

THÈSE

Présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE DE MÉCANIQUE DE LYON (UCBL/INSA/ECL)

par

Marion GRUIN

**Dynamique non-linéaire d'une roue de turbine Basse
Pression soumise à des excitations structurales d'un
turboréacteur**

Présentée et soutenue publiquement le 22 Février 2012, devant le jury d'examen :

Jean-Claude GOLINVAL, Professeur, LTAS, Université de Liège,	Rapporteur
Mathias LEGRAND, Professeur, Université McGill,	Rapporteur
Claude-Henri LAMARQUE, Professeur, LGM, ENTPE,	Président
Juan-Antonio RUIZ-SABARIEGO, Ingénieur de recherche, SNECMA,	Examineur
Fabrice THOUVEREZ, Professeur, LTDS, École Centrale de Lyon,	Directeur de thèse
Emmanuelle SARROUY, Docteur, LTDS, École Centrale de Lyon,	Co-encadrante



Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	professeur	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SCORLETTI Gérard	professeur	AMPERE	ECL
SIMONET Pascal	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
VOLLAIRE Christian	professeur	AMPERE	ECL

Nbre Ampère 9

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
---------------	-----------------------	---------	-----

Nbre DER EEA 1

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

Nbre DER STMS 2

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

Nbre ICJ 7

DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
----------------	------------	------	-----

Nbre ICTT 1

CALLARD Anne-Ségolène	professeur	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
O'CONNOR Ian	professeur	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	INL	ECL

ROBACH Yves	professeur	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

Nbre INL 18

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
-------------	------------	-------	-----

Nbre LIRIS 1

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT genevièvre	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	professeur	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	professeur	LMFA	ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAUT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

Nbre LMFA 23

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	professeur	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL

<i>SIDOROFF François</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>SINOUE Jean-Jacques</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>STREMSDOERFER Guy</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>THOUVEREZ Fabrice</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>TREHEUX Daniel</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>VINCENS Eric</i>	<i>maître de conférences</i>	LTDS	ECL

Nbre LTDS 25

Total HdR ECL

91

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier M. Jean-Claude Golinval et M. Mathias Legrand qui ont accepté de rapporter mes travaux de thèse, je leur suis sincèrement reconnaissante de l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail. Mes remerciements s'adressent également à M. Claude-Henri Lamarque qui fut un président de jury très agréable.

J'adresse mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, M. Fabrice Thouverez, pour sa gentillesse et son écoute. Il a su me guider tout au long de ces travaux, tout en me laissant une grande autonomie.

Je tiens à faire une spéciale dédicace à Emmanuelle Sarrouy, qui a su m'épauler durant ma thèse tant du point de vue scientifique que du point de vue personnel. Elle a pris le train en marche, mais je tiens à souligner qu'elle a parfaitement rempli son rôle de co-encadrement. Je suis fière d'avoir été sa première « doctorante » et je lui souhaite d'encadrer de nombreuses autres thèses.

J'ai une pensée pour Laurent Blanc qui a commencé cette aventure à mes côtés et grâce à qui je suis arrivée à Lyon. J'ai découvert une ville magnifique et des personnes très attachantes. Merci à toute l'équipe D2S pour tout ce que nous avons partagé ensemble, je garde un excellent souvenir des pauses café, des barbus et des crêpes party en compagnie d'Isabelle Tixier, notre dévouée secrétaire. Il m'arrive souvent de relire la carte que j'ai eu le jour de ma soutenance, et je dois avouer que je suis très émue à la lecture de vos petits mots, vous non plus, ne changez rien !

Lorsque j'ai regagné Paris pour finir ma thèse au sein de SNECMA, j'ai eu un réel pincement au cœur de quitter le labo et son ambiance unique de travail. Par chance, j'ai retrouvé à Villaroche un vrai esprit d'équipe. Merci donc à toute l'équipe YHMM pour leur accueil et leur gentillesse. Je remercie plus particulièrement Pierrick Jean qui a suivi mes travaux ainsi que Juan-Antonio Ruiz-Sabariago de m'avoir fait le plaisir de participer à mon jury de thèse. Je suis heureuse aujourd'hui de continuer ma route à vos côtés.

Un grand merci aussi à mes amis de Cachan et d'ailleurs, avec une mention spéciale pour Florian qui m'a fait l'immense plaisir d'être présent le jour J !

Je ne saurais finir ces remerciements sans parler de ma famille, mon frère et mes parents, qui comptent tant pour moi et qui ne sont pas étrangers à cette réussite. Merci de m'avoir soutenue et d'avoir toujours cru en moi, même dans les moments les plus difficiles. Enfin, je remercie de tout mon cœur mon Touny, pour son optimisme et son soutien sans faille, avec qui j'ai déjà passé de merveilleuses années.

Résumé

La prise en compte des couplages dynamiques entre les différents organes constituant une turbomachine s'inscrit dans le processus d'optimisation des designs moteur. L'amélioration des performances des turboréacteurs passe souvent par l'utilisation d'architectures multi-rotors. Dans le contexte des moteurs avec une architecture bi-rotor, des résultats d'essais expérimentaux montrent qu'il est nécessaire de considérer, dès la conception, l'influence de la dynamique de l'arbre Haute Pression (HP) sur les aubages de l'arbre Basse Pression (BP). Dans ce cadre d'étude, un premier modèle simplifié de bi-rotor aubagé est développé dans le repère tournant lié au rotor BP. Ce modèle est composé de deux rotors modélisés par des équivalents poutres - masses - ressorts et d'une roue aubagée constituée d'aubes souples modélisées par des poutres encastrées sur un disque rigide. Des non-linéarités de type jeu radial avec contact au niveau des paliers sont également considérées et la réponse des aubes soumises à des excitations multi-fréquentielles de type balourd BP et HP est analysée. La présence de non-linéarités dans le système conduit à mettre en œuvre des algorithmes adaptés, basés sur des techniques de résolution dans le domaine fréquentiel avec l'évaluation des efforts non-linéaires dans le domaine temporel. Afin d'avoir une meilleure description de la dynamique de la roue aubagée, une méthode spécifique de couplage est proposée, permettant de coupler un modèle réduit de roue aubagée 3D à un modèle simplifié de bi-rotor. Une démarche adaptée à la modélisation de la roue aubagée en symétrie cyclique est implémentée afin de considérer des non-linéarités de type contact en tête d'aube. La méthode de couplage proposée est ensuite illustrée sur un exemple simple puis validée dans un cadre linéaire et non-linéaire. Enfin, cette méthode de couplage est appliquée au cas d'une structure industrielle, constituée d'un modèle d'ensemble simplifié représentatif d'un moteur et d'un modèle éléments finis d'une roue de turbine BP. Les résultats obtenus mettent en évidence le couplage entre la dynamique d'ensemble et la dynamique de la roue aubagée et permettent de prédire la réponse non-linéaire des aubes de turbine BP en présence d'une excitation multi-fréquentielle, dans des configurations de co-rotation et de contra-rotation.

Mots clés : dynamique d'ensemble, roues aubagées, analyse fréquentielle non-linéaire, contact, turbomachines.

Abstract

The design and optimization process of high efficiency turbomachinery has become a major challenge and a topical issue at both industrial and research levels. Performance improvement has motivated the use of multi-shaft architecture in engines. In the context of dual-shaft aircraft engines, the interaction between dynamics occurring within shafts and bladed disks seems to play an important role at the design stage. The present research work deals with the coupling of these components involving several unbalances in the dynamic response of blades. Within this framework, a simplified analytical model of a bladed dual-shaft developed in the rotating frame is presented. The dual-shaft is modelled by spring - mass - beam systems and connected to a bladed disk composed of a set of flexible blades modelled by Euler-Bernoulli beams clamped in a rigid disk. Nonlinearities coming from bearings are also considered and modelled as a radial clearance and contact stiffness. Considering nonlinearities requires the implementation of dedicated algorithms and specific resolution techniques in the frequency domain as well as the computation of nonlinear forces in the time domain. The nonlinear response of blades subjected to unbalances excitations is investigated and analysed. To have a finer description of the bladed disk dynamics, a specific coupling method is proposed allowing to connect a bladed disk finite element model with the simplified dual-shaft model. A cyclic symmetry approach well-suited to the nonlinear dynamics of bladed disks is developed in order to consider blade tip contact nonlinearities. Performances of the proposed method are illustrated through an academic example and validated in both linear and nonlinear settings. Eventually, the coupling technique is applied to a complex industrial case involving a classical simplified dual-shaft model and a finite element model of the low pressure turbine bladed disk. Numerical results clearly demonstrate the coupling between dynamics and enable to predict the nonlinear response of low pressure turbine blades to several unbalances, for both co-rotating and counter-rotating engines.

Keywords : rotordynamics, bladed disks, nonlinear frequency domain analysis, contact, turbomachinery.

Table des matières

Table des matières	xi
Introduction	1
I Dynamique des machines tournantes	5
1 Présentation d'un turboréacteur	6
1.1 Principe de fonctionnement	6
1.2 Principaux organes structuraux	8
1.3 Sources de vibration	10
2 Dynamique d'un corps élastique en rotation	11
2.1 Cinématique d'une particule	12
2.2 Formulation des équations du mouvement	13
3 Phénoménologie des rotors	15
3.1 Modélisation poutre	16
3.2 Définition d'un repère d'étude	18
3.3 Particularités de la dynamique des rotors	19
4 Modélisation des roues aubagées	26
4.1 Notion de symétrie cyclique	26
4.2 Résolution des problèmes en symétrie cyclique	32
5 Conclusion	38
II Aspects non-linéaires et techniques de résolution	39
1 Non-linéarités dans les turboréacteurs	40
1.1 Origine des non-linéarités	40
1.2 Modèles associés aux non-linéarités de type contact	42
2 Estimation du comportement non-linéaire	45
2.1 Méthodes de résolution dans le domaine temporel	46
2.2 Méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel	49
2.3 Évaluation des efforts non-linéaires	52
3 Techniques de continuation	55
3.1 La paramétrisation	56
3.2 Les principaux prédicteurs	57
3.3 Les principaux correcteurs	59
4 Analyse de stabilité des solutions non-linéaires	64

4.1	Notions de stabilité	65
4.2	Outils d'analyse de stabilité	66
5	Conclusion	70
III Modélisation et analyse d'un bi-rotor aubagé simplifié		71
1	Construction du modèle bi-rotor aubagé	72
1.1	Présentation du système développé	72
1.2	Formulation analytique du bi-rotor	73
1.3	Introduction d'un modèle simplifié de roue aubagée	77
1.4	Formulation matricielle du système couplé	78
2	Analyse linéaire du système bi-rotor aubagé	80
2.1	Validation du modèle bi-rotor	81
2.2	Analyse modale du bi-rotor aubagé	83
2.3	Réponse forcée du système couplé	89
3	Étude du système non-linéaire	94
3.1	Modélisation retenue pour la non-linéarité inter-arbre	94
3.2	Intérêt du choix du repère d'étude	96
3.3	Simulations non-linéaires	97
4	Conclusion	105
IV Couplage entre bi-rotor simplifié et roue aubagée 3D		107
1	Réduction du modèle de roue aubagée 3D	108
1.1	Modélisation en symétrie cyclique	108
1.2	Méthodes de synthèse modale	110
1.3	Convergence du modèle réduit	113
2	Connexion de la roue aubagée au modèle bi-rotor simplifié	114
2.1	Description de la méthode proposée	114
2.2	Présentation du cas-test de validation	118
2.3	Validation de la méthode de couplage dans un cadre linéaire	123
3	Prise en compte des non-linéarités	126
3.1	Modélisation du contact en tête d'aube	127
3.2	Évaluation de la force non-linéaire en symétrie cyclique	128
3.3	Simulations non-linéaires du système couplé	132
4	Conclusion	137
V Application industrielle : architecture moteur		141
1	Présentation du modèle industriel	142
1.1	Mise en données du modèle dynamique d'ensemble	142
1.2	Description de la roue aubagée considérée	148
2	Dynamique linéaire et non-linéaire du modèle couplé	154
2.1	Analyse linéaire du système	154
2.2	Comparaison des résultats obtenus à ceux d'un modèle couplé impliquant des aubes de type poutre	159
2.3	Prise en compte des non-linéarités au niveau des talons	162

3	Vers de nouvelles architectures contra-rotatives	167
3.1	Analyse linéaire du système couplé contra-rotatif	167
3.2	Étude du comportement non-linéaire	172
4	Conclusion	177
	Conclusion et perspectives	179
	Bibliographie	185
	Table des figures	191
	Liste des tableaux	197

Introduction

Le dimensionnement des systèmes mécaniques tournants constitue à l'heure actuelle un enjeu majeur pour les industries aéronautiques. Les moteurs d'avion modernes sont des produits extrêmement complexes qui sont soumis à des contraintes multiples et parfois contradictoires. En effet, la conception des turboréacteurs intègre à la fois des contraintes de performance, de sécurité, d'environnement et de coût de mise en œuvre. La recherche croissante de gain en termes de performances et de diminution du poids des structures nécessite une connaissance précise des moteurs d'avion et une compréhension fine du comportement vibratoire des systèmes tournants associés. Les motoristes ont alors besoin de se doter d'outils numériques permettant de prédire efficacement et au plus tôt dans le processus de conception le comportement vibratoire des différents organes constituant les moteurs.

La dynamique des machines tournantes est un domaine particulier de la mécanique qui est riche en phénomènes physiques. Dans ce domaine, le développement constant de modèles de plus en plus précis permet d'améliorer la prédiction du comportement dynamique des turboréacteurs et de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu. Nous pouvons distinguer deux catégories de modèles parmi ceux existants, à savoir les modèles locaux, ayant vocation à décrire de façon fine le comportement d'un ou de quelques organes particuliers et les modèles dits d'ensemble dont le but est de faire ressortir les interactions entre les différents éléments du système réel. Les modèles d'ensemble reposent sur une description simplifiée des différents organes afin de limiter leur taille et de conserver des coûts de calcul réduits. Ces modèles doivent être de taille raisonnable, car ils interviennent tôt dans le processus de conception et peuvent être appelés plusieurs fois pour tester différentes configurations de moteur. Les modèles d'ensemble actuellement utilisés n'intègrent pas de description fine des différents organes et ne sont donc pas capables de représenter certains phénomènes pouvant survenir en situation réelle. L'objectif de ces travaux est de supprimer ce verrou en proposant d'une part une augmentation de la richesse du modèle d'ensemble et d'autre part une méthodologie d'étude numérique réduisant au maximum les coûts de calcul relatifs à ce modèle enrichi.

Les modèles d'ensemble actuels sont constitués d'arbres assimilables à des poutres, de paliers modélisés par des raideurs linéaires ponctuelles et de disques rigides dont les aubages sont absents. Ils ont pour but de s'assurer du fonctionne-

ment correct du moteur et sont analysés au début du stade de conception avant un travail plus fin sur chaque organe. L'amélioration de ces modèles d'ensemble passe par des modélisations plus réalistes des différents organes linéaires et non-linéaires constituant une ligne d'arbres. Parmi tous les composants présents sur un moteur d'avion, les roulements jouent un rôle majeur puisqu'ils assurent la liaison entre les parties tournantes (rotors) et les parties fixes (stators) et également les liaisons inter-rotors dans la cas de moteurs présentant plusieurs arbres. La prise en compte du jeu radial au niveau des roulements, nécessaire au bon fonctionnement des turbomachines, constitue alors une évolution des modèles linéaires existants, permettant ainsi de mieux comprendre, reproduire et anticiper la dynamique des systèmes tournants.

Par ailleurs, il existe de nombreux modèles dédiés à l'étude particulière de la dynamique des roues aubagées. Les roues aubagées d'un turboréacteur sont des pièces de haute technologie dont la conception est optimisée afin de participer largement à l'augmentation des performances des moteurs. Ces organes sont donc des pièces maîtresses qui doivent répondre, en termes de dimensionnement, à des exigences de performances aérodynamiques, de tenue mécanique à la rotation, à la température et à la charge aérodynamique. Les causes de vibrations de ces structures sont donc nombreuses et inévitables, mais l'amplitude de ces vibrations doit être contenue afin de conserver une durée de vie satisfaisante des roues aubagées. Pour prévenir ces risques vibratoires, il est nécessaire de prédire au plus tôt dans le cycle de conception et précisément leurs amplitudes de vibration. Les études récentes dans ce domaine ont permis d'améliorer la modélisation de ces pièces avec l'introduction croissante de non-linéarités de type contact et frottement. Les zones de contact susceptibles d'influencer le comportement vibratoire des disques aubagés sont notamment l'attache aube-disque, le sommet des aubes qui peut venir en contact contre le stator, les dispositifs d'amortissement par frottement sec qui sont utilisés pour atténuer les amplitudes de vibration ou encore le contact lié à la présence de nageoires ou de talons sur les aubes. Les modèles non-linéaires associés à ce type de structures permettent non seulement de comprendre les comportements observés expérimentalement mais aussi d'aboutir à de nouvelles solutions technologiques en termes d'amortissement.

Enfin, dans le contexte actuel d'amélioration des performances des turboréacteurs et de réduction de masse, l'allègement des composants du moteur implique une augmentation des charges au sein des matériaux, mais aussi une plus grande souplesse de la structure. L'optimisation des designs moteurs conduit alors à une augmentation des couplages dynamiques entre les différents organes. Actuellement, l'utilisation d'architectures multi-rotors occupe une place importante dans la motorisation des avions et participe à l'augmentation des performances en séparant les parties Basse Pression (BP) et Haute Pression (HP). Cette architecture conduit à une situation dynamique plus complexe car les différents balourds présents sur les rotors génèrent une excitation multi-fréquentielle sur les différents éléments de la structure. Par ailleurs, dans le cas de moteurs bi-rotor, des résultats d'essai montrent qu'il est nécessaire de considérer l'influence de la dynamique de l'arbre

HP agissant sur les aubages de l'arbre BP. Ce couplage naturel remet en cause les critères de dimensionnement des roues de turbine BP qui, jusqu'ici, n'intégraient pas l'influence du rotor HP. L'un des enjeux de ces travaux est alors de mettre en place un modèle capable de simuler le comportement vibratoire d'une roue de turbine BP soumise à des excitations provenant à la fois de l'arbre BP, mais aussi de l'arbre HP.

Ce travail a donc pour objectif la simulation combinée d'un problème classique de dynamique d'ensemble avec celui plus spécifique des roues aubagées. De plus, nous prendrons en compte des non-linéarités d'une part au niveau des paliers et d'autre part au niveau des talons des aubes de turbine BP. Nous allierons ainsi des stratégies de réduction de modèle et des algorithmes dédiés à la résolution de systèmes non-linéaires dans le cadre d'excitations multi-fréquentielles. Ce modèle de dynamique d'ensemble enrichi nous permettra alors de réaliser une prédiction et une analyse plus pertinente des différents phénomènes vibratoires pouvant survenir sur la structure réelle.

Afin de répondre à cette problématique, le mémoire se décompose en cinq chapitres. Le premier chapitre présente le fonctionnement des turboréacteurs et les sources de vibration présentes dans ces systèmes tournants. Les aspects théoriques fondamentaux de la dynamique des rotors linéaires ainsi que les outils spécifiques de modélisation des roues aubagées sont ensuite exposés, permettant de comprendre les différentes notions abordées par la suite.

Dans le second chapitre, les phénomènes non-linéaires classiquement rencontrés dans les moteurs d'avion sont recensés, avec un intérêt particulier porté sur les non-linéarités de type contact. Ensuite, des outils nécessaires à la résolution de systèmes dynamiques non-linéaires sont introduits en mettant l'accent sur les techniques de résolution dans le domaine fréquentiel avec l'évaluation des efforts non-linéaires dans le domaine temporel.

Le troisième chapitre propose un premier modèle couplé reposant sur un modèle simplifié de bi-rotor aubagé. Une première partie est dédiée à la formulation analytique du modèle couplé constitué de deux rotors BP et HP modélisés par des équivalents poutres - masses - ressorts et d'une roue aubagée composée d'aubes souples modélisées par des poutres en flexion encastées sur un disque rigide. L'analyse linéaire de ce modèle permet de mettre en évidence des couplages entre la dynamique des aubes et celle du bi-rotor. La dernière partie s'intéresse à la réponse non-linéaire des aubes soumises à des excitations multi-fréquentielles lorsque des non-linéarités de type contact sont considérées au niveau des paliers.

L'objectif du quatrième chapitre est de mettre en place une méthode de couplage entre un modèle simplifié de bi-rotor reposant sur des équivalents poutres - masses - ressorts et un modèle éléments finis réduit de roue aubagée 3D. Après la présentation des techniques permettant de réduire le modèle éléments finis de roue aubagée, les différentes étapes de la méthode de couplage proposée sont détaillées. Les déve-

loppements nécessaires à la prise en compte des non-linéarités de type contact au niveau des talons des aubes sont également introduits. Dans ce chapitre, un cas-test de validation est construit et présenté, permettant ainsi de valider la méthode mise en place dans un cadre linéaire et non-linéaire.

Enfin, le mémoire s'achève sur le cinquième chapitre qui est consacré à l'application de la méthode de couplage proposée à une structure industrielle. Le modèle considéré, constitué de deux rotors BP et HP et d'une roue de turbine BP, est détaillé dans une première partie. Le modèle couplé obtenu permet alors de déterminer les niveaux de réponse des aubages lorsque le système couplé est soumis à des excitations multi-fréquentielles provenant des rotors BP et HP en présence de non-linéarités de type contact au niveau des talons des aubes de turbine BP. Les simulations non-linéaires sont réalisées pour deux types de configuration moteur, à savoir en co-rotation et contra-rotation, permettant ainsi de répondre à la problématique industrielle.

Chapitre I

Dynamique des machines tournantes

Ce chapitre débute par une brève présentation d'un turboréacteur expliquant son principe de fonctionnement et les sources de vibration présentes dans ces systèmes complexes. Puis, la dynamique des corps élastiques en rotation est mise en équation dans le repère tournant afin d'exprimer, pour une structure en rotation discrétisée, les matrices relatives à ce type de problème. Les aspects théoriques fondamentaux de la dynamique des rotors linéaires seront ensuite présentés, comme les notions de précession, de vitesses critiques et de réponse à balourd. Ces différentes notions seront illustrées sur des exemples simples. Enfin, la modélisation plus spécifique des roues aubagées est détaillée. Après l'introduction du concept de symétrie cyclique, la résolution des problèmes structuraux présentant une répétitivité cyclique sera abordée.

Sommaire

1	Présentation d'un turboréacteur	6
1.1	Principe de fonctionnement	6
1.2	Principaux organes structuraux	8
1.3	Sources de vibration	10
2	Dynamique d'un corps élastique en rotation	11
2.1	Cinématique d'une particule	12
2.2	Formulation des équations du mouvement	13
3	Phénoménologie des rotors	15
3.1	Modélisation poutre	16
3.2	Définition d'un repère d'étude	18
3.3	Particularités de la dynamique des rotors	19
4	Modélisation des roues aubagées	26
4.1	Notion de symétrie cyclique	26
4.2	Résolution des problèmes en symétrie cyclique	32
5	Conclusion	38

1 Présentation d'un turboréacteur

Les systèmes tournants qui nous intéressent sont les turboréacteurs qui sont des systèmes de propulsion essentiellement utilisés pour les avions. La figure I.1 montre un exemple de turboréacteur industriel dont la fonction principale est de fournir une force de poussée, par réaction, pour la propulsion et le fonctionnement des avions.

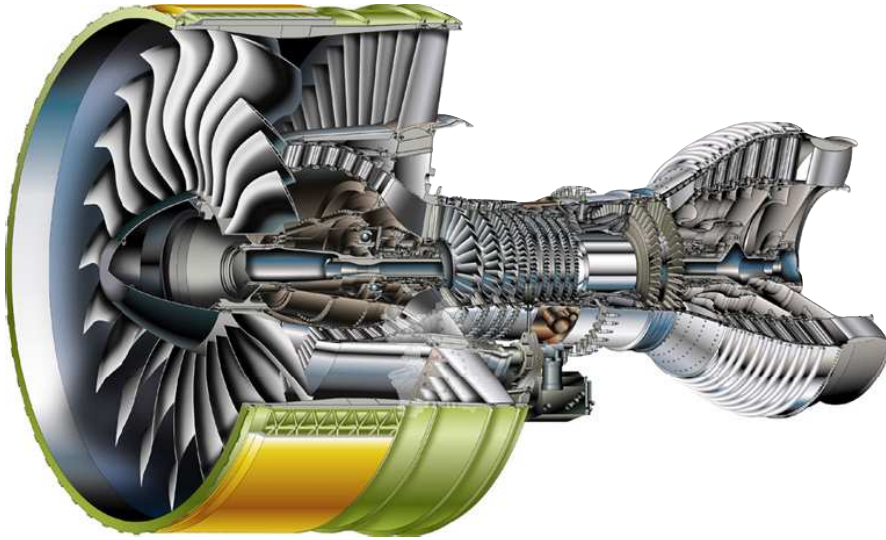


FIGURE I.1 – Exemple de turboréacteur industriel

Dans la suite, le principe de fonctionnement de ces propulseurs à réaction sera brièvement expliqué avant de s'intéresser aux différents composants qui constituent ces machines. Enfin, un intérêt particulier sera porté sur les sources de vibration présentes dans ce type de moteurs d'avion, à la fois de nature aérodynamique et mécanique.

1.1 Principe de fonctionnement

De nombreuses architectures de turboréacteurs existent, néanmoins ces systèmes possèdent tous des composants communs à savoir les compresseurs, les turbines et la chambre de combustion. En pénétrant dans le moteur, le flux d'air passe dans le compresseur où il est accéléré avant d'arriver à la chambre de combustion. L'ajout de carburant à l'air comprimé permet la combustion du mélange ce qui augmente l'énergie et la température du flux. Les gaz produits lors de la combustion passent ensuite dans la turbine où une partie de l'énergie cinétique que possède ce flux gazeux est prélevée pour actionner le compresseur qui est relié à la turbine par un arbre commun. Les gaz sont finalement éjectés à grande vitesse à l'arrière du moteur et leur énergie cinétique restante assure la propulsion par réaction. Ce flux qui est éjecté par une tuyère fournit la poussée du moteur, qui se définit comme étant la différence de vitesse entre les flux entrants et sortants.

Dans les premiers turboréacteurs, turbine et compresseur formaient un unique ensemble cinématique, on parlait alors de moteur *simple corps*. Cependant, pour accroître davantage l'efficacité des moteurs, le compresseur a été divisé en deux parties successives, une partie dite basse pression et l'autre dite haute pression. Cette architecture, apparue dans les années 60, s'est généralisée et la majorité des turboréacteurs modernes intègrent maintenant plusieurs corps, entraînés à des vitesses différentes. Dans les cas de turboréacteurs *double corps*, deux rotors indépendants peuvent être distingués. Le rotor basse pression, noté rotor BP, est généralement composé d'une soufflante, d'un compresseur et d'une turbine basse pression. Le rotor haute pression, noté rotor HP, comprend quant à lui le compresseur et la turbine haute pression. La vitesse de rotation des deux corps est différente, nécessitant deux arbres concentriques et par conséquent des moteurs plus longs et plus lourds. En contrepartie le rendement de ce type de moteur double corps est nettement amélioré.

En effet, la présence d'une soufflante, également appelée fan, permet d'améliorer le rendement du moteur en divisant le flux d'air admis en deux parties, un flux *primaire* et un flux *secondaire*. Une représentation schématique d'un turboréacteur est présentée en figure I.2 et illustre une coupe d'un moteur double flux.

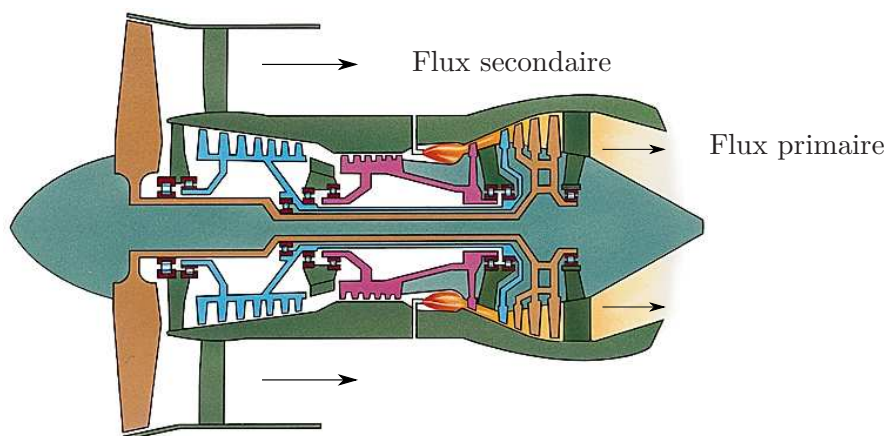


FIGURE I.2 – Représentation schématique d'une coupe de turboréacteur

Le flux primaire passe donc dans la partie interne du moteur où il est comprimé successivement par les compresseurs basse et haute pression et est destiné à participer à la combustion. Le flux secondaire contourne le moteur par sa périphérie jusqu'à la tuyère où il est éjecté avec les gaz chauds produits lors de la combustion. Ainsi dans le cas de moteurs double flux, le flux primaire fournit une partie de la poussée du moteur, le reste de la poussée étant due au flux secondaire. Les principaux avantages de ce type de conception sont d'augmenter la poussée par augmentation du débit de gaz et de réduire considérablement le niveau de bruit. Depuis leur apparition, les moteurs double corps, double flux (*cf.* Figure I.2) font l'objet d'améliorations permanentes et de nos jours les moteurs civils tirent l'essentiel de leur poussée du flux secondaire.

La complexité de tels systèmes nécessite des modélisations de plus en plus complètes de tous les organes permettant la prise en compte de phénomènes physiques influant sur le comportement de ces machines tournantes.

1.2 Principaux organes structuraux

D'un point de vue général, le moteur est constitué de parties tournantes appelées rotors et de parties fixes appelées stators. Ces différentes parties d'un moteur double corps sont illustrées sur la figure I.3. Le stator est fixé sur l'avion et il porte les rotors par l'intermédiaire de paliers.

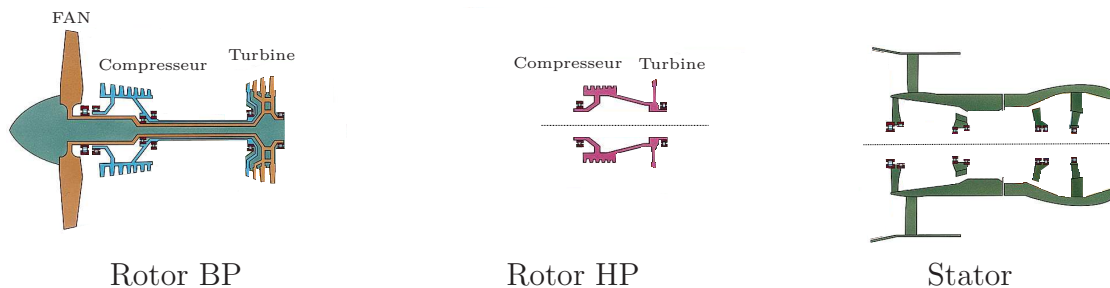


FIGURE I.3 – Représentation schématique des différents organes du moteur

Le stator. Le stator du moteur comporte les carters, les roues fixes du compresseur appelées redresseurs, les roues fixes de la turbine appelées distributeurs et la chambre de combustion. À partir de la périphérie du carter, des bras traversent la veine et tiennent des supports-paliers souples, dans lesquels sont montés des roulements qui réalisent les liaisons avec les rotors. La souplesse des supports-paliers est nécessaire pour réduire la sollicitation vibratoire des arbres et des roulements.

Dans des calculs de dynamique d'ensemble, le stator est réduit à des éléments massifs de raideur donnée de type tubulaire.

Les rotors. Les rotors de turboréacteurs sont des structures complexes. Leur fonction est de porter les étages de compresseur et de turbine en assurant une liaison d'entraînement entre eux. Les éléments structuraux qui constituent les rotors sont les arbres, les aubages et les disques. Les rotors sont suspendus par l'intermédiaire de paliers, dont le nombre varie en fonction de la longueur de l'arbre et de la répartition des éléments fonctionnels. En raison des exigences de performance et de fiabilité, les matériaux composant le moteur sont choisis avec la plus grande attention. Les alliages de titane ont une bonne tenue à la corrosion, une bonne tenue en température jusqu'à $600\text{ }^{\circ}\text{C}$ et c'est un bon compromis entre propriétés mécaniques et densité. C'est pourquoi ils sont massivement utilisés dans les compresseurs. En ce qui concerne les turbines, ce sont des superalliages de nickel qui sont employés, car ils se caractérisent par une excellente tenue à chaud jusqu'à $1100\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Dans le cadre d'une modélisation de type dynamique d'ensemble du moteur, ces organes sont généralement modélisés par des éléments poutres, des masses, des inerties et des raideurs concentrées (*cf.* Sect. 3.1).

Les paliers. La liaison entre les rotors et le stator, permettant de maintenir les rotors dans leur position, est assurée par des paliers à roulements. Ce sont des paliers à roulements qui sont utilisés et non des paliers hydrauliques car leur encombrement axial est plus faible et ils permettent une meilleure stabilité à la machine. De manière générale, un rotor est porté par un roulement à billes et un ou plusieurs roulement à rouleaux. Les roulements à billes assurent la tenue axiale alors que les roulements à rouleaux permettent une certaine liberté axiale notamment en prévision de la dilatation thermique des arbres. La présence de ces roulements entre les rotors et le stator permet d'introduire un support relativement souple de manière à atténuer les niveaux vibratoires sur les résonances.

Dans le cas d'un moteur double corps, une conception particulière peut être envisagée pour la connexion des rotors. Un roulement est installé entre les deux rotors, appelé palier *inter-arbre*, avec la bague intérieure fixée sur un des deux arbres et la bague extérieure sur l'autre. Ce choix technologique permet de réduire le poids et l'encombrement dus aux carters ce qui constitue un avantage majeur. Néanmoins, la situation dynamique de ce type de structure, à savoir deux rotors connectés par un palier inter-arbre, est plus complexe à cause de l'excitation réciproque des rotors.

Les roues aubagées. Dans le cadre d'une modélisation de type dynamique d'ensemble, les aubages des compresseurs et des turbines, qui sont portés par les rotors, sont modélisés par des masses concentrées et des inerties en rotation. Or, lors du dimensionnement aérodynamique et thermomécanique de la veine d'écoulement, une modélisation plus fine des successions d'aubages est nécessaire (*cf.* Sect. 4). Les compresseurs et les turbines présentent une architecture étagée, ils sont constitués d'une succession alternée d'aubages mobiles portés par les rotors et d'aubages fixes qui appartiennent au stator. Un étage est défini comme étant l'ensemble consécutif d'un aubage mobile et d'un aubage fixe et est illustré sur la figure I.4. Les parties tournantes liées aux rotors se présentent sous deux formes. La première configuration se présente sous la forme d'un assemblage d'aubes montées sur un disque, on parle alors de roues ou de disques aubagés. La deuxième configuration est une structure monobloc dans laquelle sont usinés les pales et le disque, permettant ainsi une réduction de masse et une augmentation des performances aérodynamiques.

Les roues aubagées ont donc pour fonction principale de fournir le travail de compression dans le cas des compresseurs, ou de récupérer l'énergie de détente dans le cas des turbines. Elles doivent cependant aussi résister mécaniquement à leur environnement de fonctionnement.

Les turbomachines sont des assemblages complexes de composants qui subissent une grande diversité de chargements, qu'ils soient statiques ou dynamiques. Dans la

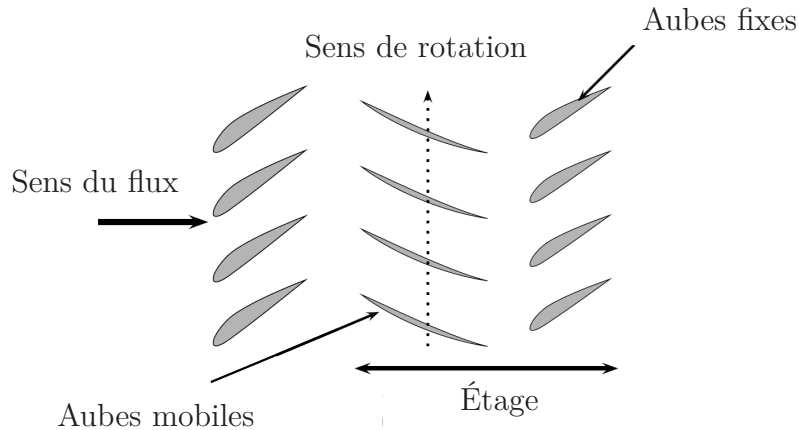


FIGURE I.4 – Vue de dessus d'un étage avec alternance d'aubages mobiles et fixes

partie suivante, les principales sources d'excitation et phénomènes vibratoires sont présentés.

1.3 Sources de vibration

Les moteurs d'avion sont soumis à des sources d'excitation multiples et variées. Les principaux phénomènes vibratoires sont abordés ici en découplant les sources d'origine aérodynamique et celles d'origine mécanique.

1.3.1 Sources d'excitation aéroélastiques

L'aéroélasticité des turbomachines comporte deux enjeux principaux, à savoir les phénomènes synchrones et ceux asynchrones.

Tout d'abord, les phénomènes synchrones sont générés par les excitations aérodynamiques dues aux variations des caractéristiques de l'écoulement fluide sur la circonférence. Les composants du turboréacteur se trouvent excités par l'écoulement d'air les traversant. Or, il existe de nombreux obstacles à cet écoulement tels que les aubages fixes (redresseurs ou distributeurs). L'excitation est proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur multipliée par le nombre d'obstacles rencontrés. On parle alors d'excitation synchrone de la vitesse de rotation du rotor. Dans ce cas, une aube mobile peut entrer en résonance lorsque l'une des fréquences propres croise une harmonique de l'excitation. Ces excitations forcées sont de manière générale bien prédites, que ce soit théoriquement ou expérimentalement.

Les autres phénomènes aéroélastiques sont les vibrations asynchrones. Par opposition avec les vibrations synchrones, les forces aérodynamiques sont liées ici à la vibration de l'aube qui mènent à des phénomènes qu'on appelle auto-entretenus. Par conséquent, les fréquences de vibration ne sont plus des multiples du régime de rotation et sont donc plus difficiles à prédire. Dans certains cas, lorsque la vibration des aubes mobiles et les forces aérodynamiques instationnaires s'auto-entretiennent, une instabilité dynamique de type flottement peut apparaître au voisinage d'une

fréquence propre de roue aubagée. Ce phénomène de flottement fait l'objet de nombreuses recherches [Hall *et al.*, 2006] puisque les niveaux vibratoires engendrés sont incontrôlables à moins de sortir de la zone d'instabilité.

1.3.2 Excitations mécaniques

En ce qui concerne les excitations mécaniques, les deux phénomènes vibratoires les plus rencontrés sont le contact rotor-stator et le balourd mécanique.

Les phénomènes de contact rotor-stator sont des modes de fonctionnement anormaux du moteur. Ils surviennent lorsqu'un contact continu ou intermittent s'établit entre le rotor et le stator. Ces phénomènes prennent une importance grandissante en raison de la réduction des jeux de fonctionnement qui existent entre les aubes et le carter. Lorsqu'il y a prise de contact, une forte composante tangentielle apparaît qui est due à la réaction au niveau du contact [Millecamps *et al.*, 2009]. Cette configuration peut conduire à des interactions modales [Legrand *et al.*, 2010] ou encore à des phénomènes d'instabilités [Lesaffre *et al.*, 2007].

Enfin, le balourd des rotors est la source principale de vibration des moteurs d'avion en fonctionnement, et c'est celle qui nous intéressera particulièrement dans la suite. Le balourd résulte du mouvement rotatif de masses excentrées par rapport à l'axe de symétrie des rotors. Les sources de balourd peuvent être multiples. Tout d'abord, lors de la fabrication des pièces du rotor, un problème d'usinage ou d'assemblage peut engendrer un balourd résiduel. Pour amoindrir ce phénomène, les constructeurs s'impose des tolérances très sévères ainsi que des équilibrages intermédiaires à chaque étape du processus de fabrication des parties tournantes. D'autre part, un balourd peut également survenir en condition de fonctionnement. Prenons l'exemple de l'ingestion de corps étrangers dans le moteur comme des grêlons ou encore des oiseaux qui peuvent causer des dégâts sur certaines aubes de soufflante créant ainsi un déséquilibre plus ou moins important du rotor. Le cas où les dommages sont les plus importants sont ceux où il y a la perte d'une ou de plusieurs aubes causant alors un balourd de grande ampleur. Dans ce cas, compte tenu des vitesses de rotation élevées et des masses importantes mises en jeu, il est indispensable de dimensionner le carter de telle sorte qu'il contienne les débris pour protéger l'avion.

Cette introduction nous a permis de présenter le type de machine tournante qui nous intéresse dans cette étude, le turboréacteur. La formulation des équations de ce type de machine tournante est détaillée dans la suite avec l'explication de quelques phénomènes physiques propres aux turbomachines.

2 Dynamique d'un corps élastique en rotation

Dans ce qui suit, il s'agit d'introduire de façon rigoureuse la mise en équation d'un solide déformable en rotation. Tout d'abord, la cinématique d'une particule d'un

solide tridimensionnel va être décrite dans un cadre général. Les formes continues des énergies cinétiques et potentielles vont être ensuite définies dans le repère mobile. Enfin, après l'introduction d'une approximation de Ritz, la formulation discrète du problème sera posée aboutissant à l'équation matricielle régissant le comportement dynamique d'une structure en rotation.

2.1 Cinématique d'une particule

Considérons un corps déformable occupant le volume Ω de frontière $\partial\Omega$ dans un repère fixe inertiel orthonormé $\mathcal{R}_f = (O, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ (Figure I.5). Chaque particule

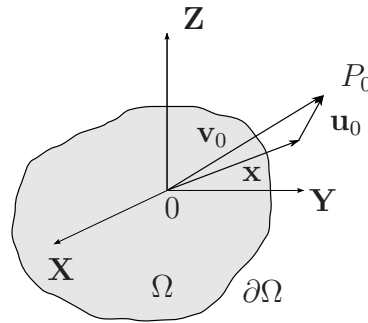


FIGURE I.5 – Configuration de référence dans le repère inertiel

P de ce solide est repérée dans sa configuration non déformée par ses coordonnées $\mathbf{x} = [X \ Y \ Z]^T$ dans le repère inertiel \mathcal{R}_f . À l'instant initial $t = 0$, le corps est soumis à un champ de déplacement \mathbf{u}_0 , chaque particule P_0 est alors repérée par le vecteur \mathbf{v}_0 dans \mathcal{R}_f défini ainsi :

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (\text{I.1})$$

À l'instant $t > 0$, chaque particule est déplacée au point P_1 repérée par le vecteur $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ dans \mathcal{R}_f . Ces particules peuvent également être définies dans un repère ortho-normé $\mathcal{R}_m = (O_1, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ lié au solide dans sa configuration déformée (Figure I.6). Dans ce repère mobile \mathcal{R}_m qui est confondu avec le repère inertiel à $t = 0$, la position de chaque particule P_1 du solide est repérée par le vecteur \mathbf{v} par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2})$$

Afin d'exprimer le vecteur position $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ d'une particule à $t > 0$ dans \mathcal{R}_f , le changement de repère entre \mathcal{R}_m et \mathcal{R}_f doit être défini. De manière générale, ce changement de repère se décompose en un vecteur translation $\mathbf{t}(t)$ de l'origine du repère et une rotation autour d'un axe quelconque, avec $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ le vecteur vitesse angulaire défini dans le repère mobile \mathcal{R}_m . On définit également la matrice de changement de repère $\mathbf{R}(t)$ dont les colonnes sont les vecteurs de base du repère mobile exprimés dans le repère fixe. Ainsi, le déplacement $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ dans \mathcal{R}_f s'écrit :

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(t) + \mathbf{R}(t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(t) + \mathbf{R}(t) (\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad (\text{I.3})$$

avec $\mathbf{R}(t)$ la matrice de rotation orthogonale avec la propriété $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, où \mathbf{I} désigne la matrice identité. Dans le cadre d'étude de la dynamique d'une particule P_1 , il est

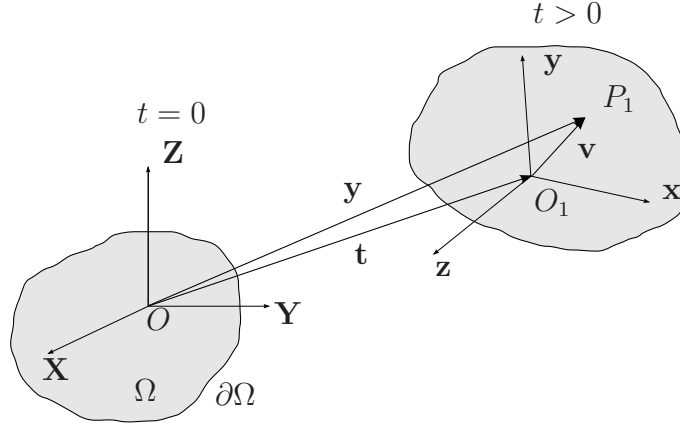


FIGURE I.6 – Configuration déformée dans le repère mobile

nécessaire de définir la vitesse définie par la dérivée temporelle du vecteur $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$. L'expression de cette vitesse absolue est la suivante :

$$\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{t}}(t) + \dot{\mathbf{R}}(t) (\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{R}(t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.4})$$

où $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t) \boldsymbol{\Omega}$ est la dérivée temporelle de la matrice de rotation, avec $\boldsymbol{\Omega}$ la matrice antisymétrique définie par les composantes du vecteur vitesse $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.5})$$

2.2 Formulation des équations du mouvement

Les équations du mouvement sont formulées à partir du principe variationnel d'Hamilton exprimant la stationnarité de la fonctionnelle énergétique suivante :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{U}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta(\mathcal{W} - \mathcal{F}) dt = 0 \quad (\text{I.6})$$

où \mathcal{T} représente l'énergie cinétique, \mathcal{U} l'énergie potentielle de déformation, \mathcal{W} le travail des forces non-conservatives et \mathcal{F} la fonction de dissipation.

L'énergie cinétique exprimée dans \mathcal{R}_f s'écrit :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{y}}^T \dot{\mathbf{y}} d\Omega \quad (\text{I.7})$$

En remplaçant le vecteur vitesse par son expression (Eq. I.4), on obtient l'énergie cinétique en fonction des déplacements exprimés dans le repère mobile \mathcal{R}_m :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega}^T (\mathbf{R} \dot{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T (\mathbf{R} \dot{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{t}}^T \dot{\mathbf{t}} + 2 \dot{\mathbf{t}}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

L'énergie potentielle de déformation élastique \mathcal{U} s'écrit :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (\text{I.9})$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes et $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations.

Supposons que le matériau est viscoélastique ce qui nous permet d'écrire la relation entre contrainte et déformation sous la forme d'une loi de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} (\boldsymbol{\varepsilon} + \eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (\text{I.10})$$

où \mathbf{E} est le tenseur d'élasticité linéaire et η le coefficient d'amortissement interne visqueux.

De plus, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, il existe une relation linéaire entre les déformations et les déplacements, ce qui permet de relier les contraintes aux déplacements :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.11})$$

où ∇ représente l'opérateur différentiel.

L'énergie potentielle de déformation élastique devient alors :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{E} (\nabla \mathbf{u}) \, d\Omega \quad (\text{I.12})$$

Le travail des forces extérieures \mathcal{W} est associé aux forces volumiques notées \mathbf{f}_v et aux forces surfaciques notées \mathbf{F}_d et son expression est la suivante :

$$\mathcal{W} = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{F}_d \, dS \quad (\text{I.13})$$

Enfin, sous l'hypothèse d'un amortissement visqueux, le travail des forces de dissipation est introduit et s'écrit :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T \mathbf{E} (\nabla \dot{\mathbf{u}}) \, d\Omega \quad (\text{I.14})$$

Les formes continues des énergies viennent d'être définies. Or, dans l'approche développée par la suite, des déplacements approchés \mathbf{u}^h sont recherchés. La méthode de discrétisation utilisée est l'approximation de Rayleigh-Ritz qui consiste à décomposer le champ de déplacement en un produit de fonctions de l'espace et du temps :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(t) \quad (\text{I.15})$$

où $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$ est la matrice des fonctions de forme cinématiquement admissibles et $\mathbf{q}(t)$ le vecteur des coordonnées généralisées.

Dans le cas où le mouvement du système est décrit par ses coordonnées généralisées contenues dans le vecteur \mathbf{q} , le principe d'Hamilton (Eq. I.6) revient à vérifier les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{I.16})$$

où $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ désigne la fonction de Lagrange.

Ainsi, après substitution de l'équation (I.15) dans les formes continues des énergies définies précédemment, l'application des équations de Lagrange conduit à l'équation matricielle du comportement dynamique du système dans le repère mobile \mathcal{R}_m :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{P}) \mathbf{q} = \mathbf{F} + \mathbf{r} \quad (\text{I.17})$$

avec \mathbf{M} la matrice de masse, \mathbf{D} la matrice d'amortissement, \mathbf{G} la matrice gyroscopique, \mathbf{K} la matrice de raideur élastique, \mathbf{N} la matrice d'assouplissement centrifuge et \mathbf{P} la matrice d'accélération angulaire. Le vecteur \mathbf{F} désigne les excitations extérieures et \mathbf{r} désigne les excitations indirectes dues à l'entraînement du système de coordonnées. Notons que les matrices \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} et \mathbf{N} sont symétriques alors que \mathbf{G} et \mathbf{P} sont des matrices antisymétriques. Leurs expressions sont les suivantes :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \Phi^T \Phi d\Omega \quad (\text{I.18})$$

$$\mathbf{D} = \int_{\Omega} \eta (\nabla \Phi)^T \mathbf{E} (\nabla \Phi) d\Omega \quad (\text{I.19})$$

$$\mathbf{G} = 2 \int_{\Omega} \rho \Phi^T \Omega \Phi d\Omega \quad (\text{I.20})$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \Phi)^T \mathbf{E} (\nabla \Phi) d\Omega \quad (\text{I.21})$$

$$\mathbf{N} = - \int_{\Omega} \rho \Phi^T \Omega^T \Omega \Phi d\Omega \quad (\text{I.22})$$

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho \Phi^T \dot{\Omega} \Phi d\Omega \quad (\text{I.23})$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \Phi^T \mathbf{f}_v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \Phi^T \mathbf{F}_d dS \quad (\text{I.24})$$

$$\mathbf{r} = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{R}\ddot{\mathbf{t}} + \dot{\Omega}\mathbf{x} - \Omega^T \Omega \mathbf{x}) d\Omega \quad (\text{I.25})$$

Dans les études réalisées par la suite, nous considérons que $\Omega = \text{constante}$ et que l'origine des deux repères fixe \mathcal{R}_f et mobile \mathcal{R}_m est confondue. Par conséquent, la matrice \mathbf{P} et le vecteur \mathbf{r} n'apparaissent plus dans l'équation du comportement dynamique du système.

Les matrices gyroscopique \mathbf{G} et centrifuge \mathbf{N} sont caractéristiques des machines tournantes et elles sont à l'origine de nombreux phénomènes propres aux rotors. L'application de cette formulation au cas des rotors modélisés par des éléments poutres - masses - ressorts va être développée dans la partie suivante.

3 Phénoménologie des rotors

Une modélisation simplifiée des rotors est souvent utilisée dans la littérature et est présentée ici. Une fois cette modélisation détaillée, un intérêt est porté sur le choix d'un repère d'étude afin d'appréhender la formulation du système dans chacun des deux repères, fixe ou tournant. Enfin, quelques particularités propres à la dynamique des rotors seront présentées tels que la notion de vitesse critique et celle de réponse à balourd.

3.1 Modélisation poutre

Les premiers travaux utilisant ce type de modélisation ont été publiés par Nelson et McVaugh [Nelson et McVaugh, 1976]. Ils prennent en compte les effets d'inertie de rotation, de charges axiales et d'efforts gyroscopiques. Cette modélisation a été complétée par Zorzi et Nelson [Zorzi et Nelson, 1977] pour prendre en compte l'amortissement interne des parties tournantes. Plusieurs travaux ont suivi (Genta [Genta, 1988], Hashish et Sankar [Hashish et Sankar, 1984], Ku [Ku, 1998] et Özgüven et Özkan [Özgüven et Özkan, 1984]), confirmant la maturité et la fiabilité de cette technique.

L'arbre est modélisé par une poutre élancée en rotation, les disques considérés rigides sont vus comme des inerties en rotation et les paliers sont modélisés par des raideurs et des amortissements ponctuels. Seules les vibrations transversales nous intéressent, la coordonnée axiale y n'est donc pas prise en considération dans la suite. Dans le cadre de la théorie des poutres, quatre degrés de liberté par nœud sont pris en compte, à savoir deux translations u et w et deux rotations θ et ψ . L'ensemble du rotor est modélisé par trois composants illustrés sur la figure I.7.

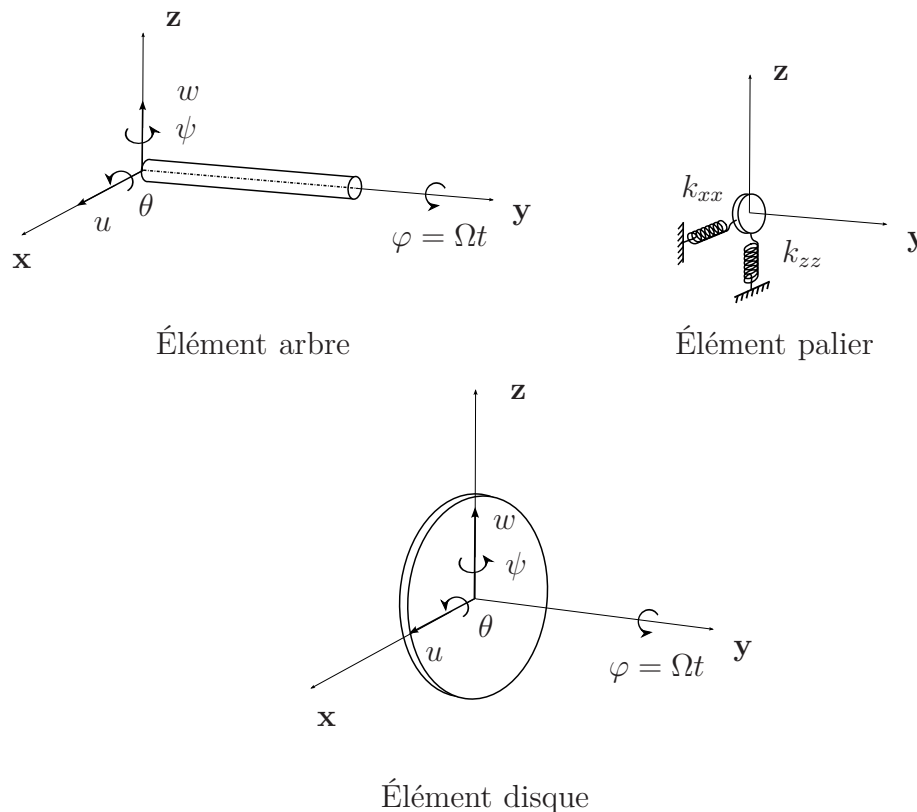


FIGURE I.7 – Représentation des éléments simplifiés : l'arbre, le disque et le palier

L'arbre. En s'appuyant sur la démarche développée précédemment, les énergies cinétique \mathcal{T}_{arbre} et potentielle \mathcal{U}_{arbre} ainsi que la fonction de dissipation \mathcal{F}_{arbre} sont

donnés dans le repère fixe \mathcal{R}_f par :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{arbre} &= \frac{\rho S}{2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I_d}{2} \int_0^l (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy \\ &+ 2\rho I_p \Omega \int_0^l \theta \dot{\psi} dy + \rho I_p l \Omega^2 \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

$$\mathcal{U}_{arbre} = \frac{EI_d}{2} \int_0^l \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right) dy \quad (\text{I.27})$$

$$\mathcal{F}_{arbre} = \frac{EI_d \eta}{2} \int_0^l \left(\left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y} \right)^2 \right) dy + \frac{EI_d \eta \Omega}{2} \int_0^l \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y} dy \quad (\text{I.28})$$

avec ρ la densité de l'arbre, E son module d'Young, l sa longueur, S sa surface, I_d son inertie diamétrale de la section droite et η le coefficient d'amortissement.

Le disque. Il s'agit de représenter ici des disques rigides axisymétriques dont les caractéristiques sont définies par leurs masses m , leurs inerties polaires I_p autour de l'axe de rotation y et leurs inerties diamétrales. Comme les disques sont rigides, seule l'énergie cinétique \mathcal{T}_{disque} est donnée par :

$$\mathcal{T}_{disque} = \frac{1}{2} \left(m (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + I_d (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + I_p (2\Omega \theta \dot{\psi} + \Omega^2) \right) \quad (\text{I.29})$$

Le palier. La contribution énergétique des paliers s'exprime en terme d'énergie de déformation \mathcal{U}_{palier} associée à leur raideur et de fonction de dissipation \mathcal{F}_{palier} associée à leur amortissement :

$$\mathcal{U}_{palier} = \frac{1}{2} \left(k_{xx} (u_1 - u_2)^2 + k_{zz} (w_1 - w_2)^2 \right) \quad (\text{I.30})$$

$$\mathcal{F}_{palier} = \frac{1}{2} \left(c_{xx} (\dot{u}_1 - \dot{u}_2)^2 + c_{zz} (\dot{w}_1 - \dot{w}_2)^2 \right) \quad (\text{I.31})$$

où $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$ représente le déplacement au centre du rotor et $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$ le déplacement du stator.

Après une étape de discrétisation et l'application des équations de Lagrange à ces formulations énergétiques, les matrices de chacun des éléments sont obtenues. L'assemblage final de ces matrices aboutit à l'équation matricielle du comportement dynamique du système pour une modélisation poutre dans le repère fixe \mathcal{R}_f :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{C})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (\text{I.32})$$

avec les matrices \mathbf{M} de masse obtenue à partir des matrices élémentaires de masse de l'arbre et du disque, \mathbf{D} d'amortissement contenant les termes d'amortissement interne de l'arbre et ceux des paliers, \mathbf{G} gyroscopique obtenue à partir des matrices élémentaire de l'arbre et du disque, \mathbf{K} de raideur incluant la raideur de l'arbre et celle des paliers et enfin \mathbf{C} circulatoire résultant de l'amortissement interne de l'arbre.

3.2 Définition d'un repère d'étude

La modélisation des structures tournantes peut se faire dans deux repères, à savoir le repère fixe \mathcal{R}_f et le repère mobile \mathcal{R}_m . Ces deux modélisations présentent chacune des avantages et des inconvénients suivant les dissymétries de la structure. En effet, la modélisation d'une structure possédant des éléments asymétriques en rotation par rapport au repère considéré présente des termes dépendants du temps. Cette présence de termes périodiques dans l'équation du comportement dynamique rend le système plus compliqué à traiter. C'est pourquoi, il est plus judicieux d'adopter le référentiel dans lequel les parties dissymétriques sont fixes. Ainsi, les structures possédant des parties tournantes dissymétriques sont généralement modélisées dans le repère tournant alors que les structures possédant des parties fixes dissymétriques sont modélisées dans le repère fixe.

Dans le cas de structures parfaitement symétriques, elles peuvent être modélisées indifféremment dans l'un ou l'autre des deux repères. Afin d'illustrer la redistribution des termes de la modélisation d'une structure tournante en fonction du repère choisi, considérons un système parfaitement isotrope soumis à des effets gyroscopiques dans le repère fixe. La formulation matricielle de ce système dans le repère fixe \mathcal{R}_f peut s'écrire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{C})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (\text{I.33})$$

avec $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ le vecteur des degrés de liberté du système dans le repère fixe \mathcal{R}_f et \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{G} , \mathbf{K} et \mathbf{C} représentent les matrices de masse, d'amortissement, gyroscopique, de raideur et circulatoire, respectivement. Leurs expressions sont les suivantes :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad \text{où } m \text{ représente la masse du système ;}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} c_f + c_m & 0 \\ 0 & c_f + c_m \end{pmatrix} \quad \text{où } c_f \text{ désigne l'amortissement fixe dans } \mathcal{R}_f, \text{ soit par exemple la contribution des paliers et } c_m \text{ désigne l'amortissement tournant dans } \mathcal{R}_f, \text{ qui peut être l'amortissement interne du rotor ;}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & a\Omega \\ -a\Omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } a \text{ représente les termes d'inertie du système ;}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_f + k_m & 0 \\ 0 & k_f + k_m \end{pmatrix} \quad \text{où } k_f \text{ indique la raideur des paliers et } k_m \text{ la raideur du rotor ;}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & c_m\Omega \\ -c_m\Omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } c_m \text{ est vu comme l'amortissement tournant dans } \mathcal{R}_f.$$

Dans le repère tournant \mathcal{R}_m , la formulation matricielle de ce même système iso-

trope s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^* + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}^* + (\mathbf{K} + \mathbf{C} + \mathbf{N})\mathbf{q}^* = \mathbf{0} \quad (\text{I.34})$$

avec $\mathbf{q}^* = \begin{pmatrix} u^* \\ w^* \end{pmatrix}$ le vecteur des degrés de libertés dans le repère tournant \mathcal{R}_m et dans cette formulation la matrice \mathbf{N} d'assouplissement centrifuge apparaît. Les expressions des matrices \mathbf{M} , \mathbf{D} et \mathbf{K} ne sont pas impactées par ce changement de repère, en revanche les matrices \mathbf{G} , \mathbf{C} et \mathbf{N} ont les expressions suivantes :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & (a - 2m)\Omega \\ -(a - 2m)\Omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{qui dépend maintenant de la masse et de l'inertie du système ;}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -c_f\Omega \\ c_f\Omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } c_f \text{ est vu comme l'amortissement tournant des paliers dans le repère mobile } \mathcal{R}_m ;$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} (a - m)\Omega^2 & 0 \\ 0 & (a - m)\Omega^2 \end{pmatrix} \quad \text{proportionnelle au carré de la vitesse de rotation.}$$

Notons que les matrices de masse, d'amortissement et de raideur sont symétriques définies positives. Les matrices gyroscopique et circulatoire sont antisymétriques et la matrice d'assouplissement centrifuge est définie négative.

3.3 Particularités de la dynamique des rotors

La dynamique des machines tournantes, comme nous venons de le rappeler, est associée à une mise en équation particulière. La présence des termes gyroscopiques et circulatoires conduit à une phénoménologie spécifique. Ces notions particulières comme le couplage gyroscopique, les vitesses critiques ainsi que la réponse à balourd sont abordées dans cette partie.

3.3.1 Notion de vitesses critiques

La vitesse critique est définie par Nelson [Nelson, 2002] comme étant la vitesse où, de manière analogue à la résonance d'une structure élastique non tournante, les vibrations de la machine atteignent des niveaux élevés.

Tout d'abord, les modes propres d'un système conservatif en rotation sont des modes complexes deux à deux conjugués, avec des pulsations propres purement imaginaires qui dépendent de la vitesse de rotation. Cela est dû aux effets gyroscopiques, induits par la rotation, qui couplent les déplacements horizontaux et verticaux de la structure. En combinant les modes propres de cette structure, il est possible d'exhiber deux types de modes, un qualifié de *direct* et l'autre de *rétrograde*. Le mode direct est caractérisé par un mouvement de précession dans le même sens que le mouvement de rotation propre du rotor, alors que la précession rétrograde est caractérisée par un mouvement dans le sens inverse à la rotation propre de la structure.

Le point essentiel est donc la dépendance des fréquences propres des modes en fonction de la vitesse de rotation Ω . De manière générale, l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation se représente sur un *Diagramme de Campbell* [Lalanne et Ferraris, 1998]. Ce diagramme constitue l'un des outils de base pour déterminer les vitesses critiques du système. Le diagramme de Campbell d'un rotor axisymétrique dans le repère fixe \mathcal{R}_f est présenté en figure I.8. La fréquence propre à vitesse nulle est double, il existe donc deux modes de vibration de déformées identiques dans deux plans orthogonaux. Lorsque les forces gyroscopiques augmentent, la séparation des modes donne naissance à un mode direct (droite de pente positive) qui est rigidifié lorsque la vitesse de rotation augmente et à un mode rétrograde (droite de pente négative) qui est assoupli lorsque la vitesse croît.

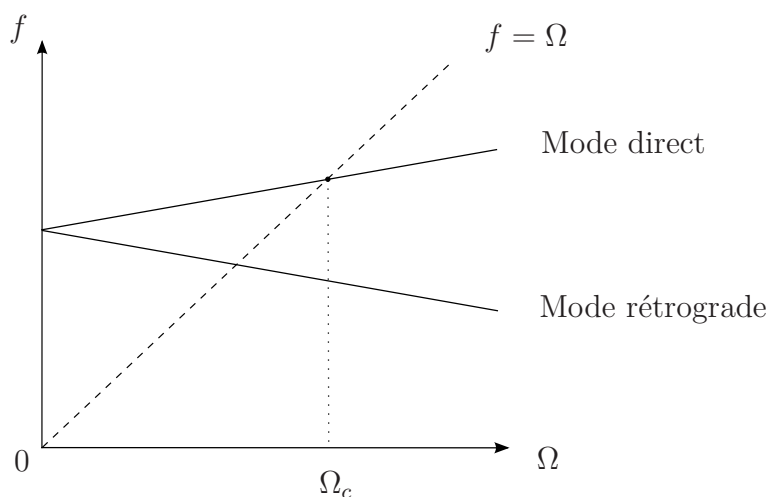


FIGURE I.8 – Diagramme de Campbell d'un rotor axisymétrique dans le repère fixe

L'excitation majeure dans un système en rotation étant les forces synchrones de balourd (*cf.* Sect 1.3), il est possible de détecter les phénomènes de résonance en reportant la droite d'équation $f = \Omega$ sur le diagramme de Campbell, appelée droite d'excitation synchrone. Lorsque la fréquence d'excitation synchrone coïncide avec la fréquence propre d'un des modes, il y a résonance du rotor, ce qui correspond à la notion de vitesse critique Ω_c . Notons que dans le cas d'un rotor parfaitement axisymétrique, seul le mode direct répond à une excitation synchrone.

Nous avons vu dans la partie précédente que le choix du repère d'étude changeait la forme des équations du système tournant. La représentation du diagramme de Campbell est elle aussi impactée dans le cas d'une description du système dans le repère tournant \mathcal{R}_m . En effet, du fait de la rotation propre de l'observateur dans le cas d'une modélisation dans le repère tournant, les fréquences qui augmentent avec la vitesse de rotation sont associées aux modes rétrogrades, translatés de Ω par rapport au repère fixe, et celles diminuant avec la vitesse de rotation sont associées aux modes directs, translatés de $-\Omega$ par rapport à \mathcal{R}_f (*cf.* Fig. I.9).

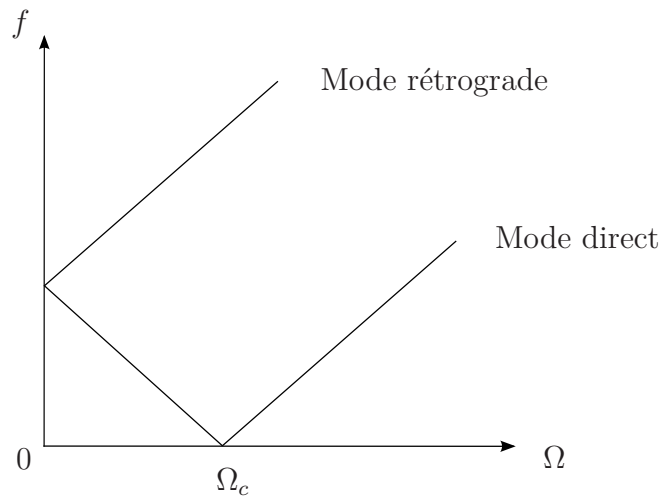


FIGURE I.9 – Diagramme de Campbell d'un rotor axisymétrique dans le repère tournant

De plus, vu que le rotor est modélisé dans son propre repère tournant, la droite d'excitation synchrone correspond à l'axe des abscisses. Ainsi, dans ce repère, les vitesses critiques Ω_c se lisent à l'intersection du mode direct repéré par la branche décroissante avec l'axe des abscisses $f = 0$.

3.3.2 Influence des dissymétries

Couramment les rotors sont conçus comme étant axisymétriques. Néanmoins, le stator qui représente les parties fixes du système dans \mathcal{R}_f peut avoir des caractéristiques anisotropes. L'influence des dissymétries en raideur des paliers sur la dynamique du rotor est bien documentée. Tout d'abord, on note que si les raideurs transversales dans deux directions principales sont différentes, la réponse synchrone du rotor à un balourd est un mouvement de précession elliptique au lieu de circulaire. De plus, à l'arrêt, les modes propres dans les plans vertical et horizontal ont naturellement des fréquences propres distinctes, notée f_r et f_d sur la figure I.10. Les modes classiquement associés par paires dans le contexte axisymétrique, avec un mode direct et un mode rétrograde, sont dans ce cas différents l'un de l'autre. L'évolution de la vitesse de rotation donne néanmoins toujours l'apparition d'un mode direct et d'un mode rétrograde [Lalanne et Ferraris, 1998].

Dans ce cas de figure, les modes rétrogrades sont sollicités par l'excitation synchrone, ainsi deux vitesses critiques peuvent être lues sur le diagramme de Campbell, une directe Ω_{c_d} et l'autre rétrograde Ω_{c_r} . Dans certaines plages de vitesse de rotation, on observe alors un mouvement de précession rétrograde du rotor, engendrant ainsi des contraintes axiales normales alternées qui ont pour conséquence de solliciter le rotor en fatigue et par conséquent de diminuer sa durée de vie. Cependant, ces plages sont relativement étroites et se trouvent aux alentours des vitesses critiques.

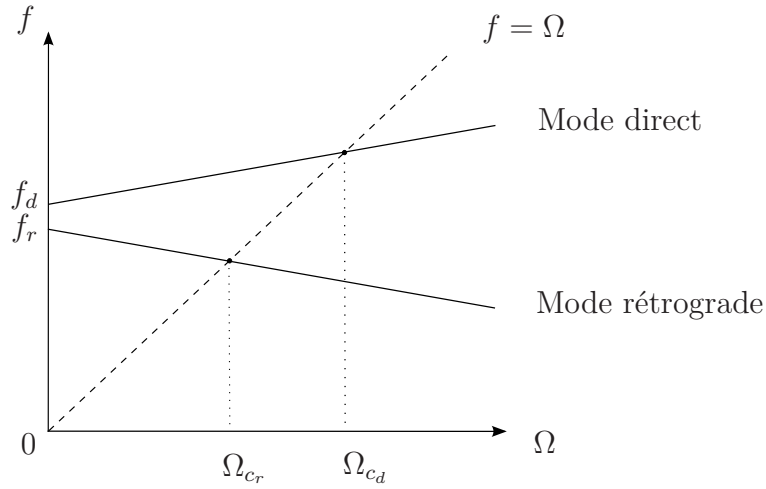


FIGURE I.10 – Diagramme de Campbell d'un rotor possédant des parties fixes dissymétriques dans le repère fixe

Ce phénomène est classique et peut être inhibé lorsque l'amortissement est suffisant. On remarquera également que les rotors avec des supports anisotropes peuvent être utilisés pour augmenter la fréquence où l'instabilité apparaît. Childs [Childs, 1993] montre par exemple que l'instabilité originaire de l'amortissement interne est décalée grâce à la dissymétrie des supports.

3.3.3 Réponse à balourd

Nous venons de voir que l'excitation majeure dans un système en rotation était les forces synchrones de balourd. La représentation de cette excitation synchrone sur le diagramme de Campbell permet de prédire les résonances du système en rotation afin d'en déterminer ses vitesses critiques. Le balourd résulte du mouvement rotatif de masses excentrées du rotor par rapport à son axe de rotation induisant alors des efforts. En écrivant l'énergie cinétique d'une masse m_b excentrée par rapport à l'axe de rotation du rotor d'une distance e , l'expression de ces forces dues au balourd est obtenue après l'application des équations de Lagrange. Ainsi, on appelle *réponse à balourd* l'amplitude d'un déplacement de la structure en fonction de la vitesse de rotation.

Tout d'abord, considérons que l'énergie cinétique de cette masse excentrée est écrite dans le repère fixe \mathcal{R}_f , ainsi l'expression des forces d'excitation par balourd s'écrivent :

$$\mathbf{F}_b = \begin{pmatrix} F_{bu} \\ F_{bw} \end{pmatrix} = m_b e \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\Omega t + \alpha) \\ \sin(\Omega t + \alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{I.35})$$

où α est l'angle entre la position de la masse et l'axe des abscisses dans \mathcal{R}_f .

La réponse à balourd de la structure est alors obtenue après résolution de l'équation dynamique suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{C})\mathbf{q} = \mathbf{F}_b \quad (\text{I.36})$$

Afin de résoudre ce système linéaire, on suppose que le mouvement vibratoire est de la même forme que l'excitation :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{cos} \cos(\Omega t) + \mathbf{q}_{sin} \sin(\Omega t) \quad (\text{I.37})$$

Ainsi, en substituant les équations (I.37) et (I.35) dans (I.36), on obtient le système linéaire suivant qui peut être aisément résolu :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{K}} - \Omega^2 \mathbf{M} & \Omega \tilde{\mathbf{D}} \\ -\Omega \tilde{\mathbf{D}} & \tilde{\mathbf{K}} - \Omega^2 \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{cos} \\ \mathbf{q}_{sin} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{b_{cos}} \\ \mathbf{F}_{b_{sin}} \end{pmatrix} \quad (\text{I.38})$$

avec $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \mathbf{G}$ et $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{C}$.

À titre d'exemple, considérons un système rotatif à deux degrés de liberté, caractérisé par les paramètres suivants $m = 1$, $k_f = 1$, $a = 0,5$, et $c_f = 0,1$. Dans cet exemple, les paramètres k_m et c_m sont nuls, ainsi les matrices de ce système sont obtenues à partir de l'équation (I.33). Les valeurs prises pour le balourd sont $\mathbf{F}_{b_{cos}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{F}_{b_{sin}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le diagramme de Campbell et la réponse à balourd de ce système sont représentés sur la figure I.11.

