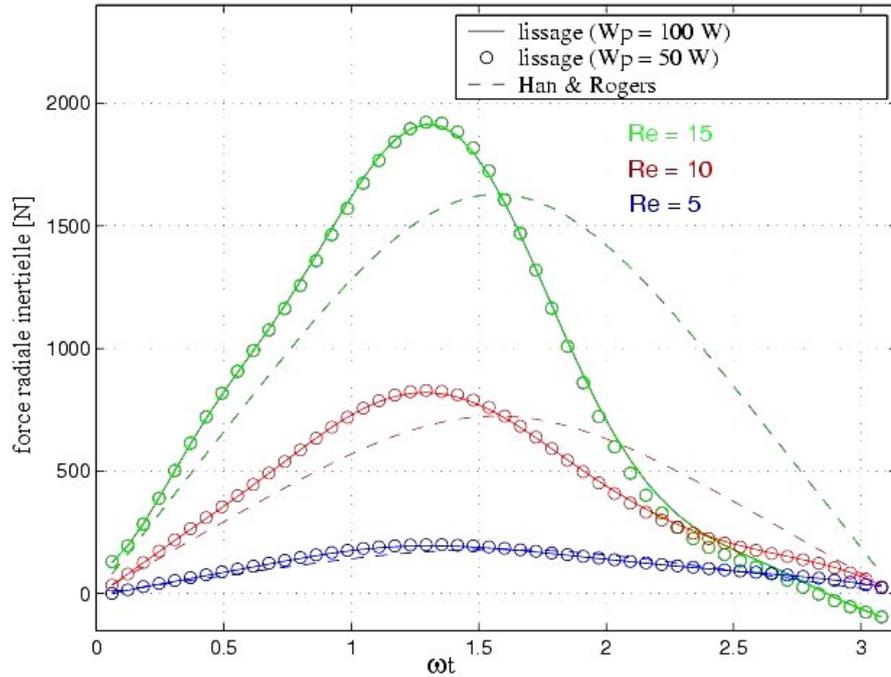


FIG. 5.17: Evolution de la force inertielle radiale pour des mouvements radiaux harmoniques - $\varepsilon_0 = 0,5$

hydrodynamiques inertielles. Le modèle de HAN et ROGERS [62], par contre, exprime une relation linéaire entre les forces d'inertie et la vitesse et l'accélération du SqF. Les résultats expérimentaux présentés dans les références [139] et [137] montrent qu'un mouvement radial sinusoïdal de l'amortisseur engendre des forces hydrodynamiques contenant des harmoniques supérieures, outre le fondamental. Cette constatation semble corroborer qualitativement nos résultats.

Il reste encore à vérifier l'utilisation des lissages pour modéliser les forces inertielles d'un amortisseur cavitant. Ainsi, le lissage de l'énergie cinétique du film et des débits entrant et sortant s'effectue désormais sur la plage entière des conditions cinématiques prédéfinies.

Il est possible de constater tout d'abord que la cavitation rend l'allure des fonctions $\mathcal{T}_{vc}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi})$, $Q_e(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi})$ et $Q_i(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi})$ plus compliquée. Par conséquent, les ordres de troncature du lissage doivent être augmentés, principalement au niveau des vitesses radiale et tangentielle. Nous avons utilisé $P_i = 5$, $P_k = 7$ et $P_l = 6$ pour la configuration palier court, et $P_i = 5$, $P_k = 8$ et $P_l = 7$ pour la configuration palier long. En comparant les modèles d'amortisseurs cavitant et non cavitant, une première conclusion importante est tirée : l'extension du lissage à toutes les conditions cinématiques de la plage spécifiée ne pénalise pas sensiblement le calcul des forces sur la plage non cavitante, comme le montre la figure 5.18.

Nos résultats sont comparés à ceux obtenus à partir des modèles de EL-SHAFEI [44][45], déduits suivant la méthode énergétique, pour des orbites circulaires et centrées et sous les hypothèses de profil de vitesse parabolique et de cavitation π -film. La figure 5.19 expose l'évolution des forces inertielles en fonction du nombre de Reynolds pour l'amortisseur long, d'où on constate une corrélation favorable. Il est intéressant de remarquer que l'influence de la puissance de la pompe devient très nette lorsque

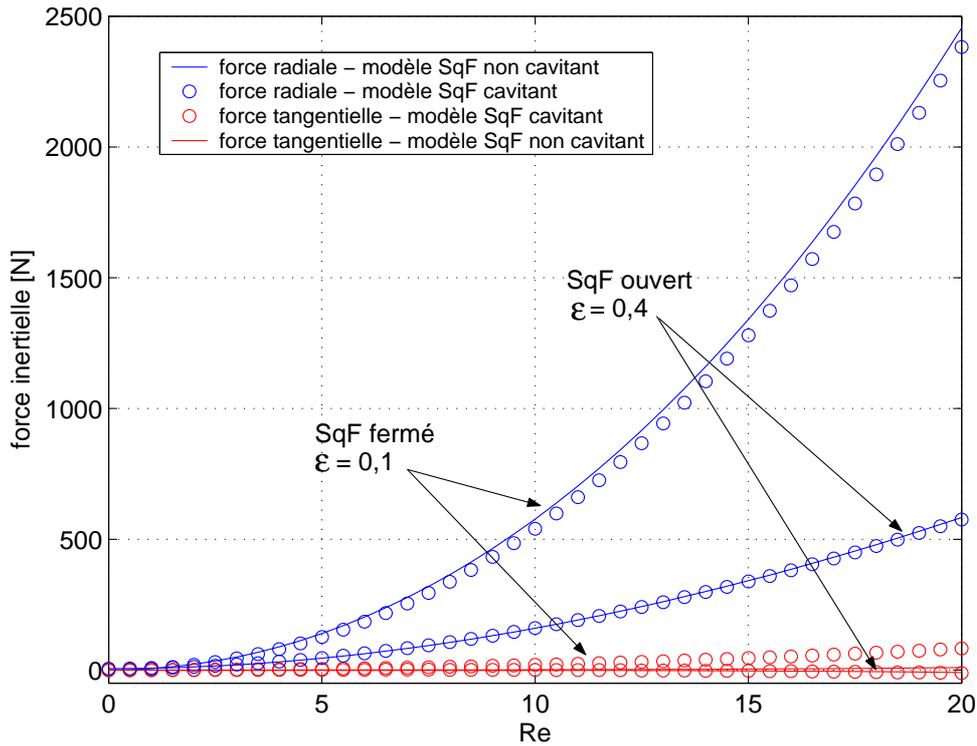


FIG. 5.18: Comparaison des modèles de SqF cavitant et non cavitant - Orbites circulaires et centrées

l'excentricité du SqF devient importante. L'augmentation de W_p conduit à une élévation du débit d'alimentation et à une réduction de la poche de cavitation. Par conséquent, l'effort tangentiel diminue, de manière à tendre vers la condition non cavitante (force presque nulle), et l'effort radial s'accroît, ce qui indique une amplification des effets de l'inertie convective. Cette amplification découle du fait que le fluide s'écoule basiquement dans la direction circonférentielle, suivant laquelle l'épaisseur du film varie. Compte tenu du principe de continuité, cette variation provoque un changement de vitesse des particules du fluide et ainsi une accélération de nature convective. Celle-ci est d'autant plus importante que la variation de l'épaisseur, d'où l'effet plus prononcé à des fortes excentricités. Dans un amortisseur ouvert, l'écoulement est principalement axial, si bien que l'influence de la puissance de la pompe d'alimentation est sensiblement plus faible.

En ce qui concerne le palier court, les résultats sont très différents, voire contradictoires, comme le montre la figure 5.20. La courbe en astérisque met en évidence la contribution de l'énergie cinétique du volume de contrôle aux forces inertielles, d'après le modèle de EL-SHAFEI. Compte tenu du bon accord entre les modèles palier long (pas de débit de fuite), nous concluons alors que l'écart observé pour le palier court provient de la prise en compte du transport d'énergie cinétique par les extrémités de l'amortisseur.

La formulation de EL SHAFEI ne tenant pas compte du système d'alimentation, le débit de fuite s'écrit :

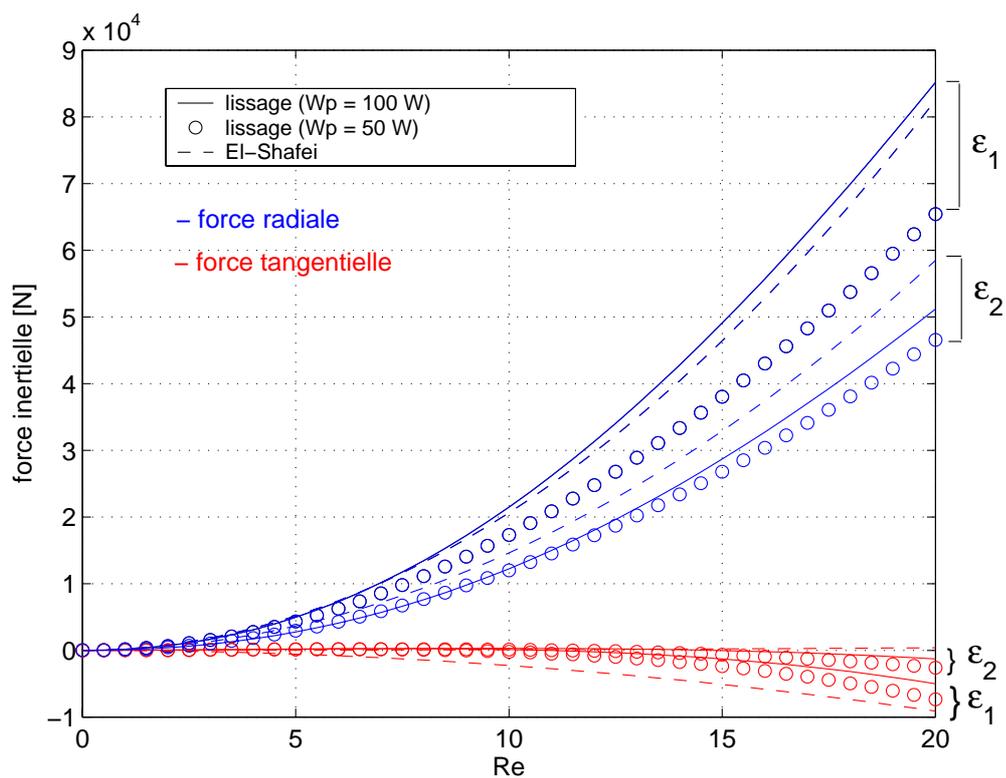


FIG. 5.19: *Forces inertielles fonctions de Re . Configuration palier long - $\epsilon_1 = 0,9$; $\epsilon_2 = 0,7$*

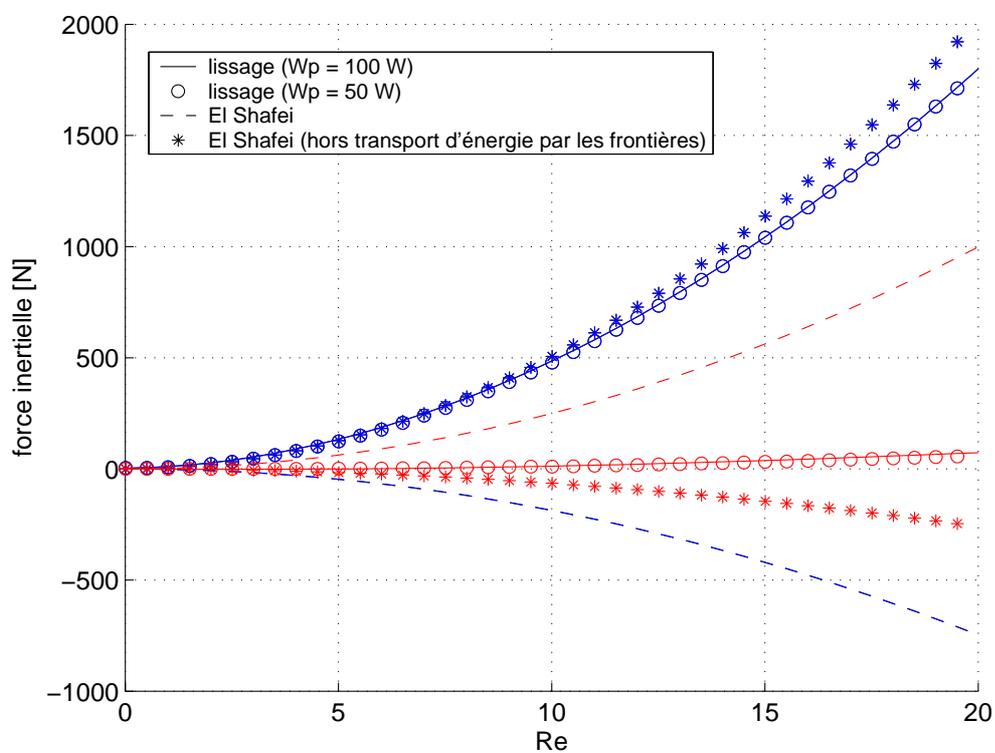


FIG. 5.20: *Force inertielle fonction de Re . Configuration palier court - $\epsilon = 0,9$*

$$Q_s = \int_0^\pi \int_0^h w(z = L/2) R d\theta dy + \int_0^\pi \int_0^h w(z = -L/2) R d\theta dy \quad (5.85)$$

où la vitesse axiale du fluide, w , s'écrit [44] :

$$w = \frac{6z}{h} \left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2} \right) \left(e\dot{\phi} \sin(\theta) + \dot{e} \cos(\theta) \right) \quad (5.86)$$

Pour un SqF décrivant des orbites circulaires et centrées, l'évaluation des intégrales fournit :

$$Q_s = 2RLe\dot{\phi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_s}{\partial \dot{\phi}} = 2RLe\dot{\phi} \quad (5.87)$$

Comme souligné auparavant, les débits de fuite et d'alimentation affichent, pour un amortisseur pressurisé, une dépendance prépondérante sur la puissance de la pompe et sur les conditions d'étanchéité, l'influence des vitesses \dot{e} et $\dot{\phi}$ n'étant que secondaire. En effet, la dérivée $\frac{\partial Q_s}{\partial \dot{\phi}}$ calculée à partir du lissage de Q_s s'avère environ cent fois inférieure à la valeur obtenue de l'équation 5.87. Les débits de fuite, Q_s , peuvent présenter également des différences importantes, restant toutefois du même ordre de grandeur au delà d'une certaine vitesse de rotation. Ainsi, pour le palier court considéré, la contribution du transport d'énergie cinétique par les frontières se révèle être négligeable dans notre modèle, ne dépassant pas 15 [N]. Dans le modèle de EL SHAFEI, par contre, cette contribution domine sur les termes inertiels associés à l'énergie cinétique du volume de contrôle, ce qui explique l'écart entre les résultats.

La comparaison de notre approche avec d'autres modèles nous permet de conclure que les efforts inertiels calculés à partir du lissage de l'énergie cinétique et des débits de fuite et d'alimentation sont cohérents. Les résultats montrent que le système d'alimentation joue un rôle très important dans la prise en compte des effets d'inertie. La manière dont il affecte les forces inertielles est double. D'une part, la rupture géométrique de la surface du SqF modifie le développement du champ de pression et d'autre part, l'injection d'huile induit un écoulement supplémentaire qui s'ajoute à celui dû à l'écrasement du film fluide. Dans le cas d'un amortisseur ouvert, la méthode énergétique s'avère très sensible à la relation entre le débit de fuite, le système d'alimentation et la cinématique du système.

5.2.3 Influence de l'inertie sur la dynamique de rotors flexibles

Pour clore ce chapitre, nous présentons dans cette section l'utilisation de lissages pour l'analyse de la dynamique de rotors flexibles incorporant des amortisseurs *squeeze film* alimentés ponctuellement. L'objectif des simulations est double : étudier l'influence de l'inertie du fluide sur la performance du

système mécanique et tester l'application de la régression linéaire *stepwise* pour des lissages sur quatre paramètres cinématiques, à savoir ε , ϕ , $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$. Nous mènerons d'abord des calculs pour un rotor Jeffcott dans le but de valider qualitativement la prise en compte des effets d'inertie, et nous étudierons ensuite la réponse au balourd du modèle de dynamique d'ensemble, décrit dans le chapitre précédent.

5.2.3.1 Identification des efforts visqueux

Le lissage des forces hydrodynamiques visqueuses en tant que fonctions des quatre paramètres cinématiques ε , ϕ , $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$ (au lieu de trois dans le cas du problème axisymétrique) s'avère beaucoup plus compliqué et délicat. Compliqué du fait du comportement plus complexe du SqF possédant des points d'injection, et délicat compte tenu des besoins supplémentaires en mémoire et en temps de calcul pour effectuer l'identification. Nous avons constaté que la réalisation du lissage par étapes permet d'aboutir à une meilleure description des efforts non linéaires. Ainsi, nous identifions premièrement les forces pour des mouvements particuliers, à savoir purement radiaux et purement tangentiels, les termes croisés en vitesses étant traités indépendamment à la dernière étape du lissage. Les forces visqueuses sont donc décrites de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 f_{tv}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) &= \underbrace{f_{t0}(\varepsilon, \phi)}_{\text{terme statique}} + \underbrace{f_{t1}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon})}_{\text{mouv. radial}} + \underbrace{f_{t2}(\varepsilon, \phi, \dot{\phi})}_{\text{mouv. tangentiel}} + \underbrace{f_{t3}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi})}_{\text{terme croisé en vitesses}} \\
 f_{rv}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) &= \underbrace{f_{r0}(\varepsilon, \phi)}_{\text{terme statique}} + \underbrace{f_{r1}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon})}_{\text{mouv. radial}} + \underbrace{f_{r2}(\varepsilon, \phi, \dot{\phi})}_{\text{mouv. tangentiel}} + \underbrace{f_{r3}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi})}_{\text{terme croisé en vitesses}}
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

Il est intéressant de faire remarquer que les termes f_{t0} et f_{r0} correspondent physiquement aux forces de rappel radiale et tangentielle de l'amortisseur, engendrées par la pressurisation de l'alimentation. Comme observé dans le chapitre IV, ces termes sont d'autant plus importants que la restriction du flux axial aux extrémités du film (voir figure 5.21).

La première étape du lissage consiste à identifier f_{t0} et f_{r0} , ce qui nécessite un ensemble de données calculés pour $\dot{\varepsilon} = \dot{\phi} = 0$. Pour ce faire, il suffit de rajouter ces conditions cinématiques aux points de Gauss définis dans les directions $\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$. On peut ensuite procéder au lissage de f_{t1} , f_{t2} , f_{r1} et f_{r2} , après la soustraction de la contribution des termes statiques aux forces totales f_{tv} et f_{rv} . L'identification s'achève enfin en lissant les termes croisés f_{t3} et f_{r3} , donnés par :

$$\begin{aligned}
 f_{t3} &= f_{tv} - f_{t0} - f_{t1} - f_{t2} \\
 f_{r3} &= f_{rv} - f_{r0} - f_{r1} - f_{r2}
 \end{aligned} \tag{5.89}$$

Si les efforts non linéaires sont projetés sur des fonctions monômiales, par exemple, les forces hydrodynamiques visqueuses du SqF peuvent s'écrire :

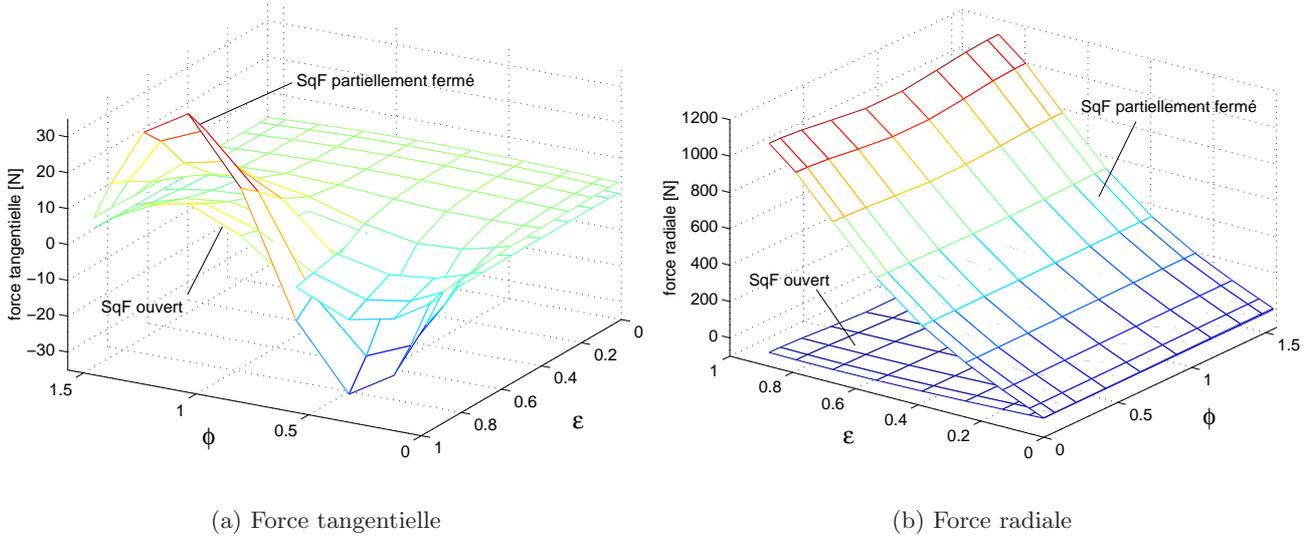


FIG. 5.21: Forces hydrostatiques engendrées par un SqF ouvert ($C_l = 5000 [mm^2/Pa.s]$) et par un SqF partiellement fermé ($C_l = 5 \times 10^{-4} [mm^2/Pa.s]$)

$$f_{tv}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) \simeq \sum_{i=0}^{P0^t} \sum_{j=0}^{P0^t} C0_{i,j}^t \varepsilon^i \phi^j + \sum_{i=0}^{P1^t} \sum_{j=0}^{P1^t} \sum_{k=1}^{P1^t} C1_{i,j,k}^t \varepsilon^i \phi^j \dot{\varepsilon}^k + \quad (5.90)$$

$$\sum_{i=0}^{P2^t} \sum_{j=0}^{P2^t} \sum_{l=1}^{P2^t} C2_{i,j,l}^t \varepsilon^i \phi^j \dot{\phi}^l + \sum_{i=0}^{P3^t} \sum_{j=0}^{P3^t} \sum_{k=1}^{P3^t} \sum_{l=1}^{P3^t} C3_{i,j,k,l}^t \varepsilon^i \phi^j \dot{\varepsilon}^k \dot{\phi}^l$$

$$f_{rv}(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi}) \simeq \sum_{i=0}^{P0^r} \sum_{j=0}^{P0^r} C0_{i,j}^r \varepsilon^i \phi^j + \sum_{i=0}^{P1^r} \sum_{j=0}^{P1^r} \sum_{k=1}^{P1^r} C1_{i,j,k}^r \varepsilon^i \phi^j \dot{\varepsilon}^k + \quad (5.91)$$

$$\sum_{i=0}^{P2^r} \sum_{j=0}^{P2^r} \sum_{l=1}^{P2^r} C2_{i,j,l}^r \varepsilon^i \phi^j \dot{\phi}^l + \sum_{i=0}^{P3^r} \sum_{j=0}^{P3^r} \sum_{k=1}^{P3^r} \sum_{l=1}^{P3^r} C3_{i,j,k,l}^r \varepsilon^i \phi^j \dot{\varepsilon}^k \dot{\phi}^l$$

Comme l'énergie cinétique, les forces visqueuses sont supposées périodiques dans la direction ϕ , la période étant déterminée par le nombre de points d'alimentation. On considère le SqF ouvert ($C_l = 5000 [mm^2/Pa.s]$) et la plage de conditions cinématiques définies dans la section précédente. La cavitation est traitée en utilisant la condition de Gumbel modifiée avec $P_{vap} = 0,01 [bar]$. Le tableau 5.1 résume les paramètres utilisés pour le lissage, effectué par régression linéaire *stepwise*.

Les bases de fonctions de projection sont choisies suite à l'inspection de l'allure des termes devant être identifiés, générés numériquement. La pondération des données du lissage doit être, a priori, adoptée comme la procédure standard à suivre. Elle peut néanmoins conduire parfois à des résultats insatisfaisants. Dans ces cas, il vaut mieux appliquer la régression linéaire sans pondération, de manière à privilégier la qualité des approximations à haut niveau d'effort, au détriment de la description à faible niveau. Il faut tout de même être conscient que l'analyse de la stabilité résultant des forces ainsi lissées pourrait être pénalisée, à cause d'une évaluation imprécise des dérivées des efforts non linéaires par rapport aux paramètres cinématiques.

terme	base de projection	ordres de troncature	pondération
f_{t0}	$\varepsilon^i \phi^j$	$P0_i^t = 5; P0_j^t = 5$	oui
f_{t1}	$\varepsilon^i \phi^j \dot{e}^k$	$P1_i^t = 7; P1_j^t = 5; P1_k^t = 8$	non
f_{t2}	$\varepsilon^i \phi^j \ddot{\phi}^l$	$P2_i^t = 8; P2_j^t = 5; P2_l^t = 5$	oui
f_{t3}	$\varepsilon^i \phi^j \dot{e}^k \ddot{\phi}^l$	$P3_i^t = 6; P3_j^t = 6; P3_k^t = 7; P3_l^t = 7$	non
f_{r0}	$\varepsilon^i \phi^j$	$P0_i^r = 5; P0_j^r = 5$	oui
f_{r1}	$\varepsilon^i \phi^j \dot{e}^k$	$P1_i^r = 9; P1_j^r = 6; P1_k^r = 6$	oui
f_{r2}	$1/(1 - \varepsilon)^i \phi^j \ddot{\phi}^l$	$P2_i^r = 5; P2_j^r = 6; P2_l^r = 3$	non
f_{r3}	$1/(1 - \varepsilon)^i \phi^j \dot{e}^k \ddot{\phi}^l$	$P3_i^r = 4; P3_j^r = 6; P3_k^r = 7; P3_l^r = 5$	non

TAB. 5.1: Paramètres du lissage des forces du SqF ouvert

5.2.3.2 Simulation du rotor Jeffcott

Considérons premièrement la réponse au balourd d'un rotor Jeffcott incorporant des amortisseurs *squeeze film* ouverts. Les données du rotor sont les suivantes:

$$m_1=45 \text{ [kg]}; m_2=15 \text{ [kg]}; k_1 = 10^8 \text{ [N/m]}; c_1=367 \text{ [N.s/m]}; k_x = 10^7 \text{ [N/m]}; k_y = 10^7 \text{ [N/m]};$$

Par rapport aux configurations étudiées auparavant, nous avons triplé la valeur de la raideur de l'arbre, afin d'éloigner les deux vitesses critiques et mieux trancher l'influence des effets d'inertie du fluide sur chaque pic de résonance.

Avant d'introduire les effets d'inertie du fluide dans le calcul, nous avons comparé les résultats obtenus en estimant les forces visqueuses par différences finies et par les approximations dérivées des lissages. La figure 5.22 présente la réponse au niveau du SqF et l'évolution du module du multiplicateur de Floquet principal en fonction de la vitesse du rotor, pour un balourd de $\varrho m_1 = 0,001 \text{ [kg.m]}$. La corrélation des courbes reflète une évaluation assez précise du niveau d'effort non linéaire par le lissage, surtout à haute vitesse, mais une description de qualité insuffisante de la forme des forces visqueuses. Il en résulte des approximations acceptables pour la détermination de la réponse au balourd, qui conduisent toutefois à une analyse de la stabilité imparfaite. En scrutant les erreurs de lissage de chaque terme des forces visqueuses, nous concluons que le point défaillant de la procédure d'identification concerne la description de la force radiale au voisinage de $\dot{e} = 0$. Dans la conclusion de ce chapitre nous discuterons des possibilités pour remédier à ce problème.

La prise en compte des effets d'inertie du fluide lors de calculs préliminaires de la réponse au balourd du rotor Jeffcott s'est avérée très problématique. Nous avons observé que la variation de la masse équivalente de l'écoulement fonction de la cinématique du rotor donnait origine à des multiples solutions lorsque l'excentricité dépassait des valeurs d'environ 0,4. Par conséquent, la technique de continuation *pseudo-arc length* ne permettait pas de suivre de manière régulière l'évolution de la réponse. En effet, en utilisant des expressions pour les forces d'inertie beaucoup plus simples que celles que nous obtenons au travers du lissage, la méthode de résolution analytique proposée par EL-SHAFEI [44][45] pour des orbites circulaires et centrées aboutit à un polynôme de degré huit sur la vitesse, avec des coefficients fonctions de l'excentricité. Si l'on démontre l'existence de huit solutions en employant

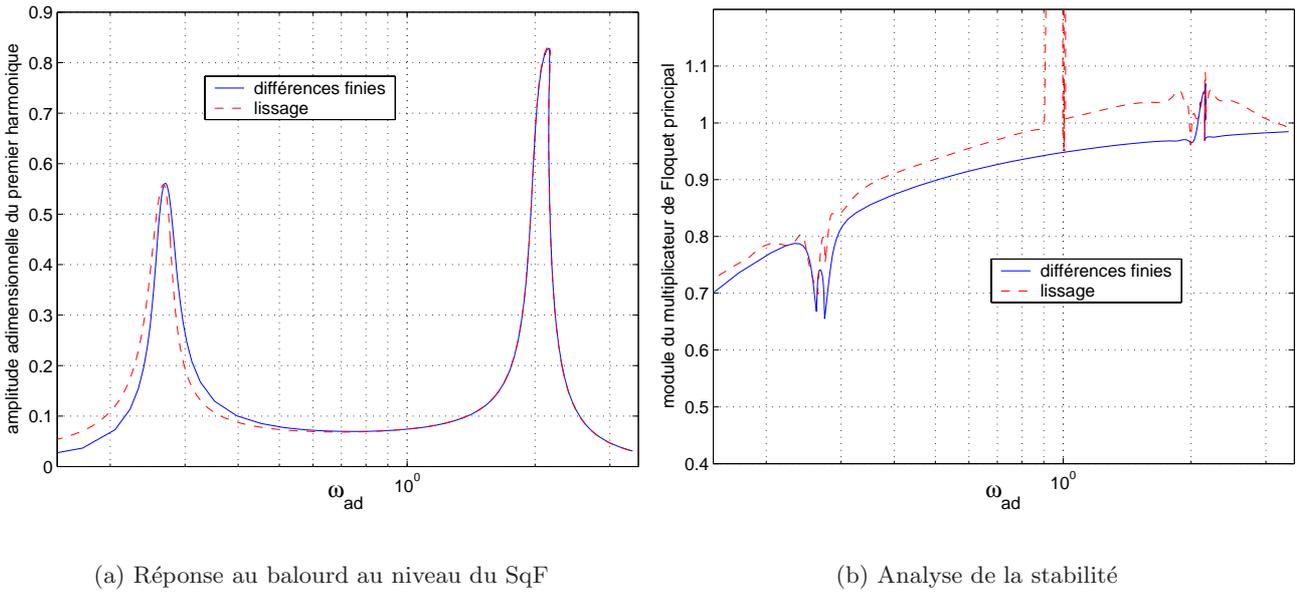


FIG. 5.22: *Comportement dynamique du rotor Jeffcott - Modèle de SqF visqueux*

un modèle de forces d'inertie très simplifié, on peut s'attendre à un nombre encore plus élevé lorsque ces forces ont une description sensiblement plus complexe.