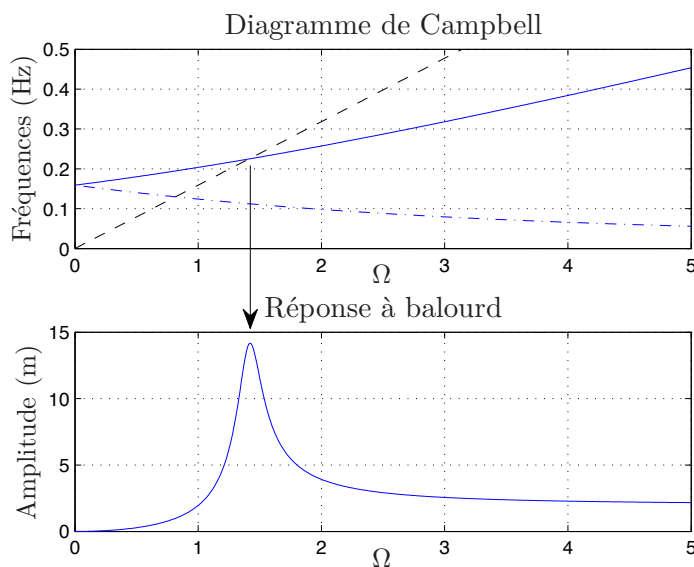


FIGURE I.11 – Diagramme de Campbell (en haut) et réponse à balourd (en bas) du système axisymétrique en repère fixe

Le système considéré étant axisymétrique, on retrouve bien la présence d'un mode double à vitesse nulle, puis quand la vitesse augmente, un mode rétrograde apparaît (branche décroissante en trait mixte sur la figure I.11) ainsi qu'un mode direct (branche croissante en trait plein). La droite pointillée représente l'excitation synchrone et on remarque bien sur la réponse à balourd que seul un pic apparaît qui correspond à la réponse du mode direct.

Afin de montrer l'équivalence des représentations en repère fixe ou tournant pour un système axisymétrique, le même exemple a été traité avec l'écriture des matrices dans \mathcal{R}_m (cf. Eq. I.34). L'écriture de l'énergie cinétique d'une masse excentrée dans le repère mobile aboutit à l'expression des forces de balourd qui sont constantes dans ce repère :

$$\mathbf{F}_b = \begin{pmatrix} F_{bu} \\ F_{bw} \end{pmatrix} = m_b e \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{I.39})$$

Ainsi, la réponse à balourd de la structure est obtenue en résolvant le problème statique suivant :

$$(\mathbf{K} + \mathbf{C} + \mathbf{N}) \mathbf{q} = \mathbf{F}_b \quad (\text{I.40})$$

Le diagramme de Campbell et la réponse à balourd associés au système à deux degrés de liberté défini précédemment sont illustrés sur la figure I.12.

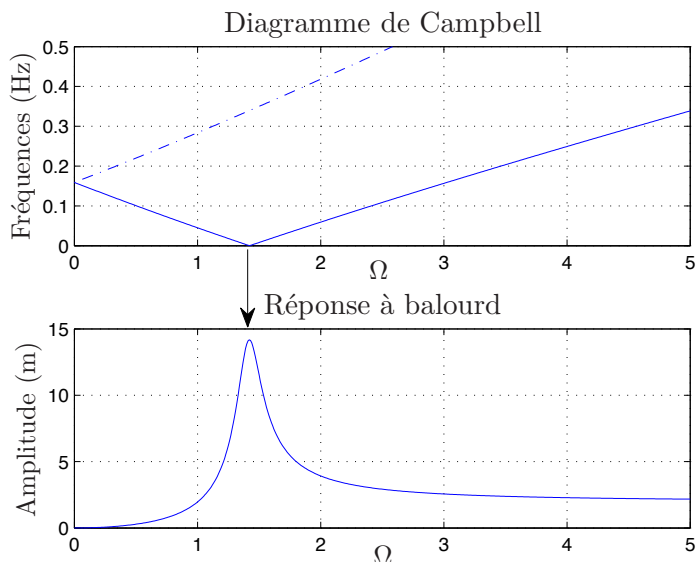


FIGURE I.12 – Diagramme de Campbell (en haut) et réponse à balourd (en bas) du système axisymétrique en repère tournant

Sur ce diagramme de Campbell, le mode est également double à l'arrêt et, lorsque la vitesse augmente, la branche décroissante (en trait plein) correspond au mode direct alors que la branche croissante (en trait mixte) correspond au mode rétrograde. Lorsque le mode direct « rebondit » sur l'axe des abscisses, il y a résonance du système ce qui est en accord avec la réponse à balourd associée, où le pic d'amplitude correspond à l'excitation du mode direct. Bien que la représentation du système soit différente dans chacun des deux repères, la réponse à balourd est strictement identique.

Enfin, l'influence de l'anisotropie du stator sur la réponse dynamique va être traitée dans le repère fixe. Pour cela, reprenons le même système (cf. Eq. I.38) doté de parties fixes dissymétriques qui sont représentées par la matrice de raideur

suivante :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.41})$$

La réponse du système soumis à une excitation de balourd, qui est identique au précédent exemple, est présentée sur la figure I.13.

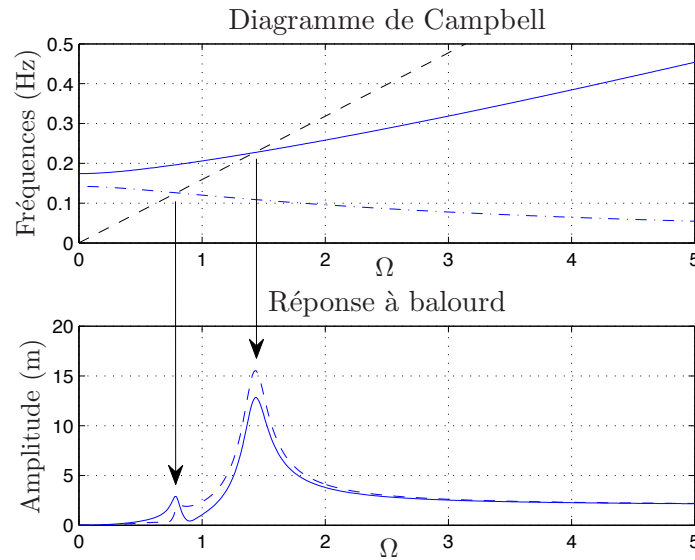


FIGURE I.13 – Diagramme de Campbell (en haut) et réponse à balourd (en bas) du système à parties fixes dissymétriques en repère fixe

Le système manifeste une réponse différente, deux pics de réponse sont présents, un à $\Omega \approx 0,8$ rad/s et l'autre à $\Omega \approx 1,4$ rad/s. Ces pics correspondent aux intersections de la droite d'excitation synchrone avec les branches directes et rétrogrades des modes sur le diagramme de Campbell. Sur la figure de réponse à balourd, le trait plein représente le déplacement horizontal du rotor et le trait pointillé représente son déplacement vertical. On peut constater que le mouvement de précession rétrograde est prédominant sur le premier pic de réponse à $\Omega \approx 0,8$ rad/s.

Dans cette partie, les principaux concepts associés à la dynamique des rotors ont été présentés et illustrés sur des exemples à deux degrés de libertés. Le domaine de la dynamique d'ensemble s'intéresse au comportement global de la machine tournante au travers de modèles simplifiés de type poutres - masses - ressorts comme nous venons de le voir. Dans ces modèles, les roues aubagées sont modélisées par des disques rigides, à savoir des masses et des inerties en rotation. Or, lors d'un dimensionnement aérodynamique des turbomachines par exemple, la géométrie particulière de ces roues aubagées doit être modélisée plus finement. Dans la suite, les principaux aspects de la modélisation et de la dynamique spécifique des roues aubagées est abordée.

4 Modélisation des roues aubagées

La modélisation des roues aubagées se base en grande partie sur les propriétés de *symétrie cyclique* de ces structures. Une structure à symétrie cyclique est constituée d'un ensemble de sous-structures identiques qui se referment sur elles-mêmes. Chacune de ces sous-structures est appelée *secteur*. La figure I.14 représente un disque aubagé complet généré par la rotation d'un secteur de référence.

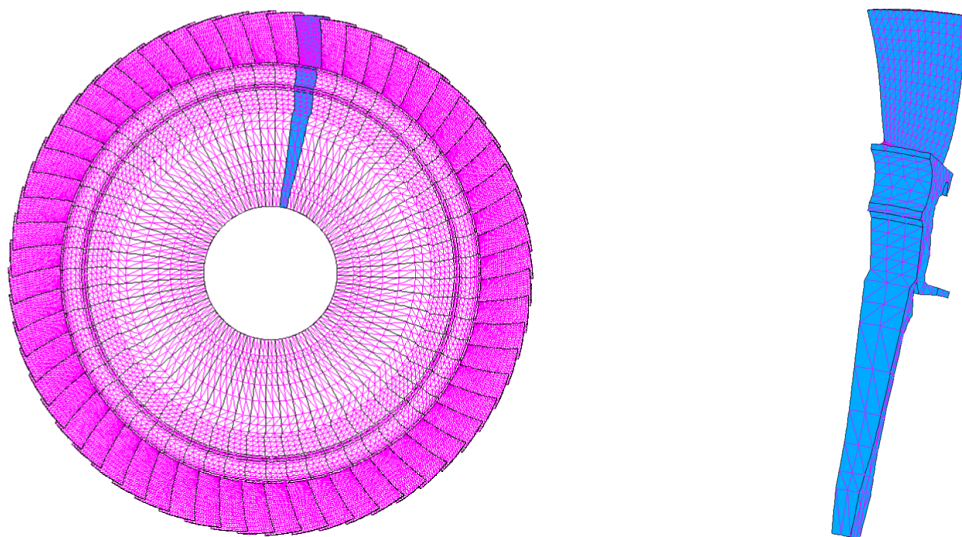


FIGURE I.14 – Représentation d'une roue aubagée avec son secteur de référence

Dans la suite, le passage d'une base physique à une base cyclique sera d'abord détaillé. Puis, nous utiliserons ces propriétés de symétrie cyclique afin de calculer les modes propres et la réponse forcée de la structure complète à partir d'un seul secteur, réduisant ainsi considérablement la taille des problèmes à résoudre. Les travaux faisant référence dans ce domaine sont en particulier ceux de Thomas [Thomas, 1979], Henry [Henry, 1980] et Wildheim [Wildheim, 1979, Wildheim, 1981], qui ont été parmi les premiers à proposer de telles techniques de calcul pour les structures linéaires.

4.1 Notion de symétrie cyclique

La notion de symétrie cyclique repose sur la définition d'une base cyclique dans laquelle sont définies les composantes du problème. L'équivalence entre la représentation en base physique et celle en base cyclique est détaillée dans cette partie.

4.1.1 Définition des composantes cycliques

Une structure est dite à symétrie cyclique si elle est composée de N secteurs géométriquement identiques. Ces secteurs sont numérotés de 0 à $N - 1$ et chaque secteur de la roue aubagée sont déduits du secteur de référence par j rotations successives

d'angle $\alpha = \frac{2\pi}{N}$. Notons que l'axe de rotation de la structure est supposé confondu avec l'axe de symétrie cyclique de la structure. De manière générale, la modélisation des structures à symétrie cyclique comme les roues aubagées se représente dans le repère tournant \mathcal{R}_m afin de s'affranchir des termes périodiques liés aux aubes qui apparaîtraient dans le cas d'une représentation en repère fixe. Dans ce repère mobile, on peut alors définir des repères tournants locaux \mathcal{R}_{m_j} définis par la rotation $\alpha_j = \frac{2\pi j}{N}$ pour tout $j \in [0, N-1]$. Sur la figure I.15, le repère tournant \mathcal{R}_{m_0} coïncide avec le repère \mathcal{R}_m .

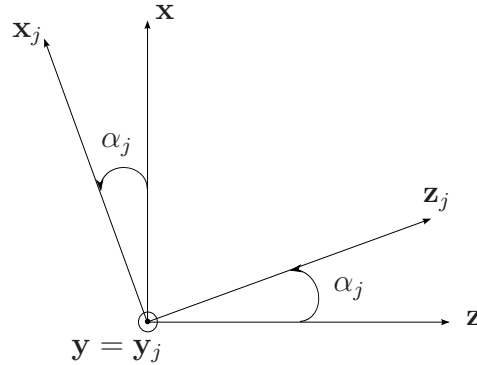


FIGURE I.15 – Définition des repères locaux tournants \mathcal{R}_{m_j}

Ainsi, on définit la matrice de rotation orthogonale :

$$\mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_j) & 0 & -\sin(\alpha_j) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha_j) & 0 & \cos(\alpha_j) \end{pmatrix} \quad (\text{I.42})$$

Considérons un champ \mathbf{u} , pouvant représenter le champ de déplacement de la structure dans le repère tournant $\mathcal{R}_m = \mathcal{R}_{m_0}$, alors \mathbf{u}_j le déplacement d'un secteur j est défini par :

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}_j \mathbf{u}_j \quad (\text{I.43})$$

où \mathbf{u}_j est la restriction du champ \mathbf{u} au secteur j exprimé dans son repère local tournant \mathcal{R}_{m_j} .

En utilisant la théorie des représentations linéaires des groupes cycliques d'ordre N introduite par Valid et Ohayon [Wildheim et Ohayon, 1985], le champ \mathbf{u}_j associé au secteur j peut être représenté par une superposition de fonctions harmoniques :

$$\mathbf{u}_j = \sum_{k=0}^{N-1} e^{ij k \alpha} \tilde{\mathbf{u}}_0^k \quad (\text{I.44})$$

où $\tilde{\mathbf{u}}_0^k$ sont les composantes complexes harmoniques d'ordre k , aussi appelée *composantes cycliques*, définies sur le secteur de référence d'indice 0, que l'on peut séparer en parties réelles et imaginaires :

$$\tilde{\mathbf{u}}_0^k = \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\cos} + i \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\sin} \quad (\text{I.45})$$

Pour l'harmonique d'ordre k , le déphasage inter-secteur est fixe et égal à $k\alpha$. L'équation (I.44) représente la transformée de Fourier discrète permettant le passage entre la base physique et la base cyclique. De manière équivalente, les composantes cycliques du secteur de référence $\tilde{\mathbf{u}}_0^k$ sont définies en fonction du déplacement physique \mathbf{u}_j , de chaque secteur j exprimé dans leur repère local tournant, par la transformée de Fourier inverse :

$$\tilde{\mathbf{u}}_0^k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ijk\alpha} \mathbf{u}_j \quad (\text{I.46})$$

Précisons que cette transformation de Fourier peut être appliquée à tous les champs définis sur la structure à répétitivité cyclique, à savoir le déplacement, la pression, le chargement, les contraintes ou encore les déformations. Le champ \mathbf{u} peut être défini en base physique de la façon suivante :

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_0 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_j \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{N-1}]^T \quad (\text{I.47})$$

De manière équivalente, le champ $\tilde{\mathbf{u}}$ contenant les composantes complexes harmoniques peut être défini en fonction des composantes réelles introduites dans la relation (I.45) par :

$$\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{\mathbf{u}}_0^0 \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\cos} \quad \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\sin} \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{u}}_0^{N/2}]^T \quad (\text{I.48})$$

Le passage de l'une à l'autre de ces représentations se fait à l'aide d'une matrice de transformée de Fourier discrète qui peut s'écrire sous forme complexe ou réelle [Petrov et Ewins, 2002]. Dans ce mémoire, la formulation réelle sera adoptée. Ainsi, la transformée de Fourier discrète réelle s'écrit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{I.49})$$

avec :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & \cos(2\alpha) & \cdots & \sin(K\alpha) & -1 \\ 1 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & \cos(4\alpha) & \cdots & \sin(2K\alpha) & 1 \\ \vdots & & & \cdots & & & \vdots \\ 1 & \cos((N-1)\alpha) & \sin((N-1)\alpha) & \cos((N-1)2\alpha) & \cdots & \sin((N-1)K\alpha) & -1 \end{pmatrix}$$

Puisque les composantes sont considérées réelles, les composantes cycliques sont représentées à l'aide des séries trigonométriques réelles, le déplacement physique de chaque secteur j s'écrit alors :

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\mathbf{u}}_0^0 + \sum_{k=1}^K \left(\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\cos} \cos(jk\alpha) + \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\sin} \sin(jk\alpha) \right) + (-1)^j \tilde{\mathbf{u}}_0^{N/2} \quad (\text{I.50})$$

pour tout $j = 0, \dots, N-1$. Notons que le dernier terme de cette équation (I.50) n'existe que si le nombre de secteurs N est pair. L'indice harmonique prend successivement les valeurs $k = 0, \dots, K$ avec :

$$K = \begin{cases} \frac{N}{2} - 1 & \text{si } N \text{ est pair;} \\ \frac{(N-1)}{2} & \text{si } N \text{ est impair.} \end{cases} \quad (\text{I.51})$$

De la même manière, les composantes cycliques peuvent être retrouvées à l'aide de la matrice de transformée de Fourier inverse réelle définie par :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (\text{I.52})$$

où chaque composante harmonique $\tilde{\mathbf{u}}_0^k$ peut être traitée indépendamment, à savoir :

$$\tilde{\mathbf{u}}_0^0 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j ; \quad (\text{I.53})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,cos} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \cos(jk\alpha) \mathbf{u}_j ; \quad (\text{I.54})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,sin} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(jk\alpha) \mathbf{u}_j ; \quad (\text{I.55})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_0^{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \mathbf{u}_j. \quad (\text{I.56})$$

À nouveau, il est important de remarquer que le terme de l'équation (I.56) n'existe que si N est pair.

Finalement, ces définitions montrent que toute grandeur physique (*cf.* Eq I.47) associée à une structure à symétrie cyclique peut être représentée de façon équivalente par des composantes cycliques définies sur le secteur de référence et par un indice harmonique k (*cf.* Eq I.48). Lorsque le système est défini en base physique, les inconnues sont exprimées sur tous les secteurs j qui sont reliés par des conditions aux limites de propagation définies en section 4.1.3, ce qui revient à résoudre un problème sur toute la structure de taille N . En revanche, lorsque ce même système est défini en base cyclique, les inconnues sont exprimées sur un secteur de référence pour chaque harmonique k , ce qui revient à résoudre indépendamment N sous-problèmes sur un seul secteur, réduisant ainsi considérablement la taille des problèmes à résoudre.

4.1.2 Formulation d'un problème en base cyclique

La définition des variables continues en base cyclique vient d'être introduite. Nous allons voir maintenant que la résolution du système dans cette base cyclique revient à traiter un ensemble de sous-problèmes définis en composantes cycliques sur un secteur de référence pour chaque harmonique k .

Considérons que la structure est modélisée par une méthode des éléments finis, ainsi le champ \mathbf{u} pouvant représenter le déplacement est discrétisé aboutissant à un vecteur physique de degrés de libertés \mathbf{q} sur la structure complète. La discrétisation de ce champ est supposée la même pour chaque secteur de la structure, ainsi le passage entre la base physique et la base cyclique s'effectue en appliquant la matrice de transformée de Fourier réelle :

$$\mathbf{q} = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathbf{q}} \quad (\text{I.57})$$

où $\tilde{\mathbf{q}}$ est le vecteur des degrés de liberté cycliques, \mathbf{I}_n la matrice identité de taille n , où n représente le nombre de degrés de liberté. Le symbole \otimes représente le produit de Kronecker entre deux matrices.

De la même façon, dans un cadre général on définit la matrice \mathbf{A} de la structure répétitive pouvant représenter la matrice de masse ou encore la matrice de raideur. L'expression de cette matrice dans la base physique résulte de l'assemblage des matrices de chaque secteur $j = 1, \dots, N - 1$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{A}_j & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \mathbf{A}_{N-1} \end{pmatrix} \quad (\text{I.58})$$

À ce stade des développements, les secteurs sont dits « disjoints », ils sont indépendants de leurs secteurs adjacents. Si on suppose que tous les secteurs ont les mêmes propriétés mécaniques, alors la matrice \mathbf{A} dérive de la matrice \mathbf{A}_0 associée au secteur de référence. La matrice est composée de N blocs identiques $\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_0$ pour tout $j = 1, \dots, N - 1$, elle peut s'écrire :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}_0) \quad (\text{I.59})$$

La transformation de Fourier peut alors être appliquée à cette matrice afin d'obtenir son expression en base cyclique :

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}_0) (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n) \quad (\text{I.60})$$

Ainsi, compte tenu des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques, l'expression de la matrice en base cyclique est diagonale par bloc et vaut :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{\mathbf{A}}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \tilde{\mathbf{A}}^{N/2} \end{pmatrix} \quad (\text{I.61})$$

Les sous-blocs de cette matrice en base cyclique dépendent des propriétés du secteur de référence \mathbf{A}_0 et de l'indice harmonique k et s'expriment :

$$\tilde{\mathbf{A}}^0 = \tilde{\mathbf{A}}^{N/2} = N\mathbf{A}_0; \quad (\text{I.62})$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^k = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_0 \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } k = 1, \dots, K. \quad (\text{I.63})$$

Ainsi, sous forme discrétisée, l'expression des matrices et des vecteurs de degrés de liberté en base cyclique forment un ensemble de sous-problèmes indépendants

pour chaque harmonique. Pour les harmoniques 0 et $\frac{N}{2}$ la taille du problème à résoudre est n alors que pour les autres, la taille du système matriciel est de $2n$ correspondant aux parties réelles et imaginaires de chaque harmonique $k = 1, \dots, K$.

Jusqu'à présent, les secteurs de la structure à symétrie cyclique étaient considérés disjoints. Étant donné que la structure se referme sur elle-même, il convient de définir pour le secteur de référence les conditions aux limites avec ses secteurs adjacents afin de compléter la formulation de ces sous-problèmes indépendants.

4.1.3 Conditions aux limites cycliques

La définition des conditions aux limites cycliques se fait sur les frontières inter-secteurs. La figure I.16 montre que pour le secteur de référence indicé 0, le vecteur

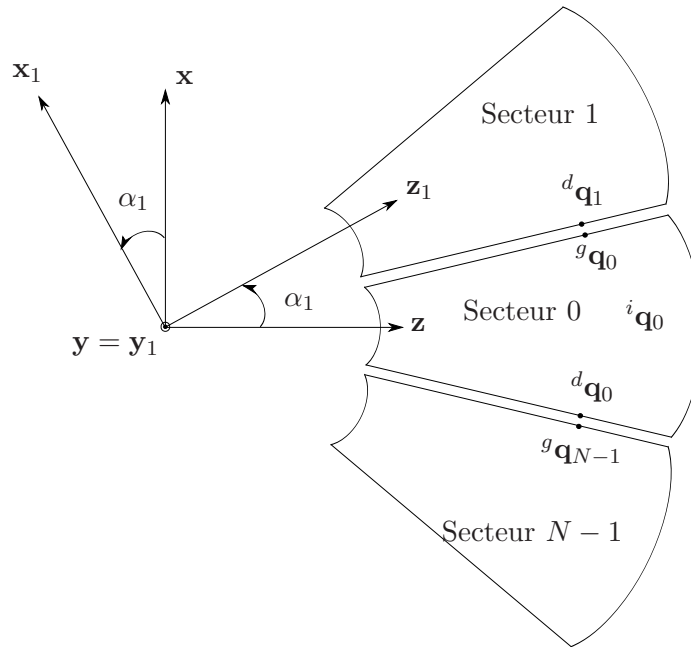


FIGURE I.16 – Définition des frontières inter-secteur sur un secteur de référence d'une structure à symétrie cyclique

des degrés de liberté peut être partitionné en degrés de liberté appartenant à la frontière de droite d , à la frontière de gauche g et en degrés de liberté internes i :

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} g \mathbf{q}_0 & d \mathbf{q}_0 & i \mathbf{q}_0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{I.64})$$

Les conditions aux limites cycliques de ce secteur de référence consistent alors à écrire les conditions de continuité à l'interface inter-secteur avec ses deux secteurs adjacents indicés 1 et $N - 1$:

$$g \mathbf{q}_0 = d \mathbf{q}_1 \quad (\text{I.65})$$

$$d \mathbf{q}_0 = g \mathbf{q}_{N-1} \quad (\text{I.66})$$

En substituant la relation (I.44) dans les équations (I.65) et (I.66) décrites ci-dessus, les conditions de continuité à l'interface peuvent s'exprimer en base cyclique pour chaque harmonique k :

$$g \tilde{\mathbf{q}}_0^k = d \tilde{\mathbf{q}}_0^k e^{ik\alpha} \quad (\text{I.67})$$

$$d \tilde{\mathbf{q}}_0^k = g \tilde{\mathbf{q}}_0^k e^{i(N-1)k\alpha} \quad (\text{I.68})$$

Les relations de propagation définies en base cyclique permettent de relier les degrés de libertés de la frontière droite à ceux de la frontière gauche. Ces deux relations (I.67) et (I.68) sont complètement équivalentes, donc seule une des équations suffit à connecter les secteurs entre eux. On choisit d'éliminer les degrés de liberté appartenant à la frontière de gauche et comme c'est un formalisme réel qui a été adopté auparavant, l'équation de propagation (I.67) peut également s'écrire en fonction des composantes réelles menant aux relations suivantes :

– Pour $k = 0$:

$$g \tilde{\mathbf{q}}_0^0 = d \tilde{\mathbf{q}}_0^0 ; \quad (\text{I.69})$$

– Pour $k = 1, \dots, K$:

$$\begin{pmatrix} g \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,\cos} \\ g \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,\sin} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & \sin(k\alpha) \\ -\sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,\cos} \\ d \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,\sin} \end{pmatrix} ; \quad (\text{I.70})$$

– Pour $k = \frac{N}{2}$:

$$g \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2} = -d \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2}. \quad (\text{I.71})$$

Finalement, les sous-problèmes définis précédemment complétés de ces conditions aux limites cycliques fournissent les équations du système complet en base cyclique. Nous allons maintenant nous intéresser aux méthodes de résolution associées aux problèmes structuraux définis en composantes cycliques.

4.2 Résolution des problèmes en symétrie cyclique

Considérons dans la suite la formulation du problème dynamique associé à la structure cyclique présentée en figure I.14. Le système matriciel associé à cette structure, qui sera considérée non-amortie, s'écrit en base physique :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_e \quad (\text{I.72})$$

où \mathbf{q} représente le vecteur de déplacement discrétisé, \mathbf{M} et \mathbf{K} sont les matrices de masse et de raideur de la structure complète. Le vecteur \mathbf{F}_e représente ici un terme d'excitation extérieure.

En supposant que tous les secteurs de cette structure ont les mêmes propriétés mécaniques et que le terme d'excitation est le même pour chacun des secteurs, le système (I.72) peut être reformulé en base cyclique en utilisant la matrice de transformée de Fourier discrète réelle définie précédemment. Ainsi, on obtient un

ensemble de sous-systèmes matriciels indépendants définis sur le secteur de référence pour chaque harmonique k et qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{M}}^k \ddot{\tilde{\mathbf{q}}_0^k} + \tilde{\mathbf{K}}^k \tilde{\mathbf{q}}_0^k = \tilde{\mathbf{F}}_{e_0}^k \quad (\text{I.73})$$

Chacun de ces sous-systèmes est augmenté d'une équation de contrainte correspondant aux conditions de continuité inter-secteur définies par les relations (I.69), (I.70) et (I.71). Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'analyse modale de ce système en considérant le terme des efforts extérieurs nul, puis l'étude de la réponse forcée sera présentée succinctement.

4.2.1 Analyse modale

L'analyse modale de la structure à symétrie cyclique est réalisée en résolvant les k sous-problèmes aux valeurs propres $(\lambda, \tilde{\mathbf{Q}}_0^k)$ suivants définis sur le secteur de référence :

$$\left(\tilde{\mathbf{K}}^k - \lambda^2 \tilde{\mathbf{M}}^k \right) \tilde{\mathbf{Q}}_0^k = \mathbf{0} \quad (\text{I.74})$$

Pour les harmoniques $k = 0$ et $k = \frac{N}{2}$, les matrices du système sont réelles, de dimension n , pouvant être résolu directement et menant à une solution dite *non-dégénérée*. Pour les autres harmoniques $k = 1, \dots, K$, les matrices de ces sous-systèmes sont complexes de dimension n . D'un point de vue numérique, un formalisme réel est souvent préféré, ainsi comme nous l'avons précédemment, ces problèmes sont dédoublés en découplant l'inconnue complexe en partie réelle et partie imaginaire. Les $2n$ solutions de ces sous-systèmes sont dites *dégénérées*, avec les mêmes valeurs de fréquences propres auxquelles sont associés deux vecteurs propres orthogonaux.

Les déformées propres de la structure complète sont retrouvées en appliquant la relation (I.50) sur les vecteurs propres $\tilde{\mathbf{Q}}_0^k$, pour tous les secteurs $j = 0, \dots, N-1$. En pratique, comme les problèmes associés à chaque harmonique k sont indépendants, il est possible de résoudre le problème aux valeurs propres pour quelques valeurs particulières de k seulement. Ensuite, les déformées propres de la structure complète sont reconstruites séparément pour chaque coefficient harmonique, à savoir :

$$\mathbf{Q} = \left(\mathbf{F}^0 \otimes \mathbf{I}_n \right) \tilde{\mathbf{Q}}_0^0 \quad \text{si } k = 0; \quad (\text{I.75})$$

$$\mathbf{Q} = \left(\mathbf{F}^k \otimes \mathbf{I}_n \right) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_0^{k,\cos} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_0^{k,\sin} \end{pmatrix} \quad \text{si } k = 1, \dots, K; \quad (\text{I.76})$$

$$\mathbf{Q} = \left(\mathbf{F}^{N/2} \otimes \mathbf{I}_n \right) \tilde{\mathbf{Q}}_0^{N/2} \quad \text{si } k = \frac{N}{2}. \quad (\text{I.77})$$

$$\text{avec : } \mathbf{F}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{F}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos(jk\alpha) & \sin(jk\alpha) \\ \vdots & \vdots \\ \cos((N-1)k\alpha) & \sin((N-1)k\alpha) \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{F}^{N/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De manière générale, l'harmonique spatiale k est aussi appelée *nombre d'onde* ou encore *nombre de diamètres*.

Pour la structure considérée représentée en figure I.14 comportant $N = 60$ secteurs, la résolution des problèmes aux valeurs propres a été réalisée, dans un premier temps, pour les nombres d'onde $k = 0$ et $k = \frac{N}{2}$. Les déformées propres de cette roue aubagée complète ont été reconstruites à l'aide des relations (I.75) et (I.77). Elles sont présentées en figure I.17 et sont associées à des modes propres non-dégénérés.

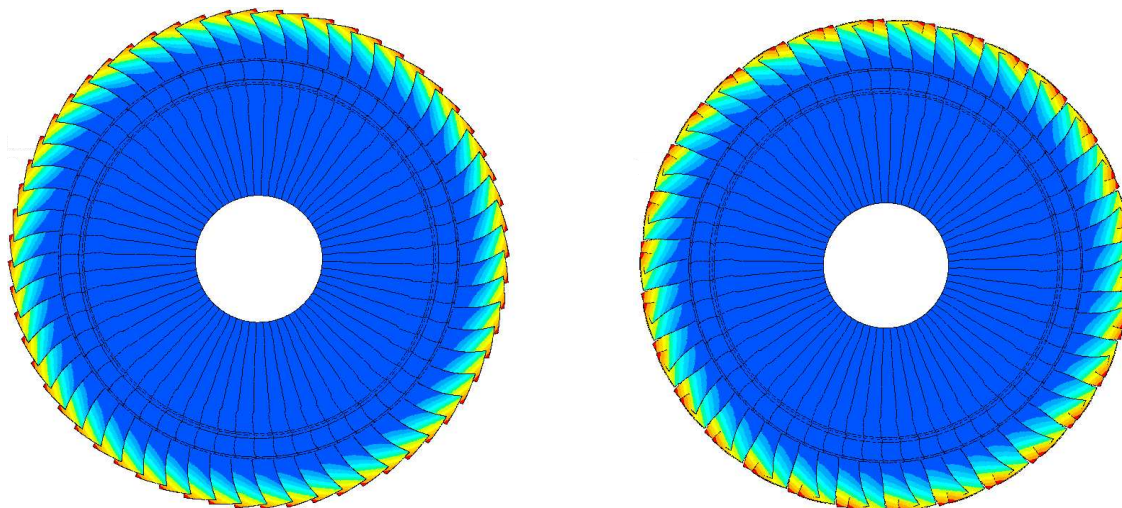


FIGURE I.17 – Exemples de déformées propres de modes non-dégénérés, pour $k = 0$ à gauche et $k = \frac{N}{2}$ à droite

Pour l'harmonique $k = 0$, toutes les aubes de la structure vibrent en phase, le mode illustré à gauche sur la figure I.17 est appelé mode à 0 diamètre. En ce qui concerne la déformée du mode représentée à droite, correspondant à l'onde $k = \frac{N}{2}$, les aubes vibrent toutes en opposition de phase, c'est un mode à 30 diamètres. D'après la théorie, c'est le plus haut diamètre de vibration de la structure. Par définition, les diamètres désignent les lignes nodales où la vibration est nulle.

Un exemple de déformées propres de modes dégénérés est présenté en figure I.18 pour l'onde $k = 1$. Ces deux déformées modales correspondent aux solutions des sous-systèmes découplés en partie réelle et partie imaginaire. Sur ces modes de vibration à 1 diamètre nodal, les positions des diamètres sont clairement identifiables, ce qui nous permet de vérifier que ces deux modes propres sont bien orthogonaux.

La situation modale de ces structures à symétrie cyclique est généralement représentée sur un digramme où les fréquences propres de la roue aubagée sont classées par nombre de diamètres nodaux. Ce diagramme *Fréquences / Nombre de diamètres* correspondant à la structure étudiée est donné en figure I.19.

Ce graphe permet de caractériser les déformées modales qui sont associées aux fréquences propres et ainsi de mettre en évidence deux grandes familles de modes. Tout d'abord, pour de faibles nombres de diamètres, les familles de modes dont les

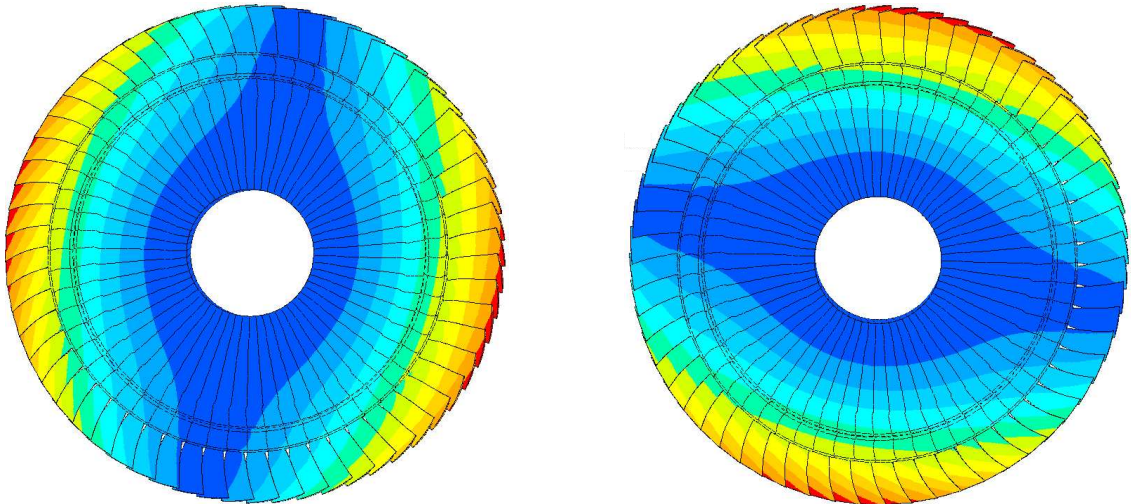


FIGURE I.18 – Exemples de déformées propres de modes dégénérés, deux modes orthogonaux pour $k = 1$

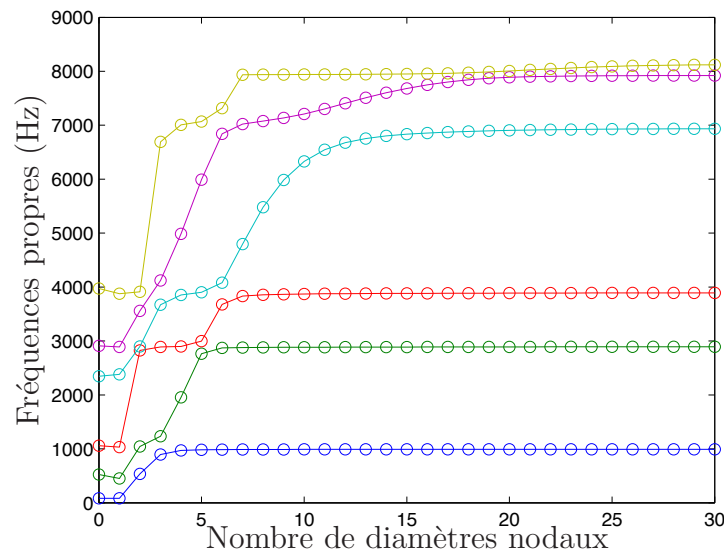


FIGURE I.19 – Évolution des fréquences propres de la roue aubagée en fonction du nombre de diamètres nodaux

fréquences propres augmentent en fonction du nombre de diamètres correspondent à des modes d'ensemble où l'influence de la souplesse du disque se manifeste clairement. En revanche, pour les grands nombres de diamètres, les familles de modes correspondent à des modes de vibration dont le mouvement est régi par les aubes. Les fréquences propres se stabilisent à des valeurs proches de celles de l'aube seule fixée à son pied.

Par ailleurs, le diagramme de Campbell, déjà introduit pour l'analyse phénoménologique des rotors, permet de réaliser l'analyse modale des roues aubagée en rotation. Rappelons que le diagramme de Campbell est utilisé pour évaluer les risques de ré-

sonances de la structure tournante. Ce diagramme consiste à tracer les fréquences propres de roue aubagée, calculées lors de l'analyse modale, en fonction de sa vitesse de rotation. Le dimensionnement vibratoire de ce type de structures tournantes se fait principalement pour éviter les phénomènes synchrones. Ces phénomènes synchrones se produisent lorsqu'il y a coïncidence entre les fréquences propres de la roue aubagée et les harmoniques principales du régime moteur. Ces harmoniques de rotation sont représentées dans un diagramme de Campbell par des droites d'équation $f = p\Omega$. Le diagramme de Campbell de la roue aubagée considérée dans cette partie, pour le cas spécifique de l'onde 4, est présenté sur la figure I.20.

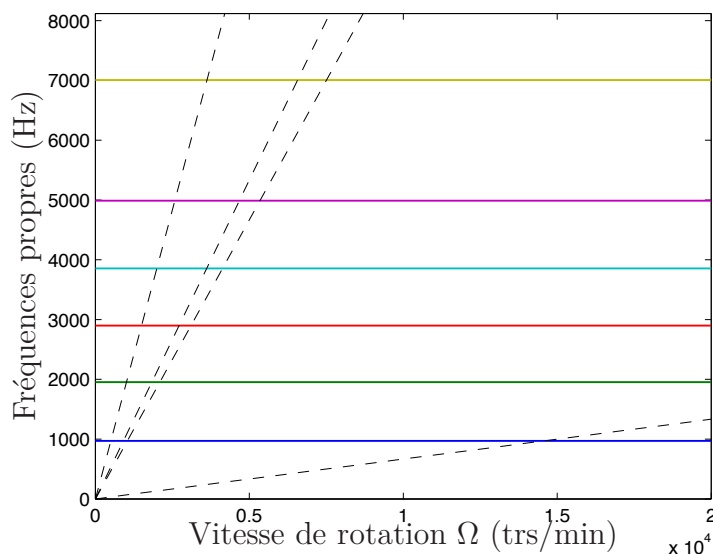


FIGURE I.20 – Diagramme de Campbell de la roue aubagée pour le diamètre $k = 4$

Les fréquences propres de roue aubagée sont représentées en trait plein sur la figure I.20. Les droites pointillées représentent les fréquences principales d'excitation de la roue aubagée qui sont des multiples de la fréquence de rotation. Couramment, la vitesse de rotation de la roue aubagée est notée N et les droites d'excitation sont communément appelées ordre d'excitation moteur pN . Précisons que les forces synchrones de balourd, qui nous intéresseront particulièrement dans la suite, correspondent à la première harmonique d'excitation, à savoir la droite d'équation $f = \Omega$ ou encore $f = N$.

La représentation de ce diagramme de Campbell permet de prédire les phénomènes de résonances de la structure suivant les excitations synchrones du moteur, nous allons voir maintenant comment traiter le problème de la réponse forcée de cette structure à symétrie cyclique.

4.2.2 Réponse forcée

De la même manière que pour le calcul des modes propres, la réponse forcée d'une structure à symétrie cyclique peut être calculée en base cyclique sur un seul secteur

à l'aide d'un formalisme réel, faisant intervenir des matrices de taille double quand les modes dégénérés sont excités. La structure est supposée linéaire, ce qui permet d'utiliser le principe de superposition de toutes les harmoniques pour retrouver la solution en base physique sur la roue aubagée complète.

Les forces extérieures appliquées sur la roue aubagée peuvent donc être décomposées à l'aide d'une transformée de Fourier spatiale inverse selon le nombre de diamètres excités. Cette transformation permet de passer de grandeurs physiques \mathbf{F}_{e_j} définies dans les repères locaux tournants de chaque secteur j à des grandeurs cycliques $\tilde{\mathbf{F}}_{e_0}^k$ définis par les relations suivantes :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{e_0}^0 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{F}_{e_j} ; \quad (\text{I.78})$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{e_0}^{k,cos} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \cos(jk\alpha) \mathbf{F}_{e_j} ; \quad (\text{I.79})$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{e_0}^{k,sin} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(jk\alpha) \mathbf{F}_{e_j} ; \quad (\text{I.80})$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{e_0}^{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \mathbf{F}_{e_j}. \quad (\text{I.81})$$

Après la décomposition des effort extérieurs sur la base cyclique, le problème de réponse forcée revient à résoudre sur le secteur de référence les équations linéaires correspondant à chaque nombre de diamètre k excité, complétées des relations de propagation :

– $k = 0$:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}}^0 \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_0^0 + \tilde{\mathbf{K}}^0 \tilde{\mathbf{q}}_0^0 = \tilde{\mathbf{F}}_{e_0}^0 \\ g \tilde{\mathbf{q}}_0^0 = d \tilde{\mathbf{q}}_0^0 \end{cases} \quad (\text{I.82})$$

– $k = 1, \dots, K$:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}}^k \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_0^{k,cos} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_0^{k,sin} \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{K}}^k \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,cos} \\ \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,sin} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{e_0}^{k,cos} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{e_0}^{k,sin} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} g \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,cos} \\ g \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,sin} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & \sin(k\alpha) \\ -\sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,cos} \\ d \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,sin} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.83})$$

– $k = \frac{N}{2}$:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}}^{N/2} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_0^{N/2} + \tilde{\mathbf{K}}^{N/2} \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2} = \tilde{\mathbf{F}}_{e_0}^{N/2} \\ g \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2} = -d \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2} \end{cases} \quad (\text{I.84})$$

La dernière étape de la résolution consiste à reconstituer les déplacements physiques sur chaque secteur par superposition des résultats obtenus pour chaque harmonique spatiale :

$$\mathbf{q}_j = \tilde{\mathbf{q}}_0^0 + \sum_{k=1}^K \left(\cos(kj\alpha) \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,cos} + \sin(kj\alpha) \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,sin} \right) + (-1)^j \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2} \quad (\text{I.85})$$

pour tout $j = 1, \dots, N - 1$, sachant que le dernier terme n'existe que si le nombre de secteurs de la roue aubagée N est pair.

5 Conclusion

Ce premier chapitre décrit le principe de fonctionnement des turboréacteurs double corps, double flux, qui sont les machines tournantes auxquelles nous nous intéresserons par la suite. Les différents organes constituant ces turbomachines ont été présentés afin de mieux comprendre leur interaction mutuelle ainsi que les sources d'excitation vibratoire présentes dans ces structures complexes. Ensuite, une modélisation générale de la dynamique des structures tournantes a été introduite aboutissant à l'établissement de l'équation matricielle régissant le comportement dynamique du système discrétisé en rotation. Dans un cadre d'étude des turboréacteurs, nous pouvons distinguer deux grandes approches. La première consiste à modéliser, de manière simplifiée, l'intégralité de la machine au travers d'éléments de type poutres - masses - ressorts permettant l'étude de la dynamique d'ensemble aussi appelée dynamique des rotors. La phénoménologie des rotors a donc été abordée et illustrée sur des exemples simples afin d'appréhender les notions telles que le diagramme de Campbell, les vitesses critiques et la réponse à balourd. Dans ce type d'approche, les roues aubagées sont uniquement modélisées par des masses concentrées et des inerties en rotation, ce qui est insuffisant lors d'un dimensionnement aérodynamique par exemple. C'est pourquoi, une modélisation fine des roues aubagées et des méthodes spécifiques de résolution ont été introduites avec notamment la présentation du concept de symétrie cyclique.

Les aspects théoriques qui viennent d'être présentés ont permis de définir les différentes modélisations et notions propres aux turbomachines dans un cadre linéaire. Le chapitre suivant s'intéresse aux non-linéarités inhérentes aux turboréacteurs et introduit diverses méthodes de résolution adaptées aux systèmes dynamiques présentant des non-linéarités.

Chapitre II

Aspects non-linéaires et techniques de résolution

Dans ce second chapitre, nous verrons tout d'abord que les turbomachines sont des structures tournantes complexes qui sont souvent constituées d'éléments ou de liaisons de nature non-linéaire. Ensuite, des outils nécessaires à la résolution de systèmes dynamiques non-linéaires seront introduits en mettant l'accent sur les techniques de résolution dans le domaine fréquentiel avec l'évaluation des efforts non-linéaires dans le domaine temporel. Afin d'effectuer des calculs paramétriques, diverses techniques de continuation seront également présentées, permettant ainsi de suivre l'évolution du système dynamique en fonction d'un paramètre de contrôle choisi. Comme les méthodes fréquentielles couplées aux techniques de continuation ne permettent pas de statuer sur la stabilité de la solution, quelques outils d'analyse de stabilité des solutions non-linéaires seront détaillés dans une dernière partie.

Sommaire

1	Non-linéarités dans les turboréacteurs	40
1.1	Origine des non-linéarités	40
1.2	Modèles associés aux non-linéarités de type contact	42
2	Estimation du comportement non-linéaire	45
2.1	Méthodes de résolution dans le domaine temporel	46
2.2	Méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel	49
2.3	Évaluation des efforts non-linéaires	52
3	Techniques de continuation	55
3.1	La paramétrisation	56
3.2	Les principaux prédicteurs	57
3.3	Les principaux correcteurs	59
4	Analyse de stabilité des solutions non-linéaires	64
4.1	Notions de stabilité	65
4.2	Outils d'analyse de stabilité	66
5	Conclusion	70

1 Non-linéarités dans les turboréacteurs

Dans le domaine de la dynamique, les systèmes mécaniques possédant des parties tournantes comme les turboréacteurs sont souvent des structures complexes d'un point de vue technologique. Couramment, les outils de conception et d'analyse de ces machines sont basés sur le comportement linéaire du système. Néanmoins, les éléments et les liaisons entre les différents organes de ces structures sont en général de nature non-linéaire.

1.1 Origine des non-linéarités

Les non-linéarités sont souvent d'origines diverses, à savoir des non-linéarités géométriques, des non-linéarités matériaux ou encore des non-linéarités résultant du contact entre les différentes pièces de la turbomachine.

1.1.1 Non-linéarités matériaux

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les principaux matériaux qui constituent les turboréacteurs sont les alliages de titane ou les superalliages de nickel. Ces matériaux peuvent avoir un comportement non-linéaire si la plasticité est prise en compte dans les modèles. D'autre part, les recherches récentes dans le domaine des matériaux ont permis l'introduction de composites à matrice organique, notamment au niveau des aubes de soufflante. Ces matériaux composites sont constitués d'un tissage 3D de fibres de carbone qui sont noyées dans une matrice organique. Les propriétés de ces matériaux sont alors différentes suivant les trois directions de l'espace et le motif de tissage peut également être différent suivant les régions de l'aube. Ces matériaux composites présentent un saut technologique considérable, notamment par leur comportement au délaminage et à l'impact ainsi que leur faible masse. Néanmoins, ils sont difficiles à caractériser, avec des lois de comportement pouvant être non-linéaires.

1.1.2 Non-linéarités géométriques

Les structures dont la rigidité dépend du déplacement qu'elles subissent sont appelées géométriquement non-linéaires. Par exemple, les phénomènes de flambage font intervenir des non-linéarités géométriques. En ce qui concerne les moteurs d'avion, la non-linéarité géométrique la plus courante est celle due aux forces centrifuges. En effet, lorsque le moteur est en rotation, les aubages subissent des efforts centrifuges qui ont tendance à augmenter leur rigidité. Dans le cas des aubes de soufflante, qui sont les aubes de plus grandes dimensions, ces forces peuvent conduire à des grands déplacements qu'il est indispensable de prendre en compte afin de prédire le comportement réel de la structure.

1.1.3 Non-linéarités de type contact

Pour le bon fonctionnement du moteur, des jeux sont nécessaires entre parties fixes et parties tournantes. Au stade de la conception, l'objectif est de réduire au maximum ces jeux pour atteindre de meilleures performances en augmentant le rendement. La présence de ces jeux se situe en divers endroits du moteur et, lorsqu'ils sont consommés, peuvent conduire à des situations de contact.

Contact rotor/stator. Nous avons vu précédemment que le contact entre le rotor et le stator était une source d'excitation mécanique dans les moteurs. La réduction des jeux entre parties fixes et tournantes augmente la probabilité que le rotor rentre en contact avec un élément du stator. Les recherches dans ce domaine se sont multipliées et ont permis de mettre en évidence une très grande diversité de comportements vibratoires après une prise de contact [Ehrich, 1999]. En régime permanent, ce contact continu engendre une rigidification locale responsable d'un décalage du pic de résonance vers une fréquence plus grande. Afin de limiter ces phénomènes, dans certaines parties du moteur la circonférence de la veine est réalisée en matériaux tendres, appelés abrasables, de manière à réduire l'impact dynamique de ce type de fonctionnement, de favoriser le rodage mutuel des pièces et ainsi de minimiser les jeux.

Contact en pied d'aube. Les roues aubagées se présentent souvent comme un assemblage d'aubes montées sur un disque. La région de l'attache aube-disque est une zone sensible de fortes contraintes où il y a présence d'un contact. Le contact est assuré par la force centrifuge qui vient coincer le pied de l'aube dans l'alvéole du disque. Il y a deux surfaces en contact qui sont appelées les portées de l'aube. Les excitations auxquelles les aubes sont soumises sont la cause d'efforts de contact tangentiels et normaux oscillants au niveau des portées, conduisant à des glissements alternés de faibles amplitudes des interfaces de contact. Ce fretting cause l'usure des surfaces en contact [Salles *et al.*, 2011] et peut éventuellement produire l'initiation de fissures [Fridrici, 2002, Murthy *et al.*, 2004]. La prévention de ces risques est réalisée par des traitements de surface comme le grenailage et le dépôt de revêtements protecteurs.

Contact entre les aubes. La maîtrise des niveaux vibratoires constitue une problématique de premier ordre pour les motoristes aéronautiques. La stratégie la plus immédiate pour maîtriser les niveaux vibratoires d'une structure consiste à lui apporter de l'amortissement. Les dispositifs passifs d'amortissement sont les plus couramment employés de part leur plus grande simplicité de mise en œuvre. Concernant les roues aubagées, de nombreuses solutions technologiques existent et nous allons voir celles qui sont classiquement utilisées par les motoristes. Des dispositifs non-linéaires sont employés depuis longtemps en particulier les systèmes d'amortissement par contact et frottement [Chen et Menq, 2001, Petrov et Ewins, 2002]. Prenons d'abord l'exemple des aubes de soufflante qui sont conçues avec des nageoires, à

savoir un ajout de matière au milieu de l'aube qui réalise une connexion entre toutes les aubes de la roue par contact. Le rôle de ces nageoires dans la réponse vibratoire de la roue aubagée est de procurer un amortissement mécanique par contact. Une autre solution technologique existe pour les aubes de turbine BP, à savoir la présence de talons. Dans ce cas, l'ajout de matière se situe en tête d'aube et la présence de ces talons diminue le nombre de modes propres excitables de l'aube par rapport à une configuration sans talons. La présence de ces talons sur les aubes de turbine peut néanmoins comporter certains risques vibratoires. En particulier, l'usure des zones de contact en tête d'aube a pour conséquence de réduire l'amortissement mécanique induit par le contact, conduisant à de grandes amplitudes de vibration.

Les roulements. Pour un grand nombre de machines tournantes, on utilise des paliers hydrodynamiques. Cependant, pour les moteurs aéronautiques, les paliers doivent être de faible encombrement et capables de supporter d'importantes charges non seulement radiales mais aussi axiales, et ce même à des vitesses de rotation quasi-nulles. Cela justifie donc l'utilisation de roulements. Ces éléments sont des pièces majeures puisqu'ils assurent les liaisons entre rotor et stator et les liaisons inter-rotor. Étant donné que les roulements sont soumis lors de leur fonctionnement à des gradients thermiques, un jeu interne est nécessaire pour éviter des compressions importantes des billes ou rouleaux et, par conséquent, une fatigue prématurée. Ils possèdent donc une non-linéarité inhérente. Lorsque ce jeu est consommé, il y a apparition de zones de contact ce qui enrichit le spectre de la réponse et modifie la forme des résonances. De plus, les roulements comportent un nombre fini de corps roulants, des billes ou des rouleaux, qui engendrent une variation périodique de la raideur de la liaison. Cette variation périodique de raideur entraîne une excitation paramétrique pouvant être source d'instabilité. Les vibrations de cette nature sont généralement complexes mais d'assez faibles amplitudes [Tiwari *et al.*, 2000a]. Ces vibrations ne détériorent pas l'ensemble de la machine mais peuvent provoquer l'endommagement des roulements eux-mêmes.

1.2 Modèles associés aux non-linéarités de type contact

Nous venons de citer les principales non-linéarités présentes dans les turboréacteurs. Celles qui vont nous intéresser dans la suite sont les non-linéarités de type contact et plus particulièrement, le contact dans les roulements et le contact au niveau des talons de turbine BP. Plusieurs modèles de contact existent dans la littérature afin de modéliser ces non-linéarités, nous allons d'abord détailler ceux correspondants aux roulements, puis ceux utilisés pour le contact entre les aubes.

1.2.1 Modèles de contact pour les roulements

Les principales non-linéarités provenant des roulements sont le jeu radial et le contact de Hertz. Les trois types de modèles de roulement les plus rencontrés dans

la littérature sont un modèle à jeu radial, un modèle à raideur radiale bilinéaire et un modèle incorporant la cinématique des corps roulants.

La présence d'un jeu radial dans un roulement peut être à l'origine d'une situation dynamique complexe sur les rotors. Childs [Childs, 1993] montre par exemple que la vitesse critique et les niveaux atteints diminuent quand la valeur du jeu radial augmente. Le jeu radial engendre une réduction de la raideur sur une fraction de période de rotation du rotor et cette condition est appelée *normal loose condition*. Ces phénomènes peuvent être illustrés sur un modèle simple de rotor de Jeffcott avec une raideur bilinéaire qui est fonction du déplacement du rotor, comme le montre la figure II.1. Ce modèle a permis de confirmer l'existence de réponses sous-

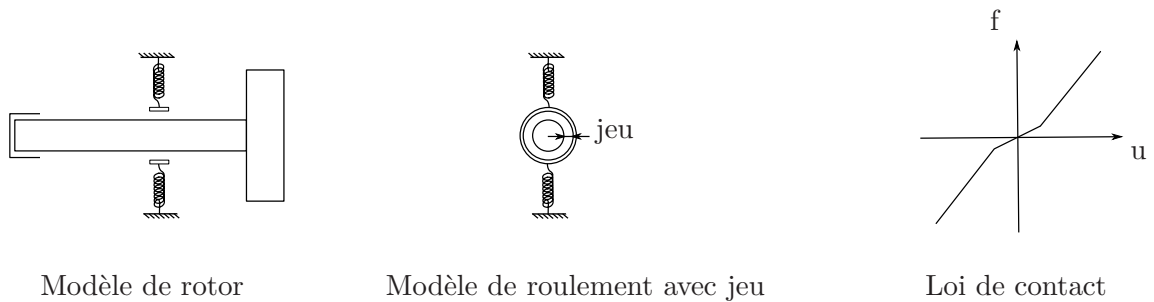


FIGURE II.1 – Modélisation d'un roulement avec jeu radial et de la loi de contact bilinéaire par morceaux

harmoniques via des méthodes de perturbation [Nayfeh et Balachandran, 1995] ainsi que des réponses sur-harmoniques et chaotiques via l'intégration temporelle [Ehrich, 1992].

D'autres auteurs sont arrivés à des conclusions identiques en considérant un modèle à raideur radiale bilinéaire, cette raideur étant nulle si le déplacement relatif entre le rotor et le palier est inférieur au jeu radial [Choi et Noah, 1987]. La raideur du palier n'est donc prise en compte que lorsque le jeu est consommé. Ce modèle offre l'avantage de gérer facilement les forces statiques et permet d'étudier l'influence des forces de balourd.

De plus, la nature hertzienne du contact constitue un autre type de non-linéarité présent dans les roulements. En gardant une modélisation radiale bilinéaire mais en prenant cette fois-ci une force de raideur en puissance $3/2$ pour un roulement à billes ou en puissance $10/9$ pour un roulement à rouleaux au lieu d'une force linéaire par morceaux, Saito [Saito, 1985] montre qu'il est possible d'obtenir des intervalles de vitesse de rotation pour lesquels deux solutions co-existent, conduisant ainsi à des sauts de réponse.

Enfin, hormis ces aspects de jeu radial et de contact de Hertz, la rotation d'ensemble des billes ou des rouleaux engendre une variation périodique de la raideur sous l'action d'une force statique. Ce modèle constitue une amélioration du précédent modèle dans le sens où la cinématique des éléments roulants est prise en compte. Un rotor, même parfaitement équilibré, est donc soumis à une force d'excitation

paramétrique [Tiwari *et al.*, 2000b]. En considérant cette excitation paramétrique, les auteurs ont montré que le système pouvait avoir des régimes chaotiques et des vibrations quasi-périodiques.

Mais en pratique, l'influence de la force de balourd est généralement telle que ces effets induits par l'excitation paramétrique sont négligeables. En particulier lorsque le nombre de billes ou de rouleaux est important, seule la fréquence synchrone du rotor est prise en considération dans la réponse. Ainsi, nous opterons dans la suite pour un modèle de roulement à raideur radiale bilinéaire prenant en compte le jeu radial.

1.2.2 Modèles de contact pour les roues aubagées à talons

La présence de talons sur les aubes de turbine BP notamment permet de limiter les amplitudes de vibration en rigidifiant les aubages et en dissipant de l'énergie. De la même façon que pour les modèles de contact dans les roulements, les modèles de contact associés aux aubes à talons ont fortement évolués ces dernières années, en partant de modèles à un degré de liberté prenant en compte un contact unilatéral jusqu'à des modélisations complètes 3D de la zone de contact en considérant le frottement. Les modèles associés à des non-linéarités de type contact au niveaux des talons se séparent en deux catégories, les non-linéarités de contact unilatéral et celles de frottement.

Le contact unilatéral est la relation qui existe sur la zone de contact entre les efforts normaux, équivalents aux pressions de contact, et le mouvement relatif de deux aubes adjacentes dans la direction normale au contact. Ces non-linéarités de type contact sont difficiles à traiter car elles mettent en jeu des changements brusques de comportement, notamment au passage contact/décollement. C'est pourquoi, plusieurs lois de contact existent dans la littérature et sont illustrées sur la figure II.2. La première loi à gauche est la représentation classique du contact unilatéral qui

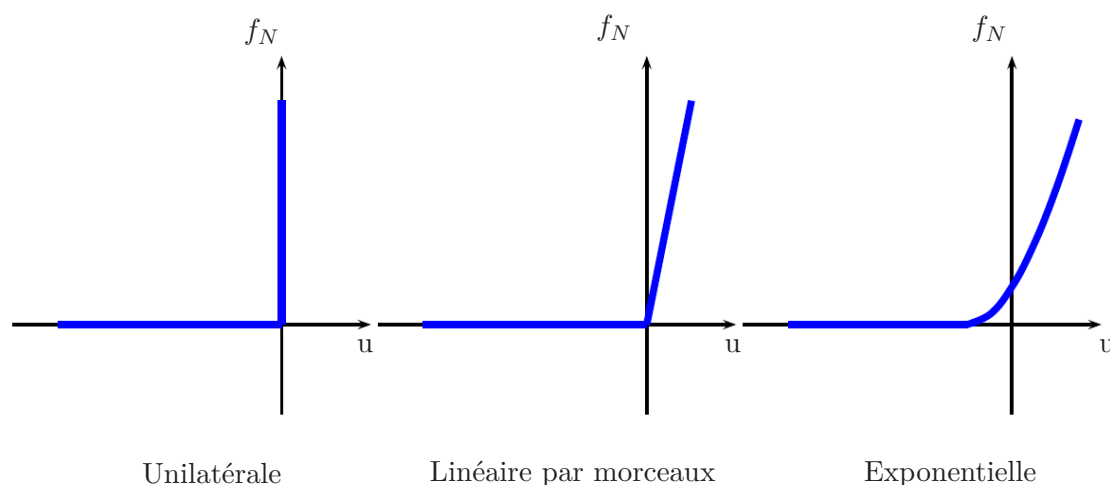


FIGURE II.2 – Modélisation de différentes lois de contact

assure la non-pénétration entre deux aubes adjacentes. Cette loi a l'inconvénient d'être fortement non-régulière et pose problème pour des applications numériques. La deuxième loi est linéaire par morceaux où la pente de la courbe représente la raideur de contact. Cette loi est la plus couramment utilisée [Petrov et Ewins, 2002] permettant le calcul direct de la force de contact en fonction du déplacement relatif. Enfin, la troisième loi exponentielle comporte plus de paramètres que les deux autres mais est encore plus régulière que la précédente.

Des modèles plus sophistiqués de contact ont été développés ensuite avec la prise en compte du frottement [Chen et Menq, 2001]. Dans ces références, les auteurs sont passés d'un modèle de contact 2D à un modèle complet de contact 3D permettant de représenter les différentes conditions de contact, à savoir l'état collé, l'état glissant ainsi que le décollement [Siewert *et al.*, 2010]. Les lois de frottements utilisées sont généralement des lois de Coulomb ainsi que leurs formes régularisées. Enfin, d'autres auteurs ont comparé l'efficacité de la présence des talons suivant leur géométrie [Szwedowicz *et al.*, 2008], permettant un meilleur amortissement mécanique. Une comparaison avec l'expérience est également réalisée montrant différents comportements non-linéaires suivant le régime de rotation.

Le modèle retenu pour la modélisation du contact inter-aubes au niveau des talons est le modèle de contact linéaire par morceaux sans frottement car il prend moins de paramètres en considération et peut être facilement validé sur de précédents travaux.

Afin d'analyser le comportement global de la turbomachine en considérant la complexité amenée par les éléments non-linéaires, il est nécessaire de développer des outils spécifiques de résolution permettant l'étude dynamique de la structure non-linéaire.

2 Estimation du comportement non-linéaire

Les turbomachines sont des systèmes tournants qui ont une dynamique très riche notamment à cause des phénomènes de contact entre les pièces. Le comportement dynamique de telles structures s'obtient en résolvant l'équation différentielle du second ordre en temps régissant son équilibre avec la prise en compte des effets non-linéaires qui ont été présentés dans la partie précédente :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{F}_b(t) \quad (\text{II.1})$$

où \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} sont les matrices de masse, d'amortissement et de raideur respectivement. $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}(t))$ correspond au vecteur des forces non-linéaires et \mathbf{F}_b correspond aux excitations extérieures de type balourd.

De nombreuses méthodes sont disponibles dans la littérature afin d'obtenir des régimes dynamiques de ces systèmes non-linéaires. En général, l'utilisation de ces méthodes dépend du type de solution étudiée, de la taille des modèles et de la

nature des phénomènes envisagés. Dans le cadre de la dynamique des rotors multi-corps et de la dynamique des roues aubagées mettant en jeu des éléments fortement non-linéaires, la méthode envisagée doit être capable de traiter le cas de régimes périodiques en présence de non-linéarités fortes et non-régulières.

Dans le cas des systèmes possédant des non-linéarités faibles, autrement dit dont la linéarisation au premier ordre est peu différente du système non-linéaire lui-même, des méthodes analytiques peuvent être utilisées afin d'obtenir une solution approchée de l'équation différentielle. Parmi ces méthodes analytiques, on peut citer les méthodes de perturbation notamment la méthode des échelles multiples développée par Nayfeh et Balachandran [Nayfeh et Balachandran, 1995]. Dans la littérature, on trouve des applications de ces méthodes à la dynamique des rotors [Ganesan, 1997, Ji et Zu, 1998] avec la prise en compte de non-linéarités régulières. Cependant, ces méthodes peuvent difficilement être mises en œuvre pour la résolution de (II.1) dans le cas de systèmes de taille importante ou possédant des non-linéarités fortes et irrégulières. Il convient alors de faire appel à des méthodes approchées et numériques. De manière générale, il existe actuellement deux grandes catégories de méthodes pour traiter ces systèmes, à savoir les méthodes dans le domaine temporel et les méthodes dans le domaine fréquentiel.

2.1 Méthodes de résolution dans le domaine temporel

L'intégration temporelle représente l'approche classique pour résoudre un système d'équations différentielles dépendant du temps. Elle consiste à construire une solution progressivement dans le temps, à savoir pas à pas. La popularité des intégrateurs réside non seulement dans leur simplicité d'utilisation mais aussi dans leur capacité à traiter tout type de problèmes.

La résolution du système différentiel (II.1) consiste pour tout intégrateur à vérifier cette équation en plusieurs instants consécutifs t_i , l'équation du mouvement est alors discrétisée en temps. Ces algorithmes pas à pas fournissent donc des approximations successives des champs de déplacement, de vitesse et d'accélération [Gérardin et Rixen, 1993, Gmür, 1997].

2.1.1 Les intégrateurs temporels

Les schémas d'intégration sont généralement répertoriés en deux catégories, à savoir les schémas explicites et les schémas implicites. Les schémas d'intégration explicites cherchent la solution à l'instant t_{i+1} à partir de la solution connue à l'instant t_i alors que les schémas implicites recherchent la solution à partir de l'équation du mouvement elle-même à l'instant t_{i+1} . Notons que pour tout schéma d'intégration temporelle, il est nécessaire d'en étudier la stabilité et la consistance (condition locale de convergence) afin de s'assurer de la convergence du schéma. La discrétisation du domaine temporel n'influence pas la précision de la solution mais la vitesse de convergence de la solution est affectée si le pas de temps h retenu est grand et que les non-linéarités en jeu sont importantes.

Les équations différentielles du premier ordre. Une équation différentielle du premier ordre s'écrit de manière générale :

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) \quad \text{avec : } \mathbf{q}(t = 0) = \mathbf{q}_0 \quad \text{donné.} \quad (\text{II.2})$$

Parmi les intégrateurs de ce type d'équation différentielle, nous pouvons à nouveau distinguer deux familles, à savoir les méthodes à pas unique et les méthodes à pas multiples. Le plus rudimentaire des algorithmes à pas unique est le schéma d'intégration d'Euler. Le schéma d'intégration d'Euler peut être explicite et la solution recherchée est alors de la forme :

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h\mathbf{f}(\mathbf{q}_i, t_i) \quad (\text{II.3})$$

où h représente le pas de temps entre deux instants t_i et t_{i+1} . Les quantités à déterminer à l'instant t_{i+1} dépendent uniquement des quantités connues à l'instant t_i . Le calcul est rapide mais la stabilité du schéma est conditionnelle et dépend du choix du pas de temps h . Dans le cas d'une méthode d'Euler implicite, la solution recherchée est de la forme :

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h\mathbf{f}(\mathbf{q}_{i+1}, t_{i+1}) \quad (\text{II.4})$$

Dans ce cas implicite, on cherche à chaque pas de temps les champs de déplacement et de vitesse vérifiant les équations du mouvement et dépendant des quantités à l'instant t_i mais aussi à l'instant t_{i+1} .

Les schémas d'Euler implicite et explicite sont d'ordre 1 ce qui pose des problèmes de précision et de stabilité et sont donc peu utilisés dans la résolution numérique d'équations différentielles. On leur préfère les méthodes d'ordre supérieur comme par exemple les méthodes de Runge-Kutta [Dormand et Prince, 1980] dont le principal intérêt est d'améliorer la stabilité et la précision de la solution. Pour un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, la méthode nécessite donc 4 évaluations de la fonction f , ce qui rend la méthode numériquement coûteuse lorsque la fonction \mathbf{f} est de taille importante, mais elle est en contrepartie très précise.

Souvent, en dynamique des structures il est d'usage de mettre les équations du mouvement (II.1) sous forme d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{F}_{nl} + \mathbf{F}_b) \end{pmatrix} \quad (\text{II.5})$$

La taille du système est alors multipliée par deux mais l'équation différentielle est maintenant du premier ordre en temps. Cette transformation permet d'utiliser de nombreux intégrateurs du premier ordre, comme ceux qui viennent d'être présentés. Ainsi, on trouve dans la littérature des applications de ces méthodes à la modélisation de la dynamique des rotors non-linéaires [Lee et Lee, 1999, Liew *et al.*, 2002] avec la prise en compte de roulements non-linéaires en utilisant la méthode de Runge-Kutta.

Les équations différentielles du second ordre. L'inconvénient des méthodes du premier ordre est qu'elles nécessitent d'écrire un système différentiel du second ordre sous forme d'état pour se ramener à un système différentiel du premier ordre, doublant ainsi la taille des matrices et le nombre d'inconnues à calculer. Il existe des méthodes pas à pas permettant de résoudre directement des équations différentielles du second ordre. Tout comme pour les équations différentielles du premier ordre, on distingue les schémas explicites des schémas implicites. Il existe dans la littérature de nombreuses méthodes mais celle qui semble la plus répandue pour la résolution de systèmes dynamiques est la méthode de Newmark. Les champs de déplacement et de vitesse dans le cas d'un schéma de Newmark implicite s'écrivent [Gérardin et Rixen, 1993] :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h\dot{\mathbf{q}}_i + \frac{h^2}{2} ((1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_i + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}) \\ \dot{\mathbf{q}}_{i+1} = \dot{\mathbf{q}}_i + h(1 - \alpha)\ddot{\mathbf{q}}_i + h\alpha\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

où α et β sont les deux paramètres d'intégration du schéma de Newmark qui contrôlent à la fois la stabilité et la dissipation de l'algorithme. Le grand avantage du schéma de Newmark est que suivant les valeurs prises par les paramètres α et β , on retrouve des algorithmes couramment utilisés dont les principaux sont les schémas d'accélération constante, d'accélération moyenne, de Fox et Goodwin et des différences finies centrées [Lesaffre, 2007, Coudeyras, 2009].

La recherche de solutions périodiques basée sur un intégrateur temporel peut s'avérer prohibitif en termes de temps de calcul, notamment pour le calcul de la phase transitoire jusqu'à l'établissement d'un régime permanent.

2.1.2 La méthode de tir

Le but de la méthode de tir est justement de s'affranchir du calcul de la partie transitoire pour la recherche de solutions périodiques. Cette méthode, basée sur la méthode temporelle, consiste à rechercher directement une condition initiale se situant sur la solution périodique. La technique consiste à introduire des corrections sur les conditions initiales de manière à observer des conditions finales identiques. Ainsi, le problème aux conditions aux limites est reformulé en un problème aux valeurs initiales. La résolution du système se ramène à un problème algébrique non-linéaire souvent traité par une méthode de type Newton. Une mise en œuvre complète de cette méthode appliquée à la dynamique des rotors est proposée dans les travaux de Sundararajan & Noah [Sundararajan et Noah, 1997] et Demailly [Demailly, 2003].

Cette méthode présente en général un avantage en termes de temps de calcul pour des systèmes de petite taille par rapport à une intégration temporelle directe. Néanmoins, elle comporte certaines limitations inhérentes aux méthodes temporelles, notamment en termes de stabilité.

2.2 Méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel

Nous venons de voir les principales méthodes temporelles permettant de chercher des solutions périodiques, notamment la méthode de tir qui permet de s'affranchir du régime transitoire du système. Cependant, une méthode plus rapide de recherche de solutions périodiques consiste à se placer dans l'espace de Fourier, autrement dit dans le domaine fréquentiel. La méthode d'équilibrage harmonique, souvent appelée balance harmonique, est une méthode analytique qui consiste à représenter la solution périodique dynamique de période $T = 2\pi/\omega$ sous forme d'une série de Fourier :

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.7})$$

En substituant cette relation dans l'équation du mouvement (II.1), et après projection de l'ensemble des équations du problème sur la base des fonctions harmoniques, on obtient un système d'équations algébriques non-linéaires. Le propre des méthodes fréquentielles est de faire disparaître la variable temps t , et le problème algébrique non-linéaire obtenu est ensuite résolu par des méthodes itératives.

Cette méthode analytique a beaucoup évolué avec de nombreuses variantes d'applications numériques. Ces méthodes fréquentielles ont notamment été employées avec succès dans divers domaines comme l'étude dynamique des roues au bagées [Nacivet *et al.*, 2003, Laxalde et Thouverez, 2009], l'analyse non-linéaire des rotors [Guskov *et al.*, 2008], ou encore l'étude dynamique du crissement de frein à disque [Coudeyras *et al.*, 2009]. Dans notre cadre d'étude des turboréacteurs avec la prise en compte de non-linéarités, cette méthode semble alors plus efficace en termes de coût numérique par rapport aux méthodes temporelles. Nous développons donc dans la suite les aspects théoriques et la mise en œuvre de cette méthode.

La méthode de balance harmonique. Dans cette méthode, la solution périodique du système (II.1) peut être décomposée sur une base infinie de fonctions trigonométriques. Cependant, comme il est impossible de traiter des sommes infinies d'un point de vue numérique, il est nécessaire de tronquer la décomposition de la solution à un certain ordre N_h . Ainsi, la solution est cherchée sous forme de série trigonométrique tronquée à l'ordre N_h :

$$\mathbf{q}(t) \approx \sum_{k=0}^{N_h} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.8})$$

où N_h est le nombre d'harmoniques conservées dans la solution et où \mathbf{a}_k et \mathbf{b}_k désignent les coefficients de Fourier de la série. Notons que plus le nombre de terme dans la série sera important, autrement dit plus N_h sera grand, alors plus la solution approchée sera proche de la solution exacte.