Nous avons trouvé deux solutions pour surmonter ce problème : la réduction de l'incrément *pseudo-arc length*, moyennant un coût en temps de calcul beaucoup plus important, ou la simplification des expressions des efforts inertiels à partir de l'hypothèse d'orbite circulaire et centrée, auquel cas on impose $\dot{e} = \ddot{e} = \ddot{\phi} = 0$ lors de la détermination de f_{ri} et de f_{ti} . Bien entendu, cette hypothèse doit être ensuite levée pour l'analyse de la stabilité.

La figure 5.23 présente les réponses obtenues au niveau du SqF et du disque, respectivement, pour deux valeurs de balourd distinctes. Les calculs ont été réalisés avec un incrément *pseudo-arc length* réduit d'un facteur dix (de 0,01 à 0,001) et en évaluant les forces visqueuses au travers des approximations issues des lissages. Les courbes sont exposées en fonction du nombre de Reynolds, $Re = \rho\omega C^2/\mu$, afin de rendre l'interprétation de l'influence de l'inertie du fluide plus directe.

Les réponses sont qualitativement similaires à celles déterminées par SAN ANDRÉS et VANCE [152], dans la mesure où la deuxième vitesse critique chute, l'amplitude de son pic au niveau du disque et du SqF est amplifiée et les effets non linéaires qui provoquent le phénomène de saut sont atténués. Par contre, on observe que les effets d'inertie ne deviennent importants qu'au delà de $Re = 20$, tandis que la réponse au balourd calculée par SAN ANDRÉS et VANCE possède déjà une sensibilité considérable à partir de $Re = 5$.

L'effet de l'inertie du fluide sur la transmissibilité, figure 5.24 (a), est favorable au voisinage des pics de résonance, toutefois nuisible ailleurs. Les courbes présentées montrent encore (de manière implicite) la nette dégradation de la qualité du lissage pour de basses vitesses de rotation, notamment au dessous de $Re \approx 4,5$ ($\omega_{ad} \approx 0,1$).

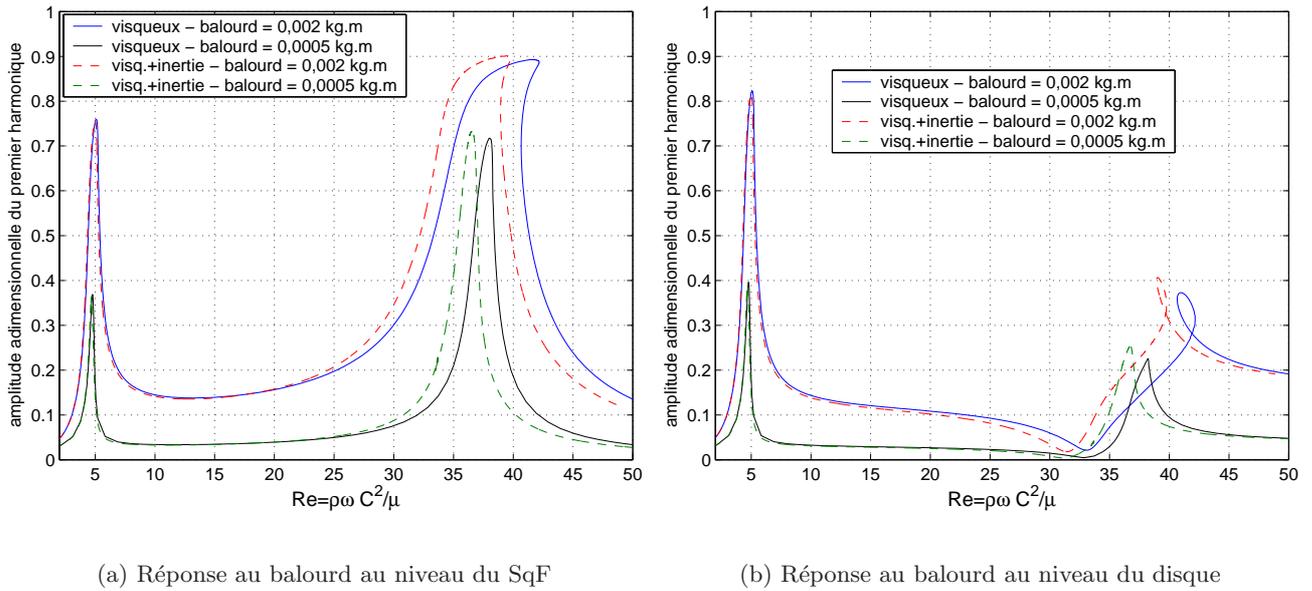


FIG. 5.23: Influence des effets d'inertie sur la réponse au balourd du Jeffcott

Le calcul avec des forces visqueuses déterminées par différences finies s'est effectué en simplifiant les expressions des efforts inertiels comme proposé plus haut, ce qui a permis de reprendre la valeur de 0,01 pour l'incrément *pseudo-arc length*. Ce calcul permet d'analyser l'influence des effets d'inertie sur la stabilité du Jeffcott (figure 5.24 (b)). On constate l'apparition d'une nouvelle bifurcation à $Re \approx 28$, au delà de laquelle le rotor reste instable.

5.2.3.3 Simulation du rotor de dynamique d'ensemble

Ce deuxième exemple concerne l'étude d'une application plus réaliste. Le modèle du rotor est celui de dynamique d'ensemble présenté dans le chapitre précédent, et le SqF ouvert est remplacé par un SqF partiellement étanche ($C_l = 5 \times 10^{-4}$ [mm²/Pa.s]).

Les tentatives de projection des forces visqueuses de l'amortisseur sur des bases de fonctions polynomiales et polynomio-rationnelles à l'aide de la technique de régression linéaire *stepwise* n'ont pas aboutit. La précision des lissages est alors pénalisée, notamment par la mauvaise identification des efforts, aussi bien au voisinage de $\dot{\epsilon} = 0$ que pour des vitesses de précession, $\dot{\phi}$, relativement faibles. Par conséquent, les calculs ont été réalisés, à un coût temporel élevé, en estimant les forces visqueuses par différences finies. Le lissage de l'énergie cinétique et des débits de fuite et d'alimentation pour la modélisation des forces inertiels, en revanche, n'a pas posé de difficultés particulières.

La réponse du rotor à un balourd de 0,003 [kg.m] situé au niveau du disque, est présentée dans la figure 5.25. Les expressions des forces d'inertie du SqF ont dû être encore une fois simplifiées selon l'hypothèse d'orbites circulaires et centrées, pour que le calcul n'éprouve pas de problèmes de convergence. Les résultats doivent donc être analysés avec soin. Les effets d'inertie semblent se traduire dans cet exemple par une forte croissance de l'amortissement du SqF, ce qui provoque un décalage

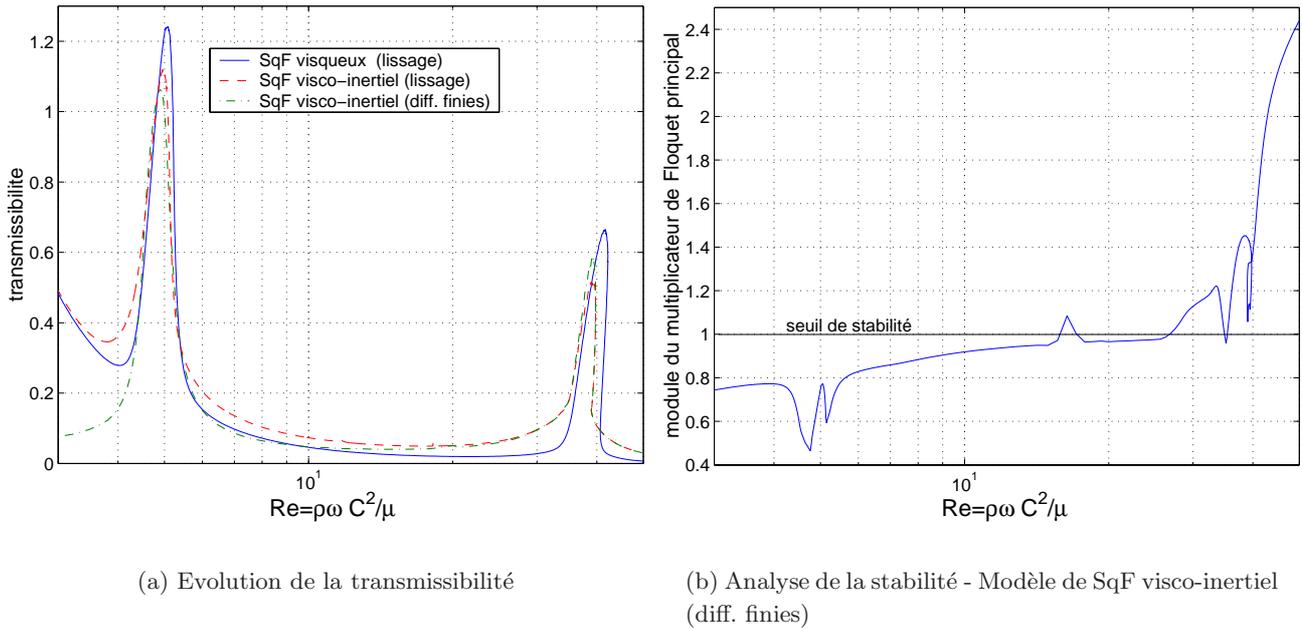


FIG. 5.24: Influence des effets d'inertie sur la transmissibilité du SqF et la stabilité du rotor Jeffcott - Balourd $\rho m_1 = 0,002[kg.m]$

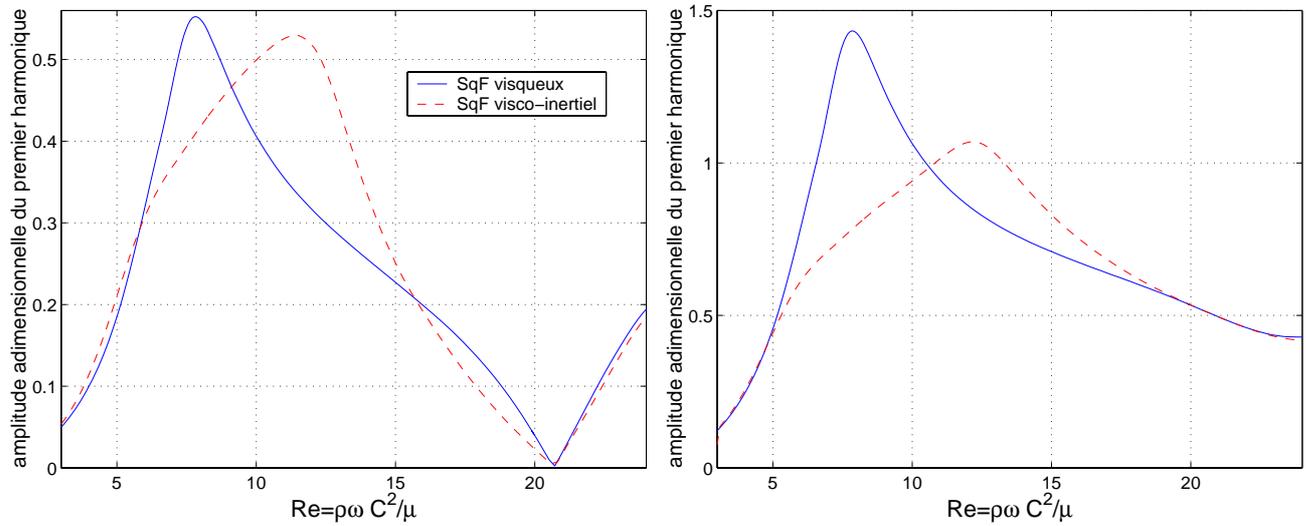
de la première vitesse critique à droite et une réduction de l'amplitude et élargissement du pic de résonance. De plus, par rapport au SqF court, ces effets ont déjà une influence très importante pour des nombres de Reynolds beaucoup plus faibles, résultat cohérent avec les observations expérimentales de JUNG, SAN ANDRÉS et VANCE [72][73].

Côté isolation vibratoire, on constate que les effets d'inertie du fluide ont une influence défavorable sur toute la plage de vitesse considérée, comme le montre la figure 5.26 (a), conclusion qualitativement similaire à celle tirée par EL-SHAFEI [45]. La stabilité du rotor est très affectée par les forces inertielles du SqF, le calcul indiquant une très large plage d'opération instable (figure 5.26 (b)), qui découle de bifurcations de Hopf secondaire. Ce résultat nous semble à vérifier, car à part les bifurcations de type point selle (phénomène de saut) et de dédoublement de période, aucune autre instabilité engendrée par des amortisseurs *squeeze film* n'a été reportée dans la littérature jusqu'à présent.

D'après les résultats présentés dans cette section, une étude expérimentale nous semble indispensable pour vérifier les limitations de la modélisation des effets d'inertie d'un SqF long par la méthode énergétique alliée à des techniques de lissage.

5.3 Conclusion

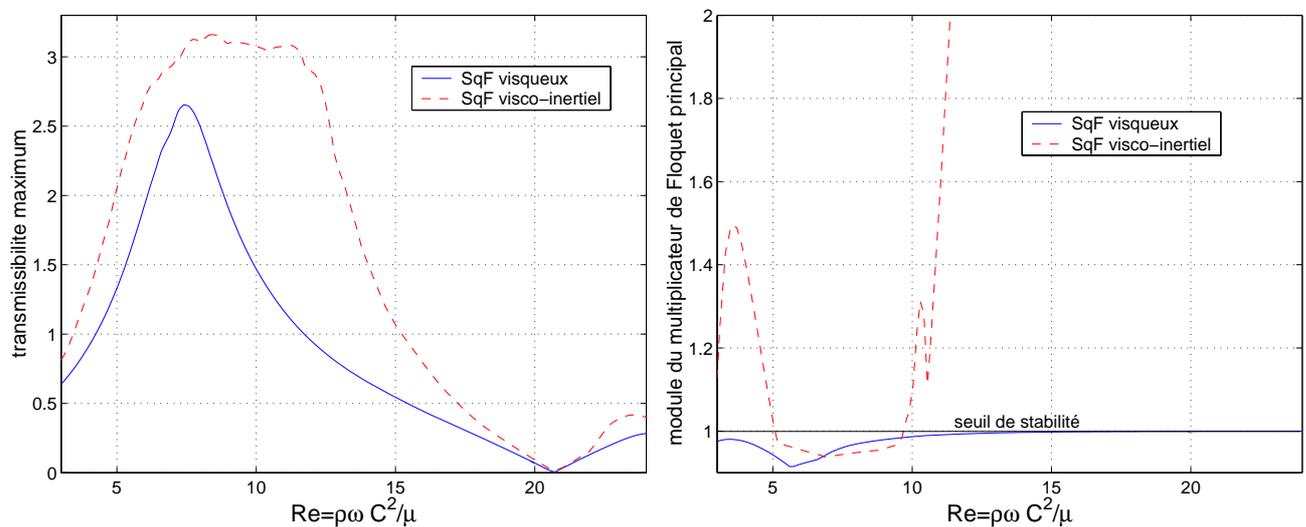
Ce chapitre présente une nouvelle stratégie de représentation des forces hydrodynamiques du SqF pour l'application aux simulations de la dynamique d'ensemble. Le but est de développer des expressions permettant une évaluation rapide des efforts non linéaires, sans pénaliser pour autant la prise en



(a) Réponse au balourd au niveau du SqF

(b) Réponse au balourd au niveau du disque

FIG. 5.25: Influence des effets d'inertie sur la réponse au balourd du modèle de dynamique d'ensemble



(a) Evolution de la transmissibilité

(b) Analyse de la stabilité

FIG. 5.26: Influence des effets d'inertie sur la transmissibilité du SqF et la stabilité du modèle de dynamique d'ensemble

compte du comportement de l'amortisseur.

Notre approche s'appuie sur le découplage des analyses de la dynamique du film fluide et de la dynamique du système mécanique. Nous admettons, par conséquent, que le film d'huile répond de manière quasi-statique en termes hydrodynamiques au mouvement imposé par les frontières solides qui le délimitent. Les techniques de lissage mises en avant ne seraient donc pas convenables pour la modélisation de fluides visco-élastiques ou pour l'utilisation de la condition de cavitation de Jakobsson-Floberg-Olsson. Pour la prise en compte des effets d'inertie, nous modélisons également les effets visqueux et inertiels du film fluide.

Deux techniques de lissage, à savoir la régression linéaire et la projection sur polynômes de Chebyshev, sont testées pour la construction d'approximations des forces visqueuses. Les modèles peuvent être réduits et identifiés de manière plus efficace grâce à l'utilisation de la technique *stepwise*. La régression linéaire *stepwise* est retenue pour le lissage de l'énergie cinétique du SqF, du fait de sa souplesse au niveau du choix des fonctions de projection et de la possibilité de pondérer les données à identifier.

L'efficacité des modèles de SqF obtenus par lissage est analysée à partir de simulations de la dynamique de rotors flexibles. On constate que la description des forces d'un SqF axisymétrique fournit des résultats assez précis et à un coût temporel très intéressant. Cependant, la complexité des forces visqueuses d'un amortisseur alimenté ponctuellement pose des difficultés pour l'identification, ce qui pénalise notamment l'analyse de la stabilité du système. Un autre inconvénient concerne la définition arbitraire des bornes des vitesses radiale et tangentielle lors de la génération des données pour l'identification.

La solution des problèmes soulevés dans le paragraphe ci-dessus se trouve probablement dans le travail très récent de XIA, JIAO, CHEN, HUANG et ZHANG [195]. Afin de développer des bases de données pour l'évaluation par interpolation des forces de paliers hydrodynamiques, ils présentent une astuce pour réduire le nombre de paramètres cinématiques indépendants, laquelle permet également de normaliser la plage de vitesse. L'application de la méthode à des amortisseurs *squeeze film* se ferait de la manière suivante. Soit l'équation de Reynolds bidimensionnelle donnée par :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \dot{e} \cos \theta + e \dot{\phi} \sin \theta \quad (5.92)$$

Cette équation peut être adimensionnée selon deux cas de figures différents :

1. Cas $e|\dot{\phi}| \geq |\dot{e}|$ En notant $p_1 = p/e|\dot{\phi}|$ et $q_1 = \dot{e}/e|\dot{\phi}|$, l'équation de Reynolds devient :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_1}{\partial z} \right) = \begin{cases} q_1 \cos \theta + \sin \theta & \text{si } \dot{\phi} > 0 \\ q_1 \cos \theta - \sin \theta & \text{si } \dot{\phi} < 0 \end{cases} \quad (5.93)$$

2. Cas $e|\dot{\phi}| \leq |\dot{e}|$ On définit dans ce cas $p_2 = p/|\dot{e}|$ et $q_2 = e\dot{\phi}/|\dot{e}|$, et l'équation de Reynolds devient :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_2}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) = \begin{cases} \cos \theta + q_2 \sin \theta & \text{si } \dot{e} > 0 \\ -\cos \theta + q_2 \sin \theta & \text{si } \dot{e} < 0 \end{cases} \quad (5.94)$$

Grâce à cette adimensionnalisation, on a $-1 \leq q_1 \leq 1$ et $-1 \leq q_2 \leq 1$. XIA, JIAO, CHEN, HUANG et ZHANG construisent la base de données d'efforts hydrodynamiques en résolvant numériquement l'équation de Reynolds, les forces étant considérées comme nulles pour $\dot{e} = \dot{\phi} = 0$. Il est intéressant de souligner que la génération de la base de données peut s'accomplir de manière très efficace, puisque pour une position donnée du SqF, seulement le deuxième membre de l'équation de Reynolds change. Ainsi, l'assemblage de la matrice de fluidité (voir chapitre II), le goulot d'étranglement temporel de la résolution numérique, n'est effectué qu'une fois pour le calcul des quatre possibilités explicitées ci-dessus. Nous tenons à faire remarquer également, que la pression de vaporisation pour la détermination de la poche de cavitation correspondrait à $\bar{p}_{vap} = p_{vap}/e|\dot{\phi}|$, ou à $\bar{p}_{vap} = p_{vap}/|\dot{e}|$, selon le cas de figure considéré. Puisque \dot{e} et $\dot{\phi}$ ne sont pas connus lors de la génération de données, le zéro absolu peut être utilisé comme valeur approximative pour la pression de vaporisation.

Au lieu de stocker les données générées, notre approche permet d'en déduire des expressions pour les forces visqueuses du SqF. Compte tenu de la normalisation proposée, le lissage doit être mené sur les grandeurs suivantes :

1. Cas $e|\dot{\phi}| \geq |\dot{e}|$

$$\left. \begin{aligned} f_{r1p}(\varepsilon, \phi, q_1) &= \int_{\mathcal{A}} p_{1p} \cos \theta d\mathcal{A} \Rightarrow f_{rv} = f_{r1p}e|\dot{\phi}| \\ f_{t1p}(\varepsilon, \phi, q_1) &= \int_{\mathcal{A}} p_{1p} \sin \theta d\mathcal{A} \Rightarrow f_{tv} = f_{t1p}e|\dot{\phi}| \end{aligned} \right\} \dot{\phi} > 0$$

$$\left. \begin{aligned} f_{r1n}(\varepsilon, \phi, q_1) &= \int_{\mathcal{A}} p_{1n} \cos \theta d\mathcal{A} \Rightarrow f_{rv} = f_{r1n}e|\dot{\phi}| \\ f_{t1n}(\varepsilon, \phi, q_1) &= \int_{\mathcal{A}} p_{1n} \sin \theta d\mathcal{A} \Rightarrow f_{tv} = f_{t1n}e|\dot{\phi}| \end{aligned} \right\} \dot{\phi} < 0 \quad (5.95)$$

où p_{1p} correspond à p_1 pour $\dot{\phi} > 0$, et p_{1n} à p_1 pour $\dot{\phi} < 0$.

2. Cas $e|\dot{\phi}| \leq |\dot{e}|$

$$\left. \begin{aligned} f_{r2p}(\varepsilon, \phi, q_2) &= \int_{\mathcal{A}} p_{2p} \cos \theta d\mathcal{A} \Rightarrow f_{rv} = f_{r2p}|\dot{e}| \\ f_{t2p}(\varepsilon, \phi, q_2) &= \int_{\mathcal{A}} p_{2p} \sin \theta d\mathcal{A} \Rightarrow f_{tv} = f_{t2p}|\dot{e}| \end{aligned} \right\} \dot{e} > 0$$

$$\left. \begin{aligned} f_{r2n}(\varepsilon, \phi, q_2) &= \int_{\mathcal{A}} p_{2n} \cos \theta d\mathcal{A} \Rightarrow f_{rv} = f_{r2n}|\dot{e}| \\ f_{t2n}(\varepsilon, \phi, q_2) &= \int_{\mathcal{A}} p_{2n} \sin \theta d\mathcal{A} \Rightarrow f_{tv} = f_{t2n}|\dot{e}| \end{aligned} \right\} \dot{e} < 0 \quad (5.96)$$

où p_{2p} correspond à p_2 pour $\dot{e} > 0$, et p_{2n} à p_2 pour $\dot{e} < 0$.

La contribution du système d'alimentation aux forces hydrodynamiques visqueuses doit être prise en compte en lissant indépendamment les termes statiques f_{t0} et f_{r0} .

En adoptant la procédure mise en avant par XIA, JIAO, CHEN, HUANG et ZHANG [195], le développement des approximations pour les efforts non linéaires du SqF peut être exécuté très rapidement, grâce à la réduction de l'ensemble des conditions cinématiques, conjuguée à l'efficacité de la régression linéaire *stepwise*. De plus, la normalisation doit permettre d'améliorer la description de la force radiale au voisinage de $\dot{e} = 0$.

L'adaptation de la méthode décrite ci-dessus pour la déduction des forces inertielles n'est pas aussi directe que pour celle des forces visqueuses. Elle nécessite une étude plus approfondie. De toute manière, l'allure de l'énergie cinétique et des débits d'alimentation et de fuite fonctions de ε , ϕ , \dot{e} et $\dot{\phi}$ étant plus simple, le lissage à quatre variables s'avère assez facile.

Une amélioration des méthodes de calcul en dynamique des structures non linéaires, ce qui englobe également les techniques de résolution de système d'équations algébriques non linéaires, se fait nécessaire pour tenir compte des effets d'inertie du SqF. En outre, il semble nécessaire la vérification expérimentale de la validité de notre approche de modélisation des efforts inertiels, principalement pour le cas d'un amortisseur étanche ou partiellement étanche.

Chapitre 6

Application optimale du *squeeze film*

Depuis le début des années 80, parallèlement à la recherche dans les sens d'une meilleure compréhension et modélisation des amortisseurs *squeeze film*, des solutions pour l'optimisation de leurs applications se sont développées. Ces solutions englobent des modifications géométriques, l'utilisation de fluides ayant des propriétés spéciales et des stratégies de contrôle. Les objectifs principaux des nouvelles configurations de SqF sont :

- d'atténuer les effets non linéaires pouvant dégrader la réponse du rotor,
- de simplifier la construction et réduire l'encombrement de l'amortisseur,
- de contrôler le niveau des forces générées de manière à obtenir un compromis optimal entre amortissement et isolation vibratoire, selon la vitesse du rotor.

La première partie de ce chapitre sera consacrée à l'état de l'art des solutions innovantes pour l'amélioration de la performance des amortisseurs *squeeze film* dans le domaine des machines tournantes. Ensuite, nous mettrons en avant une nouvelle stratégie de contrôle du SqF, dont les potentialités seront analysées à la lumière de simulations de la dynamique de rotors flexibles. Nous terminerons par la présentation du banc d'essai ASF (*Adaptive Squeeze Film*), actuellement en cours de développement au sein de l'équipe d'Analyse Non Linéaire de Systèmes Tournants du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon.

6.1 Etat de l'art

6.1.1 Atténuation des effets non linéaires

Il a été constaté expérimentalement que la non linéarité des forces produites par l'action du SqF peut provoquer des sauts dans la réponse au balourd du rotor [125], ou le conduire à des mouvements sous-harmoniques [33]. Des orbites chaotiques et quasi-périodiques sont également prédites théoriquement, mais n'ont jamais été observées [133].

Les phénomènes de saut peuvent résulter de deux mécanismes physiques distincts : le raidissement dynamique du SqF à forte excentricité et son assouplissement engendré par la pénétration d'air dans le film lors d'une montée en vitesse. Le premier mécanisme est lié au comportement fortement non linéaire de la force radiale de l'amortisseur, laquelle s'accroît très rapidement lorsque l'amplitude de l'orbite devient très importante. Quand cet effet est très prononcé lors du passage d'une vitesse critique, le pic de vibration se décale à des vitesses plus élevées, du fait de l'augmentation de la raideur dynamique du SqF. Ce phénomène est très indésirable dans la mesure où la résonance peut s'étendre jusqu'à la vitesse d'opération du rotor [175]. Il en résulterait des orbites à forte excentricité au niveau de l'amortisseur et, par conséquent, une amplification des charges transmises au stator. Afin d'éviter ce problème, de nombreuses solutions ont été proposées pour adoucir cette non linéarité du SqF.

ZHANG, YAN et LI [205][206] proposent au début des années 90, l'utilisation d'amortisseurs poreux. Grâce à la perméabilité de la piste extérieure du SqF, souvent modélisée par la loi de Darcy [94], la singularité de la force radiale lorsque $\varepsilon \rightarrow 1$ disparaît, et le phénomène de raidissement est ainsi éliminé. A l'origine, l'emploi des matériaux poreux dans le domaine de la dynamique de lames fluides visait la réduction de la poche de cavitation de films lubrifiants [119] et de l'usure des pistes lors des phases de démarrage de la machine tournante [102]. La première étude tenant compte des effets d'écrasement du film a été réalisée par PRAKASH et VIJ [119] dans le but d'en analyser l'influence sur le comportement de paliers hydrodynamiques. TECZA et WALTON [175] et WALTON et MARTIN [191] modifient davantage le SqF en préconisant l'utilisation d'amortisseurs poreux ayant des jeux radiaux plus grands. La perte de charge provoquée lorsque le fluide traverse le milieu perméable devient ainsi la source d'amortissement principale, les effets non linéaires associés à l'action d'écrasement du film se limitant alors à jouer un rôle secondaire.

Une manière très simple de remédier aux problèmes posés par le comportement non linéaire du SqF consiste à augmenter le jeu radial. Cependant, la perte d'amortissement qui en découle doit être compensée par la majoration du rayon ou de la longueur, ce qui le rend plus encombrant. WALTON II et HESHMAT [190] résolvent cette impasse en introduisant dans le jeu radial augmenté de l'amortisseur une spirale reliant ses pistes intérieure et extérieure, laquelle donne origine à deux films d'huile en série. Les résultats expérimentaux démontrent que l'action conjuguée des deux SqF permet d'atténuer la non linéarité de la force radiale, tout en amplifiant l'amortissement par rapport à un SqF classique de mêmes rayon et longueur. De plus, la spirale peut avoir la fonction de compensation de la pesanteur du rotor, ce qui rend possible la suppression des rétenteurs de type cage d'écureuil.

ZHAO et HAHN [207] suggèrent le montage du SqF dans une structure flexible pour éliminer les phénomènes non linéaires indésirables engendrés par la force radiale qu'il produit. Ce faisant, l'hypothèse de roulement parfaitement rigide permet d'exprimer la raideur équivalente du palier sous la forme :

$$k_{eq} = \frac{k_b k_{sf}}{k_b + k_{sf}} + k_t \quad (6.1)$$

où k_t est la raideur des rétenteurs de la piste extérieure du roulement, k_b celle de la structure flexible et k_{sf} celle du SqF. D'après l'équation 6.1, on observe que lorsque l'amortisseur devient très rigide, la raideur équivalente du palier correspond à $k_{eq} \simeq k_b + k_t$. L'effet de la force radiale du SqF sur la

dynamique du rotor est ainsi réduite. Les simulations de la réponse au balourd d'un rotor flexible menées par REZVANI et HAHN [134] mettent en évidence l'influence des paramètres de la structure flexible sur le comportement dynamique du système. Bien que capable de supprimer des sauts dans la réponse au balourd du rotor, une flexibilité excessive de la structure peut théoriquement provoquer d'autres phénomènes non linéaires indésirables tels que des mouvements asynchrones [134].