Les vitesses et accélérations s'obtiennent aisément en dérivant une et deux fois respectivement l'équation (II.8) par rapport au temps. Ainsi, en remplaçant la relation (II.8) et ses dérivées dans l'équation du mouvement (II.1), on obtient l'équation

suivante sous forme de résidu dynamique :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \approx & \sum_{k=0}^{N_h} \left[\left(\mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{a}_k + (k\omega \mathbf{C}) \mathbf{b}_k \right] \cos(k\omega t) + \\ & \sum_{k=0}^{N_h} \left[\left(\mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{b}_k - (k\omega \mathbf{C}) \mathbf{a}_k \right] \sin(k\omega t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) - \mathbf{F}_b \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

La première étape de la méthode de balance harmonique consiste à supprimer la dépendance temporelle du système (II.9) en le projetant sur la base \mathbf{B} des fonctions trigonométriques qui s'écrit :

$$\mathbf{B} = \left[1 \quad \cdots \quad \cos(k\omega t) \quad \sin(k\omega t) \quad \cdots \quad \cos(N_h\omega t) \quad \sin(N_h\omega t) \right]^T \quad (\text{II.10})$$

Cette étape est communément appelée procédure de Galerkin où le résidu dynamique est orthogonalisé par rapport à la base \mathbf{B} (II.10) :

$$\begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{R} dt; \\ \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{R} \cdot \cos(k\omega t) dt, & \text{pour } k = 1, \dots, N_h; \\ \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{R} \cdot \sin(k\omega t) dt, & \text{pour } k = 1, \dots, N_h. \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Le système (II.9) devient alors un système algébrique non-linéaire qui s'écrit :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_h) = \mathbf{A}\mathbf{x}_h + \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h) - \mathbf{F}_{b_h} = \mathbf{0} \quad (\text{II.12})$$

où \mathbf{A} désigne la matrice de rigidité dynamique composée des matrices structurales du modèle, \mathbf{x}_h est le vecteur constitué des coefficients harmoniques, $\mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h)$ et \mathbf{F}_{b_h} sont les vecteurs regroupant respectivement les composantes harmoniques des efforts non-linéaires et des efforts extérieurs, décrits dans la base de Fourier tronquée. Le vecteur harmonique des déplacements qui représente les nouvelles inconnues est de taille $(2N_h + 1)n$, avec n le nombre de degrés de liberté du système, et a la structure suivante :

$$\mathbf{x}_h = \left[\mathbf{a}_0^T \quad \mathbf{a}_1^T \quad \mathbf{b}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{N_h}^T \quad \mathbf{b}_{N_h}^T \right]^T \quad (\text{II.13})$$

La matrice de raideur dynamique est organisée de la façon suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_1 & & \\ & & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{A}_k & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \mathbf{A}_{N_h} \end{pmatrix} \quad (\text{II.14})$$

où chaque bloc \mathbf{A}_k s'écrit :

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} & (k\omega) \mathbf{C} \\ -(k\omega) \mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, N_h. \quad (\text{II.15})$$

Dans les cas qui nous intéressent, l'effort extérieur \mathbf{F}_b est une excitation périodique synchrone qui est généralement décomposée en harmoniques. Le calcul des coefficients harmoniques du vecteur \mathbf{F}_{b_h} est par conséquent immédiat. Enfin, le calcul des coefficients harmoniques correspondant aux efforts non-linéaires \mathbf{F}_{nl_h} peut se faire soit analytiquement, soit numériquement. Dans le cas d'une non-linéarité simple, où il y a existence d'une expression analytique reliant les composantes harmoniques du déplacement \mathbf{x}_h aux composantes harmoniques des efforts non-linéaires \mathbf{F}_{nl_h} , la non-linéarité peut être directement traitée dans le domaine fréquentiel au même titre que les efforts extérieurs. Lorsque les non-linéarités sont plus complexes et sont explicitement exprimées dans le domaine temporel, ce qui est le cas pour les problèmes de contact ou de frottement, des techniques numériques permettent d'évaluer les efforts non-linéaires afin de trouver les composantes de \mathbf{F}_{nl_h} et sont détaillées dans la section suivante (*cf.* Sect. 2.3).

La deuxième étape de la méthode de balance harmonique est de résoudre le système algébrique non-linéaire (II.12), pour cela il est nécessaire d'employer des méthodes itératives de résolution. De nombreuses méthodes itératives existent afin de résoudre des systèmes d'équations algébriques non-linéaires, comme les méthodes du gradient, du gradient conjugué, les méthodes de Newton ou quasi-Newton ou encore les méthodes des régions de confiance. Le lecteur intéressé par le détail de ces techniques de résolution pourra se référer à l'ouvrage de Fletcher [Fletcher, 2000]. Dans le cadre de ce mémoire, la solution \mathbf{x}_h est déterminée de manière itérative selon la méthode de Newton-Raphson.

Le schéma itératif se traduit par l'expression suivante :

$$\mathbf{x}_h^{i+1} = \mathbf{x}_h^i + \delta\mathbf{x}_h \quad (\text{II.16})$$

où \mathbf{x}_h^{i+1} est la solution recherchée à l'itération $i+1$, \mathbf{x}_h^i est la solution à l'itération i et $\delta\mathbf{x}_h$ est un terme correctif *a priori* inconnu. En substituant la relation (II.16) dans le système non-linéaire (II.12), le développement de Taylor à l'ordre 1 du système non-linéaire aboutit à la forme incrémentale suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}_h^i + \delta\mathbf{x}_h) &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_h^i) + \mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{H}(\mathbf{x}_h^i) \delta\mathbf{x}_h + o(\delta\mathbf{x}_h) = \mathbf{0} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}_h^i + \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h^i) - \mathbf{F}_{b_h} + \left(\mathbf{A} + \mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h^i) \right) \delta\mathbf{x}_h + o(\delta\mathbf{x}_h) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

où $(\mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{F}_{nl_h})_{l,m} = \frac{\partial F_{nl_h l}}{\partial x_{h_m}}$, avec $l, m = 1, \dots, (2N_h + 1)n$, est la matrice jacobienne des termes non-linéaires calculée au point courant \mathbf{x}_h^i . Afin d'évaluer la matrice jacobienne des efforts non-linéaires, le calcul classique consiste à effectuer une approximation par différences finies [Choi et Noah, 1987, Kim *et al.*, 1991]. D'autres approches existent pour l'évaluation numérique de cette matrice, deux d'entre elles sont détaillées dans la section suivante (*cf.* Sect. 2.3).

La solution à l'itération $i+1$ est donc calculée à partir de la solution à l'itération i et du terme correctif $\delta\mathbf{x}_h$ qui a pour expression :

$$\delta\mathbf{x}_h = - \left(\mathbf{A} + \mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h^i) \right)^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{x}_h^i) \quad (\text{II.18})$$

Le processus itératif est initialisé par une valeur \mathbf{x}_h^0 qu'il faut choisir avec précaution afin de s'assurer la convergence du solveur. À titre d'exemple, une estimation linéarisée de la solution ou une extrapolation par rapport aux points calculés précédemment peuvent être de bonnes valeurs d'initialisation. Le processus s'arrête lorsqu'un ou plusieurs critères de convergence sont vérifiés. Les tests de convergence utilisés sont généralement :

$$\|\delta\mathbf{x}_h\| \leq \varepsilon_1 ; \quad \frac{\|\delta\mathbf{x}_h\|}{\|\mathbf{x}_h\|} \leq \varepsilon_2. \quad (\text{II.19})$$

où ε_1 et ε_2 sont des tolérances fixées par l'utilisateur. Les grandes étapes de l'algorithme de résolution du système d'équations algébriques non-linéaires (II.12) sont les suivantes :

1. Initialisation à $i = 0$: \mathbf{x}_h^0 ;
2. Résolution du système sous forme incrémentale (II.17) : $\delta\mathbf{x}_h$;
3. Nouvelle approximation : $\mathbf{x}_h^{i+1} = \mathbf{x}_h^i + \delta\mathbf{x}_h$;
4. Retour à l'étape 2 tant que les critères de convergence ne sont pas atteints.

Cette méthode a été introduite par Lau [Lau *et al.*, 1983] et est connue sous le nom de *balance harmonique incrémentale*.

2.3 Évaluation des efforts non-linéaires

La mise en œuvre de la méthode de balance harmonique incrémentale qui vient d'être présentée peut s'avérer délicate si l'évaluation analytique des efforts non-linéaires \mathbf{F}_{nl_h} dans le domaine fréquentiel n'est pas envisageable. Lorsque les non-linéarités sont explicitement exprimées dans le domaine temporel, ce qui est le cas du contact dans les turbomachines, il existe des techniques permettant de contourner cette difficulté comme par exemple la méthode de *collocation trigonométrique* ou la méthode *AFT*. Ces méthodes permettent de traiter les non-linéarités dans le domaine temporel puis d'extraire les composantes fréquentielles correspondantes.

2.3.1 Méthode de collocation trigonométrique

La méthode de collocation trigonométrique est une méthode de résidus pondérés permettant d'approcher numériquement les efforts non-linéaires dont l'expression analytique ne peut être trouvée. Comme précédemment, la solution recherchée est périodique, de période T . Rappelons que le passage entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel s'écrit pour le déplacement :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}\mathbf{x}_h \quad (\text{II.20})$$

Le principe de la collocation consiste à chercher la solution approchée qui vérifie l'équation du mouvement en un nombre L d'instant t_i préalablement choisis sur la période étudiée $[0, T]$. La période de vibration est alors discrétisée sur L points

de collocation et les instants t_i sont généralement pris équidistants $t_i = iT/L$, pour $i = 1, \dots, L$. Ainsi, les déplacements échantillonnés sur une période dans le domaine temporel $\mathbf{Q}(t_i)$ sont associés aux coefficient de Fourier par la matrice de passage \mathbf{E} suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}(t_1) \\ \mathbf{Q}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}(t_L) \end{pmatrix} = \mathbf{E} \mathbf{x}_h \quad (\text{II.21})$$

avec :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \cdots & \cos(N_h \omega t_1) & \sin(N_h \omega t_1) \\ 1 & \cos(\omega t_2) & \sin(\omega t_2) & \cdots & \cos(N_h \omega t_2) & \sin(N_h \omega t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega T) & \sin(\omega T) & \cdots & \cos(N_h \omega T) & \sin(N_h \omega T) \end{pmatrix}$$

La solution fréquentielle \mathbf{x}_h peut également être exprimée en fonction des composantes temporelles en inversant la relation (II.21) au sens des moindres carrés :

$$\mathbf{x}_h = (\mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^T \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(t_1) \\ \mathbf{Q}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}(t_L) \end{pmatrix} \quad (\text{II.22})$$

où la matrice $(\mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^T$ est la matrice pseudo-inverse de \mathbf{E} . Elle correspond à une approximation au sens des moindres carrés de la transformée de Fourier.

Finalement, à l'aide de cette expression, il est possible d'obtenir une formulation des composantes harmoniques du vecteur des efforts non-linéaires du système (II.12) :

$$\mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h) = (\mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{E} \mathbf{x}_h) \quad (\text{II.23})$$

Cette dernière relation permet alors de traiter la non-linéarité dans le domaine temporel, où le terme $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{E} \mathbf{x}_h)$ correspond aux efforts non-linéaires exprimés en fonction du champ de déplacement discrétisé en temps. Cet effort non-linéaire est ensuite traduit en termes de composantes harmoniques permettant ainsi de résoudre le problème algébrique (II.12) par un solveur itératif non-linéaire.

Des applications de cette méthode ont été réalisées sur des rotors non-linéaires incluant des amortisseurs à film d'huile [Zhao *et al.*, 1994a, Zhao *et al.*, 1994b].

D'autre part, lors du processus itératif de résolution du système non-linéaire (II.12), il est nécessaire d'évaluer la matrice jacobienne des efforts non-linéaires à chaque itération. Au lieu d'avoir recours à une approximation par différences finies, il est possible d'obtenir cette matrice jacobienne par dérivation de l'expression (II.23) par rapport au vecteur harmonique des déplacements :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{F}_{nl_h} = (\mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}_{nl}}{\partial \mathbf{Q}(t_i)} \right) \mathbf{E} \quad (\text{II.24})$$

Ainsi, la matrice jacobienne est elle aussi calculée dans le domaine temporel en L points de collocation, puis est transformée dans le domaine fréquentiel afin de résoudre le système sous forme incrémentale (II.18).

2.3.2 Utilisation des transformées de Fourier

Les composantes harmoniques du vecteur \mathbf{F}_{nl_h} peuvent être également obtenues par des transformées de Fourier directes (DFT) des forces non-linéaires. Cette technique portant le nom de méthode AFT pour *Alternating Frequency/Time method* a été formalisée par Cameron & Griffin [Cameron et Griffin, 1989] et permet de réaliser des transitions entre les domaines temporel et fréquentiel. Cette procédure consiste donc à évaluer les non-linéarités dans le domaine temporel bien que le système d'équations algébriques non-linéaires soit toujours résolu dans le domaine fréquentiel.

La première étape de cette technique se base sur une décomposition en série de Fourier des forces non-linéaires $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}(t))$. La décomposition semble licite car les efforts extérieurs $\mathbf{F}_b(t)$ sont périodiques de période T , la solution $\mathbf{q}(t)$ est supposée périodique de même période, par conséquent $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}(t))$, qui s'exprime en fonction de ces vecteurs dans l'équation du mouvement (II.1), peut être décomposé en série de Fourier tronquée au même ordre N_h :

$$\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}(t)) \approx \mathbf{c}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{c}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{d}_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.25})$$

Le vecteur harmonique des efforts non-linéaires que l'on souhaite déterminer a la structure suivante :

$$\mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h) = [\mathbf{c}_0^T \quad \mathbf{c}_1^T \quad \mathbf{d}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{c}_{N_h}^T \quad \mathbf{d}_{N_h}^T]^T \quad (\text{II.26})$$

Ensuite, à partir d'une estimation des coefficients de Fourier \mathbf{x}_h , il est possible d'en déduire les valeurs de déplacements $\mathbf{q}(t)$ dans le domaine temporel sur une période échantillonnée à l'aide d'une transformée de Fourier inverse (IDFT). Par définition, les effort non-linéaires $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}(t))$ sont alors estimés dans le domaine temporel sur cette même période. Enfin, les coefficients de Fourier du vecteur $\mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h)$ sont obtenus en utilisant une DFT sur les efforts non-linéaires échantillonnés. Le déroulement de cette procédure est résumé sur la figure II.3.

Après l'obtention de ces coefficients de Fourier par transformées de Fourier, il est finalement possible de résoudre le système algébrique non-linéaire $\mathbf{H}(\mathbf{x}_h) = \mathbf{0}$ (*cf.* Eq. (II.12)) avec la prise en compte de tout type de non-linéarités, fortes et irrégulières comme le contact. Une mise en œuvre complète de cette méthode est donnée par Narayanan & Sekar [Narayanan et Sekar, 1998].

Notons que pour le calcul des transformées de Fourier, si le nombre de points d'échantillonnage considéré sur la période est une puissance de 2, il est alors possible d'utiliser l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) développé par Cooley & Tukey [Cooley et Tukey, 1965] qui est particulièrement performant et

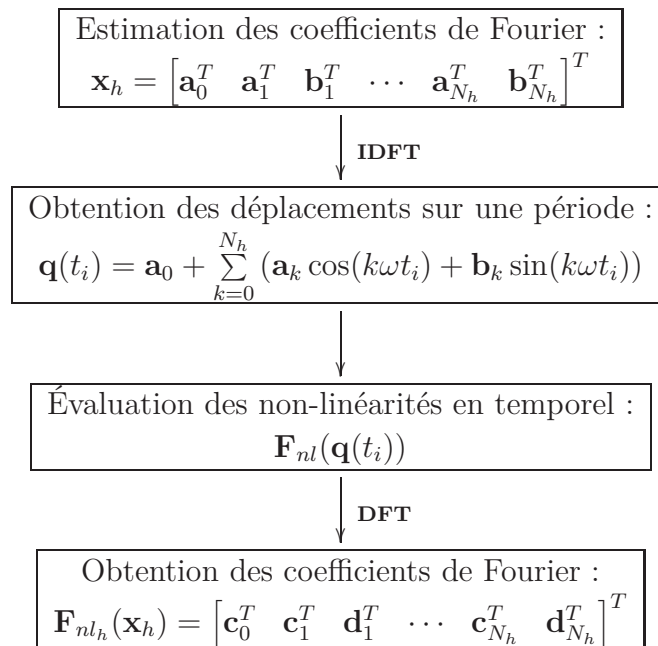


FIGURE II.3 – Procédure AFT

ainsi minimise le temps de calcul.

De plus, de la même façon que pour la méthode précédente, il est possible avec cette technique d'évaluer la matrice jacobienne des efforts non-linéaire nécessaire à la résolution du système (II.17). L'application de cette méthode consiste à évaluer la matrice jacobienne dans le domaine temporel en tous les instants de la période échantillonnée, puis de déterminer les coefficients harmoniques en appliquant une transformée de Fourier.

Dans la méthode d'alternance temps/fréquence qui vient d'être présentée avec l'utilisation de FFT, les efforts non-linéaires sont calculés en temporel de façon exacte pour le modèle retenu puis sont tronqués en passant dans le domaine fréquentiel avec un coût numérique relativement faible. Les méthodes de collocation sont quant à elles fortement sujettes au nombre d'échantillons retenus lors de la discrétisation temporelle. C'est pour cette raison que nous avons fait le choix dans la suite d'utiliser la méthode de balance harmonique couplée à cette technique AFT pour la résolution de systèmes dynamiques non-linéaires.

3 Techniques de continuation

Les méthodes temporelles et fréquentielles exposées auparavant permettent de calculer les solutions périodiques d'un système forcé pour un jeu de paramètres fixés. Mais une étude dynamique ne se limite pas à un seul calcul, elle consiste

généralement à suivre l'évolution du comportement vibratoire lors de la variation d'un paramètre physique, que l'on notera μ . Ce paramètre est classiquement appelé paramètre de contrôle ou paramètre de bifurcation. La technique de continuation consiste donc à suivre l'évolution de la solution périodique en fonction de ce paramètre μ [Allgower et Georg, 2003]. Il s'agit d'une technique classiquement rencontrée dans les études paramétriques de systèmes non-linéaires ainsi que pour le suivi de solutions possédant d'éventuels points de retournement.

Dans le cadre d'étude des machines tournantes, le paramètre physique fondamental contrôlant la réponse du système est la vitesse de rotation de la machine Ω . Nous avons vu au premier chapitre que l'étude classique en dynamique des turbomachines était la réponse à balourd. L'amplitude de vibration du système est déterminée en fonction de chaque vitesse de rotation se situant dans la plage de fonctionnement de la machine. Ainsi, le paramètre de contrôle choisi dans les études qui suivront sera la vitesse de rotation des rotors $\mu = \Omega$.

Le système algébrique non-linéaire (II.12) à résoudre dépend d'une inconnue supplémentaire dans cette approche, à savoir le paramètre de continuation :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_h, \mu) = \mathbf{A}(\mu) \mathbf{x}_h + \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h) + \mathbf{F}_{b_h}(\mu) = \mathbf{0} \quad (\text{II.27})$$

Plusieurs techniques de continuation existent dans la littérature que l'on distingue en deux catégories, à savoir la méthode asymptotique numérique et les méthodes de prédiction-corrrection. Le principe de la méthode asymptotique numérique repose sur la recherche de branches de solutions du système (II.27), appelées *tronçons*, sous la forme de séries entières en fonction d'un paramètre de chemin [Cochelin et Vergez, 2009]. L'intérêt de cette méthode est de pousser le calcul des séries à des ordres élevés, fournissant ainsi des représentations riches sur la branche solution. L'avantage est d'avoir une sélection de longueur de pas automatique facilitant ainsi le passage des lieux de la courbe de réponse possédant un retournement. Néanmoins, l'application de cette méthode n'est possible que si le système d'équations $\mathbf{H}(\mathbf{x}_h, \mu)$ est écrit dans un formalisme simple et adapté. De plus, dans le cas de systèmes de grande taille ou possédant des non-linéarités fortes et non-régulières, la mise en œuvre de cette méthode s'avère bien plus délicate. C'est pourquoi, dans le cadre de notre étude, les méthodes basées sur des algorithmes de type prédiction-corrrection sont privilégiées. Le prédicteur fournit une estimation de la solution du système (II.27) à partir des solutions précédemment obtenues. L'estimation est ensuite utilisée comme point de départ pour l'algorithme de correction, qui améliore l'estimation jusqu'à l'obtention du couple solution (\mathbf{x}_h, μ) à un critère de tolérance près. Chaque couple de prédicteur et correcteur constitue une méthode de continuation qui dépend du choix de paramétrisation adopté.

3.1 La paramétrisation

Le système (II.27) est composé de $N = (2N_h + 1)n$ équations algébriques non-linéaires et de $N + 1$ inconnues, avec la prise en compte du paramètre de continuation

μ . Par conséquent, le système à résoudre est sous-déterminé. La méthode la plus simple pour contourner cette difficulté est de calculer la solution \mathbf{x}_h pour un ensemble de valeurs de μ comprises dans une plage de variation donnée $[\mu_1, \mu_2]$. L'inconvénient de cette technique, communément appelée continuation séquentielle, est de ne pas pouvoir suivre la courbe de réponse lorsqu'il y a présence d'un retournement, ce qui est souvent le cas lors de l'analyse de systèmes non-linéaires. D'autres stratégies permettant de paramétrer la courbe de réponse existent et sont détaillées dans la suite.

3.1.1 La paramétrisation sélective

La paramétrisation sélective est une évolution de la méthode de continuation séquentielle qui consiste à fixer soit une composante de \mathbf{x}_h , soit μ afin de pallier le problème des points de retournement. Considérons que les inconnues du système se regroupent dans le vecteur suivant :

$$\mathbf{X} = [X_1 \ \cdots \ X_k \ \cdots \ X_{N+1}]^T = [\mathbf{x}_h^T \ \mu]^T \quad (\text{II.28})$$

Ainsi, cette méthode consiste à ne prendre en compte que N variables dans la résolution du système $\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ à N équations et à fixer la variable restante.

3.1.2 La paramétrisation par longueur d'arc

L'idée de cette méthode de continuation est de paramétrer la courbe de réponse par son abscisse curviligne s . Comme l'abscisse curviligne de la courbe de réponse réelle ne peut pas être déterminée précisément, elle est approximée par la longueur de ligne brisée définie par l'ensemble des points (\mathbf{x}_h^p, μ^p) précédemment calculés. La distance Δs^p entre deux points successifs de la courbe de réponse est donnée par :

$$\Delta s^p = \sqrt{\|\mathbf{x}_h^{p+1} - \mathbf{x}_h^p\|^2 + (\mu^{p+1} - \mu^p)^2} \quad (\text{II.29})$$

Le système algébrique (II.27) à résoudre dépend alors seulement implicitement du paramètre d'abscisse curviligne s qui se définit alors de proche en proche par $s^{p+1} = s^p + \Delta s^p$. Dans ce cas de paramétrisation, le système algébrique non-linéaire à résoudre est composé de N équations à $N + 1$ inconnues.

Dans ce qui suit, il s'agit de présenter différents prédicteurs permettant d'obtenir une estimation $(\mathbf{x}_{h_0}^{p+1}, \mu_0^{p+1})$ de la solution du système (II.27) à partir des points déjà calculés (\mathbf{x}_h^p, μ^p) . Cette estimation est ensuite utilisée comme initialisation du processus de correction afin d'obtenir la solution recherchée $(\mathbf{x}_h^{p+1}, \mu^{p+1})$.

3.2 Les principaux prédicteurs

Dans une méthode de continuation, un prédicteur a pour but d'améliorer la convergence lors de la résolution du système $\mathbf{H}(\mathbf{x}_h, \mu) = \mathbf{0}$. Lorsqu'on se place dans

le cas de figure où p points de la courbe sont calculés, l'algorithme de prédiction permet de fournir une estimation du couple solution $(\mathbf{x}_{h_0}^{p+1}, \mu_0^{p+1})$ à partir des points précédemment trouvés. Cette estimation est alors prise comme point initial dans le processus incrémental utilisé pour la résolution du système (II.27).

3.2.1 La méthode de la tangente

La prédiction tangente consiste à utiliser la tangente au dernier point trouvé comme prolongement local de la courbe de réponse. L'équation de la tangente s'obtient par différentiation de l'équation (II.27), et le formalisme suivant est adopté pour son écriture :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{H}(\mathbf{x}_h^p, \mu^p) \Delta \mathbf{x}_h^p + \mathbf{J}_\mu \mathbf{H}(\mathbf{x}_h^p, \mu^p) \Delta \mu^p = \mathbf{0} \quad (\text{II.30})$$

où les termes de la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{H} = \frac{\partial H_l}{\partial x_{h_m}}$ et $\mathbf{J}_\mu \mathbf{H} = \frac{\partial H_l}{\partial \mu}$ sont évalués au point précédemment trouvé. À partir de cette équation, on obtient directement l'expression de l'incrément $\Delta \mathbf{x}_h^p$ qui définit la droite porteuse de la tangente :

$$\Delta \mathbf{x}_h^p = -(\mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{J}_\mu \mathbf{H} \Delta \mu^p = \mathbf{Z} \Delta \mu^p \quad (\text{II.31})$$

Par définition, la longueur de la tangente est normée à 1, ce qui revient à écrire $(\Delta \mathbf{x}_h^p)^T \Delta \mathbf{x}_h^p + (\Delta \mu^p)^2 = 1$. Ainsi, l'incrément sur le paramètre de contrôle s'écrit :

$$\Delta \mu^p = \frac{\pm 1}{\sqrt{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} + 1}} \quad (\text{II.32})$$

Les prédictions s'expriment alors en fonction des variables obtenues au point précédent et de la tangente en ce même point :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{h_0}^{p+1} = \mathbf{x}_h^p + \Delta \mathbf{x}_h^p ; \\ \mu_0^{p+1} = \mu^p + \Delta \mu^p. \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

où les expressions des incréments sont données dans les équations (II.31) et (II.32).

De plus, il convient de définir une orientation pour la tangente qui vient d'être définie. En effet, le choix de la direction, autrement dit le signe de l'incrément $\Delta \mu^p$, doit préserver le sens de parcours de la courbe solution, afin d'éviter de revenir sur des points déjà calculés. La direction de la tangente est donc donnée par le signe du déterminant suivant, qui doit être positif dans le cas d'un parcours de la courbe suivant les valeurs de μ globalement croissantes :

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{H} & \mathbf{J}_\mu \mathbf{H} \\ \mathbf{Z}^T & 1 \end{pmatrix} \Delta \mu > 0 \quad (\text{II.34})$$

Cette méthode de prédiction s'adapte aux méthodes de continuation à paramétrisation par longueur d'arc qui viennent d'être introduites. Dans ces applications, la courbe est paramétrée par l'abscisse curviligne s et le système à résoudre dépend alors implicitement de l'incrément Δs^p . Ainsi, la valeur de l'incrément du paramètre μ s'écrit :

$$\Delta \mu^p = \pm \Delta s^p \frac{1}{\sqrt{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} + 1}} \quad (\text{II.35})$$

où la longueur d'arc Δs^p représente le pas d'avance entre le point p et le point $p+1$.

3.2.2 Les méthodes d'ordre supérieur

La deuxième grande famille de prédicteurs est basée sur l'interpolation polynomiale. Contrairement à la méthode de prédiction tangente, ces prédicteurs ne nécessitent pas le calcul de la matrice jacobienne de \mathbf{H} par rapport à \mathbf{x}_h et μ mais ils exploitent le stockage des $d+1$ derniers points calculés, si d est le degré du polynôme d'interpolation.

Le principe de cette méthode de prédiction est de déterminer les coefficients d'un polynôme d'ordre d passant par les $d+1$ points antérieurs au point recherché. L'interpolation est réalisée sur les abscisses curvilignes s^i , avec $i = p-d, \dots, p$. Dans le cas des polynômes de Lagrange de degré d , les prédictions ont les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{h_0}^{p+1} = \sum_{i=0}^d L_i \mathbf{x}_h^{p-d+i} ; \\ \mu_0^{p+1} = \sum_{i=0}^d L_i \mu^{p-d+i} . \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

où les polynômes de Lagrange dépendent de l'abscisse curviligne s :

$$L_i = \prod_{j=0, j \neq i}^d \frac{s^{p+1} - s^{p-d+i}}{s^{p-d+i} - s^{p-d+j}} \quad (\text{II.37})$$

Le point prédit $(\mathbf{x}_{h_0}^{p+1}, \mu_0^{p+1})$ est alors une extrapolation se situant à l'abscisse s^{p+1} suivant le polynôme considéré. Notons que plus l'ordre du polynôme considéré est élevé, plus il faut considérer des points sur la courbe solution et plus il y a de chances pour que l'estimation soit mauvaise. En effet, les points utilisés lors de la prédiction sont répartis sur une longueur de courbe importante ce qui rend difficile l'approximation par un polynôme. Ainsi, en général il est fréquent de se restreindre à une interpolation quadratique, voire cubique [Cheung *et al.*, 1990]. L'interpolation polynomiale d'ordre 1 est également utilisée pour sa simplicité [Blair *et al.*, 1997], et est plus connue sous le nom de prédiction par la sécante.

Le principe des deux méthodes de prédiction qui viennent d'être présentées est illustré sur la figure II.4.

Une fois l'estimation obtenue, un correcteur est utilisé, dont les principaux sont détaillés dans la suite, afin d'obtenir le point recherché $(\mathbf{x}_h^{p+1}, \mu^{p+1})$.

3.3 Les principaux correcteurs

En général, l'estimation fournie par un prédicteur ne satisfait pas l'équation de la courbe de réponse $\mathbf{H}(\mathbf{x}_h, \mu) = \mathbf{0}$. Les correcteurs sont donc des algorithmes ou des procédures visant à obtenir un point $(\mathbf{x}_h^{p+1}, \mu^{p+1})$ vérifiant l'équation (II.27) à partir de sa prédiction $(\mathbf{x}_{h_0}^{p+1}, \mu_0^{p+1})$. Rappelons que ce système d'équations algébriques non-linéaires est sous-déterminé, il comporte N équations et $N+1$ inconnues. Suivant la méthode de continuation adoptée et le choix de paramétrisation effectué, le système peut être résolu soit directement ou alors en augmentant le système d'une équation supplémentaire.

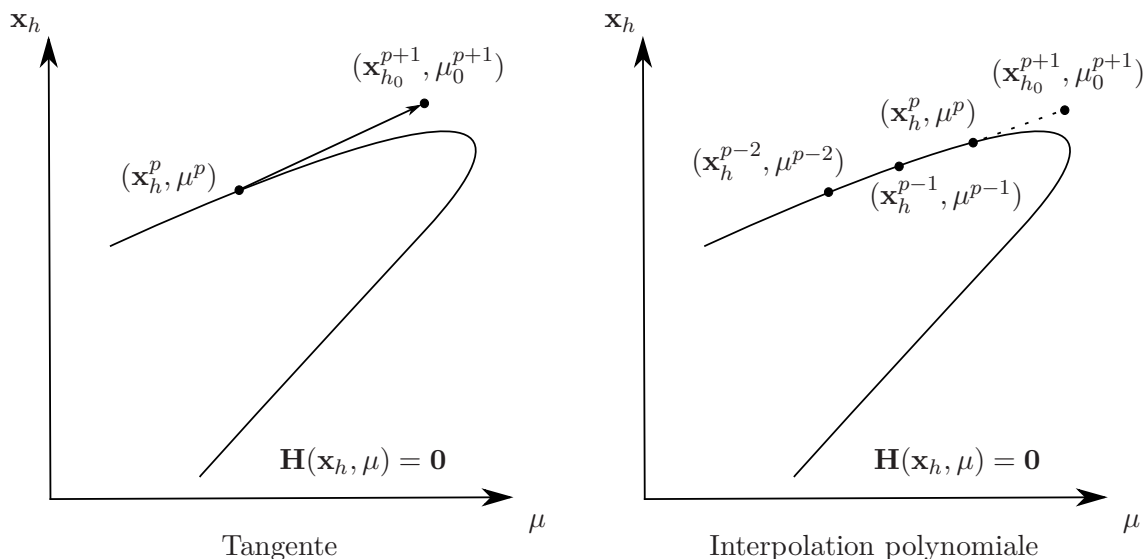


FIGURE II.4 – Principaux prédicteurs

3.3.1 Méthodes de continuation fixant un paramètre

Dans ces méthodes de continuation, une variable est fixée au cours de la procédure, permettant ainsi de se ramener à un système de N équations à N inconnues.

Continuation séquentielle. Tout d'abord, dans le cas d'une méthode de continuation séquentielle, le paramètre de contrôle μ est fixé à sa valeur de prédiction, à savoir $\mu^{p+1} = \mu_0^{p+1}$. Ainsi, la correction s'effectue en résolvant le système de manière itérative, comme par exemple avec la méthode de Newton-Raphson qui a été introduite auparavant (*cf.* Sect. 2.2). Le point corrigé s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{h_{i+1}}^{p+1} \\ \mu_{i+1}^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{h_i}^{p+1} \\ \mu_i^{p+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_{h_i}^{p+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Le processus itératif est initialisé à la valeur de prédiction $(\mathbf{x}_{h_0}^{p+1}, \mu_0^{p+1})$ et s'arrête lorsque le point solution est obtenu $(\mathbf{x}_h^{p+1}, \mu^{p+1})$. L'incrément de correction $\Delta \mathbf{x}_{h_i}^{p+1}$ est déterminé en résolvant le système (II.27) sous forme incrémentale, et son expression est :

$$\Delta \mathbf{x}_{h_i}^{p+1} = - \left(\mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{H}(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu^{p+1}) \right)^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu^{p+1}) \quad (\text{II.39})$$

où la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}_h}$ est carrée et inversible de dimension $N \times N$, évaluée en $(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu^{p+1})$. Le point solution $(\mathbf{x}_h^{p+1}, \mu^{p+1})$ est obtenu lorsque les critères de convergence du solveur itératif (*cf.* Eq (II.19)) sont atteints.

Continuation à paramétrisation sélective. Dans le cas d'une continuation à paramétrisation sélective, une inconnue de $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_h^T \ \mu]^T$ est également fixée au cours de la procédure, le système peut donc être résolu de manière équivalente par

un solveur itératif et s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{x}_h, \mu) = \mathbf{A}(\mu) \mathbf{x}_h + \mathbf{F}_{nl_n}(\mathbf{x}_h) + \mathbf{F}_{b_n}(\mu) = \mathbf{0} ; \\ P(\mathbf{x}_h, \mu) = X_k - \eta = 0, \quad \text{avec } k = 1, \dots, N + 1. \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

Les paramètres k et η varient au cours de la procédure offrant ainsi une grande flexibilité. De manière générale, la composante qui est fixée est la variable qui a subi la plus grande variation relative entre deux calculs. Changer la paramétrisation ne présente un intérêt que localement, au voisinage du point de retournement, où la variation relative de μ n'est pas la plus importante. La figure II.5 illustre le fonctionnement de cette technique. Dans les deux cas de figure, une prédiction par la tangente est réalisée, et les itérations de correction sont réalisées suivant les droites pointillées.

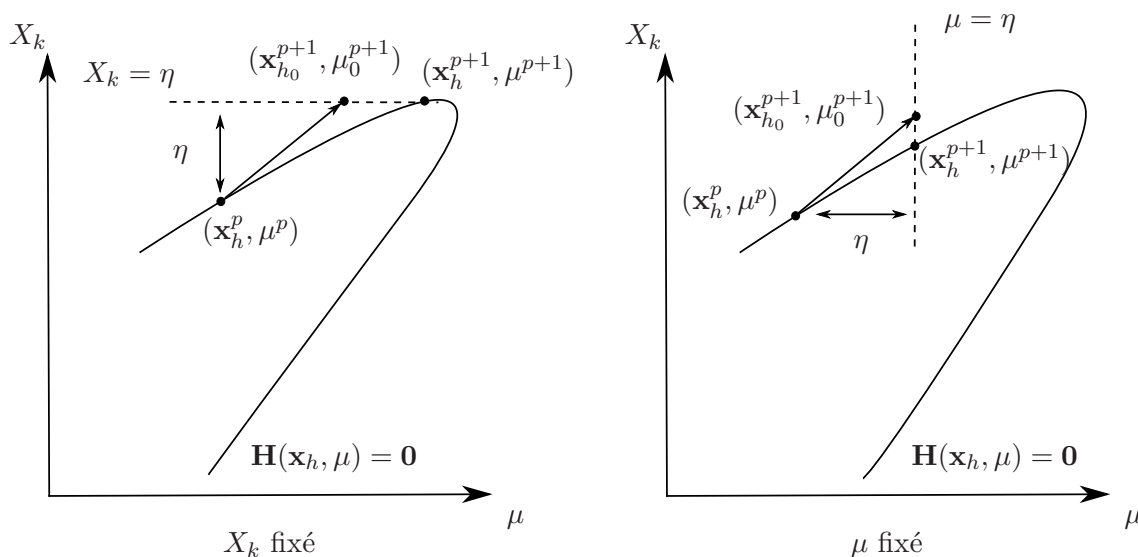


FIGURE II.5 – Procédures de correction pour la paramétrisation sélective

Lorsque le paramètre fixé est μ , on se retrouve dans le cas classique d'une continuation séquentielle. Cette technique de continuation a notamment été appliquée avec la méthode de balance harmonique incrémentale et la méthode de collocation trigonométrique en considérant la fréquence comme paramètre de contrôle [Xie et Lou, 1996].

3.3.2 Méthodes de continuation à paramétrisation par longueur d'arc

Dans ces méthodes de continuation, la courbe est paramétrée par son abscisse curviligne s , la correction s'effectue alors sur les $N + 1$ inconnues du système.

Méthode de minimisation par moindres carrés. Dans ce cas de paramétrisation où la correction s'effectue à la fois sur \mathbf{x}_h et μ , un algorithme de minimisation peut être employé afin de corriger la prédiction [Narayanan et Sekar, 1998]. Cette

méthode présente l'avantage de résoudre le système (II.27) comportant N équations à $N + 1$ inconnues. L'expression du point corrigé est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{h_{i+1}}^{p+1} \\ \mu_{i+1}^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{h_i}^{p+1} \\ \mu_i^{p+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_{h_i}^{p+1} \\ \Delta \mu_i^{p+1} \end{pmatrix} \quad (\text{II.41})$$

où les incréments de correction sont déterminés en résolvant le système incrémental suivant :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{H}(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) & \mathbf{J}_{\mu} \mathbf{H}(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_{h_i}^{p+1} \\ \Delta \mu_i^{p+1} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{II.42})$$

La difficulté rencontrée dans la résolution de ce problème incrémental est que la matrice jacobienne $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{H}(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) & \mathbf{J}_{\mu} \mathbf{H}(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) \end{bmatrix}$ n'est pas carrée, de dimension $N \times (N + 1)$, et n'est donc pas inversible. Une alternative consiste à utiliser la pseudo inverse de cette matrice jacobienne, appelée matrice inverse de Moore-Penrose, afin d'obtenir les incréments de correction.

La matrice inverse de Moore-Penrose de la matrice jacobienne \mathbf{J} correspond à une approximation au sens des moindres carrés et est définie par l'expression suivante :

$$\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \quad (\text{II.43})$$

Les incréments de correction sont alors déterminés à l'aide cette matrice pseudo inverse évaluée au point courant $(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1})$ et s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_{h_i}^{p+1} \\ \Delta \mu_i^{p+1} \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^+(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) \mathbf{H}(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) \quad (\text{II.44})$$

À la fin des itérations de corrections, la solution qui est obtenue $(\mathbf{x}_h^{p+1}, \mu^{p+1})$ est le point se situant sur la courbe de réponse le plus proche, au sens des moindres carrés, du point prédit $(\mathbf{x}_{h_0}^{p+1}, \mu_0^{p+1})$.

Méthode de continuation *arc-length*. Dans cette technique de continuation, au lieu d'avoir recours à une méthode de minimisation, le système (II.27) est augmenté d'une équation supplémentaire P afin de se ramener à un système de $N + 1$ équations à $N + 1$ inconnues. L'idée est de dire que le couple solution recherché se situe sur la courbe définie par $\mathbf{H}(\mathbf{x}_h, \mu) = \mathbf{0}$ et sur une hypersphère de rayon Δs , centrée sur le dernier point trouvé. L'incrément Δs est appelé longueur d'arc et le système augmenté à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{x}_h, \mu) = \mathbf{A}(\mu) \mathbf{x}_h + \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h) + \mathbf{F}_{b_h}(\mu) = \mathbf{0} ; \\ P(\mathbf{x}_h, \mu) = \|\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_h^p\|^2 + (\mu - \mu^p)^2 - \Delta s^2 = 0. \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

Ce nouveau système non-linéaire augmenté d'une équation P est résolu de manière itérative afin d'obtenir le point solution $(\mathbf{x}_h^{p+1}, \mu^{p+1})$. Cette méthode de continuation porte le nom de continuation *arc-length* et l'équation supplémentaire $P(\mathbf{x}_h, \mu)$ a l'inconvénient d'être non-linéaire. Néanmoins, l'avantage est qu'il existe toujours une

intersection entre l'hypersphère de rayon Δs et la courbe solution. Dans ce cas de figure, le point corrigé s'écrit de la même manière que précédemment (*cf.* Eq. (II.41)).

Les incréments de correction sont quant à eux déterminés en résolvant le système (II.27), augmenté de l'équation P , sous forme incrémentale et s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_{h_i}^{p+1} \\ \Delta \mu_i^{p+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{H}(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) & \mathbf{J}_{\mu} \mathbf{H}(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) \\ \mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} P(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) & \mathbf{J}_{\mu} P(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) \\ P(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1}) \end{pmatrix} \quad (\text{II.46})$$

La matrice jacobienne du système augmenté est de taille $(N+1) \times (N+1)$ et les expressions des sous-blocs de cette matrice, évalués au point courant $(\mathbf{x}_{h_i}^{p+1}, \mu_i^{p+1})$, sont les suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}_l}{\partial x_{h_m}} ; & \mathbf{J}_{\mu} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}_l}{\partial \mu} ; \\ \mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} P = \frac{\partial P}{\partial x_{h_m}} ; & \mathbf{J}_{\mu} P = \frac{\partial P}{\partial \mu} . \end{cases}$$

Le point solution $(\mathbf{x}_h^{p+1}, \mu^{p+1})$ est alors obtenu à la fin des itérations de correction.

Méthode de continuation *pseudo arc-length*. Une autre méthode consiste à rechercher la solution à l'intersection de la courbe de réponse $\mathbf{H}(\mathbf{x}_h, \mu) = \mathbf{0}$ et d'un hyperplan orthogonal à la tangente à la courbe au dernier point obtenu (\mathbf{x}_h^p, μ^p) , et situé à une distance Δl de ce point. L'équation de la tangente est donnée dans la section 3.2.1 par la relation (II.30) et les expressions des composantes du vecteur tangent $\Delta \mathbf{x}_h^p$ et $\Delta \mu^p$ sont donnés par les relations (II.31) et (II.32) respectivement.

Après normalisation du vecteur directeur de cet hyperplan, le système augmenté d'une équation supplémentaire P s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{x}_h, \mu) = \mathbf{A}(\mu) \mathbf{x}_h + \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h) + \mathbf{F}_{b_h}(\mu) = \mathbf{0} ; \\ P(\mathbf{x}_h, \mu) = (\Delta \mathbf{x}_h^p)^T (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_h^p) + (\Delta \mu^p)^T (\mu - \mu^p) - \Delta l = 0. \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

Ce système est résolu à l'aide de la même procédure itérative qui a été détaillée dans la méthode de continuation *arc-length*.

L'équation de l'hyperplan découle de la linéarisation de l'équation de l'hypersphère de la méthode de continuation *arc-length*. On parle alors de continuation *pseudo arc-length*. Pour cette dernière méthode, il est possible qu'il n'existe pas d'intersection entre l'hyperplan et la courbe solution. Pour éviter ce cas de figure, il convient de prendre un pas d'avance Δl assez petit, notamment au voisinage du retournement.

Les deux méthodes de paramétrisation par longueur d'arc avec prise en compte d'une équation supplémentaire, continuation *arc-length* et *pseudo arc-length*, sont illustrées sur la figure II.6, en considérant une prédiction par la tangente.

En conclusion, quelles que soient les méthodes de prédiction-corrrection utilisées, les étapes importantes de l'algorithme de continuation, permettant de résoudre un système d'équations algébriques non-linéaires de paramètre de continuation μ , sont les suivantes :

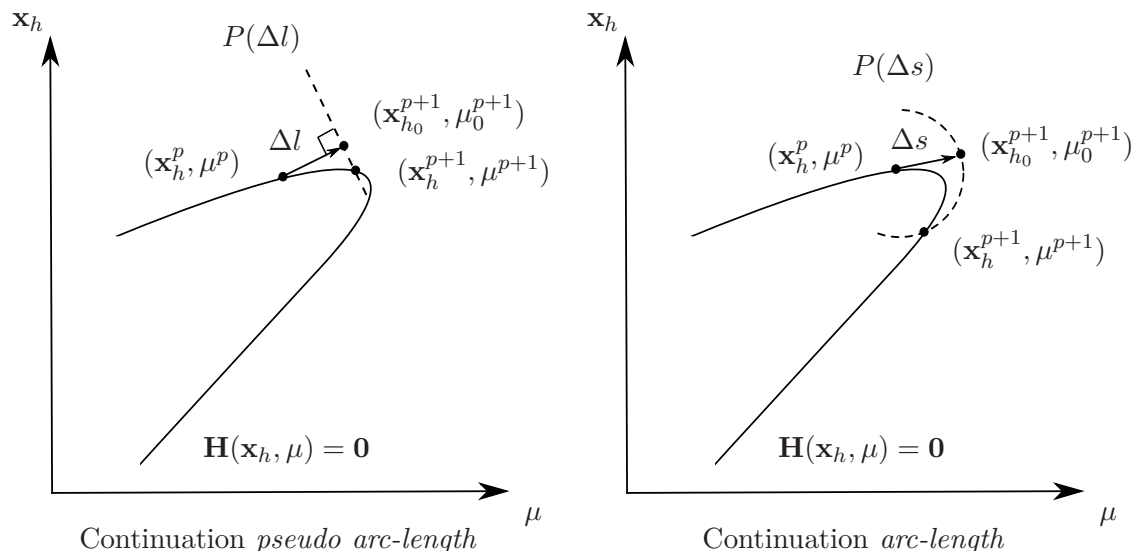


FIGURE II.6 – Procédures de correction pour la paramétrisation par longueur d'arc

1. Initialisation à $p = 0$: (\mathbf{x}_h^0, μ^0) ;
2. Étape de prédiction : $(\mathbf{x}_{h_0}^{p+1}, \mu_0^{p+1})$;
3. Étape de correction :
 - (a) Initialisation du processus à $i = 0$: $(\mathbf{x}_{h_0}^{p+1}, \mu_0^{p+1})$;
 - (b) Résolution du système (II.27) sous forme incrémentale : $\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_{h_i}^{p+1} \\ \Delta \mu_i^{p+1} \end{pmatrix}$;
 - (c) Nouvelle approximation : $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{h_{i+1}}^{p+1} \\ \mu_{i+1}^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{h_i}^{p+1} \\ \mu_i^{p+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_{h_i}^{p+1} \\ \Delta \mu_i^{p+1} \end{pmatrix}$;
 - (d) Retour à l'étape 3.(b) tant qu'il n'y a pas convergence ;
4. Obtention du point recherché : $(\mathbf{x}_h^{p+1}, \mu^{p+1})$;
5. Retour à l'étape 2 avec $p = p + 1$ pour le calcul d'un nouveau point.

4 Analyse de stabilité des solutions non-linéaires

Le principe des méthodes fréquentielles exposé auparavant en section 2.2 est de rechercher directement une solution périodique du système algébrique, impliquant que la solution obtenue peut être instable, autrement dit que cette solution n'est pas physiquement observable. En effet, la stabilisation vers un état d'équilibre stable correspond en fait à la phase transitoire d'une réponse. Par conséquent, les intégrateurs temporels ne peuvent converger que vers des solutions stables. En revanche, les approches fréquentielles ainsi que la méthode de tir, qui s'affranchit du calcul de la phase transitoire, ne permettent pas de déterminer si la solution est stable ou instable. C'est pourquoi, il est nécessaire de se doter d'outils permettant l'analyse de stabilité des solutions périodiques non-linéaires obtenues notamment dans le domaine fréquentiel.

4.1 Notions de stabilité

La notion de stabilité est large, il convient donc d'en donner les définitions dans le contexte d'étude de solutions périodiques. Pour cela, considérons que le système dynamique non-linéaire, qui peut être écrit dans l'espace d'état (*cf.* Eq. (II.5)), s'écrit sous la forme compacte suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{II.48})$$

Nous nous intéressons donc aux solutions périodiques de ce système qui sont définies par :

$$\exists T > 0 / \forall t > 0, \quad \mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$$

Cette solution est appelée cycle limite. En d'autres termes, un cycle limite est une solution périodique isolée et correspond à une orbite fermée isolée dans l'espace d'état. Un cycle limite est dit instable si toutes les orbites initiées dans son voisinage s'en éloignent quand $t \rightarrow +\infty$. Il est dit stable dans le cas contraire.

Plusieurs définitions existent comme la stabilité au sens de Lyapunov et la stabilité asymptotique qui ont un caractère global ou encore la stabilité locale.

4.1.1 Notion de stabilité globale

La définition la plus connue et la plus répandue est celle de Lyapunov. Une solution \mathbf{x} du système (II.48) est dite stable au sens de Lyapunov si :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall \mathbf{y} \text{ solution de (II.48)}, \\ \|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \forall t > t_0, \quad \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce n'est cependant pas la seule manière d'exprimer formellement la notion de stabilité. Il est souvent pratique de faire appel à la notion de stabilité asymptotique. Une solution est dite asymptotiquement stable si :

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 / \forall \mathbf{y} \text{ solution de (II.48)}, \\ \|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

D'autres définitions de la stabilité existent dans la littérature, notamment la stabilité orbitale introduite par Poincaré ou encore la stabilité Lagrangienne [Merkin, 1997]. En pratique, il est difficile de démontrer qu'une solution est globalement stable. Les études consistent alors principalement en l'analyse de la stabilité locale d'une solution au voisinage d'un point d'équilibre.

4.1.2 Notion de stabilité locale

Étudier la stabilité locale d'une solution périodique de (II.48) consiste à ajouter une petite perturbation \mathbf{p} à la solution \mathbf{x}_0 , dont l'évolution temporelle indiquera la stabilité de cette solution. Le mouvement perturbé définit l'évolution temporelle de la perturbation par :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{p}(t) \quad (\text{II.49})$$

Après l'introduction de cette relation dans l'équation du mouvement (II.48), le développement en série de Taylor au premier ordre de \mathbf{f} donne les équations du mouvement en variation :

$$\dot{\mathbf{p}} \approx \mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \mathbf{p} \quad (\text{II.50})$$

où $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}$ est la matrice jacobienne de \mathbf{f} évaluée en \mathbf{x}_0 la solution périodique. On se place alors dans un cadre dit local où seule la perturbation est étudiée, l'origine étant désormais placée sur la solution étudiée.

L'étude de stabilité locale se base donc sur la linéarisation de \mathbf{f} autour de la solution \mathbf{x}_0 , on parle alors d'analyse de stabilité linéarisée. La stabilité du système non-linéaire (II.48) est alors liée à celle du système linéarisé (II.50) autour de la solution \mathbf{x}_0 . La solution \mathbf{x}_0 est stable pour le système non-linéaire si $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ est asymptotiquement stable pour le système linéarisé. De même, elle est instable si $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ est instable. Ainsi, selon le théorème de Hartman-Grobman, le comportement dynamique localement au voisinage de la solution \mathbf{x}_0 du système non-linéaire (II.48) est qualitativement similaire à celui du système linéarisé (II.50) au voisinage de $\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

4.2 Outils d'analyse de stabilité

L'analyse de stabilité locale d'une solution périodique peut être réalisée soit dans le domaine temporel en se basant sur la théorie de Floquet, soit dans le domaine fréquentiel en se basant sur les déterminants de Hill.

4.2.1 Théorie de Floquet

Dans notre cadre d'étude, rappelons que le système d'équations dynamiques non-linéaire s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}_b \quad (\text{II.51})$$

La résolution de ce système est réalisée dans le domaine fréquentiel permettant d'obtenir la solution \mathbf{x}_h composée des coefficients harmoniques. À partir de cette solution harmonique, il est possible de recomposer la solution temporelle $\mathbf{q}_0(t)$ sur une période T . Dans le cadre d'étude de la stabilité locale de la solution, une perturbation \mathbf{p} est ajoutée à cette solution temporelle. Après substitution de la solution perturbée $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0(t) + \mathbf{p}(t)$ dans le système (II.51), puis en réalisant un développement en série de Taylor au premier ordre des efforts non-linéaires au voisinage de \mathbf{q}_0 , les équations du mouvement en variation s'écrivent :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}\mathbf{p} + \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0} \quad (\text{II.52})$$

Cette équation est réécrite dans l'espace d'état sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{B} \mathbf{y}(t) \quad (\text{II.53})$$

avec :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}_0)) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix}.$$

La théorie de Floquet traite des systèmes linéaires à coefficients périodiques comme celui qui est défini par l'équation (II.53). Pour présenter cette méthode, on introduira la notion de matrice fondamentale, qui permet de calculer la matrice de monodromie, dont le spectre, constitué des multiplicateurs de Floquet, indique si la solution est stable ou instable.

Le système (II.53) est composé de $2n$ équations linéaires à coefficients périodiques dans l'espace d'état et admet donc $2n$ solutions linéairement indépendantes \mathbf{y}_i , avec $i = 1, \dots, 2n$. Ces solutions sont appelées solutions fondamentales et peuvent être regroupées dans une matrice \mathbf{Y} de taille $2n \times 2n$, appelée matrice fondamentale :

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) & \cdots & \mathbf{y}_i(t) & \cdots & \mathbf{y}_{2n}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.54})$$

Cette matrice fondamentale vérifie les équations du mouvement en variation :

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{B} \mathbf{Y}(t) \quad (\text{II.55})$$

Comme la solution est périodique, de période T , on peut montrer que $\mathbf{Y}(t+T)$ est également une matrice fondamentale solution. De plus, comme les solutions $\mathbf{y}_i(t)$ sont linéairement indépendantes, alors les solutions $\mathbf{y}_i(t+T)$ doivent être des combinaisons linéaires des solutions $\mathbf{y}_i(t)$, ce qui peut s'écrire :

$$\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t)\Phi \quad (\text{II.56})$$

où Φ est une matrice constante de dimension $2n \times 2n$ dépendant de la matrice fondamentale choisie.

D'un point de vue pratique, les conditions initiales considérées pour la résolution du système (II.55) sont généralement $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}$, où \mathbf{I} est la matrice identité de taille $2n$. Avec la prise en compte de ces conditions initiales dans l'équation (II.56), on obtient l'expression de la matrice Φ :

$$\Phi = \mathbf{Y}(T) \quad (\text{II.57})$$

Cette matrice Φ est communément appelée matrice de monodromie. L'analyse de stabilité de la solution considérée \mathbf{q}_0 revient alors à étudier les valeurs propres de cette matrice de monodromie. La matrice $\mathbf{Y}(T)$ est obtenue en résolvant par intégration temporelle le système suivant sur une période, à savoir pour $t = [0, T]$:

$$\dot{\mathbf{Y}}^T = \mathbf{B}^* \mathbf{Y}^T \quad (\text{II.58})$$

avec :

$$\mathbf{Y}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{2n} \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrices de monodromie Φ , notées ρ_i , sont appelées les multiplicateurs de Floquet. La stabilité asymptotique de la solution périodique étudiée est déterminée à partir de la valeur absolue de l'ensemble des multiplicateurs, à savoir :

- si $\max_i |\rho_i| < 1$, la solution \mathbf{q}_0 est asymptotiquement stable ;
- si $\max_i |\rho_i| > 1$, la solution \mathbf{q}_0 est instable ;
- si $\max_i |\rho_i| = 1$, d'autres éléments sont nécessaires pour juger de la stabilité.

Dans le cas où un multiplicateur de Floquet est égal à 1, autrement dit qu'il se trouve sur le cercle unité dans le plan complexe, alors la solution périodique est dite non hyperbolique et une analyse non-linéaire est nécessaire pour statuer sur la stabilité de cette solution. Cet outil est très largement utilisé en dynamique non-linéaire, on trouve notamment des applications de cette méthode en dynamique des rotors [Sundararajan et Noah, 1997, Cardona *et al.*, 1998].

La méthode basée sur la théorie de Floquet est très précise pour le calcul de la stabilité des solutions non-linéaires. Néanmoins, elle nécessite l'intégration temporelle de $2n$ équations différentielles pour la construction de la matrice de monodromie, ce qui s'avère très coûteux en termes de temps de calcul.

4.2.2 Méthode de Hill

Les méthodes fréquentielles ont l'avantage d'être plus rapides que les méthodes temporelles pour déterminer les solutions périodiques. Afin de ne pas perdre le gain de temps lié à l'utilisation d'une méthode fréquentielle, l'étude de stabilité des solutions périodiques peut être réalisée dans le domaine fréquentiel avec la méthode de Hill.

Lors de la procédure de balance harmonique à N_h harmoniques, le système dynamique non-linéaire (II.51) est écrit dans le domaine fréquentiel en fonction de ses coefficients de Fourier (*cf.* Eq. (II.12)) :

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_h + \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h) = \mathbf{F}_{b_h} \quad (\text{II.59})$$

Considérons également que la solution périodique est perturbée par un terme périodique $\mathbf{z}(t)$ multiplié par un terme exponentiel :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0(t) + \mathbf{z}(t)e^{\lambda t} \quad (\text{II.60})$$

Lorsque cette relation est introduite dans l'équation du mouvement dans le domaine temporel (II.51), on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{K}\mathbf{q}_0 + e^{\lambda t} \left(\lambda^2 \mathbf{M}\mathbf{z} + \lambda (2\mathbf{M}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\mathbf{z}) \right) + \dots \\ e^{\lambda t} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z}) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}_0 + \mathbf{z}e^{\lambda t}) = \mathbf{F}_b \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

En développant en séries de Fourier tronquées à l'ordre N_h les solutions périodiques et après l'application de la procédure de balance harmonique au système (II.61), le système suivant est obtenu :

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{h_0} + \left(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{\Lambda}_1 + \lambda^2\mathbf{\Lambda}_2 \right) \mathbf{z}_h e^{\lambda t} + \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_{h_0} + \mathbf{z}_h e^{\lambda t}) = \mathbf{F}_{b_h} \quad (\text{II.62})$$

où \mathbf{x}_{h_0} est le vecteur regroupant les coefficients de Fourier de \mathbf{q}_0 , \mathbf{z}_h celui correspondant à la perturbation \mathbf{z} , l'expression de la matrice de raideur dynamique est inchangée, et les matrices $\mathbf{\Lambda}_1$ et $\mathbf{\Lambda}_2$ ont les expressions suivantes :

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{M} \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda}_1^1 & & \\ & & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{\Lambda}_1^k & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{\Lambda}_1^{N_h} \end{pmatrix}.$$

Les sous-blocs $\mathbf{\Lambda}_1^k$ s'écrivent :

$$\mathbf{\Lambda}_1^k = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & (2k\omega)\mathbf{M} \\ -(2k\omega)\mathbf{M} & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \text{ pour } k = 1, \dots, N_h.$$

De plus, un développement limité au premier ordre du terme correspondant aux efforts non-linéaires donne :

$$\mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_{h_0} + \mathbf{z}_h e^{\lambda t}) \approx \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_{h_0}) + \mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_{h_0}) \mathbf{z}_h e^{\lambda t} \quad (\text{II.63})$$

où $\mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{F}_{nl_h}$ est la matrice jacobienne de \mathbf{F}_{nl_h} évaluée en \mathbf{x}_{h_0} .

Finalement, après substitution de la dernière relation (II.63) dans le système algébrique non-linéaire (II.62), on obtient le problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$\left(\mathbf{A} + \lambda \mathbf{\Lambda}_1 + \lambda^2 \mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{J}_{\mathbf{x}_h} \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_{h_0}) \right) \mathbf{z}_h = \mathbf{0} \quad (\text{II.64})$$

Les valeurs propres issues de (II.64) sont complexes. Si elles possèdent toutes une partie réelle négative, alors l'amplitude de la perturbation va décroître au cours du temps et la solution périodique \mathbf{x}_{h_0} sera stable. En revanche, si une ou plusieurs valeurs propres possèdent une partie réelle positive, alors les amplitudes de la perturbation augmenteront exponentiellement au cours du temps, la solution périodique sera donc instable. Le critère de stabilité se formule donc de la façon suivante :

- si $\max_i (\text{Re}(\lambda_i)) < 0$, la solution \mathbf{x}_{h_0} est stable ;
- si $\max_i (\text{Re}(\lambda_i)) > 0$, la solution \mathbf{x}_{h_0} est instable ;
- si $\max_i (\text{Re}(\lambda_i)) = 0$, d'autres éléments sont nécessaires pour juger de la stabilité.

Cette méthode d'étude de stabilité dans le domaine fréquentiel présente l'avantage de ne nécessiter aucune intégration temporelle, contrairement à l'étude de stabilité selon la théorie de Floquet. Néanmoins, elle nécessite le calcul de la matrice jacobienne des termes non-linéaires ainsi qu'un développement en série de Fourier de la perturbation $\mathbf{z}(t)$ dont la troncature à l'ordre N_h peut influencer sur la précision du calcul de la stabilité. Un exemple de mise en œuvre de cette méthode est détaillé

par Sinha [Sinha, 2004] et Groll & Ewins [Groll et Ewins, 2001]. De plus, des études comparatives ont été réalisées [Guskov, 2007] entre la méthode basée sur la théorie de Floquet et celle basée sur les déterminants de Hill pour l'étude de stabilité de solutions non-linéaires. Ces études ont permis de montrer, au travers d'exemples simples, que proche du retournement de la courbe solution où il y a un doute sur la stabilité de la solution, la méthode de Hill ne permettait pas de statuer sur la stabilité de la solution. En effet, le développement en série de Fourier de la perturbation doit être poussé à un ordre N_h élevé afin de retrouver le résultat de stabilité fourni par la théorie de Floquet.

Malgré les récentes évolutions de la méthode de Hill [Lazarus et Thomas, 2010] qui semblent prometteuses, dans la suite le choix a été fait d'utiliser la méthode basée sur la théorie de Floquet pour l'analyse de stabilité des solutions périodiques non-linéaires.

5 Conclusion

Ce second chapitre se résume en la présentation des aspects non-linéaires dans les turbomachines et des techniques de résolution de systèmes dynamiques présentant des non-linéarités. Un intérêt particulier a été porté sur les non-linéarités de type contact, étant à la fois présentes dans les organes comme les paliers, mais aussi entre les pièces, notamment au sein des roues aubagées. Plusieurs modélisations ont été proposées et ont révélé la nature non-régulière de ce type de forces non-linéaires. L'obtention de régimes dynamiques du système a nécessité l'introduction de méthodes de résolution adaptées prenant en compte les non-linéarités de type contact. Diverses méthodes de calcul dédiées à la recherche de solutions périodiques d'un système non-linéaire ont alors été exposées, que ce soit dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Les méthodes fréquentielles se sont avérées plus efficaces en termes de temps de calcul pour traiter des problèmes de grande taille. Comme les forces non-linéaires de contact sont explicitement exprimées dans le domaine temporel, des stratégies d'alternance temps/fréquence ont également été introduites afin d'évaluer ces efforts dans le domaine temporel, en conservant la résolution du système non-linéaire dans le domaine fréquentiel. Afin de suivre l'évolution du comportement vibratoire de notre système en fonction d'un paramètre physique choisi, plusieurs techniques de continuation, couplées aux méthodes fréquentielles, ont ensuite été détaillées. Notons que les méthodes fréquentielles ne permettent pas de statuer sur la stabilité des solutions périodiques obtenues. L'analyse de stabilité des solutions doit alors être réalisée *a posteriori*, avec les outils qui ont été présentés à la fin de ce chapitre, comme la méthode basée sur la théorie de Floquet.

Les outils qui ont été présentés permettent donc de construire des solutions, d'en étudier la stabilité et l'évolution en fonction de la variation d'un paramètre du système. L'application de ces méthodes non-linéaires sera réalisée dans le chapitre suivant sur un système simplifié de bi-rotor aubagé.

Chapitre III

Modélisation et analyse d'un système bi-rotor aubagé simplifié

Dans ce chapitre, un modèle simplifié de bi-rotor aubagé est présenté. Ce modèle est constitué de deux arbres modélisés par une méthode de Rayleigh-Ritz et d'une roue aubagée constituée d'aubes souples modélisées par des poutres en flexion encastrées sur un disque rigide. Une première partie est dédiée à la formulation analytique du modèle avec la mise en place des équations liées à chacun des deux rotors ainsi qu'au modèle simplifié de roue aubagée. L'analyse linéaire du système passe par l'étude du diagramme de Campbell et de la réponse à balourd et permet déjà de mettre en évidence des couplages entre la dynamique des aubes et celle du bi-rotor. Après l'introduction d'une non-linéarité de type jeu avec contact au niveau des paliers, la réponse des aubes soumises à des excitations multi-fréquentielles, de type balourd BP et HP, est analysée.

Sommaire

1	Construction du modèle bi-rotor aubagé	72
1.1	Présentation du système développé	72
1.2	Formulation analytique du bi-rotor	73
1.3	Introduction d'un modèle simplifié de roue aubagée	77
1.4	Formulation matricielle du système couplé	78
2	Analyse linéaire du système bi-rotor aubagé	80
2.1	Validation du modèle bi-rotor	81
2.2	Analyse modale du bi-rotor aubagé	83
2.3	Réponse forcée du système couplé	89
3	Étude du système non-linéaire	94
3.1	Modélisation retenue pour la non-linéarité inter-arbre	94
3.2	Intérêt du choix du repère d'étude	96
3.3	Simulations non-linéaires	97
4	Conclusion	105

1 Construction du modèle bi-rotor aubagé

Dans cette première partie, nous présentons le banc d'essai bi-rotor mis en œuvre à l'École Centrale de Lyon au cours de précédents travaux de thèse [Guskov, 2007, Demailly, 2003, Viana Serra Villa, 2005]. Le modèle simplifié présenté par la suite sera recalé sur ce banc d'essai déjà caractérisé afin de le valider.

1.1 Présentation du système développé

Le modèle analytique de bi-rotor qui a été développé correspond à la géométrie du banc d'essai Dynamique D'Ensemble bi-rotor présent au laboratoire et illustré sur la figure III.1. Ce banc d'essai bi-rotor développé lors de précédents travaux est représentatif de la dynamique d'ensemble d'un moteur d'avion bi-rotatif. En effet, il représente, sous forme « dépliée » et à l'échelle 1/3, la composition d'un système bi-rotor coaxial avec le rotor HP placé à gauche, le rotor BP à droite et le roulement inter-arbre placé au milieu.

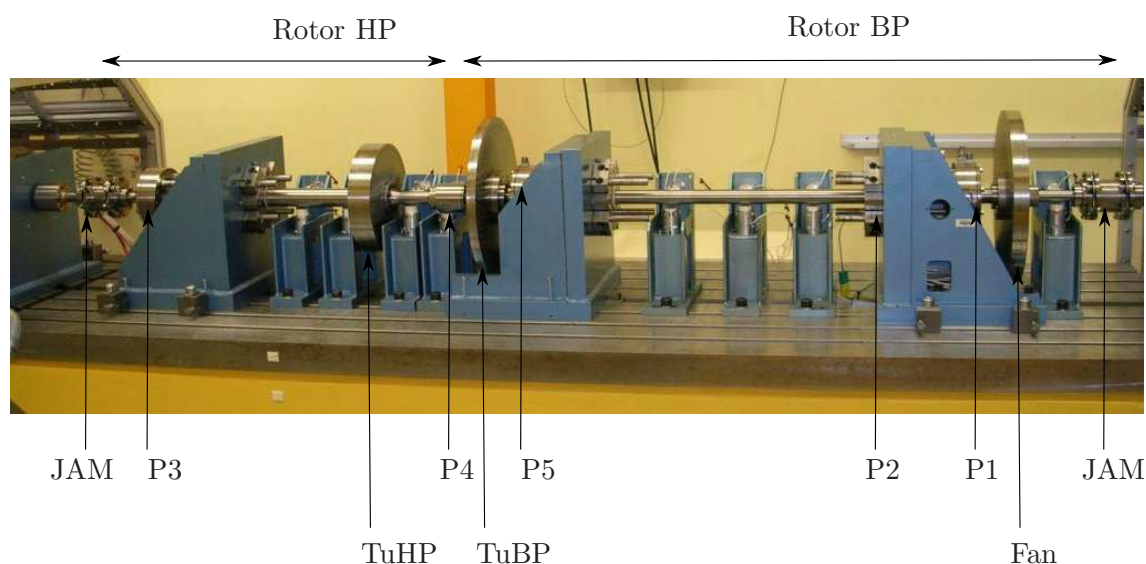


FIGURE III.1 – Banc d'essai bi-rotor

Le banc d'essai cherche à représenter un turboréacteur bi-rotor à cinq paliers. Le rotor Basse Pression (BP) compte trois paliers et deux disques :

- **P1** : palier fixe monté dans un support-palier attaché au carter avant ;
- **P2** : palier fixe attaché au carter intermédiaire ;
- **P5** : palier fixe monté dans un support-palier attaché au carter arrière ;
- **Fan** : disque modélisant le disque Fan ainsi que le compresseur BP ;
- **TuBP** : disque modélisant la turbine BP.

Le rotor Haute Pression (HP) compte deux paliers et un disque :

- **P3** : palier fixe monté dans un support-palier attaché au carter intermédiaire ;
- **P4** : palier inter-arbre ;
- **TuHP** : disque modélisant la turbine HP.

Enfin, les deux rotors sont également suspendus par des joints d'accouplement moteur (**JAM**) reliés à des moteurs qui permettent de mettre en rotation chacun des deux arbres avec des vitesses distinctes et maîtrisées.

Ainsi, le modèle de bi-rotor aubagé qui a été développé est constitué de deux rotors, un arbre HP et un arbre BP sur lequel est fixé une roue aubagée (*cf.* Figure III.2). Les deux arbres sont modélisés par des poutres de type Euler-Bernoulli. Des disques, non-aubagés pouvant raisonnablement être considérés rigides, sont présents sur chacun des arbres et sont modélisés par des masses concentrées et des inerties en rotation. Les rotors sont suspendus par des paliers représentés par des raideurs et des amortissements ponctuels. Ils ont leur propre vitesse de rotation et sont connectés entre eux par un palier inter-arbre.

Le modèle de roue aubagée introduit est ajouté au niveau du disque de turbine BP et consiste en un disque rigide représenté par ses caractéristiques inertielles et des aubes flexibles modélisées par des poutres d'Euler-Bernoulli, encastrées sur le disque.

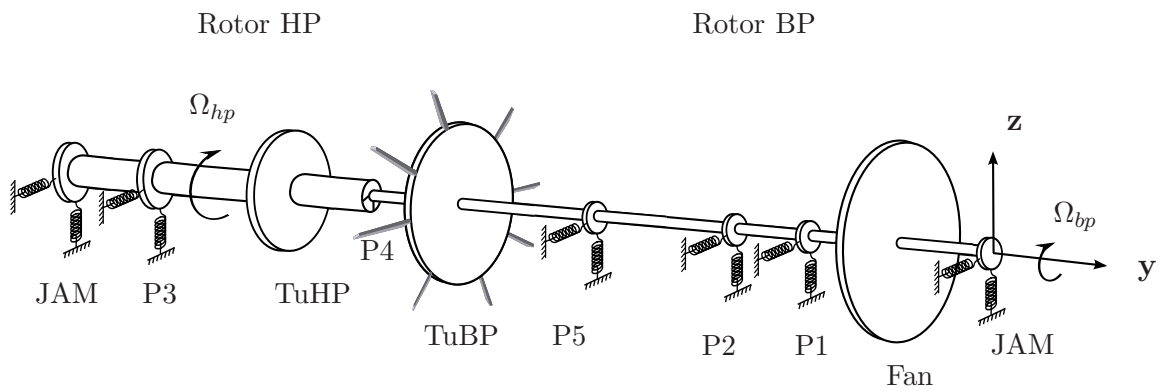


FIGURE III.2 – Modèle simplifié du bi-rotor aubagé

1.2 Formulation analytique du bi-rotor

Le modèle analytique qui a été développé pour le bi-rotor repose sur une formulation énergétique de Rayleigh-Ritz. Pour cette formulation analytique, des énergies et des potentiels correspondant à chacun des rotors doivent être définis (*cf.* Chap. I.3.1). Ces énergies sont définies pour chacun des éléments qui constituent les rotors, à savoir l'arbre, les disques ainsi que les paliers. Dans le modèle complet, une roue aubagée est introduite sur le rotor BP. Par conséquent, le choix a été fait de décrire le déplacement de chaque rotor dans le repère tournant lié au rotor BP afin de s'affranchir des termes périodiques liés aux aubes qui apparaîtraient dans le cas d'une écriture des équations dans le repère fixe. Le repère tournant lié au rotor BP est représenté par $\mathcal{R}_{bp} = (O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ sur la figure III.2.

Les deux paragraphes suivant donnent les expressions des énergies cinétiques et potentielles de chacun des rotors écrites dans le repère tournant.

1.2.1 Le rotor BP

Le rotor BP est constitué d'un arbre modélisé par une poutre élancée en rotation, les disques qu'il porte sont considérés rigides et les paliers sont modélisés par des raideurs et des amortissements ponctuels. Dans le cadre d'une modélisation poutre où seules les vibrations transversales sont prises en considération (*cf.* Chap. I.3.1), le vecteur déplacement du rotor BP exprimé dans son repère tournant s'écrit en fonction de son abscisse y par $\mathbf{u}_{bp}(y, t) = \begin{pmatrix} u_{bp}(y, t) \\ w_{bp}(y, t) \end{pmatrix}$.

L'arbre. L'énergie cinétique de l'arbre BP décrite dans son propre repère tournant est alors la suivante :

$$\mathcal{T}_{BP/BP} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_{bp}^T \dot{\mathbf{u}}_{bp} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_{bp}^T \boldsymbol{\Omega}_{bp} \mathbf{u}_{bp} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_{bp}^T \boldsymbol{\Omega}_{bp}^T \boldsymbol{\Omega}_{bp} \mathbf{u}_{bp} d\Omega \quad (\text{III.1})$$

où \mathbf{u}_{bp} est le vecteur déplacement du rotor BP défini dans son repère tournant et $\boldsymbol{\Omega}_{bp}$ est la matrice antisymétrique définie par les composantes du vecteur vitesse de rotation. Cette matrice résulte de la dérivée temporelle de la matrice de changement de repère, permettant de passer du repère fixe au repère tournant (*cf.* Chap. I.2.1). L'expression de cette matrice est la suivante :

$$\boldsymbol{\Omega}_{bp} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{bp} \\ -\Omega_{bp} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.2})$$

où Ω_{bp} désigne la vitesse de rotation du rotor BP.

L'énergie de déformation élastique de l'arbre BP est définie par l'énergie potentielle associée à la flexion de l'arbre. L'expression de ce potentiel n'est pas impactée par les changements de repère et s'écrit :

$$\mathcal{U}_{int_{BP}} = \frac{1}{2} \int_0^{l_{bp}} E_{bp} I_{bp} \mathbf{u}_{bp}''^T \mathbf{u}_{bp}'' dy \quad (\text{III.3})$$

avec E_{bp} , I_{bp} et l_{bp} le module d'Young, le moment d'inertie diamétral et la longueur de l'arbre BP, respectivement. \mathbf{u}_{bp}'' représente la dérivée seconde du vecteur déplacement \mathbf{u}_{bp} par rapport à y .