6.1.2 Configurations compactes et simplifiées

L'amortissement généré suite à l'action d'écrasement de l'huile exercée par la piste intérieure du SqF repose sur la souplesse des rétenteurs de la bague extérieure du roulement (voir figure 1.1). Afin d'assurer le niveau de flexibilité adéquat, des cages d'écureuil sont communément utilisées. Ce type de support possède toutefois l'inconvénient d'être très encombrant axialement, sa longueur étant souvent trois à quatre fois supérieure à celle de l'amortisseur lui même [153].

L'encombrement de l'amortisseur peut être diminué tout simplement en supprimant la cage d'écureuil, le blocage en rotation de la bague extérieure du roulement étant effectué par un système de crans. REZVANI et HAHN [133] mènent une étude théorique et expérimentale sur la performance d'un rotor flexible monté sur des amortisseurs sans rétenteurs. Ils constatent un comportement dynamique plus complexe du SqF, par rapport à la configuration centrée grâce à la cage d'écureuil. Ils mettent en relief également les effets de portance développé par le film au cours de la montée en vitesse et d'auto-centrage des orbites lors du passage des vitesses critiques.

SANTIAGO, SAN ANDRÉS et OLIVERAS [153] testent une configuration de SqF plus compacte, nommée amortisseur *squeeze film* intégral. Le principe de leur dispositif s'appuie sur l'installation d'un support élastique entre les pistes intérieure et extérieur du film d'huile, si bien que le SqF et les rétenteurs sont intégrés. L'efficacité de ce nouvel amortisseur est vérifiée expérimentalement et son comportement s'avère linéaire. Par conséquent, le SqF intégral permet, outre de réduire l'encombrement, d'éviter les effets non linéaires de la force radiale hydrodynamique.

D'autres variations de géométrie du SqF qui ont permis la déposition de brevets sont listées dans la référence [1].

6.1.3 Contrôle des caractéristiques du SqF

L'amplitude des forces hydrodynamiques de l'amortisseur *squeeze film* dépend de la cinématique du système, des dimensions du film, des propriétés du fluide et des conditions aux limites imposées par les systèmes d'alimentation et d'évacuation. Si aucun de ses facteurs n'est contrôlé pendant le fonctionnement du rotor, le SqF se comporte alors comme un dispositif purement passif. Dans ce cas, les critères de dimensionnement de l'amortisseur tels que l'atténuation des vibrations du rotor et la réduction des charges transmises au stator peuvent être incompatibles. Il devient ainsi difficile, voire impossible, d'employer le SqF de la meilleure manière possible sur toute l'étendue de la plage de vitesse de la machine. Afin d'atteindre une performance optimale dans les applications du SqF, des stratégies de contrôle ont été proposées au cours des vingt dernières années.

En 1983, BURROWS, SAHINKAYA et TURKAY [19] analysent la possibilité de minimiser l'amplitude de la réponse au balourd d'un rotor flexible léger en contrôlant la pression d'alimentation du SqF. Les résultats théoriques et expérimentaux démontrent l'intérêt de cette stratégie, dont la mise en œuvre est réalisée au travers de l'injection de l'huile par une valve à ouverture variable. L'implémentation qu'ils préconisent correspond à un contrôle pré-planifié en boucle ouverte de la pression d'alimentation. Cela permet de modifier les caractéristiques de l'amortisseur pour qu'il s'adapte de manière optimale, selon les critères stipulés, à la vitesse de rotation du système.

Une autre stratégie de contrôle des caractéristiques du SqF est mise en avant par MU, DARLING et BURROWS en 1991 [101]. Il s'agit de faire varier le jeu radial de l'amortisseur en contrôlant sa position axiale sur une portée conique. Cette technique est analysée à la lumière de simulations de la dynamique d'un rotor Jeffcott décrivant des orbites circulaires et centrées et les résultats se montrent positifs. BONNEAU et FRÊNE [11] examinent cette stratégie sur un modèle mécanique plus complexe. Il est intéressant de remarquer dans les résultats, l'effet du changement du jeu radial selon la vitesse du rotor. Au voisinage de la résonance, un jeu plus élevé diminue la raideur dynamique du SqF, ce qui permet des débattements plus importants au niveau du palier, procurant ainsi une dissipation énergétique accrue. Dans les plages de fréquence plus éloignées des vitesses critiques, mieux vaut réduire le jeu radial, et par conséquent les mouvements dans le film, pour améliorer les propriétés de l'amortisseur en terme d'isolation vibratoire.

BONNEAU et FRÊNE [11] analysent dans le même article un autre système de contrôle, basé sur l'utilisation de fluides électro-rhéologiques (voir chapitre II, section **Fluides non newtoniens**). Cette stratégie, développée par NIKOLAJSEN et HOQUE [108] en 1990, consiste à soumettre le film d'huile à un champ électrique dont la variation du voltage permet de modifier la viscosité du fluide. TICHY [179] développe un modèle de SqF électro-rhéologique unidimensionnel à partir duquel il simule la réponse au balourd d'un rotor rigide. Les résultats mettent en relief le potentiel d'utilisation des fluides électro-rhéologiques pour l'optimisation du comportement dynamique du rotor. Les résultats expérimentaux obtenus par MORISHITA et AN [100] corroborent cette conclusion. Plus récemment, GUOZHI, FAH, GUANG, TONG et YANG [59] testent un SqF électro-rhéologique multi-couches. Outre la validation du modèle proposé par Tichy [179], les résultats expérimentaux permettent de constater la capacité de cette nouvelle technologie à atténuer les vibrations lors du passage de vitesses critiques, voire de supprimer les pics de résonance, et de réduire l'amplitude et l'étendue temporelle de la réponse transitoire à une charge dynamique soudaine. Bien que l'efficacité de cette stratégie de contrôle ait été vérifiée expérimentalement, la modélisation du comportement du fluide possède encore des difficultés théoriques à surmonter, telles que le traitement de la cavitation et la prise en compte d'effets bidimensionnels [179]. Un deuxième inconvénient du SqF électro-rhéologique réside dans la possibilité de formation d'arcs électriques lorsque le voltage appliqué est trop important [189].

EL-SHAFEI [46] propose en 1993 une technique de contrôle reposant sur la modification des conditions d'étanchéité de l'amortisseur. En installant des joints glissants aux extrémités du SqF, il parvient à changer leur position axiale à l'aide d'un dispositif d'actionnement hydraulique. Ce faisant, il peut simuler les conditions d'un palier long, capable d'atténuer davantage la réponse du rotor grâce à des forces d'amortissement plus importantes, ou d'un palier court, plus adéquat d'un point de vue de confort vibratoire au niveau du stator. Ce type de SqF, qu'EL-SHAFEI appelle hybride, permet ainsi d'améliorer la performance de l'amortisseur purement passif sur la plage de fonctionnement du rotor.

HATHOUT et EL-SHAFEI [64] présentent la conception d'un contrôle intégral proportionnel, dans le but d'étudier l'application du SqF hybride en tant qu'un dispositif actif. Ils constatent théoriquement que le SqF hybride active la fonction adaptative de l'amortisseur, étant ainsi capable d'atténuer aussi bien la réponse au balourd que les vibrations induites par des charges soudaines. Cette superposition des contrôles actif et adaptatif est également employée avec succès dans des paliers magnétiques [186].

EL-SHAFEI et EL-HAKIM [48] testent l'application du SqF hybride suivant un contrôle adaptatif dont l'action est définie à partir d'un modèle de référence. Cette technique est similaire à celles de contrôle temporel retardé (*time delay control* [197]) dans la mesure où l'on cherche à suivre une réponse optimale prédéfinie. Des mesures de la réponse au balourd d'un rotor flexible permettent de vérifier la robustesse du contrôleur. L'utilisation d'un modèle de référence linéaire s'avère suffisant pour fournir des résultats satisfaisants, malgré le comportement non linéaire des forces hydrodynamiques.

Récemment, VANCE, YING et NIKOLAJSEN [189] présentent une discussion sur l'intérêt de l'emploi de techniques de contrôle dans le domaine des moteurs aéronautiques et sur les gains potentiels par rapport à l'utilisation d'un amortisseur passif. Ils analysent six concepts de palier actif, à savoir le SqF hydrostatique, l'amortisseur piézoélectrique, deux types d'amortisseurs électromagnétiques, l'amortisseur à gaz et le SqF électro-rhéologique, et élisent ce dernier comme la stratégie de contrôle la plus prometteuse. Malheureusement, ils ne considèrent pas dans leur analyse le SqF hybride proposé par EL-SHAFEI.

Dans le domaine d'amortisseurs *squeeze film* actifs, il convient de citer encore le travail de SU-CIU, BONNEAU, BRUN-PICARD, FRÊNE et PASCOVICI [166] sur un SqF à surface d'écrasement variable, pour l'application dans des outils de perçage industriels.

Compte tenu de la synthèse bibliographique exposée ci-dessus, on constate que la modification des caractéristiques du SqF dans le but de contrôler la réponse du système mécanique peut être accomplie de trois manières différentes :

- au travers du changement des dimensions du film;
- en faisant varier la viscosité du fluide amortisseur;
- en modifiant les conditions aux limites.

Comme démontré théoriquement et expérimentalement par EL-SHAFEI et ses collègues [46][64][48], le contrôle des conditions d'étanchéité du SqF est une stratégie à la fois efficace, robuste et de mise en œuvre relativement simple. Motivés par ces arguments, nous proposons ci-après un nouvel artifice de régulation du système d'évacuation de l'huile, afin de rendre optimale l'application de l'amortisseur *squeeze film*.

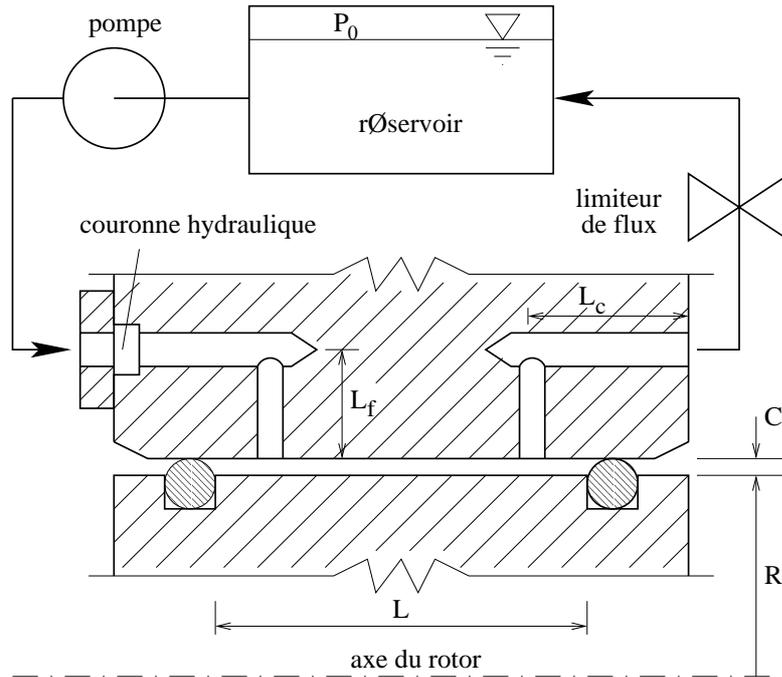


FIG. 6.1: Vue en coupe du SqF avec alimentation et évacuation ponctuelles

6.2 *Squeeze film* adaptatif : étude d'une nouvelle stratégie de contrôle

La manière dont l'évacuation de l'huile affecte le champ de pression dans le film a été discutée dans le chapitre II de ce mémoire, dans la section consacrée à l'analyse de l'influence des conditions aux limites sur le comportement du SqF. Les travaux de LUND, SMALLEY, TECZA et WALTON [88][89], notamment, ont permis de mettre en évidence théoriquement et expérimentalement la forte sensibilité des forces hydrodynamiques vis-à-vis de la résistance à l'écoulement sortant de l'amortisseur par des conduites. En outre, les résultats obtenus dans le cadre de ce doctorat sur les systèmes d'alimentation ponctuelle confirment l'étroite relation entre le SqF et le circuit hydraulique auquel il est lié.

Ces constatations nous incitent à vérifier la possibilité de développer une nouvelle stratégie de contrôle du SqF. Il s'agirait de fermer les extrémités de l'amortisseur par l'intermédiaire de joints toriques par exemple, et de forcer l'évacuation de l'huile par des conduites dans lesquelles l'installation de valves permettrait de réguler la résistance au débit de fuite, comme le montre la figure 6.1. Le principe est donc différent de celui du SqF hybride d'EL-SHAFEI [46], qui exploite les conditions de fuite aux extrémités. Au lieu d'utiliser des joints glissants avec un système d'actionnement hydraulique, notre fonction de contrôle pourrait se réaliser de manière beaucoup plus simple au niveau du film à l'aide de servovalves, une technologie déjà bien maîtrisée.

Nous étudierons dans cette section l'effet de la régulation des valves d'évacuation sur la dynamique de rotors flexibles, au travers de la simulation de réponses au balourd. Nous examinerons principalement l'évolution de l'amplitude de vibration et de la transmissibilité en fonction de notre paramètre de contrôle. Nous discuterons ensuite la stratégie de contrôle à adopter et la façon de la mettre en œuvre. Dans ce qui suit, nous exposons les aspects concernant la modélisation de l'amortisseur à débit

de fuite variable.

6.2.1 Modélisation

Le modèle utilisé est presque identique à celui du chapitre IV de la présente dissertation. Pour une question de simplicité, les effets d'inertie seront négligés dans cette première étude du potentiel de notre stratégie de contrôle. On considère alors que le champ de pression est régi par l'équation de Reynolds, laquelle s'écrit sous la forme suivante pour un fluide isovisqueux et incompressible :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \dot{X}_e \cos \theta + \dot{Y}_e \sin \theta \quad (6.2)$$

Les conditions aux limites aux extrémités de l'amortisseur s'écrivent :

$$q_z(\theta, z = \pm L/2) = C_l [p(\theta, z = \pm L/2) - p_{amb}] \quad (6.3)$$

Un SqF parfaitement étanche peut être modélisé en imposant un coefficient de fuite local nul, $C_l = 0$. Dans la pratique néanmoins, un certain niveau de fuite est toujours observé, même lorsque des joints toriques sont utilisés. De toute façon, ce qui est important est d'avoir un coefficient de fuite assez faible, de manière à ce que le débit sortant par les conduites soit le mécanisme d'évacuation prédominant. Cette condition étant assurée, on peut s'attendre à ce que l'état d'ouverture des valves ait une influence importante sur les forces hydrodynamiques du SqF.

Aux équations de bilan massique aux points d'alimentation présentées dans le chapitre IV s'ajoutent désormais celles relatives aux points d'évacuation. La discrétisation de l'équation de Reynolds par différences finies aboutit alors au système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{surf} \\ p_{pt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{surf} \\ -Q_{pt} \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

où nous rappelons que $\{p_{surf}\}$ est vecteur des pressions sur la surface du SqF et $\{H_{surf}\}$ le vecteur d'écrasement du film. Les nouveaux vecteurs $\{p_{pt}\}$ et $\{Q_{pt}\}$ comprennent les pressions et les débits aux points d'évacuation en plus des pressions et des débits aux points d'alimentation.

Ce système est condensé comme auparavant, cette fois-ci sur les pressions aux points d'évacuation et d'alimentation :

$$([K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]) \{p_{pt}\} = \{-Q_{pt}\} - [K_{21}][K_{11}]^{-1}\{H_{surf}\} \quad (6.5)$$

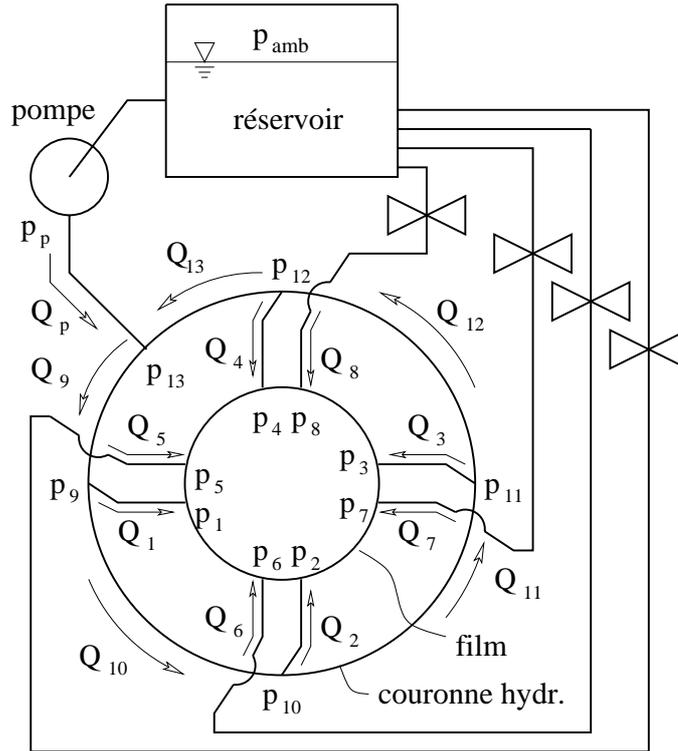


FIG. 6.2: Schéma du circuit hydraulique d'alimentation et d'évacuation du SqF

Le champ de pression dans le film est retrouvé après la détermination de $\{p_{pt}\}$, à l'aide de l'expression :

$$\{p_{surf}\} = [K_{11}]^{-1} (\{H_{surf}\} - [K_{12}]\{p_{pt}\}) \quad (6.6)$$

et la cavitation est prise en compte selon la condition de Gumbel modifiée.

La description complète du problème s'achève en employant l'équation de l'énergie simplifiée et le principe de conservation de la masse (voir chapitre IV) pour modéliser le circuit hydraulique d'alimentation et d'évacuation. Afin d'illustrer la stratégie de contrôle proposée, considérons le SqF schématisé dans la figure 6.2, alimenté par quatre points d'injection et dont l'évacuation s'effectue par le même nombre de conduites. Il convient de faire remarquer que, pour une question d'uniformité dans la mise en équation du problème, les flux dans les conduites d'évacuation sont dirigés vers le film, alors que l'huile s'écoule plus souvent dans le sens opposé pour celles-ci.

En utilisant la même nomenclature adoptée dans le chapitre IV et la notation de la figure 6.2, l'application de l'équation de continuité aux intersections du circuit hydraulique fournit :

$$\begin{aligned}
Re_{13} + Re_p \frac{A_p}{D_{hp}} \frac{D_{hch}}{A_{ch}} - Re_9 &= 0 \\
Re_9 - Re_1 \frac{A_c}{D_{hc}} \frac{D_{hch}}{A_{ch}} - Re_{10} &= 0 \\
Re_{10} - Re_2 \frac{A_c}{D_{hc}} \frac{D_{hch}}{A_{ch}} - Re_{11} &= 0 \\
Re_{11} - Re_3 \frac{A_c}{D_{hc}} \frac{D_{hch}}{A_{ch}} - Re_{12} &= 0 \\
Re_{12} - Re_4 \frac{A_c}{D_{hc}} \frac{D_{hch}}{A_{ch}} - Re_{13} &= 0
\end{aligned} \tag{6.7}$$

où $Re_i = \frac{\rho Q_i D_{hi}}{\mu A_i}$ est le nombre de Reynolds de l'écoulement de débit Q_i , $i = 1, \dots, 13, p$.

En appliquant aux tronçons du circuit hydraulique l'équation de l'énergie simplifiée dont la déduction est explicitée dans le chapitre IV, on obtient après adimensionnalisation :

$$\begin{aligned}
(p_9 - p_1) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_1}{|Re_1|} + \beta_1 \frac{Re_1^3}{|Re_1|} - \bar{H}_1 &= 0 \\
&\vdots \\
(p_{12} - p_4) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_4}{|Re_4|} + \beta_1 \frac{Re_4^3}{|Re_4|} - \bar{H}_4 &= 0 \\
(p_{amb} - p_5) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_5}{|Re_5|} + \beta_1 \frac{Re_5^3}{|Re_5|} - \bar{H}_5 &= 0 \\
&\vdots \\
(p_{amb} - p_8) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_8}{|Re_8|} + \beta_1 \frac{Re_8^3}{|Re_8|} - \bar{H}_8 &= 0 \\
(p_p - p_{13}) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_p}{|Re_p|} - \bar{H}_p &= 0 \\
(p_{13} - p_9) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_9}{|Re_9|} - \bar{H}_9 &= 0 \\
&\vdots \\
(p_{12} - p_{13}) \frac{\rho D_{hch}^2}{\mu^2} \frac{Re_{13}}{|Re_{13}|} - \bar{H}_{13} &= 0
\end{aligned} \tag{6.8}$$

avec,

$$\beta_1 = \left(\frac{D_{hch}^2}{D_{hc}^2} - \frac{D_{hc}^2}{D_{hs}^2} \frac{D_{hch}^2}{D_{hs}^2} \right)$$

$$\bar{H}_i = H_i \frac{\rho^2 D_{hch}^2}{\mu^2}$$

L'application de l'équation de l'énergie simplifiée à la pompe (équation 4.22) permet de faire intervenir les paramètres correspondant aux conditions aux limites du problème, à savoir la puissance

de la pompe et la pression régnant dans le réservoir. Compte tenu des pertes de charge dans le système hydraulique identifiées dans le chapitre IV, les termes \bar{H}_i peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
\bar{H}_1 &= 32|Re_1|\beta_2 + (\zeta_c + \zeta_d) \frac{Re_1^2 D_{hch}^2}{2D_{hc}^2} \\
&\vdots \\
\bar{H}_4 &= 32|Re_4|\beta_2 + (\zeta_c + \zeta_d) \frac{Re_4^2 D_{hch}^2}{2D_{hc}^2} \\
\bar{H}_5 &= 32|Re_5|\beta_2 + (\zeta_c + \zeta_d + \zeta_v) \frac{Re_5^2 D_{hch}^2}{2D_{hc}^2} \\
&\vdots \\
\bar{H}_8 &= 32|Re_8|\beta_2 + (\zeta_c + \zeta_d + \zeta_v) \frac{Re_8^2 D_{hch}^2}{2D_{hc}^2} \\
\bar{H}_p &= 32|Re_p| \frac{l_p D_{hch}^2}{D_{hp}^3} \\
\bar{H}_9 &= 32|Re_9| \frac{l_9}{D_{hch}} \\
&\vdots \\
\bar{H}_{13} &= 32|Re_{13}| \frac{l_{13}}{D_{hch}}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

avec,

$$\beta_2 = \left(\frac{l_s D_{hch}^2 D_{hc}}{D_{hs}^4} + \frac{l_c D_{hch}^2}{D_{hc}^3} \right)$$

ζ_c : coefficient de perte de charge relatif à la géométrie des conduites d'alimentation et d'évacuation,

ζ_d : coefficient de perte de charge associé au jet d'huile sortant d'une conduite et heurtant la piste intérieure du SqF,

ζ_v : coefficient de perte de charge contrôlable des valves des conduites d'évacuation.

On identifie ainsi notre paramètre de contrôle : le coefficient de perte de charge ζ_v . Comme nous le montrerons ci-après, des modifications dans ce coefficient altèrent sensiblement le champ de pression développé dans le film et, par conséquent, les forces hydrodynamiques qui en découlent.

En notant n_a le nombre de points d'alimentation et n_e le nombre de points d'évacuation, le problème possède un total de $4n_a + 2n_e + 4$ inconnues, qui doivent être calculées à partir des équations 6.5, 6.7, 6.8 et 4.22. Pour ce faire, la méthode Newton-Raphson est employée.

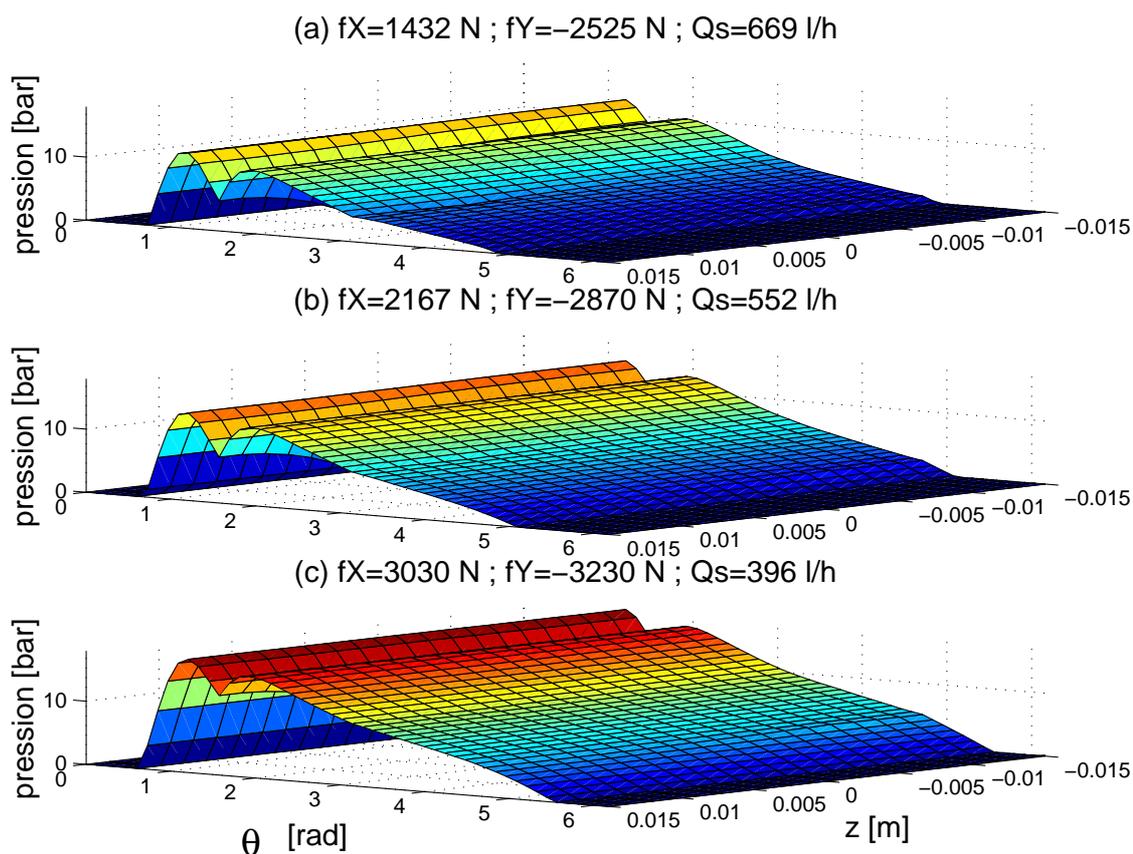


FIG. 6.3: champ de pression du SqF - (a) $\zeta_v = 0$; (b) $\zeta_v = 50$; (c) $\zeta_v = 300$

6.2.2 Sensibilité au paramètre de contrôle

Avant de simuler la réponse au balourd de rotors flexibles en fonction de différentes valeurs de ζ_v , il est intéressant de mener des calculs en imposant la cinématique de l'amortisseur pour éclaircir le mécanisme physique qui permet de modifier le comportement du SqF.

6.2.2.1 Influence sur les caractéristiques du *squeeze film*

La stratégie de contrôle proposée ici consiste à réguler simultanément les valves de limitation du débit sortant. Leur état d'ouverture doit être modifié selon la vitesse de rotation de la machine afin de permettre l'optimisation de la réponse au balourd, selon des critères devant être choisis au préalable. Puisque l'échelle temporelle relative au planning de régulation des valves est sensiblement supérieure au temps caractéristique de la dynamique du rotor, le contrôle est classé comme adaptatif [76]. Ce type de contrôle s'appuie sur l'hypothèse que la vitesse du rotor change assez lentement pour que la réponse du système puisse atteindre un régime stationnaire entre deux modifications du paramètre de contrôle.

Les données définies pour le SqF et pour le circuit hydraulique sont les suivantes :

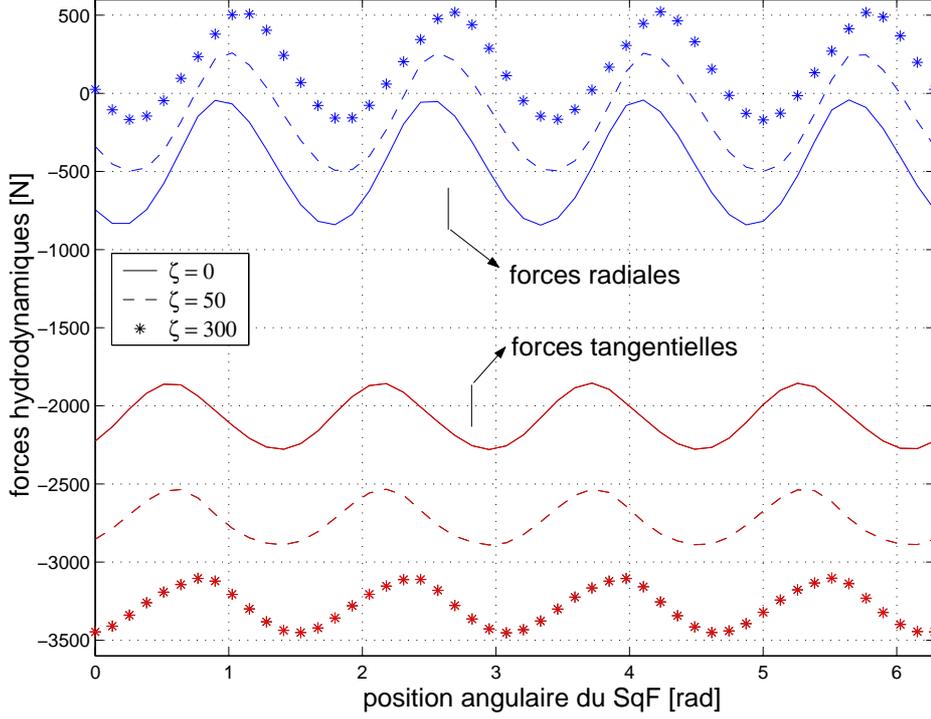


FIG. 6.4: Evolution des forces sur un tour

$$L=30 \text{ [mm]}; R=65 \text{ [mm]}; C=0,3 \text{ [mm]}; \mu=0,007 \text{ [Pa.s]}; \rho=950 \text{ [kg/m}^3\text{]};$$

$$C_l = 10^{-7} \text{ mm}^2/\text{Pa.s}; p_{amb}=1 \text{ [bar]}; p_{vap}=0,01 \text{ [bar]}; W_p=100 \text{ [W]}; n_a=4; n_e = 4;$$

$$D_{hc}=5 \text{ [mm]}; D_{hs}=3 \text{ [mm]}; D_{hp}=7 \text{ [mm]}; D_{hch}=7 \text{ [mm]};$$

$$A_c = \pi D_{hc}^2/4; A_s = \pi D_{hs}^2/4; A_p = \pi D_{hp}^2/4; A_{ch} = D_{hch}^2;$$

$$R_{ch}=115 \text{ [mm]}; l_9 = l_{13} = R_{ch}\pi/4; l_{10} = l_{11} = l_{12} = R_{ch}\pi/2;$$

$$l_p=1 \text{ [m]}; l_s=50 \text{ [mm]}; l_c=30 \text{ [mm]};$$

La figure 6.3 présente l'évolution du champ de pression dans le film pour $X_e = Y_e = 0,5C$ [m], $\dot{X}_e = -0.075$ [m/s] et $\dot{Y}_e = 0.075$ [m/s], lorsque les valves sont progressivement fermées, ce qui est simulé en augmentant le coefficient de perte de charge ζ_v de 0 (valves ouvertes) jusqu'à 300 (valves partiellement fermées). On constate une nette élévation du niveau de pression dans le film, qui conduit à l'amplification des forces hydrodynamiques, dont les valeurs sont montrées au-dessus des graphiques. Le débit d'huile à travers l'amortisseur, Q_s , décroît logiquement avec la fermeture des valves. Comme souligné dans l'analyse du système d'alimentation ponctuelle, le bilan des flux entrant et sortant du film permet de vérifier si l'huile cavite ou pas, compte tenu de la condition de cavitation utilisée.