Les disques. Les disques qui sont considérés rigides ne contribuent qu'à l'énergie cinétique du système et sont également décrits dans le repère tournant \mathcal{R}_{bp} . L'expression de leur énergie cinétique comporte un terme de translation et un terme de rotation :

$$\mathcal{T}_{DBP} = \frac{1}{2} M_D \left(\dot{\mathbf{u}}_{bp}^T \dot{\mathbf{u}}_{bp} + 2 \dot{\mathbf{u}}_{bp}^T \boldsymbol{\Omega}_{bp} \mathbf{u}_{bp} + \mathbf{u}_{bp}^T \boldsymbol{\Omega}_{bp}^T \boldsymbol{\Omega}_{bp} \mathbf{u}_{bp} \right) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{bp}^T \mathbf{I}_D \boldsymbol{\omega}_{bp} \quad (\text{III.4})$$

avec M_D la masse du disque, $\boldsymbol{\omega}_{bp}$ le vecteur vitesse de rotation du disque BP exprimé dans le repère tournant et \mathbf{I}_D la matrice d'inertie du disque composée des inerties de rotation diamétrales et polaires. L'énergie cinétique écrite ci-dessus est calculée en l'abscisse $y = y_d$ de chacun des disques.

Les paliers. La contribution des paliers est introduite par un potentiel associé à leur raideur et par une fonction de dissipation associée à leur amortissement.

– Le potentiel :

$$\mathcal{U}_{\text{paliers}_{BP}} = \sum_{k=1}^{N_{\text{paliers}}} \frac{1}{2} \mathbf{u}_{bp}^T(y_p^k, t) \mathbf{K}_{\text{palier}} \mathbf{u}_{bp}(y_p^k, t) \quad (\text{III.5})$$

– La fonction de dissipation :

$$\mathcal{F}_{\text{paliers}_{BP}} = \sum_{k=1}^{N_{\text{paliers}}} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_{bp}^T(y_p^k, t) \mathbf{C}_{\text{palier}} \dot{\mathbf{u}}_{bp}(y_p^k, t) \quad (\text{III.6})$$

où $\mathbf{u}_{bp}(y_p^k, t)$ et $\dot{\mathbf{u}}_{bp}(y_p^k, t)$ sont le déplacement et la vitesse de l'arbre BP calculés en l'abscisse $y = y_p^k$ de chaque palier k . La matrice $\mathbf{K}_{\text{palier}}$ est composée des raideurs radiales des paliers et $\mathbf{C}_{\text{palier}}$ est la matrice composée des valeurs d'amortissement introduites dans les paliers, qui sont proportionnelles aux raideurs radiales. Leurs expressions sont les suivantes :

$$\mathbf{K}_{\text{palier}} = \begin{pmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{zz} \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{C}_{\text{palier}} = \begin{pmatrix} c_{xx} & 0 \\ 0 & c_{zz} \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Le rotor HP

De la même manière que pour le rotor BP, la formulation énergétique du rotor HP est exprimée dans le repère $\mathcal{R}_{bp} = (O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, pour chaque élément constitutif du rotor. Le vecteur déplacement du rotor HP est défini par $\mathbf{u}_{hp}(y, t) = \begin{pmatrix} u_{hp}(y, t) \\ w_{hp}(y, t) \end{pmatrix}$ dans son propre repère tournant \mathcal{R}_{hp} .

L'arbre. Tout d'abord, considérons que l'énergie cinétique de l'arbre HP exprimée dans son propre repère tournant s'écrit :

$$\mathcal{T}_{HP/HP} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_{hp}^T \dot{\mathbf{u}}_{hp} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_{hp}^T \boldsymbol{\Omega}_{hp} \mathbf{u}_{hp} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_{hp}^T \boldsymbol{\Omega}_{hp}^T \boldsymbol{\Omega}_{hp} \mathbf{u}_{hp} d\Omega \quad (\text{III.7})$$

où \mathbf{u}_{hp} est le vecteur déplacement du rotor HP défini dans son repère tournant et la matrice $\boldsymbol{\Omega}_{hp}$ a la forme suivante :

$$\boldsymbol{\Omega}_{hp} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{hp} \\ -\Omega_{hp} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.8})$$

avec Ω_{hp} la vitesse de rotation du rotor HP.

L'hypothèse est faite qu'il n'y a pas de roue aubagée sur le rotor HP afin de simplifier la formulation analytique du modèle. Les équations du rotor HP peuvent être projetées dans le repère tournant lié au rotor BP et à la roue aubagée. L'expression de l'énergie cinétique du rotor HP dans \mathcal{R}_{bp} est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{HP/BP} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_{hp}^T \dot{\mathbf{u}}_{hp} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_{hp}^T \boldsymbol{\Omega}_{hp}^{bp} \mathbf{u}_{hp} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_{hp}^T \boldsymbol{\Omega}_{hp} \mathbf{u}_{hp} d\Omega \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_{hp}^T \boldsymbol{\Omega}_{hp}^{bpT} \boldsymbol{\Omega}_{hp} \mathbf{u}_{hp} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_{hp}^T \boldsymbol{\Omega}_{hp}^{bpT} \boldsymbol{\Omega}_{hp}^{bp} \mathbf{u}_{hp} d\Omega \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_{hp}^T \boldsymbol{\Omega}_{hp}^T \boldsymbol{\Omega}_{hp} \mathbf{u}_{hp} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

où \mathbf{u}_{hp} représente maintenant le déplacement du rotor HP exprimé dans le repère tournant \mathcal{R}_{bp} et Ω_{hp}^{bp} est la matrice antisymétrique résultant de la dérivée de la matrice de passage du repère tournant HP au repère tournant BP, son expression est :

$$\Omega_{hp}^{bp} = \begin{pmatrix} 0 & (-\Omega_{hp} + \Omega_{bp}) \\ (\Omega_{hp} - \Omega_{bp}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.10})$$

L'énergie de déformation élastique de l'arbre HP est définie par le potentiel suivant :

$$\mathcal{U}_{int_{HP}} = \frac{1}{2} \int_0^{l_{hp}} E_{hp} I_{hp} \mathbf{u}_{hp}''^T \mathbf{u}_{hp}'' dy \quad (\text{III.11})$$

Les disques. La contribution des disques rigides est de nouveau obtenue à partir de l'expression de l'énergie cinétique du rotor HP projetée dans le repère BP calculée en l'abscisse $y = y_d$ de chacun des disques :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{D_{HP}} = & \frac{1}{2} M_D \left(\dot{\mathbf{u}}_{hp}^T \dot{\mathbf{u}}_{hp} + 2\dot{\mathbf{u}}_{hp}^T \Omega_{hp} \mathbf{u}_{hp} + 2\dot{\mathbf{u}}_{hp}^T \Omega_{hp}^{bp} \mathbf{u}_{hp} + \mathbf{u}_{hp}^T \Omega_{hp}^T \Omega_{hp} \mathbf{u}_{hp} \right. \\ & \left. + \mathbf{u}_{hp}^T \Omega_{hp}^{bpT} \Omega_{hp}^{bp} \mathbf{u}_{hp} + \mathbf{u}_{hp}^T \Omega_{hp}^{bpT} \Omega_{hp} \mathbf{u}_{hp} \right) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{hp}^T \mathbf{I}_D \boldsymbol{\omega}_{hp} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Les paliers. La contribution des paliers est définie de manière équivalente par rapport au rotor BP, à savoir par un potentiel et une fonction de dissipation.

– Le potentiel :

$$\mathcal{U}_{paliers_{HP}} = \sum_{k=1}^{N_{paliers}} \frac{1}{2} \mathbf{u}_{hp}^T(y_p^k, t) \mathbf{K}_{palier} \mathbf{u}_{hp}(y_p^k, t) \quad (\text{III.13})$$

– La fonction de dissipation :

$$\mathcal{F}_{paliers_{HP}} = \sum_{k=1}^{N_{paliers}} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_{hp}^T(y_p^k, t) \mathbf{C}_{palier} \dot{\mathbf{u}}_{hp}(y_p^k, t) \quad (\text{III.14})$$

où \mathbf{u}_{hp} et $\dot{\mathbf{u}}_{hp}$ représentent le déplacement et la vitesse du rotor HP exprimés dans le repère tournant \mathcal{R}_{bp} , leur expression dépend de la matrice de changement de repère et s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{hp/bp} = \mathbf{R}_{hp}^{bp} \mathbf{u}_{hp/hp} ; \\ \dot{\mathbf{u}}_{hp/bp} = \Omega_{hp}^{bp} \mathbf{R}_{hp}^{bp} \mathbf{u}_{hp/hp} + \mathbf{R}_{hp}^{bp} \dot{\mathbf{u}}_{hp/hp}. \end{cases}$$

Afin d'achever la formulation énergétique du bi-rotor, il convient de définir la contribution liée au palier inter-arbre qui connecte les deux rotors. Comme pour les paliers, un potentiel et une fonction de dissipation sont définis :

– Le potentiel :

$$\mathcal{U}_{inter} = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{u}(y_{inter}, t))^T \mathbf{K}_{inter} (\Delta \mathbf{u}(y_{inter}, t)) \quad (\text{III.15})$$

– La fonction de dissipation :

$$\mathcal{F}_{inter} = \frac{1}{2} (\Delta \dot{\mathbf{u}}(y_{inter}, t))^T \mathbf{C}_{inter} (\Delta \dot{\mathbf{u}}(y_{inter}, t)) \quad (\text{III.16})$$

où $\Delta \mathbf{u}(y_{inter}, t) = \mathbf{u}_{hp}(y_{inter}, t) - \mathbf{u}_{bp}(y_{inter}, t)$ est la différence de déplacement entre le rotor HP et le rotor BP calculée en l'abscisse y_{inter} du palier inter-arbre.

1.3 Introduction d'un modèle simplifié de roue aubagée

Dans la littérature dédiée aux machines tournantes, différentes modélisations sont adoptées pour la définition des aubes. Elles peuvent être modélisées par des poutres permettant de réaliser des études paramétriques sur des modèles de petite taille, ou alors leur géométrie réelle 3D est modélisée par éléments finis permettant d'avoir une description plus fine de la pièce étudiée. Afin de pouvoir écrire le modèle analytique du système couplé bi-rotor aubagé, nous avons fait le choix dans ce chapitre de modéliser les aubes par des poutres.

Le modèle simplifié défini pour la roue aubagée s'inspire d'un modèle précédemment développé par Sinha [Sinha, 2004]. Les aubes flexibles sont donc modélisées par des poutres de type Euler-Bernoulli et sont encastées sur un disque rigide du rotor BP. La figure III.3 indique le paramétrage utilisé pour la définition des aubes. Leur orientation est définie par un angle d'incidence β par rapport au plan du disque rigide, et l'aube j est repérée par l'angle $\alpha_j = \frac{2\pi j}{N_b}$ dans le repère tournant $\mathcal{R}_{bp} = (O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

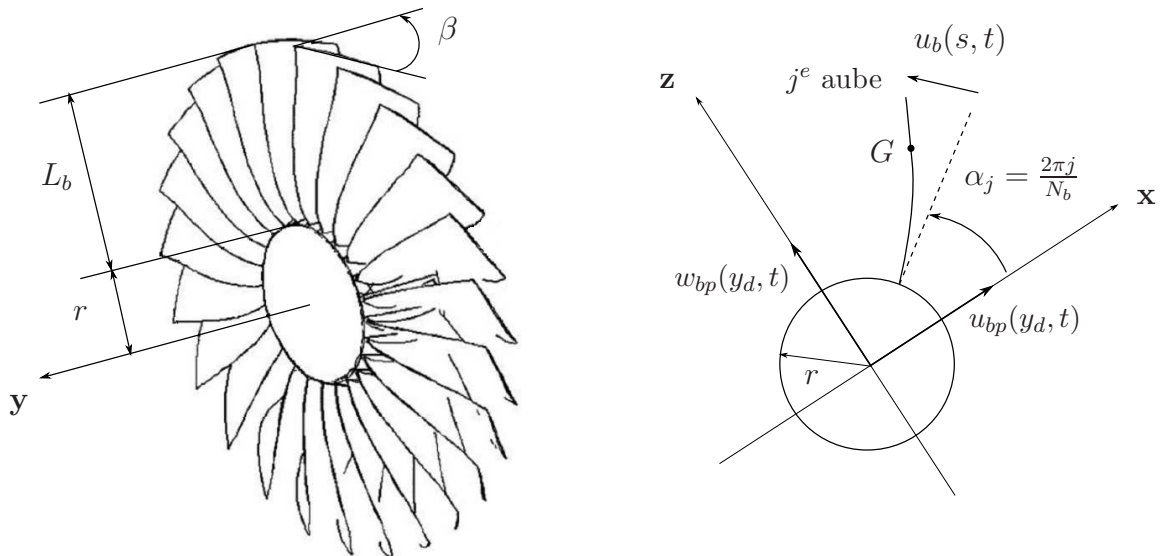


FIGURE III.3 – Paramétrage du modèle simplifié de roue aubagée

Comme une approche énergétique est utilisée pour décrire le modèle complet dans le repère \mathcal{R}_{bp} , l'énergie cinétique de la j^e aube peut être définie dans ce même repère

par :

$$\mathcal{T}_b^j = \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \rho_b S_b \mathbf{v}_{S/\mathcal{R}_f}^T(G) \mathbf{v}_{S/\mathcal{R}_f}(G) ds + \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}_f}^T \mathbf{I}_b \boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}_f} ds \quad (\text{III.17})$$

où $\mathbf{v}_{S/\mathcal{R}_f}(G)$ et $\boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}_f}$ sont le vecteur vitesse et le vecteur rotation du centre de masse d'une section droite d'aube, définis dans le repère global en fonction des déplacements exprimés dans le repère tournant \mathcal{R}_{bp} . \mathbf{I}_b est la matrice d'inertie de l'aube définie dans son repère inertiel. \mathcal{R}_f indique le repère global fixe, N_b représente le nombre total d'aubes considérées, ρ_b et S_b représentent la densité et l'aire d'une section droite d'aube, respectivement. Pour une définition complète de cette énergie cinétique, le vecteur de rotation $\boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}_f}$ d'une section droite d'aube est développé également au second ordre, comme pour la définition des rotors [Sinha, 2005, Lesaffre, 2007]. Notons que le déplacement d'une aube j exprimé dans le repère \mathcal{R}_{bp} est composé du terme de flexion de l'aube $u_b(s, t)$ indiquant sa déformation mais aussi du basculement du disque rigide qui les porte. Le déplacement du disque rigide est représenté sur la figure III.3 par $u_{bp}(y_d, t)$ et $w_{bp}(y_d, t)$.

La déformation élastique associée à la flexion des aubes est définie par l'énergie potentielle suivante :

$$\mathcal{U}_{int_b} = \frac{1}{2} \int_0^{L_b} E_b I_{b_{diam}} \left(u_b''(s, t) \right)^2 ds \quad (\text{III.18})$$

où E_b est le module d'Young des aubes, $I_{b_{diam}}$ est le moment d'inertie diamétral, s désigne l'abscisse curviligne le long de la fibre moyenne de l'aube et u_b est le déplacement d'une aube.

De plus, chaque aube est soumise à une force centrifuge résultant de la rotation de la structure. Ces effets centrifuges sont modélisés par un potentiel de précontrainte, dont l'expression est la suivante :

$$\mathcal{U}_{cen_b} = \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \rho_b S_b \Omega_{bp}^2 \left(\frac{(r + L_b)^2 - (s + r)^2}{2} \right) u_b'^2(s, t) ds \quad (\text{III.19})$$

où Ω_{bp} est la vitesse de rotation du rotor BP et r le rayon du disque rigide qui porte les aubes.

1.4 Formulation matricielle du système couplé

Les formes continues des énergies viennent d'être définies pour chacun des deux rotors ainsi que pour la roue aubagée. La formulation énergétique du système couplé bi-rotor aubagé s'écrit dans le repère \mathcal{R}_{bp} comme la somme de toutes les énergies

qui viennent d'être définies :

$$\begin{cases} \mathcal{T} = \mathcal{T}_{BP/BP} + \mathcal{T}_{D_{BP}} + \mathcal{T}_{HP/BP} + \mathcal{T}_{D_{HP}} + \sum_{j=1}^{N_b} \mathcal{T}_b^j ; \\ \mathcal{U} = \mathcal{U}_{int_{BP}} + \mathcal{U}_{int_{HP}} + \mathcal{U}_{paliers_{BP}} + \mathcal{U}_{paliers_{HP}} + \sum_{j=1}^{N_b} (\mathcal{U}_{int_b} + \mathcal{U}_{cen_b}) + \mathcal{U}_{inter} ; \\ \mathcal{F} = \mathcal{F}_{paliers_{BP}} + \mathcal{F}_{paliers_{HP}} + \mathcal{F}_{inter}. \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Dans la suite, ce sont les déplacements approchés de la structure qui sont recherchés. La méthode de discrétisation utilisée est l'approximation de Rayleigh-Ritz qui consiste à décomposer le champ de déplacement en un produit de fonctions de l'espace et du temps.

En ce qui concerne les rotors, deux directions de déplacement sont considérées, à savoir les deux translations orthogonales dans le plan du disque. Les expressions des déplacements transverses u_i et w_i sont les suivantes :

$$\mathbf{u}_i(y, t) = \begin{cases} u_i(y, t) = \sum_{m=0}^{m_{tot}} U_m^i(t) V_m^i(y) \\ w_i(y, t) = \sum_{m=0}^{m_{tot}} W_m^i(t) V_m^i(y) \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

où l'indice i représente soit le rotor BP, soit le rotor HP, y est l'abscisse le long de l'arbre et m_{tot} est le nombre de fonctions de Ritz considérées pour décrire la flexion de l'arbre. $V_m^i(y)$ représente les fonctions de forme polynomiales associées à chacun des rotors, leur expression est :

$$V_m^i(y) = \left(\frac{y}{l_i} \right)^m \quad (\text{III.22})$$

Le système étant symétrique de révolution, ces fonctions sont identiques pour les deux directions transverses. De plus, le nombre de fonctions utilisées pour chacun des deux rotors est identique étant donné que les grandeurs caractéristiques et les fréquences de sollicitations envisagées des deux arbres sont similaires.

D'autre part, pour la discrétisation du déplacement de l'aube, seule une direction de déplacement par aube est considérée pour représenter leur flexion (*cf.* Figure III.4).

La flexion de chaque aube est définie par l'approximation de Rayleigh-Ritz suivante :

$$u_b^j(s, t) = \sum_{n=1}^{n_{tot}} X_n^j(t) Y_n^j(s) \quad (\text{III.23})$$

où n_{tot} représente le nombre de fonctions de Ritz considérées pour la flexion de la j^e aube. $Y_n^j(s)$ sont les fonctions de forme des aubes qui satisfont la condition d'encastrement en pied d'aube, leur expression est la suivante :

$$Y_n(s) = \sin(a_n s) + b_n s + c_n s^2 \quad (\text{III.24})$$

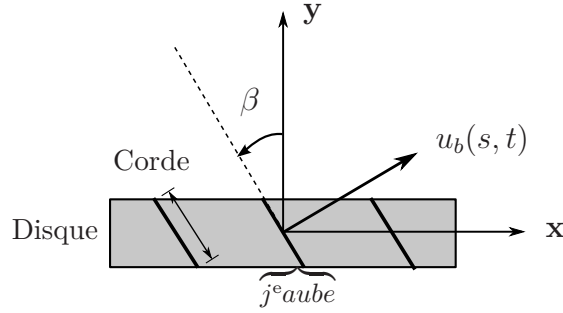


FIGURE III.4 – Vue du dessus du disque rigide aubagé

$$\text{avec } \begin{cases} a_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L_b}, \\ b_n = -a_n, \\ c_n = \left(\frac{b_n^2}{2}\right) \sin(b_n L_b). \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Après substitution des équations (III.21) et (III.23) dans les formes continues des énergies (III.20), l'application des équations de Lagrange conduit à l'équation matricielle régissant le comportement dynamique du système couplé dans le repère tournant \mathcal{R}_{bp} :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{K}_c + \mathbf{C}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (\text{III.26})$$

Dans cette équation de mouvement, \mathbf{M} est la matrice de masse du bi-rotor aubagé, \mathbf{D} la matrice d'amortissement, \mathbf{G} la matrice gyroscopique qui est proportionnelle aux vitesses de rotation des rotors Ω_{bp} et Ω_{hp} , \mathbf{K} la matrice de raideur élastique, \mathbf{K}_c la matrice de raideur de précontrainte centrifuge proportionnelle à Ω_{bp}^2 , \mathbf{N} la matrice d'assouplissement centrifuge proportionnelle à Ω_{bp}^2 pour la contribution du rotor BP et à Ω_{hp}^2 pour la contribution du rotor HP et enfin \mathbf{C} la matrice contenant la dissipation des paliers, résultant de la description en repère tournant.

Le vecteur des déplacements généralisés $\mathbf{q}(t)$ est une combinaison de tous les degrés de liberté du système couplé et il est organisé de la façon suivante :

$$\mathbf{q}(t) = \left[U_0^{hp}(t) W_0^{hp}(t) \cdots U_{m_{tot}}^{hp}(t) W_{m_{tot}}^{hp}(t) U_0^{bp}(t) W_0^{bp}(t) \cdots \right. \\ \left. U_{m_{tot}}^{bp}(t) W_{m_{tot}}^{bp}(t) X_1^1(t) \cdots X_{n_{tot}}^1(t) \cdots X_1^{N_b}(t) \cdots X_{n_{tot}}^{N_b}(t) \right]^T \quad (\text{III.27})$$

La formulation énergétique qui vient d'être développée a permis d'aboutir au système matriciel régissant le comportement dynamique du bi-rotor aubagé. À partir de cette formulation matricielle, l'analyse linéaire du système couplé est réalisée dans la suite.

2 Analyse linéaire du système bi-rotor aubagé

Dans cette partie, nous exploitons l'équation dynamique du système (III.26) pour réaliser l'étude des éléments propres du système linéaire puis la réponse forcée. Dans

un premier temps, le modèle bi-rotor est validé par rapport aux résultats expérimentaux du banc d'essai qui vient d'être présenté, puis les notions particulières relatives au système couplé telles que le diagramme de Campbell, les vitesses critiques, et la réponse à balourd sont analysées.

2.1 Validation du modèle bi-rotor

Tout d'abord, le problème aux valeurs propres a été calculé pour le système bi-rotor, sans prendre en compte la participation des aubes. L'équation du mouvement (III.26) obtenue dans la partie précédente peut être mise sous forme d'équation d'état. La mise sous forme d'équation d'état permet de mettre l'équation de la dynamique du système bi-rotor sous forme d'équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{\mathbf{Q}} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{pmatrix} \mathbf{Q} = \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (\text{III.28})$$

où \mathbf{I}_n est la matrice identité de taille n , avec n la taille totale du système dynamique, la matrice $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{K}_c$ représente la matrice de raideur généralisée et $\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{pmatrix}$.

Cette forme permet de se ramener à un problème simple aux valeurs propres. En effet, en posant $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 e^{\lambda t}$, le problème à résoudre devient : $(\lambda \mathbf{I}_{2n} + \mathbf{A}) \mathbf{Q}_0 = \mathbf{0}$. Ce problème possède $2n$ solutions complexes conjuguées et la résolution de ce système fournit donc les $2n$ valeurs propres λ_i et les vecteurs propres associés $\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_i \\ \lambda_i \mathbf{q}_i \end{pmatrix}$, pour $i = 1, \dots, 2n$.

Le vecteur des déplacements physiques, par exemple pour le rotor BP, se reconstruit de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_{bp}(y, t) = \sum_{i=1}^{2n} \Phi_{bp} \mathbf{q}_i e^{\lambda_i t} \quad (\text{III.29})$$

où Φ_{bp} est la matrice contenant les fonctions de formes $V_m(y)$ du rotor BP.

Dans l'idée de valider le système bi-rotor développé, les valeurs des paramètres qui ont été prises en considération pour le modèle correspondent aux caractéristiques du banc d'essai bi-rotor. Ces valeurs de paramètres sont reportées dans le tableau III.1.

Les résultats modaux obtenus en termes de fréquences propres et de déformées propres sont comparés avec les résultats expérimentaux obtenus lors de précédents travaux sur le banc d'essai qui a été présenté en début de chapitre. On constate que les déformées propres numériques sont en accord avec celles obtenues expérimentalement (*cf.* Figure III.5).

Pour simplifier la lecture de ces déformées, le rotor HP est représenté en rouge (à droite) et le rotor BP est en bleu (à gauche). Sur les déformées propres numériques, la position des paliers est repérée par les points noirs. Le premier mode est

Notation	Description	Valeur
l_{hp}	Longueur de l'arbre HP	1 m
d_{hp}	Diamètre de l'arbre HP	0,05 m
y_{TuHP}	Abscisse du disque TuHP	-0,2 m
$M_{d_{TuHP}}$	Masse du disque TuHP	40 kg
$I_{diam_{TuHP}}$	Moment d'inertie diamétral du disque TuHP	0,24 kg · m ²
$I_{pol_{TuHP}}$	Moment d'inertie polaire du disque TuHP	0,465 kg · m ²
$y_{JAM_{HP}}$	Abscisse JAM du rotor HP	-1 m
y_{P3}	Abscisse du palier P3 du rotor HP	-0,9 m
$K_{JAM_{HP}}$	Raideur du JAM du rotor HP	$4,3 \times 10^4$ N/m
K_{P3}	Raideur palier + support-palier P3 du rotor HP	3×10^6 N/m
l_{bp}	Longueur de l'arbre BP	1,7 m
d_{bp}	Diamètre de l'arbre BP	0,04 m
y_{TuBP}	Abscisse du disque TuBP	0,1 m
y_{FAN}	Abscisse du disque FAN	1,5 m
$M_{d_{TuBP}}$	Masse du disque TuBP	34 kg
$I_{diam_{TuBP}}$	Moment d'inertie diamétral du disque TuBP	0,4 kg · m ²
$I_{pol_{TuBP}}$	Moment d'inertie polaire du disque TuBP	0,8 kg · m ²
$M_{d_{FAN}}$	Masse du disque FAN	50 kg
$I_{diam_{FAN}}$	Moment d'inertie diamétral du disque FAN	0,6 kg · m ²
$I_{pol_{FAN}}$	Moment d'inertie polaire du disque FAN	0,12 kg · m ²
y_{P5}	Abscisse du palier P5 du rotor BP	0,2 m
y_{P2}	Abscisse du palier P2 du rotor BP	1,2 m
y_{P1}	Abscisse du palier P1 du rotor BP	1,4 m
$y_{JAM_{BP}}$	Abscisse JAM du rotor BP	1,7 m
K_{P5}	Raideur palier + support-palier P5 du rotor BP	$1,5 \times 10^7$ N/m
K_{P2}	Raideur du palier P2 du rotor BP	1×10^9 N/m
K_{P1}	Raideur palier + support-palier P1 du rotor BP	1×10^7 N/m
$K_{JAM_{BP}}$	Raideur du JAM du rotor BP	$4,3 \times 10^4$ N/m
$E_{hp,bp}$	Module d'Young des rotors	210×10^9 N/m ²
$\rho_{hp,bp}$	Masse volumique des rotors	7800 kg/m ³
$m_{tot_{hp,bp}}$	Nombre de fonctions de Ritz considérées pour la flexion des arbres	6
y_{inter}	Abscisse du palier inter-arbre	0 m
K_{inter}	Raideur du palier inter-arbre	1×10^9 N/m

TABLE III.1 – Valeur des paramètres du système bi-rotor

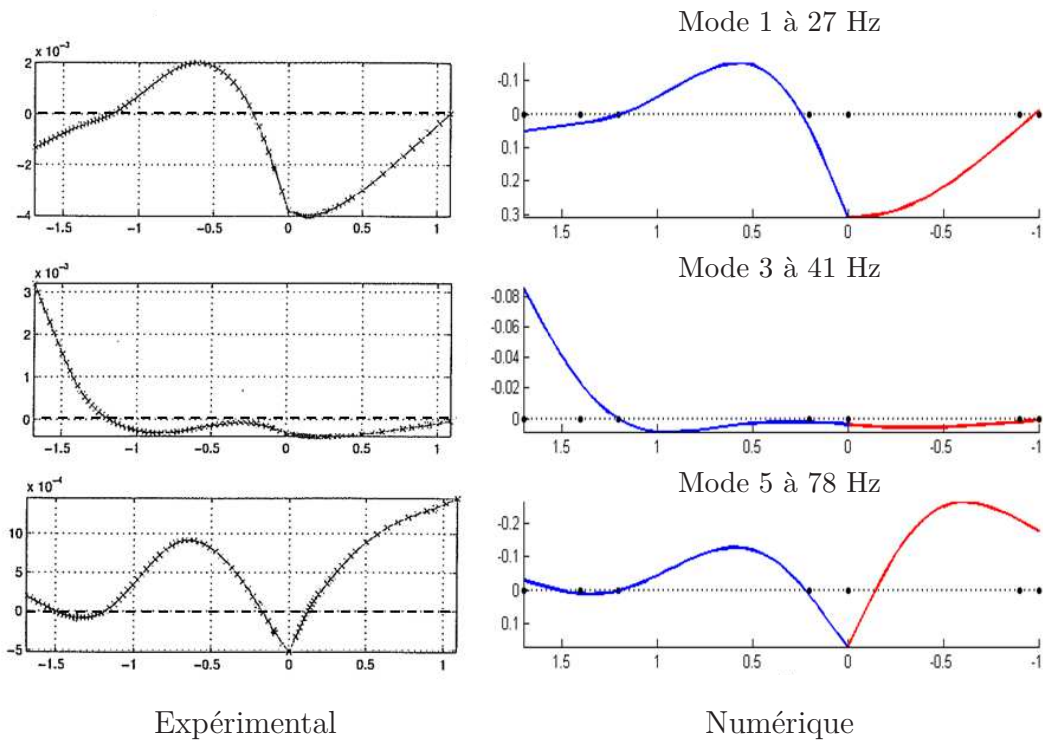


FIGURE III.5 – Comparaison des déformées propres de bi-rotor, avec à gauche les déformées propres expérimentales et à droite les déformées propres numériques

identifié comme étant un mode de « suspension turbine BP » car une grande partie de l'énergie de déformation est dans le support-palier P5 qui se trouve à côté de la turbine BP. Le second mode est identifié comme un mode de « suspension fan » associé essentiellement à la déformation du support-palier P1 de la soufflante. Enfin le troisième mode correspond au mode de « suspension compresseur HP » qui fait surtout travailler le support-palier P3 du rotor HP.

2.2 Analyse modale du bi-rotor aubagé

Maintenant que la partie bi-rotor a été validée, il semble naturel d'introduire le modèle simplifié de roue aubagée sur l'arbre BP modélisant la turbine BP. Dans cette configuration, les aubes sont dimensionnées pour vibrer à une fréquence voisine de 50 Hz. Les valeurs des paramètres liés aux aubes sont détaillées dans le tableau III.2.

Cette fréquence d'aube est très proche de celles du bi-rotor, ce qui laisse supposer qu'il y aura des couplages de modes entre les aubes et les rotors. Le modèle présenté ici est un modèle de roue aubagée comportant 6 aubes et une raideur de couplage est introduite dans le modèle entre chaque aube afin de coupler leur dynamique. La résolution de ce nouveau problème aux valeurs propres nous donne les fréquences et

Notation	Description	Valeur
N_b	Nombre total d'aubes	6
L_b	Longueur des aubes	0,17 m
E_b	Module d'Young des aubes	114×10^9 N/m ²
ρ_b	Masse volumique des aubes	4500 kg/m ³
β	Angle d'incidence des aubes	60 °
n_{tot}	Nombre de fonction de Ritz considérées pour la flexion des aubes	2

TABLE III.2 – Valeur des paramètres pour les aubes

déformées propres du système qui ont été calculées pour $\Omega_{hp} = \Omega_{bp} = 0$ tr/min.

Les déformées propres. Les déformées propres du système couplé sont représentées sur la figure III.6. Le système bi-rotor aubagé est axisymétrique ce qui implique que les fréquences propres sont doubles à vitesse nulle et qu'il existe deux modes de vibration de déformées identiques dans deux plans orthogonaux. Sur la figure III.6, seule une déformée propre par mode double est représentée. Ainsi, les deux premiers modes, le mode 1 (et 2) à 27 Hz et le mode 3 (et 4) à 41 Hz, sont essentiellement des modes de bi-rotor (*cf.* Figure III.5), où la vibration des aubes est négligeable. Néanmoins, sur ces deux modes de vibration, les aubes subissent le basculement du disque rigide qui les porte. Les quatre modes suivants, les modes notés 5, 6 (et 7), 8 (et 9) et 10 sont des modes pur d'aube. Au chapitre I, nous avons vu que les modes de vibration de roues aubagées étaient organisés en modes à diamètres. De manière générale, ce couplage entre la vibration des aubes est réalisé par le disque. Or, sur ce modèle simplifié, les aubes modélisées par des poutres sont encastées sur un disque rigide qui ne permet pas de coupler la dynamique des aubes. Afin d'organiser les modes d'aube en modes à diamètres, une raideur de couplage a donc été introduite dans le modèle simplifié entre chaque aube. Pour la roue aubagée considérée à 6 aubes, les aubes vibrent alors suivant un mode à 0 diamètre à 50,6 Hz, un mode double à 1 diamètre à 50,8 Hz, un mode double à 2 diamètres à 51,2 Hz et un mode à 3 diamètres à 51,3 Hz (*cf.* Figure III.7). Enfin, les deux derniers modes 11 (et 12) et 13 (et 14), qui sont doubles, sont des modes d'ensemble où il y a un couplage entre les modes de vibration du bi-rotor et les modes de vibration de roue aubagée à 1 diamètre.

Les résultats qui viennent d'être présentés ont été réalisés pour des vitesses de rotation nulles $\Omega_{hp} = \Omega_{bp} = 0$. Afin de suivre l'évolution du système couplé pour différents régimes moteurs, on trace classiquement l'évolution des fréquences propres en fonction d'un régime moteur sur un diagramme de Campbell.

Le diagramme de Campbell. Le diagramme de Campbell du bi-rotor aubagé représenté en figure III.8 est obtenu à partir du modèle développé dans le repère tournant \mathcal{R}_{bp} . Le modèle bi-rotor aubagé comporte deux rotors BP et HP qui ont leur propre vitesse de rotation. Le choix a été fait de représenter l'évolution des fré-

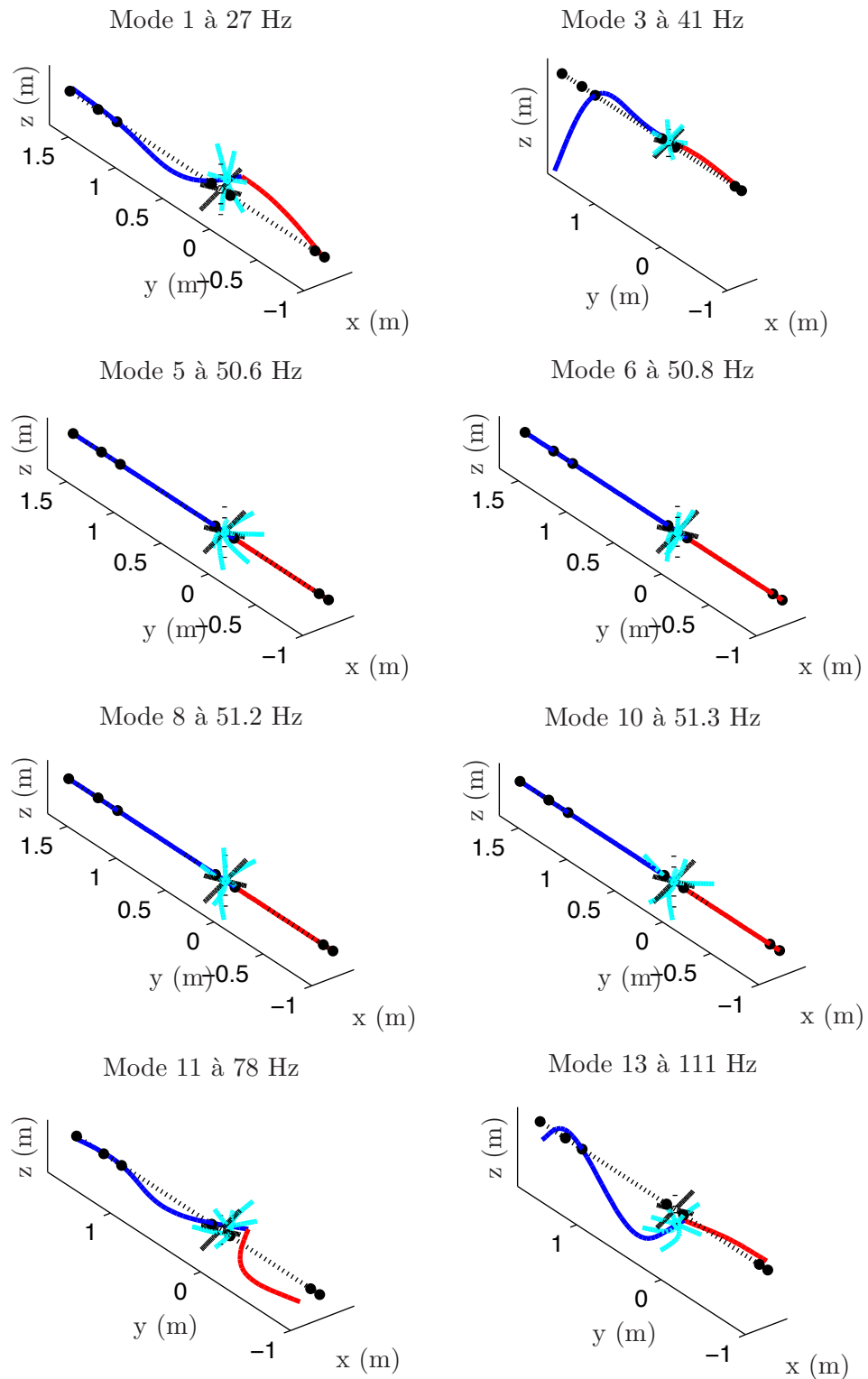


FIGURE III.6 – Déformées propres du bi-rotor aubagé à vitesse nulle

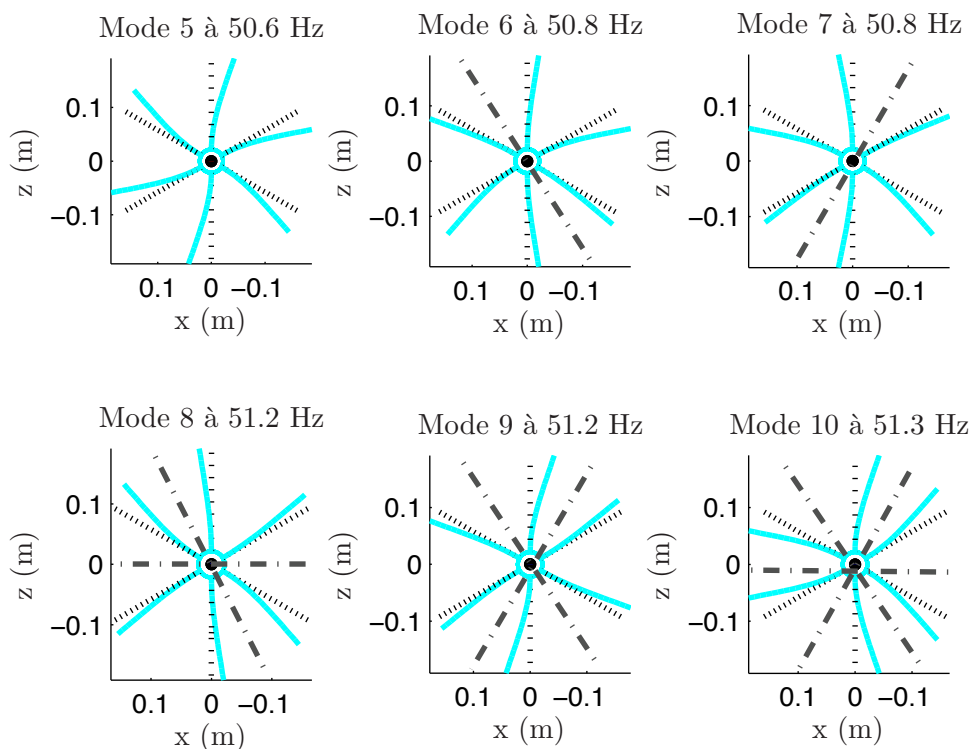


FIGURE III.7 – Zoom sur les modes pur d’aube ; les droites (— —) indiquent les diamètres nodaux

quences propres du système en fonction de la vitesse de rotation du rotor BP. Notons que la vitesse du rotor HP est fixée à $\Omega_{hp} = 2,8 \Omega_{bp}$. Les vitesses de rotation restent donc proportionnelles tout au long de la montée en régime, ce rapport entre les deux vitesses de rotation correspond à la limite supérieure de la plage de fonctionnement du moteur d’avion. Ainsi, du fait de la rotation propre de l’observateur dans le cas d’une modélisation dans le repère mobile \mathcal{R}_{bp} , les fréquences qui augmentent avec la vitesse de rotation sont associées aux modes rétrogrades et celles diminuant avec la vitesse de rotation sont associées aux modes directs (*cf.* Chap. I.3.3.1). Le diagramme de Campbell (*cf.* Figure III.8) est calculé pour des valeurs de vitesses Ω_{bp} comprises entre 0 et 2200 trs/min, ce qui correspond à la plage de fonctionnement du banc d’essai bi-rotor. Les droites bleues représentent l’évolution des modes d’ensemble. Étant donné que le bi-rotor est parfaitement axisymétrique, les fréquences propres à vitesse nulle sont bien doubles. Rappelons que les modes propres d’un système conservatif en rotation soumis à des effets gyroscopiques sont des modes complexes, deux à deux conjugués et à pulsation propre purement imaginaire. Ces effets gyroscopiques sont à l’origine de la dépendance des pulsations propres de la structure avec la vitesse de rotation. Ainsi l’ouverture des modes sur le diagramme de Campbell est caractéristique des effets gyroscopiques présents dans le système en rotation. D’autre part, les courbes rouges représentent les modes propres d’aube.

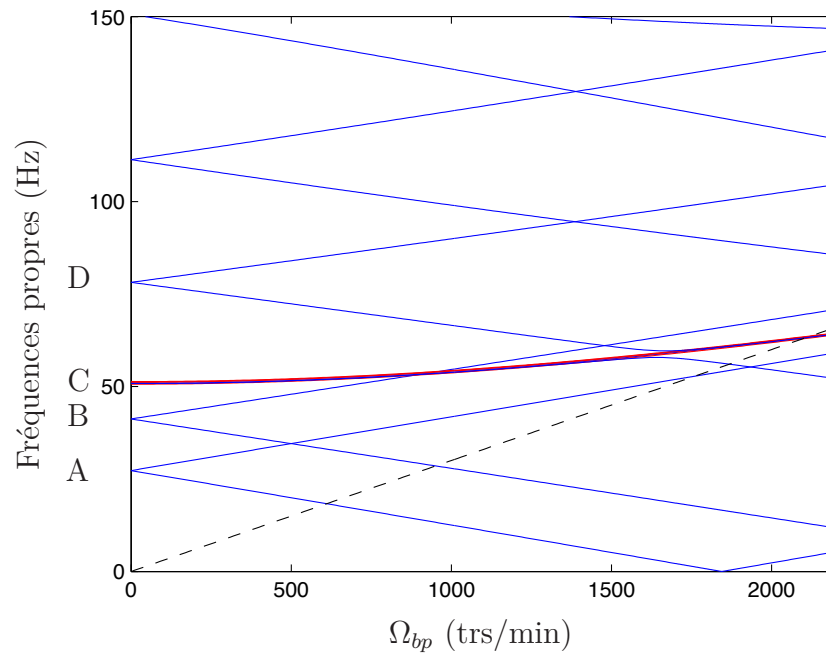


FIGURE III.8 – Diagramme de Campbell du bi-rotor aubagé dans le repère tournant BP avec (—) les modes d'ensemble, (—) les modes purs d'aube et (- - -) la synchronisme HP

Sur les modes d'aube, il n'y a pas de dédoublement fréquentiel en fonction de la vitesse de rotation, car les effets gyroscopiques sont négligeables [Charleux, 2006]. En revanche, les fréquences propres augmentent en fonction du régime moteur, ce qui est caractéristique des effets centrifuges qui ont été introduits dans le modèle d'aube au travers du potentiel de précontrainte (*cf.* Eq. (III.19)). Les modes d'aube purs forment un « paquet », notamment pour le premier mode de flexion d'aube que l'on peut visualiser sur la figure III.8. Les modes d'aube organisés en diamètres ont donc une fréquence très proche, mais bien distincte.

Afin d'apporter plus de clarté dans l'exposé, les modes qui nous intéressent sont notés par des lettres. Le mode A correspond au premier mode d'ensemble de la structure, le mode B au deuxième, le mode noté C correspond au premier mode de flexion des aubes à 1 diamètre et le mode D correspond à un mode d'ensemble. On constate sur ce diagramme de Campbell que la fréquence du premier mode de flexion des aubes à 1 diamètre, mode C, est très proche des fréquences des modes d'ensemble où la dynamique des rotors est prépondérante. Sur la figure III.9, un agrandissement du diagramme de Campbell est présenté sur la plage de vitesse de rotation $\Omega_{bp} = [1300; 2000]$ trs/min. La branche directe du mode D d'ensemble et la branche du premier mode de flexion des aubes à 1 diamètre, mode C, se rapprochent l'une de l'autre, donnant l'impression qu'elles vont simplement se croiser, mais elles se repoussent brutalement après avoir échangé leur pente. Si l'on suit la courbe continue décrite par les valeurs propres, on s'aperçoit que lorsque la pente change brutalement, les modes propres C et D eux aussi varient. En effet, au moment où

les valeurs propres se « repoussent », il y a échange des déformées propres entre ces deux modes. Ce phénomène, communément appelé *locus veering* a notamment été rapporté par Pierre [Pierre, 1988] et semble se produire entre des systèmes ayant des fréquences propres très voisines, ce qui est le cas ici avec les rotors et les aubes.

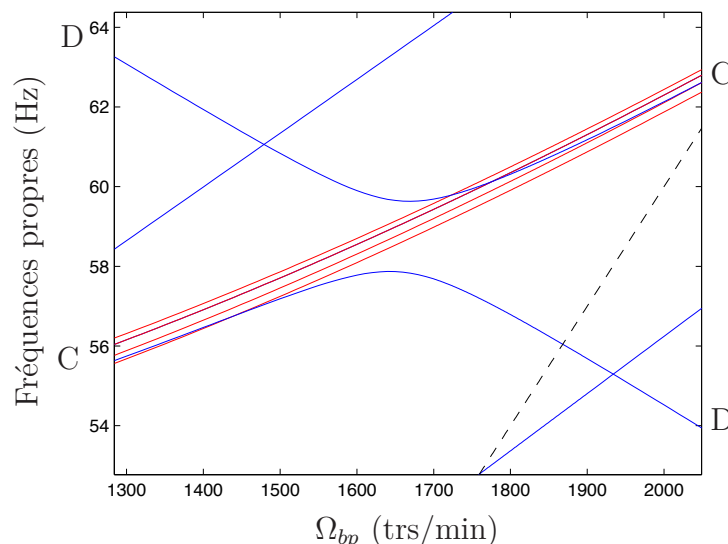


FIGURE III.9 – Agrandissement du Campbell sur la zone de locus veering

Les vitesses critiques. Le diagramme de Campbell donne aussi accès au placement des modes vis-à-vis des vitesses critiques. Ces vitesses critiques sont des critères essentiels pour le dimensionnement de la structure en rotation car elles prévoient les résonances du système par rapport aux excitations synchrones du moteur (*cf.* Chap. I.3.3.1). Vu que la représentation se fait dans le repère tournant, la lecture des vitesses critiques est plus délicate. Tout d'abord, rappelons que, lorsque le mode s'ouvre, la branche qui décroît correspond au mode direct, et la branche qui croît correspond au mode rétrograde. Les deux rotors BP et HP sont en configuration de co-rotation, ils tournent donc dans le même sens mais pas forcément à la même vitesse. Vu qu'il y a deux vitesses de rotation distinctes, il y aura deux droites d'excitation synchrone sur le diagramme de Campbell. Dans le repère tournant BP, la droite d'excitation liée à la rotation du rotor BP correspond à l'axe des abscisses $f = 0$. D'autre part, la droite d'excitation liée à la rotation du rotor HP, vue du repère BP, correspond à la droite $f = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$, droite en pointillés sur la figure III.8. Les vitesses critiques directe (resp. rétrogrades) se lisent à l'intersection entre les branches des modes directs (resp. rétrogrades) et les droites d'excitation $f = 0$ et $f = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$. Dans notre étude, le modèle de bi-rotor aubagé est complètement axisymétrique. Dans cette configuration, seuls les modes directs sont supposés répondre aux excitations de type balourd [Lalanne et Ferraris, 1998]. Les vitesses critiques directes du bi-rotor aubagé soumis aux balourds BP et HP sont reportées dans le tableau III.3.

Modes	Vitesses critiques directes (trs/min)	
	Balourd BP	Balourd HP
A	1850	610
B	—	960
C	—	2110
D	—	1870

TABLE III.3 – Vitesses critiques directes du bi-rotor aubagé

2.3 Réponse forcée du système couplé

Le système en vibrations libres vient d'être analysé, il est maintenant intéressant d'élargir l'étude à la réponse forcée de notre système, notamment aux réponses aux balourds BP et HP qui sont les excitations majeures dans notre système bi-rotatif. Rappelons que le balourd résulte du mouvement rotatif de masses excentrées du rotor par rapport à son axe de rotation induisant alors des efforts. La réponse à balourd de la structure est obtenue après résolution du système dynamique (III.26) avec la prise en compte de ces efforts de balourd.

Afin d'étudier la réponse forcée du système, de l'amortissement a été introduit au niveau des paliers. Le modèle d'amortissement utilisé est celui de Rayleigh :

$$\mathbf{D}_{paliers} = \alpha \mathbf{K}_{paliers} + \beta \mathbf{M}_{paliers}$$

L'amortissement a été paramétré de manière à respecter les observations expérimentales sur le banc d'essai bi-rotor, les coefficients prennent donc les valeurs suivantes $\alpha = 1 \times 10^{-5}$ s et $\beta = 0$ s⁻¹.

2.3.1 La réponse au balourd BP

Afin de déterminer les efforts engendrés par le balourd BP, il faut écrire l'énergie cinétique d'une masse excentrée m_b dans le repère mobile \mathcal{R}_{bp} . Notons que les forces de balourd BP dans le repère considéré sont constantes et s'écrivent :

$$\mathbf{F}_{bp} = m_{b_{bp}} e_{bp} \Omega_{bp}^2 \begin{pmatrix} \cos \alpha_{bp} \\ \sin \alpha_{bp} \end{pmatrix} \quad (\text{III.30})$$

où $m_{b_{bp}}$ représente la masse du balourd sur le disque BP, e_{bp} la distance entre la position du balourd et le centre du disque et α_{bp} l'angle repérant la position du balourd dans le plan (\mathbf{x}, \mathbf{z}) du repère tournant \mathcal{R}_{bp} .

Le bilan du travail des efforts extérieurs pour cette force de balourd BP s'écrit alors :

$$\delta W_{ext} = \mathbf{u}_{bp}^T \mathbf{F}_{bp} \quad (\text{III.31})$$

Après une étape de discrétisation de la forme continue du travail des efforts de balourd et application des équations de Lagrange $\frac{\partial \delta W_{ext}}{\partial \mathbf{q}}$, on obtient l'expression de l'effort généralisé :

$$\mathbf{F}_{b_{BP}} = \Phi_{bp}^T(y_d) \mathbf{F}_{bp} \quad (\text{III.32})$$

où $\Phi_{bp}(y_d)$ est la matrice contenant les fonctions de forme du rotor BP, $V_m(y)$, qui sont évaluées en l'abscisse du disque où se trouve le balourd.

Ainsi, la réponse à balourd de la structure est obtenue en résolvant le problème statique suivant :

$$(\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{K}_c + \mathbf{C}) \mathbf{q} = \mathbf{F}_{b_{BP}} \quad (\text{III.33})$$

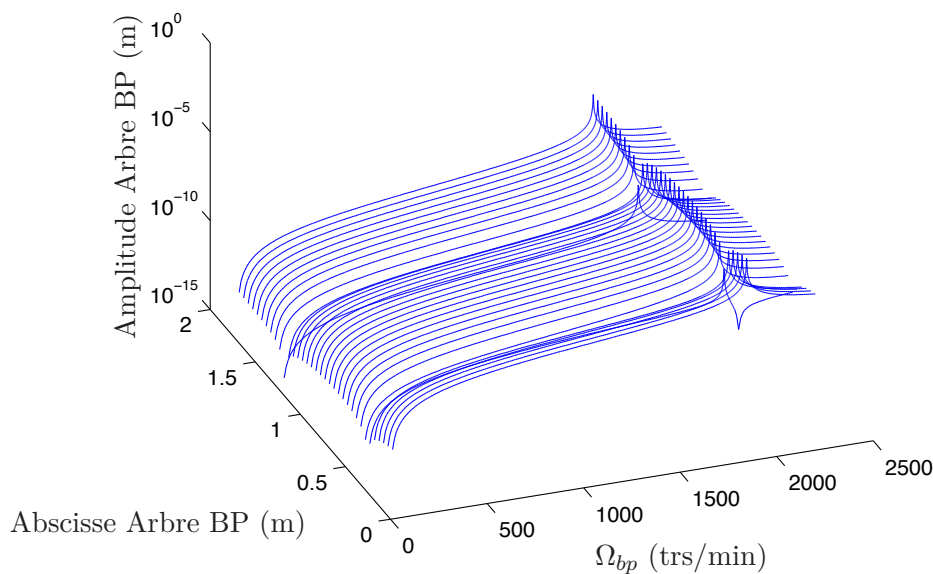


FIGURE III.10 – Réponse linéaire du rotor BP soumis au balourd BP

Les simulations numériques du système bi-rotor aubagé soumis à une excitation de type balourd BP sont présentées sur les figures III.10 et III.11. Rappelons que le système est complètement axisymétrique, seuls les modes directs sont donc supposés répondre à cette excitation synchrone. Au passage des vitesses critiques directes qui ont été relevées dans le tableau III.3, on s'attend alors à voir une résonance du système, qui se traduit par des mouvements de grande amplitude des différentes parties du moteur. Le balourd a été introduit sur le disque TuBP de l'arbre BP qui se situe à l'abscisse $y = 0, 1$ m. La masse de ce balourd est de $m_{d_{bp}} = 1$ g et il est localisé à une distance $e_{bp} = r_d$ du centre du disque, autrement dit sur le bord extérieur du disque. La figure III.10 illustre la réponse linéaire du rotor BP en toutes ses abscisses discrétisées, pour toutes les valeurs de vitesse de rotation comprises dans l'intervalle $\Omega_{bp} = [0; 2200]$ trs/min. On remarque qu'au passage de la vitesse critique du mode A, qui se trouve à l'abscisse $\Omega_{bp} = 1850$ trs/min, l'amplitude de déplacement du rotor BP atteint son maximum. L'amplitude maximale varie suivant l'abscisse discrétisée du rotor BP, on retrouve ainsi, en valeur absolue, la déformée opérationnelle du rotor BP pour le mode A qui avait été prédite par le calcul modal.

De la même façon, la réponse linéaire de l'aube 1 est représentée sur la figure III.11 et donne l'amplitude de déplacement, en chaque abscisse discrétisée de l'aube, pour

la valeur de balourd qui a été introduite. Notons que la réponse des autres aubes est identique en termes de fréquence de résonance et de niveau de réponse.

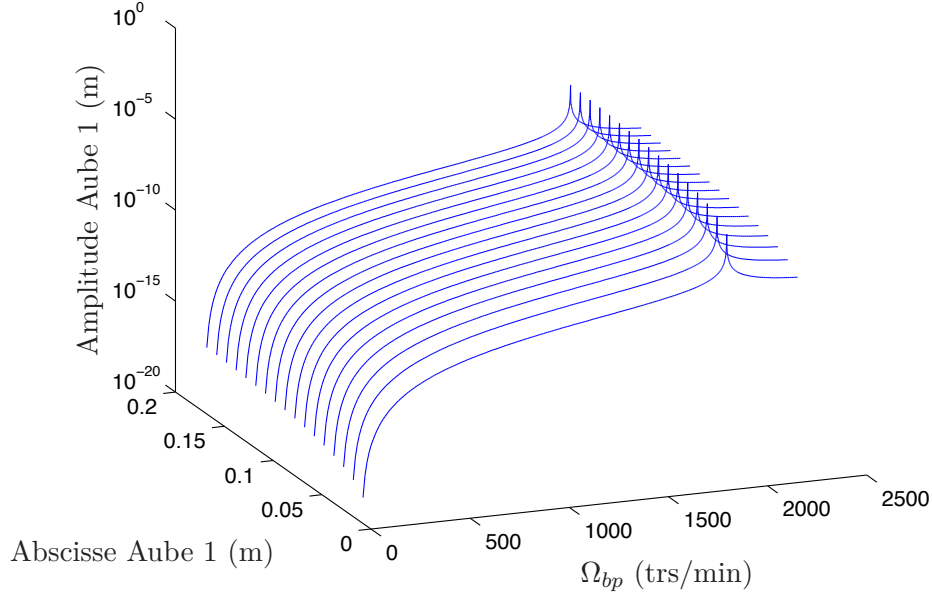


FIGURE III.11 – Réponse linéaire de l'aube 1 soumise au balourd BP

2.3.2 La réponse au balourd HP

Tout d'abord, considérons que l'énergie cinétique d'une masse excentrée du rotor HP est écrite dans son propre repère tournant \mathcal{R}_{hp} . L'expression des forces de balourd HP s'écrit alors comme précédemment :

$$\mathbf{F}_{hp} = m_{b_{hp}} e_{hp} \Omega_{hp}^2 \begin{pmatrix} \cos \alpha_{hp} \\ \sin \alpha_{hp} \end{pmatrix} \quad (\text{III.34})$$

Afin d'écrire le bilan du travail des forces extérieures, les forces de balourd doivent être projetées dans le repère tournant lié au rotor BP, car la formulation énergétique est écrite dans \mathcal{R}_{bp} :

$$\delta W_{ext} = \mathbf{u}_{hp}^T \mathbf{R}_{hp}^{bpT} \mathbf{F}_{hp} \quad (\text{III.35})$$

où la matrice de changement de repère s'écrit :

$$\mathbf{R}_{hp}^{bpT} = \begin{pmatrix} \cos((\Omega_{hp} - \Omega_{bp})t) & -\sin((\Omega_{hp} - \Omega_{bp})t) \\ \sin((\Omega_{hp} - \Omega_{bp})t) & \cos((\Omega_{hp} - \Omega_{bp})t) \end{pmatrix}$$

Après une étape de discrétisation et l'application des équations de Lagrange, l'expression de l'effort généralisé du balourd HP s'écrit :

$$\mathbf{F}_{b_{HP}} = \Phi_{hp}^T(y_d) \mathbf{R}_{hp}^{bpT} \mathbf{F}_{hp} \quad (\text{III.36})$$

L'effort généralisé dépend cette fois de la variable temporelle t *via* la matrice de rotation \mathbf{R}_{hp}^{bp} , les forces de balourd HP vues du repère \mathcal{R}_{bp} sont donc des forces harmoniques. Dans ce cas de figure, la réponse à balourd HP s'obtient en résolvant le système suivant :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{K}_c + \mathbf{C}) \mathbf{q} = \mathbf{F}_{b_{HP}} \quad (\text{III.37})$$

Afin de résoudre ce système linéaire, le mouvement vibratoire est décomposé en $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{cos} \cos(\omega t) + \mathbf{q}_{sin} \sin(\omega t)$, de la même forme que l'excitation (*cf.* Chap. I.3.3.3), ce qui revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \mathbf{M} & \omega \tilde{\mathbf{D}} \\ -\omega \tilde{\mathbf{D}} & \tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{cos} \\ \mathbf{q}_{sin} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{b_{HP}}^{cos} \\ \mathbf{F}_{b_{HP}}^{sin} \end{pmatrix} \quad (\text{III.38})$$

avec ω représentant l'harmonique moteur qui est la source d'excitation vue du repère BP, dont la valeur est la différence des deux vitesses de rotation $\omega = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$. Les matrices $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{K}_c + \mathbf{C}$ et $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \mathbf{G}$ sont les matrices de raideur et d'amortissement généralisées du bi-rotor aubagé et les efforts de balourd s'écrivent :

$$\mathbf{F}_{b_{HP}}^{cos} = m_{b_{hp}} e_{hp} \Omega_{hp}^2 \begin{pmatrix} \cos \alpha_{hp} \\ \sin \alpha_{hp} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{b_{HP}}^{sin} = m_{b_{hp}} e_{hp} \Omega_{hp}^2 \begin{pmatrix} \sin \alpha_{hp} \\ -\cos \alpha_{hp} \end{pmatrix}.$$

Les simulations numériques du système bi-rotor aubagé soumis à une excitation de type balourd HP sont présentées sur les figures III.12 et III.13. De la même façon que pour la réponse à balourd BP, les résonances du système vont apparaître au passage des vitesses critiques (*cf.* Tableau III.3). Dans le cas de l'excitation balourd HP, quatre vitesses critiques ont été identifiées sur la plage de vitesses de rotation étudiées $\Omega_{bp} = [0; 2200]$ trs/min.

Le balourd a été introduit sur le disque de l'arbre HP qui se situe à l'abscisse $y = -0,2$ m. La masse de ce balourd est également de $m_{b_{hp}} = 1$ g et il est localisé à une distance $e_{hp} = r_d$ du centre du disque. La figure III.12 représente la réponse linéaire de l'arbre BP, en toutes ses abscisses, soumis à un balourd HP, pour toutes les vitesses de rotation comprises dans la plage étudiée. On observe bien quatre pics de résonance qui apparaissent aux mêmes vitesses critiques que celles prédites par le diagramme de Campbell. Les résonances des modes d'ensemble A, B et D apparaissent aux vitesses $\Omega_{bp} \approx 610, 950$ et 1870 trs/min, respectivement. Pour chacun de ces modes, l'amplitude de déplacement du rotor BP est importante ce qui est en accord avec les déformées propres calculées précédemment (*cf.* Figure III.6). En revanche, le dernier pic qui apparaît à la vitesse $\Omega_{bp} \approx 2110$ trs/min, est de faible amplitude comparé aux autres car il correspond au mode C, c'est-à-dire au mode pur d'aube à 1 diamètre, où se sont essentiellement les aubes qui vibrent et où la déformation du rotor BP est négligeable.

Enfin, la réponse linéaire de l'aube 1 soumise à un balourd HP est présentée figure III.13. Les déplacements physiques sont reconstruits pour les degrés de liberté des aubes. Les résultats sont sensiblement les mêmes que ceux de la figure III.12 en termes de vitesses critiques, par contre les amplitudes de vibration sont différentes.

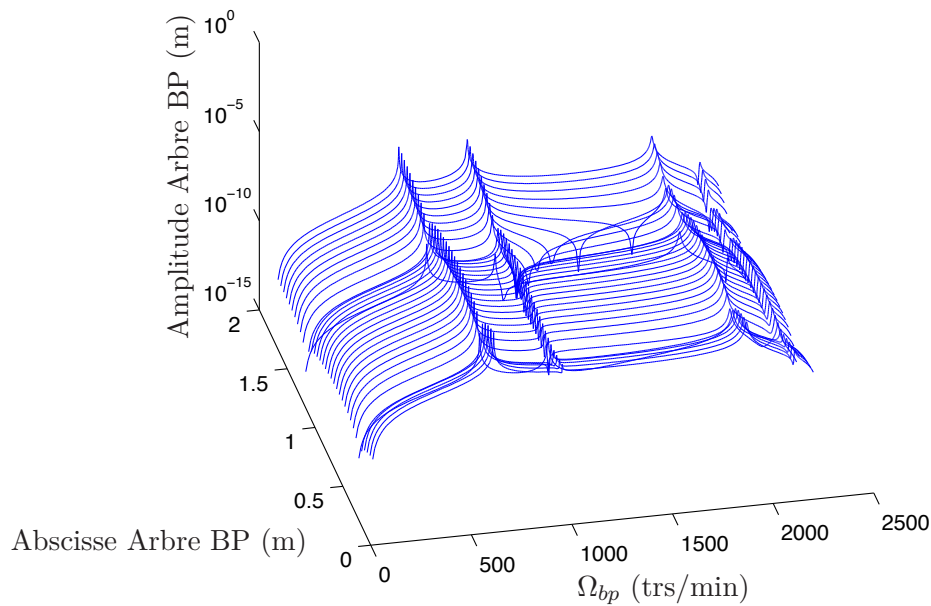


FIGURE III.12 – Réponse linéaire du rotor BP soumis au balourd HP

En effet, pour les modes A, C et D, l'amplitude de déplacement des aubes est significative. Pour le mode A, le déplacement des aubes est essentiellement dû au basculement du disque rigide qui les porte. Le mode C représente le mode pur d'aube à 1 diamètre, l'amplitude visualisée sur la fonction de réponse en fréquence correspond à l'amplitude de vibration des aubes excitées par le balourd HP. Le mode D est un mode fortement couplé entre le bi-rotor et le mode de vibration à 1 diamètre de la roue aubagée. En ce qui concerne le deuxième pic de résonance qui se produit à une vitesse de 960 trs/min, l'amplitude du déplacement des aubes est très faible, ce qui s'explique par la déformée propre du mode B où la déformation des aubes est quasiment nulle.

Nous avons donc réalisé l'analyse du système forcé dans le cas linéaire pour des excitations à balourd provenant du rotor BP puis du rotor HP. Ceci nous a permis de retrouver les résonances aux vitesses critiques établies précédemment ainsi que de mettre en évidence une première interaction entre une excitation de type balourd provenant de l'arbre HP et la réponse des aubes portées par l'arbre BP. Nous allons maintenant introduire une non-linéarité au niveau des paliers dans ce modèle et réaliser le même type d'étude à l'aide des outils spécifiques de résolution non-linéaire introduits au chapitre II.

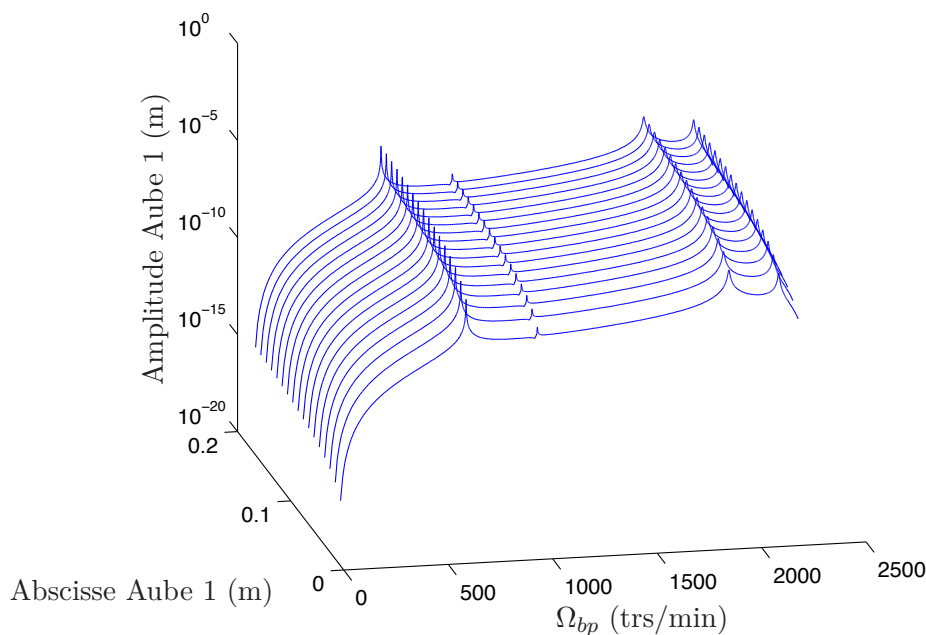


FIGURE III.13 – Réponse linéaire de l'aube 1 soumise au balourd HP

3 Étude du système non-linéaire

En général, les outils de conception et d'analyse des turboréacteurs sont basés sur le comportement linéaire du système. Cependant, nous avons vu au chapitre précédent que ces machines tournantes sont souvent constituées d'éléments de nature non-linéaire, comme les roulements. Ces éléments sont des pièces majeures puisqu'ils assurent les liaisons entre les rotors et le stator ainsi que les liaisons inter-rotor, au travers du palier inter-arbre. Ces éléments possèdent une non-linéarité inhérente due à la présence d'un jeu interne qui assure le bon fonctionnement de la machine. Nous allons voir dans un premier temps le modèle utilisé afin de prendre en compte cette non-linéarité au niveau du palier inter-arbre. Ensuite, la réponse dynamique non-linéaire sera calculée en considérant des efforts de balourd provenant des arbres BP et HP permettant ainsi de montrer que la forme des résonances est modifiée lorsque les jeux sont consommés.

3.1 Modélisation retenue pour la non-linéarité inter-arbre

Pour les calculs de dynamique d'ensemble, les roulements sont modélisés par une matrice de raideur linéaire lors du dimensionnement. Néanmoins, ces roulements sont montés avec un jeu de fonctionnement qu'il est important de considérer dans la modélisation afin de prendre en compte cette non-linéarité inhérente au système. Ce modèle non-linéaire correspond à une raideur radiale linéaire par morceaux et présente l'avantage de prendre en compte le jeu radial.

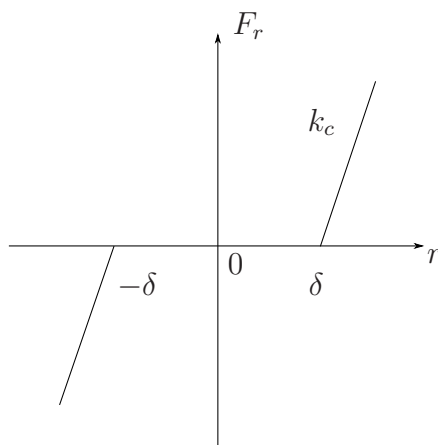


FIGURE III.14 – Force radiale linéaire par morceaux

A l'intérieur du jeu, lorsque $-\delta < r < \delta$, le roulement est linéaire et modélisé en tant que liaison radiale à raideur linéaire, comme nous l'avons vu précédemment. Dès que le jeu est consommé, autrement dit quand $r > \pm\delta$, une raideur de contact k_c est ajoutée au modèle de roulement linéaire (*cf.* Figure III.14). Dans notre étude, on s'intéresse particulièrement au roulement inter-arbre, qui relie la dynamique des deux rotors. Ce palier est modélisé par deux nœuds mobiles, un correspondant à la bague intérieure connectée au rotor BP et l'autre correspondant à la bague extérieure connectée au rotor HP. Considérons alors le vecteur de déplacement relatif à l'inter-arbre :

$$\Delta\mathbf{u}(y_{inter}) = \begin{pmatrix} u_{hp} - u_{bp} \\ w_{hp} - w_{bp} \end{pmatrix} \quad (\text{III.39})$$

où les valeurs des déplacements sont prises en l'abscisse y_{inter} du palier inter-arbre.

La force radiale qui s'exerce entre le rotor BP et le rotor HP au travers du palier inter-arbre dans le repère relatif de la bague extérieure s'exprime ainsi :

$$F_r = \begin{cases} k_c (r - \delta) & \text{si } r > \pm\delta ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

où $r = \|\Delta\mathbf{u}\| = \sqrt{(u_{hp} - u_{bp})^2 + (w_{hp} - w_{bp})^2}$ est la norme du déplacement relatif radial entre le rotor HP et le rotor BP, k_c le coefficient de raideur de contact, et δ le jeu radial.

Comme la formulation analytique du bi-rotor aubagé a été écrite dans le repère tournant \mathcal{R}_{bp} , la force radiale F_r exprimée dans le repère relatif de la bague extérieure du roulement doit être projetée dans le repère d'étude afin d'obtenir les composantes de l'effort non-linéaire \mathbf{F}_{nl} :

$$\mathbf{F}_{nl} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) F_r \\ \sin(\theta) F_r \end{pmatrix}, \quad \text{avec : } \begin{cases} \cos(\theta) = (u_{hp} - u_{bp})/\|\Delta\mathbf{u}\| ; \\ \sin(\theta) = (w_{hp} - w_{bp})/\|\Delta\mathbf{u}\|. \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

Ainsi, on en déduit l'expression de l'effort non-linéaire à prendre en compte afin de modéliser le jeu radial et le contact au niveau du palier inter-arbre. Le formalisme

suivant est adopté :

$$\mathbf{F}_{nl}(\Delta\mathbf{u}) = k_c \frac{\Delta\mathbf{u}}{\|\Delta\mathbf{u}\|} \mathcal{H}(\|\Delta\mathbf{u}\| - \delta) \quad (\text{III.42})$$

où $\mathcal{H}(\cdot)$ représente la fonction Heaviside.

Notons que $\mathbf{F}_{nl}(\Delta\mathbf{u})$ représente ici la force exercée par le rotor BP sur le rotor HP au niveau du palier inter-arbre. Compte tenu du principe de l'action et de la réaction, la force exercée par le rotor HP sur le rotor BP à l'inter-arbre est obtenue en changeant le signe de cette force.

L'objectif est donc d'étudier le comportement dynamique du bi-rotor aubagé en considérant cette non-linéarité à l'inter-arbre. L'équation dynamique que l'on cherche à résoudre s'écrit alors :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}_b \quad (\text{III.43})$$

L'obtention des solutions de ce système non-linéaire nécessite d'utiliser les méthodes spécifiques de résolution détaillées au chapitre II. Dans la suite, les techniques de résolution choisies seront précisées en montrant l'intérêt du choix du repère d'étude \mathcal{R}_{bp} , puis les résultats des simulations non-linéaires du bi-rotor aubagé soumis aux excitations synchrones de type balourd BP et balourd HP seront analysés.

3.2 Intérêt du choix du repère d'étude

Afin de résoudre le système non-linéaire (III.43), la méthode de balance harmonique est employée. Dans cette méthode, la solution périodique $\mathbf{q}(t)$ du système est décomposée sous forme de série trigonométrique tronquée à l'ordre N_h (cf. Chap. II. 2.2). Après substitution de cette dernière relation dans le système (III.43), l'équation du mouvement est mise sous forme de résidu dynamique, constitué des matrices structurales du système, des coefficients harmoniques, des efforts non-linéaires et des excitations structurales de type balourd. Dans le repère d'étude considéré, à savoir le repère tournant \mathcal{R}_{bp} , les forces de balourd s'expriment comme une somme des efforts de balourd provenant du rotor BP et du rotor HP :

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{F}_{b_{BP}} + \mathbf{F}_{b_{HP}}^{\cos} \cos((\Omega_{hp} - \Omega_{bp})t) + \mathbf{F}_{b_{HP}}^{\sin} \sin((\Omega_{hp} - \Omega_{bp})t) \quad (\text{III.44})$$

Lorsque la méthode de balance harmonique est appliquée, la procédure de Galerkin consiste à projeter le résidu dynamique sur une base trigonométrique afin de supprimer la dépendance temporelle du système. Dans le cas présent, la base de projection choisie est tronquée à l'ordre N_h et s'écrit :

$$\mathbf{B} = \left[1 \quad \cdots \quad \cos(k\omega t) \quad \sin(k\omega t) \quad \cdots \quad \cos(N_h\omega t) \quad \sin(N_h\omega t) \right]^T \quad (\text{III.45})$$

où l'harmonique fondamentale considérée est $\omega = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$.