La figure 6.4 met en évidence l'évolution des forces radiale et tangentielle sur un tour du rotor en fonction de ζ_v , pour une orbite circulaire et centrée avec $\varepsilon = 0,7$ et $\dot{\phi} = 500$ [rad/s]. On observe que la sensibilité des efforts hydrodynamiques vis-à-vis des valves de restriction du débit de fuite est

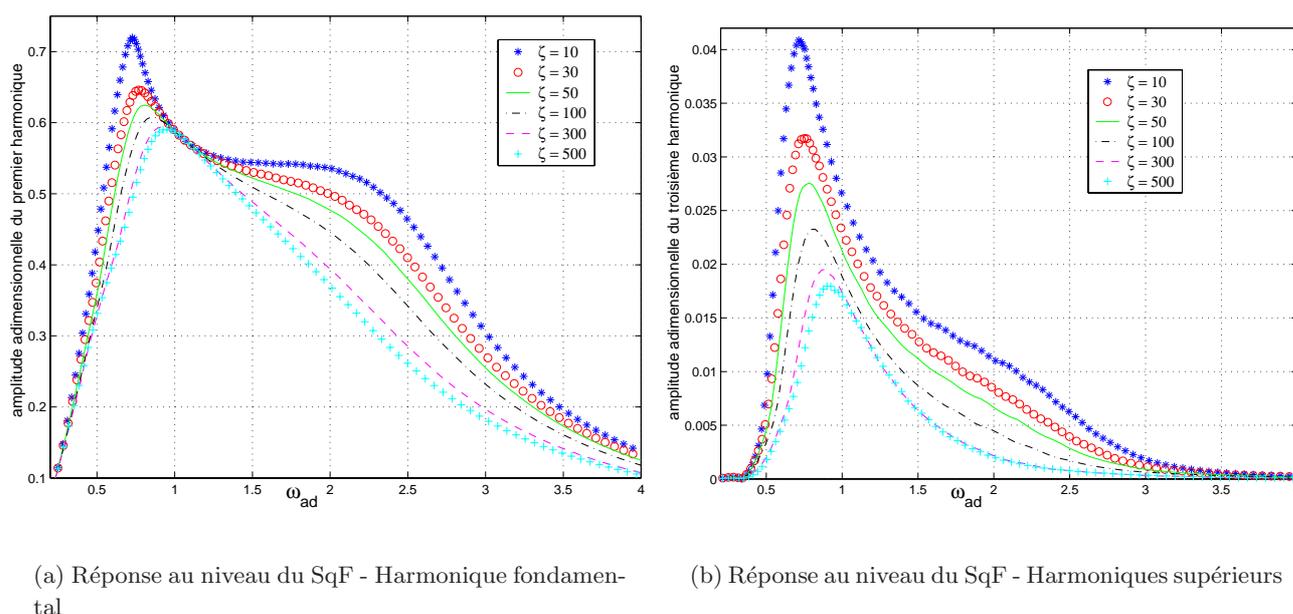


FIG. 6.5: Réponse au balourd du rotor Jeffcott au niveau du SqF en fonction de ζ_v

très importante. L'amplitude de la force tangentielle s'accroît lorsque les valves sont fermées, ce qui engendre un amortissement plus important. Quant à la force radiale, son amplitude diminue et son changement de signe reflète l'augmentation des effets produits par la pressurisation de l'huile. Comme nous avons pu constater dans le chapitre IV, ces effets peuvent avoir une nature déstabilisatrice. Ce résultat est similaire à celui obtenu lorsque l'on élève la puissance de la pompe.

Il est important de souligner que les résultats présentés dans les figures 6.3 et 6.4 visent à vérifier l'importance de l'influence du coefficient de perte de charge ζ_v sur le comportement du SqF. Ils ne fournissent pas pour autant des renseignements précis permettant de planifier le contrôle des valves pour que l'on puisse, par exemple, minimiser les amplitudes de vibration du rotor. La définition du contrôle dépend non seulement de l'effet de ζ_v sur les forces hydrodynamiques, mais également de l'interaction entre le rotor et le SqF, puisque ce dernier maintient en partie un caractère passif. Dans ce sens, le contrôle adaptatif que nous mettons en avant serait plus précisément défini comme semi-adaptatif. Il est en effet très semblable aux amortisseurs semi-actifs des suspensions automobiles, qui ont d'ailleurs le même principe de fonctionnement, vu que l'amortissement est modulé au travers du changement du diamètre d'un orifice dans le piston lors de la compression du fluide dans la chambre [136].

Afin de vérifier le potentiel et l'efficacité de notre stratégie de contrôle, des simulations de la réponse au balourd de rotors flexibles sont analysées.

6.2.2.2 Influence sur la réponse au balourd de rotors flexibles

Considérons premièrement le rotor Jeffcott étudié dans le chapitre IV, excité par un balourd d'amplitude $\zeta m_1 = 0,008$ [m.kg] au niveau du disque. La réponse au balourd est calculée en utilisant la

méthode de la collocation trigonométrique, la solution étant suivie par la technique *pseudo-arc length*. La plage de vitesse analysée est comprise entre $0 < \omega_{ad} < 5$, où la vitesse de rotation adimensionnelle est donnée par $\omega_{ad} = \omega / \sqrt{k_1/m_1}$. Bien que les joints toriques puissent modifier de manière considérable la dynamique d'un rotor [14], leur raideur et amortissement seront négligés dans cette étude, pour qu'il soit possible de mettre en évidence l'influence du SqF semi-adaptatif.

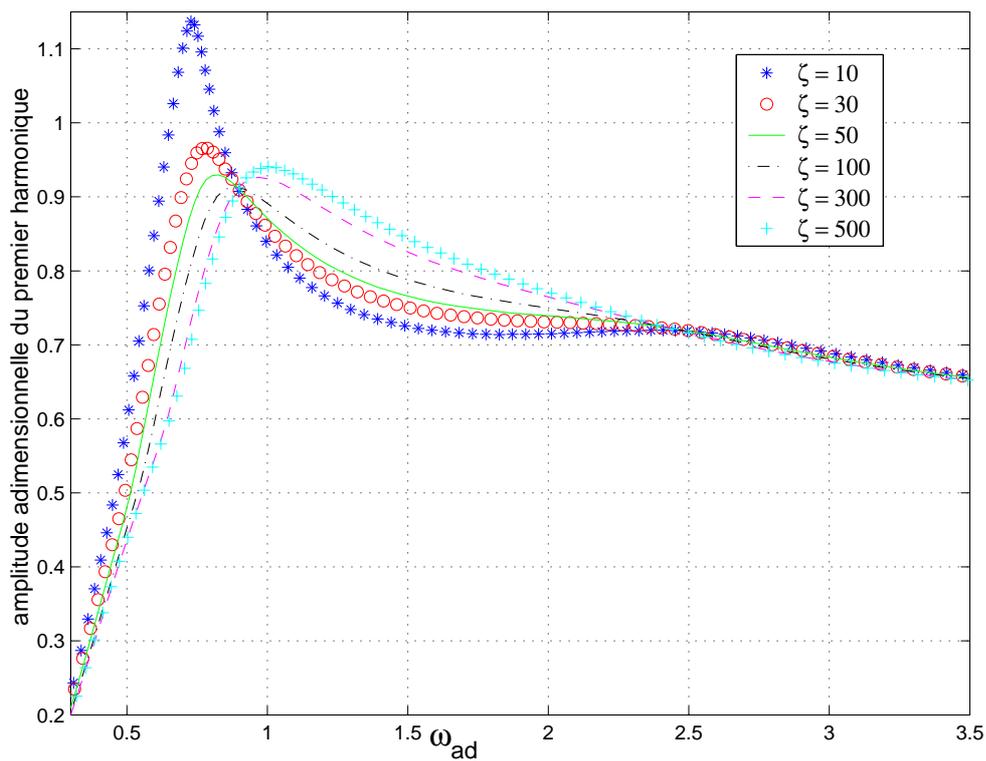
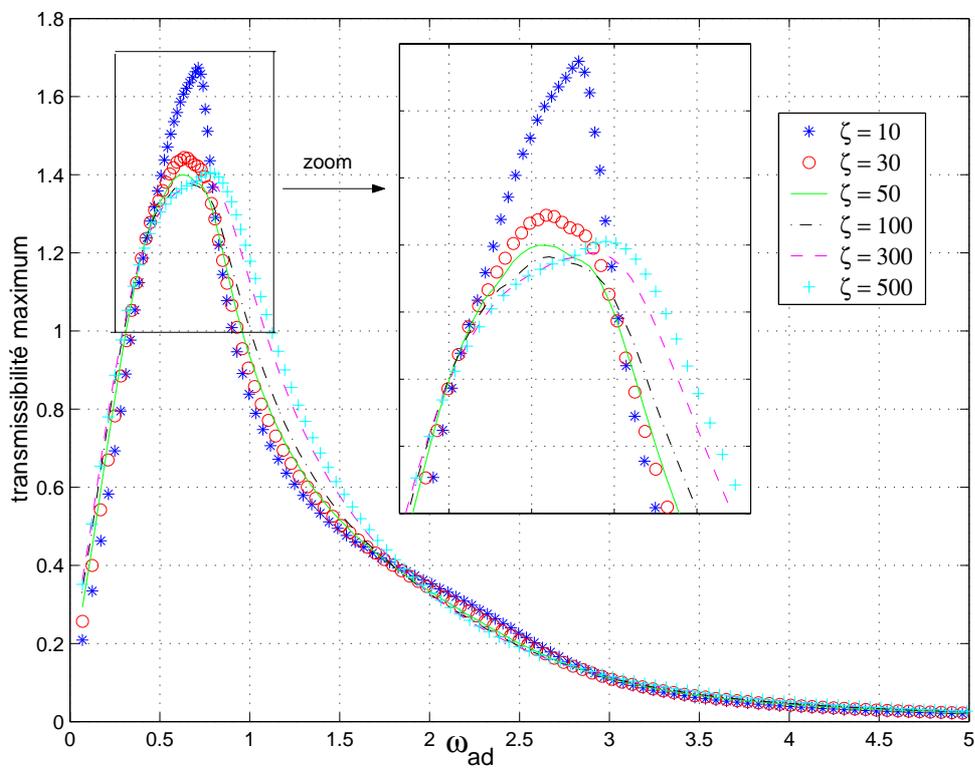
La figure 6.5 montre l'évolution de l'amplitude du premier et du troisième harmoniques de la réponse au niveau du SqF, adimensionnés par rapport au jeu radial, pour plusieurs valeurs de ζ_v . On remarque que la fermeture des valves rigidifie le palier, si bien que les deux vitesses critiques se rapprochent en tendant vers $\omega_{ad} = 1$, la fréquence propre du rotor appuyé-appuyé. On constate encore qu'en restreignant davantage le débit sortant du film, l'amplitude des débattements au niveau de l'amortisseur est réduite. L'inspection des harmoniques de la réponse indique que les orbites décrites par le rotor sont quasiment circulaires et centrées.

Si l'on définissait comme critère d'optimisation la minimisation de la réponse du rotor au niveau du SqF, alors les valves devraient rester le plus fermées possibles tout au long de la plage de fonctionnement de la machine, la fermeture étant limitée par le réchauffement excessif de l'huile et par l'action déstabilisatrice de la force radiale positive. Ce critère d'optimisation est toutefois invraisemblable. Un critère plus réaliste doit prendre en compte la minimisation de l'amplitude de vibration au niveau du disque. On s'intéresse par conséquent plutôt à la réponse au balourd au milieu du rotor en fonction du coefficient de perte de charge ζ_v , laquelle est présentée dans la figure 6.6. Le pic de résonance ayant l'amplitude la plus faible est obtenu pour une valeur intermédiaire du coefficient de perte de charge, à savoir $\zeta_v = 100$. Au delà de cette valeur optimale, on voit clairement que la rigidification dynamique du SqF résultant de la fermeture des valves pénalise la capacité de dissipation d'énergie de l'amortisseur. L'analyse des courbes nous permet de conclure qu'un contrôle de type *on-off* serait une technique envisageable pour minimiser les vibrations du disque. Les valves resteraient ainsi presque fermées ($\zeta_v = 500$) jusqu'à $\omega_{ad} \cong 0.9$, après elles seraient ouvertes ($\zeta_v = 10$) jusqu'à $\omega_{ad} \cong 2.5$ et ensuite fermées à nouveau. La planification *on-off* du paramètre de contrôle est également préconisé par BURROWS, SAHINKAYA et TURKAY [19] et par EL-SHAFFI [46] pour l'implémentation de leurs contrôles adaptatifs.

Un autre candidat potentiel pour le critère d'optimisation est la réduction des charges transmises au bâti par le SqF. En minimisant la transmissibilité on améliore les propriétés d'isolation dynamique de l'amortisseur, un atout très intéressant du point de vue de confort vibratoire. La figure 6.7 montre l'évolution de la transmissibilité maximale en fonction de la vitesse du rotor et du coefficient de perte de charge des valves. Il est possible de constater que le paramètre de contrôle peut modifier sensiblement les caractéristiques de l'amortisseur en termes d'isolation vibratoire, notamment au voisinage des vitesses critiques. Il convient de remarquer également que l'atténuation des vibrations du rotor et la réduction de la transmissibilité peuvent être des critères d'optimisation incompatibles sur quelques plages de vitesse particulières, telles que $0.8 < \omega_{ad} < 0.9$.

La stabilité des orbites calculées a été vérifiée par la théorie de Floquet et aucune bifurcation n'a été détectée. Compte tenu des simulations menées sur la dynamique du rotor Jeffcott dans le chapitre IV, on peut s'attendre à l'apparition d'instabilités au cas où l'utilisation d'une pompe d'alimentation très puissante soit combinée avec une restriction trop importante au niveau des valves d'évacuation.

Des simulations de la dynamique du modèle de dynamique d'ensemble permettent de renforcer les

FIG. 6.6: Réponse au balourd du rotor Jeffcott au niveau du disque en fonction de ζ_v FIG. 6.7: Evolution de la transmissibilité maximum en fonction de ζ_v - Rotor Jeffcott

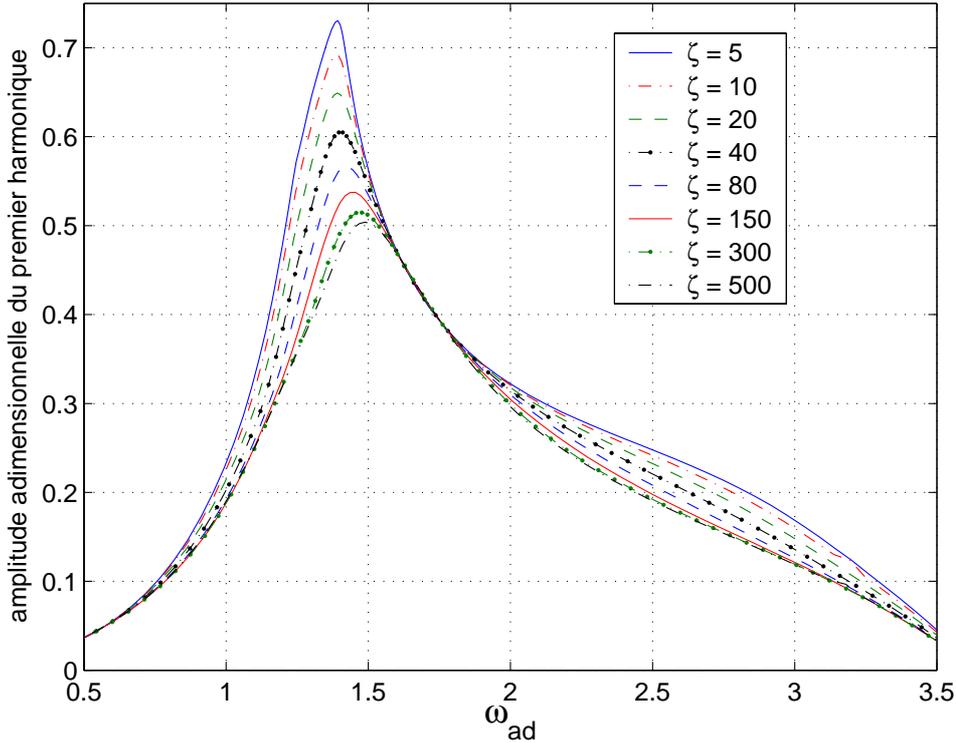


FIG. 6.8: Réponse au balourd du rotor Dynamique d'Ensemble au niveau du SqF en fonction de ζ_v

conclusions tirées suite à l'analyse de l'influence du coefficient de perte de charge ζ_v sur la performance du rotor Jeffcott. Les figures 6.8, 6.9 et 6.10 présentent respectivement la réponse au balourd au niveau du SqF et du disque, et l'évolution de la transmissibilité maximale. Une réduction de 50% dans l'amplitude du pic de résonance est obtenue en augmentant ζ_v de 5 à 500. Par contre, au delà de la vitesse critique, l'ouverture des valves se révèle être une configuration plus intéressante pour réduire les charges transmises au stator.

Comme souligné précédemment, la praticabilité du contrôle adaptatif repose sur l'hypothèse que le système atteint un régime stationnaire entre deux actualisations successives du paramètre de contrôle. Ainsi, il est intéressant de simuler le mouvement transitoire résultant d'un changement dans l'état d'ouverture des valves, ce qui est effectué en employant la méthode de Runge-Kutta du 4ème ordre à pas de temps constant. La figure 6.11 met en évidence les régimes transitoires après une fermeture instantanée des valves ($\zeta_v = 10 \rightarrow \zeta_v = 500$) à $\omega_{ad} = 0,75$, et suite à une ouverture instantanée ($\zeta_v = 500 \rightarrow \zeta_v = 5$) à $\omega_{ad} = 1,5$. En fermant les valves lors de la montée en vitesse pour assurer une atténuation optimale de la résonance, le temps nécessaire à la disparition de la phase transitoire est très faible, d'environ 10 ms. Après le passage de la vitesse critique, les valves sont rouvertes pour améliorer l'isolation vibratoire et on observe que le mouvement transitoire dure à peu près 50 ms, un plus long donc que lors de la fermeture à plus basse vitesse.

Dans la pratique bien évidemment, la vitesse d'ouverture ou de fermeture des valves n'est pas infinie et dépend de la technologie utilisée pour les piloter. En simulant une ouverture progressive linéaire des valves sur 50 ms, les fluctuations de la réponse du rotor sont atténuées et le transitoire après la stagnation de ζ_v à 5 est raccourci, comme le montre la figure 6.12. Sachant que la montée en

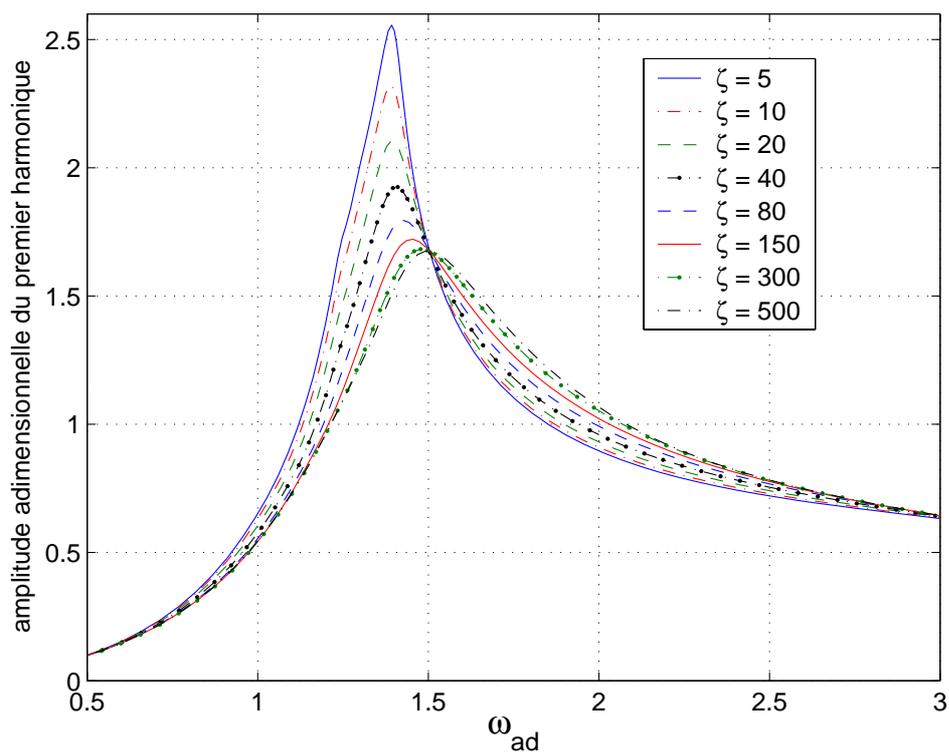


FIG. 6.9: Réponse au balourd du rotor Dynamique d'Ensemble au niveau du disque en fonction de ζ_v

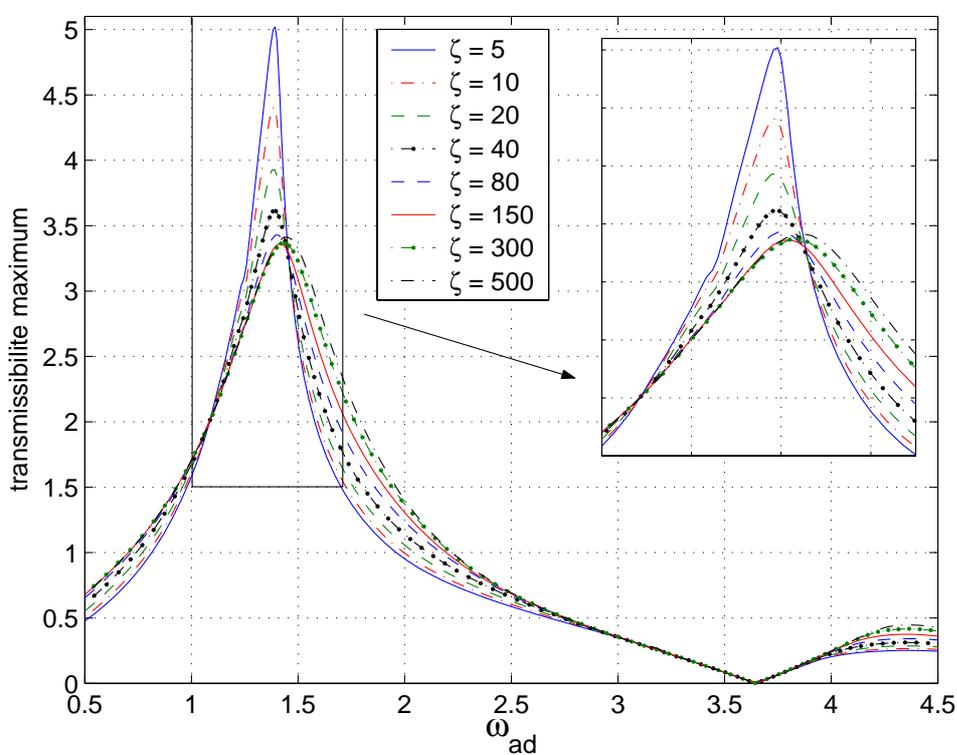
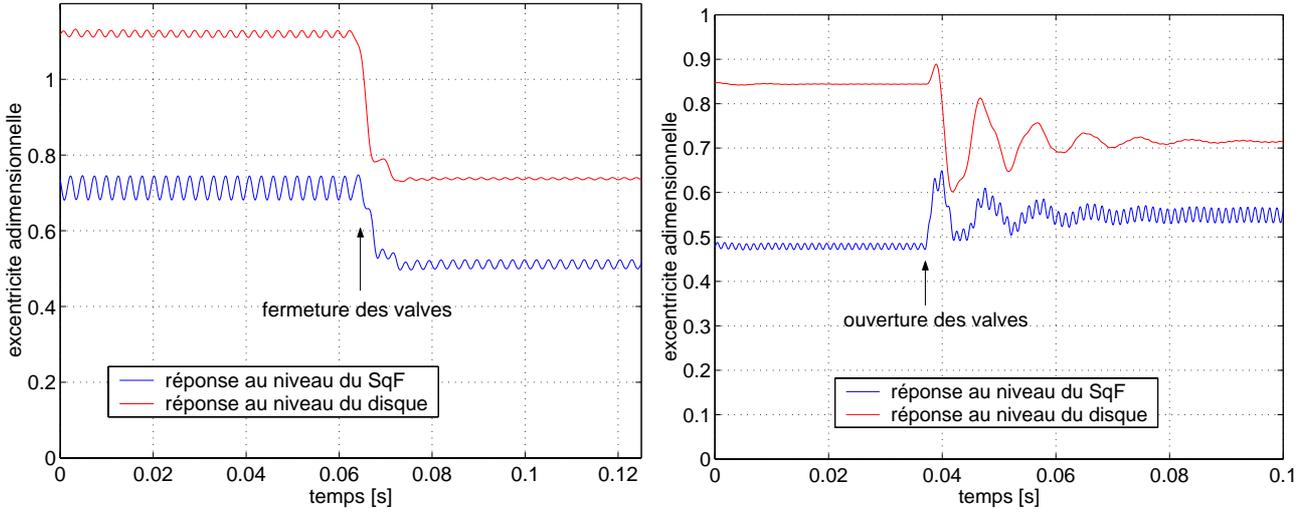


FIG. 6.10: Evolution de la transmissibilité maximum en fonction de ζ_v - Rotor Dynamique d'Ensemble

(a) Fermeture des valves à $\omega_{ad} = 0,75$ (b) Ouverture des valves à $\omega_{ad} = 1,5$ FIG. 6.11: *Transitoires suite à changement du paramètre de contrôle ζ_v*

vitesse d'un moteur à réaction de l'état de repos jusqu'à la vitesse maximale est de l'ordre de quelques secondes [64], l'adaptabilité de l'amortisseur nous semble assez rapide pour l'application de la stratégie de contrôle semi-adaptatif proposée.

6.3 Discussion sur l'implémentation du contrôle

Le contrôle adaptatif s'appuie sur une approche essentiellement fréquentielle. L'algorithme d'optimisation doit être conçu pour minimiser une fonction coût, définie à partir des paramètres décrivant la réponse stationnaire du rotor à une fréquence donnée. Supposons que le SqF adaptatif doit être utilisé dans le but de minimiser l'amplitude de la composante synchrone des vibrations du rotor. Dans ce cas, la fonction coût peut s'écrire [77] :

$$\mathcal{J} = \{|X|\}^t \{|X|\} \quad (6.10)$$

où $\{|X|\}_{n \times 1}$ est le vecteur des modules du coefficient de Fourier fondamental de la réponse à n points d'intérêt.

Pour un système régi par l'équation de mouvement classique, la partie synchrone de la réponse du rotor est donnée par :

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{S\} = [H]\{S\} = \{F_l\} + \{F_{nl}\} \quad (6.11)$$

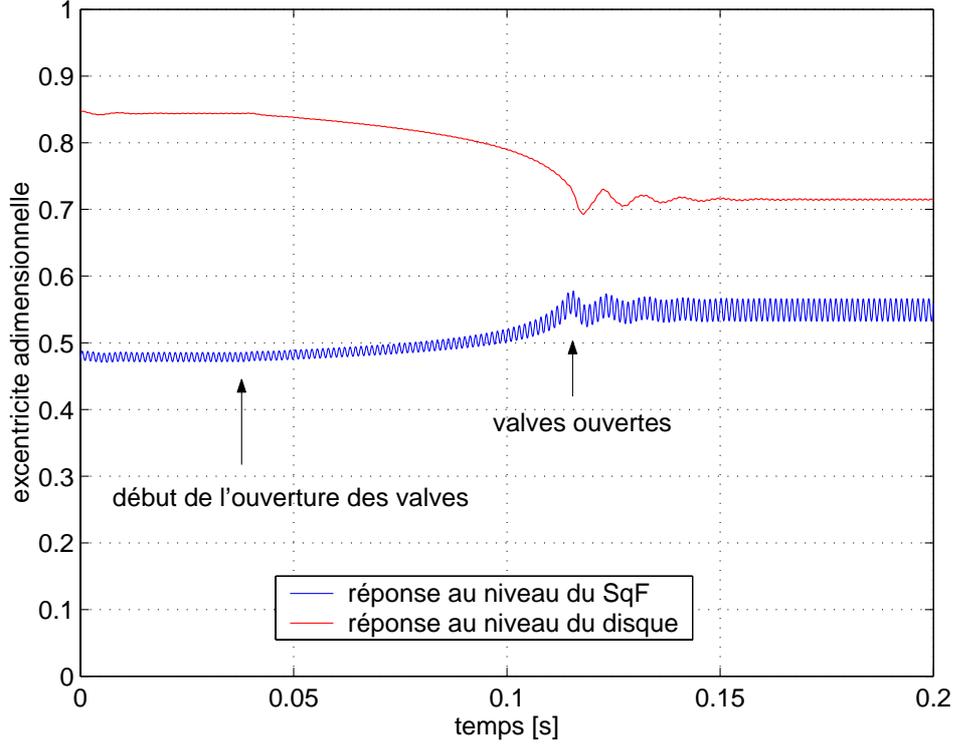


FIG. 6.12: *Transitoire pendant ouverture progressive des valves à $\omega_{ad} = 1,5$*

où $\{S\}$, $\{F_l\}$ et $\{F_{nl}\}$ correspondent aux harmoniques fondamentaux de la réponse du rotor, de la force d'excitation et des forces non linéaires du SqF. Pour un modèle Jeffcott, l'équation ci-dessus peut se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{dq} \\ S_{sf} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_l \\ F_{nl} \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

Si l'on cherche à minimiser l'amplitude de vibration du disque, le vecteur $\{X\}$ utilisé dans la définition de la fonction coût devient :

$$\{X\} = \{S_{dq}\} = [H_{11}] - [H_{12}][H_{22}]^{-1}[H_{21}]^{-1} (\{F_l\} - [H_{12}][H_{22}]^{-1}\{F_{nl}\}) \quad (6.13)$$

Le problème d'optimisation consiste à déterminer la valeur optimale du coefficient de perte de charge, notée ζ_{vo} , soumis à des contraintes et qui minimise la fonction coût. En termes mathématiques :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \zeta_v} \right)_{\zeta_{vo}} = 0 \quad \zeta_{min} < \zeta_v < \zeta_{max} \quad (6.14)$$

Nous faisons remarquer que le paramètre de contrôle est borné. La limite supérieure ζ_{max} doit être définie de manière à éviter un réchauffement excessif de l'huile de l'amortisseur et la déstabilisation du rotor, tandis que la limite inférieure ζ_{min} résulte d'une perte de charge résiduelle observée même lorsque les valves sont complètement ouvertes.