Après l'orthogonalisation du résidu dynamique par rapport à cette base \mathbf{B} , on obtient le système d'équations algébriques non-linéaires suivant :

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_h + \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h) - \mathbf{F}_{b_h} = \mathbf{0} \quad (\text{III.46})$$

Notons que l'expression des efforts non-linéaires $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}(t))$ que nous venons de définir est connue dans le domaine temporel. La projection de ces efforts sur la base \mathbf{B} choisie ne nous permet pas d'obtenir directement les coefficients harmoniques du vecteur $\mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h)$. C'est pourquoi, une méthode d'alternance temps/fréquence de type AFT est utilisée afin d'évaluer ces forces non-linéaires dans le domaine temporel à l'aide de transformées de Fourier, tout en conservant la résolution du système non-linéaire dans le domaine fréquentiel.

En revanche, le vecteur \mathbf{F}_{b_h} regroupant les composantes harmoniques des efforts de balourd BP et HP s'exprime simplement après la procédure de Galerkin par :

$$\mathbf{F}_{b_h} = \left[\mathbf{F}_{b_{BP}}^T \quad \mathbf{F}_{b_{HP}}^{cosT} \quad \mathbf{F}_{b_{HP}}^{sinT} \quad \mathbf{0}^T \quad \dots \quad \mathbf{0}^T \right]^T \quad (\text{III.47})$$

Ainsi, le système constitué d'une excitation bi-périodique, avec $T_1 = 2\pi/\Omega_{bp}$ et $T_2 = 2\pi/\Omega_{hp}$, où les vitesses de rotation peuvent être incommensurables, peut être résolu à l'aide d'une méthode de balance harmonique mono-fréquentielle dans le repère d'étude choisi \mathcal{R}_{bp} , en considérant $\omega = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$ comme harmonique fondamentale.

3.3 Simulations non-linéaires

L'objectif de cette dernière partie est d'analyser la réponse du système bi-rotor aubagé en considérant le palier inter-arbre non-linéaire pour des excitations à balourd provenant du rotor BP et du rotor HP. De la même façon que pour les études linéaires réalisées auparavant, on cherche à tracer l'amplitude du système en fonction de la vitesse de rotation du rotor BP. Afin de suivre l'évolution du comportement vibratoire du système non-linéaire lors de la variation d'un paramètre physique choisi, une technique de continuation est employée. Dans notre cadre d'étude, le paramètre physique fondamental contrôlant la réponse du système est la vitesse de rotation de la machine. Afin de construire les courbes de réponse non-linéaire, nous avons donc opté pour une continuation avec une prédiction par la tangente et une correction de type *arc-length*, avec le paramètre de contrôle $\mu = \Omega_{bp}$ et $\Omega_{hp} = 2,8\Omega_{bp}$. Dans cette technique de continuation, la courbe de réponse est paramétrée par son abscisse curviligne s et la recherche de solutions périodiques est conditionnée par un incrément Δs appelé longueur d'arc. Notons qu'un contrôle de la longueur ce pas d'avance s'avère nécessaire afin d'avoir une description correcte de la courbe de réponse. En effet, un pas d'avance trop grand donnera une mauvaise prédiction trop éloignée de la solution recherchée, il faudra par conséquent de nombreuses itérations de correction afin de converger vers cette dernière. Au contraire, un pas d'avance trop petit nécessitera un grand nombre de points à calculer sur la courbe solution et donc un temps de calcul important. La longueur du pas d'avance Δs est donc adaptée au cours de la procédure de continuation selon la convergence des derniers points calculés sur la courbe de réponse [Allgower et Georg, 2003]. Les résultats des simulations non-linéaires présentés dans la suite sont réalisés par continuation pour

des excitations de type balourd BP, balourd HP ainsi que pour ces deux excitations simultanées.

3.3.1 Réponse non-linéaire au balourd BP

Tout d'abord, la réponse du système non-linéaire soumis au balourd BP est analysée. Rappelons que cette excitation synchrone est une force constante dans

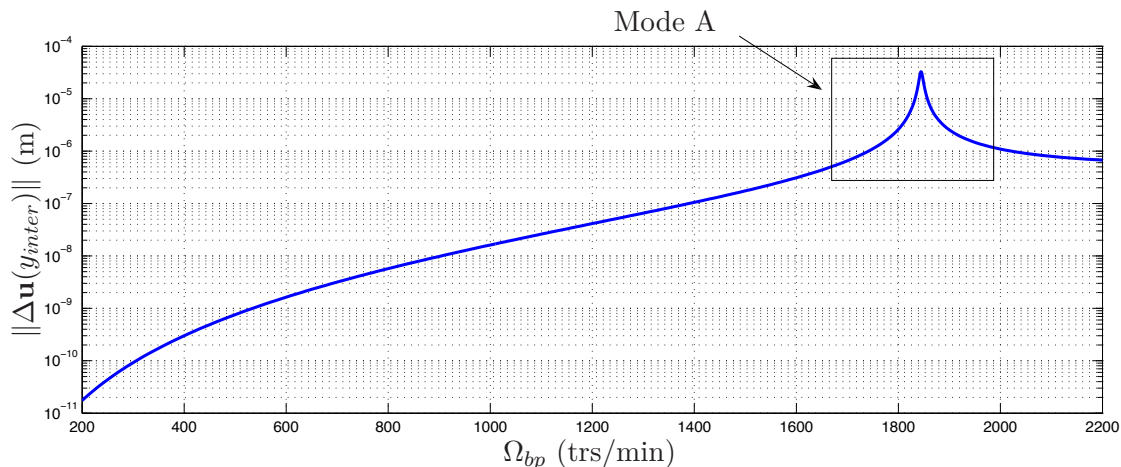


FIGURE III.15 – Réponse linéaire du bi-rotor aubagé soumis au balourd BP

le repère d'étude \mathcal{R}_{bp} . La figure III.15 rappelle les résultats linéaires obtenus précédemment. Cette courbe de réponse représente la norme du déplacement relatif au palier inter-arbre $\|\Delta\mathbf{u}(y_{inter})\|$ en fonction de la vitesse du rotor BP sur la plage de fonctionnement [200; 2200] trs/min. Dans cette plage de fonctionnement, seul le premier mode d'ensemble est excité par le balourd BP suivant sa branche directe. Le balourd qui a été introduit est de $1 \text{ g} \cdot \text{m}$ et est placé sur le disque TuBP.

La valeur du jeu radial qui est introduit au niveau du palier inter-arbre est de $\delta = 6 \text{ } \mu\text{m}$, ce qui correspond à un roulement usé. La figure III.16 présente un zoom de la réponse non-linéaire du système autour du pic de résonance du mode A localisé à la vitesse $\Omega_{bp} = 1850 \text{ trs/min}$. Le nombre de composantes harmoniques retenues lors du calcul des solutions non-linéaires est tronqué à l'ordre $N_h = 3$, car les composantes harmoniques d'ordre supérieur sont négligeables dans la réponse du système. Afin de mieux visualiser l'influence du jeu dans le palier inter-arbre, les courbes de réponse non-linéaire en trait plein sont superposées aux courbes linéaires représentées en trait mixte.

L'évolution du déplacement relatif à l'inter-arbre en fonction de la vitesse de rotation Ω_{bp} est illustrée sur la figure III.16(a) et met en évidence le comportement non-linéaire du bi-rotor aubagé. En effet, pour des valeurs de déplacement relatif inférieures au jeu radial, les courbes de réponse linéaire et non-linéaires se confondent. Dès que la valeur du jeu δ est atteinte, la contribution des efforts non-linéaires est observée et se traduit par une diminution de l'amplitude de vibration au niveau du

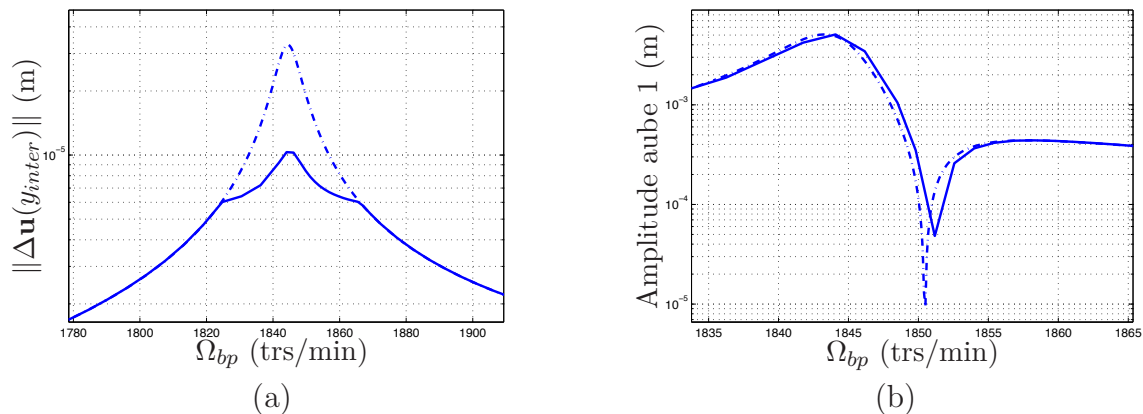


FIGURE III.16 – Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) du bi-rotor aubagé au balourd BP - (a) Déplacement relatif à l'inter-arbre, (b) Déplacement de l'aube 1

palier inter-arbre. Autrement dit, lorsque les niveaux augmentent, il y a un phénomène de rattrapage de jeu et le comportement vibratoire est modifié par la présence d'une raideur de contact valant $k_c = 5 \times 10^9$ N/m.

De plus, l'évolution de la réponse de aube 1 en fonction de la vitesse de rotation est présentée sur la figure III.16(b). Cette courbe de réponse permet d'observer l'influence de la présence du jeu à l'inter-arbre sur le comportement vibratoire des aubes. Lorsque le jeu est consommé, la perturbation apportée à la réponse des aubes a un caractère « raidissant » qui se traduit par un léger décalage du pic de résonance vers les fréquences plus élevées, entraînant ainsi une augmentation de la vitesse critique du système. Enfin, il est important de remarquer que le temps de calcul requis pour obtenir ces courbes de réponse non-linéaire est seulement de $t_{CPU} \approx 22$ min. Tous les calculs présentés dans ces travaux ont été réalisés sur un ordinateur portable Mac OS muni d'un processeur de 2,53 GHz et une mémoire vive de 4 Go.

3.3.2 Réponse non-linéaire au balourd HP

La réponse du système avec la prise en compte du palier inter-arbre non-linéaire va maintenant être étudiée avec une excitation de type balourd HP. De la même manière que précédemment, nous rappelons la réponse linéaire du bi-rotor aubagé soumis au balourd HP sur la plage de fonctionnement [200; 2200] trs/min.

La figure III.17 décrit l'évolution du déplacement relatif à l'inter-arbre en fonction de la vitesse de rotation et montre que les branches directes des quatre modes A, B, C et D sont excitées par le balourd HP dans cette plage de vitesses de rotation. La valeur de balourd introduite est la même que pour le balourd BP, à savoir de $1 \text{ g} \cdot \text{m}$ localisé sur le disque TuHP du rotor HP.

Pour les résultats de simulations non-linéaires qui vont suivre, la valeur du jeu introduit dans la palier inter-arbre est également de $\delta = 6 \text{ } \mu\text{m}$ et le nombre de composantes harmoniques considérées au cours de la résolution dans le domaine

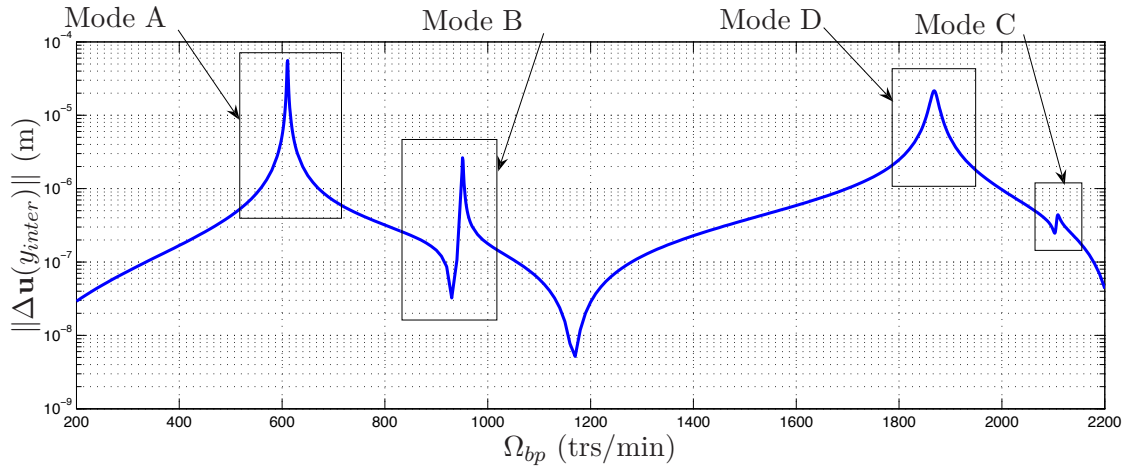


FIGURE III.17 – Réponse linéaire du bi-rotor aubagé soumis au balourd HP

fréquentiel est de $N_h = 3$.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la réponse non-linéaire du mode A situé à la vitesse $\Omega_{bp} = 610$ trs/min. La figure III.18(a) présente l'évolution du déplacement relatif à l'inter-arbre et la figure III.18(b) illustre le déplacement de l'aube 1 en fonction de la vitesse de rotation. Le même type d'observations peut

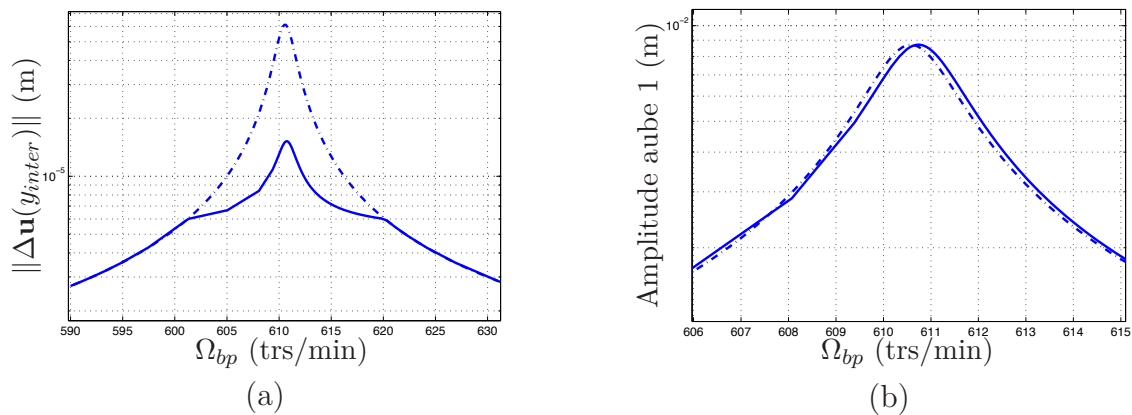


FIGURE III.18 – Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) du mode A soumis au balourd HP - (a) Déplacement relatif à l'inter-arbre, (b) Déplacement de l'aube 1

être réalisé par rapport au cas d'excitation de balourd BP. En effet, le comportement vibratoire du système n'est modifié que lorsque le jeu est consommé. D'une part, l'amplitude du déplacement relatif au palier inter-arbre est limitée par la prise de contact lorsque les niveaux augmentent. La valeur de raideur de contact est égale à $k_c = 5 \times 10^9$ N/m. D'autre part, les forces de contact ont un léger effet raidissant sur la courbe de réponse des aubes impliquant une augmentation de la fréquence de résonance et de la vitesse critique. Le temps de calcul nécessaire à l'obtention de ces courbes non-linéaires est de $t_{CPU} \approx 31$ min.

Les mode B et C sont également excités par le balourd HP dans la plage de vitesse de rotation considérée. Néanmoins, l'analyse non-linéaire de ces deux modes n'est

pas présentée ici car le comportement vibratoire du système avec le palier inter-arbre non-linéaire est identique au comportement linéaire. Ce phénomène s'explique par les déformées propres de ces deux modes de vibration, à $f_B = 41$ Hz et $f_C = 50,8$ Hz respectivement (*cf.* Figure III.6), où le déplacement du palier inter-arbre est négligeable, par conséquent le jeu n'est pas consommé et le comportement reste purement linéaire.

En revanche, le déplacement du palier inter-arbre est significatif sur les déformées propres en ce qui concerne le mode D. L'analyse non-linéaire est donc réalisée pour

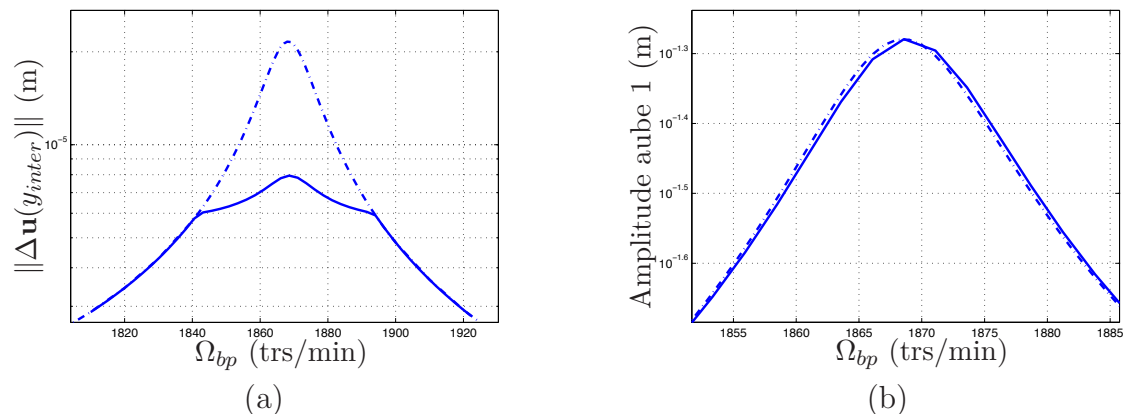


FIGURE III.19 – Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) du mode D soumis au balourd HP - (a) Déplacement relatif à l'inter-arbre, (b) Déplacement de l'aube 1

ce mode de vibration et est illustrée sur la figure III.19. Une fois encore, l'amplitude du déplacement relatif à l'inter-arbre est limitée lorsqu'il y a prise de contact (*cf.* Figure III.19(a)). L'effet raidissant des forces de contact sur la réponse de l'aube 1 est moins évident sur la figure III.19(b), mais est bien présent avec une raideur de contact $k_c = 7 \times 10^9$ N/m. L'obtention de cette réponse non-linéaire est réalisée en $t_{CPU} \approx 26$ min.

3.3.3 Réponse non-linéaire aux balourds BP et HP

L'objectif de ces simulations est de voir si la méthode de balance harmonique mono-fréquentielle est capable de rendre compte d'une excitation bi-fréquentielle $f_{bp} = \frac{\Omega_{bp}}{2\pi}$ et $f_{hp} = \frac{\Omega_{hp}}{2\pi}$ dans le repère privilégié \mathcal{R}_{bp} . Les développements réalisés dans la section 3.2 ont permis de montrer que les deux excitations de balourd pouvaient être prises en compte avec une méthode classique de balance harmonique, en considérant $\omega = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$ comme harmonique fondamentale.

La figure III.20 présente les résultats de simulation linéaire avec la prise en compte des deux excitations de balourd. On retrouve bien les résonances prédites par les vitesses critiques, à savoir la branche directe du mode A est excitée par le balourd BP et le balourd HP et les branches directes des modes B, C et D sont seulement excitées par le balourd HP dans la plage de fonctionnement considérée $\Omega_{bp} = [200; 2200]$ trs/min. Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec les

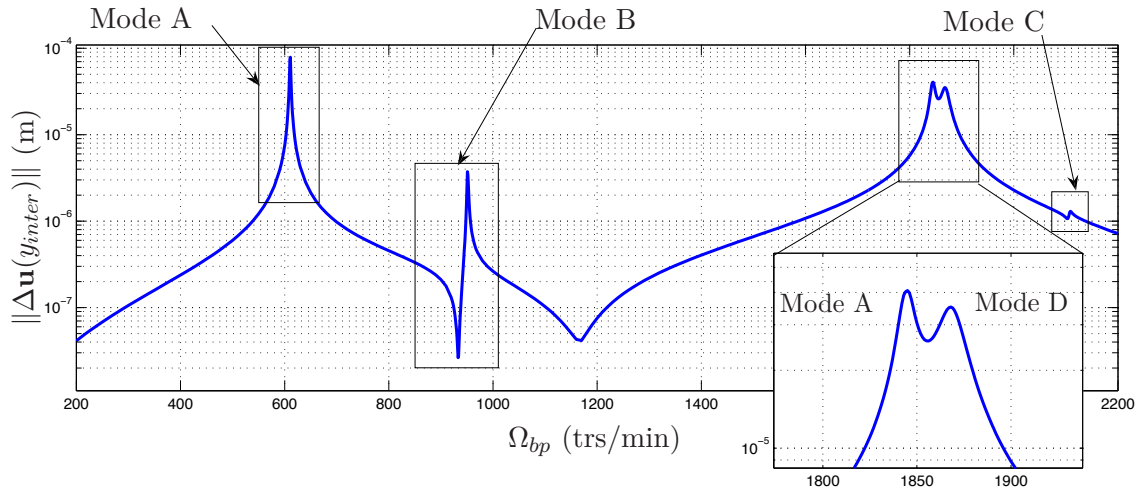


FIGURE III.20 – Réponse linéaire du bi-rotor aubagé soumis aux balourds BP et HP

précédentes simulations, les mêmes valeurs de balourd ont été introduites dans le système, à savoir $1 \text{ g} \cdot \text{m}$ sur les disques TuBP et TuHP respectivement.

La contribution des deux excitations est observée dans la plage de vitesses de rotation $\Omega_{bp} = [1800; 1900]$ trs/min, la figure III.21 décrit donc le comportement non-linéaire du système dans cette plage de vitesses pour une valeur de jeu de $\delta = 6 \text{ } \mu\text{m}$ introduit au niveau du palier inter-arbre. Cette courbe de réponse non-linéaire a été obtenue en $t_{CPU} \approx 40 \text{ min}$.

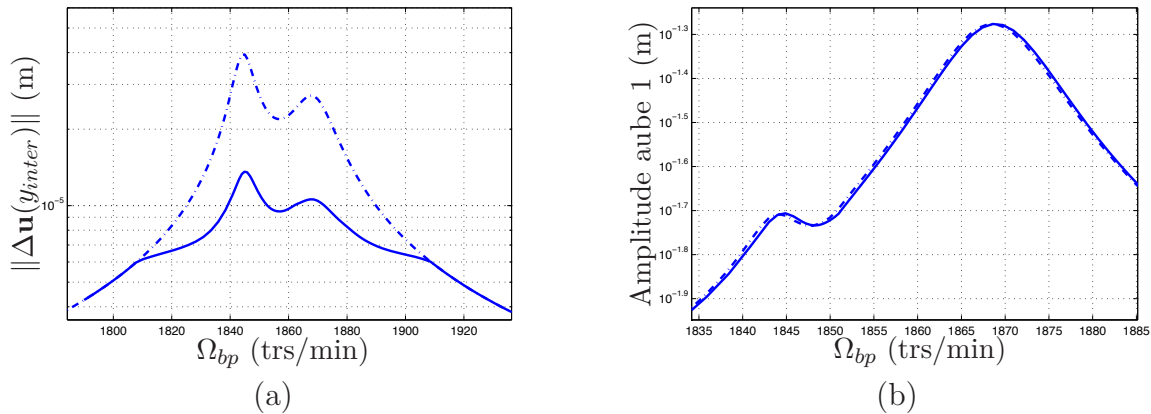


FIGURE III.21 – Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) du bi-rotor aubagé soumis aux balourds BP et HP - (a) Déplacement relatif à l'inter-arbre, (b) Déplacement de l'aube 1

La réponse non-linéaire au niveau de l'inter-arbre et des aubes a le même type de comportement que la réponse non-linéaire du mode A soumis au balourd BP pour le premier pic (*cf.* Figure III.16) et le même comportement que la réponse non-linéaire du mode D soumis au balourd HP pour le second pic de résonance (*cf.* Figure III.19). Ainsi, nous pouvons en conclure que la méthode

classique de balance harmonique est bien adaptée dans le cas présent à l'étude de la réponse non-linéaire du système soumis aux deux excitations de balourd BP et HP.

Les différentes simulations non-linéaires qui viennent d'être présentées ont été réalisées en prenant en compte le palier inter-arbre non-linéaire. Nous avons pu constater que la perturbation apportée par la présence du jeu à l'inter-arbre avait un léger effet raidissant sur la courbe de réponse non-linéaire des aubes. Afin de mieux observer ces phénomènes, nous allons introduire dans la suite du jeu dans un autre palier du bi-rotor aubagé.

3.3.4 Réponse du système avec plusieurs paliers non-linéaires

L'analyse du système avec la prise en compte du palier inter-arbre non-linéaire nous a permis d'observer localement la modification du comportement vibratoire du système en présence de jeu. Néanmoins, le palier inter-arbre n'est pas le seul de la structure à posséder un jeu interne assurant le bon fonctionnement de la machine. C'est pourquoi, dans cette dernière partie, nous allons introduire du jeu dans un autre palier du bi-rotor aubagé.

Nous avons choisi d'introduire du jeu dans le palier P5 qui se situe à côté du disque aubagé (TuBP) et qui assure la liaison entre le rotor BP et le stator. Afin de prendre en compte ce jeu dans le palier P5, un modèle de roulement à raideur linéaire par morceaux est utilisé, l'expression de l'effort non-linéaire à ajouter au système non-linéaire (III.43) s'exprime ainsi :

$$\mathbf{F}_{nl_{P5}}(\mathbf{u}_{bp}(y_{P5})) = k_c \frac{\mathbf{u}_{bp}(y_{P5})}{\|\mathbf{u}_{bp}(y_{P5})\|} \mathcal{H}(\|\mathbf{u}_{bp}(y_{P5})\| - \delta) \quad (\text{III.48})$$

où $\mathbf{u}_{bp}(y_{P5})$ est le déplacement du rotor BP évalué en l'abscisse y du palier P5, δ désignent le jeu, k_c la raideur de contact et la norme du déplacement s'écrit $\|\mathbf{u}_{bp}(y_{P5})\| = \sqrt{u_{bp}^2(y_{P5}) + w_{bp}^2(y_{P5})}$.

La simulation non-linéaire du système avec paliers inter-arbre et P5 non-linéaires soumis aux balourds BP et HP est réalisée comme précédemment pour une valeur de jeu $\delta = 6 \mu\text{m}$. La figure III.22 décrit l'évolution du déplacement relatif à l'inter-arbre en fonction de la vitesse de rotation sur toute la plage de fonctionnement considérée $\Omega_{bp} = [200; 2200]$ trs/min.

Afin de mieux visualiser l'influence de la présence des jeux dans les roulements, les courbes de réponse linéaire et non-linéaire sont superposées. Cette simulation a été réalisée pour une valeur de raideur de contact $k_c = 5 \times 10^8$ N/m et on observe que l'influence du contact est différente selon le mode considéré. En ce qui concerne le mode A excité par le balourd HP, la vitesse critique prédite par l'analyse modale était de $\Omega_{bp} = 610$ trs/min. Rappelons que ce premier mode de vibration a été identifié comme étant un mode de suspension de turbine BP où une grande partie de l'énergie de déformation se situe dans le support-palier P5. Par conséquent, lorsque le jeu est consommé dans le palier P5, le comportement du système est raidissant

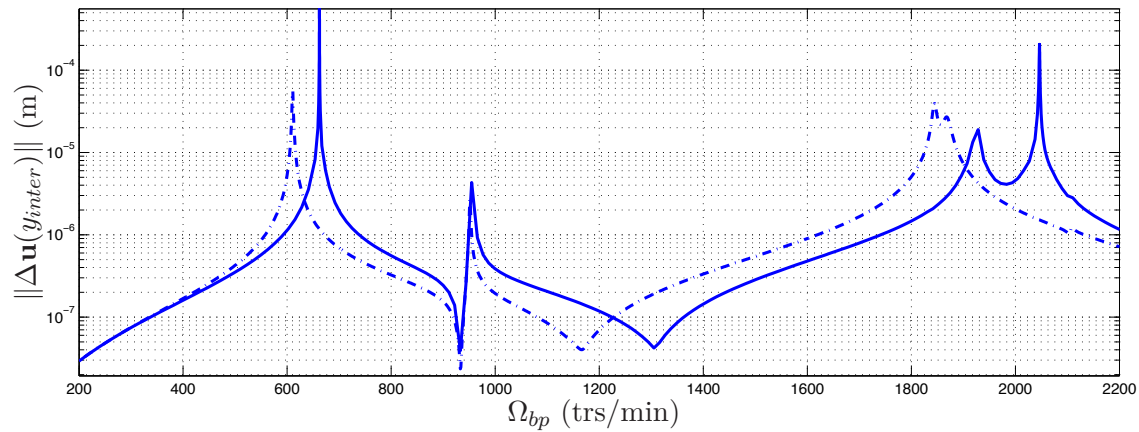


FIGURE III.22 – Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) du palier inter-arbre aux balourds BP et HP avec palier inter-arbre et palier P5 non-linéaires

avec un décalage du pic de résonance vers les fréquences plus élevées, et une augmentation de la vitesse critique de l'ordre de 8%. Lorsqu'on s'intéresse au mode A excité par le balourd BP de vitesse critique théorique $\Omega_{bp} = 1850$ trs/min, le même type de comportement non-linéaire raidissant est observé avec une augmentation de la vitesse critique de l'ordre de 10%. Pour le mode de vibration B qui est un mode de suspension fan, où la déformation du palier inter-arbre et du palier P5 est négligeable par rapport à la déformation du palier P1, le comportement du système après la prise de contact est quasiment linéaire, avec une fréquence de résonance identique à celle prédite par le calcul linéaire. Enfin, pour le mode D excité par le balourd HP, où la déformation des paliers inter-arbre et P5 est importante (*cf.* Figure III.5), on observe une diminution de l'amplitude de résonance liée à la prise de contact dans le palier inter-arbre ainsi qu'une augmentation de la vitesse critique d'environ 3%, essentiellement liée à la présence du contact dans le palier P5.

De la même manière, la courbe de réponse non-linéaire de l'aube 1 en fonction de la vitesse de rotation est présentée en figure III.23. On constate le même effet raidissant lié à la présence du contact dans les paliers inter-arbre et P5, notamment sur le mode A excité par le balourd BP et HP ainsi que sur le mode D excité par le balourd HP. Nous pouvons également constater un léger effet raidissant sur le mode pur d'aube à 1 diamètre (mode C) de vitesse critique $\Omega_{bp} = 2110$ trs/min. Notons que le temps de calcul requis pour obtenir ces courbes de réponse non-linéaire sur toute la plage de fonctionnement est de $t_{CPU} = 1$ h14 min.

En conclusion, l'étude de la réponse non-linéaire du bi-rotor aubagé à des excitations de balourds nous a d'abord permis de montrer une interaction forte entre l'excitation de type balourd HP et la dynamique des aubes localisées sur le rotor BP. Les simulations non-linéaires ont également permis d'observer une modification du comportement vibratoire du système avec la prise en compte de paliers non-linéaires.

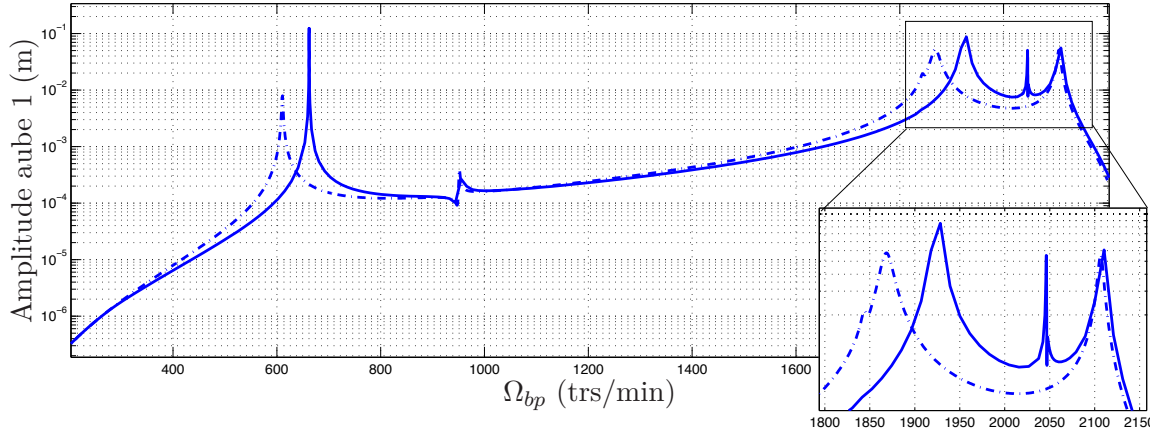


FIGURE III.23 – Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) de l’aube 1 aux balourds BP et HP avec palier inter-arbre et palier P5 non-linéaires

L’effet raidissant au niveau des pics de résonance lié à la présence du contact a été observé sur la courbe de réponse au niveau de l’inter-arbre mais également sur la réponse des aubes.

4 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle simplifié de bi-rotor aubagé a été développé dans le repère tournant \mathcal{R}_{bp} . Les effets gyroscopiques, d’assouplissement centrifuge (*spin softening*) et de précontrainte centrifuge ont été pris en compte dans la modélisation permettant d’avoir une description complète des phénomènes physiques présents dans le système en rotation. Ce modèle simplifié nous a permis de mettre en évidence une interaction entre la dynamique des aubes et celle du bi-rotor au travers de couplages de modes, qui ont été observés sur le diagramme de Campbell. L’analyse linéaire de la réponse à balourd a permis de souligner la nécessité de prendre en considération le balourd HP qui excite des modes où les aubes vibrent suivant leur premier diamètre dans la plage de fonctionnement considérée. Ensuite, l’étude du comportement dynamique de ce système couplé impliquant des non-linéarités a été réalisée. La non-linéarité a été introduite dans un premier temps au niveau du palier inter-arbre, puis dans plusieurs paliers. Un modèle de roulement à raideur radiale linéaire par morceaux a été retenu permettant de prendre en compte le jeu dans les paliers. La méthode de balance harmonique couplée à une technique de continuation *arc-length* a été développée afin d’analyser le comportement vibratoire du système non-linéaire. Comme la non-linéarité considérée est forte et non-régulière, une technique AFT a été employée afin d’évaluer les efforts non-linéaires dans le domaine temporel puis d’en déduire les composantes fréquentielles correspondantes. Le système est sujet à une excitation bi-périodique provenant des balourds BP et HP qu’il est possible d’analyser avec une méthode de balance harmonique mono-

fréquentielle dans le repère d'étude choisi \mathcal{R}_{bp} , en considérant $\omega = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$ comme harmonique fondamentale. Les différentes simulations non-linéaires qui ont été présentées ont mis en évidence une diminution d'amplitude de la réponse lorsque le jeu est consommé ainsi qu'un effet raidissant de la courbe de réponse non-linéaire au voisinage des résonances impliquant une augmentation des vitesses critiques. Ces phénomènes non-linéaires ont été observés à la fois au niveau du palier inter-arbre mais aussi au niveau des aubes. Les simulations non-linéaires ont également permis de montrer l'efficacité, en termes de coût numérique, des méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel qui ont été choisies.

Ce modèle simplifié a donc mis en évidence certains couplages entre les aubes et le bi-rotor. Nous avons vu au chapitre I que les modèles de type poutres - masses - ressorts étaient très répandus et adaptés à l'étude de la dynamique des rotors. En revanche, pour une description fine de la dynamique des roues aubagées, les modèles poutres s'avèrent insuffisants. Le chapitre suivant est alors dédié à la mise en place d'une méthode de couplage entre un modèle 3D de roue aubagée en symétrie cyclique et un modèle simplifié de bi-rotor.

Chapitre IV

Couplage entre un bi-rotor simplifié et un disque aubagé 3D

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place une méthode de couplage entre un modèle simplifié de bi-rotor qui a été développé dans le chapitre précédent et un modèle réduit de roue aubagée 3D. Dans une première partie, les techniques de réduction du modèle de roue aubagée seront détaillées. Les propriétés de symétrie cyclique de la structure seront d'abord rappelées, puis des techniques de réduction modale seront introduites afin d'obtenir un modèle de roue aubagée de taille raisonnable. Une fois le modèle réduit de roue aubagée obtenu, la méthode de couplage proposée sera développée puis validée sur un exemple simple. Dans une dernière partie, une procédure sera détaillée afin de prendre en compte des non-linéarités de type contact en tête d'aube dans le modèle réduit de roue aubagée, permettant ainsi de réaliser l'étude de la dynamique non-linéaire du système couplé, soumis aux balourds BP et HP.

Sommaire

1	Réduction du modèle de roue aubagée 3D	108
1.1	Modélisation en symétrie cyclique	108
1.2	Méthodes de synthèse modale	110
1.3	Convergence du modèle réduit	113
2	Connexion de la roue aubagée au modèle bi-rotor simplifié	114
2.1	Description de la méthode proposée	114
2.2	Présentation du cas-test de validation	118
2.3	Validation de la méthode de couplage dans un cadre linéaire	123
3	Prise en compte des non-linéarités	126
3.1	Modélisation du contact en tête d'aube	127
3.2	Évaluation de la force non-linéaire en symétrie cyclique	128
3.3	Simulations non-linéaires du système couplé	132
4	Conclusion	137

Au chapitre précédent, nous avons développé et étudié un système couplé bi-rotor aubagé impliquant un modèle de type poutre pour la modélisation des aubes. Ce modèle présentait l'avantage de traiter une structure de petite taille, en termes de nombre de degrés de liberté (*ddl*s), permettant de réaliser des études linéaires mais aussi des études non-linéaires en un temps de calcul réduit. Néanmoins, les modèles poutres pour la modélisation des aubes sont insuffisants pour une description fine de la géométrie et de la dynamique des roues aubagées. C'est pourquoi, dans ce chapitre, on s'intéresse à la modélisation des roues aubagées 3D par la méthode des éléments finis. Dans cette méthode, la structure est discrétisée en nœuds, connectés entre eux par un maillage d'éléments pouvant être tétraédriques ou hexaédriques. La précision et la fiabilité de ces modèles dépend notamment du respect de la géométrie de la structure étudiée, ce qui a pour conséquence le raffinement des maillages utilisés. Ainsi, l'étude de structures complexes, telles que les roues aubagées, peut aboutir à des modèles numériques de très grande taille, allant jusqu'à plusieurs millions de *ddl*s. La manipulation de ces modèles posent certains problèmes en termes de stockage et de temps de calcul. Des méthodes ont donc été développées afin de réduire la taille de ces modèles éléments finis et d'optimiser les simulations numériques. Les méthodes de réduction appliquées au modèle de roue aubagée considéré sont détaillées dans la suite.

1 Réduction du modèle de roue aubagée 3D

Afin de conserver un temps de calcul raisonnable pour l'étude du système couplé impliquant un modèle simplifié de bi-rotor et une roue aubagée 3D modélisée par éléments finis, des techniques de réduction doivent être introduites. Les roues aubagées présentent l'avantage d'être des structures à symétrie cyclique (*cf.* Chap. I.4), permettant de considérer la structure complète à partir d'un seul secteur de référence. La modélisation de ce secteur de référence par la méthode des éléments finis peut néanmoins encore posséder un grand nombre de *ddl*s. Alors, des méthodes de synthèse modale sont utilisées permettant d'associer les avantages de la description d'un maillage fin du secteur de référence au faible nombre de *ddl*s du modèle réduit. L'ensemble de la démarche adoptée est présentée dans cette partie permettant de calculer les modèles réduits de la roue aubagée en utilisant leurs propriétés de symétrie cyclique, de la création des secteurs de référence au calcul des modèles réduits.

1.1 Modélisation en symétrie cyclique

L'objectif ici est de rappeler la formulation d'un système en base cyclique qui a été introduite au chapitre I. Pour cela, considérons le système matriciel correspondant à une roue aubagée non-amortie décrit en base physique :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (\text{IV.1})$$

où \mathbf{q} désigne le vecteur des déplacements discrétisés, \mathbf{M} et \mathbf{K} correspondent aux matrices de masse et de raideur de la roue aubagée complète.

Le système matriciel (IV.1) peut être reformulé en base cyclique à l'aide de la matrice de transformée de Fourier discrète réelle définie au chapitre I (cf. Eq. (4.1.1)). Un ensemble de sous-systèmes matriciels indépendants définis sur le secteur de référence est obtenu pour chaque harmonique spatiale k :

$$\tilde{\mathbf{M}}^k \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_0^k + \tilde{\mathbf{K}}^k \tilde{\mathbf{q}}_0^k = \mathbf{0}, \quad \text{pour } : k = 0, 1, \dots, K, \frac{N}{2}. \quad (\text{IV.2})$$

où $\tilde{\mathbf{q}}_0^k$ est le vecteur des déplacements du secteur de référence (indiqué 0) pour l'onde k considérée, $\tilde{\mathbf{M}}^k$ et $\tilde{\mathbf{K}}^k$ sont les matrices de masse et de raideur du secteur de référence, N représente le nombre de secteur de la roue aubagée et $K = \frac{N}{2} - 1$ si N est pair ou $K = \frac{(N-1)}{2}$ si N est impair.

Le grand intérêt de travailler en base cyclique est de ne modéliser qu'un seul secteur de référence de la structure à symétrie cyclique. De plus, il est également possible de ne traiter que quelques valeurs particulières de k , car les systèmes associés à chaque harmonique spatiale k sont indépendants. Rappelons que chacun des sous-systèmes définis par (IV.2) est augmenté d'une équation de contrainte correspondant aux conditions de continuité inter-secteur définies par les relations (I.69), (I.70) et (I.71). Ainsi, les systèmes associés à chaque onde k complétés des relations de propagation s'écrivent :

– $k = 0$:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}}^0 \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_0^0 + \tilde{\mathbf{K}}^0 \tilde{\mathbf{q}}_0^0 = \mathbf{0} \\ {}^g \tilde{\mathbf{q}}_0^0 = {}^d \tilde{\mathbf{q}}_0^0 \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

– $k = 1, \dots, K$:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}}^k \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_0^{k,cos} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_0^{k,sin} \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{K}}^k \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,cos} \\ \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,sin} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ \begin{pmatrix} {}^g \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,cos} \\ {}^g \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,sin} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & \sin(k\alpha) \\ -\sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^d \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,cos} \\ {}^d \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,sin} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

– $k = \frac{N}{2}$:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}}^{N/2} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_0^{N/2} + \tilde{\mathbf{K}}^{N/2} \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2} = \mathbf{0} \\ {}^g \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2} = - {}^d \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2} \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

où le dernier système (IV.5) n'existe que si le nombre de secteur N est pair et où $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ désigne le déphasage inter-secteur.

La prise en compte des propriétés de symétrie cyclique des roues aubagées représente le premier niveau de réduction du modèle complet de roue aubagée, en ne considérant qu'un seul secteur de référence de la structure. Comme nous l'avons déjà évoqué, la modélisation de ce secteur par éléments finis peut comporter un grand

nombre de ddls afin de décrire finement la géométrie complexe de la structure considérée. Ainsi, des méthodes de réduction modale sont employées et détaillées dans la suite afin d'obtenir un modèle réduit du secteur de référence.

1.2 Méthodes de synthèse modale

L'application d'une méthode de réduction ou de synthèse modale consiste à diminuer la dimension de l'espace d'étude définie par le maillage de la structure. En effet, la dimension des matrices de masse et de raideur d'une structure dépend directement du nombre de ddls associé au maillage du modèle éléments finis. Une méthode de réduction modale correspond à la projection de l'équation du mouvement (IV.1) sur une base réduite plus adaptée à la résolution du système étudié. En pratique, le choix de cette base de projection différencie les méthodes de réduction. Les méthodes de synthèse modale existantes se classent souvent en quatre catégories, à savoir les méthodes à interfaces fixes [Hurty, 1965], celles à interfaces libres [Craig et Chang, 1976], celles à interfaces mixtes [MacNeal, 1971] et celles à interfaces chargées. Parmi ces méthodes, ce sont les méthodes à interfaces fixes qui sont retenues et développées dans la suite pour leur efficacité et leur simplicité de mise en œuvre.

1.2.1 Méthodes à interfaces fixes

De nombreuses méthodes de réduction modale à interfaces fixes ont été développées, comme par exemple la méthode de Craig & Bampton [Craig et Bampton, 1968] ou la méthode de Benfield & Hrudá [Benfield et Hrudá, 1971]. Nous avons opté pour la méthode de réduction de Craig & Bampton pour sa stabilité numérique ainsi que pour la qualité des modèles réduits obtenus.

La première étape de cette méthode est de réorganiser les matrices structurales \mathbf{M} et \mathbf{K} en partitionnant les degrés de liberté en ddls internes, indicés I et ddls de frontière, indicés F . L'équation du mouvement (IV.1) de la structure peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{M}_{FI} \\ \mathbf{M}_{IF} & \mathbf{M}_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_F \\ \ddot{\mathbf{q}}_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{K}_{FI} \\ \mathbf{K}_{IF} & \mathbf{K}_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

La seconde étape de cette méthode est de construire la base réduite sur laquelle cette équation du mouvement sera projetée. Cette base de projection est composée de deux types de modes composants, à savoir des modes statiques de liaison notés Φ_s et des modes normaux à interfaces fixes, également appelés modes encastés notés Ψ . Tout d'abord, les modes statiques de liaison sont obtenus en assignant successivement un déplacement unitaire à chaque ddl frontière quand tous les autres ddls de frontière sont fixés. Il s'agit alors de déformées statiques de la structure et il existe autant de modes statiques que de ddls de frontière. Ces modes sont obtenus en résolvant le problème statique suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{K}_{FI} \\ \mathbf{K}_{IF} & \mathbf{K}_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_F \\ \Phi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{imp} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

où \mathbf{R}_{imp} est la force de réaction due au déplacement unitaire imposé sur les ddls de frontière. L'expression des modes statiques de liaison est alors obtenue et s'écrit :

$$\Phi_s = -(\mathbf{K}_{II})^{-1} \mathbf{K}_{IF} \quad (\text{IV.8})$$

En ce qui concerne les modes normaux à interfaces fixes, ce sont des modes de vibration obtenus en encastrant la structure au niveau des ddls de frontière. Ces modes normaux Ψ sont calculés en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{K}_{II} - \omega^2 \mathbf{M}_{II}) \Psi = \mathbf{0} \quad (\text{IV.9})$$

Une matrice de passage peut alors être construite afin de projeter l'équation du mouvement sur la base réduite. Notons que la réduction se fait en considérant seulement un nombre restreint à ζ de modes normaux à interfaces fixes. Ainsi, l'expression de la matrice de réduction de Craig & Bampton est la suivante :

$$\Psi_{CB} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_F & \mathbf{0} \\ \Phi_s & \Psi_\zeta \end{pmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

où \mathbf{I}_F est la matrice identité dont la taille dépend du nombre de ddls de frontière considéré et la matrice Ψ_ζ est composée des ζ premiers modes normaux à interfaces fixes retenus.

Cette matrice permet de définir le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_I \end{pmatrix} = \Psi_{CB} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

où le vecteur de taille réduite $\mathbf{q}_{red} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$ est constitué des ddls de frontière \mathbf{q}_F et des composantes modales \mathbf{p} relatives à l'influence des ζ modes à interfaces fixes. En substituant la relation (IV.11) dans l'équation du mouvement avec la réorganisation des ddls (*cf.* Eq. (IV.6)) et en pré-multipliant cette même équation par Ψ_{CB}^T , on obtient l'expression des matrices structurales réduites :

$$\mathbf{K}_{red} = \Psi_{CB}^T \mathbf{K} \Psi_{CB}, \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{red} = \Psi_{CB}^T \mathbf{M} \Psi_{CB}. \quad (\text{IV.12})$$

La méthode de réduction qui vient d'être présentée a été appliquée à une structure définie en base physique. Les détails de mise en œuvre de cette méthode dans le cas d'une structure décrite en base cyclique sont précisés dans le paragraphe suivant.

1.2.2 Réduction modale et symétrie cyclique

La démarche générale du calcul d'un modèle réduit d'une structure définie en base cyclique est similaire. Après avoir partitionné le vecteur des composantes harmoniques en ddls de frontière et ddls internes, une base réduite est construite, constituée des modes statiques de liaison et des modes normaux de vibration à interfaces fixes. Précisons que la résolution d'un problème aux valeurs propres étant indépendante de la base dans laquelle on se trouve, le calcul des vecteurs propres et valeurs propres d'une structure à symétrie cyclique peut donc être réalisé dans l'espace harmonique. Le calcul du modèle réduit du secteur de référence peut alors être construit pour chaque onde k indépendamment.

Cas des modes non-dégénérés. Pour les harmoniques $k = 0$ et $k = \frac{N}{2}$, les matrices des systèmes (IV.3) et (IV.5) sont réelles, de dimension n_{sect} . Considérons le vecteur des composantes harmoniques pour l'onde $k = 0$ avec une réorganisation des ddls :

$$\tilde{\mathbf{q}}_0^0 = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^0 \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_I}^0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

Les modes statiques de liaison sont alors donnés par :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^0 \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_I}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_F \\ \tilde{\Phi}_s^0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^0 \quad (\text{IV.14})$$

En ce qui concerne les modes normaux à interfaces fixes, on a :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^0 \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_I}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\Psi}_\zeta^0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}^0 \quad (\text{IV.15})$$

où $\tilde{\Psi}_\zeta$ est composée des ζ premiers modes normaux retenus dans la base de projection et $\tilde{\mathbf{p}}^0$ est le vecteur des composantes modales correspondant à l'onde $k = 0$, de taille ζ .

En combinant les deux relations (IV.14) et (IV.15), on obtient la matrice permettant le passage de la base cyclique à la base réduite pour l'harmonique $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^0 \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_I}^0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}_F & \mathbf{0} \\ \tilde{\Phi}_s^0 & \tilde{\Psi}_\zeta^0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\Psi}_{CB}^0} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^0 \\ \tilde{\mathbf{p}}^0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

Après projection de l'équation du mouvement (IV.3) sur la base réduite, on obtient l'expression des matrices structurales réduites $\tilde{\mathbf{K}}_{red}^0 = \left(\tilde{\Psi}_{CB}^0\right)^T \tilde{\mathbf{K}}^0 \tilde{\Psi}_{CB}^0$ et $\tilde{\mathbf{M}}_{red}^0 = \left(\tilde{\Psi}_{CB}^0\right)^T \tilde{\mathbf{M}}^0 \tilde{\Psi}_{CB}^0$.

La procédure détaillée est également valable pour l'onde $k = \frac{N}{2}$, dans le cas où le nombre de secteurs N est pair.

Cas des modes dégénérés. Pour les autres harmoniques $k = 1, \dots, K$, les matrices des sous-systèmes (IV.4) sont de dimension $2n_{sect}$ car l'inconnue complexe est décomposée en partie réelle et partie imaginaire. La réorganisation du vecteur des composantes harmoniques est alors la suivante :

$$\tilde{\mathbf{q}}_0^k = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{k,cos} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{k,sin} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_I}^{k,cos} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_I}^{k,sin} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

La matrice de Craig & Bampton permettant le passage de la base cyclique à la

base réduite pour les harmoniques $k = 1, \dots, K$ s'exprime :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{k,cos} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{k,sin} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_I}^{k,cos} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_I}^{k,sin} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{2F} & \mathbf{0} \\ \tilde{\Phi}_s^k & \tilde{\Psi}_\zeta^k \end{pmatrix}}_{\tilde{\Psi}_{CB}^k} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{k,cos} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{k,sin} \\ \tilde{\mathbf{p}}^k \end{pmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

où \mathbf{I}_{2F} est la matrice identité de taille double par rapport au nombre de ddls de frontière considéré, la matrice des modes statiques de liaison $\tilde{\Phi}_s^k$ est de taille $(2n_{sect} \times 2n_{sect})$, la matrice des modes normaux $\tilde{\Psi}_\zeta^k$ est de taille $(2n_{sect} \times 2\zeta)$, et le vecteur des composantes modales $\tilde{\mathbf{p}}^k$ est de taille 2ζ , lorsque ζ modes ont été retenus dans la base de projection.

De la même manière que précédemment, les matrices réduites de la structure sont obtenues après projection de l'équation du mouvement (IV.4) sur la base réduite, aboutissant aux expressions suivantes $\tilde{\mathbf{K}}_{red}^k = (\tilde{\Psi}_{CB}^k)^T \tilde{\mathbf{K}}^k \tilde{\Psi}_{CB}^k$ et $\tilde{\mathbf{M}}_{red}^k = (\tilde{\Psi}_{CB}^k)^T \tilde{\mathbf{M}}^k \tilde{\Psi}_{CB}^k$.

La méthode de réduction modale de Craig & Bampton a la particularité de permettre de conserver dans l'espace réduit certains ddls choisis. L'objectif étant de coupler le modèle de roue aubagée avec le modèle simplifié de bi-rotor, les ddls de frontière qui seront retenus dans la base réduite seront les ddls de la roue aubagée à connecter avec le bi-rotor. L'application de cette méthode de réduction au secteur de référence considéré, pour chaque harmonique spatiale k , constitue le deuxième niveau de réduction du modèle complet de roue aubagée.

1.3 Convergence du modèle réduit

La maîtrise de la réduction des modèles éléments finis nécessite la définition de critères permettant de statuer sur la qualité du modèle réduit. Plusieurs indicateurs ont été développés afin de mesurer « l'erreur » commise entre un modèle complet et son modèle réduit associé, notamment des critères sur les fréquences propres, sur les vecteurs propres [Ewins, 2000], ou encore des indicateurs d'erreur en énergie de déformation [Bobillot, 2002]. Seuls les deux premiers critères, les plus fréquemment utilisés, sont présentés ici.

1.3.1 Critère sur les fréquences propres

Ce critère est le plus simple à vérifier et permet une évaluation rapide du modèle réduit. Il s'agit de calculer les fréquences propres du modèle réduit f_{red} , puis de les comparer aux fréquences propres f du modèle complet éléments finis. L'indicateur d'erreur s'exprime alors simplement par une déviation en fréquence :

$$\Delta f = \frac{f_{red} - f}{f_{red}} (\%) \quad (\text{IV.19})$$

1.3.2 Critère sur les vecteurs propres

Ce critère d'assurance modale (MAC) permet de mesurer la corrélation entre deux ensembles de vecteurs propres. Ainsi, il permet une comparaison des vecteurs propres du modèle réduit, notés \mathbf{V}_{red} avec ceux du modèle complet, notés \mathbf{V} . Ce critère de MAC s'écrit :

$$\text{MAC}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{V}_{red}, \mathbf{V}) = \frac{(\mathbf{V}_{red}^T \mathbf{Z} \mathbf{V})^2}{(\mathbf{V}_{red}^T \mathbf{Z} \mathbf{V}_{red})(\mathbf{V}^T \mathbf{Z} \mathbf{V})} \quad (\text{IV.20})$$

où la matrice carrée \mathbf{Z} est une matrice de pondération pouvant être la matrice identité \mathbf{I} ou encore la matrice de masse \mathbf{M} du modèle éléments finis. Dans le cas où le MAC entre deux vecteurs est égal ou proche de l'unité, alors ces deux vecteurs sont parallèles, signifiant qu'il y a une très bonne corrélation entre ces deux derniers.

Les différentes étapes de réduction d'un modèle de roue aubagée 3D modélisée par éléments finis viennent d'être précisées. Nous avons d'abord rappelé les propriétés de symétrie cyclique de cette structure permettant de considérer la structure complète à partir d'un seul secteur de référence. Puis nous avons appliqué une technique de réduction modale de type Craig & Bampton afin d'obtenir un modèle réduit de ce secteur de référence pour chaque harmonique spatiale k . La partie suivante détaille la procédure permettant d'intégrer ce modèle réduit du secteur de référence de la roue aubagée dans le modèle simplifié de bi-rotor.

2 Connexion de la roue aubagée au modèle bi-rotor simplifié

Afin d'étudier le modèle couplé de bi-rotor aubagé impliquant un modèle éléments finis réduit de roue aubagée, une méthode spécifique de couplage doit être développée. Le modèle réduit de roue aubagée détaillé dans la partie précédente est construit à l'aide des outils disponibles au sein de SNECMA, à savoir le solveur Samcef. Le modèle simplifié de bi-rotor introduit au chapitre III est quant à lui développé dans Matlab. Précisons que le couplage entre ces deux modèles sera réalisé dans Matlab. Les matrices réduites du secteur de référence considéré sont donc exportées et lues dans Matlab afin de procéder au couplage. Une description détaillée de la procédure de couplage est présentée dans la suite, puis la méthode proposée sera validée à l'aide d'un cas-test simplifié.

2.1 Description de la méthode proposée

L'objectif est de connecter un modèle réduit de roue aubagée 3D décrit en base cyclique à un modèle simplifié de bi-rotor décrit en base physique. La démarche de couplage développée se décompose en différentes étapes, dont la première est d'exporter les données liées au modèle réduit du secteur de référence de la roue aubagée

créé dans Samcef. Les données exportées dans Matlab sont les matrices de masse et de raideur de la structure réduite ainsi que le vecteur de localisation permettant de repérer les termes liés aux ddls de frontières $\tilde{\mathbf{q}}_{0_F}$ et aux ddls modaux $\tilde{\mathbf{p}}$ dans les matrices réduites. Rappelons que les modèles réduits sont calculés indépendamment pour chaque harmonique k , les expressions des vecteurs de localisation sont donc les suivantes :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{red}^0 = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^0 \\ \tilde{\mathbf{p}}^0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{q}}_{red}^k = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{k,cos} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{k,sin} \\ \tilde{\mathbf{p}}^k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{red}^{N/2} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{N/2} \\ \tilde{\mathbf{p}}^{N/2} \end{pmatrix}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K. \quad (\text{IV.21})$$

Notons que les ddls de frontière choisis dans la base réduite correspondent aux ddls du secteur de référence à connecter au bi-rotor, autrement dit ceux situés sur le rayon intérieur de la roue aubagée. De plus, nous avons vu au chapitre précédent que le mode d'aube à 1 diamètre était le mode de la roue aubagée qui était couplé à la flexion des arbres du bi-rotor. C'est pourquoi, dans les développements qui suivent, seul le modèle réduit du secteur de référence pour l'harmonique $k = 1$ sera considéré. Par ailleurs, il est important de préciser que la procédure de couplage mise en place est également valable pour les autres harmoniques, bien que les calculs ne soient pas explicités.

La seconde étape de la procédure consiste à exprimer les déplacements de la structure réduite $\tilde{\mathbf{q}}_{red}^k$ en base physique afin de pouvoir coupler les ddls de frontière au bi-rotor. Comme la résolution d'un problème aux valeurs propres est indépendante de la base dans laquelle on se trouve, les ddls modaux $\tilde{\mathbf{p}}$ peuvent être considérés dans l'espace harmonique lors de la procédure de couplage. En revanche, les ddls de frontière doivent être exprimés dans la base physique à l'aide de la matrice de transformée de Fourier discrète réelle. Dans la suite, seuls les ddls de frontière du vecteur de déplacement réduit du secteur de référence seront donc traités. Ainsi, en fonction de l'harmonique considérée, le passage de la base cyclique à la base physique pour les ddls de frontière s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{k,cos} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{k,sin} \end{pmatrix} = \left((\mathbf{F}^k)^{-1} \otimes \mathbf{I}_F \right) \mathbf{q}_F, \quad \text{pour } k = 1. \quad (\text{IV.22})$$

où \mathbf{I}_F est la matrice identité dont la taille dépend du nombre de ddls de frontière choisi et où l'expression du sous-bloc de la matrice inverse de Fourier $(\mathbf{F}^k)^{-1}$ est donnée par :

$$(\mathbf{F}^k)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} \cos(jk\alpha) & \cdots & \frac{2}{N} \cos((N-1)k\alpha) \\ 0 & \cdots & \frac{2}{N} \sin(jk\alpha) & \cdots & \frac{2}{N} \sin((N-1)k\alpha) \end{pmatrix}, \quad \text{pour } k = 1. \quad (\text{IV.23})$$

où N représente le nombre total de secteur de la roue aubagée et $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ désigne l'angle de rotation entre chaque secteur de la structure complète. L'application de la matrice de Fourier permet alors d'obtenir le vecteur \mathbf{q}_F composé des ddls de frontière de chaque secteur j de la roue aubagée en base physique :

$$\mathbf{q}_F = \left[\mathbf{q}_{0_F} \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{j_F} \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{(N-1)_F} \right]^T \quad (\text{IV.24})$$

où \mathbf{q}_{j_F} correspond au déplacement des ddls de frontière du secteur j , exprimé dans le repère local tournant \mathcal{R}_{m_j} associé au secteur j (*cf.* Chap. I.4.1.1).

Par convention, l'axe de rotation moteur considéré dans Samcef pour la modélisation des roues aubagées est l'axe \mathbf{z} . Comme chaque secteur j de la roue aubagée est déduit du secteur de référence indicé 0 par j rotations successives d'angle α , les repères locaux tournants \mathcal{R}_{m_j} peuvent être définis par la rotation $\alpha_j = \frac{2\pi j}{N}$ par rapport au repère local tournant \mathcal{R}_{m_0} . Ces repères locaux tournants sont représentés sur la figure IV.1.

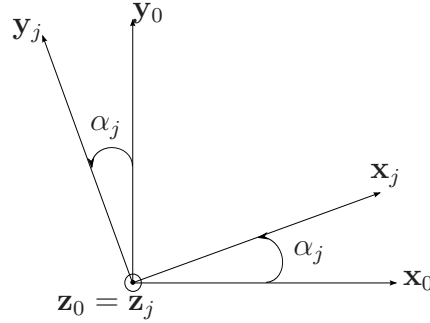


FIGURE IV.1 – Définition des repères locaux tournants \mathcal{R}_{m_j} dans Samcef

L'objectif de la troisième étape de la démarche proposée est alors d'exprimer le déplacement \mathbf{q}_{j_F} des ddls de frontière de chaque secteur j dans le repère local tournant de référence \mathcal{R}_{m_0} . Le déplacement des ddls de frontière de chaque secteur j peuvent donc être reliés au déplacement des ddls de frontière du secteur 0 par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_{0_F} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{j_F} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{(N-1)_F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0 \otimes \mathbf{I}_F \\ \vdots \\ \mathbf{R}_j \otimes \mathbf{I}_F \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{N-1} \otimes \mathbf{I}_F \end{pmatrix} \mathbf{q}_{0_F} \quad (\text{IV.25})$$

où \mathbf{q}_{0_F} est le vecteur de déplacement des ddls de frontière du secteur 0 exprimé en base physique et les matrices de rotation \mathbf{R}_j sont définies par l'expression suivante :

$$\mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} \cos \alpha_j & \sin \alpha_j & 0 \\ -\sin \alpha_j & \cos \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } j \in [0; N-1]. \quad (\text{IV.26})$$

Cette étape de la procédure nous permet d'obtenir le vecteur déplacement des ddls de frontière du secteur de référence en base physique.

On suppose ensuite qu'il y a correspondance entre le repère local tournant \mathcal{R}_{m_0} et le repère tournant $\mathcal{R}_{bp} = (O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ lié au rotor BP. Comme l'axe de rotation de Samcef est l'axe \mathbf{z}_0 et que l'axe de rotation du rotor BP est l'axe \mathbf{y} , le vecteur déplacement \mathbf{q}_{0_F} dans \mathcal{R}_{bp} s'exprime par le changement de repère suivant :

$$(\mathbf{q}_{0_F})_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)} = (\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_F) (\mathbf{q}_{0_F})_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})} \quad (\text{IV.27})$$

où la matrice de rotation \mathbf{R} a l'expression suivante :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

Ce dernier changement de repère permet d'obtenir le déplacement des ddls de frontière du secteur 0 dans le repère tournant lié au rotor BP. La dernière étape de la procédure de couplage consiste alors à lier rigidement le déplacement de ces ddls de frontière au déplacement du rotor BP en l'abscisse $y = y_d$ du disque aubagé, afin de réaliser le couplage entre les deux structures. Chaque nœud frontière de la base réduite que l'on indicera i est alors couplé rigidement au déplacement du rotor BP par la relation suivante :

$$\left(\mathbf{q}_{0_{F_i}} \right)_{(x,y,z)} = \mathbf{u}_{bp}(y_d, t) = \mathbf{\Phi}_{bp}(y_d) \mathbf{q}_{bp}(t) \quad (\text{IV.29})$$

avec :

$$\mathbf{u}_{bp}(y_d, t) = \begin{pmatrix} u(y_d, t) \\ 0 \\ w(y_d, t) \end{pmatrix}$$

L'approximation de Rayleigh-Ritz utilisée pour décrire la flexion de l'arbre BP est donnée au chapitre III par les relations (III.21) et (III.22). Cette dernière étape de la méthode de couplage permet donc de coupler le déplacement des ddls de frontière du secteur de référence exprimé en base physique dans le repère tournant \mathcal{R}_{bp} au déplacement des ddls généralisés du rotor BP en l'abscisse $y = y_d$ du disque TuBP.

Finalement, les grandes étapes de transformation de la méthode proposée permettant de relier le vecteur déplacement des ddls de frontière du secteur de référence au déplacement du rotor BP en $y = y_d$ sont résumées par :

1. Création du secteur de référence au sens de la symétrie cyclique, puis réduction du modèle par synthèse modale dans Samcef ;
2. Extraction des données liées au secteur de référence réduit en base cyclique, puis lecture dans Matlab ;
3. Passage de la base cyclique à la base physique pour les ddls de frontière, permettant d'obtenir le déplacement des ddls de frontière de chaque secteur j dans leur repère local tournant \mathcal{R}_{m_j} ;
4. Lien entre le déplacement des ddls de frontière de chaque secteur j et le déplacement des ddls de frontière du secteur 0 dans \mathcal{R}_{m_0} ;
5. Correspondance entre le repère local tournant \mathcal{R}_{m_0} et le repère tournant \mathcal{R}_{bp} lié au rotor BP ;
6. Écriture des relations de couplage rigide entre les ddls de frontière du secteur de référence en base physique et les ddls du rotor BP.

L'application de cette procédure de couplage nous mène au changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{k,cos} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{0_F}^{k,sin} \\ \tilde{\mathbf{p}}^k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_\zeta \end{pmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{bp} \\ \tilde{\mathbf{p}}^k \end{pmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

où la matrice \mathbf{T} contient toutes les étapes de transformation décrites précédemment et \mathbf{I}_ζ est la matrice identité dont la taille dépend du nombre ζ de modes à interfaces fixes retenus dans la base réduite.

Les matrices structurales du secteur de référence de la roue aubagée à assembler aux matrices structurales du modèle de bi-rotor sont donc les suivantes, avec comme harmonique considérée $k = 1$:

$$\mathbf{M}_{coupl}^k = \mathcal{T}^T \tilde{\mathbf{M}}^k \mathcal{T}, \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{coupl}^k = \mathcal{T}^T \tilde{\mathbf{K}}^k \mathcal{T}. \quad (\text{IV.31})$$

Les développements qui viennent d'être présentés permettent de construire un modèle bi-rotor aubagé impliquant un modèle éléments finis 3D réduit de roue aubagée. Le paragraphe suivant est dédié à la présentation d'un cas-test pertinent, permettant ainsi de valider la démarche de couplage proposée.

2.2 Présentation du cas-test de validation

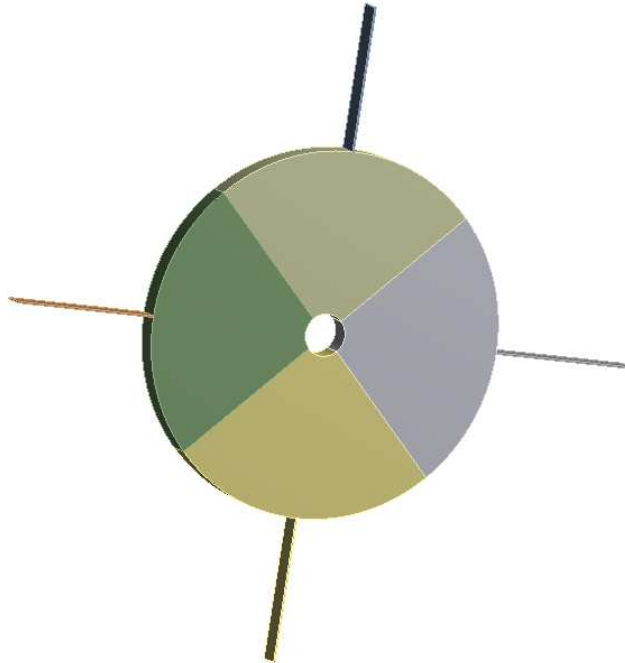


FIGURE IV.2 – Cas-test de validation

Afin de valider la méthode proposée dans la partie précédente, l'idée est de construire un cas-test de validation de roue aubagée modélisée par éléments finis. Le modèle éléments finis que nous avons choisi de créer correspond au modèle de

roue aubagée constitué d'un disque rigide et d'aubes modélisées par des poutres de type Euler-Bernoulli. Comme nous disposons déjà d'un modèle couplé bi-rotor aubagé impliquant des aubes modélisées par des poutres (*cf.* Chap. III.1.3), il sera alors possible de le comparer au modèle couplé impliquant une roue aubagée 3D modélisée par éléments finis.

Un modèle de roue aubagée comportant $N = 4$ secteurs identiques a été créé et est présenté en figure IV.2. Les caractéristiques qui ont été prises en compte pour la création de ce modèle correspondent donc au modèle développé dans le chapitre précédent et sont récapitulées dans le tableau IV.1. Le disque qui était considéré infiniment rigide dans le chapitre précédent est ici considéré en acier.

Notation	Description	Valeur
$M_{d_{TuBP}}$	Masse du disque TuBP	34 kg
$I_{diam_{TuBP}}$	Moment d'inertie diamétral du disque TuBP	0,4 kg · m ²
$I_{pol_{TuBP}}$	Moment d'inertie polaire du disque TuBP	0,8 kg · m ²
E_d	Module d'Young du disque	211×10^9 N/m ²
ρ_d	Masse volumique du disque	7800 kg/m ³
N_b	Nombre total d'aubes	4
L_b	Longueur des aubes	0,17 m
E_b	Module d'Young des aubes	114×10^9 N/m ²
ρ_b	Masse volumique des aubes	4500 kg/m ³
β	Angle d'incidence des aubes	0 °

TABLE IV.1 – Valeur des paramètres de la roue aubagée 3D

2.2.1 Réduction du modèle de roue aubagée

À partir du modèle complet de roue aubagée illustré en figure IV.2, l'objectif est de construire un modèle réduit associé au secteur de référence de cette structure. Afin d'obtenir un modèle réduit du cas-test de validation, la démarche décrite dans la section 1 est employée. Dans un premier temps, comme les 4 secteurs de la roue aubagée considérée sont identiques, il est possible de modéliser un seul secteur de référence de la structure au sens de la symétrie cyclique. Le modèle du secteur de référence est présenté en figure IV.3, il est discrétisé en 4964 éléments hexaédriques de degré 2. Les autres secteurs de la roue aubagée sont déduits de ce secteur de référence par j rotations successives d'angle $\alpha = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$, pour $j \in [0; N - 1]$. Étant donné que la structure se referme sur elle-même, il convient de définir pour ce secteur de référence des conditions aux limites avec ses secteurs adjacents. La définition de ces conditions aux limites cycliques se fait sur les frontières inter-secteurs et est illustrée sur la figure IV.3. Ainsi, les degrés de liberté appartenant à la frontière de gauche du secteur de disque sont liés aux degrés de libertés appartenant à la frontière de droite par des relations de propagation définies en base cyclique (*cf.* Chap. I.4.1.3). À partir de ce modèle du secteur de référence défini en base cyclique, il est possible de calculer les modes de vibration de la structure complète pour chaque harmonique spatiale k .

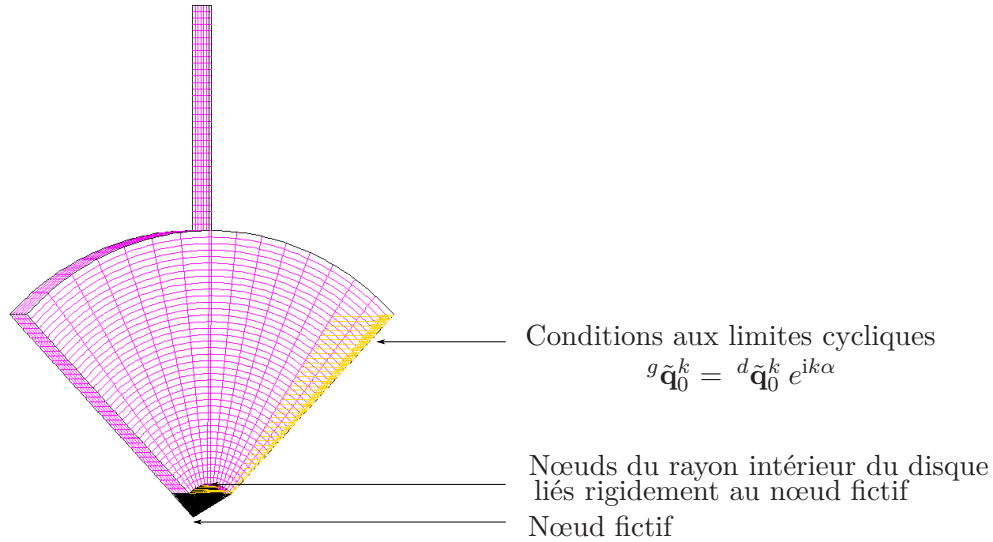


FIGURE IV.3 – Secteur de référence du cas-test de validation

La seconde étape de la méthode consiste à obtenir un modèle réduit de ce secteur de référence modélisé en base cyclique. La méthode de réduction modale utilisée est la méthode de Craig & Bampton qui consiste à construire une base réduite constituée de modes statiques de liaison et de modes normaux de vibration à interfaces fixes. La première étape de la procédure de réduction est de sélectionner les ddls de frontières du secteur de référence, puis de partitionner le vecteur des composantes harmoniques en ddls de frontière et ddls internes. Comme l'objectif est de coupler ce modèle de roue aubagée au modèle simplifié de bi-rotor, les ddls de frontière à retenir dans la base réduite sont les ddls se situant sur le rayon intérieur du secteur de disque aubagé. En pratique, afin de limiter le nombre de ddls de frontière dans la base réduite, un nœud fictif est créé au centre de rotation de la structure. Étant donné que le couplage entre la roue aubagée et le bi-rotor est un couplage rigide, il est alors possible de lier rigidement les nœuds se situant sur le rayon intérieur du secteur de disque aubagé au nœud fictif situé au centre de rotation. Le nœud fictif ainsi que les liaisons rigides sont représentés sur la figure IV.3. Les ddls de frontières à retenir dans la base réduite peuvent alors être uniquement ceux associés au nœud fictif. Une fois les ddls de frontière sélectionnés, une base réduite est ensuite construite suivant la méthode décrite à la section 1.2.2. Les matrices structurales réduites de ce secteur de référence sont finalement obtenues en projetant l'équation du mouvement sur la base réduite.