La détermination de ζ_{vo} pour une fréquence donnée doit être accomplie au travers de l'emploi d'une procédure itérative qui requiert des résolutions successives de l'équation non linéaire de mouvement du rotor. Ces résolutions nécessitent à leur tour, le calcul à plusieurs reprises du champ de pression dans le film, lequel est également régi par un système d'équations non linéaires. Il en résulte un algorithme d'optimisation très complexe et très long. A défaut d'hypothèses simplificatrices supplémentaires dans la modélisation du rotor et du SqF, nous croyons que le problème d'optimisation ne peut pas être traité suffisamment vite pendant le fonctionnement du rotor pour permettre l'utilisation d'un contrôle en boucle fermée. Ainsi, un contrôle en boucle ouverte nous semble être l'application la mieux adaptée pour le SqF adaptatif proposé ici. Dans ce cas, le problème d'optimisation est résolu au préalable, ce qui permet de définir un planning d'évolution du paramètre de contrôle en fonction de la vitesse du rotor. Le contrôle semi-adaptatif est dit alors pré-planifié. KNOSPE, HOPE, FEDIGAN et WILLIAMS [76] suggèrent que le contrôle adaptatif pré-planifié aboutit à des résultats satisfaisants, pourvu que le planning soit déterminé correctement et que le système ne subisse pas des perturbations imprévues. Ils examinent également des techniques de *feedback* à échelle temporelle longue pour rendre le contrôle plus robuste et pour compenser les erreurs du modèle à partir duquel l'évolution optimale du paramètre de contrôle est déterminée.

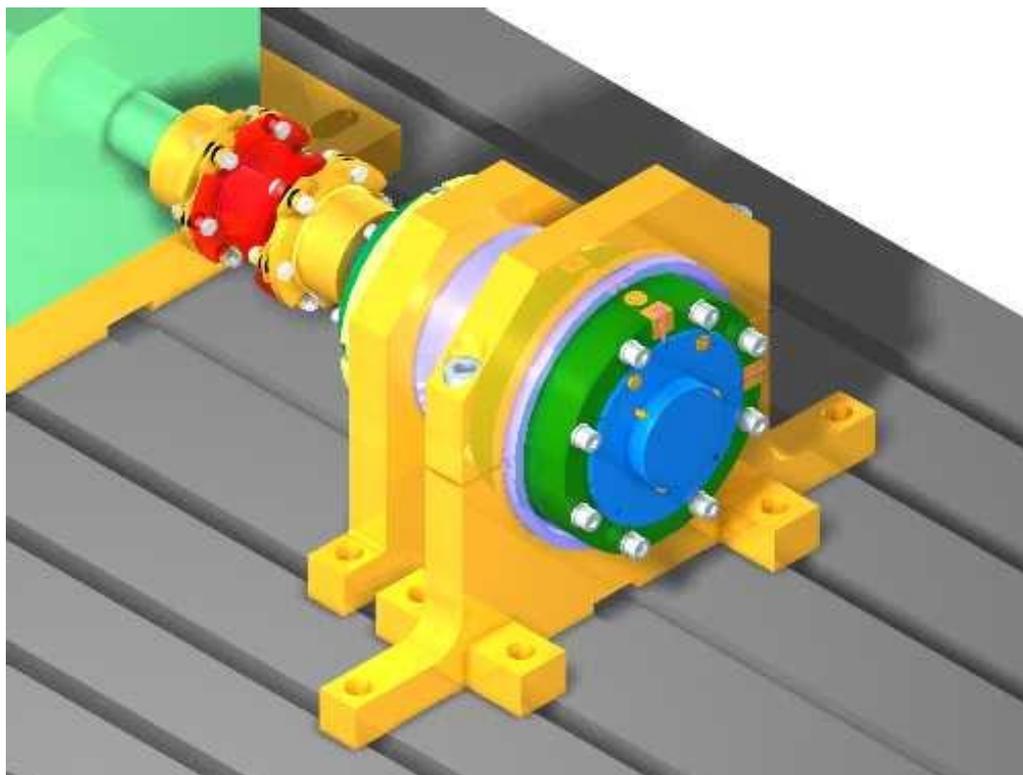
6.4 Banc d'essai *adaptive squeeze film* (ASF)

Des simulations ayant fourni des résultats très intéressants, il nous reste encore à vérifier expérimentalement l'efficacité du SqF adaptatif proposé. En outre, un recalage des modèles développés au cours de ce doctorat tenant compte des phénomènes complexes impliqués dans le problème devra être entrepris à la lumière de résultats expérimentaux. L'étude de l'ASF devra s'effectuer en deux étapes. La première devra permettre de valider le modèle de l'amortisseur et d'analyser la sensibilité du champ de pression vis-à-vis de notre paramètre de contrôle. La deuxième sera dédiée à l'implémentation du contrôle dans le cadre de la performance dynamique d'un rotor réel.

Nous présenterons ci-après le banc d'essai qui sera consacré à la première étape du travail. Ce banc, dont la vue d'ensemble est présentée dans la figure 6.13, est en cours de développement au sein de notre laboratoire et sa construction devra aboutir en janvier/février 2003. Afin de garder une ressemblance avec des produits industriels dans lesquels l'utilisation d'un SqF semble intéressante, les dimensions et les conditions de fonctionnement de l'amortisseur sont proches de celles d'une application réelle.

6.4.1 Analyse fonctionnelle du banc d'essais

Pour mieux isoler le comportement du SqF, le banc expérimental repose sur un principe de pilotage en déplacement. Un système constitué de deux excentriques permettra de régler de manière continue l'excentricité de l'amortisseur. L'entraînement de l'arbre en rotation sera assuré par un mo-

FIG. 6.13: *Vue d'ensemble du banc d'essai ASF*

teur électrique à vitesse variable, lequel conduira le SFD à décrire des orbites circulaires centrées. Les grandeurs hydrodynamiques et thermiques liées au film d'huile seront modulées grâce à un circuit hydraulique conçu et dimensionné de façon à ce que nous puissions mettre en relief la sensibilité du comportement du SqF aux conditions aux limites imposées au niveau de l'évacuation de l'huile. Le circuit hydraulique devra assurer également la lubrification, et par conséquent le bon fonctionnement, des roulements. Compte tenu de son principe de fonctionnement, le banc d'essai englobe trois classes de fonctions distinctes, à savoir une fonction mécanique, une fonction hydraulique et une fonction instrumentation.

Fonction mécanique : Cette fonction se décompose en trois sous-fonctions différentes. La sous-fonction ligne d'arbre doit supporter et guider en rotation le système d'excentration du SFD. Dans le cas d'un montage en porte-à-faux, lequel permet un accès facile au SqF, cette fonction est réalisée par trois paliers, comme le met en évidence la figure 6.14. La sous-fonction excentration doit permettre au SqF de décrire des orbites circulaires à une excentricité donnée. L'organe d'anti-rotation permet la transformation de la rotation transmise par l'arbre à la came en un mouvement de précession de la piste (bague) intérieure du SqF. Enfin la sous-fonction motorisation doit entraîner la ligne d'arbre du banc d'essais à une vitesse de rotation donnée, continûment variable dans une plage d'opération prédéfinie.

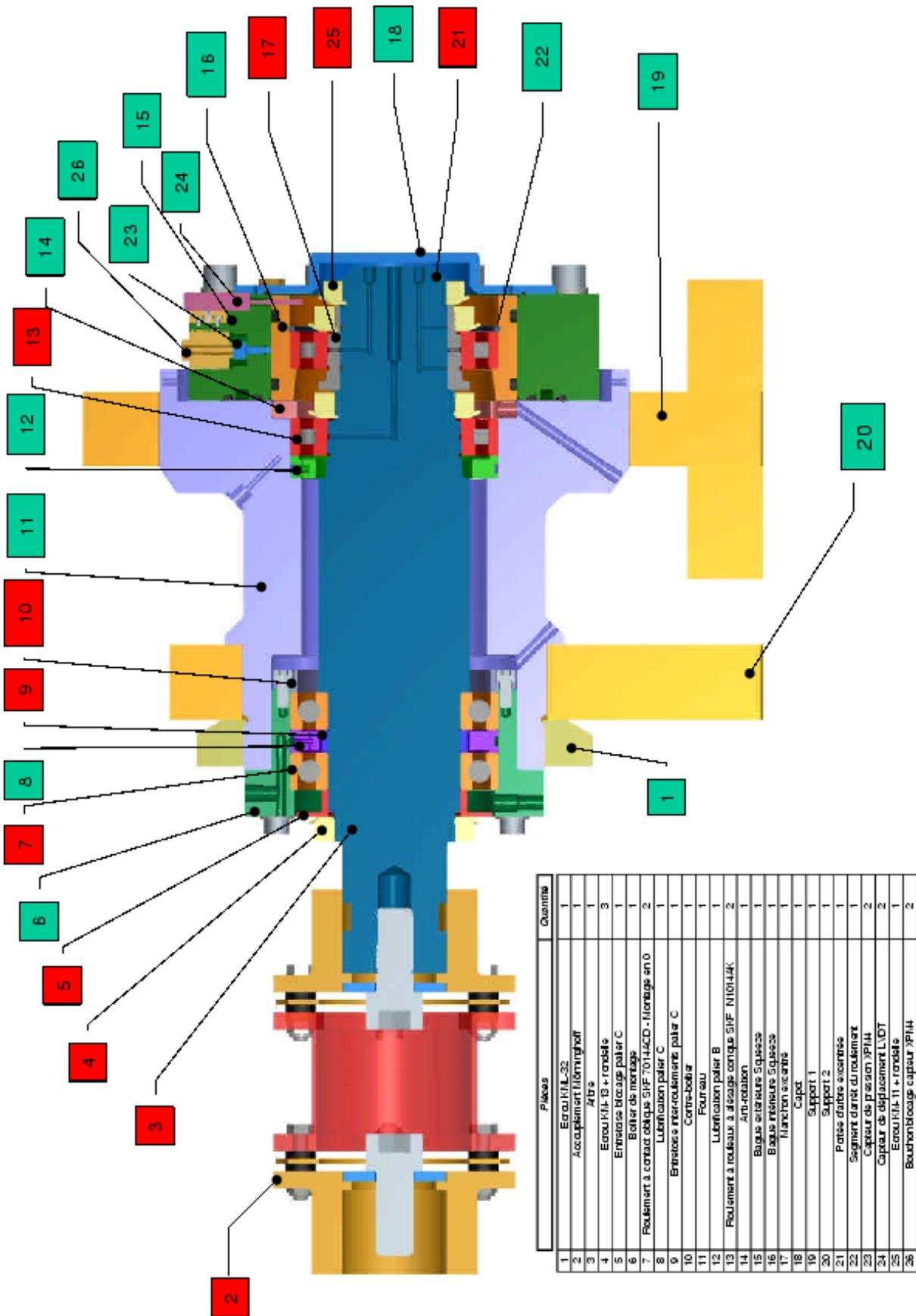


FIG. 6.14: Vue en coupe du banc ASF

Fonction hydraulique : Cette fonction se décompose en deux sous-fonctions principales : assurer le fonctionnement sûr de la machine grâce à une lubrification adéquate des roulements de la ligne arbre et gérer l'alimentation et l'évacuation de l'huile du SqF. Cette dernière tâche est d'autant plus importante qu'elle porte l'innovation proposée dans ce doctorat pour l'optimisation de la performance d'amortisseurs *squeeze film*. Les circuits hydrauliques du SqF et de lubrification sont découplés. Les schémas de principe sont présentés dans les figures 6.15 et 6.16. Chaque cuve possède deux cavités indépendantes : la première sert à pré-stocker le retour de la lubrification ou de l'amortisseur, et l'autre à recevoir en continu l'huile refroidie et filtrée aspirée de la cavité voisine. La deuxième cavité est équipée de thermoplongeurs permettant un réglage statique de la température de l'huile. Cela permet de faire varier la viscosité du fluide amortisseur ainsi que de préchauffer l'huile destinée à la lubrification lors du démarrage du banc.

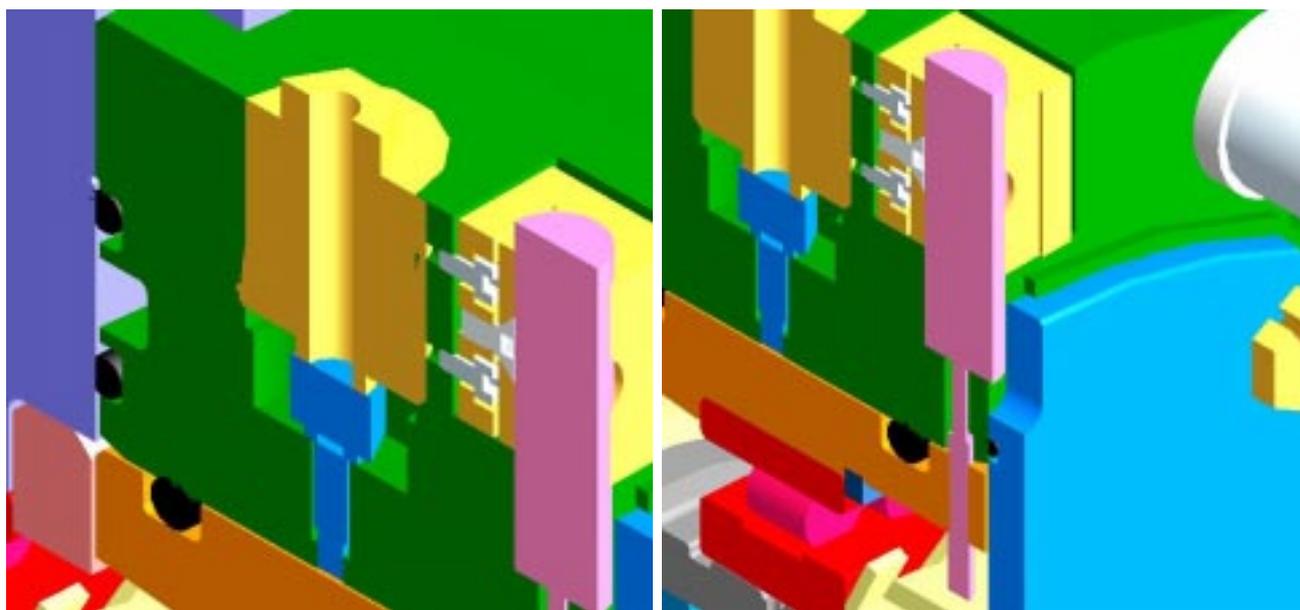
Côté SqF, une pompe à engrenage est employée pour alimenter l'amortisseur. Un débitmètre et un manomètre sont installés pour une vérification en directe du débit et de la pression d'alimentation. Cette dernière peut être réglée grâce à un limiteur de pression en aval de la pompe. Quatre limiteurs de débit à la sortie du film permettent de faire varier indépendamment la restriction des flux à travers les conduites d'évacuation. La modification de leur ouverture rend possible l'analyse de l'influence du paramètre de contrôle proposé sur le comportement de l'amortisseur.

Un ensemble pompe à engrenage/limiteur de pression est également utilisé pour la lubrification des roulements. Le débit d'huile envoyé aux paliers est calculé à partir de la puissance devant être évacuée pour éviter leur réchauffement. La pression définie à la sortie de la pompe découle de la méthode de lubrification choisie, à savoir la lubrification par jet d'huile. Compte tenu du débit nécessaire et des dimensions des buses d'injection, la pression est fixée de manière à assurer un jet de vitesse supérieure à 15 m/s pour vaincre les turbulences engendrées par la rotation des roulements. La répartition de l'huile est réglée par des vannes installées sur chaque branche du circuit et vérifiée à l'aide de débitmètres. Une deuxième pompe est placée sur le retour du réseau hydraulique de lubrification, afin de récupérer l'huile tout en évitant des problèmes d'engorgement dû à l'accumulation dans l'enceinte de la machine.

Fonction Instrumentation : La dernière fonction à évoquer est la fonction instrumentation, dont une partie est dédiée à la surveillance du banc et l'autre à la mesure des grandeurs cinématiques et physiques permettant l'étude du comportement du SqF.

En ce qui concerne les aspects de sécurité, nous devons surveiller la température des paliers et le niveau vibratoire du banc. Pour ce faire, nous avons prévu l'introduction de sondes de température dans la masse du boîtier de montage du palier côté moteur, du fourreau et de la bague intérieure du SqF, et également la mise en place d'accéléromètres. Des niveaux d'alarme seront prédéfinis et reliés à un automate programmable qui arrêtera le moteur à la constatation du moindre signe de dysfonctionnement.

Quant aux paramètres de recalage du modèle du SqF, nous devons relever le niveau de pression dans le film, dans les conduites d'évacuation et dans les conduites d'alimentation. La température et la pression d'alimentation seront données par le thermocouple plongé dans la cuve et par le manomètre en aval de la pompe, respectivement. Puisque l'amortisseur sera induit à décrire des orbites circulaires centrées, le champ de pression restera à peu près stationnaire par rapport à un système de repérage tournant, ce qui permet de réduire nos besoins en termes d'instrumentation en pression. Il suffira par conséquent, de mesurer la pression dans une seule conduite d'alimentation et d'évacuation et dans deux positions sur le périmètre du film. Le principe de mesure des



(a) Capteur de pression dans le film

(b) Capteur LVDT

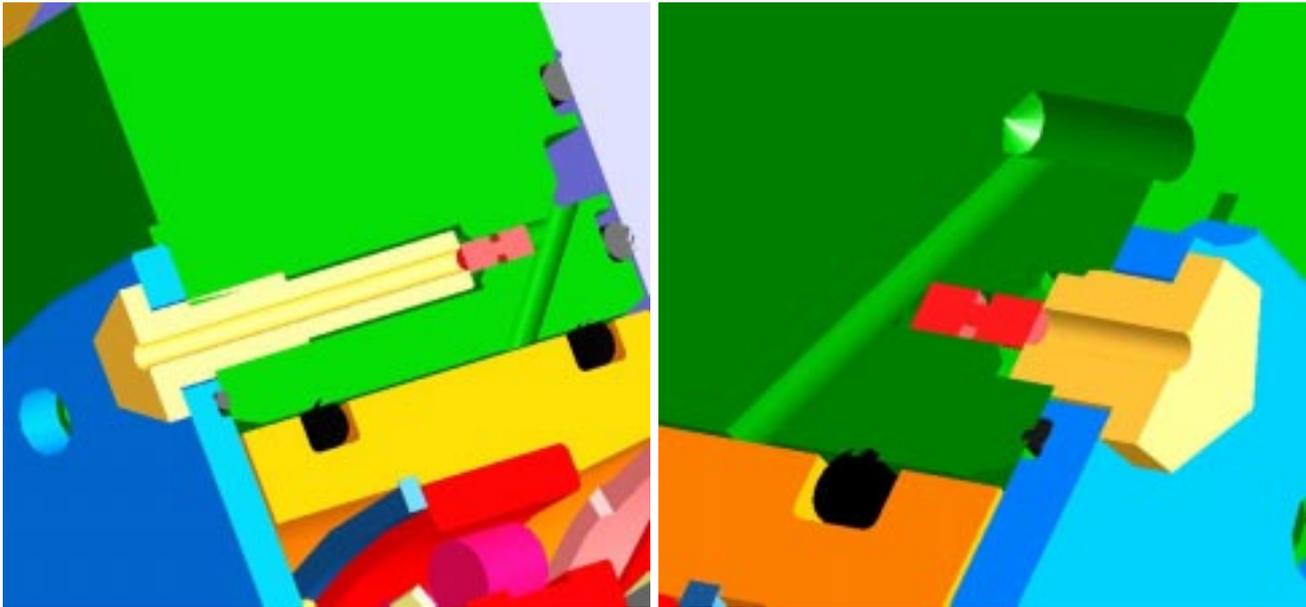
FIG. 6.17: *Instrumentation du film d'huile*

capteurs se repose sur la déformation de jauges de contraintes en silicium micro-usinées. Cette technologie a été retenue car elle nous permet d'avoir notamment un élément sensible concave pour une mesure parfaitement affleurante dans le film d'huile.

Les pressions mesurées doivent être recalées en fonction de deux paramètres cinématiques : la vitesse de précession et l'excentricité de l'orbite. Le premier est obtenu directement du logiciel de pilotage du moteur, tandis que le deuxième sera relevé à l'aide de deux capteurs LVDT non guidés installés à l'extérieur du film. Ces capteurs sont placés décalés angulairement à 90° l'un de l'autre. Outre la mesure de la position relative entre les bagues intérieure et extérieure de l'amortisseur, ils aideront au centrage de l'orbite avant la mise en route du banc. L'implantation des capteurs de déplacement et de pression est illustrée dans les figures 6.17 et 6.18.

6.4.2 Synthèse organique du banc ASF

L'analyse de chaque fonction permet de définir chaque organe et de spécifier leur cahier des charges respectifs. La synthèse organique, qui consiste à assembler les organes dans un contexte multiphysiques, permet de prendre en compte les phénomènes de couplage et de vérifier le fonctionnement robuste de la machine. Elle englobe la physique vibratoire, la physique thermo-hydrodynamique et la physique thermomécanique.



(a) Capteur de pression dans conduite d'alimentation

(b) Capteur de pression dans conduite d'évacuation

FIG. 6.18: *Instrumentation du circuit hydraulique*

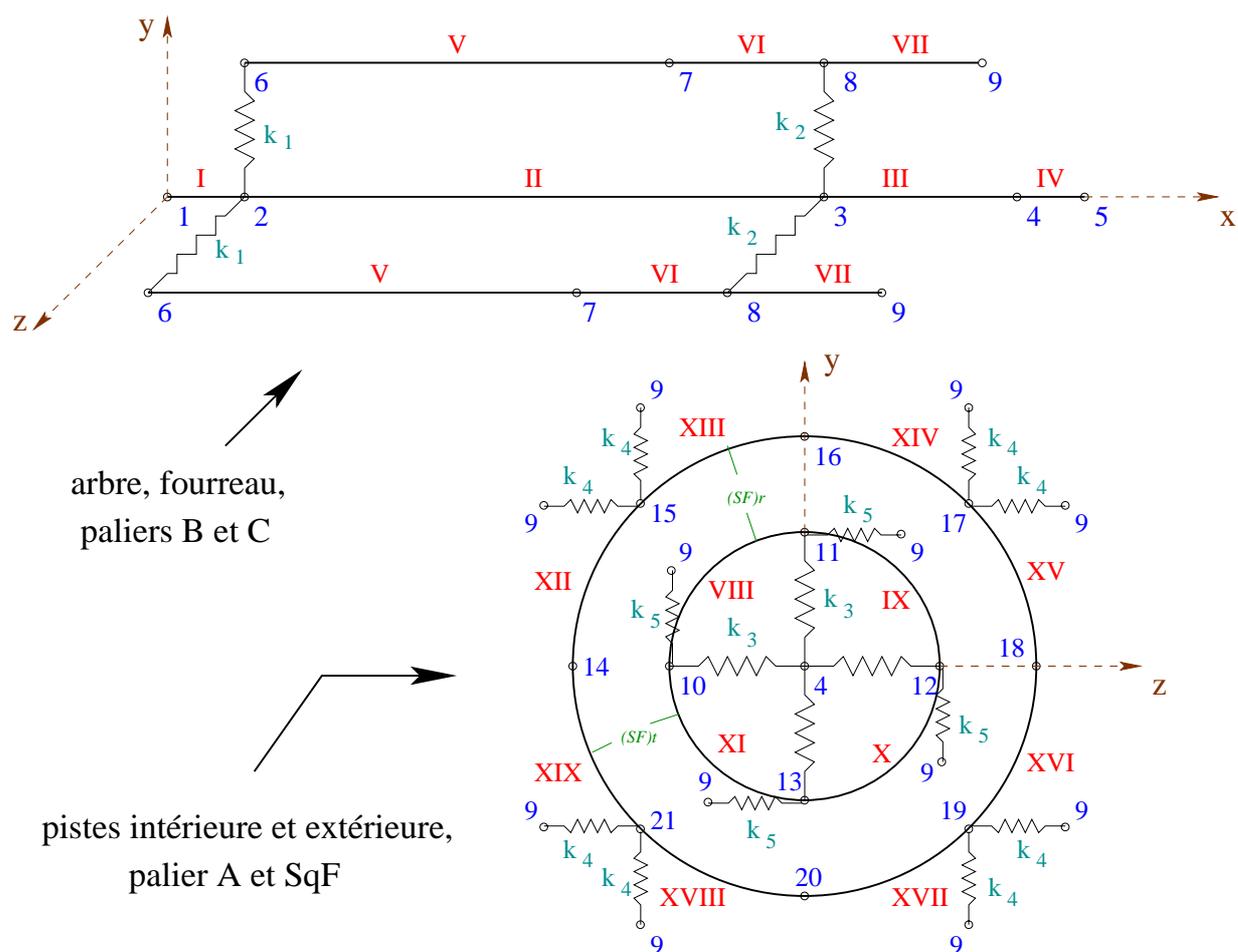
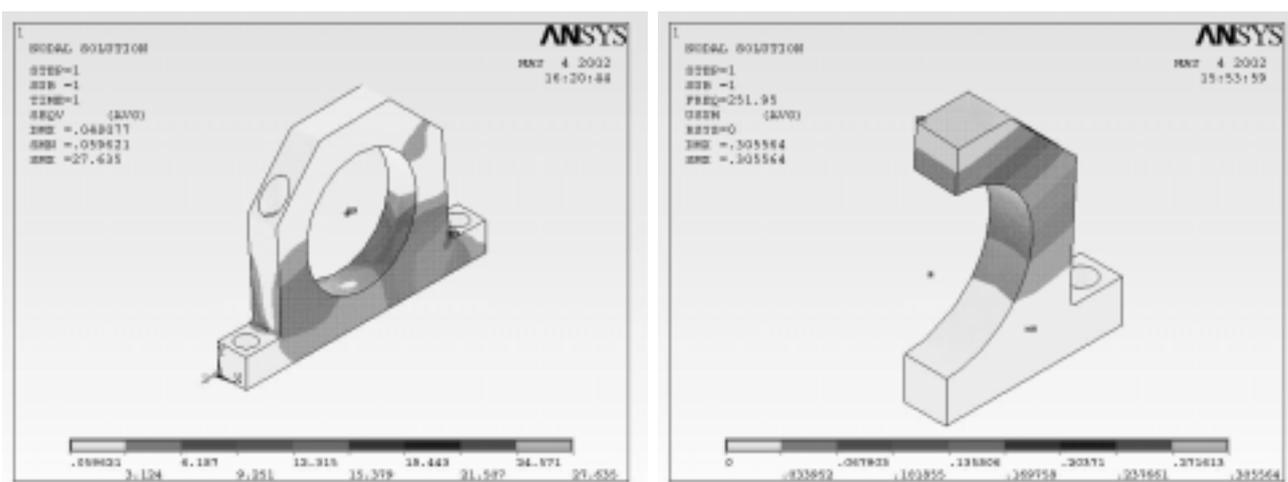
6.4.2.1 Synthèse mécanique et vibratoire

La synthèse vibratoire intègre les phénomènes dynamiques de l'assemblage de tous les composants mécaniques. Elle permet de vérifier le dimensionnement effectué lors de l'étude de chaque fonction ainsi que la nuisance vibratoire du banc à l'égard de son environnement. Compte tenu de la complexité du système mécanique, cette synthèse est menée en découpant la machine en trois sous-systèmes indépendants :

- le module *squeeze film*,
- les supports du module,
- la fondation du banc

Un code de calcul a été conçu en langage MATLAB pour l'analyse du module *squeeze film*, dont la discrétisation en éléments de poutres droites et courbes et en paramètres concentrés (masses et ressorts) est présentée dans la figure 6.19. Grâce à la souplesse de l'accouplement, le module peut être considéré comme découplé du moteur. Les résultats d'intérêt sont : les modes propres du système, les flèches de l'arbre et du fourreau, les déformations des pistes de l'amortisseur, les efforts au niveau des paliers et l'excentricité réelle de fonctionnement.