2.2.2 Validation du modèle réduit

Afin de vérifier la validité des modèles réduits obtenus en base cyclique pour chaque harmonique k , les critères de convergence développés en section 1.3 sont appliqués sur notre cas-test de validation. Notons que pour construire le modèle réduit, $\zeta = 20$ modes normaux de vibration à interfaces fixes ont été retenus dans la base réduite.

Le premier critère le plus simple à vérifier est le critère sur les fréquences propres. Ce critère permet de comparer les fréquences propres f_{red} du modèle réduit du secteur de référence aux fréquences propres f du modèle complet du secteur, au travers d'une déviation en fréquence Δf . La comparaison des 8 premières fréquences propres du secteur de référence de la roue aubagée, calculées pour l'harmonique $k = 0$, est reportée dans le tableau IV.2.

Modes	f_{red} (Hz)	f (Hz)	Δf (%)
1	51,740	51,739	0,003
2	321,925	321,846	0,025
3	557,844	557,757	0,016
4	797,908	792,094	0,729
5	903,162	901,536	0,180
6	1523,930	1476,040	3,143
7	1704,150	1700,660	0,205
8	1783,900	1770,610	0,745

TABLE IV.2 – Convergence du modèle réduit - Critère sur les fréquences propres

Nous pouvons constater que pour la plupart des modes de vibration à 0 diamètre, l'écart entre les fréquences propres du modèle réduit et celles du modèle complet est inférieur à 1%.

Le second critère le plus répandu afin de statuer sur la convergence du modèle réduit est le critère d'assurance modale, permettant de comparer les vecteurs propres du modèle réduit à ceux du modèle complet pour chaque mode de vibration. Les résultats obtenus à l'issue du calcul du critère de MAC sont généralement présentés sous forme de matrice. Rappelons qu'il existe une très bonne corrélation entre les

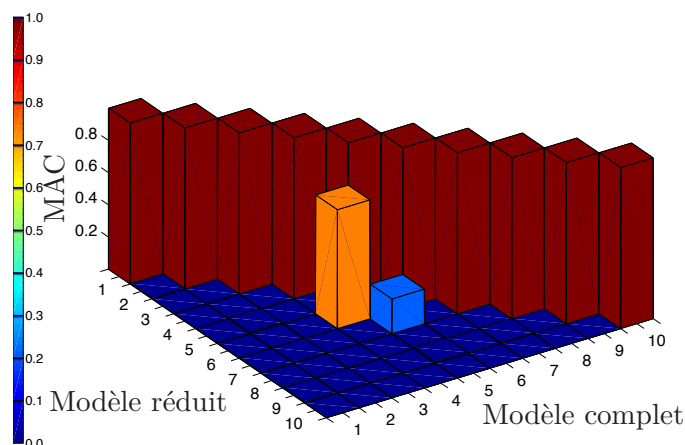


FIGURE IV.4 – Critère de MAC pour l'harmonique $k = 0$

vecteurs propres lorsque la diagonale de cette matrice est égale ou proche de l'unité. La matrice de MAC calculée pour l'harmonique $k = 0$ est illustrée sur la figure IV.4.

Le critère en fréquence et le critère de MAC, calculés pour l'harmonique $k = 0$, nous permettent de vérifier la validité du modèle réduit qui a été construit. Notons que la même démarche est adoptée afin de vérifier la convergence des modèles réduits calculés pour les harmoniques $k = 1$ et $k = 2$.

D'autre part, le modèle éléments finis de roue aubagée qui vient d'être construit correspond au modèle simplifié développé dans le chapitre précédent. Le modèle éléments finis est construit au sens de la symétrie cyclique puis le secteur de référence considéré est ensuite réduit par une technique de synthèse modale. En revanche, dans le modèle simplifié impliquant un disque rigide et des aubes modélisées par des poutres, l'hypothèse de symétrie cyclique n'est pas considérée et le modèle n'est pas réduit. Une comparaison des premiers modes de flexion des deux modèles est présentée sur la figure IV.5, pour toutes les harmoniques $k = 0, 1, 2$. Cette compa-

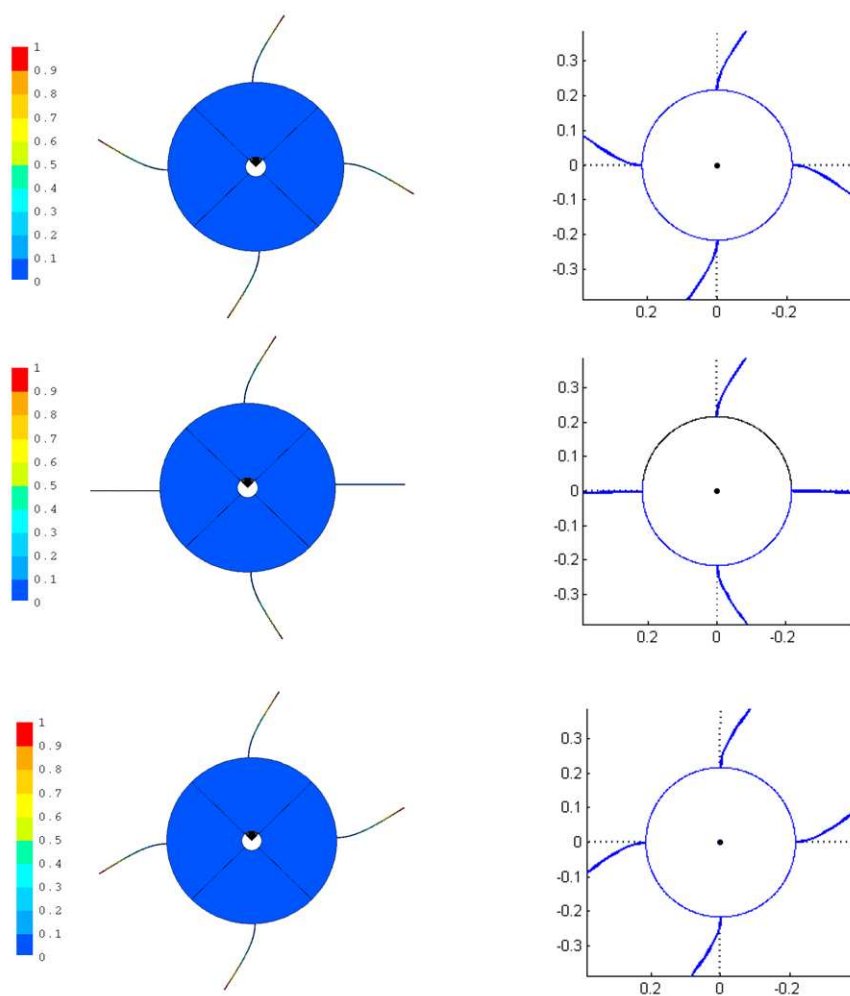


FIGURE IV.5 – Comparaison des déformées propres des premiers modes de flexion de roue aubagée pour toutes les harmoniques, $k = 0$ diamètre en haut, $k = 1$ diamètre au centre et $k = 2$ diamètres en bas

raison nous permet de valider l'étape de réduction du modèle éléments finis de roue

aubagée et de vérifier la pertinence du cas-test de validation choisi.

Dans la suite, les autres étapes de la procédure de couplage seront également validées en comparant les principaux résultats linéaires du modèle couplé au modèle décrit dans le chapitre précédent.

2.3 Validation de la méthode de couplage dans un cadre linéaire

Le cas-test de validation correspondant au modèle éléments finis de roue aubagée qui vient d'être introduit est représentatif du modèle simplifié de roue aubagée développé au chapitre III impliquant des aubes de type poutre. La procédure de réduction du secteur de roue aubagée a été validée en comparant les résultats du modèle réduit à ceux du modèle complet associé. L'objectif ici est valider les autres étapes de la procédure de couplage décrites dans la section 2.1, permettant de connecter le secteur réduit de roue aubagée modélisé par éléments finis au modèle simplifié de bi-rotor.

La seconde étape de la procédure de couplage est d'extraire les données relatives au modèle réduit du secteur de référence créé dans Samcef, puis de les lire dans Matlab. Étant donné que les modes de vibration à 1 diamètre de roue aubagée sont des modes qui se couplent facilement à la flexion des arbres [Khader et Loewy, 1990], seul le modèle réduit du secteur de référence calculé pour $k = 1$ est extrait et lu dans Matlab. Les autres étapes de la procédure de couplage permettent ensuite de connecter les ddls de frontière, à savoir ceux associés au nœud fictif, au modèle de bi-rotor en l'abscisse $y = y_d$ du disque TuBP. À la fin de cette procédure, nous disposons alors d'un modèle couplé impliquant un modèle éléments finis de roue aubagée que nous allons pouvoir comparer au modèle simplifié défini dans le chapitre précédent. Afin de réaliser cette comparaison, le diagramme de Campbell associé à chacun des deux modèles couplés est calculé. La figure IV.6 illustre une superposition des deux diagrammes de Campbell obtenus pour chaque modèle.

L'évolution des fréquences propres de chaque système couplé est représentée en fonction de la vitesse de rotation du rotor BP, sur la plage de vitesse $\Omega_{bp} = [0; 3200]$ trs/min. Les courbes en trait mixte représentent l'évolution des fréquences propres du modèle simplifié impliquant des aubes de type poutre. Les courbes en trait plein représentent quant à elles l'évolution des fréquences propres du modèle couplé impliquant le secteur réduit de roue aubagée. De plus, de la même manière qu'au chapitre précédent, les droites bleues représentent les modes d'ensemble de la structure et les courbes rouges désignent les modes propres de roue aubagée à 1 diamètre. Pour des vitesses de rotation inférieures à $\Omega_{bp} = 1500$ trs/min, nous pouvons constater que les deux diagrammes de Campbell se superposent parfaitement. Au delà de cette vitesse de rotation, il existe un léger écart entre les fréquences propres des deux modèles, notamment pour les modes d'ensemble représentés en bleu sur la figure IV.6. Cet écart peut s'expliquer par une différence de modélisation du disque aubagé dans les deux modèles. En effet, dans le modèle couplé simplifié,

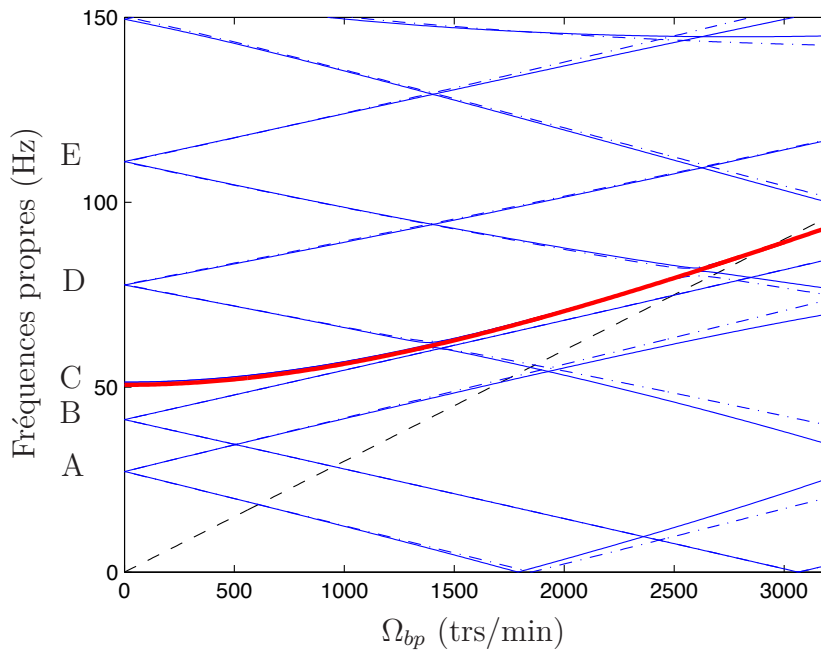


FIGURE IV.6 – Comparaison des diagrammes de Campbell entre les deux modèles couplés - (—) Modèle de référence impliquant des aubes poutres, (—) Modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée 3D

le disque de TuBP est considéré infiniment rigide et est modélisé par une masse ponctuelle et des inerties en rotation, alors que pour l'autre modèle couplé incluant un modèle éléments finis de roue aubagée, le disque est considéré en acier et est par conséquent plus souple.

L'analyse de ce diagramme de Campbell fournit également le placement des modes par rapport aux vitesses critiques. Ainsi, il est possible de prévoir les résonances des deux systèmes couplés en fonction des excitations synchrones, qui sont dans notre cas, les forces de balourd BP et HP. Rappelons que la représentation de ce diagramme de Campbell est réalisée dans le repère tournant \mathcal{R}_{bp} , la droite d'excitation synchrone BP correspond donc à l'axe des abscisses $f = 0$ et la droite d'excitation synchrone HP correspond à la droite $f = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$, représentée en pointillés sur la figure IV.6. Comme les deux systèmes couplés sont axisymétriques, seules les vitesses critiques directes vont nous intéresser dans la suite. Ces vitesses se lisent à l'intersection des branches des modes directs et des droites d'excitation $f = 0$ et $f = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$ et sont reportées dans le tableau IV.3. Le tableau récapitule les vitesses critiques, en trs/min, pour chaque excitation de balourd BP et HP. D'une part, les vitesses sont relevées pour le modèle couplé impliquant des aubes de type poutre, noté « Poutre » dans le tableau, et d'autre part elles sont relevées pour le modèle couplé impliquant un modèle éléments finis de roue aubagée, désigné par « 3D ». L'écart entre ces valeurs est ensuite calculé pour chacun des modes et exprimé en pourcentage. Notons que l'écart entre les vitesses critiques de chaque modèle est de l'ordre de 1%, nous permettant ainsi de dire que la procédure de

Modes	Balourd BP			Balourd HP		
	Poutre	3D	Écart (%)	Poutre	3D	Écart (%)
A	1850	1790	3,2	609,2	608,9	0,05
B	3066	3064	0,07	951,3	951,2	0,01
C	—	—	—	2913	2921	0,3
D	—	—	—	1866	1845	1,1
E	—	—	—	2663	2698	1,3

TABLE IV.3 – Comparaison des vitesses critiques directes BP et HP entre les deux modèles couplés

couplage mise en place est valide.

Afin d'achever la comparaison des deux modèles couplés dans un cadre linéaire, nous allons maintenant nous intéresser à l'étude de la réponse forcée des systèmes, en particulier aux réponses à balourd BP et HP. Les résonances de chaque système vont apparaître au passage des vitesses critiques relevées dans le tableau IV.3. Dans un premier temps, la réponse au balourd BP est présentée en figure IV.7, où les courbes en trait mixte désignent la réponse du système couplé impliquant des aubes de type poutre et où les courbes en trait plein désignent la réponse du système incluant un secteur réduit de roue aubagée modélisé par éléments finis.

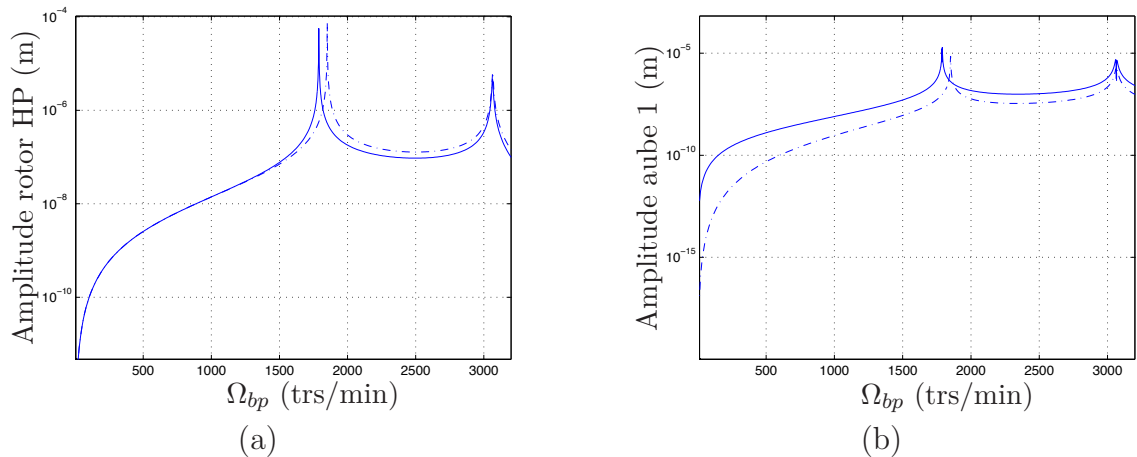


FIGURE IV.7 – Comparaison des réponses au balourd BP entre le système impliquant des aubes poutre (— — —) et le système impliquant un secteur réduit de roue aubagée 3D (—) - (a) Réponse du rotor HP au plan inter-arbre, (b) Réponse en tête d'aube

Le balourd a été introduit sur le disque FAN de l'arbre BP qui se situe à l'abscisse $y = 1,5$ m. La masse de ce balourd est de $m_{b_{bp}} = 1$ g et il est localisé à une distance $e_{bp} = r_{d_{FAN}}$ du centre du disque. Sur la plage de vitesses de rotation étudiées $\Omega_{bp} = [0; 3200]$, les deux modes A et B sont excités par le balourd BP et les pics de résonance apparaissent bien aux mêmes vitesses critiques que celles prédites sur le diagramme de Campbell. Pour chaque modèle couplé, la figure IV.7(a) illustre la réponse du rotor HP au plan inter-arbre et la figure IV.7(b) illustre la réponse

en tête d'aube. Sur ces deux figures, nous pouvons remarquer que les réponses des deux systèmes couplés au balourd BP sont du même ordre en termes d'amplitudes de vibration.

Dans un second temps, la réponse au balourd HP a été calculée et est présentée en figure IV.8. Le balourd a été introduit sur le disque TuHP de l'arbre HP situé à l'abscisse $y = -0,2$ m. La masse de ce balourd HP est identique à celle considérée pour le balourd BP et il est localisé à une distance $e_{hp} = r_{d_{TuHP}}$ du centre du disque. De la même manière que pour l'étude de la réponse au balourd BP, la réponse du rotor HP et la réponse en tête d'aube sont illustrées sur les figures IV.8(a) et IV.8(b), respectivement.

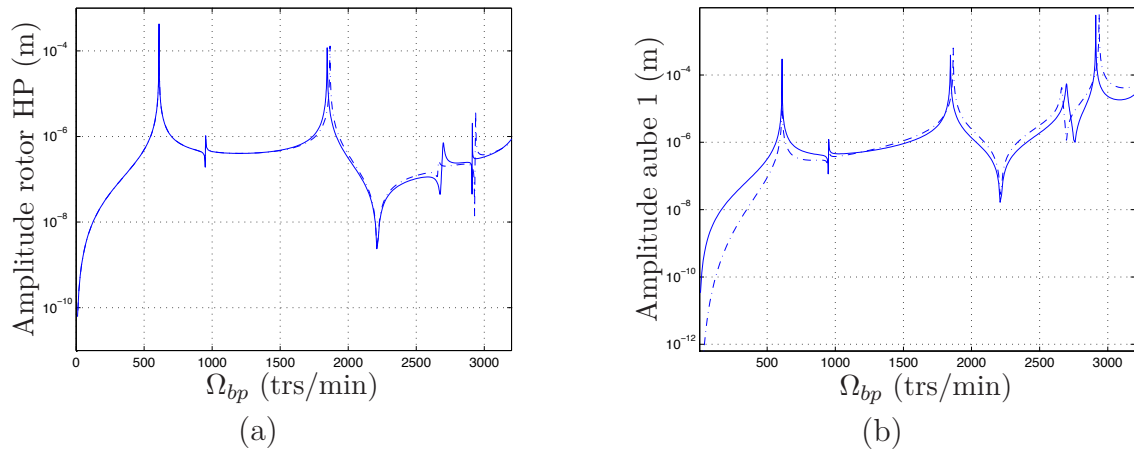


FIGURE IV.8 – Comparaison des réponses au balourd HP entre le système impliquant des aubes poutre (---) et le système impliquant un secteur réduit de roue aubagée 3D (—) - (a) Réponse du rotor HP au plan inter-arbre, (b) Réponse en tête d'aube

On observe bien cinq pics de résonance sur ces courbes de réponse, correspondants aux modes A, B, C, D et E. À nouveau, nous remarquons que les réponses des deux modèles couplés sont du même ordre en termes de position des résonances et également en termes de niveaux.

En conclusion, la comparaison entre les deux modèles couplés nous a permis de valider la procédure de couplage mise en place dans un cadre linéaire. Dans la partie suivante, nous allons étudier ce même système couplé en considérant des non-linéarités de type contact en tête d'aube.

3 Prise en compte des non-linéarités

L'étude du système couplé qui vient d'être présentée a été réalisée dans un cadre linéaire, car les outils de conception et d'analyse de tels systèmes sont généralement basés sur le comportement linéaire des structures. Cependant, les éléments et les liaisons entre les différents organes de ces structures couplées peuvent être de nature non-linéaire. En effet, la roue aubagée qui nous intéresse dans cette étude est une

roue de turbine BP. Les aubes de turbine considérées ont une géométrie spécifique en tête d'aube liée à la présence de talons (*cf.* Chap. V.1.2). Le rôle de ces talons dans la réponse vibratoire de la roue aubagée est de procurer un amortissement mécanique par contact (*cf.* Chap. II.1.1.3). Le but de notre étude va alors être de modéliser le contact en tête d'aube au travers d'un effort non-linéaire sur toute la roue aubagée. Après avoir introduit le modèle de contact utilisé pour la roue aubagée, nous présenterons les développements nécessaires à la prise en compte de cette non-linéarité sur le secteur réduit de roue aubagée modélisé en symétrie cyclique.

3.1 Modélisation du contact en tête d'aube

Différentes modélisations existent dans la littérature afin de prendre en compte le contact en tête d'aube lié à la présence de talons [Petrov, 2004, Szwedowicz *et al.*, 2008, Siewert *et al.*, 2010]. Afin de modéliser la présence du contact, nous avons fait le choix de s'inspirer de la force non-linéaire définie précédemment pour les roulements (*cf.* Chap. III.3.1). Le modèle considéré est illustré sur la figure IV.9 et correspond à une force linéaire par morceaux représentant le contact avec jeu.

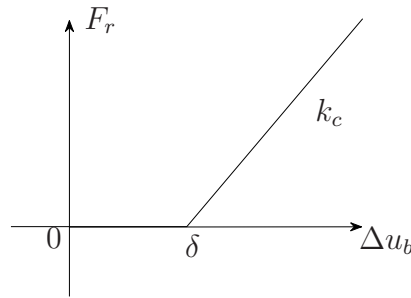


FIGURE IV.9 – Force radiale linéaire par morceaux pour le contact en tête d'aube

Le contact entre chaque tête d'aube est alors modélisé par un ressort radial dont la raideur est nulle si le déplacement relatif Δu_b entre deux aubes adjacentes est inférieur au jeu radial. La raideur de contact k_c n'est donc prise en compte que lorsque le jeu δ est consommé. Pour déterminer l'expression de la force non-linéaire sur toute la roue aubagée, considérons tout d'abord le déplacement relatif entre deux aubes voisines, notamment entre les aubes 1 et 2 :

$$\Delta u_b^{1-2} = u_b^1(L_b, t) - u_b^2(L_b, t) \quad (\text{IV.32})$$

où u_b^j représente la flexion de chaque aube j et où ces déplacements sont évalués en tête d'aube, à savoir en l'abscisse $s = L_b$ de chaque aube.

La force radiale que l'aube 1 exerce sur l'aube 2 s'écrit alors de la façon suivante :

$$F_r = \begin{cases} k_c (\Delta u_b^{1-2} - \delta) & \text{si } \Delta u_b^{1-2} > \delta; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

De la même manière qu'au chapitre précédent, nous pouvons en déduire l'expression de la force non-linéaire exercée par l'aube 1 sur l'aube 2, qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}_{nl}(\Delta u_b)^{1 \rightarrow 2} = k_c (\Delta u_b^{1-2} - \delta) \mathcal{H}(\Delta u_b^{1-2} - \delta) \quad (\text{IV.34})$$

où $\mathcal{H}(\cdot)$ représente la fonction Heaviside. Notons que suivant le principe de l'action et de la réaction, la force exercée par l'aube 2 sur l'aube 1 sera la même force, avec le signe opposé.

Finalement, en appliquant le même raisonnement sur toutes les aubes, nous obtenons l'expression de l'effort non-linéaire $\mathbf{F}_{nl}(\Delta u_b)$ s'exerçant sur toute la roue aubagée :

$$\mathbf{F}_{nl}(\Delta u_b) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{nl}(\Delta u_b)^{1 \rightarrow 2} & + & \mathbf{F}_{nl}(\Delta u_b)^{1 \rightarrow N_b} \\ \mathbf{F}_{nl}(\Delta u_b)^{2 \rightarrow 3} & + & \mathbf{F}_{nl}(\Delta u_b)^{2 \rightarrow 1} \\ \mathbf{F}_{nl}(\Delta u_b)^{3 \rightarrow 4} & + & \mathbf{F}_{nl}(\Delta u_b)^{3 \rightarrow 2} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{F}_{nl}(\Delta u_b)^{N_b \rightarrow 1} & + & \mathbf{F}_{nl}(\Delta u_b)^{N_b \rightarrow (N_b-1)} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.35})$$

où N_b désigne le nombre total d'aubes sur la roue aubagée.

Cette force non-linéaire est définie en fonction du déplacement u_b associé au modèle simplifié de roue aubagée impliquant des aubes de type poutre. En considérant cet effort non-linéaire dans l'équation du mouvement du bi-rotor aubagé simplifié, il sera alors possible d'étudier le comportement non-linéaire du système couplé à l'aide des outils spécifiques de résolution détaillés au chapitre II.

La force non-linéaire $\mathbf{F}_{nl}(\Delta u_b)$ qui vient d'être définie ne peut cependant pas être directement appliquée au système couplé impliquant un secteur réduit de roue aubagée modélisé en symétrie cyclique. C'est pourquoi, dans la suite, une démarche adaptée est développée afin de prendre en considération ces non-linéarités de type contact en tête d'aube au niveau de la roue aubagée modélisée en symétrie cyclique.

3.2 Évaluation de la force non-linéaire en symétrie cyclique

Lorsqu'un système linéaire associé à un modèle éléments finis de roue aubagée est reformulé en base cyclique, un ensemble de sous-systèmes indépendants définis sur le secteur de référence pour chaque harmonique spatiale k est obtenu. La réponse du système pour chaque harmonique spatiale est alors calculée séparément et le principe de superposition est ensuite appliqué afin de retrouver la solution complète sur toute la roue aubagée. Dans la cas où la structure est non-linéaire, le principe de superposition appliqué précédemment n'est en général plus valide. Néanmoins, des techniques existent dans la littérature afin de calculer la réponse d'une structure non-linéaire modélisée en symétrie cyclique.

3.2.1 Non-linéarités et symétrie cyclique

Poudou et Pierre [Poudou et Pierre, 2004] ont proposé une méthode afin de calculer la réponse forcée d'une structure non-linéaire modélisée au sens de la symétrie cyclique. Ils ont notamment montré qu'il était possible de calculer la réponse forcée d'un disque aubagé amorti par des frotteurs inter-aubes à partir d'un seul secteur de référence de la structure. D'autres auteurs se sont penchés sur le cas de structures à symétrie cyclique présentant des non-linéarités. Petrov [Petrov, 2004] s'est en particulier intéressé aux structures à symétrie cyclique présentant des non-linéarités elles aussi symétriques. La méthode proposée par l'auteur a été validée pour plusieurs types de non-linéarités, notamment avec une non-linéarité de type contact en tête d'aube. Il a ainsi montré que le calcul à partir d'un seul secteur de référence permettait d'obtenir le même résultat que le calcul sur le modèle complet.

Ces résultats nous permettent de dire que le calcul de la réponse de notre système couplé non-linéaire est possible en ne considérant qu'un seul secteur de référence pour la roue aubagée. Considérons alors que la modélisation et les paramètres représentant le contact en tête d'aube sont identiques pour tous les secteurs, à savoir un même nombre d'éléments en contact et une même raideur de contact k_c . La condition de cyclicité de la non-linéarité évoquée par Petrov est alors remplie. D'autre part, rappelons que lors de la procédure de couplage développée à la section 2.1, la roue aubagée 3D est modélisée au sens de la symétrie cyclique, puis le secteur de référence considéré est ensuite réduit suivant une méthode de synthèse modale. L'objectif étant d'appliquer une force non-linéaire associée au contact en tête d'aube, des ddls liés aux nœuds en tête d'aube doivent être conservés dans la base de réduction et sont illustrés sur la figure IV.10.

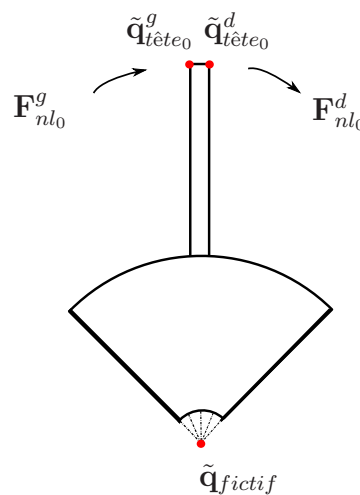


FIGURE IV.10 – Schéma du secteur de référence et des forces non-linéaires associées à ce secteur - (●) Nœuds retenus dans la base de réduction

Pour ce secteur de référence, la force non-linéaire modélisant le contact en tête

d'aube peut alors s'écrire en base physique :

$$\mathbf{F}_{nl_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{nl_0}^g \\ \mathbf{F}_{nl_0}^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_c \left(\left(\mathbf{q}_{tête_0}^g - \mathbf{q}_{tête_{(N-1)}}^d \right) - \delta \right) \mathcal{H} \left(\left(\mathbf{q}_{tête_0}^g - \mathbf{q}_{tête_{(N-1)}}^d \right) - \delta \right) \\ k_c \left(\left(\mathbf{q}_{tête_0}^d - \mathbf{q}_{tête_1}^g \right) - \delta \right) \mathcal{H} \left(\left(\mathbf{q}_{tête_0}^d - \mathbf{q}_{tête_1}^g \right) - \delta \right) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.36})$$

De cette expression, nous pouvons alors déduire l'effort non-linéaire appliqué sur chaque secteur j de la roue aubagée :

$$\mathbf{F}_{nl_j} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{nl_j}^g \left(\mathbf{q}_{tête_j}^g, \mathbf{q}_{tête_{j-1}}^d \right) \\ \mathbf{F}_{nl_j}^d \left(\mathbf{q}_{tête_j}^d, \mathbf{q}_{tête_{j+1}}^g \right) \end{pmatrix}, \quad \text{pour } j \in [0; N-1]. \quad (\text{IV.37})$$

Maintenant que l'effort non-linéaire est défini en base physique, nous allons maintenant voir comment le prendre en considération dans la résolution non-linéaire du système couplé.

3.2.2 Résolution du système associé au modèle couplé non-linéaire

Tout d'abord, rappelons qu'après avoir effectué les étapes de réduction du modèle 3D de roue aubagée, le vecteur constitué des ddls associés à ce secteur réduit est le suivant :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{red} = \left[\tilde{\mathbf{q}}_{fictif_0}^{cos} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{tête_0}^{g,cos} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{tête_0}^{d,cos} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{fictif_0}^{sin} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{tête_0}^{g,sin} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{tête_0}^{d,sin} \quad \tilde{\mathbf{p}} \right]^T \quad (\text{IV.38})$$

Précisons que ce vecteur réduit est calculé pour l'harmonique spatiale $k = 1$ et qu'il est composé des ddls de frontière et des ddls modaux $\tilde{\mathbf{p}}$.

Les ddls associés au nœud fictif sont ensuite couplés au ddls du rotor BP en appliquant la procédure décrite en section 2.1. Après assemblage des matrices structurales associées au modèle réduit de roue aubagée et au modèle de bi-rotor, nous obtenons l'équation du mouvement du système couplé, à laquelle vient s'ajouter les efforts non-linéaires ainsi que les efforts de balourd :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}_{tête}) = \mathbf{F}_b \quad (\text{IV.39})$$

où le vecteur des degrés de libertés du système couplé s'écrit :

$$\mathbf{q} = \left[\mathbf{q}_{hp} \quad \mathbf{q}_{bp} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{tête_0}^{g,cos} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{tête_0}^{d,cos} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{tête_0}^{g,sin} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{tête_0}^{d,sin} \quad \tilde{\mathbf{p}} \right]^T \quad (\text{IV.40})$$

Rappelons que la résolution de ce système non-linéaire (IV.39) est réalisée dans le domaine fréquentiel en utilisant la méthode de balance harmonique (*cf.* Chap. II.2.2). Le système non-linéaire que l'on cherche à résoudre se met alors sous la forme suivante :

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_h + \mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h) = \mathbf{F}_{b_h} \quad (\text{IV.41})$$

où \mathbf{A} est la matrice de raideur dynamique, \mathbf{F}_{b_h} est le vecteur harmonique correspondant aux efforts de balourd, et $\mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h)$ est le vecteur harmonique correspondant aux efforts non-linéaires. Afin de déterminer ce vecteur $\mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h)$ dans le domaine

fréquentiel, *a priori* inconnu, une procédure AFT est utilisée (*cf.* Figure II.3). À partir d'une estimation de la solution harmonique \mathbf{x}_h , la première étape de la procédure AFT est de déduire les valeurs de déplacements \mathbf{q} dans le domaine temporel, sur une période échantillonnée, à l'aide d'une transformée de Fourier rapide inverse (IFFT). Le vecteur de déplacement ainsi obtenu dans le domaine temporel est de la même forme que celui donné par la relation (IV.40). La deuxième étape de la procédure AFT est alors d'évaluer les efforts non-linéaires $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}_{tête})$ dans le domaine temporel. Afin d'y parvenir, les ddls liés aux déplacements en tête d'aube exprimés en base cyclique dans le vecteur \mathbf{q} sont exprimés en base physique à l'aide de la matrice de transformée de Fourier réelle :

$$\mathbf{q}_{tête} = (\mathbf{F}^1 \otimes \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{q}}_{tête_0} \quad (\text{IV.42})$$

où la taille de la matrice identité \mathbf{I} dépend du nombre de ddls retenus en tête d'aube et où l'expression du sous-bloc de la matrice \mathbf{F} est donnée par :

$$\mathbf{F}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos(jk\alpha) & \sin(jk\alpha) \\ \vdots & \vdots \\ \cos((N-1)k\alpha) & \sin((N-1)k\alpha) \end{pmatrix}, \quad \text{pour } k = 1. \quad (\text{IV.43})$$

Le vecteur ainsi obtenu $\mathbf{q}_{tête}$ est alors composé des déplacements en tête d'aube de chaque secteur j et s'exprime :

$$\mathbf{q}_{tête} = [\mathbf{q}_{tête_0}^g \quad \mathbf{q}_{tête_0}^d \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{tête_j}^g \quad \mathbf{q}_{tête_j}^d \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{tête_{N-1}}^g \quad \mathbf{q}_{tête_{N-1}}^d]^T \quad (\text{IV.44})$$

Une fois ce vecteur obtenu, il est alors possible de calculer la force non-linéaire s'exerçant sur toute la roue aubagée en appliquant la relation (IV.37) sur tous les secteurs j . Cet effort non-linéaire $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}_{tête})$ est exprimé en base physique pour tous les secteurs de la roue aubagée. Afin d'obtenir son expression sur le secteur de référence en base cyclique, la matrice de Fourier réelle inverse est utilisée :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{nl_0}(\tilde{\mathbf{q}}_{tête_0}) = \left((\mathbf{F}^1)^{-1} \otimes \mathbf{I} \right) \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}_{tête}) \quad (\text{IV.45})$$

où $\tilde{\mathbf{F}}_{nl_0}(\tilde{\mathbf{q}}_{tête_0})$ désigne la force non-linéaire associée au secteur de référence dans le domaine temporel et où l'expression du sous-bloc de la matrice inverse de Fourier est donnée par :

$$(\mathbf{F}^k)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} \cos(jk\alpha) & \cdots & \frac{2}{N} \cos((N-1)k\alpha) \\ 0 & \cdots & \frac{2}{N} \sin(jk\alpha) & \cdots & \frac{2}{N} \sin((N-1)k\alpha) \end{pmatrix}, \quad \text{pour } k = 1. \quad (\text{IV.46})$$

Enfin, la dernière étape de la procédure AFT est de déterminer les coefficients de Fourier du vecteur $\mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h)$ en utilisant une transformée de Fourier rapide (FFT) sur les efforts non-linéaires qui viennent d'être calculés $\tilde{\mathbf{F}}_{nl_0}(\tilde{\mathbf{q}}_{tête_0})$. Après l'obtention des coefficients harmoniques du vecteur $\mathbf{F}_{nl_h}(\mathbf{x}_h)$, il est finalement

possible de résoudre le système algébrique non-linéaire (IV.41). Il est important de remarquer que ce système non-linéaire représentant le comportement de la structure complète comporte N fois moins de degrés de libertés, car seul le secteur de référence est pris en compte dans la résolution non-linéaire.

La démarche de résolution du système couplé impliquant un secteur réduit de roue aubagée avec la prise en compte de non-linéarités de type contact en tête d'aube vient d'être détaillée. Dans la partie suivante, la réponse de ce système non-linéaire soumis aux balourds BP et HP sera présentée et analysée.

3.3 Simulations non-linéaires du système couplé

L'objectif de cette partie est d'analyser le comportement du système couplé en considérant les non-linéarités de contact en tête d'aube pour des excitations de type balourd provenant du rotor BP et du rotor HP. Comme pour les simulations linéaires présentées auparavant, le but est de tracer l'amplitude du système couplé en fonction de la vitesse de rotation du rotor BP. Rappelons que la résolution de ce système non-linéaire est réalisée dans le domaine fréquentiel avec la méthode de balance harmonique. Afin de suivre l'évolution du comportement non-linéaire de notre système lors de la variation d'un paramètre physique, la méthode de balance harmonique est couplée à une technique de continuation de type *arc-length*, où le paramètre de contrôle choisi est la vitesse de rotation du rotor BP $\mu = \Omega_{bp}$. En ce qui concerne l'évaluation des efforts non-linéaires, une procédure AFT est utilisée afin de calculer les efforts de contact dans le domaine temporel. La procédure a été adaptée afin de pouvoir considérer cette force non-linéaire en symétrie cyclique (*cf.* Sect. 3.2). Les résultats des simulations non-linéaires du système couplé impliquant un secteur réduit de roue aubagée présentés dans la suite seront ensuite comparés aux résultats non-linéaires du système couplé impliquant des aubes de type poutre. Pour finir, une analyse de stabilité des solutions non-linéaires obtenues sera réalisée en utilisant la méthode basée sur les coefficients de Floquet.

3.3.1 Réponse du système couplé aux balourds BP et HP

Tout d'abord, rappelons que dans le repère d'étude considéré, à savoir le repère tournant \mathcal{R}_{bp} , la méthode de balance harmonique mono-fréquentielle suffit à rendre compte d'une excitation bi-périodique du système, en considérant $\omega = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$ comme harmonique fondamentale (*cf.* Chap. III.3.2). Les simulations non-linéaires qui sont présentées ici sont donc toutes calculées en considérant les deux excitations de balourd provenant des arbres BP et HP.

La figure IV.11 rappelle la réponse linéaire du système couplé impliquant un secteur réduit de roue aubagée soumis aux deux balourds BP et HP sur la plage de vitesse de rotation $\Omega_{bp} = [200; 3200]$ trs/min. Dans la plage de vitesse de rotation considérée, nous pouvons constater que le mode A et le mode B sont excités par le balourd BP ainsi que par le balourd HP. Ces modes de vibration sont des modes

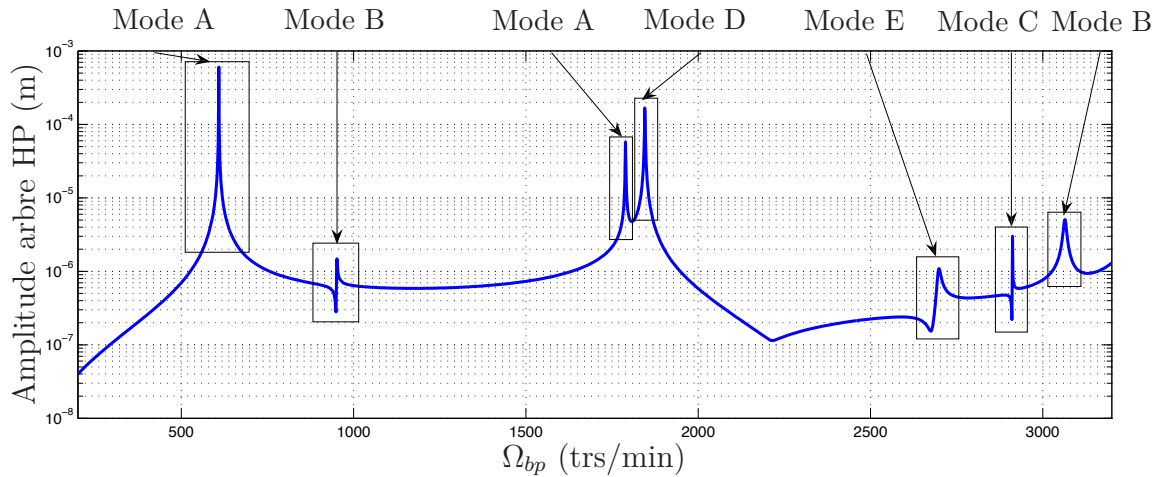


FIGURE IV.11 – Réponse linéaire du système couplé soumis aux balourds BP et HP
- Déplacement du rotor HP au plan inter-arbre

d'ensemble de la structure où la vibration des aubes est négligeable devant la vibration du bi-rotor. Néanmoins, en ce qui concerne le mode A, les aubes subissent le basculement du disque qui les porte. Les autres modes C, D et E sont quant à eux seulement excités par le balourd HP. Le mode C est un mode où la vibration du bi-rotor est négligeable devant la vibration de la roue aubagée, qui vibre suivant un mode à 1 diamètre. Enfin les deux derniers modes étudiés D et E sont des modes d'ensemble où il y a un couplage entre la vibration du bi-rotor et la vibration de la roue aubagée suivant son premier diamètre.

Afin de mieux distinguer l'influence de la prise en compte du jeu en tête d'aube sur le comportement global de la structure, nous allons présenter les courbes de réponses non-linéaires sur deux plages de vitesses de rotation différentes, à savoir $\Omega_{bp} = [1770; 1870]$ et $\Omega_{bp} = [2500; 3200]$ trs/min.

Zoom sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [1770; 1870]$ trs/min. Sur cette plage de vitesses de rotation, le mode A et le mode D sont excités par les deux balourds. La figure IV.12 illustre la réponse non-linéaire du système couplé. Les courbes de réponse non-linéaire représentées en trait plein ont été calculées pour une valeur de jeu en tête d'aube de $\delta = 20 \mu\text{m}$ et sont superposées aux courbes linéaires en trait mixte. L'évolution de la réponse en tête d'aube en fonction de la vitesse de rotation (*cf.* Figure IV.12(a)) met en évidence que pour des valeurs de déplacement inférieures au jeu introduit, le comportement est linéaire. En revanche, dès que la valeur du jeu δ est atteinte, la contribution des efforts non-linéaires est observée et se traduit par une diminution de l'amplitude de vibration des aubes.

Afin de visualiser l'influence de cette non-linéarité de type contact en tête d'aube sur le comportement de la machine, la réponse non-linéaire du rotor HP au plan inter-arbre est également présentée en figure IV.12(b). Lorsque le jeu est consommé, la perturbation apportée à la réponse du rotor HP a un caractère « raidissant » lié à la présence d'une raideur de contact valant $k_c = 1 \times 10^3 \text{ N/m}$. Ce phénomène

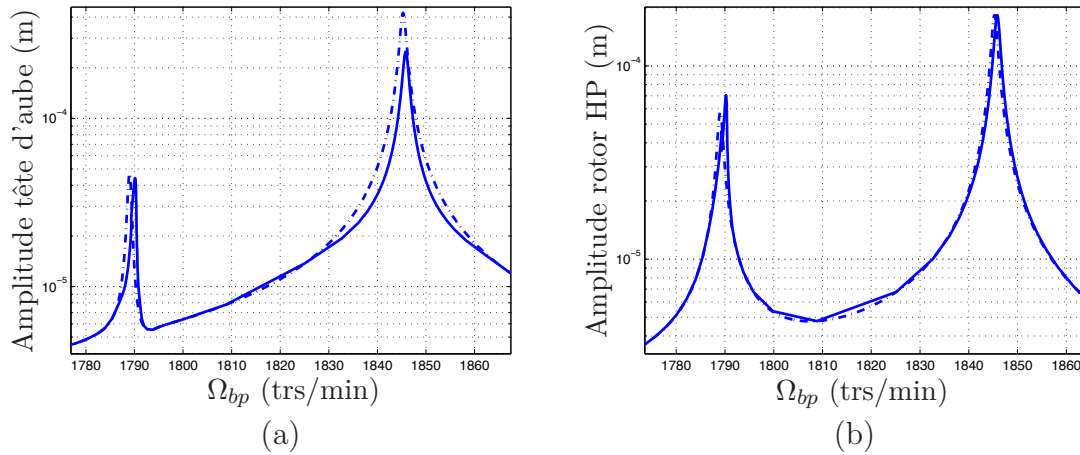


FIGURE IV.12 – Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) du système couplé soumis aux balourds BP et HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [1770; 1870]$ - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP au plan inter-arbre

se traduit par un décalage du pic de résonance vers les fréquences plus élevées, entraînant ainsi une augmentation de la vitesse critique du système. Précisons que le temps de calcul requis afin d'obtenir ces courbes de réponse non-linéaire dans cette plage de vitesses est de $t_{CPU} \approx 1$ h13 min.

Zoom sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [2500; 3200]$ trs/min. Le même type de résultat est présenté sur cette plage de vitesses de rotation où les modes B, C et E sont excités par les deux balourds aux vitesses critiques $\Omega_{bp} = 3064$, $\Omega_{bp} = 2921$ et $\Omega_{bp} = 2698$ trs/min, respectivement. L'amplitude de vibration en tête d'aube

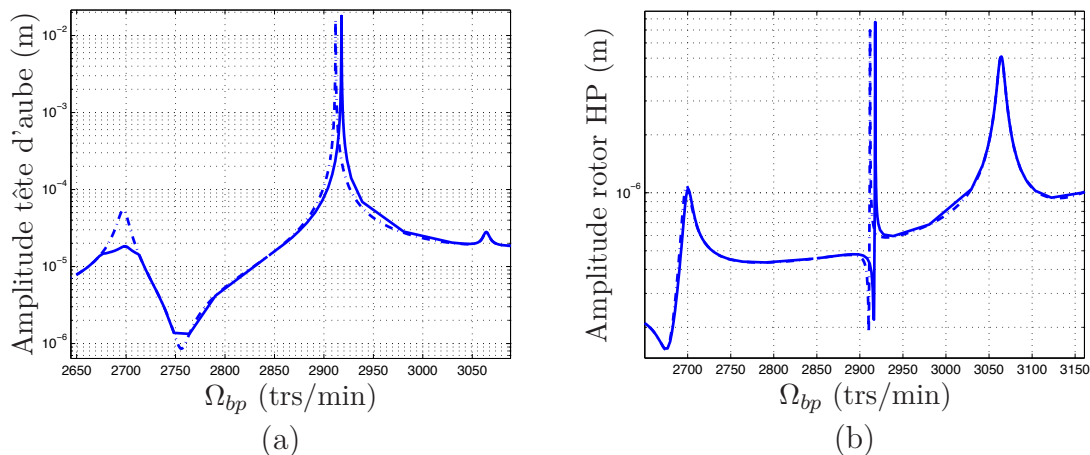


FIGURE IV.13 – Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) du système couplé soumis aux balourds BP et HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [2500; 3200]$ - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP au plan inter-arbre

en fonction de la vitesse de rotation est présentée sur la figure IV.13(a) et montre à nouveau que le comportement est modifié lorsque le jeu valant $\delta = 20$ μm est

consommé. En ce qui concerne le mode couplé E, les effets non-linéaires se traduisent par une diminution de l'amplitude de vibration des aubes. Pour le mode C, qui est le mode de vibration de roue aubagée à 1 diamètre, la prise de contact entraîne le décalage du pic de résonance vers les fréquences plus élevées. Enfin, pour le mode B où l'amplitude de vibration des aubes est très faible, nous pouvons constater que les courbes linéaire et non-linéaire se confondent.

La figure IV.13(b) illustre la réponse non-linéaire du système au niveau du rotor HP. Sur les deux premiers pics de résonance correspondants aux modes E et C, la présence des efforts de contact en tête d'aube implique un raidissement de la courbe de réponse au voisinage des résonances. En revanche, les forces non-linéaires n'ont pas d'influence sur le pic de résonance du mode B, où l'amplitude de vibration des aubes est négligeable. Dans cette plage de vitesses de rotation, les courbes non-linéaires ont été obtenues en un temps de calcul de $t_{CPU} \approx 1$ h40 min.

Notons que ces observations sur le comportement non-linéaire du système couplé sont en accord avec celles réalisées au chapitre III, avec la prise en compte d'une force de contact au niveau du palier inter-arbre. Afin de valider la prise en compte des efforts non-linéaires sur le secteur réduit de roue aubagée modélisé en symétrie cyclique, nous allons comparer les résultats obtenus à ceux du modèle couplé impliquant des aubes de type poutre.

3.3.2 Comparaison des résultats non-linéaires avec ceux du système couplé impliquant des aubes de type poutre

La réponse non-linéaire du modèle simplifié impliquant des aubes de type poutre est calculée en prenant en compte les efforts non-linéaires donnés par la relation (IV.35) dans l'équation du mouvement du système couplé. Rappelons que cette force non-linéaire est définie sur toute la roue aubagée et notons qu'aucune hypothèse de symétrie cyclique n'est considérée dans ce modèle. En considérant les mêmes paramètres de calcul dans les deux modèles couplés, nous pourrions ainsi vérifier si les efforts non-linéaires modélisant le contact en tête d'aube sont bien pris en compte sur le secteur réduit de roue aubagée défini en base cyclique.

Dans un premier temps, la figure IV.14 rappelle la réponse linéaire en tête d'aube des deux systèmes couplés sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [200, 3200]$ trs/min. Afin de réaliser la comparaison entre les deux modèles non-linéaires, nous allons particulièrement nous intéresser à la réponse du mode C qui désigne le mode de vibration de la roue aubagée suivant son premier diamètre. Ce mode est excité par les balourds BP et HP à la vitesse $\Omega_{bp} = 2912$ trs/min pour le modèle comprenant un secteur réduit de roue aubagée et à la vitesse $\Omega_{bp} = 2937$ trs/min pour le modèle comprenant des aubes de type poutre. Rappelons également que l'écart entre ces deux vitesses critiques est dû à la différence de modélisation du disque qui porte les aubes. En effet, pour le modèle éléments finis de roue aubagée 3D, le disque est considéré en acier alors que pour le modèle comprenant des aubes de type poutre, le disque est considéré infiniment rigide.

La figure IV.15 illustre la réponse non-linéaire du mode C pour chaque modèle

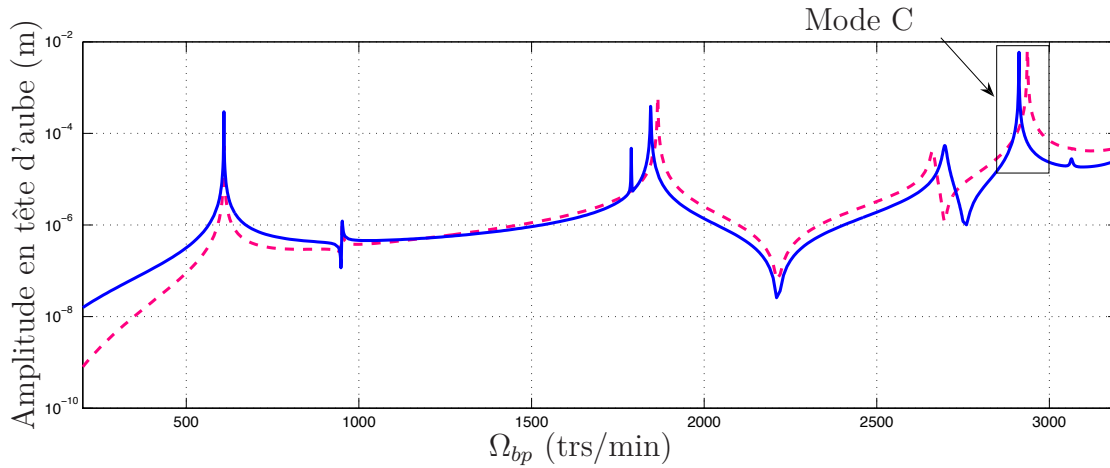


FIGURE IV.14 – Comparaison entre les réponses linéaires des deux systèmes couplés soumis aux balourds BP et HP - (—) Modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée et (- - -) Modèle impliquant des aubes poutre

couplé. Les paramètres de chacun des deux modèles sont identiques, avec notamment un jeu en tête d'aube valant $\delta = 1$ mm et une raideur de contact valant $k_c = 10$ N/m. Nous pouvons observer le même type de comportement sur ces deux courbes de réponse, à savoir une inclinaison du pic de résonance du mode C vers les fréquences plus élevées lorsqu'il y a prise de contact entre les têtes d'aube. Notons que l'augmentation de la fréquence de résonance due à la présence du contact est du même ordre pour chaque modèle couplé. De plus, la courbe non-linéaire correspondant au modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée (*cf.* Figure IV.15(a)) a été obtenue en $t_{CPU} \approx 29$ min et le temps de calcul correspondant au modèle impliquant des aubes de type poutre (*cf.* Figure IV.15(b)) est de $t_{CPU} \approx 17$ min.

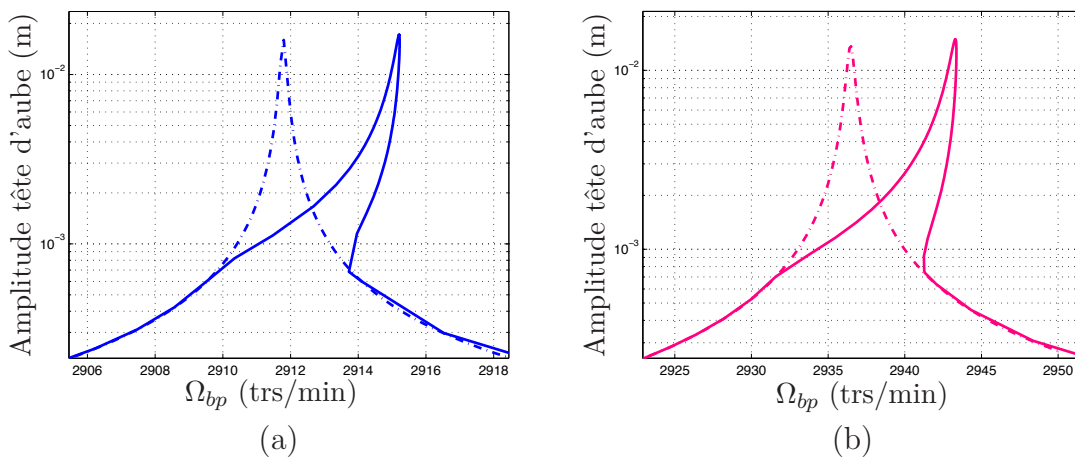


FIGURE IV.15 – Comparaison entre les réponses linéaires (en trait mixte) et les réponses non-linéaires (en trait plein) du mode C - (a) Modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée, (b) Modèle impliquant des aubes poutre

Nous pouvons ainsi en conclure que la méthode de prise en compte des efforts

non-linéaires sur le secteur réduit de roue aubagée modélisé en symétrie est efficace et adaptée à notre système. En effet, la procédure proposée permet d'obtenir la réponse non-linéaire du système couplé en un temps de calcul fortement réduit par rapport à la résolution non-linéaire du système complet, impliquant tous les secteurs de la roue aubagée. Pour finir, dans la partie suivante, une analyse de stabilité est réalisée sur les courbes de réponse non-linéaire du mode C, permettant de statuer sur la stabilité des solutions non-linéaires obtenues pour chacun des deux modèles couplés étudiés.

3.3.3 Analyse de stabilité des solutions non-linéaires

Les courbes non-linéaires présentées en figure IV.15 ont été obtenues par continuation dans le domaine fréquentiel. Rappelons que le principe des méthodes fréquentielles est de rechercher directement une solution périodique du système étudié, impliquant que la solution obtenue peut être instable. En effet, comme le calcul de la phase transitoire n'est pas réalisé dans ces approches, la solution non-linéaire qui est obtenue peut être stable ou bien instable, à savoir non physiquement observable. De plus, l'utilisation d'une méthode de continuation nous a permis d'avoir une description correcte des courbes de réponses non-linéaires, même au delà des points de retournement observés sur la figure IV.15. Il y a donc coexistence de plusieurs solutions non-linéaires à une même vitesse de rotation et une analyse de stabilité est alors nécessaire afin de déterminer les solutions non-linéaires qui sont stables.

Afin d'analyser la stabilité des solutions non-linéaires obtenues précédemment pour chaque modèle couplé, nous nous basons sur la théorie de Floquet détaillée dans la section 4.2.1 du chapitre II. L'étude de stabilité est réalisée localement dans le domaine temporel autour de la solution non-linéaire obtenue dans le domaine fréquentiel. L'analyse de stabilité a donc été réalisée pour chacune des courbes de réponse non-linéaire illustrées sur la figure IV.15 et les résultats obtenus sont présentés sur la figure IV.16.

Les solutions stables sont illustrées en trait plein et les solutions instables en pointillés. Ainsi, nous remarquons qu'à l'issue de l'analyse de stabilité, les solutions instables qui ont été déterminées se situent après le point de retournement pour les deux systèmes considérés.

Les différentes études présentées nous ont permis de valider la prise en compte de l'effort non-linéaire en tête d'aube sur le secteur réduit de roue aubagée défini en base cyclique. Nous avons pu ainsi démontrer la validité de la méthode de couplage développée dans un cadre linéaire mais également non-linéaire.

4 Conclusion

Ce chapitre propose une méthode de couplage permettant de connecter une roue aubagée 3D modélisée par la méthode des éléments finis avec un système bi-rotor simplifié modélisé par des éléments poutres - masses - ressorts. Comme les modèles

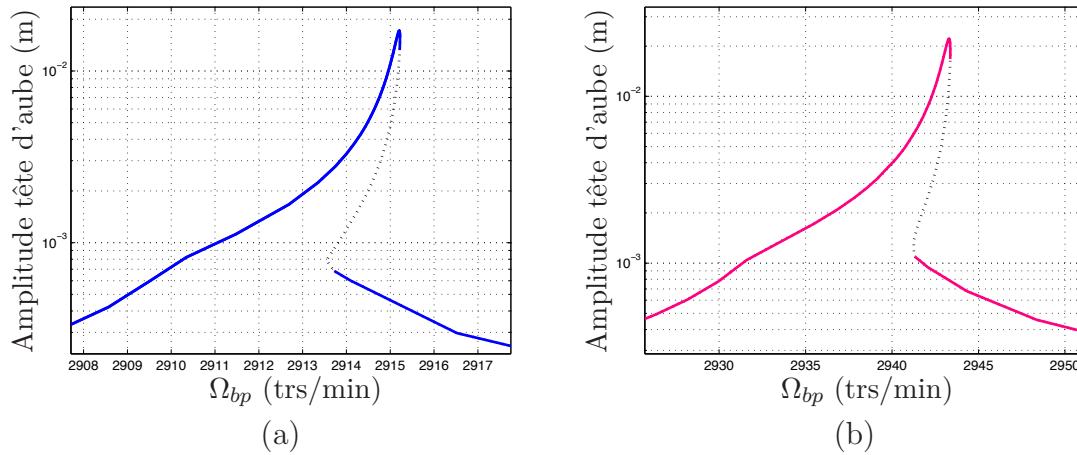


FIGURE IV.16 – Comparaison entre les solutions non-linéaires stables (en trait plein) et instables (en pointillés) du mode C - (a) Modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée, (b) Modèle impliquant des aubes poutre

3D de roues aubagées peuvent comporter un très grand nombre de degrés de liberté, nous avons mis en place une méthode permettant de réduire la taille du modèle de la roue aubagée. Le premier niveau de réduction consiste à modéliser la structure au sens de la symétrie cyclique, permettant ainsi de ne considérer qu'un seul secteur de référence de la roue aubagée complète. Le deuxième niveau de réduction du modèle fait appel à des méthodes de synthèse modale qui permettent de réduire considérablement la taille du modèle tout en gardant la richesse d'un modèle éléments finis 3D. Une fois le modèle réduit de roue aubagée obtenu, nous avons détaillé les différentes étapes de la procédure de couplage proposée permettant de construire un modèle couplé. Afin de valider la démarche de couplage proposée dans ce chapitre, nous avons construit un cas-test simple permettant de statuer sur la validité de la méthode mise en place. Ce modèle de validation présente l'avantage de correspondre au modèle simplifié développé au chapitre III, impliquant des aubes de type poutre. Après avoir validé les étapes de réduction du modèle de roue aubagée, les autres étapes de la procédure de couplage ont également été validées en comparant les principaux résultats linéaires des deux modèles couplés, à savoir le diagramme de Campbell et la réponse à balourd. Nous avons pu constater une très bonne corrélation entre les deux modèles dans un cadre linéaire. Enfin, étant donné que la roue aubagée qui nous intéresse dans cette étude peut comporter des non-linéarités de type contact en tête d'aube, une démarche adaptée a été développée afin de prendre en considération ces efforts non-linéaires sur le modèle réduit de roue aubagée. Les études qui ont été menées ont permis d'analyser le comportement non-linéaire du système couplé soumis aux balourds BP et HP. Les résultats obtenus ont à nouveau été comparés à ceux du modèle couplé simplifié et ont alors permis de valider la prise en compte des efforts non-linéaires sur le secteur réduit de roue aubagée.

La procédure qui a été développée dans un cadre linéaire et non-linéaire semble donc adaptée à l'étude d'un système couplé impliquant un système bi-rotor et un

secteur réduit de roue aubagée avec la prise en compte de non-linéarités. Les études qui ont été menées sur le cas-test de validation nous ont également permis de montrer que les coûts de calculs pour l'obtention de courbes non-linéaires étaient raisonnables, à savoir de l'ordre de quelques heures. Le cas-test de validation qui a été présenté dans ce chapitre a été conçu pour se rapprocher de la géométrie des aubes de type poutre mais n'est cependant pas représentatif d'une architecture réelle de moteur, et est donc inexploitable au sein de SNECMA. C'est pourquoi, dans le chapitre suivant, la méthode de couplage sera appliquée à un modèle de moteur industriel permettant ainsi d'analyser le comportement linéaire et non-linéaire de la structure couplée. L'avantage d'utiliser des modèles éléments finis de la roue aubagée 3D est de pouvoir considérer la géométrie réelle de la structure, qui est souvent complexe et difficilement comparable à un profil poutre, et ainsi de pouvoir obtenir les amplitudes de déplacement en tout point des aubes sur une plage de fonctionnement moteur.

Chapitre V

Application industrielle : architecture moteur

L'objectif de ce dernier chapitre est d'appliquer la méthode de couplage développée au chapitre précédent à une structure industrielle. La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation du modèle industriel, constitué d'un modèle d'ensemble simplifié représentatif de l'intégralité du moteur et d'un modèle éléments finis d'une roue de turbine BP. L'étude linéaire du système couplé industriel permet déjà de mettre en évidence un couplage entre la dynamique d'ensemble et la dynamique plus spécifique de la roue aubagée. Les résultats obtenus sont comparés à ceux d'un modèle couplé équivalent afin de confirmer nos observations. Les non-linéarités de type contact au niveau des talons des aubes de turbine BP sont ensuite prises en compte, permettant ainsi d'analyser la réponse non-linéaire du système couplé soumis aux balourds BP et HP. Enfin, le même type d'analyses est effectué sur ce modèle couplé industriel lorsque les deux rotors sont en configuration de contra-rotation.

Sommaire

1	Présentation du modèle industriel	142
1.1	Mise en données du modèle dynamique d'ensemble	142
1.2	Description de la roue aubagée considérée	148
2	Dynamique linéaire et non-linéaire du modèle couplé	154
2.1	Analyse linéaire du système	154
2.2	Comparaison des résultats obtenus à ceux d'un modèle couplé impliquant des aubes de type poutre	159
2.3	Prise en compte des non-linéarités au niveau des talons	162
3	Vers de nouvelles architectures contra-rotatives	167
3.1	Analyse linéaire du système couplé contra-rotatif	167
3.2	Étude du comportement non-linéaire	172
4	Conclusion	177

La société SNECMA du groupe SAFRAN souhaite disposer d'un outil numérique permettant de dimensionner de façon fiable les roues de turbine BP en intégrant la dynamique de l'intégralité de la machine et plus particulièrement celle provenant de l'arbre HP. L'outil en question doit alors être capable de réaliser la simulation combinée d'un problème de dynamique d'ensemble avec celui plus spécifique de dynamique des roues aubagées. Les modèles éléments finis complets représentant l'intégralité de la machine sont de taille trop importante, en termes de nombre de degrés de liberté, pour réaliser des simulations combinées, dans un contexte où les roues aubagées peuvent comporter des non-linéarités. Le but est alors de développer un outil qui pourra être utilisé dans les bureaux d'études lors des phases de pré-conception des moteurs. La méthode de couplage développée au chapitre précédent répond à cette problématique en étant adaptée à l'étude de structures industrielles. L'objectif de ce chapitre est donc d'appliquer les méthodes et procédures détaillées au chapitre IV sur un modèle de moteur industriel puis de fournir une première analyse des résultats.

1 Présentation du modèle industriel

La figure V.1 présente la coupe longitudinale du moteur CFM56 série 7, sur lequel sera basée notre application industrielle. Ce moteur a une architecture double corps, autrement dit deux rotors peuvent être distingués. La présence de plusieurs rotors dans les moteurs permet notamment d'augmenter leurs performances en séparant les parties basse et haute pression. Les deux rotors sont coaxiaux, l'arbre BP passe dans le creux de l'arbre HP, et ils sont connectés entre eux par un palier inter-arbre. Le moteur comprend, de l'avant vers l'arrière, un diffuseur d'entrée appelé fan, des compresseurs BP et HP, une chambre de combustion, des turbines HP et BP et enfin une tuyère d'éjection (*cf.* Figure V.1). Nous retrouvons ainsi les différents éléments du moteur qui avaient été définis sur le banc d'essai bi-rotor au chapitre III.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la construction d'un modèle dynamique d'ensemble représentatif de ce moteur, puis nous présenterons la roue de turbine BP considérée dans cette étude.

1.1 Mise en données du modèle dynamique d'ensemble

Dans la méthode spécifique de couplage introduite au chapitre précédent, le modèle couplé était composé d'une part d'un système bi-rotor simplifié modélisé par des équivalents poutres - masses - ressorts, et d'autre part d'une roue aubagée 3D modélisée par la méthode des éléments finis. Le modèle simplifié de dynamique d'ensemble présente l'avantage de considérer l'intégralité de la machine et de restituer de manière exhaustive les excitations de nature structurale, notamment les excitations de type balourd BP et HP. Par ailleurs, SNECMA dispose de modèles simplifiés de type poutres - masses - ressorts permettant de réaliser des études de dynamique d'ensemble lors du pré-dimensionnement des moteurs. L'objectif est alors de créer

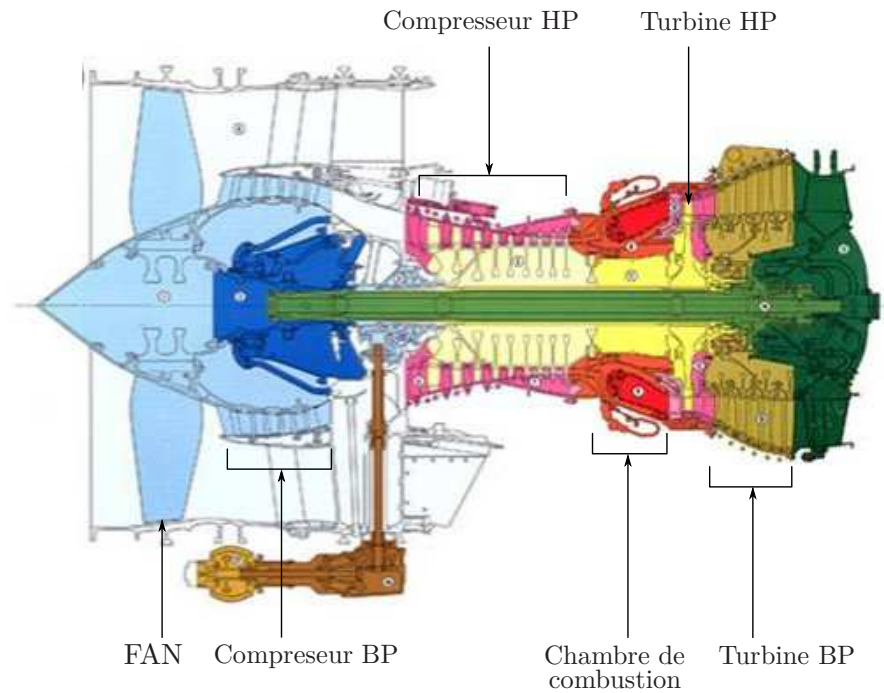


FIGURE V.1 – Coupe du moteur CFM56 série 7

un modèle simplifié de bi-rotor correspondant aux modèles industriels, en se basant sur les développements réalisés au chapitre III.

1.1.1 Modèle simplifié du bi-rotor

La figure V.2 illustre une demi-coupe du moteur industriel retenu pour notre application ainsi que la vue éclatée du système bi-rotor simplifié associé. Le modèle présenté correspond aux modèles simplifiés tels qu'ils sont modélisés au sein de SNECMA. La vue éclatée du modèle simplifié est utilisée afin de faciliter la lecture du modèle d'ensemble, on peut ainsi distinguer les mêmes éléments qui avaient été définis sur le banc d'essai bi-rotor mis en œuvre à l'École Centrale de Lyon. La configuration de ce moteur bi-rotatif est sous forme « repliée » par rapport au banc d'essai, autrement dit l'arbre BP passe dans le creux de l'arbre HP. Ce modèle simplifié de turboréacteur à cinq paliers est composé d'un rotor BP portant le disque fan, les disques associés au compresseur BP (CoBP) et les disques associés à la turbine BP (TuBP) ainsi que d'un rotor HP portant les disques du compresseur HP (CoHP) et les disques de turbine HP (TuHP). Rappelons que les arbres BP et HP sont modélisés par des éléments de type poutre, les paliers sont modélisés par des raideurs et des amortissements ponctuels et les disques, considérés rigides dans les modèles d'ensemble, sont modélisés par des masses ponctuelles et des inerties en rotation. Les deux rotors BP et HP sont connectés entre eux par un palier inter-arbre, désigné par P4 sur la figure V.2 et ils sont en configuration de co-rotation, à savoir les deux rotors ont le même sens de rotation.

Le modèle analytique qui a été développé pour le bi-rotor au chapitre III.1.2 repose sur une formulation énergétique de Rayleigh-Ritz et semble adapté à la mo-

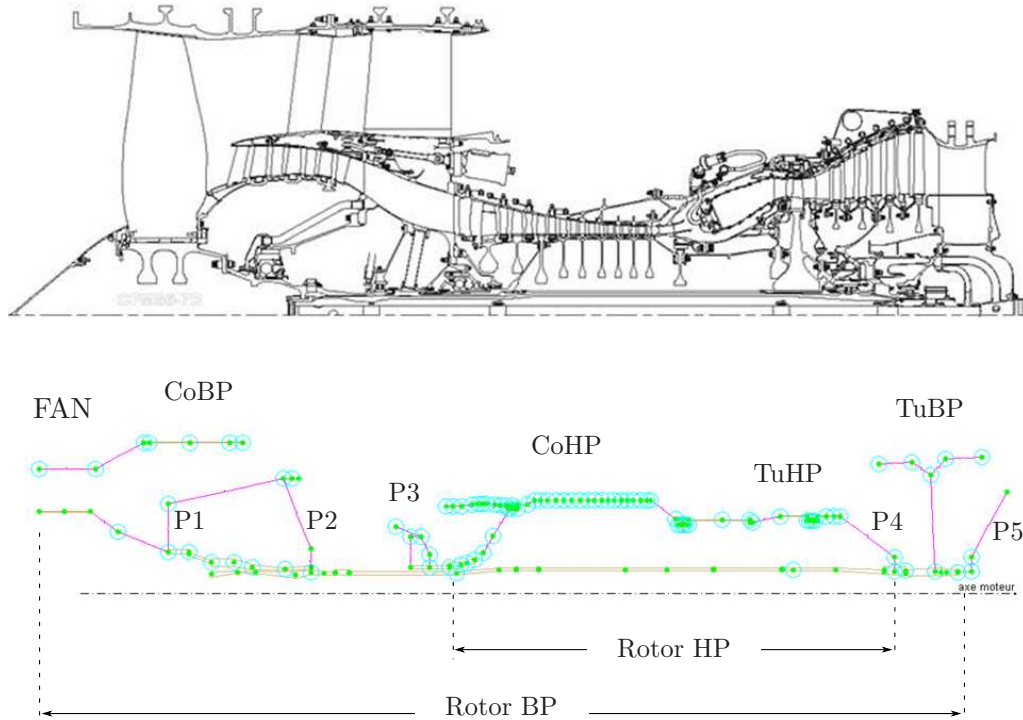


FIGURE V.2 – Demi-coupe du moteur industriel (en haut) et vue éclatée du modèle simplifié associé (en bas)

délisation simplifiée du moteur industriel. L'objectif est alors de mettre en données le modèle bi-rotor développé dans Matlab en utilisant les paramètres associés au moteur illustré sur la figure V.1.

Remarque : Dans un soucis de confidentialité des données industrielles, les paramètres utilisés pour la mise en données du modèle d'ensemble ne sont pas précisés dans cette partie. D'autre part, l'ensemble des résultats qui seront présentés dans la suite de ce chapitre seront normalisés. Néanmoins, afin de s'assurer de la validité du modèle construit dans Matlab, nous allons comparer les principaux résultats linéaires obtenus avec ceux du modèle d'ensemble industriel.

1.1.2 Validation du modèle simplifié

Tout d'abord, il est important de préciser que le modèle d'ensemble industriel est modélisé par la méthode des éléments finis alors que le modèle développé dans Matlab repose sur une décomposition de Rayleigh-Ritz. Certaines approximations vont alors être réalisées afin de simplifier la mise en données du modèle bi-rotor. La comparaison entre les deux modèles d'ensemble va se baser sur l'étude des éléments propres des systèmes linéaires. Dans un premier temps, le tableau V.1 présente la comparaison des six premières fréquences propres des deux systèmes pour des vitesses de rotation nulles $\Omega_{bp} = \Omega_{hp} = 0$ trs/min. Malgré la normalisation des

fréquences propres, nous pouvons constater que l'écart entre les fréquences propres du modèle construit dans Matlab et celles du modèle d'ensemble industriel est de l'ordre de 1%, notamment pour le second mode, voire même inférieur à 1% pour tous les autres modes présentés, ce qui constitue une différence tout à fait acceptable entre les deux modèles.

Modes	Modèle Matlab (Hz)	Modèle SNECMA (Hz)	Écart (%)
1	1,004	1	0,4
2	1,215	1,194	1,7
3	3,421	3,409	0,4
4	3,647	3,649	0,06
5	5,710	5,661	0,8
6	5,834	5,785	0,8

TABLE V.1 – Comparaison des fréquences propres à l'arrêt entre le modèle bi-rotor défini dans Matlab et le modèle d'ensemble SNECMA

Lors de l'étude des éléments propres des deux systèmes bi-rotor, nous avons donc accès aux fréquences propres mais également aux déformées propres des systèmes. Ainsi, une comparaison des déformées propres des systèmes à vitesses nulles peut alors être réalisée et est illustrée sur la figure V.3 pour les six premiers modes d'ensemble. Sur cette figure, les déformées propres correspondant au modèle construit dans Matlab sont représentées à gauche où nous pouvons distinguer le rotor BP en bleu et le rotor HP en rouge. Les déformées propres correspondant au modèle industriel sont quant à elles illustrées à droite, où la configuration non-déformée de chaque mode (en vert) est superposée à la configuration déformée du système bi-rotor (en rouge). Le premier mode est identifié comme étant un mode de suspension fan où l'essentiel de l'énergie de déformation est localisé dans le support-palier P1. La comparaison entre les déformées propres des deux systèmes bi-rotor nous montre une bonne répartition de l'énergie de déformation. Le mode 2 correspond à un mode de suspension de turbine BP car une grande partie de l'énergie de déformation est dans le support-palier P5, à l'arrière du moteur. Le troisième mode de vibration est identifié comme étant un mode de compresseur BP, l'énergie de déformation étant localisée dans les paliers P1 et P2. La comparaison des deux déformées propres montre une bonne corrélation des résultats, à une rotation près autour de l'axe moteur. Le mode 4 est un mode couplé entre le rotor BP et le rotor HP, l'énergie de déformation est essentiellement répartie dans les paliers P3 et P4, où le palier P4 désigne le palier inter-arbre assurant la connexion entre les deux rotors. Enfin, les modes 5 et 6 sont identifiés comme étant des modes d'arbre où l'énergie de déformation est concentrée dans les arbres BP pour le mode 5 et HP pour le mode 6. En conclusion, la comparaison des déformées propres des deux modèles d'ensemble montre une bonne corrélation, en termes de répartition d'énergie de déformation dans le système.

Les résultats qui viennent d'être présentés ont été réalisés à l'arrêt, pour $\Omega_{bp} = \Omega_{hp} = 0$ trs/min. Afin d'achever l'étude des éléments propres du modèle d'ensemble créé dans Matlab, nous allons suivre l'évolution du système pour différentes vi-

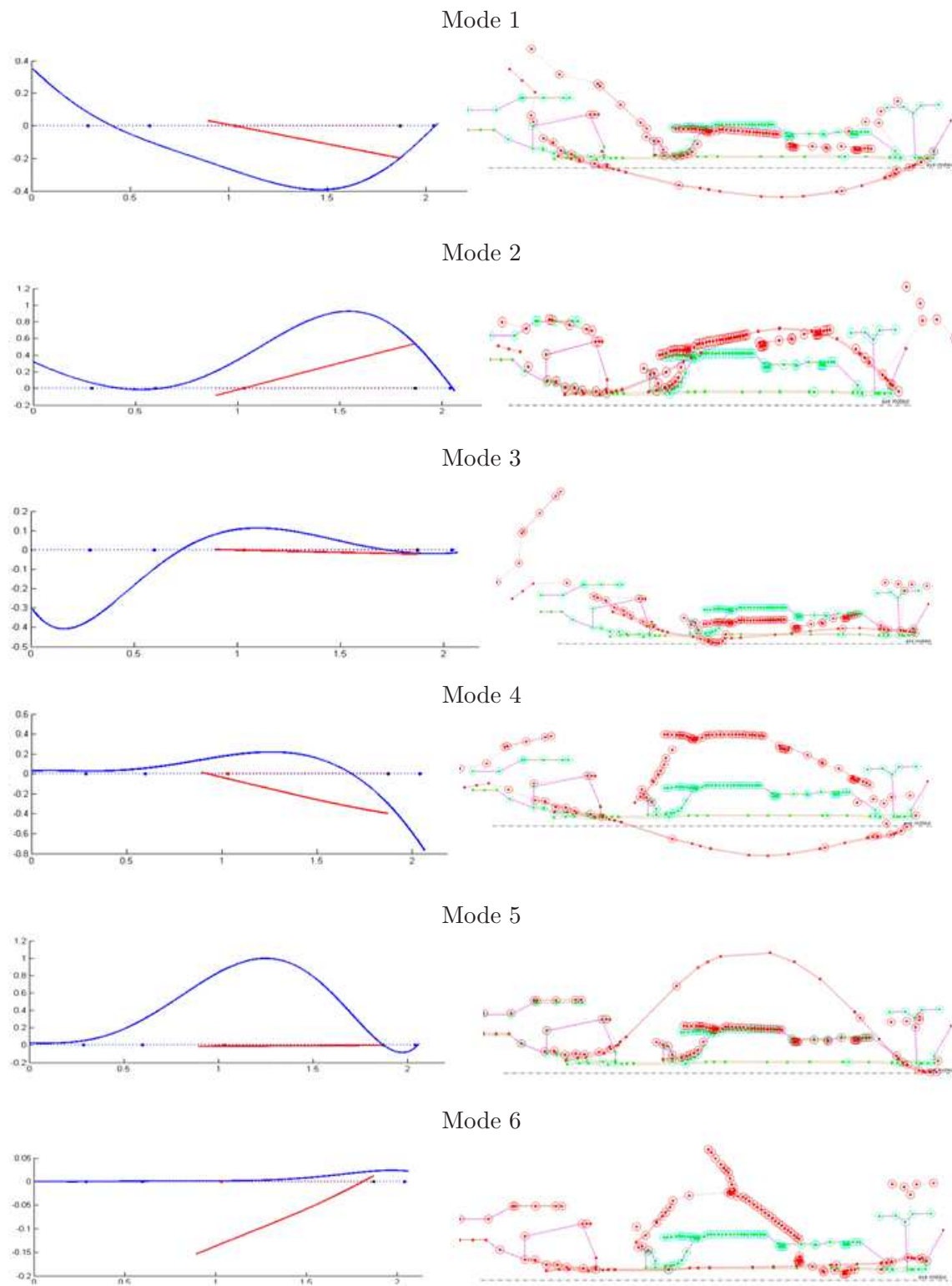


FIGURE V.3 – Comparaison des déformées propres à l'arrêt entre le modèle d'ensemble développé dans Matlab (à gauche) et le modèle industriel (à droite)

tesses de rotation. L'évolution des fréquences propres du système en fonction du régime moteur est tracée sur le diagramme de Campbell illustré sur la figure V.4. Ce diagramme de Campbell est obtenu à partir du modèle développé dans le repère

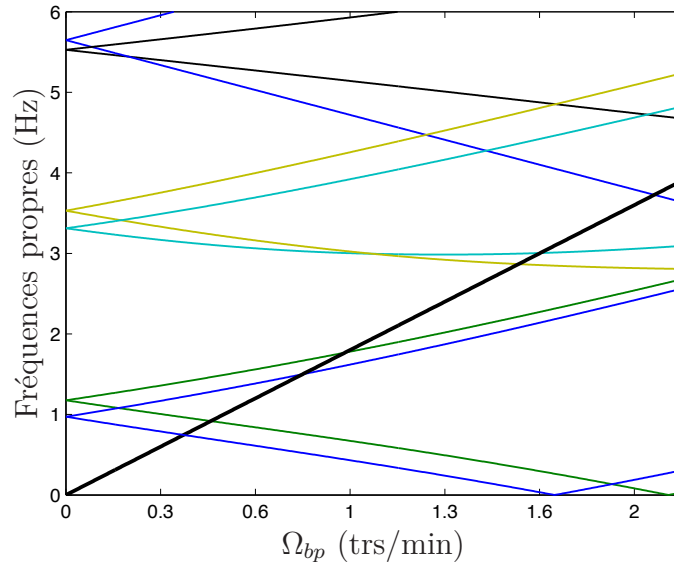


FIGURE V.4 – Diagramme de Campbell du système bi-rotor dans le repère tournant

tournant \mathcal{R}_{bp} et l'évolution des fréquences propres est tracée en fonction de la vitesse de rotation du rotor BP. Notons que la vitesse de rotation du rotor HP est proportionnelle à Ω_{bp} et que ces deux vitesses de rotation restent proportionnelles tout au long de la montée en régime, avec $\Omega_{hp} = 2,8\Omega_{bp}$. L'évolution des six premiers modes propres de bi-rotor est observée sur la plage de vitesses de rotation $\Omega_{bp} = [0; 2]$ trs/min. Cette plage de vitesses est normalisée mais correspond à la plage de fonctionnement du moteur. D'autre part, étant donné que le bi-rotor est parfaitement axisymétrique, les modes propres à l'arrêt sont bien doubles puis ils s'ouvrent en fonction de la vitesse de rotation, ce qui est caractéristique des effets gyroscopiques présents dans le système en rotation. Lorsque les effets gyroscopiques augmentent, la séparation des modes donne naissance à un mode direct et un mode rétrograde. Rappelons que dans le repère tournant, les fréquences qui augmentent avec la vitesse de rotation sont associées aux modes rétrogrades et celles diminuant avec la vitesse de rotation sont associées aux modes directs. Enfin, les droites d'excitation synchrones du moteur correspondant aux excitations de type balourd sont les droites $f = 0$ pour le balourd BP et la droite $f = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$, tracée en trait noir épais sur la figure V.4, pour le balourd HP.

Afin de valider le diagramme de Campbell obtenu pour le modèle d'ensemble mis en données dans Matlab, nous allons le comparer à celui obtenu pour le modèle éléments finis industriel. Cependant, le diagramme de Campbell correspondant au modèle industriel est tracé dans le repère fixe. Le passage de notre diagramme de Campbell du repère tournant au repère fixe revient à traduire les branches directes des modes de Ω_{bp} et les branches rétrogrades des modes de $-\Omega_{bp}$ par rapport au

repère tournant. Ainsi, la figure V.5 donne les diagrammes de Campbell des deux modèles d'ensemble dans le repère fixe. Dans le repère fixe, les modes directs sont associés aux branches croissantes et les modes rétrogrades sont associés aux branches décroissantes. De plus, les deux droites en trait noir épais correspondent aux droites d'excitation synchrones $f = \Omega_{bp}$ et $f = \Omega_{hp}$, associées aux balourds BP et HP dans le repère fixe.

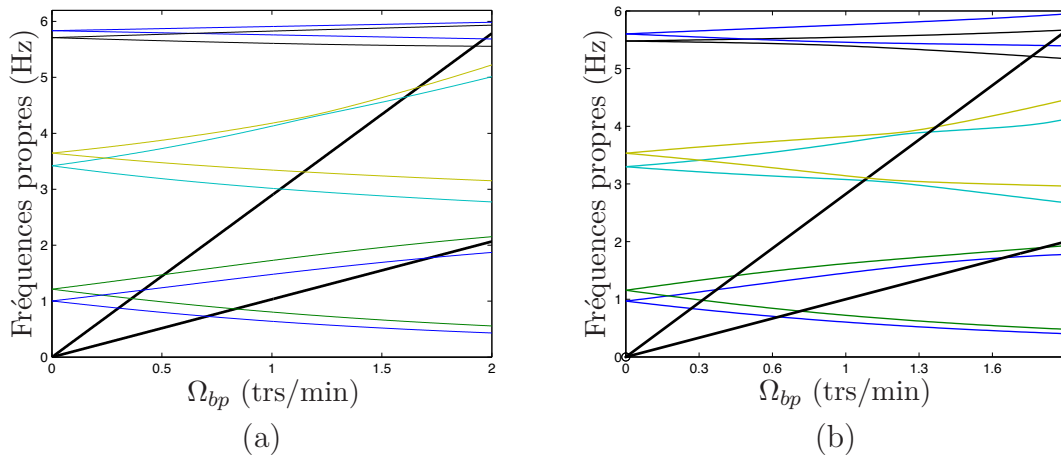


FIGURE V.5 – Diagrammes de Campbell du système bi-rotor dans le repère fixe - (a) Modèle développé dans Matlab, (b) Modèle éléments finis SNECMA

Quelques différences sont observées entre les deux diagrammes présentés, notamment dues aux simplifications qui ont été réalisées afin de faciliter la mise en donnée du modèle d'ensemble. La comparaison de ces diagrammes de Campbell nous permet néanmoins de vérifier que les deux systèmes bi-rotor ont le même type d'évolution au cours de la montée en régime et que les tendances sont correctement retranscrites. Nous disposons alors d'un modèle d'ensemble représentatif d'un moteur industriel. Le modèle de roue aubagée qui sera utilisé pour construire un modèle couplé est décrit dans la partie suivante.

1.2 Description de la roue aubagée considérée

La roue aubagée considérée dans notre étude est une roue mobile de la turbine BP. La figure V.6 illustre une vue d'ensemble d'une turbine industrielle montée sur son rotor. Notons que les roues de turbine comportent un grand nombre d'aubages. Par ailleurs, la forme des aubages est également représentée sur la figure V.6. La géométrie de ces aubes mobiles de turbine est très spécifique, elles sont composées de trois parties principales, à savoir la pale (partie centrale), le pied d'aube et le talon se situant en tête d'aube. Une des fonctions mécaniques de ces aubes du turbine BP est de prélever une partie de l'énergie des gaz de la veine et la transformer en énergie mécanique afin de la transmettre au disque du rotor. Dans une architecture moteur double corps (deux rotors), le palier inter-arbre est monté sur un cône tourillon BP, lui-même connecté à la turbine BP. Il est alors fortement probable que les excita-

tions provenant de l'arbre HP soient transmises au rotor BP, plus précisément aux aubes de turbine BP par l'intermédiaire de l'inter-arbre. C'est pourquoi, l'objectif est d'appliquer la procédure de couplage développée au chapitre IV afin d'étudier la réponse des aubes de turbine aux excitations provenant des arbres BP et HP.

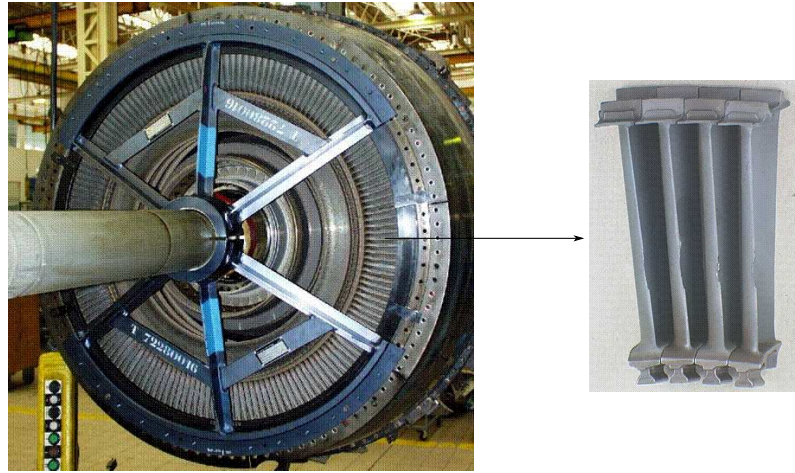


FIGURE V.6 – Vue d'ensemble d'une turbine BP montée sur le rotor BP (à gauche) et zoom sur l'assemblage de quatre aubes de turbine BP (à droite)

1.2.1 Réduction du modèle de roue aubagée

La première étape de la méthode de couplage proposée au chapitre précédent est de construire un modèle réduit associé au modèle complet de roue de turbine BP (*cf.* Chap. IV.1). La roue aubagée que nous considérons dans cette étude est la roue mobile du dernier étage de la turbine BP qui comporte 138 aubes. Tout d'abord, nous considérons que les 138 secteurs de la roue aubagée sont identiques nous permettant ainsi de modéliser un seul secteur de référence de la structure au sens de la symétrie cyclique. La figure V.7 donne le modèle du secteur de référence considéré pour la roue de turbine BP, sous deux vues différentes. Le maillage utilisé pour la modélisation de cet assemblage aube - disque est composé de 164 922 éléments tétraédriques de degré 2, le modèle du secteur comporte alors 612 620 degrés de liberté. La définition de la symétrie cyclique sur ce modèle nous permet de déduire les autres secteurs de la roue aubagée par j rotations successives d'angle $\alpha = \frac{2\pi}{N}$, pour $j \in [0; N - 1]$ et $N = 138$. Afin de pouvoir déduire tous les secteurs de la roue aubagée complète, il convient de définir pour ce secteur de référence des conditions aux limites avec ses secteurs adjacents. La définition de ces conditions aux limites cycliques se fait sur les frontières inter-secteurs, notamment sur la face du disque représentée sur la figure V.7. Ainsi, les degrés de liberté appartenant à la frontière de gauche du secteur de disque sont liés aux degrés de liberté appartenant à la frontière de droite par des relations de propagation définies en base cyclique (*cf.* Chap. I.4.1.3).

À partir de ce modèle défini en base cyclique, il est possible de calculer les modes de vibration du secteur de référence pour chaque harmonique spatiale k . Rappelons

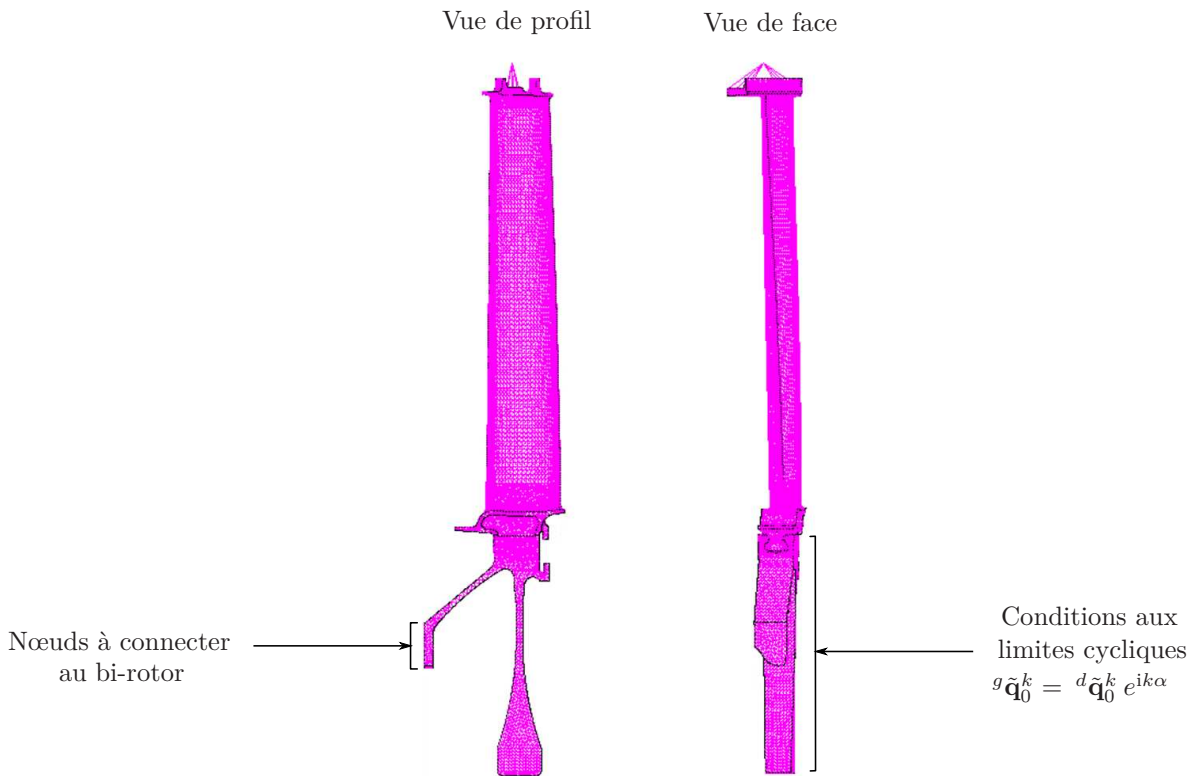


FIGURE V.7 – Secteur de référence de la roue de turbine BP considérée

que les modes de vibration de roue aubagée qui se couplent facilement à la flexion des arbres sont les modes de vibration à 1 diamètre. Comme les sous-systèmes relatifs à chaque harmonique spatiale k sont indépendants, il est alors possible de calculer les modes de vibration du secteur de référence pour $k = 1$ seulement. Les déformées propres des trois premiers modes de vibration à un diamètre du secteur de référence sont illustrées sur la figure V.8. Ces modes de vibration ont été calculés à l'arrêt, pour $\Omega_{bp} = 0$ trs/min, et des conditions aux limites de type déplacement imposé au niveau du talon ont été appliquées ainsi qu'un encastrement au niveau des nœuds du disque à connecter au bi-rotor (*cf.* Figure V.7). Pour chaque mode à un diamètre, la contribution en cosinus (à gauche) et en sinus (à droite) est présentée. Les fréquences propres des trois premiers modes de vibration à un diamètre ont été normalisées de la même manière que les modes de bi-rotor introduits précédemment. Notons que les deux premières fréquences propres du secteur de référence sont très proches des fréquences propres calculées pour le modèle d'ensemble, ce qui laisse supposer qu'il y aura éventuellement des couplages de modes entre les deux structures.

La seconde étape de la méthode consiste à obtenir un modèle réduit de ce secteur de référence modélisé en base cyclique. En effet, cette étape est indispensable dans la procédure de couplage car le modèle du secteur comporte un trop grand nombre de degrés de liberté et ne peut donc pas être couplé directement au système bi-rotor. La méthode de réduction modale utilisée est la méthode de Craig & Bampton qui consiste à construire une base réduite constituée de modes statiques de liaison et de modes normaux de vibration à interfaces fixes. Afin de construire cette base

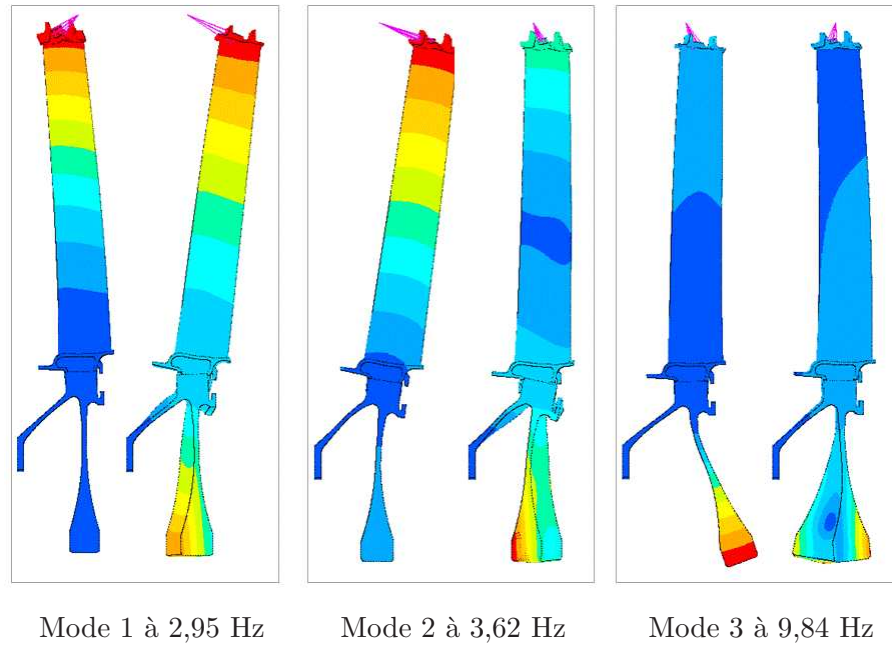


FIGURE V.8 – Premiers modes de vibration à un diamètre du secteur de référence de la roue aubagée

réduite, des degrés de liberté de frontière doivent être sélectionnés sur le modèle de secteur de référence. La connexion entre les deux modèles sera réalisé entre les nœuds appartenant à la bride du disque aubagé (*cf.* Figure V.7) et le nœud du bi-rotor se situant à l'abscisse du disque TuBP. De la même manière qu'au chapitre précédent, afin de limiter le nombre de ddls de frontière retenus dans la base de projection de Craig & Bampton, un nœud fictif est créé au centre de rotation de la structure. Les nœuds du disque à connecter au bi-rotor sont alors liés rigidement au nœud fictif ainsi créé.

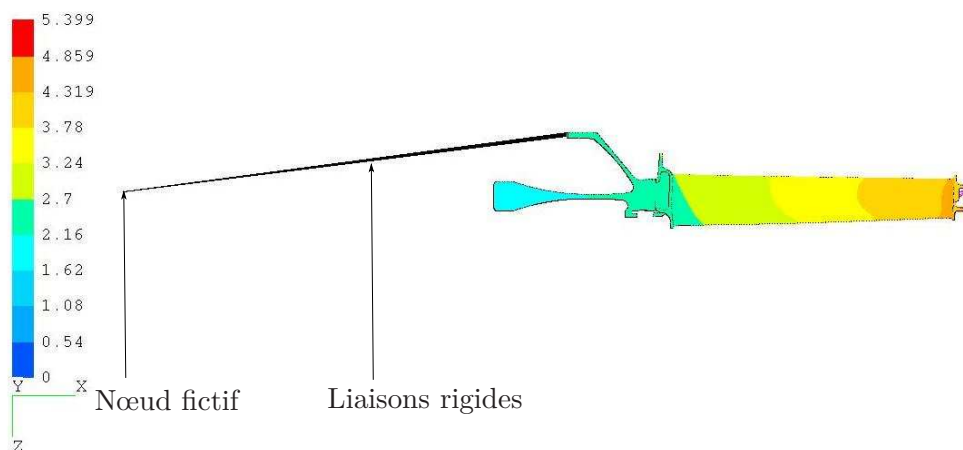


FIGURE V.9 – Déformée statique du secteur de référence à la vitesse $\Omega_{bp} = 1,55$ trs/min

D'autre part, afin de suivre l'évolution des fréquences propres de roue aubagée en

fonction du régime moteur sur la plage de fonctionnement normalisée $\Omega_{bp} = [0; 2]$ trs/min, plusieurs modèles réduits doivent être construits. En effet, afin de correctement retranscrire les effets centrifuges sur la roue aubagée lors de sa mise en rotation, des calculs statiques sont réalisés pour différentes vitesses de rotation comprise dans cette plage de vitesses $\Omega_{bp} = [0; 2]$ trs/min. Un exemple de déformée statique est donné en figure V.9 et est calculée à la vitesse $\Omega_{bp} = 1,55$ trs/min, correspondant au régime de croisière du moteur. Ces calculs statiques fournissent donc la raideur de précontrainte centrifuge à prendre en compte lors de la construction du modèle réduit du secteur de référence pour chaque vitesse de rotation.

1.2.2 Validation du modèle réduit

Afin de vérifier la validité des modèles réduits obtenus en base cyclique, les principaux critères de convergence exposés au chapitre précédent en section 2.2.2 sont utilisés sur notre modèle de roue aubagée industrielle. Rappelons que chaque modèle réduit est construit pour l'onde $k = 1$ et que les effets centrifuges sont pris en compte lors de la réduction. De plus, chaque base réduite est composée des degrés de liberté de frontière, notamment ceux correspondant au nœud fictif créé, et de $\zeta = 20$ modes normaux de vibration à interfaces fixes. Les critères de convergence peuvent être calculés pour tous les modèles réduits, seuls ceux correspondant au modèle réduit calculé pour une vitesse de rotation $\Omega_{bp} = 1,55$ trs/min sont présentés.

Dans un premier temps, le critère sur les fréquences propres permet de comparer les fréquences f_{red} du modèle de secteur de référence réduit à celles du modèle complet associé f . L'écart entre les fréquences propres calculées pour les deux modèles est quantifié au travers d'une déviation en fréquence Δf et est reporté dans le tableau V.2.

Modes	f_{red} (Hz)	f (Hz)	Δf (%)
1	4,116	4,123	0,16
2	5,012	5,018	0,11
3	12,04	12,05	0,0008
4	17,26	17,24	0,15
5	24,84	24,77	0,3

TABLE V.2 – Convergence du modèle réduit de roue de turbine BP pour $k = 1$ et $\Omega_{bp} = 1,55$ trs/min - Critère sur les fréquences propres

La comparaison des cinq premières fréquences propres du modèle de secteur de roue de turbine BP calculées pour l'onde 1 montre une très bonne corrélation entre les deux modèles, avec un écart inférieur à 0,5% pour tous les modes présentés.

Dans un second temps, l'autre critère permettant de statuer sur la convergence du modèle réduit est le critère d'assurance modale (MAC). Ce critère permet de réaliser une comparaison entre les vecteurs propres des deux modèles considérés. Les résultats obtenus pour ce critère sont présentés sous forme de matrice, illustrée sur la figure V.10. Nous pouvons constater qu'il y a une très bonne corrélation

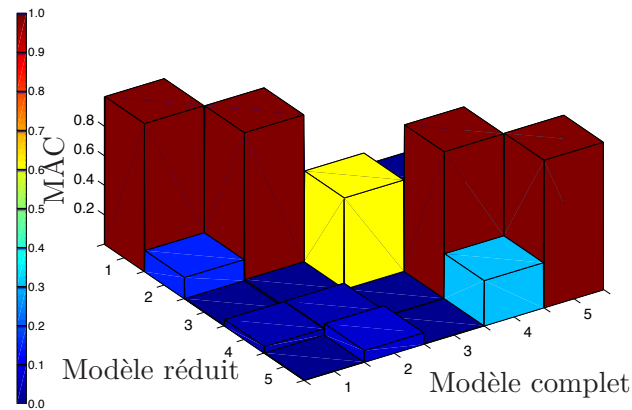


FIGURE V.10 – Critère de MAC pour les cinq premiers modes de vibration à 1 diamètre

entre les vecteurs propres du modèle réduit et ceux du modèle complet, notamment pour les modes 1, 2, 4 et 5 où le critère est très proche de l'unité. Comme ce sont essentiellement les premiers modes de vibration de roue aubagée à un diamètre qui nous intéressent dans cette étude, les deux critères présentés nous permettent de conclure sur la validité du modèle réduit construit.

Les critères de convergence qui viennent d'être présentés correspondent au modèle réduit calculé pour une vitesse de rotation $\Omega_{bp} = 1,55$ trs/min. Afin de valider les modèles réduits pour les autres vitesses de rotation, nous avons extrait dans Matlab les données correspondant à chaque modèle réduit sur la plage de fonctionnement considérée $\Omega_{bp} = [0 ; 2]$ trs/min. Après avoir encastré le nœud fictif dans les modèles réduits, un diagramme de Campbell de la roue aubagée a été tracé et est illustré sur la figure V.11. D'une part, ce diagramme de Campbell montre que les fréquences

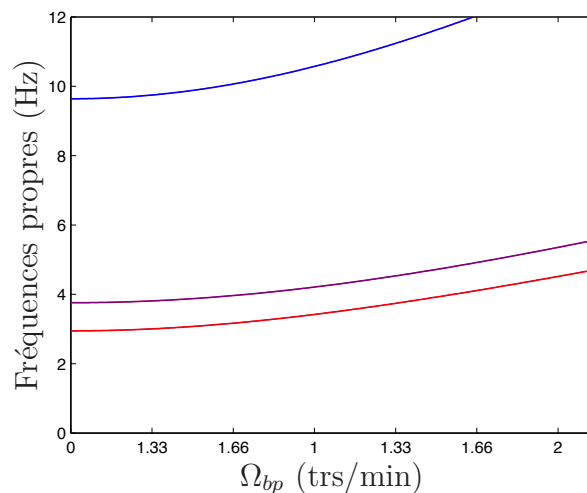


FIGURE V.11 – Diagramme de Campbell du modèle réduit de roue aubagée

propres du modèle réduit de roue aubagée augmentent en fonction du régime mo-

teur, ce qui est caractéristique des effets centrifuges présents dans le système en rotation. D'autre part, à l'arrêt, nous pouvons constater que les fréquences propres du modèle réduit $f_1 = 3,04$, $f_2 = 3,78$ et $f_3 = 9,95$ Hz sont du même ordre que les fréquences propres calculées pour le modèle complet modélisé en symétrie cyclique (*cf.* Figure V.8).

Les études qui viennent d'être menées ont permis de valider l'étape de réduction du modèle de secteur de référence de la roue de turbine BP. Dans la suite, les autres étapes de la procédure de couplage détaillées au chapitre IV en section 2.1 seront appliquées afin de construire et d'étudier le comportement vibratoire du modèle réduit de roue aubagée couplé au système bi-rotor développé dans la section 1.1.

2 Dynamique linéaire et non-linéaire du modèle couplé

Dans notre étude, nous nous intéressons aux sollicitations d'ordre mécanique et aux vibrations du système couplé composé d'un système bi-rotor et d'une roue aubagée. D'une part, les principales excitations d'ordre mécanique exercées sur la roue aubagée sont les efforts aérodynamiques, les efforts centrifuges induits par la rotation du moteur, et les efforts de contact au niveau des talons, autrement dit en tête d'aube. D'autre part, les phénomènes vibratoires ont principalement pour origine les excitations par sillages d'obstacles provenant d'une discontinuité dans l'écoulement de la veine, des premiers harmoniques de la vitesse de rotation du rotor BP et de la vitesse de rotation différentielle des corps HP et BP. Précisons que les excitations d'ordre aérodynamique ne seront pas considérées dans cette étude. En revanche, dans le contexte où la roue aubagée est couplée à un système bi-rotor, nous allons étudier la réponse des aubages de la roue de turbine BP lorsque le système couplé est excité par les balourds BP et HP.

La méthode de couplage proposée au chapitre précédent semble donc adaptée pour le couplage des deux structures présentées dans la section 1. Le modèle couplé ainsi obtenu sera alors capable de rendre compte de l'effet du balourd provenant de l'arbre HP sur la réponse des aubes de la turbine BP.

2.1 Analyse linéaire du système

Tout d'abord, rappelons que les étapes de la procédure de couplage permettent de connecter les ddls de frontière retenus dans le modèle réduit de roue aubagée, à savoir ceux associés au nœud fictif, au modèle simplifié de bi-rotor en l'abscisse du disque TuBP. Précisons que la connexion entre les deux structures repose sur un couplage rigide, ce qui représente une certaine approximation par rapport à la configuration réelle du moteur. À la fin de cette procédure, nous disposons alors d'un modèle couplé impliquant un modèle éléments finis réduit de roue aubagée 3D et un modèle simplifié de bi-rotor reposant sur des équivalents poutres - masses - ressorts.

L'analyse du modèle linéaire passe tout d'abord par l'étude des éléments propres du système couplé. Le calcul des fréquences propres a été mené pour différentes vitesses de rotation comprises dans la plage de fonctionnement normalisée $\Omega_{bp} = [0; 2]$ trs/min. L'évolution des fréquences propres du système couplé est présentée en fonction de la vitesse de rotation du rotor BP sur la figure V.12.

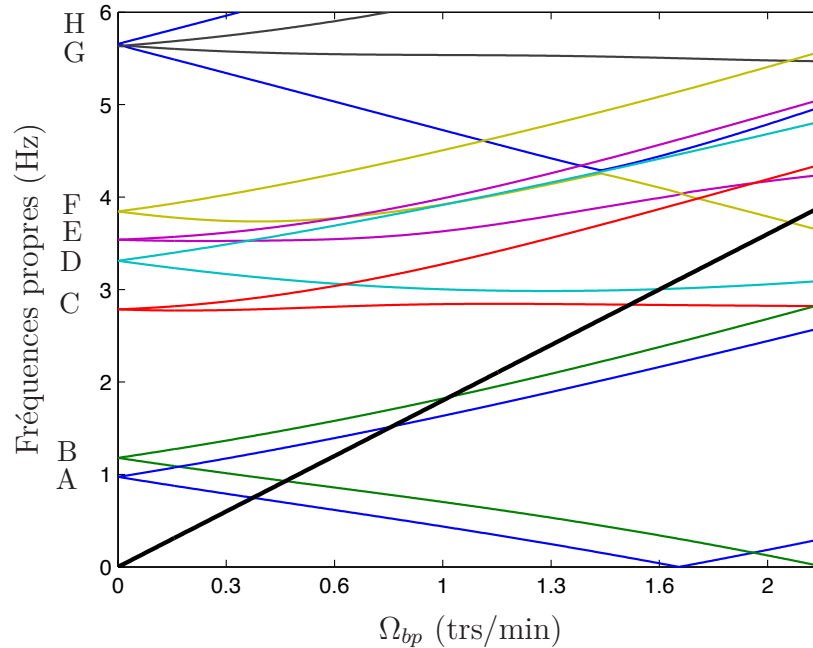


FIGURE V.12 – Diagramme de Campbell du modèle couplé dans le repère tournant BP

Afin de faciliter la lecture de ce diagramme de Campbell, chaque mode propre double (direct et rétrograde) est désigné par une lettre et est différencié par une couleur. Comme le système étudié est axisymétrique, les modes propres d'ensemble A, B, D, F, G et H sont bien doubles à l'origine et s'ouvrent en fonction du régime moteur. Ce dédoublement des modes est piloté par les effets gyroscopiques présents dans le système bi-rotor. Nous avons utilisé le même code couleur que pour le diagramme de Campbell associé au système bi-rotor sans roue aubagée illustré en figure V.4. Nous retrouvons ainsi les six premiers modes d'ensemble qui avaient été identifiés en section 1.1. Les courbes rouge et violette de la figure V.12 désignent donc l'évolution des fréquences propres associées à la roue de turbine BP qui avaient été identifiées sur le diagramme de Campbell de la roue aubagée seule (*cf.* Figure V.11). Les deux premiers modes de roue aubagée à un diamètre C et E observés sur ce diagramme sont des modes doubles. Les fréquences propres associées à ces modes de vibration augmentent en fonction de la vitesse de rotation du rotor BP, ce qui est caractéristique des effets centrifuges présents dans la roue aubagée. De manière générale, les modes de roue aubagée ne se dédoublent pas en fonction de la montée en régime, car les effets gyroscopiques sont négligeables dans ces structures. Le comportement qui est observé ici semble alors provenir d'un phénomène de *locus veering* entre les

modos d'ensemble et les modos de roue aubagée à un diamètre. Ce phénomène se produit généralement entre des systèmes ayant des fréquences propres et des déformées propres très voisines, ce qui est le cas ici entre le bi-rotor et la roue aubagée. Au moment où le premier mode de roue aubagée à un diamètre, mode C illustré en rouge sur la figure V.12, croise la branche directe du troisième mode d'ensemble D en bleu clair à la vitesse $\Omega_{bp} \approx 0,7$ trs/min, les modos propres se croisent simplement sans se repousser, ce qui indique que le phénomène de *locus veering* ne se produit pas entre ces deux modos. Rappelons que la déformée propre du mode d'ensemble D indique que l'énergie de déformation est localisée à l'avant du moteur, au niveau du compresseur BP et que la vibration de la roue aubagée est négligeable sur ce mode, ce qui semble confirmer que le *locus veering* ne se produit pas entre le mode d'ensemble D et le premier mode de roue aubagée C. En revanche, nous avons identifié en section 1.1 que le mode d'ensemble F, correspondant au mode 4 de bi-rotor, était un mode couplé entre le rotor BP et le rotor HP, où l'énergie de déformation était localisée dans les paliers P3 et P4. Comme le palier inter-arbre P4 est directement connecté à la turbine BP, la déformation de la roue de turbine BP est par conséquent non négligeable pour ce mode de vibration. Le phénomène de *locus veering* identifié sur le diagramme de Campbell se produit alors entre les deux premiers modos C et E de roue aubagée à un diamètre et la branche directe du mode d'ensemble F. Le comportement qui est observé semble déjà rendre compte d'un couplage fort entre la dynamique du système bi-rotor et celle de la roue aubagée.

D'autre part, le diagramme de Campbell donne aussi accès aux placements des modos vis-à-vis des vitesses critiques. Cette information directement lue sur le diagramme de Campbell nous permet de prédire les résonances du système couplé en fonction des excitations synchrones du moteur, notamment en fonction des forces de balourd BP et HP. Rappelons que les vitesses critiques directes des modos se lisent à l'intersection des branches décroissantes associées aux modos directs et des droites d'excitation synchrones. Dans le repère d'étude considéré \mathcal{R}_{bp} , la synchrone BP est associée à la droite d'équation $f = 0$ et la synchrone HP vue du repère BP correspond à la droite $f = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$, illustrée en trait noir épais sur la figure V.12. Les vitesses critiques directes du système couplé soumis aux balourds BP et HP sont reportées dans le tableau V.3.

Modes	Vitesses critiques directes (trs/min)	
	Balourd BP	Balourd HP
A	1,7	0,42
B	—	0,52
D	—	1,67
F	—	1,58
H	—	2,05

TABLE V.3 – Vitesses critiques directes du système couplé

Sur la plage de fonctionnement du moteur, seul le mode A est excité par le balourd BP et les cinq modos A, B, D, F et H sont excités par le balourd

HP. Nous pouvons d'ores et déjà constater que la droite associée à la synchrone HP ne croise pas les modes propres de roue aubagée C et E sur la plage de fonctionnement du moteur $\Omega_{bp} = [0; 2]$ trs/min. D'après ces prédictions, il y a donc absence de résonance des modes propres de roue aubagée lorsque le système est soumis au balourd HP. Néanmoins, compte tenu des phénomènes de *locus veering* qui ont été observés auparavant, il semble nécessaire d'étudier la réponse forcée du système couplé aux excitations de type balourd BP et HP afin de se rendre compte de l'effet du balourd HP sur la réponse des aubes de turbine BP.

Tout d'abord, le balourd a été introduit sur le disque FAN du rotor BP. La réponse du modèle couplé soumis à ce balourd BP est présentée en figure V.13. D'une part, la réponse du rotor BP au niveau du disque FAN où a été introduit le balourd est illustrée sur la figure V.13(a). Le pic de résonance associé au mode A apparaît bien à la vitesse critique $\Omega_{bp} = 1,7$ trs/min, prédite par le diagramme de Campbell et reportée dans le tableau V.3. Notons que ce premier mode de vibration est un mode de suspension fan où le disque aubagé subit un basculement induit par la flexion du rotor BP. Ainsi, la réponse en tête d'aube de la roue de turbine BP qui est illustrée en figure V.13(b) confirme qu'au voisinage de la vitesse critique, les aubes ont un mouvement de grande amplitude dû à la présence du balourd sur le rotor BP.

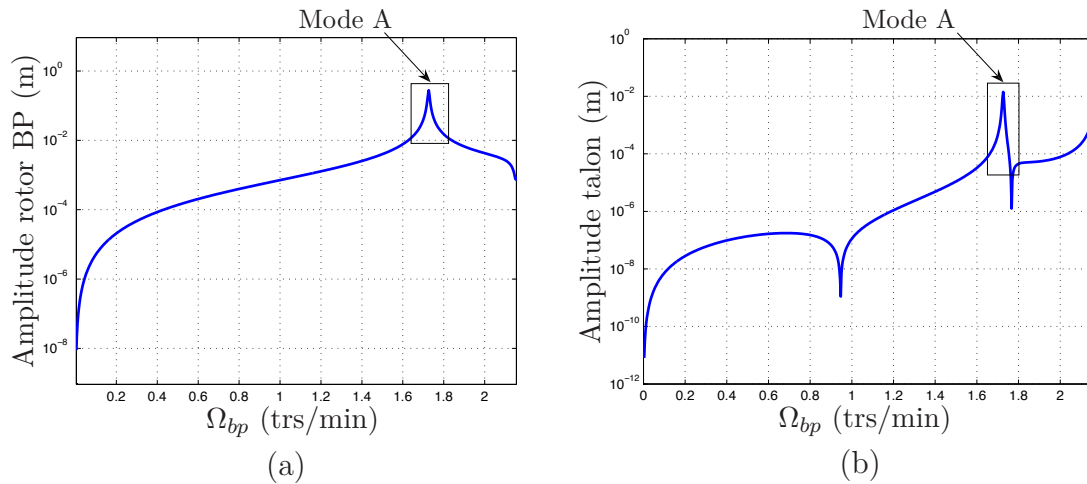


FIGURE V.13 – Réponse linéaire du système couplé soumis au balourd BP - (a) Réponse du rotor BP en l'abscisse y_{FAN} et (b) Réponse en tête d'aube

La réponse du système couplé soumis au balourd HP a ensuite été calculée sur la plage de vitesses de rotation $\Omega_{bp} = [0; 2, 1]$ trs/min. Le balourd HP a été introduit au niveau du disque TuHP du rotor HP et les réponses du système à ce balourd sont illustrées sur les figures V.14 et V.15. Lors de l'analyse du diagramme de Campbell, nous avons identifié cinq vitesses critiques correspondant à la résonance des modes d'ensemble A, B, D, F et H. La figure V.14(a) qui présente la réponse linéaire du rotor BP soumis au balourd HP montre que nous retrouvons bien les cinq pics de résonance aux vitesses critiques relevées dans le tableau V.3. La figure V.14(b) illustre quant à elle la réponse du rotor HP au niveau du disque TuHP où nous distinguons seulement

quatre pics de résonance. En effet, le pic de résonance associé au mode D n'apparaît pas sur cette courbe de réponse car le rotor HP ne se déforme pas sur ce mode de vibration, qui est identifié comme étant un mode de compresseur BP (*cf.* mode 3 sur la figure V.3). Précisons également que l'amplitude de déplacement de chacun des deux rotors excités par le balourd HP est cohérente avec les déformées propres des modes 1, 2, 3, 4 et 6 du modèle d'ensemble présentées en section 1.1.

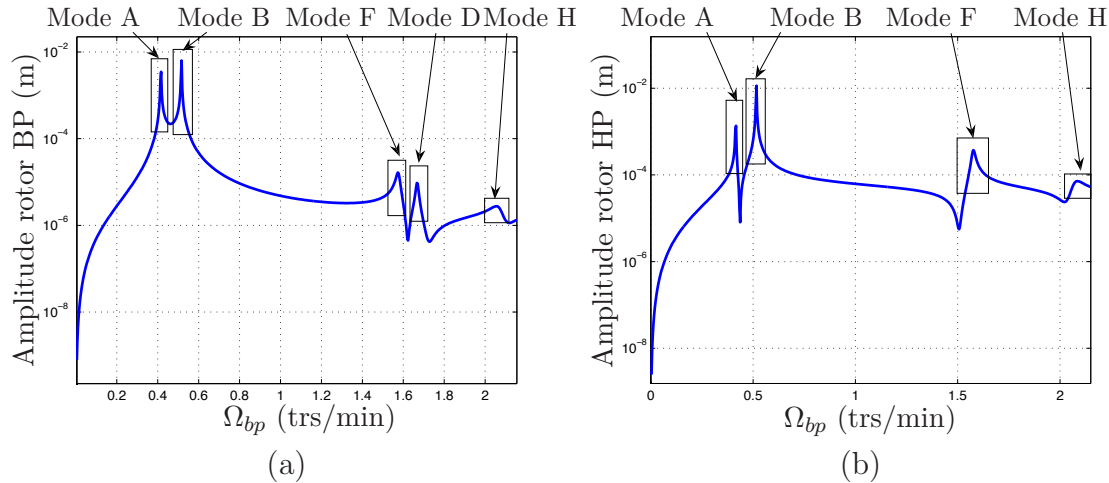


FIGURE V.14 – Réponse linéaire du système couplé soumis au balourd HP - (a) Réponse du rotor BP en l'abscisse y_{FAN} et (b) Réponse du rotor HP en l'abscisse y_{TuHP}

Enfin, la réponse des aubes de turbine BP au balourd HP est illustrée sur la figure V.15. Nous avons noté que la synchrone HP ne croisait pas de mode propre de roue aubagée sur la plage de fonctionnement du moteur. Or, nous observons

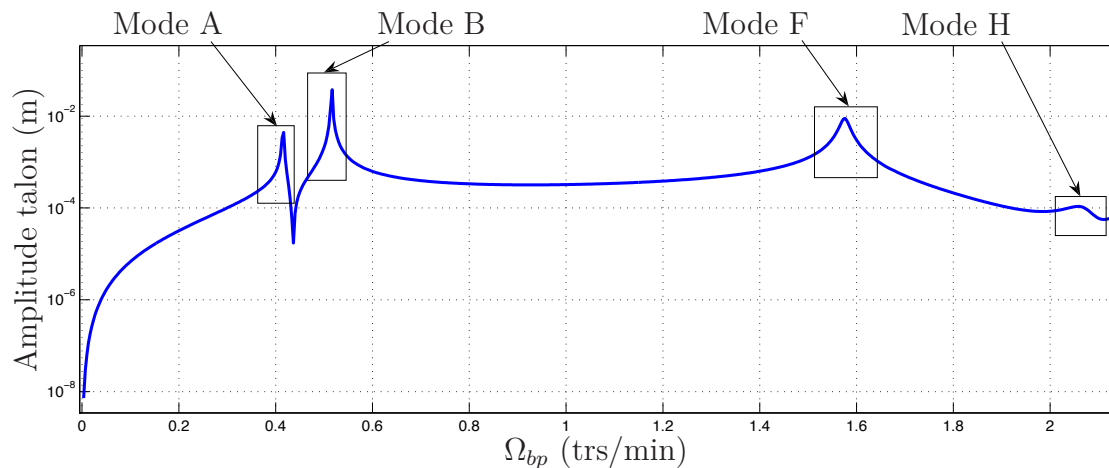


FIGURE V.15 – Réponse linéaire du système couplé soumis au balourd HP - Réponse en tête d'aube

un niveau de réponse des aubes non négligeable lorsque le système est excité par le balourd HP. Ces observations semblent confirmer que les phénomènes de *locus veering* identifiés sur le diagramme de Campbell du système couplé se produisent

notamment entre le mode C de roue aubagée et le mode F d'ensemble. Ainsi, la courbe de réponse présentée en figure V.15 indique que les aubes de turbine BP ont un mouvement de grande amplitude, en particulier pour les modes A, B et F. Rappelons que le mode H correspond à un mode d'arbre HP, où l'énergie de déformation est localisée dans le rotor HP et où le déplacement de la roue de turbine BP est très faible.

En conclusion, l'analyse linéaire du système couplé industriel composé d'un système bi-rotor et d'une roue de turbine BP nous a permis de mettre en évidence un couplage entre la dynamique d'ensemble et la dynamique de la roue aubagée. Ce modèle permet également d'étudier la réponse du système aux excitations de type balourd provenant à la fois du rotor BP mais aussi du rotor HP. Le modèle qui a été construit est alors capable de rendre compte du niveau de réponse des aubes de turbine BP en présence d'un balourd HP. Afin de confirmer l'analyse du diagramme de Campbell et la présence de phénomènes de *locus veering* entre les modes d'ensemble et les modes de roue aubagée, un modèle couplé équivalent impliquant des aubes de type poutre a été construit. Dans la suite, une comparaison des principaux résultats linéaires obtenus pour chacun des deux modèles sera présentée afin de valider l'analyse qui vient d'être réalisée sur le modèle couplé industriel.

2.2 Comparaison des résultats obtenus à ceux d'un modèle couplé impliquant des aubes de type poutre

L'objectif de cette partie est de confirmer les interprétations qui viennent d'être réalisées sur les résultats linéaires du système couplé industriel. Afin d'y parvenir, nous avons construit un modèle couplé équivalent impliquant un disque rigide TuBP et des aubes de type poutre en se basant sur les développements effectués au chapitre III en section 1.3. Le modèle simplifié de roue aubagée est paramétré en fonction des données propres à la roue de turbine BP. Précisons que compte tenu des fonctions de Ritz prises en compte pour ce système simplifié, seul le premier mode de flexion des aubes est modélisé. Ce premier mode de flexion des aubes peut néanmoins être comparé à ceux du modèle industriel, car il correspond au premier mode de vibration de la roue de turbine BP.

Une fois le modèle simplifié équivalent construit, nous avons d'abord réalisé le calcul des éléments propres de ce système sur la plage de fonctionnement du moteur. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure V.16(b) sous forme d'un diagramme de Campbell. Sur la figure V.16(a), nous avons juxtaposé le diagramme de Campbell obtenu précédemment pour le modèle couplé industriel afin de faciliter la comparaison des deux solutions. Tout d'abord, rappelons que sur le diagramme de Campbell associé au modèle industriel, les modes sont désignés par des lettres et une couleur est utilisée pour chacun des modes afin de mieux les distinguer. Sur ce diagramme, les deux premiers modes de vibration de la roue aubagée C et E apparaissent en rouge et violet, respectivement. Notons que le même code couleur a été utilisé pour le diagramme de Campbell associé au modèle simplifié équivalent.

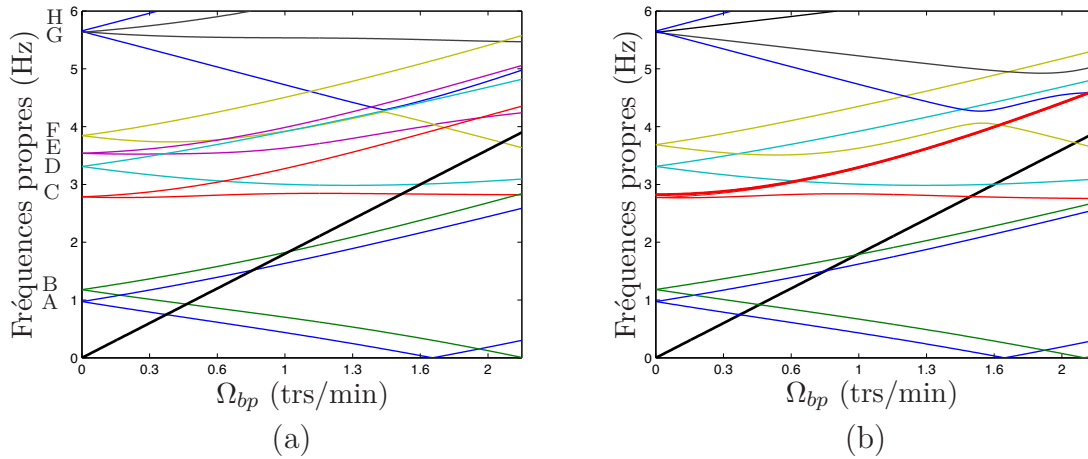


FIGURE V.16 – Comparaison des diagrammes de Campbell de chaque système couplé - (a) Modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée 3D et (b) Modèle impliquant des aubes de type poutre

Nous retrouvons bien les mêmes modes d'ensemble et un seul mode de roue aubagée illustré en rouge associé au premier mode de flexion des aubes. La comparaison de ces diagrammes nous montre clairement que les deux systèmes couplés ont la même évolution au cours de la montée en régime. De plus, il est plus facile de distinguer sur la figure V.16(b) associée au modèle impliquant des aubes poutre que le phénomène de *locus veering* se produit entre le premier mode de roue aubagée en rouge et le mode F d'ensemble représenté en jaune. Ainsi, ces résultats viennent confirmer les analyses réalisées précédemment, et atteste du couplage qui existe entre la dynamique d'ensemble et la dynamique plus spécifique de la roue aubagée.

Afin de compléter la comparaison des deux modèles couplés, nous avons ensuite calculé la réponse du système simplifié équivalent soumis aux balourds BP et HP. Seules les courbes de réponse en tête d'aube sont présentées sur les figures V.17 et V.18 et comparées à celle obtenues pour le modèle couplé industriel. En ce qui concerne la réponse du système couplé simplifié soumis au balourd BP (*cf.* Figure V.17(b)), seul le mode A est excité sur la plage de vitesses de rotation considérée, ce qui est en accord avec les résultats associés au modèle couplé industriel (*cf.* Figure V.17(a)). En effet, pour chacun des deux modèles, les résonances apparaissent à la même vitesse critique $\Omega_{bp} = 1,7$ trs/min, correspondant à la valeur relevée sur le diagramme de Campbell. En revanche, la comparaison des deux courbes de réponse est plus délicate en ce qui concerne les niveaux d'amplitude, car le modèle de roue aubagée impliquant des aubes de type poutre est trop simplifié et ne peut donc pas retranscrire correctement les déplacements de la roue de turbine BP industrielle.

Le même type d'analyse peut être réalisé en ce qui concerne la réponse de chaque système couplé soumis au balourd HP (*cf.* Figure V.18). Pour les deux courbes de réponse présentées, quatre pics de résonance sont distingués associés à la vibration des modes A, B, F et H. La comparaison des courbes montre à nouveau que l'amplitude de vibration diffère entre les deux modèles, mais que la position des résonances

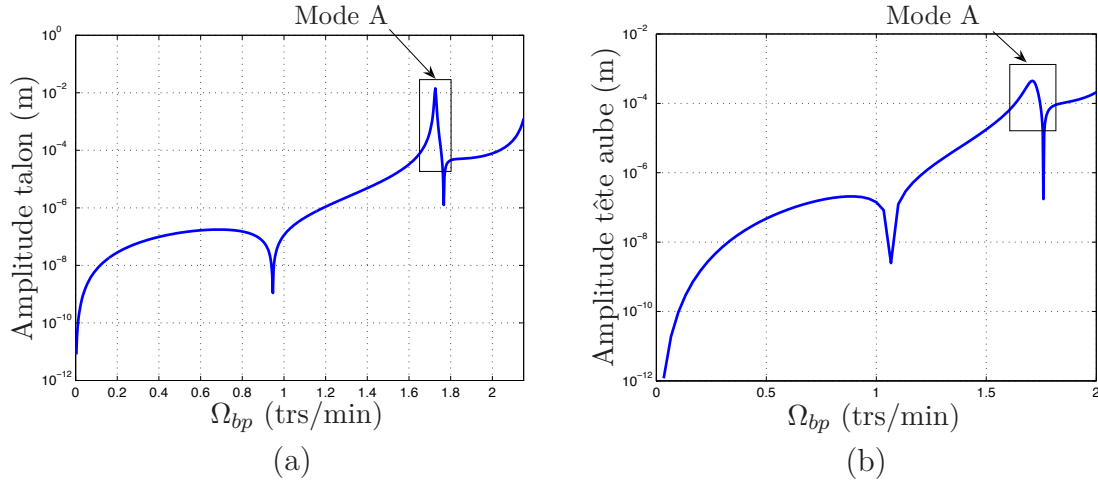


FIGURE V.17 – Comparaison des réponses en tête d’aube de chaque système couplé soumis au balourd BP - (a) Modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée 3D et (b) Modèle impliquant des aubes de type poutre

est identique dans les deux cas de figure.

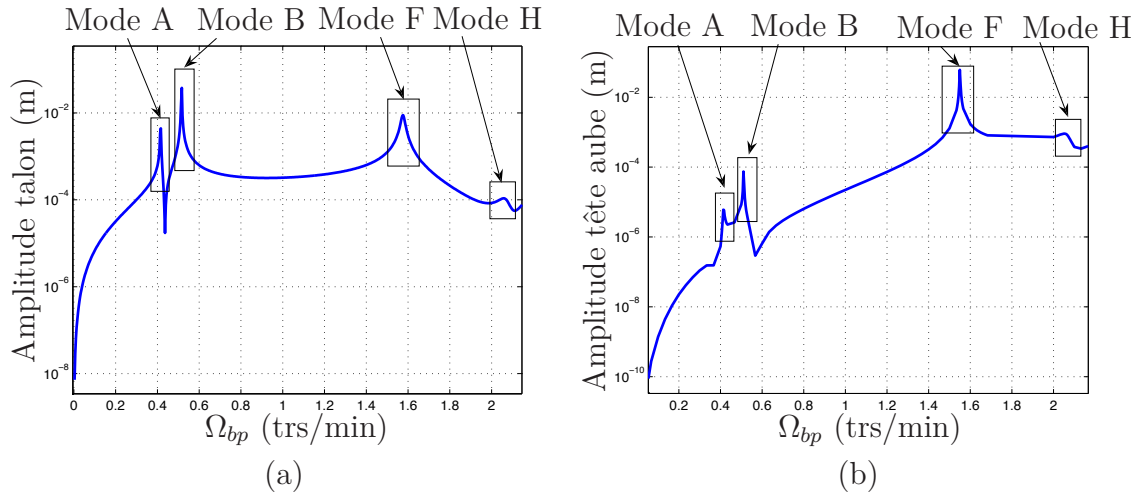


FIGURE V.18 – Comparaison des réponses en tête d’aube de chaque système couplé soumis au balourd HP - (a) Modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée 3D et (b) Modèle impliquant des aubes de type poutre

De plus, rappelons que le modèle couplé simplifié est composé d’un disque rigide modélisant les effets de masse et d’inertie en rotation de la turbine BP ainsi que d’aubes modélisées par des poutres. Étant donné que le modèle simplifié de roue aubagée ne prend pas en compte la symétrie cyclique, les 138 aubes de la roue de turbine BP sont modélisées. Précisons que les résultats linéaires qui viennent d’être présentés pour le modèle impliquant des aubes de type poutre ont été obtenus en un temps de calcul $t_{CPU} = 12$ min. En ce qui concerne le système couplé industriel construit à l’aide de la méthode de couplage développée au chapitre IV, la roue aubagée 3D est quant à elle modélisée au sens de la symétrie cyclique, puis le modèle du secteur de référence est réduit par une méthode de synthèse modale. Cette

technique permet de réduire considérablement la taille du modèle tout en gardant la richesse du modèle éléments finis. Par conséquent, le temps de calcul requis afin d'obtenir le diagramme de Campbell ainsi que les réponses aux balourds BP et HP est seulement de $t_{CPU} = 11$ s.

Cette dernière remarque nous permet alors de conclure que la méthode proposée au précédent chapitre est adaptée à l'étude du comportement linéaire de structures couplées industrielles et est également efficace en termes de temps de calcul. L'analyse du comportement linéaire du système industriel a notamment permis de mettre en évidence un couplage entre la dynamique d'ensemble et la dynamique de la roue de turbine BP. L'étude de la réponse forcée de la structure couplée donne une estimation du niveau de réponse des aubes de turbine BP lorsque le système est soumis à un balourd HP. Dans la suite, afin d'enrichir la modélisation de la structure couplée, nous allons considérer les efforts de contact au niveau des talons de chaque aube de turbine BP et effectuer une première analyse du comportement du système non-linéaire.

2.3 Prise en compte des non-linéarités au niveau des talons

Nous avons évoqué en section 1.2 que les aubes de turbine BP étaient composées de trois parties principales, à savoir le pied, la pale et le talon. La figure V.19 présente un modèle d'aube de turbine BP industrielle en spécifiant les différentes parties qui la composent.

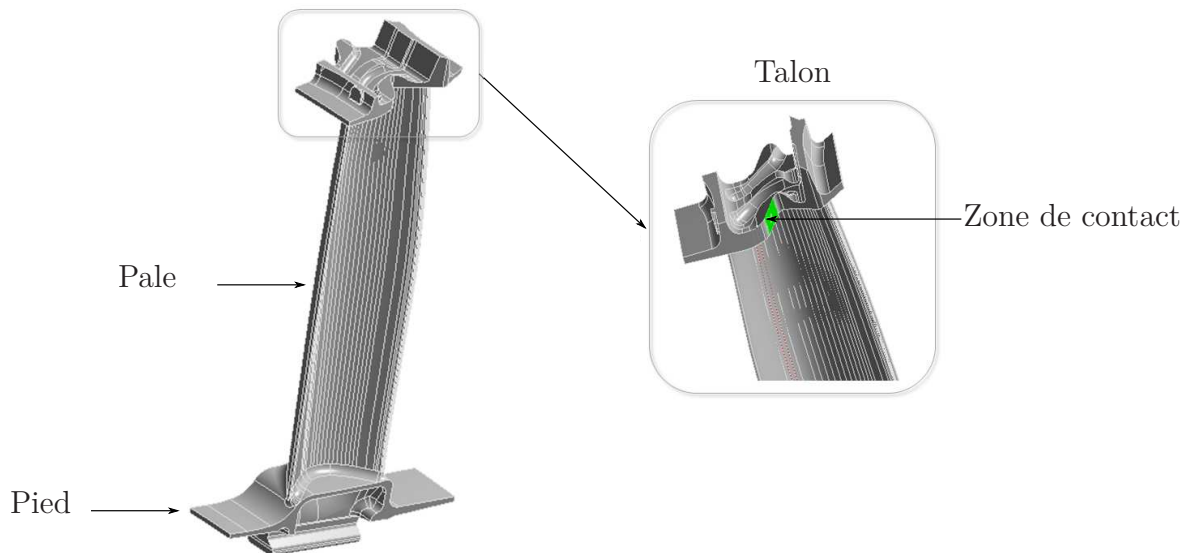


FIGURE V.19 – Modèle d'une aube de turbine BP industrielle - Zoom sur la zone de contact au niveau du talon

Nous allons particulièrement nous intéresser à la zone de contact au niveau du talon se situant en tête d'aube. Le rôle du talon dans la réponse vibratoire de la roue aubagée est de procurer un amortissement mécanique par contact des talons. L'effort de contact qui est assuré *via* le vrillage de l'aube est appelé prétorsion. La présence

de ces talons diminue le nombre de modes propres excitables d'ordre 1 de l'aube. Il y a alors moins de modes propres basse fréquence qui sont facilement excitables par un balourd. Néanmoins leur présence peut comporter certains risques vibratoires. L'un de ces risques est l'amorce de fissures par fatigue vibratoire induit par la superposition d'un chargement mécanique alterné haute fréquence. La propagation de ces fissures peut alors entraîner la perte d'une ou plusieurs aubes. L'autre risque vibratoire est l'usure des zones de contact du talon par micro-glissements dus aux résonances vibratoires. Cette usure a pour conséquence de réduire l'amortissement mécanique induit par le contact, conduisant à de grandes amplitudes de vibration. Nous étudierons donc la réponse forcée du système couplé en considérant les efforts induits par la présence du contact et du jeu entre toutes les aubes, impliquant l'introduction d'éléments non-linéaires.

Afin de prendre en considération ces non-linéarités de type contact en tête d'aube au niveau de la roue aubagée modélisée en symétrie cyclique, la démarche développée au chapitre IV en section 3.2 est utilisée. Pour cela, nous considérons que la modélisation du contact est identique pour tous les secteurs de la roue aubagée. Ainsi, un même nombre d'éléments en contact et une même raideur de contact sont choisis pour chaque secteur. Nous nous plaçons alors dans le cas de figure où la structure à symétrie cyclique présente des non-linéarités elles aussi symétriques. Il est ainsi possible de calculer la réponse de notre système couplé non-linéaire en ne considérant qu'un seul secteur de référence pour la roue aubagée. Enfin, rappelons que lors de la procédure de réduction du modèle éléments finis de la roue aubagée 3D, des ddl en tête d'aube, au niveau de la zone de contact du talon, doivent être retenus dans la base réduite de Craig & Bampton. Une fois ces ddl conservés, les efforts non-linéaires définis par les relations IV.36 et IV.37 peuvent être appliqués sur la roue aubagée.

La résolution du système dynamique non-linéaire relatif au modèle couplé industriel est réalisée dans le domaine fréquentiel en employant la méthode de balance harmonique détaillée au chapitre II en section 2.2. Comme les forces non-linéaires ont un caractère non-régulier, elles sont *a priori* inconnues dans le domaine fréquentiel. C'est pourquoi, une procédure AFT adaptée est utilisée afin de calculer ces efforts sur le secteur de référence dans le domaine temporel. Les coefficients harmoniques associés sont ensuite déterminés permettant ainsi de résoudre le système non-linéaire dans le domaine fréquentiel. Les simulations non-linéaires présentées dans la suite sont réalisées par continuation pour des excitations de type balourd BP et balourd HP.

2.3.1 Réponse non-linéaire du système couplé soumis au balourd BP

Dans un premier temps, la réponse du système couplé non-linéaire soumis au balourd BP est calculée pour une valeur de jeu de quelques microns. L'amplitude de réponse du système couplé est tracée sur la figure V.20 en fonction de la vitesse de rotation du rotor BP. Étant donné que seul le mode A répond à l'excitation de type balourd BP dans la plage de fonctionnement, un zoom de la réponse non-linéaire

du système autour du pic de résonance du mode A est présenté. L'amplitude de déplacement au niveau de la zone de contact est illustrée en figure V.20(a) et montre que lorsque le jeu est consommé, la contribution des efforts non-linéaires se traduit par une diminution de l'amplitude de vibration en tête d'aube. Le phénomène ainsi observé met en valeur le rôle amortissant des talons présents en tête d'aube.

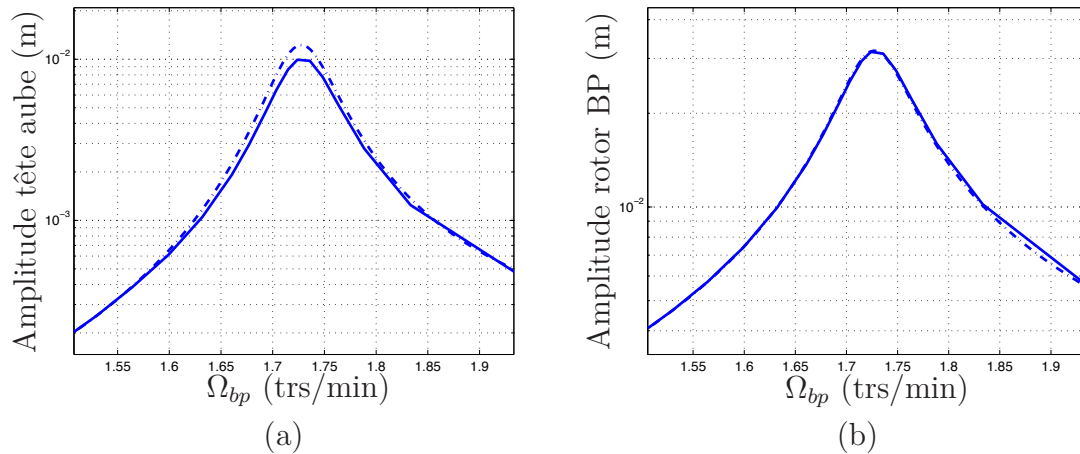


FIGURE V.20 – Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé soumis au balourd BP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [1,5 ; 2]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor BP en y_{FAN}

De plus, afin d'observer l'influence de la présence du jeu en tête d'aube sur le comportement vibratoire du système couplé et en particulier du bi-rotor, nous avons choisi de présenter sur la figure V.13(b) l'amplitude de déplacement du rotor BP à l'endroit où le balourd a été introduit en y_{FAN} . Nous remarquons que les courbes de réponse linéaire et non-linéaire se superposent pour ce mode de vibration. L'effet non-linéaire induit par la présence du contact au niveau des talons de la roue aubagée est donc peu visible pour le mode A observé. Rappelons que le déplacement des aubes pour ce premier mode de vibration est essentiellement dû au basculement du disque qui les porte. Ainsi l'énergie de déformation au niveau de la roue aubagée est très faible, ce qui explique que la réponse du système couplé en présence de non-linéarités en tête d'aube est très proche du comportement linéaire de la structure pour le mode étudié.

L'intérêt de la partie suivante est alors d'étudier la réponse du système couplé soumis au balourd HP en présence de non-linéarités. Ainsi, il sera alors possible d'observer l'influence de la présence du jeu au niveau des talons sur les autres modes de vibration, et plus particulièrement sur les modes couplés entre la vibration du bi-rotor et la vibration de la roue aubagée suivant son premier diamètre.

2.3.2 Réponse non-linéaire du système couplé soumis au balourd HP

Lors de l'analyse linéaire du système couplé, nous avons identifié quatre pics sur la courbe de réponse des aubes (*cf.* Figure V.15) associés à la vibration des modes

A, B, F et H lorsque le système était soumis à un balourd provenant du rotor HP. Afin de mieux distinguer l'influence de la prise en compte des efforts non-linéaires sur le comportement global du système couplé, les réponses non-linéaires au balourd HP sont calculées sur deux plages de vitesses de rotation.

Tout d'abord, les calculs non-linéaires ont été réalisés sur la plage de vitesses de rotation normalisée $\Omega_{bp} = [0,3; 0,6]$ trs/min, où les modes A et B sont excités par le balourd HP aux vitesses critiques $\Omega_{bp} = 0,42$ et $\Omega_{bp} = 0,52$ trs/min, respectivement. Les courbes de réponse non-linéaire illustrées en trait plein ont été calculées pour une valeur de jeu de quelques microns et sont superposées aux courbes linéaires en trait mixte. Le temps de calcul requis pour l'obtention de ces courbes non-linéaires est de $t_{CPU} = 7$ h17 min.