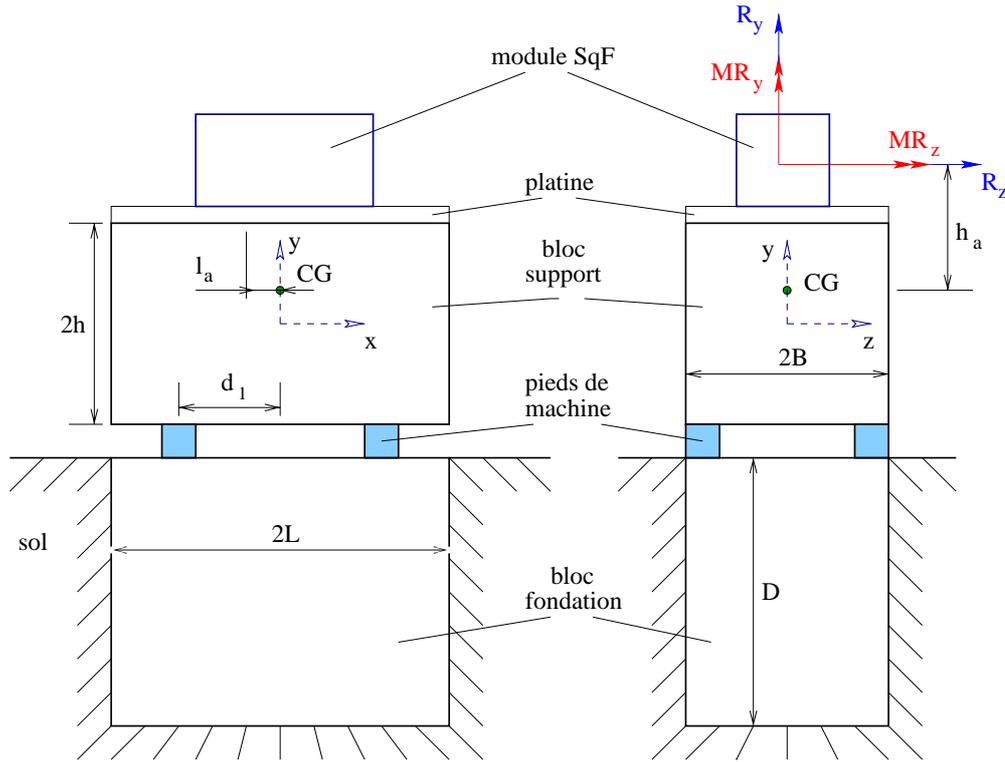
Compte tenu des efforts maximaux calculés, l'arbre, le fourreau et les supports du module font l'objet d'un dimensionnement statique à l'aide du logiciel ANSYS. On vérifie également les modes propres des supports, comme le montre la figure 6.20.

FIG. 6.19: *Modèle du module squeeze film*

(a) Contraintes de Von Mises - support côté moteur

(b) Premier mode propre - support côté moteur

FIG. 6.20: *Dimensionnement des supports*

FIG. 6.21: *Modèle de la fondation*

L'étude du comportement dynamique de la fondation, essentielle pour prévoir les mouvements du massif de fondation, est effectuée au travers du modèle montré dans la figure 6.21. L'interaction entre le sol et la structure est prise en compte au travers d'une matrice d'impédance fonction des caractéristiques du sol et de la fréquence d'excitation [160]. La nuisance vibratoire du banc est jugée à la lumière d'abaques extraites de la littérature concernée [135].

6.4.2.2 Synthèse thermo-hydrodynamique

La synthèse thermo-hydrodynamique est particulièrement importante dans le cadre de ce doctorat, puisqu'elle couple le comportement thermique du SqF aux paramètres de fonctionnement du circuit hydraulique. Outre la mise en évidence de la sensibilité du SqF aux paramètres associés à l'alimentation et surtout à l'étanchéité de l'amortisseur, cette synthèse fournit les températures maximales atteintes dans le film et dans la lubrification des roulements. Elle nous permet donc de définir un planning d'exploitation du banc d'essai cohérent aux propos de ce travail et qui respecte les limites thermiques de dégradation de l'huile.

L'analyse du comportement thermo-hydrodynamique du SqF s'appuie sur le modèle exposé dans la figure 6.22. Il comprend le film d'huile, les bagues intérieure et extérieure qui le délimitent, le roulement et l'arbre. Les hypothèses du modèle sont :

- le transfert de chaleur est purement radial,

- les résistances d'interface sont négligeables.

Les sources de chaleur résultent des mécanismes de dissipation associés au cisaillement du film amortisseur, \dot{E}_{sf} , et au frottement entre les parties métalliques du palier, \dot{E}_{rl} . L'évacuation de la chaleur générée est réalisée par la lubrification du palier, \dot{E}_{lb} , par la fuite contrôlée de l'amortisseur, \dot{E}_f , et par les échanges de convection et de radiation entre la surface de la bague extérieure et l'environnement, $\dot{E}_{cv} + \dot{E}_{rad}$. Les équations qui régissent l'état de régime permanent sont obtenues en écrivant les bilans énergétiques pour le SqF, pour le roulement et pour l'interface entre la bague extérieure et le milieu environnant.

En supposant que les températures T_3 et T_4 sont égales et équivalentes à la moyenne des températures d'entrée et de sortie du film d'huile, et que T_2 est donnée par la moyenne des températures de l'huile de lubrification en amont et en aval du roulement, la résolution des trois équations de bilan énergétique permet de déterminer les trois inconnues du problème, à savoir la température de sortie du SqF, celle en aval du roulement et T_5 . Le calcul est exécuté par une méthode itérative dichotomique.

Outre la détermination des températures au régime permanent, une étude transitoire est également réalisée pour l'estimation du temps de stabilisation thermique. Pour cela, nous incluons dans le modèle de la figure 6.22 un terme relatif au stockage d'énergie dans le système. Suite à une discrétisation de celui-ci dans la direction radiale, la méthode du bilan énergétique nodal est appliquée pour la déduction des équations du problème. La résolution s'effectue au travers d'un schéma différences finies implicite en temps.

6.4.2.3 Synthèse thermo-mécanique

La synthèse thermo-mécanique couple la synthèse thermo-hydrodynamique précédente au problème de dilatation thermique des éléments de la machine. L'objectif de cette synthèse est double : prendre en compte le changement de dimension du jeu radial du SqF et vérifier l'amplitude des contraintes thermiques.

L'analyse thermo-mécanique est réalisée en deux étapes. Dans la première, nous calculons à l'aide d'ANSYS la dilatation des bagues intérieure et extérieure du SqF pour des températures de celui-ci et du roulement données, comme le montre la figure 6.23. Il convient de faire remarquer que la température de la surface externe de la bague extérieure est une fonction des coefficients de convection et de conduction, lesquels sont supposés constants, des dimensions de la bague et des températures du milieu environnant et de l'amortisseur. On en déduit ainsi la variation du jeu radial en fonction de deux variables : la température moyenne du roulement et la température moyenne du film.

Les dilatations fonctions (linéaires) des températures de l'amortisseur et du roulement sont ensuite utilisées dans le calcul thermo-hydrodynamique, tout en vérifiant à partir des dilatations radiales maximum de la bague intérieure et minimum de la bague extérieure du SqF la possibilité de mise en butée.

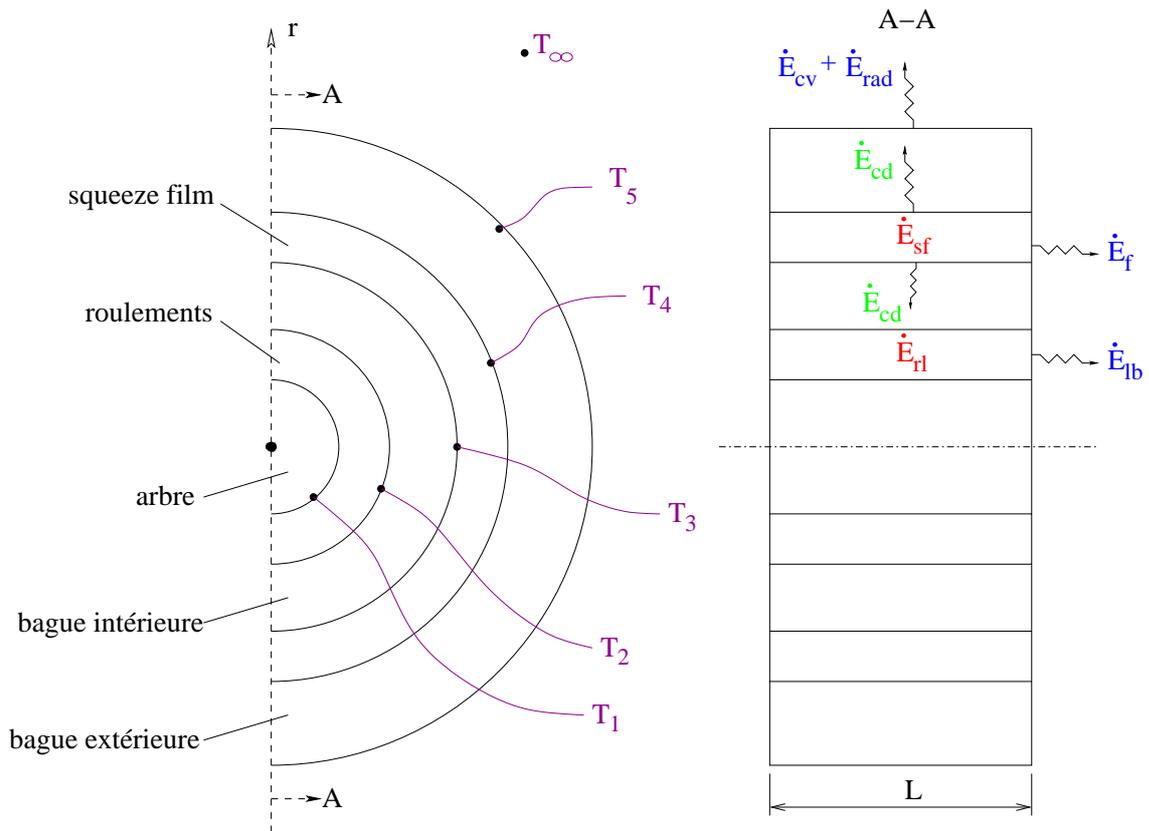


FIG. 6.22: Schéma du modèle thermo-hydrodynamique

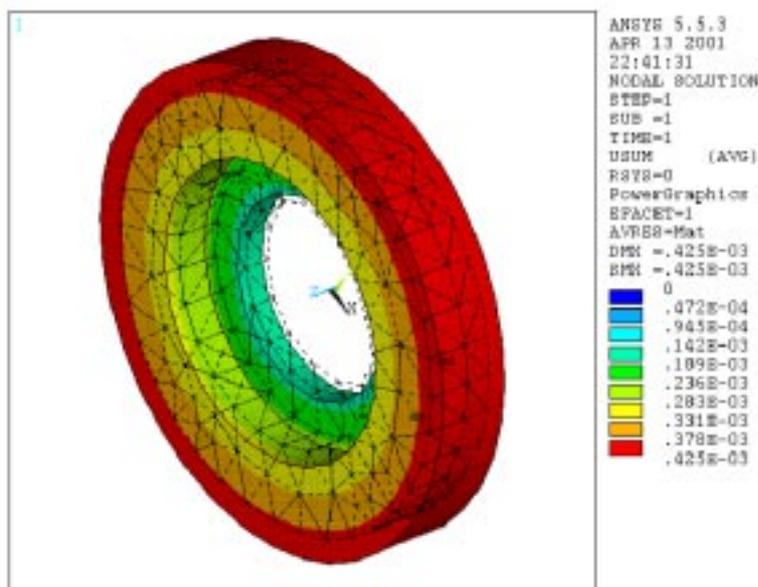


FIG. 6.23: Calcul de dilatation de la bague intérieure du SqF

6.4.2.4 Synthèse de performance

L'objectif de la synthèse de performance est de coupler tous les phénomènes physiques afin de simuler le fonctionnement du banc et le comportement du SqF.

Les matrices de masse, de raideur et gyroscopique du système sont déterminées à l'aide du code de calcul MATLAB du module *squeeze film*. Ces matrices sont ensuite utilisées pour le calcul de la réponse en fréquence qui comprend deux étapes itératives : une tenant compte de la déformation mécanique de l'ensemble et l'autre correspondant au calcul thermo-hydrodynamique (y compris le phénomène de dilatation thermique) de l'amortisseur. Les calculs de synthèse de performance fournissent en fonction de la vitesse de rotation de la machine et de l'excentricité nominale (statique) de l'amortisseur les paramètres suivants :

- le niveau des forces hydrodynamique tangentielle et radiale atteint
- la gamme de pression dans le film
- la température de sortie du fluide amortisseur
- la température de sortie du fluide lubrifiant
- l'excentricité effective

La synthèse de performance est menée afin de vérifier le dimensionnement préliminaire du banc d'essai et pour définir ses plages de fonctionnement sûres et exploitables. Compte tenu du coût temporel des calculs et des objectifs de cette synthèse, le modèle palier long non inertiel a été utilisé pour l'estimation des forces hydrodynamiques.

6.5 Conclusion

Nous présentons dans ce chapitre une étude théorique sur les perspectives d'utilisation d'une nouvel amortisseur *squeeze film* semi-adaptatif. La capacité d'adaptation est acquise au travers de la régulation de la restriction à l'écoulement sortant du film. L'exécution de cette régulation repose sur l'installation de valves contrôlables dans des conduites d'évacuation, la fuite par les extrémités de l'amortisseur étant bloquée par des joints toriques.

La modélisation du SqF adaptatif s'appuie sur les principes de calcul de circuits hydrauliques, détaillés dans le chapitre consacré à l'analyse des systèmes d'alimentation ponctuelle. Le paramètre de contrôle correspond au coefficient de perte de charge des valves d'évacuation. Nous avons montré que l'augmentation de ce coefficient, ce qui reflète la fermeture des valves, permet de faire monter le niveau de pression dans le film. Ce faisant, la capacité de dissipation d'énergie du SqF augmente grâce à des efforts hydrodynamiques plus importants. Il est important de souligner que l'amortisseur reste partiellement passif, car il dépend toujours de la cinématique du rotor. Le contrôle proposé est ainsi une méthode semi-adaptative. L'intérêt de son application est discuté à la lumière des simulations

menées pour des rotors flexibles, lesquelles mettent en évidence la forte sensibilité de la dynamique des rotors vis-à-vis de la restriction imposée par les valves à l'écoulement sortant du film.

Les résultats théoriques obtenus démontrent que le SqF semi-adaptatif mis en avant est une solution potentielle pour optimiser la réponse au balourd de machines tournantes. Un contrôle en boucle ouverte nous semble être l'application la plus adéquate. Le principal avantage de notre stratégie par rapport à d'autres développées auparavant, notamment celle de EL-SHAFEI [46], réside dans la mise en œuvre plus simple qui peut s'effectuer par l'utilisation de servovalves. En outre, les joints employés pour fermer les extrémités de l'amortisseur pourraient éventuellement jouer le rôle de centrage du SqF par rapport au bâti.

La deuxième partie de ce chapitre est consacré à la présentation du banc d'essai ASF, en cours de développement au sein de notre laboratoire. Le banc devra permettre la validation de nos modèles ainsi que la vérification de la sensibilité du comportement du SqF à la perte de charge au niveau des valves d'évacuation. Il s'agit de la première étape vers le SqF semi-adaptatif. La deuxième visera l'étude de son application à un rotor réel.

Chapitre 7

Conclusion générale et perspectives

Ce doctorat avait pour objectif d'apporter des contributions à l'analyse de systèmes incorporant des amortisseurs *squeeze film*. Différents aspects du problème ont été abordés : le comportement du film d'huile, l'étude d'outils de calcul en dynamique de structures non linéaires adaptés, la modélisation des forces générées par le SqF et l'application optimale d'un tel amortisseur.

Le premier chapitre après l'introduction du mémoire est édifié à partir d'éléments bibliographiques concernant la mécanique des lames fluides. Il synthétise les aspects comportementaux de la dynamique du film d'huile ayant fait l'objet de travaux publiés dans la littérature scientifique. Nous détaillons dans un premier temps la formulation de l'équation de Reynolds classique de la lubrification, souvent utilisée pour décrire le champ de pression du SqF. Ensuite, nous revenons sur les hypothèses faites initialement, pour présenter des formulations alternatives à cette équation permettant de modéliser des phénomènes particuliers (comportement non newtonien, effets d'inertie, turbulence, ...) pouvant intervenir dans la performance de l'amortisseur. Nous mettons en relief les aspects relatifs au phénomène de cavitation et au traitement des conditions aux limites associées à l'étanchéité et à l'alimentation de l'amortisseur. Nous discutons également de la prise en compte des effets thermiques et piézo-visqueux du film d'huile, et de l'interaction avec les frontières solides qui le délimitent. Dans la dernière partie du chapitre, des méthodes de résolution de l'équation de Reynolds sont exposées.

Le chapitre III est consacré à la présentation, à l'implémentation et à l'étude comparative de méthodes de calcul appliquées à la détermination de mouvements stationnaires et à l'analyse de la stabilité, dans le cadre de la dynamique des structures non linéaires. L'objectif principal est de tester la performance des techniques existantes sur des ensembles mécaniques incorporant des amortisseurs *squeeze film*. Les méthodes de la balance harmonique, de la collocation trigonométrique et de tir, conjuguées à la technique de continuation *pseudo-arc length*, sont considérées pour le calcul de la réponse au balourd d'un rotor flexible. La théorie de Floquet est exploitée pour statuer sur la stabilité du système. Pour la simulation d'un rotor Jeffcott exécutant des orbites circulaires et centrées (excentration statique nulle), la méthode de la collocation trigonométrique s'avère la plus efficace. La balance harmonique possède toutefois un avantage très intéressant : elle s'adapte aussi bien à des modèles numériques qu'expérimentaux, puisque la mise en équation s'effectue à partir de la matrice de réceptance du système. La méthode de tir affiche un coût temporel plus important et une très grande sensibilité à la technique d'intégration temporelle sur laquelle elle s'appuie. Cette méthode ne

nécessitant pas d'hypothèses sur le nombre d'harmoniques caractérisant la solution périodique, elle trouve son intérêt notamment dans l'analyse de structures dont la réponse contient un nombre d'harmoniques élevé. Il convient de souligner également que les méthodes de la collocation trigonométrique et de la balance harmonique permettent de condenser le modèle de manière assez simple sur les degrés de liberté non linéaires de la structure, ce qui conduit à une réduction de la taille du système d'équations à résoudre.

Nous abordons dans le chapitre IV un point fondamental pour la caractérisation du SqF : la modélisation des systèmes d'alimentation de type ponctuel. Bien qu'essentiel pour la description du comportement du film amortisseur, cette thématique nous semble, d'après notre recherche bibliographique, insuffisamment explorée. Nous proposons ainsi une nouvelle approche du problème, qui consiste à coupler l'hydrodynamique du film d'huile avec l'écoulement dans le circuit d'alimentation. Celui-ci est modélisé en employant la forme simplifiée du premier principe de la thermodynamique communément utilisée en hydraulique. Au lieu de définir, comme les modèles existants, une pression constante quelque part dans le système d'alimentation, nous imposons des conditions aux limites beaucoup plus en amont, comme la puissance de la pompe du circuit hydraulique et la pression dans le réservoir d'huile. Le modèle développé est utilisé pour l'étude de l'influence du nombre de points d'alimentation et de la puissance de la pompe sur la dynamique de rotors flexibles. Les simulations menées pour un rotor Jeffcott mettent en évidence le phénomène de blocage des paliers, observé lorsque l'amortissement engendré par le SqF devient trop important. Des calculs de réponse au balourd sont également réalisés pour un modèle de dynamique d'ensemble, plus réaliste que le Jeffcott. Les résultats montrent que la réduction du nombre de points d'injection et l'augmentation de la puissance de la pompe permettent d'amplifier la capacité d'amortissement du SqF. Il n'en résulte pas nécessairement une dissipation énergétique plus importante, nous tenons à le faire remarquer, puisque le SqF est un dispositif passif. Bien que la pressurisation du système d'alimentation rende possible la réduction, voire suppression, de la cavitation, nous avons constaté que, si excessive, elle peut donner naissance à des forces pouvant déstabiliser le système. Il est difficile de tirer des conclusions générales concernant la transmissibilité de l'amortisseur, car ce critère de performance dépend également de la dynamique du rotor. Compte tenu des fortes oscillations des forces du SqF découlant du système d'alimentation ponctuelle, on peut tout de même s'attendre à ce que l'augmentation du nombre de points d'injection fasse chuter les forces transmises au bâti. Quant au comportement du circuit hydraulique, il peut être considérablement modifié suite à l'action du SqF. Des fluctuations de pression, d'autant plus importantes que la vitesse et l'excentricité au niveau de l'amortisseur, sont observées principalement quand l'apport d'huile s'effectue par l'intermédiaire de deux ou trois points d'injection.

Dans le chapitre V, une stratégie originale permettant une description à la fois efficace et fidèle des forces hydrodynamiques du SqF est mise en avant. Il s'agit d'obtenir des expressions approchées des forces visqueuses et inertielles de l'amortisseur à l'aide de techniques d'identification non paramétriques. Cette stratégie s'appuie sur l'hypothèse que la dynamique du film d'huile n'est fonction que de la cinématique instantanée de l'amortisseur. Cela permet le découplage de la modélisation du champ de pression du film et de la simulation de la dynamique de l'ensemble mécanique. Deux méthodes d'identification sont testées : la régression linéaire et la projection sur des polynômes de Chebyshev. Ces deux méthodes sont couplées à la technique *stepwise*, afin d'optimiser les modèles vis-à-vis de leur complexité et de leur précision. La réduction procurée par la régression linéaire se révèle être plus importante que celle obtenue avec les polynômes de Chebyshev. En outre, cette méthode de lissage est plus souple au niveau de la définition de la base de fonctions sur laquelle les efforts sont

projetés et permet la pondération du poids des observations. L'avantage des polynômes de Chebyshev concerne la plus grande vitesse d'exécution de l'algorithme d'identification, grâce à l'exploitation des propriétés d'orthogonalité principalement. Les résultats obtenus pour un SqF axisymétrique, dont les forces radiale et tangentielle sont fonctions de trois paramètres cinématiques, montrent que la stratégie de lissage aboutit à un gain temporel appréciable, sans pénaliser la description physique du comportement du film d'huile. En effet, le temps requis pour la déduction des expressions approximatives des efforts de l'amortisseur est largement compensé lors des simulations de la dynamique du système. L'identification, plus complexe, des forces visqueuses d'un SqF non axisymétrique (alimenté par des points d'injection), fonctions de quatre paramètres cinématiques, a été abordée. Le lissage de l'énergie cinétique du SqF permet de généraliser l'approche énergétique de modélisation des effets d'inertie du fluide. Cependant, la prise en compte de ces effets dans l'analyse de la dynamique de rotors flexibles s'avère difficile, à cause de la non linéarité introduite par les forces inertielles. Nous avons tout de même pu constater la forte influence de l'inertie du fluide sur la performance de l'amortisseur, notamment lorsque celui-ci est presque étanche. L'approche par lissage a été ici poussée jusqu'à un très large spectre phénoménologique dans le cadre du SqF.

Le dernier chapitre de ce mémoire concerne la recherche d'optimisation de la performance de l'amortisseur *squeeze film* dans le domaine des machines tournantes. Après avoir fait le point sur l'état de l'art des solutions innovantes pour l'amélioration des caractéristiques du SqF, une stratégie de contrôle originale est proposée. Celle-ci consiste à modifier les conditions de restriction de l'écoulement sortant de l'amortisseur à travers des conduites d'évacuation, le paramètre de contrôle correspondant ainsi au coefficient de perte de charge imposé, par exemple, par des servovalves. Des simulations numériques visant à analyser la sensibilité de la dynamique de rotor flexibles à ce paramètre de contrôle fournissent des résultats encourageants. En effet, l'amplitude de la réponse au balourd et la transmissibilité peuvent être notablement modifiées à un coût énergétique a priori très faible. Dans la deuxième partie du chapitre nous présentons succinctement le banc d'essai ASF (*adaptive squeeze film*), en cours de développement au sein de l'équipe d'Analyse Non Linéaire de Systèmes Tournants du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon. Ce banc, conçu selon un principe de fonctionnement de pilotage en déplacement, nous permettra aussi bien de valider notre stratégie de contrôle que de recalibrer le modèle de comportement du SqF.

Les perspectives associées aux contributions particulières de ce doctorat sont nombreuses. Nous pouvons mettre en relief :

- l'amélioration du modèle du système d'alimentation ponctuelle grâce à une description plus réaliste du fonctionnement de la pompe du circuit hydraulique,
- le perfectionnement de la stratégie de lissage des forces visqueuses pour des problèmes non axisymétriques,
- le développement de méthodes de calculs en dynamique de structures non linéaires, y compris la résolution des systèmes d'équations algébriques ou différentielles qui en résultent, pour la prise en compte des effets d'inertie du fluide amortisseur,
- l'étude et la simulation de techniques de contrôle appliquées au *squeeze film* adaptatif.

En ce qui concerne la simulation de la dynamique de machines tournantes comportant des amor-

tisseurs *squeeze film*, on pourrait envisager de tester d'autres méthodes de calcul non linéaire, comme la méthode des éléments finis en temps [38].

En levant les hypothèses de départ de notre travail, à savoir celles de fluide newtonien, d'écoulement laminaire, de fluide incompressible et isovisqueux et de frontières solides indéformables, les axes de recherche pouvant être suivis sont abondants. L'étude d'écoulements turbulents et biphasiques, par exemple, touche des domaines très ouverts de la mécanique des fluides. Ces derniers notamment, présentent un intérêt pratique accru, car les SqF actuels sont très susceptibles de fonctionner avec des mélanges air-huile, engendrés par la pénétration d'air dans le film (cavitation gazeuse) tantôt par les extrémités de l'amortisseur tantôt par le système d'alimentation. Il nous semble important également de modéliser l'interaction entre le SqF et le(s) roulement(s) formant le palier, aussi bien au niveau mécanique (déformation des pistes de l'amortisseur) que thermique.

Bibliographie

- [1] ADILETTA G. and DELLA PIETRA L. The Squeeze Film Dampers over Four Decades of Investigations. Part ii: Rotordynamic Analyses with Rigid and Flexible Rotors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **116**: p682–691, 1994.
- [2] ARAUZ G.L. and SAN ANDRES L.A. Experimental Pressures and Film Forces in a Squeeze Film Damper. *Journal of Tribology*, **115**: p134–140, 1993.
- [3] ARAUZ G.L. and SAN ANDRES L.A. Effect of a Circumferential Feeding Groove on the Dynamic Force Response of a Short Squeeze Film Damper. *Journal of Tribology*, **116**: p369–377, 1994.
- [4] ARAUZ G.L. and SAN ANDRES L.A. Experimental Study on the Effect of a Circumferential Feeding Groove on the Dynamic Force Response of a Sealed Squeeze Film Damper. *Journal of Tribology*, **118**: p900–905, 1996.
- [5] ATHERTON D.P. *Nonlinear Control Engineering*. Van Nostrand Reinhold Company, 1975.
- [6] BARRETT L.E., ALLAIRE P.E., and GUNTER E.J. A Finite Length Bearing Correction Factor for Short Bearing Theory. *Journal of Lubrication Technology*, **102**: p283–290, 1980.
- [7] BILLINGS S.A. and VOON W.S.F. A Prediction-Error and Stepwise-Regression Estimation Algorithm for Non-Linear Systems. *International Journal of Control*, **44**: p803–822, 1986.
- [8] BRENNAN M.J. BONELLO P. and HOLMES R. Non-Linear Modelling of Rotor Dynamic Systems with Squeeze Film Dampers - An Efficient Integrated Approach. *Journal of Sound and Vibration*, **249**: p743–773, 2002.
- [9] BONINI J. and BERTHILLIER M. Méthodes en Dynamique Non Linéaire des Rotors pour l'étude du Comportement d'un Moteur d'Avion. *Revue Française de Mécanique*, pages p221–226, 1999.
- [10] BONNEAU D., FRÊNE J., GUINES D., and TOPLOSKY J. EHD Analysis, Including Structural Inertia Effects and a Mass-Conserving Cavitation Model. *Journal of Tribology*, **117**: p540–547, 1995.
- [11] BONNEAU O. and FRÊNE J. Non-Linear Behavior of a Flexible Shaft Partly Supported by a Squeeze Film Damper. *Wear*, **206**: p244–250, 1997.
- [12] BOOKER J.F. A Table of the Journal-Bearing Integral. *Journal of Basic Engineering*, pages p533–535, 1965.
- [13] BOOKER J.F. and HUEBNER K.H. Application of Finite Element Methods to Lubrication: An Engineering Approach. *Journal of Lubrication Technology*, pages p313–323, 1972.

- [14] BORMANN A. and GASCH R. Damping and Stiffness Coefficients of Elastomer Rings and Their Optimised Application in Rotor Dynamics: Theoretical Investigations and Experimental Validation. In *IFTToMM Sixth International Conference on Rotor Dynamics, Sydney*, pages 628–636, 2002.
- [15] BOU-SAID B. and EHRET P. Inertia and Shear-Thinning Effects on Bearing Behavior With Impulsive Loads. *Journal of Tribology*, **116**: p535–540, 1994.
- [16] BOU-SAID B. and NELIAS D. Influence of Ball Bearing Stiffness on Squeeze Film Behavior Including Fluid Flow Turbulence and Inertia Effects. In *Rotordynamics '92 - Proceedins of the International Conference on Rotating Machine Dynamics*, pages p414–421, 1992.
- [17] BRENNEN C. On the Flow in an Annulus Surrounding a Whirling Cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, **75**: p173–191, 1976.
- [18] BREWE D.E. Theoretical Modeling of the Vapor Cavitation in Dynamically Loaded Journal Bearings. *Journal of Tribology*, **108**: p628–638, 1986.
- [19] BURROWS C.R., SAHINKAYA M.N., and TURKAY O.S. An Adaptive Squeeze Film Bearing. *ASME paper 83-Lub-23*, 1983.
- [20] CASTELLI V. and SHAPIRO W. Improved Method for Numerical Solutions of the General Incompressible Fluid Film Lubrication Problems. *Journal of Lubrication Technology*, pages p211–218, 1967.
- [21] CHAMNIPRASART K., AL-SHARIF A., RAJAGOPAL K.R., and SZERI A.Z. Lubrication With Binary Mixtures: Bubbly Oil. *Journal of Tribology*, **115**: p253–260, 1993.
- [22] CHEN C.S., NATSIAVAS S., and NELSON H.D. Stability Analysis and Complex Dynamics of a Gear-Pair System Supported by a Squeeze Film Damper. *Journal of Vibration and Acoustics*, **119**: p85–88, 1997.
- [23] CHEN C.S., NATSIAVAS S., and NELSON H.D. Stability Analysis and Complex Dynamics of a Gear-Pair System Supported by a Squeeze Film Damper. *Journal of Vibration and Acoustics*, **119**: p85–88, 1997.
- [24] CHEN C.S., NATSIAVAS S., and NELSON H.D. Coupled Lateral-Torsional Vibration of a Gear-Pair System Supported by a Squeeze Film Damper. *Journal of Vibration and Acoustics*, **120**: p860–867, 1998.
- [25] CHEN P.Y.P. and HAHN E.J. Harmonic Balance Analysis of General Squeeze Film Damped Multidegree-of-Freedom Rotor Bearing Systems. *Journal of Tribology*, **116**: p499–507, 1994.
- [26] CHEN P.Y.P. and HAHN E.J. Pressure Distribution in Squeeze Film Dampers with Oil Hole Feed. *IMEchE, Part J : Journal of Engineering Tribology*, **208**: p105–112, 1994.
- [27] CHEN P.Y.P. and HAHN E.J. Side Clearance Effects on Squeeze Film Damper Performance. *Tribology International*, **33**: p161–165, 2000.
- [28] CHILDS D. *Turbomachinery Rotordynamics - Phenomena, Modeling and Analysis*. Wiley, 1993.

- [29] CHILDS D.W. Fluid-Structure Interaction Forces at Pump-Impeller-Shroud Surfaces for Rotor-dynamic Calculations. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **111**: p216–225, 1989.
- [30] CHILDS D.W. Rotordynamics of Turbomachinery..Looking Back..Looking Forward. In *IFTToMM Sixth International Conference on Rotor Dynamics, Sydney*, pages p759–766, 2002.
- [31] CHU F. and HOLMES R. The Effect of Squeeze Film Damper Parameters on the Unbalance Response and Stability of a Flexible Rotor. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **120**: p140–148, 1998.
- [32] CHU F. and HOLMES R. Efficient Computation on Nonlinear Responses of a Rotating Assembly Incorporating the Squeeze-Film Damper. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **164**: p363–373, 1998.
- [33] CHU F. and HOLMES R. The Damping Capacity of the Squeeze Film Damper in Suppressing Vibration of a Rotating Assembly. *Tribology International*, **33**: p81–97, 2000.
- [34] CONSTANTINESCU V.N. On the Possibilities of Improving the Accuracy of the Evaluation of Inertia Forces in Laminar and Turbulent Films. *Journal of Lubrication Technology*, **96**: p69–79, 1974.
- [35] COOKSON R.A., FENG X.H., and KOSSA S.S. The Effect of Journal Misalignment on the Oil-Film Forces Generated in a Squeeze Film Damper. *Journal of Engineering for Power*, pages p560–564, 1983.
- [36] COYNE J.C. and ELROD JR.H.G. Conditions for the Rupture of a Lubricating Film. Part i: Theoretical Model. *Journal of Lubrication Technology*, pages p451–456, 1970.
- [37] DAI X., SHEN Z., and WEI H. On the Vibration of Rotor-Bearing System with Squeeze Film Damper in an Energy Storage Flywheel. *International Journal of Mechanical Sciences*, **43**: p2525–2540, 2001.
- [38] DEMAILLY J. *Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel. Application à la dynamique rotor*. Ecole Centrale de Lyon : Student Press, 2002. Thèse de Doctorat.
- [39] DIAZ S.E. and SAN ANDRÉS L.A. A Method for Identification of Bearing Force Coefficients and Its Application to a Squeeze Film Damper with a Bubbly Lubricant. *Tribology Transactions*, **42**: p739–746, 1999.
- [40] DIAZ S.E. and SAN ANDRÉS L.A. Reduction of the Dynamic Load Capacity in a Squeeze Film Damper Operating With a Bubbly Lubricant. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **121**: p703–709, 1999.
- [41] DIAZ S.E. and SAN ANDRÉS L.A. A Model for Squeeze Film Dampers Operating With Air Entrainment and Validation with Experiments. *Journal of Tribology*, **123**: p125–133, 2001.
- [42] DOKAINISH M.A. and SUBBARAJ K. A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics-i. Explicit Methods. *Computers & Structures*, **32**: p1371–1386, 1989.
- [43] EHRICH F.F. *Handbook of Rotordynamics*. Krieger Publishing Company, 1999.

- [44] EL-SHAFAEI A. Unbalance Response of a Jeffcott Rotor Incorporating Short Squeeze Film Dampers. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **112**: p445–453, 1990.
- [45] EL-SHAFAEI A. Unbalance Response of a Jeffcott Rotor Incorporating Long Squeeze Film Dampers. *Journal of Vibration and Acoustics*, **113**: p85–94, 1991.
- [46] EL-SHAFAEI A. Experimental and Analytical Investigation of Hybrid Squeeze Film Dampers. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **115**: p353–359, 1993.
- [47] EL-SHAFAEI A. and CRANDALL S.H. Momentum and Energy Approximations for Elementary Squeeze-Film Damper Flows. *Journal of Applied Mechanics*, **60**: p728–736, 1993.
- [48] EL-SHAFAEI A. and EL-HAKIM M. Experimental Investigation of Adaptive Control Applied to HSFDM Supported Rotors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **122**: p685–692, 2000.
- [49] EL-SHAFAEI A. and ERANKI R.V. Dynamic Analysis of Squeeze Film Damper Supported Rotors Using Equivalent Linearization. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **116**: p682–691, 1994.
- [50] ELROD H.G. A Cavitation Algorithm. *Journal of Lubrication Technology*, **103**: p350–354, 1981.
- [51] FENG N.S. and HAHN E.J. Effects of Gas Entrainment on Squeeze Film Damper Performance. *Journal of Tribology*, **109**: p149–154, 1987.
- [52] FOX R.W. and MCDONALD A.T. *Introduction to Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons, 1992.
- [53] FREUND N.O. and TIEU A.K. A Thermo-Elasto-Hydrodynamic Study of Journal Bearing with Controlled Deflection. *Journal of Tribology*, **115**: p550–556, 1993.
- [54] FUERST A.G., WEBER H.I., and BRITO G.C. Application and Remarks on the Finite Bearing Solution FBS. In *IFTOMM Fifth International Conference on Rotor Dynamics, Darmstadt*, pages p560–370, 1998.
- [55] GIRAUDEAU J.P. *Contribution à l'Etude du Comportement Dynamique d'un Rotor Monté sur des Paliers de Type Squeeze Film*. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon : Student Press, 1995. Thèse de Doctorat.
- [56] GMÜR T. *Dynamique des Structures - Analyse Modale Numérique*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.
- [57] GOHAR R. *Elastohydrodynamics*. Ellis Horwood Series in Mechanical Engineering, 1988.
- [58] GUHA A.K. Analysis of Steady-State Characteristics of Misaligned Journal Bearings With Isotropic Roughness Effect. *Tribology International*, **33**: p1–12, 2000.
- [59] GUOZHI Y., FAH Y.F., GUANG C., TONG F., and YANG Q. Electro-Rheological Multi-Layer Squeeze Film Damper and Its Application to Vibration Control of Rotor System. *Journal of Vibration and Acoustics*, **122**: p7–11, 2002.
- [60] HAHN E.J. Stability and Unbalance Response of Centrally Preloaded Rotors Mounted in Journal and Squeeze Film Bearings. *Journal of Lubrication Technology*, **101**: p120–128, 1979.

- [61] HAN Y. and ROGERS R.J. Squeeze Film Force Modeling for Large Amplitude Motion Using an Elliptical Velocity Profile. *Journal of Tribology*, **118**: p687–692, 1996.
- [62] HAN Y. and ROGERS R.J. Nonlinear Fluid Forces in Cylindrical Squeeze Films. Part I: Short and Long Lengths. *Journal of Fluids and Structures*, **15**: p151–169, 2001.
- [63] HAN Y. and ROGERS R.J. Nonlinear Fluid Forces in Cylindrical Squeeze Films. Part II: Finite Length. *Journal of Fluids and Structures*, **15**: p171–206, 2001.
- [64] HATHOUT J.P. and EL-SHAFAEI A. PI Control of HSFDs for Active Control of Rotor-Bearing Systems. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **119**: p658–667, 1997.
- [65] HOLL W. Limited Cavitation. In *ASME Fluids Engineering and Applied Mechanics Conference, Illinois*, pages p26–63, 1969.
- [66] HSU C.S. Impulsive Parametric Excitation: Theory. *Journal of Applied Mechanics*, pages p551–558, 1972.
- [67] IDEL'CIK I.E. *Memento des Pertes de Charge*. Eyrolles Editeur, 1969.
- [68] IMBERT J.F. *Analyse des Structures par Eléments Finis*. CEPADUES-Editions, Toulouse, 1984.
- [69] INAYAT-HUSSAIN J.I., KANKI H., and MUREITHI N.W. Bifurcations and Chaos in the Response of a Rigid Rotor Supported by Eccentric Squeeze-Film Dampers. In *ASME 2001 Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference*, page ?, 2001.
- [70] INCROPERA F.P. and WITT D.P. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons, 1990.
- [71] JEAN A.N. and NELSON H.D. Periodic Response Investigation of Large Order Nonlinear Rotor-dynamic Systems Using Collocation. *Journal of Sound and Vibration*, **143**: p299–308, 1990.
- [72] JUNG S.Y., SAN ANDRÉS L.A., and VANCE J.M. Measurements of Pressure Distributions and Force Coefficients in a Squeeze Film Damper Part i: Fully Open Ended Configuration. *Tribology Transactions*, **34**: p375–382, 1991.
- [73] JUNG S.Y., SAN ANDRÉS L.A., and VANCE J.M. Measurements of Pressure Distributions and Force Coefficients in a Squeeze Film Damper Part ii: Partially Sealed Configuration. *Tribology Transactions*, **34**: p383–388, 1991.
- [74] JUNG S.Y. and VANCE J.M. Effects of Vapor Cavitation and Fluid Inertia on the Force Coefficients of a Squeeze Film Damper Part i - Analysis of a Long SFD. *Tribology Transactions*, **36**: p597–604, 1993.
- [75] KUROSAWA M. KANKI H., KANEKO Y. and YAMAMOTO T. Prevention of Low-Frequency Vibration of High-Capacity Steam Turbine Units by Squeeze-Film Damper. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **120**: p391–396, 1998.
- [76] KNOSPE C.R., HOPE W., FEDIGAN S.J., and WILLIAMS R.D. Experiments in the Control of Unbalance Response Using Magnetic Bearings. *Mechatronics*, **5**: p385–400, 1995.

- [77] KNOSPE C.R. and TAMER S.M. Experiments in Robust Control of Rotor Unbalance Response Using Magnetic Bearings. *Mechatronics*, **7**: p217–229, 1997.
- [78] KU C. and TICHY J.A. Application of the $k - \epsilon$ Turbulence Model to the Squeeze Film Damper. *Journal of Basic Engineering*, **87**: p675–688, 1965.
- [79] KUMAR A. and BOOKER J.F. A Finite Element Cavitation Algorithm. *Journal of Tribology*, **113**: p276–286, 1991.
- [80] KUMAR A. and BOOKER J.F. A Finite Element Cavitation Algorithm: Application/Validation. *Journal of Tribology*, **113**: p255–261, 1991.
- [81] KUNDU P.K. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 1990.
- [82] KUZMA D.C. Fluid Inertia Effects in Squeeze Films. *Applied Scientific Research*, **18**: p15–20, 1967.
- [83] KREMPL E. LAI W.M., RUBIN D. *Introduction to Continuum Mechanics*. Pergamon Press, 1993.
- [84] LALANNE M. and FERRARIS G. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. John Wiley & Sons, 1990.
- [85] LI X. and TAYLOR D.L. Nonsynchronous Motion of Squeeze Film Damper Systems. *Journal of Tribology*, **109**: p169–176, 1987.
- [86] LIN J.R. Squeeze Film Characteristics of Finite Journal Bearings : Couple Stress Fluid Model. *ASLE Transactions*, **31**: p201–207, 1998.
- [87] LU Y. and ROGERS R.J. A Nonlinear Model for Short Length, Cylindrical Squeeze Films with Large Planar Motions. *Journal of Tribology*, **114**: p192–198, 1992.
- [88] LUND J.W., SMALLEY A.J., TECZA J.A., and WALTON J.F. Squeeze Film Damper Technology : Part i - Prediction of Finite Length Damper Performance. *ASME paper No. 83-GT-247*, 1983.
- [89] LUND J.W., SMALLEY A.J., TECZA J.A., and WALTON J.F. Squeeze Film Damper Technology : Part ii - experimental verification using a controlled-orbit test rig. *ASME paper No. 83-GT-248*, 1983.
- [90] MARMOL R.A. and VANCE J.M. Squeeze Film Damper Characteristics for Gas Turbine Engines. *Journal of Mechanical Design*, **100**: p139–146, 1978.
- [91] MASRI. A Hybrid Parametric/Nonparametric Approach for the Identification of Nonlinear Systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **9**: p47–57, 1994.
- [92] MASRI S.F. and CAUGHEY T.K. A Nonparametric Identification Technique for Nonlinear Dynamic Problems. *Journal of Applied Mechanics*, **46**: p433–447, 1979.
- [93] MASRI S.F., SASSI H., and CAUGHEY T.K. Nonparametric Identification of Nearly Arbitrary Nonlinear Systems. *Journal of Applied Mechanics*, **49**: p619–628, 1982.
- [94] MASSEY B.S. *Mechanics of Fluids*. Van Nostrand Reinhold (International), 1989.
- [95] MATHWORKS. *MATLAB Users' Guide*. The Math Works INC., 1998.

- [96] MCLEAN L.J. and HAHN E.J. Unbalance Behavior of Squeeze Film Damped Multi-Mass Flexible Rotor Bearing Systems. *Journal of Lubrication Technology*, **105**: p22–28, 1983.
- [97] MEIROVITCH L. *Elements of Vibration Analysis*. Mac Graw Hill International Editions, 1986.
- [98] MEUNIER L. *Caractérisation de Systèmes Non-Linéaires dans le Domaine Fréquentiel : Application aux Trépidations Automobiles*. Ecole Centrale de Lyon : Student Press, 1998. Thèse de Doctorat.
- [99] MODEST M.F. and TICHY J.A. Squeeze Film Flow in Arbitrarily Shaped Journal Bearings Subject to Oscillations. *Journal of Lubrication Technology*, **100**: p323–329, 1978.
- [100] MORISHITA S. and AN Y.K. On Dynamic Characteristics of ER Fluid Squeeze Film Damper. *JSME International Journal*, **39**: p702–707, 1996.
- [101] MU C., DARLING J., and BURROWS C.R. An Appraisal of a Proposed Active Squeeze Film Damper. *Journal of Tribology*, **113**: p750–754, 1991.
- [102] NADUVINAMANI N.B., HIREMATH P.S., and GURUBASAVARAJ G. Squeeze Film Lubrication of a Short Porous Journal Bearing With Couple Stress Fluids. *Tribology International*, **34**: p739–747, 2001.
- [103] NAJIM M. *Modélisation et Identification en Traitement du Signal*. Massan, Paris, 1988.
- [104] NATARAJ C. and NELSON H.D. Periodic Solutions in Rotor Dynamic Systems with Nonlinear Supports: a General Approach. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **111**: p187–193, 1989.
- [105] NAYFEH A.H. and BALACHANDRAN B. *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley Series in Nonlinear Science, 1995.
- [106] NELSON F.C. A Review of the Origins and Current Status of Rotor Dynamics. In *IFTToMM Sixth International Conference on Rotor Dynamics, Sydney*, pages p745–751, 2002.
- [107] NG C.W. and PAN C.H.T. A Linearized Turbulent Lubrication Theory. *Journal of Basic Engineering*, **87**: p675–688, 1965.
- [108] NIKOLAJSSEN J.L. and HOQUE M.S. An Electroviscous Damper for Rotor Applications. *Journal of Vibration and Acoustics*, **112**: p440–443, 1990.
- [109] O'DONOHUE J.P., KOCH P.R., and HOOKE C.O. Approximate Short Bearing Analysis and Experimental Results Obtained Using Plastic Bearing Liners. *Proceedings I. Mech. E.*, **184**: p190–196, 1970.
- [110] OPTASANU V. and BONNEAU D. Finite Element Mass-Conserving Cavitation Algorithm in Pure Squeeze Motion. Validation/Application to a Connecting-Rod Small End Bearing. *Journal of Tribology*, **122**: p162–169, 2000.
- [111] PADMANABHAN C. and SINGH R. Analysis of Periodically Excited Non-Linear Systems by a Parametric Continuation Technique. *Journal of Sound and Vibration*, **184**: p35–58, 1995.
- [112] PAN C.H.T. An Improved Short Bearing Analysis for the Submerged Operation of Plain Journal Bearings and Squeeze-Film Dampers. *Journal of Lubrication Technology*, **102**: p320–332, 1980.

- [113] PAN C.H.T. Dynamic Analysis of Rupture in Thin Fluid Films. i - A Noninertial Theory. *Journal of Lubrication Technology*, **105**: p96–104, 1983.
- [114] PAN C.H.T. and IBRAHIM R.A. Cavitation in a Short Bearing With Pressurized Lubricant Supply. *Journal of Lubrication Technology*, **103**: p337–349, 1981.
- [115] PAN C.H.T. and TONNESEN J. Eccentric Operation of the Squeeze Film Damper. *Journal of Lubrication Technology*, **100**: p369–378, 1978.
- [116] PARANJPE R.S. and HAN T. A Transient Thermohydrodynamic Analysis Including Mass Conserving Cavitation for Dynamically Loaded Journal Bearings. *Journal of Tribology*, **117**: p369–378, 1995.
- [117] PAYVAR P. and SALANT R.F. A Computational Method for Cavitation in a Wavy Mechanical Seal. *Journal of Tribology*, **114**: p199–204, 1992.
- [118] PICCARDI C. Bifurcations of Limit Cycles in Periodically Forced Nonlinear Systems: the Harmonic Balance Approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, **41**: p315–320, 1994.
- [119] PRAKASH J. and VIJ S.K. Squeeze film in porous metal bearings. *Journal of Lubrication Technology*, pages p302–305, 1972.
- [120] QI A., YINSHENG Z., and YONGXIN Q. Study on the Viscosity Properties of Bubbly Oil and the Static Characteristics of Journal Bearings Lubricated With Bubbly Oil. *Wear*, **213**: p159–164, 1997.
- [121] QINGCHANG T., WEI L., and JUN Z. Fluid Forces in Short Squeeze-Film Damper Bearings. *Tribology International*, **30**: p733–738, 1997.
- [122] QINGCHANG T., XAOHUA L., and DAWEI Z. Analytical Study of the Effect of a Circumferential Feeding Groove on the Unbalance Response of a Rigid Rotor in a Squeeze Film Damper. *Tribology International*, **31**: p265–270, 1998.
- [123] RABINOWITZ M.D. and HAHN E.J. Stability of Squeeze-Film-Damper Supported Flexible Rotors. *Journal of Engineering for Power*, pages p545–551, 1977.
- [124] RABINOWITZ M.D. and HAHN E.J. Steady-State Performance of Squeeze Film Damper Supported flexible Rotors. *Journal of Engineering for Power*, pages p552–558, 1977.
- [125] RABINOWITZ M.D. and HAHN E.J. Experimental Evaluation of Squeeze Film Supported Flexible Rotors. *Journal of Engineering for Power*, **105**: p495–503, 1983.
- [126] RABINOWITZ M.D. and HAHN E.J. Optimal Design of Squeeze Film Supports for Flexible Rotors. *Journal of Engineering for Power*, **105**: p487–494, 1983.
- [127] RAMLI M.D., ROBERTS J.B., and ELLIS J. Determination of Squeeze-Film Dynamic Coefficients From Experimental Transient Data. *Journal of Tribology*, **109**: p155–163, 1987.
- [128] REDDI M.M. Finite-Element Solution of the Incompressible Lubrication Problem. *Journal of Lubrication Technology*, pages p524–533, 1969.

- [129] REINHARDT E. and LUND J.W. The Influence of Fluid Inertia on the Dynamic Properties of Journal Bearings. *Journal of Lubrication Technology*, pages p159–167, 1975.
- [130] REN Y. and BEARDS C.F. A New Receptance-Based Perturbative Multi-Harmonic Balance Method for the Calculation of the Steady State Response of Non-Linear Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **172**: p593–605, 1994.
- [131] REN Y. and BEARDS C.F. On Application of the Harmonic Balance Method to Structures Containing one Non-Linear Element. *Journal of Sound and Vibration*, **175**: p705–710, 1994.
- [132] REZVANI M.A. and HAHN E.J. Limitations of the Short Bearing Approximation in Dynamically Loaded Narrow Hydrodynamic Bearings. *Journal of Tribology*, **115**: p544–549, 1993.
- [133] REZVANI M.A. and HAHN E.J. An Experimental Evaluation of Squeeze Film Dampers without Centralizing Springs. *Tribology International*, **29**: p51–59, 1996.
- [134] REZVANI M.A. and HAHN E.J. Floating ring squeeze film damper: Theoretical analysis. *Tribology International*, **33**: p249–258, 2000.
- [135] RICHART Jr.F., HALL Jr.J., and WOODS R. *Vibrations of Soils and Foundations*. Prentice-Hall International Series, 1970.
- [136] ROBERTI V. *Contrôle de Structures : Théories et Applications*. Ecole Centrale de Lyon : Student Press, 1994. Thèse de Doctorat.
- [137] ROBERTS J.B., ELLIS J., and CARRASCO A. An Experimental Study of the Nonlinear Behavior of a Squeeze-Film Bearing. *Journal of Tribology*, **115**: p312–318, 1993.
- [138] RODRIGUES F.A., GIBERT C., THOUVEREZ F., and JÉZÉQUEL L. Chebyshev Polynomials Fits for Efficient Analysis of Finite Length Squeeze Film Damped Rotors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **125**: p175–183, 2003.
- [139] ROGERS R.J., BERG M.M., RAMPEN W.H.S., SOH Y.T., TEU H.M., and WANG T.K.V. Harmonic Modelling of Nonlinear Fluid Forces in Finite Length, Cylindrical Squeeze Films. *Journal of Fluids and Structures*, **4**: p583–603, 1990.
- [140] ROHDE S.M. Bounds for the Solution of Reynolds Equation. *Journal of Lubrication Technology*, pages p102–104, 1973.
- [141] ROHDE S.M. and LI D.F. A Generalized Short Bearing Theory. *Journal of Lubrication Technology*, **102**: p278–282, 1980.
- [142] SAITO S. Calculation of Nonlinear Unbalance Response of Horizontal Jeffcott Rotors Supported by Ball Bearings with Radial Clearances. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **107**: p416–420, 1985.
- [143] SAN ANDRES L.A. Analysis of Hydrostatic Journal Bearing with End Seals. *Journal of Tribology*, **114**: p802–811, 1992.
- [144] SAN ANDRES L.A. Analysis of Short Squeeze Film Dampers with a Central Groove. *Journal of Tribology*, **114**: p659–665, 1992.

- [145] SAN ANDRES L.A. Theoretical and Experimental Comparisons for Damping Coefficients of a Short-Length Open-End Squeeze Film Damper. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **118**: p810–815, 1996.
- [146] SAN ANDRES L.A. and LUBELL D. Imbalance Response of a Test Rotor Supported on Squeeze Film Dampers. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **120**: p397–404, 1998.
- [147] SAN ANDRÉS L.A., MENG G., and YOON S. Dynamic Force Response of an Open-Ended Squeeze Film Damper. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **115**: p341–346, 1993.
- [148] SAN ANDRÉS L.A. and VANCE J.M. Effects of Fluid Inertia and Turbulence on the Force Coefficients for Squeeze Film Dampers. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **108**: p332–339, 1986.
- [149] SAN ANDRÉS L.A. and VANCE J.M. Effects of Fluid Inertia on Finite-Length Squeeze-Film Dampers. *ASLE Transactions*, **30**: p384–393, 1986.
- [150] SAN ANDRÉS L.A. and VANCE J.M. Effects of Fluid Inertia on Squeeze-Film Damper Forces for Small-Amplitude Circular-Centered Motions. *ASLE Transactions*, **30**: p63–68, 1986.
- [151] SAN ANDRÉS L.A. and VANCE J.M. Force Coefficients for Open-Ended Squeeze-Film Dampers Executing Small-Amplitude Motions About an Off-Center Equilibrium Solutions. *ASLE Transactions*, **30**: p69–76, 1986.
- [152] SAN ANDRÉS L.A. and VANCE J.M. Effects of Fluid Inertia on the Performance of Squeeze-Film Damper Supported Rotors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **110**: p51–57, 1988.
- [153] SAN ANDRÉS L.A. SANTIAGO O. and OLIVERAS J. Imbalance Response of a Rotor Supported on Open-Ends Integral Squeeze Film Dampers. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **121**: p718–724, 1999.
- [154] SAKAKIDA H. SATO Y., FUJINO H. and HISA S. Stability Characteristics of a Journal Bearing Mounted in an Uncentralized Squeeze Film Damper. *Journal of Tribology*, **113**: p584–589, 1991.
- [155] SAVAGE M.D. Cavitation in Lubrication. Part i: On Boundary Conditions and Cavity-Fluid Interfaces. *Journal of Lubrication Technology*, **102**: p320–332, 1980.
- [156] SHAPIRO W. Impact on Reynolds Theory on Bearing and Seal Design. *Journal of Tribology*, **109**: p42–49, 1987.
- [157] SAFAR Z.S. SHAWKI G.S.A., MOKHTAR M.O.A. Behavior of Finite Journal Bearings Under Dynamic Loading Conditions. *Journal of Lubrication Technology*, **102**: p333–340, 1980.
- [158] SHIAU T.N., HWANG J.L., and CHANG Y.B. A Study on Stability and Response Analysis of a Nonlinear Rotor System with Mass Unbalance and Side Load. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **115**: p218–226, 1993.
- [159] SHIAU T.N. and JEAN A.N. Prediction of Periodic Response of Flexible Mechanical Systems with Nonlinear Characteristics. *Journal of Vibration and Acoustics*, **112**: p501–507, 1990.
- [160] SIEFFERT J. and CEVAER F. *Manuel des Fonctions d'Impédance*. OUEST Editions, 1991.

- [161] SINOUE J. *Synthèse Non-Linéaire des Structures Frottantes. Application aux Systèmes de Freinage*. Ecole Centrale de Lyon : Student Press, 2002. Thèse de Doctorat.
- [162] SMILLIE K.W. *An Introduction to Regression and Correlation*. Academic Press, New York, 1966.
- [163] SMITH E.H. The Influence of Surface Tension on Bearings With Bubbly Liquids. *Journal of Lubrication Technology*, **102**: p91–96, 1980.
- [164] STOER J. and BULIRSCH R. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag New York Inc., 1980.
- [165] SUBBARAJ K. and DOKAINISH M.A. A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics-ii. Implicit Methods. *Computers & Structures*, **32**: p1387–1401, 1989.
- [166] SUCIU C.V., BONNEAU O., BRUN-PICARD D., FRÊNE J., and PASCOVICI M.D. Study of a Novel Squeeze Film Damper and Vibration Generator. *Journal of Tribology*, **122**: p211–218, 2000.
- [167] SUN D.C. and BREWE D.E. Two Reference Time Scales for Studying the Dynamic Cavitation of Liquid Films. *Journal of Tribology*, **114**: p612–615, 1992.
- [168] SUNDARARAJAN P. and NOAH S.T. Dynamics of Forced Nonlinear Systems Using Shooting/Arc-Length Continuation Method - Application to Rotor Systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, **119**: p9–20, 1997.
- [169] SUNDARARAJAN P. and NOAH S.T. An Algorithm for Response and Stability of Large Order Non-Linear Systems - Application to Rotor Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **214**: p695–723, 1998.
- [170] SZERI A.Z. Some Extensions of the Lubrication Theory of Osborne Reynolds. *Journal of Tribology*, **109**: p21–36, 1987.
- [171] SZERI A.Z., RAIMONDI A.A., and GIRON-DUARTE A. Linear Force Coefficients for Squeeze-Film Dampers. *Journal of Lubrication Technology*, **105**: p326–334, 1983.
- [172] SAN ANDRÉS L.A. TAO L., DIAZ S. and RAJAGOPAL K.R. Analysis of Squeeze Film Dampers Operating With Bubbly Lubricants. *Journal of Tribology*, **122**: p205–210, 2000.
- [173] TAYLOR D.L. and KUMAR B.R.K. Nonlinear Response of Short Squeeze Film Dampers. *Journal of Lubrication Technology*, **102**: p51–58, 1980.
- [174] TAYLOR D.L. and KUMAR B.R.K. Closed-Form, Steady-State Solution for the Unbalance Response of a Rigid Rotor in Squeeze Film Damper. *Journal of Engineering for Power*, **105**: p551–559, 1983.
- [175] TECZA J. and WALTON J. A Chambered Porous Damper for Rotor Vibration Control: Part I - Concept Development. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **115**: p360–365, 1993.
- [176] TICHY J.A. Effects of Fluid Inertia and Viscoelasticity on Squeeze-Film Bearing Forces. *ASLE Transactions*, **25**: p125–132, 1982.

- [177] TICHY J.A. Effects of Fluid Inertia and Viscoelasticity on the One-Dimensional Squeeze-Film Bearing. *ASLE Transactions*, **27**: p164–167, 1984.
- [178] TICHY J.A. A Study of the Effect of Fluid Inertia and End Leakage in the Finite Squeeze Film Damper. *Journal of Tribology*, **109**: p54–59, 1987.
- [179] TICHY J.A. Behavior of a Squeeze Film Damper with an Electrorheological Fluid. *Tribology Transactions*, **36**: p127–133, 1993.
- [180] TICHY J.A. and MODEST M.F. Squeeze Film Flow Between Arbitrary Two-Dimensional Surfaces Subject to Normal Oscillations. *Journal of Lubrication Technology*, **100**: p316–322, 1978.
- [181] TICHY J.A. and SKINKLE M.E. An Analysis of the Flow of a Viscoelastic Fluid Between Arbitrary Two-Dimensional Surfaces Subject to Normal High Frequency Oscillations. *Journal of Lubrication Technology*, **101**: p145–152, 1979.
- [182] TICHY J.A. and SMITH R.N. The Thermal Behavior of Oscillating Squeeze Films. *Journal of Lubrication Technology*, **105**: p13–21, 1983.
- [183] TICHY J.A. and WINER W.O. An Investigation Into the Influence of Fluid Viscoelasticity in a Squeeze Film Bearing. *Journal of Lubrication Technology*, **100**: p56–64, 1978.
- [184] TIPEI N. Flow Characteristics and Pressure Head Build-Up at the Inlet of Narrow Passages. *Journal of Lubrication Technology*, **100**: p47–55, 1978.
- [185] TONNESEN J. Experimental Parametric Study of a Squeeze Film Bearing. *Journal of Lubrication Technology*, pages p206–213, 1976.
- [186] TSAO J., SHEU L., and YANG L. Adaptive Synchronization Control of the Magnetically Suspended Rotor System. *Dynamics and Control*, **10**: p239–253, 2000.
- [187] USHA R. and VIMALA P. Fluid Inertia Effects in a Non-Newtonian Squeeze Film Between Two Plane Annuli. *Journal of Tribology*, **122**: p872–875, 2000.
- [188] VANCE J.M. *Rotordynamics of Turbomachinery*. John Wiley & Sons, 1988.
- [189] VANCE J.M., YING D., and NIKOLAJSSEN J.L. Actively Controlled Bearing Dampers for Aircraft Engine Applications. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **122**: p466–472, 2000.
- [190] WALTON II J.F. and HESHMAT H. Rotordynamic Evaluation of an Advanced Multisqueeze Film Damper - Imbalance Response and Blade-Loss Simulation. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **115**: p347–352, 1993.
- [191] WALTON J. and MARTIN M. A Chambered Porous Damper for Rotor Vibration Control: Part II - Imbalance Response and Blade-Loss Simulation. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **115**: p366–371, 1993.
- [192] WALTON J.F., WALOWIT J.A., ZORZI E.S., and SCHRAND J. Experimental Observation of Cavitating Squeeze-Film Dampers. *Journal of Tribology*, **109**: p290–295, 1987.
- [193] WANG J. and HAHN E.J. Transient Analysis of Squeeze-Film Dampers with Oil Hole Feed. *Tribology Transactions*, **38**: p837–844, 1995.

- [194] WORDEN K. and TOMLINSON G.R. Developments in Force State Mapping for Nonlinear Systems. *Proceedings of the VI International Modal Analysis Conference*, pages p1471–1479, 1988.
- [195] XIA S., JIAO Y., CHEN Z., HUANG W., and ZHANG Z. An Efficient Calculation Method of Nonlinear Oil Film Forces in Journal Bearings. In *IFTOMM Sixth International Conference on Rotor Dynamics, Sydney*, pages 645–651, 2002.
- [196] YOO H.S. Some Effects of Viscoelastic Matrix on the Squeeze Films. *ASLE Transactions*, **30**: p403–408, 1986.
- [197] YUCEF-TOUMI K. and ITO O. A Time Delay Controller for Systems With Unknown Dynamics. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **112**: p133–142, 1990.
- [198] ZEIDAN F. and VANCE J.M. Cavitation Leading to a Two Phase Fluid in a Squeeze Film Damper. *Tribology Transactions*, **32**: p100–104, 1989.
- [199] ZEIDAN F. and VANCE J.M. Cavitation Regimes in Squeeze Film Dampers and Their Effect on the Pressure Distribution. *Tribology Transactions*, **33**: p447–453, 1990.
- [200] ZEIDAN F. and VANCE J.M. A Density Correlation for a Two-Phase Lubricant and its Effect on the Pressure Distribution. *Tribology Transactions*, **33**: p641–647, 1990.
- [201] ZHANG J., XU Q., and ZHENG T. Stability and Bifurcation of a Rotor-Fluid Film Bearing with Squeeze Film Damper. *Journal of Vibration and Acoustics*, **120**: p1003–1006, 1998.
- [202] ZHANG J.X. Fluid Inertia Effects on the Performance of Short and Long Squeeze Film Dampers Executing Periodic Vibration. *Journal of Tribology*, **119**: p306–314, 1997.
- [203] ZHANG J.X., ELLIS J., and ROBERTS J.B. Observations on the Nonlinear Fluid Forces in Short Cylindrical Squeeze Film Dampers. *Journal of Tribology*, **115**: p692–698, 1993.
- [204] ZHANG J.X. and ROBERTS J.B. Solutions for the Combined Motion of Finite Length Squeeze Film Dampers Around the Bearing Center. *Journal of Tribology*, **118**: p617–622, 1996.
- [205] ZHANG S. and YAN L. Development of an Efficient Oil Film Damper for Improving the Control of Rotor Vibration. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **113**: p557–562, 1991.
- [206] ZHANG S., YAN L., and LI Q. The Effectiveness of Porous Squeeze Film Dampers for Suppressing Nonsynchronous Motions. *Journal of Vibration and Acoustics*, **115**: p16–18, 1993.
- [207] ZHAO J.Y. and HAHN E.J. Eccentric Operation and Blade-Loss Simulation of a Rigid Rotor Supported by an Improved Squeeze Film Damper. *Journal of Tribology*, **117**: p490–497, 1995.
- [208] ZHAO J.Y., LINNET I.W., and MCLEAN L.J. Stability and Bifurcation of Unbalance Response of a Squeeze Film Damped Flexible Rotor. *Journal of Tribology*, **116**: p361–368, 1994.
- [209] ZHAO J.Y., LINNET I.W., and MCLEAN L.J. Subharmonic and Quasi-Periodic Motions of an Eccentric Squeeze Film Damper-Mounted Rigid Rotor. *Journal of Vibration and Acoustics*, **116**: p357–363, 1994.
- [210] ZHOU T. and ROGERS R.J. Simulation of Two-Dimensional Squeeze Film and Solid Contact Forces Acting on a Heat Exchanger Tube. *Journal of Sound and Vibration*, **203**: p621–639, 1997.

Table des figures

1.1	Schéma d'un amortisseur <i>squeeze film</i>	2
2.1	Géométrie et système de repérage d'un SqF	10
2.2	<i>Squeeze film</i> ouvert et fermé	31
2.3	<i>Squeeze film</i> partiellement fermé	32
2.4	Schématisation des types de cavitation	37
2.5	Modèles de cavitation de vapeur	39
2.6	Schéma aux différences finies	48
3.1	Modèle du rotor rigide	62
3.2	Modèle du rotor Jeffcott	66
3.3	Modèle d'un rotor réel	68
3.4	Illustration de la continuation <i>pseudo-arc length</i>	80
3.5	Analyse des bifurcations à l'aide des multiplicateurs de Floquet	86
3.6	Discrétisation de la matrice périodique $[L](t)$	88
3.7	Réponse au balourd au niveau du SqF obtenue par la balance harmonique et par la collocation trigonométrique	91
3.8	Nombre d'itérations nécessaires avant d'atteindre le critère d'arrêt	91
3.9	Analyse de la stabilité des solutions périodiques du rotor Jeffcott	92
3.10	Identification des types de bifurcation pour le rotor Jeffcott	93
3.11	Réponse au balourd du Jeffcott au niveau du SqF - Méthode de tir avec intégration temporelle Runge-Kutta du 4 ^{eme} ordre à pas de temps constant	94

3.12	Multiplicateur de Floquet principal - Méthode de tir avec intégration temporelle Runge-Kutta du 4 ^{eme} ordre à pas de temps constant	95
3.13	Réponse au balourd du Jeffcott au niveau du SqF - Méthode de tir avec la gestion de $\Delta\lambda$ proposée en [168]	95
4.1	Frontière d'établissement du bilan massique au point d'injection de section S	99
4.2	Architecture type du circuit hydraulique d'alimentation du SqF	101
4.3	Schéma et volume de contrôle d'un tronçon quelconque du circuit hydraulique	104
4.4	Réunion des courants du type $A_r = A_p$, $\alpha = 90^\circ$ (d'après [67])	108
4.5	Séparation des courants du type $A_r = A_p$, $\alpha = 90^\circ$ (d'après [67])	108
4.6	Branchement symétrique en T (d'après [67])	109
4.7	Entrée latérale par une ouverture au bout d'un tube droit à section circulaire (courbe 1, d'après [67])	110
4.8	Sortie latérale par une ouverture au bout d'une conduite à section circulaire (courbe 1, d'après [67])	110
4.9	Sortie d'un tronçon droit à bords arrondis sur un écran (d'après [67])	111
4.10	Profil du champ de pression au milieu ($z = 0$) d'un SqF ouvert - $\varepsilon = 0,3$	111
4.11	Profil du champ de pression au milieu ($z = 0$) d'un SqF ouvert - $\varepsilon = 0,8$	114
4.12	Profil du champ de pression au milieu ($z = 0$) d'un SqF quasi fermé - $\varepsilon = 0,1$	114
4.13	Profil du champ de pression au milieu ($z = 0$) d'un SqF quasi fermé - $\varepsilon = 0,6$	115
4.14	Evolution des efforts radial et tangentiel du SqF en fonction du coefficient de fuite et de la puissance de la pompe	116
4.15	Evolution du débit d'alimentation en fonction du coefficient de fuite et de la puissance de la pompe	117
4.16	Pressions dans le circuit hydraulique d'alimentation en fonction de la cinématique de l'amortisseur - $W_p = 100 [W]$	117
4.17	Influence du nombre de points d'injection sur la réponse au balourd au niveau du SqF - Harmonique fondamental	119
4.18	Influence du nombre de points d'injection sur la réponse au balourd au niveau du SqF - Harmoniques supérieures non négligeables	120

4.19	Influence du nombre de points d'injection sur la réponse au balourd au niveau du disque - Harmonique fondamental	121
4.20	Stabilité en fonction du nombre de points d'alimentation	122
4.21	Transmissibilité maximum en fonction du nombre de points d'injection	123
4.22	Evolution des forces hydrodynamiques à $\omega_{ad} = 0,96$ en fonction du nombre de points d'injection	123
4.23	Influence de la puissance de la pompe sur la réponse au balourd au niveau du SqF - Harmonique fondamental	124
4.24	Influence de la puissance de la pompe sur la réponse au balourd à la position du disque - Harmonique fondamental	125
4.25	Stabilité en fonction de la puissance de la pompe	126
4.26	Force radiale en fonction de la puissance de la pompe à $\omega_{ad} = 0,96$	126
4.27	Coefficients de raideur et d'amortissement linéarisés du SqF à $\omega_{ad} = 0,96$ pour $W_p = 400 [W]$	127
4.28	Transmissibilité maximum en fonction de la puissance de la pompe	128
4.29	Evolution de la pression moyenne de sortie de la pompe, p_p	129
4.30	Fluctuations de pression dans le système hydraulique à $\omega_{ad} = 0,96$	129
4.31	Evolution du débit moyen de la pompe	130
4.32	Comparaison des débits d'alimentation et de fuite	131
4.33	Schéma du rotor de dynamique d'ensemble	132
4.34	Influence de la puissance de la pompe sur la réponse au balourd au niveau du SqF - Harmonique fondamental	133
4.35	Influence de la puissance de la pompe sur la réponse au balourd au niveau du disque - Harmonique fondamental	134
4.36	Transmissibilité maximum en fonction de la puissance de la pompe	135
4.37	Variation de la pression de sortie de la pompe, p_p , pour $W_p = 100 [W]$	135
5.1	Ecart entre les deux techniques de lissage	154
5.2	Force tangentielle à $\dot{\phi} \approx 0$ - $P_i = 5; P_k = 5; P_l = 2$	155
5.3	Force tangentielle à $\dot{\phi} \approx 2000$ - $P_i = 5; P_k = 5; P_l = 2$	155

5.4	Approximation pondérée de la force tangentielle à $\dot{\phi} \approx 0$ et $\dot{\phi} \approx 2000$ - $P_i = 5; P_k = 5; P_l = 2$	156
5.5	Approximation pondérée de la force radiale - $\dot{\phi} \approx 2000$	157
5.6	Force tangentielle lissée par régression linéaire pondérée - $P_i = 5; P_k = 5; P_l = 3$	158
5.7	Evolution de SSE au cours de la régression <i>stepwise</i>	159
5.8	Réponse au balourd et analyse de la stabilité - Comparaison différences finies \times approximations polynômio-rationnelles	160
5.9	Transmissibilité et évolution du multiplicateur de Floquet principal - Comparaison différences finies \times approximations polynômio-rationnelles	161
5.10	Résultats de l'intégration temporelle pour $\omega_{ad} = 2,07$ - Comparaison différences finies \times lissage	163
5.11	Mouvements sous-harmoniques - Comparaison différences finies \times lissage	163
5.12	Lissage de l'énergie cinétique du film fluide - Coupe $\mathcal{T}_v c(\varepsilon, \phi)$ à $\dot{e} = -0,19 [m/s]$ et $\dot{\phi} = 670 rad/s$	170
5.13	Force inertielle radiale fonction de Re - $\varepsilon_1 = 0,55; \varepsilon_2 = 0,25; \varepsilon_3 = 0,1$	172
5.14	Evolution de la force inertielle tangentielle sur un tour	172
5.15	Force inertielle radiale fonction de ε	173
5.16	champ de pression des SqF court ($C_l = 5000 [mm^2/Pa.s]$) et long ($C_l = 10^{-5} [mm^2/Pa.s]$)	174
5.17	Evolution de la force inertielle radiale pour des mouvements radiaux harmoniques - $\varepsilon_0 = 0,5$	175
5.18	Comparaison des modèles de SqF cavitant et non cavitant - Orbites circulaires et centrées	176
5.19	Forces inertielles fonctions de Re . Configuration palier long - $\varepsilon_1 = 0,9; \varepsilon_2 = 0,7$	177
5.20	Force inertielle fonction de Re . Configuration palier court - $\varepsilon = 0,9$	177
5.21	Forces hydrostatiques engendrées par un SqF ouvert ($C_l = 5000 [mm^2/Pa.s]$) et par un SqF partiellement fermé ($C_l = 5 \times 10^{-4} [mm^2/Pa.s]$)	180
5.22	Comportement dynamique du rotor Jeffcott - Modèle de SqF visqueux	182
5.23	Influence des effets d'inertie sur la réponse au balourd du Jeffcott	183
5.24	Influence des effets d'inertie sur la transmissibilité du SqF et la stabilité du rotor Jeffcott - Balourd $\varrho m_1 = 0,002[kg.m]$	184

5.25	Influence des effets d'inertie sur la réponse au balourd du modèle de dynamique d'ensemble	185
5.26	Influence des effets d'inertie sur la transmissibilité du SqF et la stabilité du modèle de dynamique d'ensemble	185
6.1	Vue en coupe du SqF avec alimentation et évacuation ponctuelles	194
6.2	Schéma du circuit hydraulique d'alimentation et d'évacuation du SqF	196
6.3	champ de pression du SqF - (a) $\zeta_v = 0$; (b) $\zeta_v = 50$; (c) $\zeta_v = 300$	199
6.4	Evolution des forces sur un tour	200
6.5	Réponse au balourd du rotor Jeffcott au niveau du SqF en fonction de ζ_v	201
6.6	Réponse au balourd du rotor Jeffcott au niveau du disque en fonction de ζ_v	203
6.7	Evolution de la transmissibilité maximum en fonction de ζ_v - Rotor Jeffcott	203
6.8	Réponse au balourd du rotor Dynamique d'Ensemble au niveau du SqF en fonction de ζ_v	204
6.9	Réponse au balourd du rotor Dynamique d'Ensemble au niveau du disque en fonction de ζ_v	205
6.10	Evolution de la transmissibilité maximum en fonction de ζ_v - Rotor Dynamique d'Ensemble	205
6.11	Transitoires suite à changement du paramètre de contrôle ζ_v	206
6.12	Transitoire pendant ouverture progressive des valves à $\omega_{ad} = 1,5$	207
6.13	Vue d'ensemble du banc d'essai ASF	209
6.14	Vue en coupe du banc ASF	210
6.15	Schémas de principe du circuit hydraulique d'alimentation du SqF	212
6.16	Schémas de principe du circuit hydraulique de lubrification des paliers	212
6.17	Instrumentation du film d'huile	213
6.18	Instrumentation du circuit hydraulique	214
6.19	Modèle du module squeeze film	215
6.20	Dimensionnement des supports	215
6.21	Modèle de la fondation	216
6.22	Schéma du modèle thermo-hydrodynamique	218

6.23 Calcul de dilatation de la bague intérieure du SqF	218
---	-----

Liste des tableaux

2.1	Coefficients de l'expression 2.94	49
4.1	Nomenclature des paramètres du circuit hydraulique d'alimentation	102
4.2	Forces radiale et tangentielle générées par les SqF ouvert et fermé pour des différentes valeurs de ε et de W_p - Orbite circulaire et centrée avec $\dot{\phi} = 5000 \text{ tr/min}$ (*pas d'alimentation)	113
5.1	Paramètres du lissage des forces du SqF ouvert	181

Annexe A - Polynômes de Chebyshev

Polynômes de Chebyshev particuliers de première espèce :

$$T_0(\zeta) = 1$$

$$T_1(\zeta) = \zeta$$

$$T_2(\zeta) = 2\zeta^2 - 1$$

$$T_3(\zeta) = 4\zeta^3 - 3\zeta$$

$$T_4(\zeta) = 8\zeta^4 - 8\zeta^2 + 1$$

$$T_5(\zeta) = 16\zeta^5 - 20\zeta^3 + 5\zeta$$

$$T_6(\zeta) = 32\zeta^6 - 48\zeta^4 + 18\zeta^2 - 1$$

$$T_7(\zeta) = 64\zeta^7 - 112\zeta^5 + 56\zeta^3 - 7\zeta$$

$$T_8(\zeta) = 128\zeta^8 - 256\zeta^6 + 160\zeta^4 - 32\zeta^2 + 1$$

$$T_9(\zeta) = 256\zeta^9 - 576\zeta^7 + 434\zeta^5 - 434\zeta^3 - 120\zeta + 9\zeta$$

$$T_{10}(\zeta) = 512\zeta^{10} - 1280\zeta^8 + 1120\zeta^6 - 400\zeta^4 + 50\zeta^2 - 1$$

Annexe B - Forces visqueuses du SqF approchées par lissage polynômio-rationnel

$$\begin{aligned}
Ft = & 2, 59 + 629, 80(\dot{\phi}C) - 472, 19\frac{1}{(1-\varepsilon)}(\dot{\phi}C) + 11920, 33\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}(\dot{\phi}C) - 207447, 38\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^3 - \\
& 386, 18\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}(\dot{\phi}C)^2 - 32417, 98\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}(\dot{\phi}C)^2 + 202706, 40\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^3(\dot{\phi}C) - 35, 17\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}(\dot{\phi}C)^4 + \\
& 7486, 80\dot{e}(\dot{\phi}C) + 23650, 14\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}(\dot{\phi}C)^3 + 45, 76\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^2 - 1389, 36\frac{1}{(1-\varepsilon)}(\dot{\phi}C)^2 - \\
& 151, 37\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}(\dot{\phi}C)^3 + 13, 14\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}(\dot{\phi}C)^3 - 16068, 03\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}(\dot{\phi}C) + 1711, 37\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}(\dot{\phi}C)^4 - \\
& 889, 71(\dot{\phi}C)^3 + 308, 24\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}(\dot{\phi}C)^2 - 178, 91\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}(\dot{\phi}C) + 11, 03\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^2 + \\
& 1162483, 18\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^4 - 31900, 33\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}(\dot{\phi}C)^4 - 4, 44\frac{1}{(1-\varepsilon)} - 2892, 04\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^2 + \\
& 241834, 55\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^3 - 1311, 13\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^4 - 0, 58\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^2 + 2846, 74\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}(\dot{\phi}C)^5 - \\
& 106424, 33\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^5 - 3742, 04\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}(\dot{\phi}C) + 1000, 07\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^3(\dot{\phi}C) - 3499, 28\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^4(\dot{\phi}C) + \\
& 1520, 98\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^4 - 526938, 95\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^5 + 6420693, 17\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^4(\dot{\phi}C) + 5042484, 76\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^5 - \\
& 810, 82\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}(\dot{\phi}C)^2 + 1392, 12(\dot{\phi}C)^2 - 25, 45\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}(\dot{\phi}C)^2 + 0, 15\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}(\dot{\phi}C)^2 + \\
& 366792, 29\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^4 + 9, 60\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}(\dot{\phi}C) - 4599253, 74\dot{e}^4(\dot{\phi}C) - 12295034, 80\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^2 + \\
& 14224505, 73\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^2 + 18, 43\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^4 + 340964, 33\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^2 - 23850, 26\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^3(\dot{\phi}C) - \\
& 720306, 16\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^3(\dot{\phi}C) - 190791, 71\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^2(\dot{\phi}C) - 134882, 53\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^4 - 54, 92\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^2 - \\
& 66960, 08\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^4 + 131160, 18\dot{e}^2(\dot{\phi}C) + 7153, 70\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}(\dot{\phi}C)^2 + 68, 71\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}(\dot{\phi}C)^3 - \\
& 2815579, 49\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^3 + 257, 32\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^4 + 9785399, 87\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^5 + 35, 31\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}(\dot{\phi}C)^2 - \\
& 36872, 50\dot{e}(\dot{\phi}C)^2 - 9362638, 34\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^2 - 342, 76\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^4 + 3058339, 00\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^4 + \\
& 72, 10\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^2(\dot{\phi}C) - 241473, 68\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^2 + 22855, 87\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^2 - 12965281, 28\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^3 - \\
& 4765371, 70\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^2 + 410850, 67\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^3 + 129110, 33\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^5 + 0, 89\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}(\dot{\phi}C) + \\
& 19, 79\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}(\dot{\phi}C)^5 - 266842, 91\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^4 + 9590, 75\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^4 + 18544, 89\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^2 + \\
& 661134, 75\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^5 - 664768, 47\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^5 - 266, 44\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}(\dot{\phi}C)^5 + 2807, 86\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}(\dot{\phi}C)^5 + \\
& 57939, 01\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^2(\dot{\phi}C) + 43653, 70\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^3 + 3111, 00\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^2(\dot{\phi}C) - 1362, 58\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^2(\dot{\phi}C) - \\
& 28583209, 17\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^4 - 15624, 22\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^4 + 435, 26\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}(\dot{\phi}C)^5 - 1600964, 07\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^4(\dot{\phi}C) - \\
& 951153, 44\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^3 + 6096110, 85\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^2 + 101886, 54\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^2 - 0, 06\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}(\dot{\phi}C) + \\
& 376028, 00\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^4 + 377554, 01\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^3 + 458, 95\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}(\dot{\phi}C) - 276381, 36\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^4(\dot{\phi}C) - \\
& 2111, 53\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^3 + 70051, 90\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^4(\dot{\phi}C) - 5437, 97\frac{1}{(1-\varepsilon)}(\dot{\phi}C)^5 + 516, 59\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}(\dot{\phi}C)^4 + \\
& 2, 24\frac{1}{(1-\varepsilon)^2} - 79425, 14\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^4 + 17, 26\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}(\dot{\phi}C)^4 - 19, 65\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}(\dot{\phi}C) + \\
& 62589, 04\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}(\dot{\phi}C)^2 - 50385, 74\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^5 - 7404, 17\dot{e}(\dot{\phi}C)^3 + 53582, 54\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}(\dot{\phi}C)^3 - \\
& 709565, 45\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^2 - 3469591, 95\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^5 - 8143, 77\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^5 + 3207, 54(\dot{\phi}C)^5 + \\
& 7802, 31\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^3 - 3318907, 40\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^4 - 522386, 39\dot{e}^3(\dot{\phi}C) + 1061364, 98\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^3(\dot{\phi}C) + \\
& 2627722, 51\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^2 - 624908, 80\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^2 + 3925059, 47\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^3 + 1442703, 71\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^4 - \\
& 194, 74\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}(\dot{\phi}C)^5 + 19315, 72\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^3 + 4930, 21\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^5 - 0, 02\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e} + \\
& 6228149, 60\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^5 - 170418, 59\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^2 + 243810, 25\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^5 + 29047, 35\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^3 - \\
& 1610, 58\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}(\dot{\phi}C)^4 + 1627, 19\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}(\dot{\phi}C)^3 + 37613107, 14\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^3 - 12624248, 79\dot{e}^4(\dot{\phi}C)^3 - \\
& 560, 67\frac{1}{(1-\varepsilon)^5}\dot{e}^2(\dot{\phi}C)^2 - 607600, 54\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^3 + 128397, 15\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}(\dot{\phi}C)^4 - 8147, 36\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}\dot{e}(\dot{\phi}C)^5 + \\
& 59937, 22\dot{e}(\dot{\phi}C)^4 - 69948, 73\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}(\dot{\phi}C)^3 + 2671926, 62\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^2 + 69358, 35\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^2 - \\
& 150545, 17\frac{1}{(1-\varepsilon)}\dot{e}(\dot{\phi}C)^4 + 733950, 83\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\dot{e}^3(\dot{\phi}C)^5 - 2307, 96\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}\dot{e}(\dot{\phi}C)^3 - 0, 37\frac{1}{(1-\varepsilon)^3} + 0, 02\frac{1}{(1-\varepsilon)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Fr = & -12, 83 + 49406, 13\dot{\epsilon}^2 + 28, 63\frac{1}{(1-\epsilon)} + 8935, 71\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon} + 90317, 79\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^2 - \\
& 6879, 85\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon} - 12, 40\frac{1}{(1-\epsilon)^4}(\dot{\phi}C) - 4409691, 71\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C) - 4309792, 59\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^4 + \\
& 0, 68\frac{1}{(1-\epsilon)^5}(\dot{\phi}C) + 106442, 55\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C) - 113521, 09\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}^2 + 133, 35(\dot{\phi}C) - \\
& 11432, 59\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^3 + 51, 93\frac{1}{(1-\epsilon)^3}(\dot{\phi}C) + 5887699, 22\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}^4 - 4800, 20\dot{\epsilon} - \\
& 1303, 68\frac{1}{(1-\epsilon)^3}(\dot{\phi}C)^2 + 53, 52\frac{1}{(1-\epsilon)^2}(\dot{\phi}C) + 54, 07\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C) - 2750276, 96\dot{\epsilon}^4 + \\
& 426, 31\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C) + 998, 81(\dot{\phi}C)^2 + 2900, 24\frac{1}{(1-\epsilon)^2}(\dot{\phi}C)^2 - 320547, 51\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}^3 + \\
& 2753, 28\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C) + 3415, 41\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^2 + 123, 09\frac{1}{(1-\epsilon)^4}(\dot{\phi}C)^3 + 1957, 80\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^5 - \\
& 6814, 62\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^3 + 19355, 29\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^2 - 2162, 17\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^7 - 13868, 05\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C) + \\
& 330109, 86\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^7 + 47487642, 25\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^6 - 26665, 69\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^6 + \\
& 705017, 36\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C) + 36730925, 15\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^2 - 227, 18\frac{1}{(1-\epsilon)}(\dot{\phi}C) - \\
& 16010, 98\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^4 + 580266, 82\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^4 - 2946, 59\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^6 + \\
& 229814, 30\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^2 - 1354, 42\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^4 - 10745954, 43\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^4 - \\
& 2729, 83\frac{1}{(1-\epsilon)}(\dot{\phi}C)^2 - 5, 14\frac{1}{(1-\epsilon)^5}(\dot{\phi}C)^3 - 747159, 63\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^2 + 158304, 82\dot{\epsilon}^3 - \\
& 52362, 93\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^3 + 16171155, 23\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C) + 239044, 21\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^7 + 58775, 99\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^7 + \\
& 6933001, 33\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^4 - 37418, 81\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^4 + 356368, 11\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^2 + \\
& 71, 12\frac{1}{(1-\epsilon)^5}(\dot{\phi}C)^7 - 2898776, 98\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^7 + 94, 64\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C) - 16850, 06\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C) - \\
& 372551, 08\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C) + 6386, 88\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^4 + 210689, 30\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^3 - 201, 90\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^3 - \\
& 30047778, 34\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C) - 21, 11\frac{1}{(1-\epsilon)^2} - 671, 53\frac{1}{(1-\epsilon)}(\dot{\phi}C)^3 + 1718527, 11\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^3 + \\
& 1661, 12\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon} - 11093, 55\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C) - 442866, 32\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C) + 13060, 06\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^4 + \\
& 5515, 89\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^3 + 205537, 38\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^5 - 29055, 19\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^2 - 820214, 96\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^5 + \\
& 105903, 29\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^4 + 354, 84\frac{1}{(1-\epsilon)^4}(\dot{\phi}C)^5 + 0, 03\frac{1}{(1-\epsilon)^5} + 145, 82\frac{1}{(1-\epsilon)^4}(\dot{\phi}C)^2 + \\
& 7495, 23\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^6 - 24040017, 12\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^2 - 18211754, 73\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^7 - \\
& 16156911, 31\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^2 - 40424, 69\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^4 + 32263, 56\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^5 - 142, 55\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^2 - \\
& 377311, 12\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^6 + 1214, 72\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^7 - 40997, 95\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^2 - 5054, 22\frac{1}{(1-\epsilon)^2}(\dot{\phi}C)^4 - \\
& 122, 27\frac{1}{(1-\epsilon)^5}(\dot{\phi}C)^6 - 262, 54\frac{1}{(1-\epsilon)^3}(\dot{\phi}C)^5 - 2109238, 09\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^3 - 179764, 50\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^3 - \\
& 185, 36\frac{1}{(1-\epsilon)^4}(\dot{\phi}C)^7 + 21821, 74\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^2 - 617, 48\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^4 - 26123340, 98\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^5 - \\
& 661313, 54\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^6 - 147, 17\frac{1}{(1-\epsilon)^3}(\dot{\phi}C)^7 + 18521334, 36\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C) - \\
& 1833, 58(\dot{\phi}C)^4 + 1281675, 83\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^4 - 150919, 78\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^4 + 452051, 88\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C) + \\
& 9478, 91\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^7 - 2388, 94\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^2 + 2645867, 20\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^4 + \\
& 3195, 00\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^6 - 83599, 10\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^2 - 194, 47\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon} - 1406749, 80\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^4 + \\
& 2244, 39\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^3 + 119, 15\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C) - 1636416, 66\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^3 - 596, 45\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^2 + \\
& 984751, 56\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^6 - 14173548, 02\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^5 + 8, 10\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon} + 477370, 68\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^2 + \\
& 13514, 95\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^5 - 753804, 47\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^3 + 21995, 40\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}(\dot{\phi}C)^3 - 616, 38(\dot{\phi}C)^5 \\
& 1651618, 22\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^4 - 471284, 65\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^7 - 481232, 25\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^7 + \\
& 800890, 87\frac{1}{(1-\epsilon)}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^7 - 5, 86\frac{1}{(1-\epsilon)^5}(\dot{\phi}C)^2 + 5, 98\frac{1}{(1-\epsilon)^3} - 0, 70\frac{1}{(1-\epsilon)^4} + 508, 09\frac{1}{(1-\epsilon)^3}(\dot{\phi}C)^3 + \\
& 6430, 64\frac{1}{(1-\epsilon)}(\dot{\phi}C)^4 + 1214, 08\frac{1}{(1-\epsilon)^3}(\dot{\phi}C)^4 + 663, 77\frac{1}{(1-\epsilon)^3}(\dot{\phi}C)^6 - 118924, 55\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^3 + \\
& 5922210, 88\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^3 - 486744, 64\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^5 + 22890, 89\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^4 - 1284, 23\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C) - \\
& 3239312, 26\frac{1}{(1-\epsilon)^2}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^4 + 72, 11\frac{1}{(1-\epsilon)^5}(\dot{\phi}C)^5 - 563, 18\frac{1}{(1-\epsilon)^4}(\dot{\phi}C)^4 + 16428586, 75\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^4 - \\
& 29106, 33\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^3 + 18999, 93\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^3(\dot{\phi}C)^2 + 368051, 36\frac{1}{(1-\epsilon)^3}\dot{\epsilon}^4(\dot{\phi}C)^2 + \\
& 15461, 91\frac{1}{(1-\epsilon)^4}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^4 - 5782, 47\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^7 - 1223, 63\frac{1}{(1-\epsilon)^5}\dot{\epsilon}^2(\dot{\phi}C)^5
\end{aligned}$$