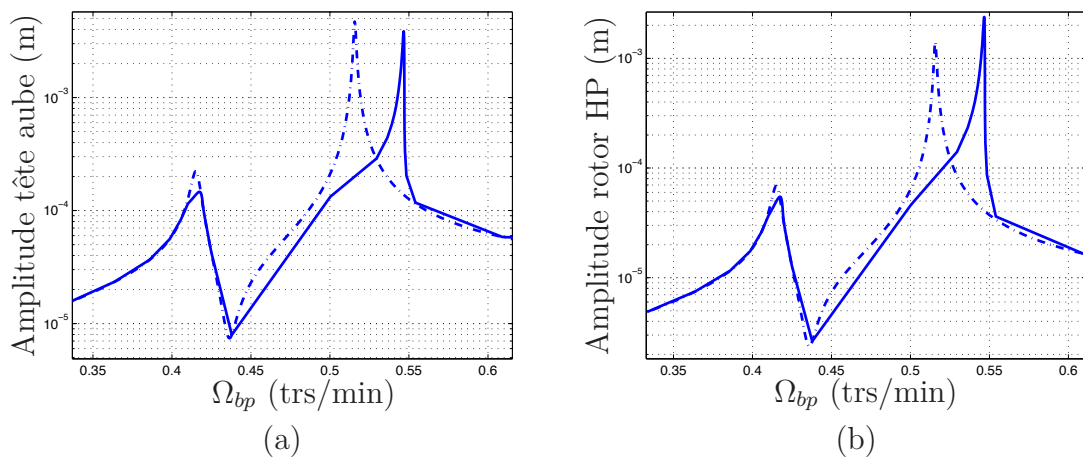


FIGURE V.21 – Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé soumis au balourd HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [0,3; 0,6]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP en y_{TuHP}

La figure V.21(a) présente l'évolution du déplacement en tête d'aube au niveau du talon en fonction de la vitesse de rotation du rotor BP. Lorsque le jeu présent au niveau des talons de la roue aubagée est consommé, la contribution des efforts non-linéaires se traduit par une diminution de l'amplitude de vibration des aubes. De plus, la distorsion des pics indique un comportement raidissant du système couplé au voisinage des résonances, lié à la présence d'une raideur de contact au niveau des talons. Cet effet raidissant se traduit par un décalage du pic de résonance vers les fréquences plus élevées, entraînant ainsi une augmentation de la vitesse critique du système couplé. Comme nous venons de le rappeler, le mode A est un mode de vibration où les aubes subissent le basculement du disque qui les porte, et où l'énergie de déformation est localisée à l'avant du moteur au niveau du disque FAN, expliquant ainsi que les effets non-linéaires sont peu visibles pour ce mode de vibration. En revanche, le mode B est un mode arrière où l'énergie de déformation est localisée dans le support-palier P5. Ce mode d'ensemble est donc naturellement couplé à la vibration de la roue aubagée suivant son premier diamètre. Par conséquent, au niveau du pic de résonance du mode B, nous distinguons clairement le rôle amortissant

des talons lors de la prise de contact et l'effet raidissant résultant de l'ajout d'une raideur de contact dans le système. Nous avons également choisi de présenter la réponse non-linéaire du système couplé au niveau du rotor HP, en l'abscisse y_{TuHP} où le balourd est positionné. La courbe de réponse du rotor HP en y_{TuHP} présente le même type d'évolution que la courbe de réponse en tête d'aube, excepté pour le pic de résonance du mode B où la prise de contact au niveau des talons implique une augmentation de l'amplitude de vibration du rotor HP. Ainsi, la présence de talons sur les aubes de la roue de turbine BP, qui avait un rôle amortissant sur la réponse des aubages, semble produire l'effet inverse sur la réponse du rotor HP. Néanmoins, l'effet raidissant induit par l'ajout d'une raideur de contact au niveau des talons est bien présent pour le mode B, impliquant ainsi une augmentation de la vitesse critique d'environ 6%.

Les calculs non-linéaires ont ensuite été réalisés sur la plage de vitesses de rotation $\Omega_{bp} = [1,3 ; 2,1]$ trs/min. Dans cette plage de vitesses, les modes F et H sont excités par le balourd HP aux vitesses critiques $\Omega_{bp} = 1,58$ et $\Omega_{bp} = 2,05$ trs/min, respectivement. Pour une même valeur de jeu, les courbes non-linéaires du système couplé ont été obtenues en un temps de calcul $t_{CPU} = 13$ h47 min et sont illustrées sur la figure V.22. De la même manière que précédemment, la réponse du système en tête d'aube ainsi que la réponse du rotor HP en y_{TuHP} sont présentées.

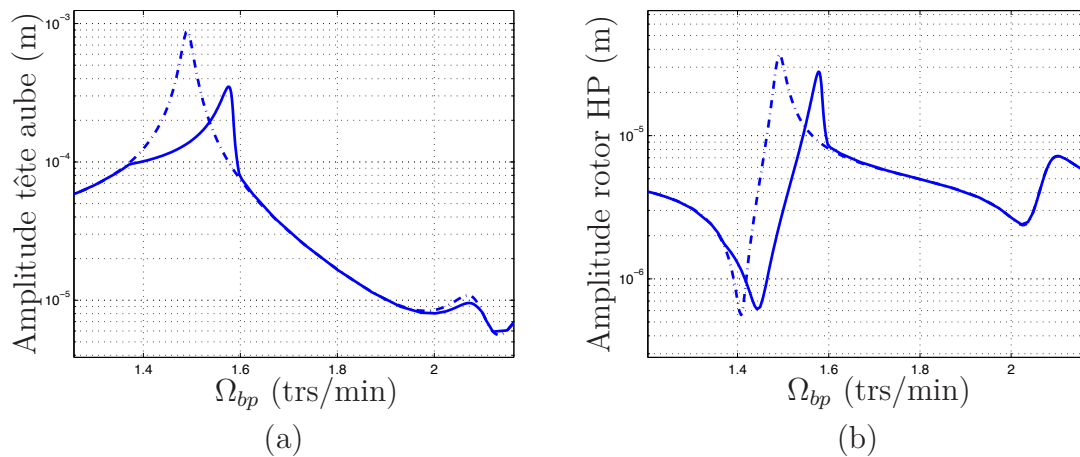


FIGURE V.22 – Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé soumis au balourd HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [1,3 ; 2,1]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP en y_{TuHP}

Lors de l'analyse linéaire, nous avons identifié le mode F comme étant un mode couplé entre la vibration du rotor BP et celle du rotor HP. De plus, les phénomènes de *locus veering* observés sur le diagramme de Campbell indiquaient que ce mode était fortement couplé à la vibration de la roue aubagée suivant son premier diamètre. Ainsi, pour ce mode de vibration, nous distinguons nettement que lorsque le déplacement du système couplé en tête d'aube est inférieur au jeu introduit, le comportement du système est linéaire et dès que le jeu est consommé, il y a un décalage du pic de résonance vers les fréquences plus élevées accompagné d'une diminution de

l'amplitude de vibration du système. Contrairement aux observations précédentes, notons que les courbes de réponse non-linéaire en tête d'aube (*cf.* Figure V.22(a)) et de réponse non-linéaire en y_{TuHP} du rotor HP (*cf.* Figure V.22(b)) présentent cette fois le même type d'évolution au cours de la montée en régime. Dans ce cas de figure, la distorsion du pic de résonance, causé par la présence de la raideur de contact au niveau des talons, implique une augmentation de la vitesse critique directe du mode F d'environ 4,5%. En ce qui concerne le mode H, qui est un mode d'arbre HP, les effets non-linéaires sont très peu visibles car la vibration de roue aubagée est négligeable pour ce mode, ce qui explique que les réponses linéaire et non-linéaire du mode H sont superposées sur la courbe de réponse du rotor HP en y_{TuHP} .

Les différentes études qui ont été menées mettent en valeur que les effets non-linéaires se manifestent différemment suivant les modes qui sont excités par les balourds. De plus, nous avons pu observer que l'amplitude de réponse des aubes de turbine BP impliquant des non-linéarités était importante en présence d'un balourd provenant du rotor HP. Le modèle qui a été développé est alors capable de déterminer les niveaux de réponse des aubes du rotor BP lorsque le système couplé est soumis à des excitations multi-fréquentielles, dans un cadre linéaire et également non-linéaire. Dans la dernière partie, nous allons nous intéresser à une nouvelle configuration de moteur contra-rotatif et montrer que les méthodes proposées sont adaptées à l'étude de différentes configurations de moteur.

3 Vers de nouvelles architectures contra-rotatives

Dans les études qui ont précédé, le système bi-rotor était composé de deux arbres BP et HP co-rotatifs. Les deux rotors connectés entre eux par un palier inter-arbre avaient alors le même sens de rotation, avec des vitesses distinctes. L'un des enjeux majeurs pour les motoristes est notamment de réduire le poids des turboréacteurs, tout en conservant leurs performances. L'une des solutions technologiques permettant d'obtenir un gain en termes de poids est de concevoir des arbres contra-rotatifs, autrement dit des arbres ayant un sens de rotation opposé, avec des vitesses distinctes. En effet, la possibilité d'avoir des arbres contra-rotatifs permettrait de supprimer un étage de redresseur, ce qui contribuerait à un allègement du stator et, par conséquent, du moteur. Néanmoins, la dynamique de ces moteurs contra-rotatifs est spécifique et doit être analysée dans un contexte où une roue aubagée est connectée au système bi-rotor. Cette dernière partie est donc consacrée à l'étude linéaire et non-linéaire d'un système couplé contra-rotatif.

3.1 Analyse linéaire du système couplé contra-rotatif

Le système couplé industriel considéré dans cette partie est choisi identique à celui décrit en section 1. La même roue de turbine BP est prise en compte dans le modèle d'ensemble, où les deux rotors BP et HP sont maintenant en configuration

de contra-rotation. Ainsi, les deux vitesses de rotation ont un signe opposé mais elles restent proportionnelles tout au long de la montée en régime, toujours dans un rapport égal à 2, 8. L'avantage de considérer la même structure est de pouvoir comparer les résultats obtenus avec ceux présentés précédemment pour le système couplé co-rotatif. Rappelons que dans le contexte où la roue aubagée est couplée à un système bi-rotor, nous nous intéressons particulièrement à la réponse des aubages de la roue de turbine BP lorsque le système couplé contra-rotatif est excité par un balourd BP ou un balourd HP.

De la même manière que pour l'étude linéaire du système couplé co-rotatif présentée en section 2.1, nous avons calculé l'évolution des fréquences propres du système couplé en configuration de contra-rotation au cours de la montée en régime. Le diagramme de Campbell ainsi obtenu est tracé dans le repère tournant \mathcal{R}_{bp} en fonction de la vitesse de rotation du rotor BP et est illustré sur la figure V.23.

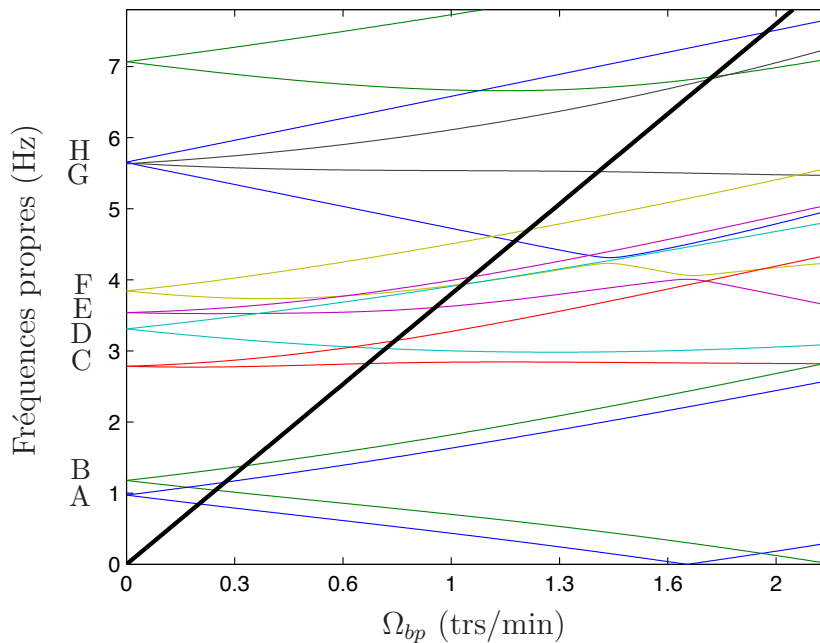


FIGURE V.23 – Diagramme de Campbell du modèle couplé contra-rotatif dans le repère tournant BP

Dans un premier temps, nous constatons que l'évolution des fréquences propres du système couplé contra-rotatif est globalement équivalente à celle des fréquences propres du même système en configuration de co-rotation (*cf.* Figure V.12). D'une part, nous retrouvons bien les modes A, B, D, F, G et H associés aux modes d'ensemble de la structure couplée. Ces modes propres sont doubles à vitesse nulle et le dédoublement fréquentiel est piloté par les effets gyroscopiques, donnant ainsi naissance à un mode de précession direct et un mode de précession rétrograde. D'autre part, les deux premiers modes propres de roue aubagée à un diamètre C et E sont également présents, illustrés en rouge et violet sur la figure V.23. Le comportement qui est observé sur ce diagramme de Campbell semble identique à celui observé sur la

figure V.12, associé au système co-rotatif. En effet, des phénomènes de *locus veering* se produisent entre les modes d'ensemble de la structure et les modes de roue aubagée à un diamètre. Ces observations nous montrent alors qu'il existe également un couplage entre la dynamique d'ensemble et la dynamique plus spécifique des roues aubagées, lorsque le système est en configuration de contra-rotation.

Dans un second temps, ce diagramme de Campbell nous fournit le placement des modes par rapport aux vitesses critiques, permettant ainsi de prédire les résonances du système couplé par rapport aux excitations synchrones du moteur. Rappelons que les excitations synchrones qui nous intéressent dans cette étude correspondent aux balourds provenant des arbres BP et HP. Les vitesses critiques directes (resp. rétrogrades) se lisent donc à l'intersection des branches des modes directs (resp. rétrogrades) et des droites d'excitation synchrones. Précisons que dans le repère d'étude \mathcal{R}_{bp} , la synchrone associée au balourd BP correspond à la droite d'équation $f = 0$, autrement dit à l'axe des abscisses sur le diagramme de Campbell. Dans la section précédente, lorsque le système couplé était en configuration de co-rotation, la synchrone associée au balourd HP correspondait à la droite d'équation $f = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$. Dans le cas présent où les deux rotors n'ont pas le même sens de rotation, la synchrone HP vue du repère BP correspond cette fois à la droite $f = \Omega_{hp} + \Omega_{bp}$, illustrée en trait noir épais sur la figure V.23. Nous avons noté que la synchrone HP ne croisait pas de modes propres de roue aubagée à un diamètre lorsque les deux rotors avaient le même sens de rotation, alors qu'en contra-rotation, la droite d'excitation $f = \Omega_{hp} + \Omega_{bp}$ croise les modes propres C et E associés à la vibration de roue de turbine BP suivant son premier diamètre. Dans cette configuration, les coïncidences sont donc modifiées et il y a un risque plus important de voir un niveau vibratoire important sur les aubes de la roue de turbine BP dû au balourd HP. De plus, la particularité majeure des systèmes contra-rotatif est que les deux rotors BP et HP n'ont pas le même sens de précession direct et rétrograde [Guskov, 2007]. Dans le repère d'étude considéré, pour le système co-rotatif, lorsqu'un mode s'ouvrait, la branche décroissante correspondait au mode direct, et la branche croissante correspondait au mode rétrograde. Ainsi, les vitesses critiques directes se lisaient à l'intersection des droites d'excitation synchrones et des branches directes des modes, à savoir les branches décroissantes. Lorsque le système est en configuration de contra-rotation, l'analyse est un peu plus délicate, car le sens de précession des deux rotors n'est pas identique. Ainsi, les vitesses critiques directes BP se lisent toujours à l'intersection des branches décroissantes associées aux modes directs et de la droite $f = 0$, alors que les vitesses critiques directes HP se lisent quant à elles à l'intersection des branches croissantes associées au modes directs et de la droite d'équation $f = \Omega_{hp} + \Omega_{bp}$. Ces nouvelles vitesses critiques identifiées sur le diagramme de Campbell sont reportées dans le tableau V.4 pour chaque excitation synchrone. Notons que comme le système est axisymétrique, seules les vitesses critiques directes sont reportées dans ce tableau, car seuls les modes directs sont supposés répondre aux excitations de type balourd. Ainsi, sur la plage de fonctionnement normalisée $\Omega_{bp} = [0; 2]$ trs/min, seul le mode A est excité

Modes	Vitesses critiques directes (trs/min)	
	Balourd BP	Balourd HP
A	1,7	0,3
B	—	0,36
C	—	0,83
D	—	1,03
E	—	1,06
F	—	1,24
G	—	1,79
H	—	1,97

TABLE V.4 – Vitesses critiques directes du système couplé contra-rotatif

par le balourd BP tandis que tous les modes identifiés par les lettres A, B, C, D, E, F, G et H sont excités par le balourd HP. L'analyse de la réponse forcée du système couplé contra-rotatif considéré soumis aux balourds BP et HP est alors une étape nécessaire à l'étude de la réponse des aubages de la roue de turbine BP, notamment lorsqu'il y a coïncidence entre les modes propres de roue aubagée et la synchrone HP.

En premier lieu, la réponse forcée du système contra-rotatif soumis au balourd BP est analysée. Comme précédemment, la même valeur de balourd a été introduite sur le disque FAN du modèle d'ensemble et l'amplitude de réponse en tête d'aube de la roue de turbine BP est illustrée sur la figure V.24.

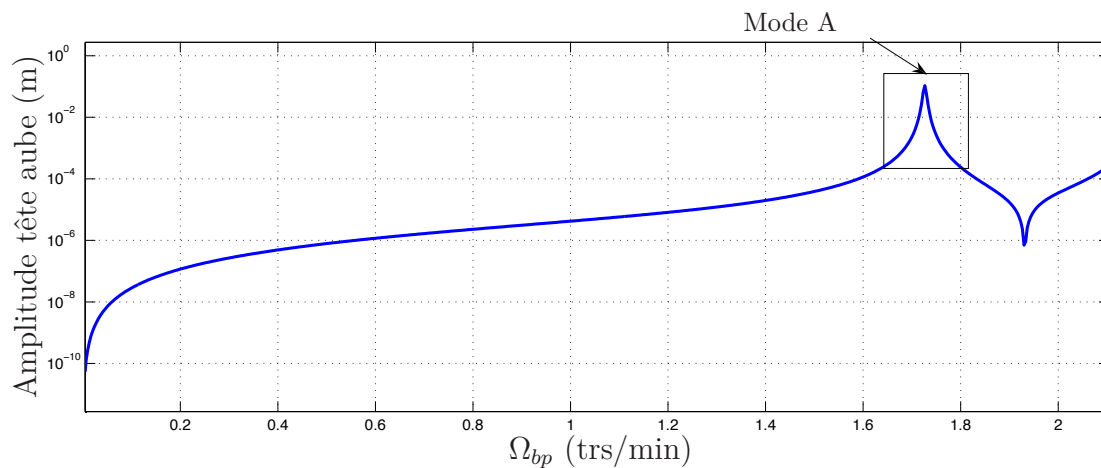


FIGURE V.24 – Réponse linéaire du système couplé contra-rotatif soumis au balourd BP - Déplacement en tête d'aube au niveau du talon

Conformément aux prédictions des vitesses critiques relevées dans le tableau V.4, le mode A est le seul à répondre à une excitation de type balourd BP à la vitesse critique $\Omega_{bp} = 1,7$ trs/min sur la plage de fonctionnement considérée. Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la position des résonances ainsi que le niveau de réponse des aubes de la roue de turbine BP sont identiques lorsque le système couplé est excité par un balourd BP dans les deux configurations étudiées, à savoir en co-

rotation (*cf.* Figure V.13) et en contra-rotation (*cf.* Figure V.24). Ces observations semblent cohérentes car le balourd BP est vu comme une force constante par le système couplé dans le repère d'étude \mathcal{R}_{bp} , quelle que soit la configuration envisagée pour les deux arbres.

En revanche, le balourd HP est quant à lui vu comme une force harmonique dans le repère lié au rotor BP et à la roue aubagée. Ainsi, afin de réaliser l'étude de la réponse forcée du système couplé, il faut également considérer les sollicitations associées à la vitesse de rotation différentielle des corps HP et BP. Dans une architecture de moteur co-rotatif, le premier harmonique du régime différentiel ($\Omega_{hp} - \Omega_{bp}$) était pris en compte dans l'étude de la réponse forcée du système. Dans le cas d'un moteur contra-rotatif, où les rotors n'ont pas le même sens de rotation, il faut maintenant considérer le premier harmonique du régime ($\Omega_{hp} + \Omega_{bp}$). Les coïncidences identifiées sur le diagramme de Campbell sont donc modifiées, car d'une part la droite d'excitation synchrone HP vue du repère BP n'a plus la même équation et d'autre part le sens de précession directe de chaque rotor est différent. Ainsi, la figure V.25 présente les niveaux de réponse en tête d'aube de la roue aubagée en fonction de la vitesse de rotation du rotor BP lorsqu'un balourd HP est introduit dans le système sur le disque TuHP du rotor HP.

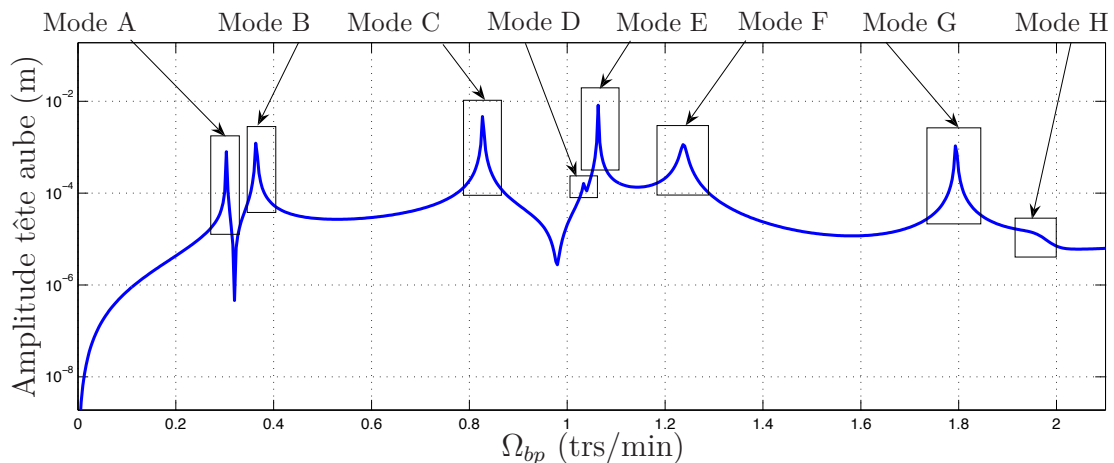


FIGURE V.25 – Réponse linéaire du système couplé contra-rotatif soumis au balourd HP - Déplacement en tête d'aube au niveau du talon

À nouveau, nous retrouvons bien huit pics de résonance aux vitesses critiques prédites par l'analyse des éléments propres du système et qui sont reportées dans le tableau V.4. Dans cette configuration de contra-rotation, tous les modes étudiés de A à H sont donc excités par le balourd HP sur la plage de fonctionnement du moteur. En général, les roues aubagées sont conçues de manière à éviter toute coïncidence avec les premiers harmoniques moteur. En co-rotation, nous n'avions détecté aucun croisement fréquentiel entre les synchrones moteur et les modes propres de roue aubagée à un diamètre. Dans la configuration d'un moteur contra-rotatif, d'architecture identique au moteur utilisé en co-rotation, ce croisement fréquentiel est bien présent entre la synchrone HP et les modes C et E.

Par conséquent, lorsque ces deux modes sont excités par le balourd HP, l'amplitude de vibration des aubes atteint son maximum sur la plage de vitesses de rotation considérée (*cf.* Figure V.25). Les niveaux de réponse d'un tel système couplé sont des informations essentielles lors des phases de pré-conception des moteurs, permettant ainsi de s'assurer de la tenue mécanique des pièces, en particulier des aubages, pour une architecture de moteur contra-rotatif.

L'analyse linéaire du système couplé contra-rotatif a permis de montrer que l'outil numérique développé, basé sur la méthode de couplage détaillée au chapitre IV, était adapté à l'étude de différentes configurations de moteur. Les courbes de réponse à balourd nous ont confirmé que les modes propres de roue aubagée à un diamètre sont excités par le balourd HP lorsque les deux rotors ont un sens de rotation opposé. Ces courbes de réponse confirment également que les deux rotors n'ont pas le même sens de précession, à savoir les branches croissantes des modes sur le diagramme de Campbell sont associées au sens précession direct du rotor HP et les branches décroissantes des modes sont associées au sens de précession direct du rotor BP. Pour finir, la dernière partie est dédiée à l'étude du comportement du système couplé contra-rotatif en présence de non-linéarités de type contact au niveau des talons de la roue aubagée.

3.2 Étude du comportement non-linéaire

De la même manière que précédemment, les simulations non-linéaires présentées dans cette partie sont réalisées par continuation dans le domaine fréquentiel, avec l'évaluation des efforts non-linéaires au niveau des talons réalisée dans le domaine temporel. Étant donné que l'amplitude de réponse des aubes de turbine BP est plus importante dans cette configuration de contra-rotation, nous avons opté pour l'introduction d'un jeu moins serré au niveau des talons de la roue aubagée, à savoir de l'ordre de dix microns. En revanche, la raideur de contact prise en compte dans les études non-linéaires est identique à celle considérée pour le système co-rotatif. L'objectif de cette dernière partie est alors de fournir une première analyse du comportement du système couplé contra-rotatif en considérant les non-linéarités de contact en tête d'aube pour des excitations de type balourd provenant du rotor BP puis du rotor HP.

3.2.1 Réponse non-linéaire du système contra-rotatif soumis au balourd BP

Tout d'abord, la réponse du système non-linéaire soumis au balourd BP est analysée. Rappelons que dans la plage de fonctionnement étudiée $\Omega_{bp} = [0 ; 2]$ trs/min, seul le premier mode d'ensemble A est excité par le balourd BP suivant sa branche directe, à la vitesse critique $\Omega_{bp} = 1,7$ trs/min (*cf.* Figure V.24). Ainsi, la figure V.26 présente l'évolution du comportement non-linéaire du système contra-rotatif en fonction de la vitesse de rotation du rotor BP, autour du pic de résonance du mode A,

sur la plage $\Omega_{bp} = [1,4; 2]$ trs/min.

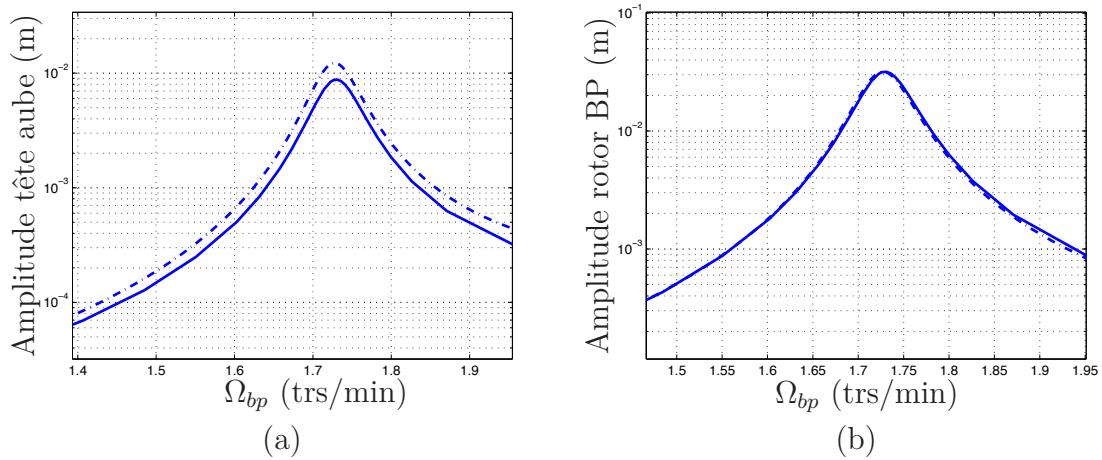


FIGURE V.26 – Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé contra-rotatif soumis au balourd BP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [1,4; 2]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d’aube, (b) Déplacement du rotor BP en y_{FAN}

L’évolution du déplacement au niveau de la zone de contact en tête d’aube est illustrée sur la figure V.26(a) et met en évidence le rôle amortissant des talons présents en tête d’aube. En effet, la contribution des efforts non-linéaires sur la courbe de réponse tracée en trait plein se traduit par une diminution de l’amplitude de vibration en tête d’aube par rapport à la courbe de réponse linéaire, illustrée en trait mixte. Par ailleurs, l’amplitude de déplacement du rotor BP en y_{FAN} est également présentée sur la figure V.26(b), et montre que les effets non-linéaires induits par la présence du contact en tête d’aube sont très peu visibles. Par rapport aux résultats obtenus en section 2.3 pour le système co-rotatif, le même type de comportement non-linéaire est observé, à savoir une légère diminution d’amplitude de vibration au niveau de la zone de contact et un comportement presque linéaire au niveau du rotor BP pour le mode A étudié. Enfin, notons également que le temps de calcul requis pour l’obtention de ces courbes non-linéaires est de $t_{CPU} = 3$ h19 min, ce qui est du même ordre de grandeur que celui associé aux calculs non-linéaires réalisés pour le système co-rotatif.

3.2.2 Réponse non-linéaire du système contra-rotatif soumis au balourd HP

La réponse du système contra-rotatif avec la prise en compte du jeu au niveau des talons va maintenant être étudiée avec une excitation de type balourd HP. Contrairement à la réponse du système au balourd BP, l’analyse linéaire du système contra-rotatif a montré que les coïncidences étaient modifiées lorsque les deux rotors n’avaient pas le même sens de rotation. En co-rotation, l’analyse linéaire du système couplé avait permis d’identifier quatre pics de résonances sur la plage de fonctionnement considérée. Dans la configuration de contra-rotation, l’étude des

éléments propres du système couplé a montré que les huit modes identifiés par les lettres A à H étaient excités par le balourd HP dans la même plage de fonctionnement. Parmi tous les modes qui sont excités par le balourd HP, nous retrouvons notamment des modes de vibration de roue aubagée à un diamètre, identifiés par les lettres C et E. L'objectif de cette dernière partie est alors d'observer l'influence de la présence du jeu au niveau des talons sur les modes de vibration du système couplé contra-rotatif, en particulier sur les modes de vibration de roue aubagée à un diamètre. Afin de mieux distinguer les effets non-linéaires sur le comportement global du système dans la plage de fonctionnement, les résultats sont présentés sur trois plages de vitesses de rotation.

La figure V.27 illustre d'abord la réponse non-linéaire du système sur la plage de vitesses de rotation $\Omega_{bp} = [0,2 ; 0,4]$ trs/min, où les modes A et B sont excités par le balourd HP aux vitesses critiques $\Omega_{bp} = 0,3$ et $\Omega_{bp} = 0,36$ trs/min, respectivement. Les courbes de réponse non-linéaire illustrées en trait plein ont été obtenues en un temps de calcul $t_{CPU} = 6$ h42 min et sont superposées aux courbes linéaires en trait mixte. Le balourd HP a été introduit au niveau du disque TuHP du rotor HP et la réponse du système non-linéaire est présentée en tête d'aube au niveau de la zone de contact et en y_{TuHP} au niveau du rotor HP sur les figures V.27(a) et V.27(b).

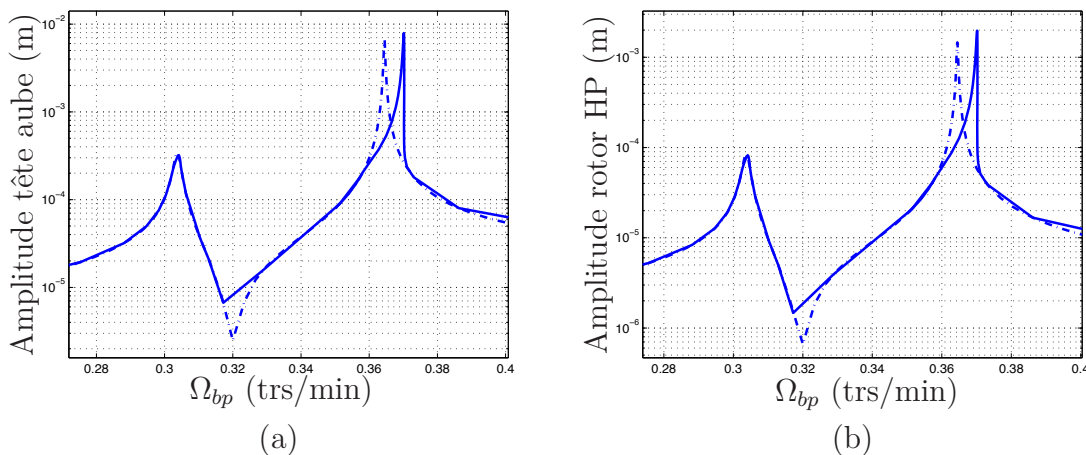


FIGURE V.27 – Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé contra-rotatif soumis au balourd HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [0,2 ; 0,4]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP en y_{TuHP}

De manière générale, nous observons la contribution des efforts non-linéaires lorsque que le jeu présent au niveau des talons de la roue aubagée est consommé. Pour la valeur de jeu qui est considérée dans cette étude, de l'ordre de dix microns, le comportement du système au voisinage du pic de résonance du mode A est linéaire. En revanche, en ce qui concerne le mode B qui est un mode d'ensemble couplé à la vibration de roue aubagée, nous distinguons clairement les effets non-linéaires qui se traduisent par un décalage du pic de résonance vers les fréquences plus élevées. L'effet raidissant observé à la fois en tête d'aube mais aussi au niveau du rotor HP est induit par l'ajout d'une raideur de contact dans le système et a pour conséquence

une augmentation de la vitesse critique de l'ordre de 1,6%.

Dans un second temps, les calculs non-linéaires ont été réalisés sur la plage de vitesses de rotation $\Omega_{bp} = [0,6 ; 1,6]$ trs/min. Dans cette plage de vitesses, l'analyse linéaire nous a permis d'identifier que les modes C, D, E et F étaient excités par le balourd HP aux vitesses critiques $\Omega_{bp} = 0,83$, $\Omega_{bp} = 1,03$, $\Omega_{bp} = 1,06$ et $\Omega_{bp} = 1,24$ trs/min, respectivement. Les courbes de réponse non-linéaire en tête d'aube et au niveau du rotor HP calculées dans la plage de vitesses considérée sont illustrées sur la figure V.28 et ont été obtenues en un temps de calcul $t_{CPU} = 18$ h56 min.

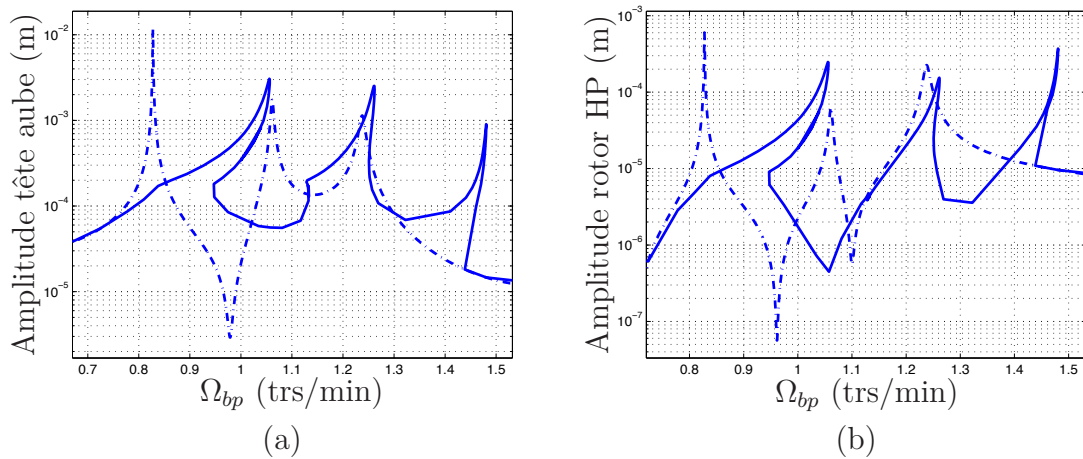


FIGURE V.28 – Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé contra-rotatif soumis au balourd HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [0,6 ; 1,6]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP en y_{TuHP}

Rappelons que généralement, les roues aubagées sont conçues de manière à éviter toute coïncidence avec les premiers harmoniques moteur, ce qui était vérifié avec le système co-rotatif. Dans cette nouvelle configuration de moteur contra-rotatif, de même architecture que le moteur co-rotatif, les deux premiers modes propres de roue aubagée C et E sont excités par le balourd HP. Ainsi, sur la figure V.28, nous distinguons trois pics de résonance dans la plage de vitesses étudiée. Les deux premiers pics de résonance sont associés à la vibration des modes C et E de roue aubagée et le troisième pic de résonance correspond à la vibration du mode F, qui avait été identifié comme étant un mode fortement couplé entre la vibration du bi-rotor et la vibration de la roue aubagée suivant son premier diamètre. Notons que sur les courbes de réponse non-linéaire présentées, nous ne distinguons pas de pic de résonance associé au mode D, car l'amplitude de vibration en tête d'aube et au niveau du rotor HP est très faible pour ce mode de vibration. Lorsque le jeu considéré au niveau des talons de la roue aubagée est consommé, nous remarquons que le comportement du système pour les trois modes de vibration observés est fortement non-linéaire. Les effets non-linéaires se traduisent par une diminution de l'amplitude de vibration en tête d'aube (*cf.* Figure V.28(a)) et une distorsion des pics de résonance. Cette distorsion des pics de résonance, causé par la présence d'une raideur de contact en tête d'aube, implique une augmentation de la vitesse critique

de l'ordre de 21% pour le mode C, et de l'ordre de 16% pour les modes E et F. Enfin, précisons que les effets non-linéaires sont observés localement, au niveau de la zone de contact, mais également sur le comportement global du système couplé, notamment au niveau du rotor HP (*cf.* Figure V.28(b)).

Enfin, les simulations non-linéaires ont été réalisées sur la plage de vitesses de rotation $\Omega_{bp} = [1,6 ; 2,1]$ trs/min et les résultats qui ont été obtenus en un temps de calcul $t_{CPU} = 6$ h50 min sont présentés en figure V.29. Dans cette plage de vitesses, les modes G et H sont excités par le balourd HP aux vitesses critiques $\Omega_{bp} = 1,79$ et $\Omega_{bp} = 1,97$ trs/min, respectivement. De la même manière que précédemment, la réponse du système en tête d'aube ainsi que la réponse du rotor HP en y_{TuHP} sont présentées.

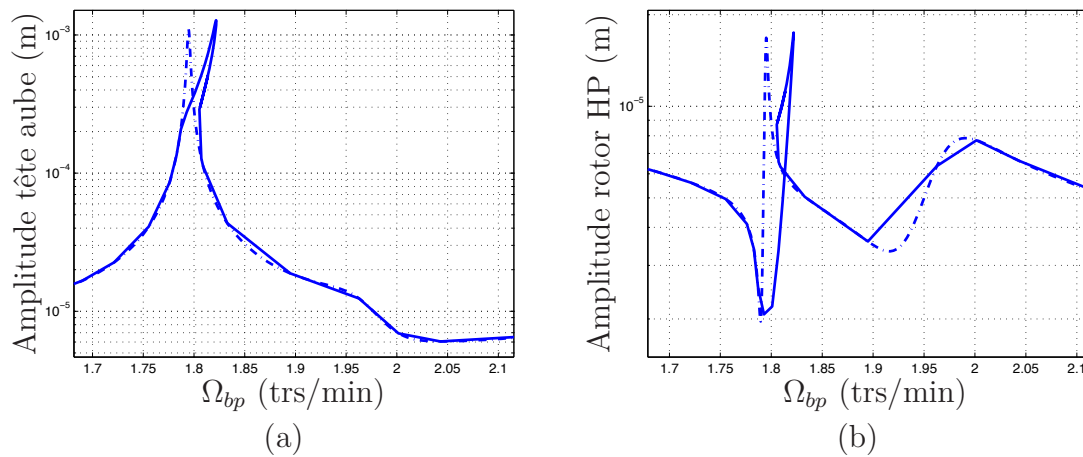


FIGURE V.29 – Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé contra-rotatif soumis au balourd HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [1,6 ; 2,1]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP en y_{TuHP}

Lors de l'analyse linéaire du système, nous avons identifié le mode G comme étant un mode d'arbre BP, où l'énergie de déformation était localisée dans le rotor BP. Ainsi, pour ce mode de vibration, associé au premier pic de résonance dans la dernière plage de vitesses considérée, lorsque le déplacement du système couplé est inférieur au jeu introduit, le comportement du système est linéaire et dès que le jeu est consommé, nous observons un décalage du pic de résonance vers les fréquences plus élevées. Notons que les courbes de réponse non-linéaire en tête d'aube (*cf.* Figure V.29(a)) et de réponse non-linéaire du rotor HP en y_{TuHP} (*cf.* Figure V.29(b)) présentent le même décalage du pic de résonance entraînant alors une augmentation de la vitesse critique du mode G de l'ordre de 3%. En ce qui concerne le mode H, qui était identifié comme étant un mode d'arbre HP, les effets non-linéaires liés à la présence du contact en tête d'aube sont très peu visibles car l'énergie de déformation est localisée dans le rotor HP pour ce mode de vibration, expliquant ainsi que les réponses linéaire et non-linéaire sont superposées.

Les différentes études qui ont été présentées pour le système couplé contra-rotatif ont donc permis de confirmer qu'il y avait un risque plus important de voir des

niveaux vibratoires sur les aubes de turbine BP lorsque le système était soumis à un balourd HP.

4 Conclusion

Ce dernier chapitre s'est intéressé à l'application de la méthode de couplage développée au chapitre IV à une structure industrielle. La première partie du chapitre est dédiée à la présentation du modèle industriel reposant sur un modèle simplifié de bi-rotor et un modèle éléments finis d'une roue de turbine BP. Tout d'abord, le modèle bi-rotor industriel a été mis en donnée avec les outils qui ont été développés au chapitre III, et le modèle obtenu a été recalé par rapport aux déformées propres et au diagramme de Campbell associés au modèle industriel. Une fois le modèle d'ensemble obtenu et validé, les procédures de réduction ont été appliquées au modèle éléments finis de la roue de turbine BP. Les études qui ont été menées ont notamment permis de valider l'étape de réduction du modèle de secteur de référence de la roue de turbine BP. Par la suite, le modèle réduit de roue aubagée a été connecté au modèle d'ensemble, suivant les étapes qui ont été décrites dans le précédent chapitre. L'analyse linéaire du système couplé industriel composé d'un système bi-rotor et d'une roue de turbine BP nous a permis de mettre en évidence des couplages entre la dynamique d'ensemble et la dynamique de la roue aubagée. Le modèle qui a été construit a également permis de rendre compte du niveau de réponse des aubes de turbine BP en présence d'un balourd provenant du rotor HP. Afin de confirmer notre analyse des résultats obtenus dans un cadre linéaire, un modèle couplé équivalent reposant sur des aubes modélisées par des poutres a été construit. La comparaison des principaux résultats linéaires entre les deux modèles a donc permis de confirmer l'existence du couplage entre la dynamique d'ensemble et la dynamique plus spécifique de la roue aubagée. Le modèle industriel a ensuite été enrichi, en considérant les efforts de contact naturellement présents au niveau des talons de chaque aube de turbine BP. Le modèle qui a été développé a permis de déterminer les niveaux de réponse des aubages du rotor BP lorsque le système couplé non-linéaire était soumis à des excitations multi-fréquentielles. Enfin, la dernière partie de ce chapitre a été consacrée à l'étude d'une même architecture de moteur en configuration de contra-rotation. Les particularités de la dynamique des moteurs contra-rotatifs ont d'abord été analysées dans un cadre linéaire. Les résultats obtenus pour cette nouvelle architecture de moteur ont notamment montré qu'il y avait un risque plus important de voir des niveaux vibratoires sur les aubes de la roue de turbine BP en présence d'un balourd HP. Enfin, les études non-linéaires menées sur ce modèle couplé contra-rotatif ont mis en valeur un comportement fortement non-linéaire, notamment lorsque le balourd HP excitait des modes propres de roue aubagée à un diamètre.

Ce chapitre a donc permis de montrer que la méthode de couplage proposée était adaptée à l'étude de différentes configurations de moteur et surtout efficace en termes de temps de calcul. En effet, elle a permis d'obtenir les réponses non-linéaires d'un

système couplé industriel sur toute une plage de fonctionnement en un temps de calcul inférieur à la journée.

Conclusion et perspectives

Dans cette étude réalisée en collaboration avec la société SNECMA du groupe SAFRAN, nous nous sommes intéressés au couplage entre la dynamique d'ensemble des moteurs d'avion et la dynamique plus spécifique des roues aubagées, avec la prise en compte de différentes non-linéarités, naturellement présentes dans les turboréacteurs.

Dans un premier temps, un modèle couplé simplifié de bi-rotor aubagé a été développé dans le repère tournant lié au rotor BP et à la roue aubagée. Le modèle bi-rotor composé d'un rotor BP et d'un rotor HP a été représenté par des équivalents poutres - masses - ressorts. La roue aubagée considérée dans ce modèle simplifié a quant à elle été modélisée par des aubes souples de type poutre en flexion encastées sur le disque rigide correspondant à la turbine du rotor BP. La prise en compte des effets gyroscopiques, d'assouplissement centrifuge et de précontrainte centrifuge dans la formulation analytique du modèle a permis d'avoir une description complète des phénomènes physiques présents dans le système en rotation. L'analyse des éléments propres de ce système couplé a mis en évidence une première interaction entre la dynamique des aubes et celle du bi-rotor au travers de couplages de modes. Ce modèle présente également l'avantage de pouvoir étudier la réponse des aubes lorsque le système est soumis à un balourd provenant du rotor BP, mais aussi un balourd provenant du rotor HP. Ainsi, l'analyse de la réponse à balourd a permis de souligner la nécessité de prendre en considération le balourd HP dans l'analyse, car il excite des modes propres où les aubes vibrent suivant leur premier diamètre dans la plage de fonctionnement étudiée.

Par la suite, le jeu radial au niveau des roulements a été pris en compte afin d'enrichir le modèle développé. Parmi les modèles existants dans la littérature, c'est un modèle de roulement à raideur radiale linéaire par morceaux qui a été retenu. L'obtention de solutions dynamiques du système comportant des non-linéarités a alors nécessité l'introduction de méthodes de résolution adaptées, capables de traiter ces non-linéarités fortes et non-régulières. Diverses méthodes de calcul dédiées à la recherche de solutions périodiques d'un système non-linéaire ont été exposées, que ce soit dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Comme les méthodes fréquentielles se sont avérées plus efficaces en termes de temps de calcul, la méthode de balance harmonique couplée à une technique de continuation *arc-length* a été mise en œuvre afin d'analyser le comportement vibratoire du système non-linéaire.

Néanmoins, les forces non-linéaires de contact considérées au niveau des paliers sont de nature non-régulières et sont explicitement exprimées dans le domaine temporel. Une stratégie d'alternance temps/fréquence a alors été introduite afin d'évaluer ces efforts dans le domaine temporel, en conservant la résolution du système non-linéaire dans le domaine fréquentiel.

L'objectif des études qui ont été menées était de déterminer les niveaux de réponse du système couplé lorsqu'il était sujet à une excitation multi-fréquentielle provenant des balourds BP et HP simultanément. Afin d'y parvenir, nous avons montré que dans le repère d'étude considéré, repère tournant lié au rotor BP, il était possible d'analyser le comportement dynamique non-linéaire du système à l'aide d'une méthode de balance harmonique mono-fréquentielle, en considérant $\omega = \Omega_{hp} - \Omega_{bp}$ comme harmonique fondamentale. Ainsi, différentes simulations non-linéaires engageant à la fois un balourd BP et un balourd HP ont pu être menées efficacement, sans avoir à recourir à des méthodes multi-fréquentielles, de type MHBM [Guskov, 2007], plus coûteuses. Les résultats obtenus ont mis en évidence une diminution d'amplitude de la réponse au niveau des paliers lorsque le jeu était consommé ainsi qu'un effet raidissant de la courbe de réponse non-linéaire au voisinage des résonances, impliquant une augmentation des vitesses critiques du système. Ces phénomènes non-linéaires ont été observés à la fois localement au niveau des paliers mais également au niveau des aubes, montrant alors une forte interaction dynamique entre les différents organes du moteur. Ces simulations ont également permis de confirmer l'efficacité, en termes de coût numérique, des méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel qui ont été choisies.

Ce premier modèle simplifié a permis d'appréhender la dynamique non-linéaire d'un bi-rotor aubagé soumis à des excitations multi-fréquentielles et a mis en évidence certains couplages entre la dynamique d'un ensemble bi-rotor et celle d'une roue aubagée. Néanmoins, les modèles poutres se sont avérés insuffisants pour une description fine de la dynamique des roues aubagées. Un deuxième volet de modélisation a donc été consacré à la mise en place d'une méthode de couplage entre un modèle 3D éléments finis de roue aubagée et un modèle simplifié de bi-rotor. Dans l'objectif de conserver des temps de calcul raisonnables, la première étape de la procédure de couplage proposée a été de mettre en place une stratégie permettant de réduire la taille du modèle 3D de roue aubagée, impliquant souvent un très grand nombre de degrés de liberté. Le premier niveau de réduction s'est basé sur les propriétés de symétrie cyclique de la structure, permettant de ne modéliser qu'un seul secteur de référence de la roue complète. Puis, le deuxième niveau de réduction du modèle a fait appel à des méthodes de synthèse modale, réduisant ainsi considérablement la taille du modèle tout en conservant la richesse d'un modèle éléments finis 3D. Une fois le modèle réduit de roue aubagée obtenu, les différentes étapes de la démarche proposée, pour connecter le secteur réduit de roue aubagée au modèle simplifié de bi-rotor, ont été détaillées. Afin de valider la démarche présentée, un cas-test simple a été conçu pour se rapprocher de la géométrie des aubes de type poutre. Les principaux résultats linéaires obtenus avec ce cas-test de validation ont

ainsi pu être comparés à ceux obtenus avec le précédent modèle développé. Une très bonne corrélation a été constatée entre les deux systèmes étudiés, ce qui nous a permis de valider la démarche proposée dans un cadre linéaire.

Par ailleurs, étant donné que la roue aubagée considérée dans cette étude impliquait des non-linéarités de type contact au niveau des talons, une approche adaptée a été développée afin de prendre en considération ces efforts non-linéaires sur le modèle réduit de roue aubagée. Les développements se sont basés sur les propriétés de symétrie cyclique des non-linéarités permettant ainsi de ne conserver qu'un seul secteur de référence dans l'étude du comportement non-linéaire du système couplé sous excitation multi-harmonique. Les simulations non-linéaires réalisées sur le cas-test de validation ont à nouveau été comparées à celles du modèle couplé simplifié et nous ont permis de conclure sur la validité de la prise en compte des efforts non-linéaires sur le secteur réduit de roue aubagée. Les études menées sur ce cas-test nous ont également permis de montrer que les coûts de calcul pour l'obtention de courbes non-linéaires étaient raisonnables, à savoir de l'ordre de quelques heures.

Enfin, les méthodes et procédures développées ont été appliquées à un modèle de moteur industriel. Nous nous sommes particulièrement intéressés à la dynamique non-linéaire d'une roue de turbine BP en intégrant la dynamique de l'intégralité de la machine, ce qui n'avait pas été rendu possible auparavant. Les études linéaires et non-linéaires ont tout d'abord été menées sur une configuration de moteur co-rotatif et ont permis de rendre compte du niveau de réponse des aubes de turbine BP en présence d'un balourd provenant du rotor HP. Les courbes de réponses non-linéaires ont été calculées sur toute la plage de fonctionnement moteur et ont été obtenues en un temps de calcul inférieur à la journée. Des simulations ont également été réalisées pour une configuration de moteur contra-rotatif, relativement peu discutées dans la littérature. Les résultats obtenus pour cette nouvelle architecture de moteur ont montré qu'il y avait un risque plus important de voir des niveaux vibratoires élevés sur les aubes de la roue de turbine BP en présence d'un balourd HP. L'outil numérique développé s'est donc avéré apte à traiter des modèles satisfaisant à la finesse de description requise dans un contexte industriel. La méthode conçue permet d'établir des prédictions et analyses de la dynamique d'ensemble d'un modèle riche du moteur en cours de conception, tout en respectant les contraintes fortes de délais pour l'obtention des résultats.

Les travaux menés dans cette thèse ont ainsi abouti un outil numérique capable de simuler le comportement dynamique d'un ensemble bi-rotor couplé à un secteur réduit de roue aubagée impliquant des non-linéarités. Cet outil est actuellement en cours d'industrialisation au sein de SNECMA et pourra être utilisé par le concepteur désireux de prédire les niveaux vibratoires des roues aubagées en considérant l'influence de l'intégralité du moteur.

Ces résultats ouvrent de nouvelles perspectives de recherche, qui résident principalement dans l'amélioration du modèle développé, les aspects méthodologiques

étant robustes. Tout d'abord, une des premières suites à donner à ce travail serait d'améliorer la modélisation de la roue de turbine BP en introduisant des descriptions plus sophistiquées de contact, avec la prise en compte du frottement au niveau des talons. L'évolution du modèle non-linéaire permettrait notamment de représenter les différentes conditions de contact, à savoir l'état collé, l'état glissant ainsi que le décollement entre deux talons voisins [Siewert *et al.*, 2010]. L'introduction de lois de frottement de type loi de Coulomb nécessiterait alors une connaissance précise des coefficients de frottement à considérer dans les modèles, qui pourraient par exemple être déterminés lors d'essais partiels réalisés au sein de SNECMA.

Le rôle des talons dans la réponse vibratoire de la roue aubagée est de procurer un amortissement mécanique par contact entre les têtes d'aube. Néanmoins, leur présence peut également comporter certains risques vibratoires, liés notamment à l'usure. En effet, l'usure des zones de contact en tête d'aube aurait pour conséquence de réduire l'amortissement mécanique induit par le contact, conduisant alors à de grandes amplitudes de vibration. Dans ce contexte, il serait alors intéressant de considérer l'usure des surfaces en contact lors de l'évolution du comportement dynamique du système. De récents travaux ont notamment proposé une méthode multi-échelle en temps permettant de calculer la cinétique d'usure au cours de l'évolution de la dynamique du système [Salles, 2010].

L'introduction de ces modèles plus évolués de roue de turbine BP dans un modèle d'ensemble bi-rotor permettrait d'avoir une description plus fine du comportement vibratoire des aubages en présence d'une excitation multi-fréquentielle, et ainsi de mieux reproduire certains phénomènes observés. Par ailleurs, dans le contexte où la roue aubagée est connectée au modèle bi-rotor, il serait intéressant d'étudier le comportement de la structure couplée en considérant plusieurs types de non-linéarités. Le modèle qui a été développé permettrait de prendre en compte à la fois le jeu radial au niveau des paliers ainsi que les non-linéarités propres à la roue aubagée, comme par exemple le contact frottant au niveau des talons ou encore le contact au niveau de l'attache aube-disque. Le comportement deviendrait alors fortement non-linéaire, avec un grand nombre d'éléments en contact, et nécessiterait alors une optimisation des routines de calcul dans le domaine fréquentiel afin d'être toujours traité dans des temps compétitifs.

Enfin, une dernière voie d'amélioration serait de considérer non plus une roue aubagée mais tous les étages mobiles de la turbine BP. Dans la continuité de la modélisation de la roue aubagée en symétrie cyclique, tous les étages mobiles de la turbine BP pourraient être modélisés par une approche de symétrie cyclique multi-étage [Laxalde *et al.*, 2007]. La méthode de réduction en symétrie cyclique multi-étage proposée par Laxalde permettrait de modéliser l'ensemble de la turbine BP par un « super-secteur » défini par les secteurs élémentaires de chaque étage et les couplages inter-étages associés. Après la définition de ce super-secteur, il serait alors possible de connecter tous les étages de la turbine BP au système bi-rotor avec la méthode proposée dans ces travaux. L'approche multi-étage qui s'est avérée performante, en termes de coût numérique, permettrait de s'approcher d'un mo-

dèle complet, multi-rotors et multi-étages comportant des non-linéarités, tout en conservant des coûts de calculs maîtrisés.

Bibliographie

- [Allgower et Georg, 2003] ALLGOWER, E. L. et GEORG, K. (2003). *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Springer-Verlag.
- [Benfield et Hruda, 1971] BENFIELD, W. A. et HRUDA, R. F. (1971). Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA Journal*, 9(7):1255 – 1261.
- [Blair *et al.*, 1997] BLAIR, K. B., KROUSGRILL, C. M. et FARRIS, T. N. (1997). Harmonic balance and continuation techniques in the dynamic analysis of duffing's equation. *Journal of Sound and Vibration*, 202(5):717 – 731.
- [Bobillot, 2002] BOBILLOT, A. (2002). *Méthodes de réduction pour le recalage. Application au cas d'Ariane 5*. Thèse de doctorat, École Centrale de Paris.
- [Cameron et Griffin, 1989] CAMERON, T. M. et GRIFFIN, J. H. (1989). An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1):149–154.
- [Cardona *et al.*, 1998] CARDONA, A., LERUSSE, A. et GÉRADIN, M. (1998). Fast fourier nonlinear vibration analysis. *Computational Mechanics*, 22:128–142. 10.1007/s004660050347.
- [Charleux, 2006] CHARLEUX, D. (2006). *Etude de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.
- [Chen et Menq, 2001] CHEN, J. J. et MENQ, C. H. (2001). Periodic response of blades having three-dimensional nonlinear shroud constraints. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(4):901–909.
- [Cheung *et al.*, 1990] CHEUNG, Y. K., CHEN, S. H. et LAU, S. L. (1990). Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems. *Journal of Sound and Vibration*, 140(2):273 – 286.
- [Childs, 1993] CHILDS, D. W. (1993). *Turbomachinery rotordynamics - Phenomena, modeling and analysis*. Wiley.
- [Choi et Noah, 1987] CHOI, Y. S. et NOAH, S. T. (1987). Nonlinear steady state response of a rotor-support system. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 109:255 – 261.
- [Cochelin et Vergez, 2009] COCHELIN, B. et VERGEZ, C. (2009). A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324(1-2):243 – 262.

- [Cooley et Tukey, 1965] COOLEY, J. W. et TUKEY, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90):297 – 301.
- [Coudeyras, 2009] COUDEYRAS, N. (2009). *Analyse non-linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.
- [Coudeyras *et al.*, 2009] COUDEYRAS, N., SINOUE, J.-J. et NACIVET, S. (2009). A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : The constrained harmonic balance method, with application to disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 319(3-5):1175 – 1199.
- [Craig et Bampton, 1968] CRAIG, R. R. et BAMPION, M. C. C. (1968). Coupling of structures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7):1313 – 1319.
- [Craig et Chang, 1976] CRAIG, R. R. et CHANG, C.-J. (1976). Free-interface methods of substructures coupling for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 14(11):1633 – 1635.
- [Demailly, 2003] DEMAILLY, D. (2003). *Étude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel. Application à la dynamique rotor*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.
- [Dormand et Prince, 1980] DORMAND, J. R. et PRINCE, P. J. (1980). A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1):19 – 26.
- [Ehrich, 1992] EHRICH, F. (1992). Observations of subcritical superharmonic and chaotic response in rotordynamics. *Journal of Vibration and Acoustics*, 114(1):93–100.
- [Ehrich, 1999] EHRICH, F. F. (1999). *Handbook of Rotordynamics*. Krieger Publishing Co.
- [Ewins, 2000] EWINS, D. J. (2000). *Modal Testing : Theory, Practice and Application*. Research Studies Press, Ltd.
- [Fletcher, 2000] FLETCHER, R. (2000). *Practical methods of optimization, second edition*. John Wiley & Sons,.
- [Fridrici, 2002] FRIDRICI, V. (2002). *Fretting d'un alliage de titane revêtu et lubrifié : application au contact aube/disque*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.
- [Ganesan, 1997] GANESAN, R. (1997). Nonlinear vibrations and stability of a rotor-bearing system with nonsymmetric clearances. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119(2):418–424.
- [Genta, 1988] GENTA, G. (1988). Whirling of unsymmetrical rotors : A finite element approach based on complex co-ordinates. *Journal of Sound and Vibration*, 124(1):27 – 53.
- [Géradin et Rixen, 1993] GÉRADIN, M. et RIXEN, D. (1993). *Théorie des Vibrations, Application à la dynamique des structures*. Masson.

- [Gmür, 1997] GMÜR, T. (1997). *Dynamique des structures. Analyse modale numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- [Groll et Ewins, 2001] GROLL, G. V. et EWINS, D. (2001). The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, 241(2):223 – 233.
- [Guskov, 2007] GUSKOV, M. (2007). *Dynamique non-linéaire des systèmes multi-rotors*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.
- [Guskov et al., 2008] GUSKOV, M., SINOÛ, J.-J. et THOUVEREZ, F. (2008). Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics. *Mechanics Research Communications*, 35(8):537 – 545.
- [Hall et al., 2006] HALL, K. C., KIELB, R. E. et THOMAS, J. P. (2006). *Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines*. Springer.
- [Hashish et Sankar, 1984] HASHISH, E. et SANKAR, T. S. (1984). Finite element and modal analyses of rotor-bearing systems under stochastic loading conditions. *Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design*, 106(1):80–89.
- [Henry, 1980] HENRY, R. (1980). Calcul des fréquences et modes des structures répétitives circulaires. *Journal de Mécanique Appliquée*, 4(1):61 – 82.
- [Hurty, 1965] HURTY, W. C. (1965). Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, 3(4):678 – 685.
- [Ji et Zu, 1998] JI, Z. et ZU, J. (1998). Method of multiple scales for vibration analysis of rotor shaft systems with non-linear bearing pedestal model. *Journal of Sound and Vibration*, 218(2):293 – 305.
- [Khader et Loewy, 1990] KHADER, N. et LOEWY, R. G. (1990). Shaft flexibility effects on the forced response of a bladed-disk assembly. *Journal of Sound and Vibration*, 139(3):469 – 485.
- [Kim et al., 1991] KIM, Y., NOAH, S. et CHOI, Y. (1991). Periodic response of multi-disk rotors with bearing clearances. *Journal of Sound and Vibration*, 144(3):381 – 395.
- [Ku, 1998] KU, D.-M. (1998). Finite element analysis of whirl speeds for rotor-bearing systems with internal damping. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(5):599 – 610.
- [Lalanne et Ferraris, 1998] LALANNE, M. et FERRARIS, G. (1998). *Rotordynamics Prediction in Engineering*. Wiley. 2nd ed.
- [Lau et al., 1983] LAU, S. L., CHEUNG, Y. K. et WU, S. Y. (1983). Incremental harmonic balance method with multiple time scales for aperiodic vibration of nonlinear systems. *Journal of Applied Mechanics*, 50(4a):871–876.
- [Laxalde et Thouverez, 2009] LAXALDE, D. et THOUVEREZ, F. (2009). Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 322(4-5):1009 – 1025.

- [Laxalde *et al.*, 2007] LAXALDE, D., THOUVEREZ, F. et LOMBARD, J.-P. (2007). Dynamical analysis of multi-stage cyclic structures. *Mechanics Research Communications*, 34(4):379 – 384.
- [Lazarus et Thomas, 2010] LAZARUS, A. et THOMAS, O. (2010). A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(9):510 – 517.
- [Lee et Lee, 1999] LEE, Y.-S. et LEE, C.-W. (1999). Modelling and vibration analysis of misaligned rotor-ball bearing systems. *Journal of Sound and Vibration*, 224(1):17 – 32.
- [Legrand *et al.*, 2010] LEGRAND, M., PIERRE, C. et PESEUX, B. (2010). Structural modal interaction of a four degree-of-freedom bladed disk and casing model. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 5(4):041013.
- [Lesaffre, 2007] LESAFFRE, N. (2007). *Stabilité et Analyse Linéaire du Contact Rotor-Stator*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.
- [Lesaffre *et al.*, 2007] LESAFFRE, N., SINOUE, J.-J. et THOUVEREZ, F. (2007). Stability analysis of rotating beams rubbing on an elastic circular structure. *Journal of Sound and Vibration*, 299(4-5):1005 – 1032.
- [Liew *et al.*, 2002] LIEW, A., FENG, N. et HAHN, E. J. (2002). Transient rotordynamic modeling of rolling element bearing systems. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124(4):984–991.
- [MacNeal, 1971] MACNEAL, R. H. (1971). A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4):581–601.
- [Merkin, 1997] MERKIN, D. R. (1997). *Introduction to the theory of stability*. Springer Verlag.
- [Millecamps *et al.*, 2009] MILLECAMPS, A., BRUNEL, J.-F., DUFRENOY, P., GARCIN, F. et NUCCI, M. (2009). Influence of thermal effects during blade-casing contact experiments. *ASME Conference Proceedings*, 2009(48982):855–862.
- [Murthy *et al.*, 2004] MURTHY, H., HARISH, G. et FARRIS, T. N. (2004). Efficient modeling of fretting of blade/disk contacts including load history effects. *Journal of Tribology*, 126(1):56–64.
- [Nacivet *et al.*, 2003] NACIVET, S., PIERRE, C., THOUVEREZ, F. et JEZEQUEL, L. (2003). A dynamic lagrangian frequency-time method for the vibration of dry-friction-damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 265(1):201 – 219.
- [Narayanan et Sekar, 1998] NARAYANAN, S. et SEKAR, P. (1998). A frequency domain based numeric-analytical method for non-linear dynamical systems. *Journal of Sound and Vibration*, 211(3):409 – 424.
- [Nayfeh et Balachandran, 1995] NAYFEH, A. H. et BALACHANDRAN, B. (1995). *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley Series in Nonlinear Science.
- [Nelson, 2002] NELSON, F. C. (2002). A review of the origins and current status of rotor dynamics. In *Sixth International Conference on Rotor Dynamics, Sydney, Australia*.

- [Nelson et McVaugh, 1976] NELSON, H. D. et MCVAUGH, J. M. (1976). The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. *Journal of Engineering for Industry*, 98(2):593–600.
- [Özgüven et Özkan, 1984] ÖZGÜVEN, H. N. et ÖZKAN, Z. L. (1984). Whirl speeds and unbalance response of multibearing rotors using finite elements. *Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design*, 106(1):72–79.
- [Petrov, 2004] PETROV, E. P. (2004). A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks. *Journal of Turbomachinery*, 126(1):175–183.
- [Petrov et Ewins, 2002] PETROV, E. P. et EWINS, D. J. (2002). Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed discs. *ASME Conference Proceedings*, 2002(36096):899–908.
- [Pierre, 1988] PIERRE, C. (1988). Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration*, 126(3):485–502.
- [Poudou et Pierre, 2004] PODOU, O. et PIERRE, C. (2004). étude de la réponse forcée élastique d'une roue aubagée amortie par frotteurs de type coin : analyse théorique et simulations numériques. In *14^{ème} Colloque Vibration, Chocs et Bruit, 16, 17 et 18 juin 2004, École Centrale de Lyon*.
- [Saito, 1985] SAITO, S. (1985). Calculation of nonlinear unbalance response of horizontal jeffcott rotors supported by ball bearings with radial clearances. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 107:416 – 420.
- [Salles, 2010] SALLES, L. (2010). *Étude de l'usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes. Application aux pieds d'aubes de turbomachines*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.
- [Salles et al., 2011] SALLES, L., BLANC, L., THOUVEREZ, F. et GOUSKOV, A. (2011). Dynamic analysis of fretting-wear in friction contact interfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 48(10):1513 – 1524.
- [Siewert et al., 2010] SIEWERT, C., PANNING, L., WALLASCHEK, J. et RICHTER, C. (2010). Multiharmonic forced response analysis of a turbine blading coupled by nonlinear contact forces. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 132(8):082501.
- [Sinha, 2004] SINHA, S. (2004). Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with coulomb damping due to tip-rub. *Journal of Sound and Vibration*, 273(4-5):875 – 919.
- [Sinha, 2005] SINHA, S. K. (2005). Non-linear dynamic response of a rotating radial timoshenko beam with periodic pulse loading at the free-end. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40:113 – 149.
- [Sundararajan et Noah, 1997] SUNDARARAJAN, P. et NOAH, S. T. (1997). Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-length continuation method—application to rotor systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119(1):9–20.

- [Szwedowicz *et al.*, 2008] SZWEDOWICZ, J., VISSER, R., SEXTRO, W. et MASSE-REY, P. A. (2008). On nonlinear forced vibration of shrouded turbine blades. *Journal of Turbomachinery*, 130(1):011002–1 – 011002–9.
- [Thomas, 1979] THOMAS, D. L. (1979). Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(1):81–102.
- [Tiwari *et al.*, 2000a] TIWARI, M., GUPTA, K. et PRAKASH, O. (2000a). Dynamic response of an unbalanced rotor supported on ball bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 238(5):757 – 779.
- [Tiwari *et al.*, 2000b] TIWARI, M., GUPTA, K. et PRAKASH, O. (2000b). Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 238(5):723 – 756.
- [Viana Serra Villa, 2005] VIANA SERRA VILLA, C. (2005). *Dynamique non-linéaire des rotors. Applications numériques et expérimentales à un rotor flexible*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.
- [Wildheim, 1981] WILDHEIM, J. (1981). Excitation of rotating circumferentially periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 75(3):397 – 416.
- [Wildheim et Ohayon, 1985] WILDHEIM, R. et OHAYON, R. (1985). Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques. *La Recherche aérospatiale*, 4:251 – 263.
- [Wildheim, 1979] WILDHEIM, S. J. (1979). Excitation of rotationally periodic structures. *Journal of Applied Mechanics*, 46(4):878–882.
- [Xie et Lou, 1996] XIE, G. et LOU, J. Y. (1996). Alternating frequency/coefficient (afc) technique in the trigonometric collocation method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 31(4):531 – 545.
- [Zhao *et al.*, 1994a] ZHAO, J. Y., LINNETT, I. W. et MCLEAN, L. J. (1994a). Stability and bifurcation of unbalanced response of a squeeze film damped flexible rotor. *Journal of Tribology*, 116(2):361–368.
- [Zhao *et al.*, 1994b] ZHAO, J. Y., LINNETT, I. W. et MCLEAN, L. J. (1994b). Subharmonic and quasi-periodic motions of an eccentric squeeze film damper-mounted rigid rotor. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116(3):357–363.
- [Zorzi et Nelson, 1977] ZORZI, E. S. et NELSON, H. D. (1977). Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping. *Journal of Engineering for Power*, 99(1):71–76.

Table des figures

I.1	Exemple de turboréacteur industriel	6
I.2	Représentation schématique d'une coupe de turboréacteur	7
I.3	Représentation schématique des différents organes du moteur	8
I.4	Vue de dessus d'un étage avec alternance d'aubages mobiles et fixes .	10
I.5	Configuration de référence dans le repère inertiel	12
I.6	Configuration déformée dans le repère mobile	13
I.7	Représentation des éléments simplifiés : l'arbre, le disque et le palier .	16
I.8	Diagramme de Campbell d'un rotor axisymétrique dans le repère fixe	20
I.9	Diagramme de Campbell d'un rotor axisymétrique dans le repère tournant	21
I.10	Diagramme de Campbell d'un rotor possédant des parties fixes dis- symétriques dans le repère fixe	22
I.11	Diagramme de Campbell (en haut) et réponse à balourd (en bas) du système axisymétrique en repère fixe	23
I.12	Diagramme de Campbell (en haut) et réponse à balourd (en bas) du système axisymétrique en repère tournant	24
I.13	Diagramme de Campbell (en haut) et réponse à balourd (en bas) du système à parties fixes dissymétriques en repère fixe	25
I.14	Représentation d'une roue aubagée avec son secteur de référence . . .	26
I.15	Définition des repères locaux tournants \mathcal{R}_{m_j}	27
I.16	Définition des frontières inter-secteur sur un secteur de référence d'une structure à symétrie cyclique	31
I.17	Exemples de déformées propres de modes non-dégénérés, pour $k = 0$ à gauche et $k = \frac{N}{2}$ à droite	34
I.18	Exemples de déformées propres de modes dégénérés, deux modes or- thogonaux pour $k = 1$	35
I.19	Évolution des fréquences propres de la roue aubagée en fonction du nombre de diamètres nodaux	35
I.20	Diagramme de Campbell de la roue aubagée pour le diamètre $k = 4$.	36
II.1	Modélisation d'un roulement avec jeu radial et de la loi de contact bilinéaire par morceaux	43
II.2	Modélisation de différentes lois de contact	44
II.3	Procédure AFT	55

II.4	Principaux prédicteurs	60
II.5	Procédures de correction pour la paramétrisation sélective	61
II.6	Procédures de correction pour la paramétrisation par longueur d'arc	64
III.1	Banc d'essai bi-rotor	72
III.2	Modèle simplifié du bi-rotor aubagé	73
III.3	Paramétrage du modèle simplifié de roue aubagée	77
III.4	Vue du dessus du disque rigide aubagé	80
III.5	Comparaison des déformées propres de bi-rotor, avec à gauche les déformées propres expérimentales et à droite les déformées propres numériques	83
III.6	Déformées propres du bi-rotor aubagé à vitesse nulle	85
III.7	Zoom sur les modes pur d'aube; les droites (— — —) indiquent les diamètres nodaux	86
III.8	Diagramme de Campbell du bi-rotor aubagé dans le repère tournant BP avec (—) les modes d'ensemble, (—) les modes pur d'aube et (- - -) la synchrone HP	87
III.9	Agrandissement du Campbell sur la zone de locus veering	88
III.10	Réponse linéaire du rotor BP soumis au balourd BP	90
III.11	Réponse linéaire de l'aube 1 soumise au balourd BP	91
III.12	Réponse linéaire du rotor BP soumis au balourd HP	93
III.13	Réponse linéaire de l'aube 1 soumise au balourd HP	94
III.14	Force radiale linéaire par morceaux	95
III.15	Réponse linéaire du bi-rotor aubagé soumis au balourd BP	98
III.16	Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) du bi-rotor aubagé au balourd BP - (a) Déplacement relatif à l'inter-arbre, (b) Déplacement de l'aube 1	99
III.17	Réponse linéaire du bi-rotor aubagé soumis au balourd HP	100
III.18	Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) du mode A soumis au balourd HP - (a) Déplacement relatif à l'inter-arbre, (b) Déplacement de l'aube 1	100
III.19	Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) du mode D soumis au balourd HP - (a) Déplacement relatif à l'inter-arbre, (b) Déplacement de l'aube 1	101
III.20	Réponse linéaire du bi-rotor aubagé soumis aux balourds BP et HP	102
III.21	Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) du bi-rotor aubagé soumis aux balourds BP et HP - (a) Déplacement relatif à l'inter-arbre, (b) Déplacement de l'aube 1	102
III.22	Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) du palier inter-arbre aux balourds BP et HP avec palier inter-arbre et palier P5 non-linéaires	104
III.23	Réponse linéaire (---) et non-linéaire (—) de l'aube 1 aux balourds BP et HP avec palier inter-arbre et palier P5 non-linéaires	105
IV.1	Définition des repères locaux tournants \mathcal{R}_{m_j} dans Samcef	116

IV.2	Cas-test de validation	118
IV.3	Secteur de référence du cas-test de validation	120
IV.4	Critère de MAC pour l'harmonique $k = 0$	121
IV.5	Comparaison des déformées propres des premiers modes de flexion de roue aubagée pour toutes les harmoniques, $k = 0$ diamètre en haut, $k = 1$ diamètre au centre et $k = 2$ diamètres en bas	122
IV.6	Comparaison des diagrammes de Campbell entre les deux modèles couplés - (— — —) Modèle de référence impliquant des aubes poutres, (—) Modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée 3D . . .	124
IV.7	Comparaison des réponses au balourd BP entre le système impliquant des aubes poutre (— — —) et le système impliquant un secteur réduit de roue aubagée 3D (—) - (a) Réponse du rotor HP au plan inter- arbre, (b) Réponse en tête d'aube	125
IV.8	Comparaison des réponses au balourd HP entre le système impliquant des aubes poutre (— — —) et le système impliquant un secteur réduit de roue aubagée 3D (—) - (a) Réponse du rotor HP au plan inter- arbre, (b) Réponse en tête d'aube	126
IV.9	Force radiale linéaire par morceaux pour le contact en tête d'aube . .	127
IV.10	Schéma du secteur de référence et des forces non-linéaires associées à ce secteur - (●) Nœuds retenus dans la base de réduction	129
IV.11	Réponse linéaire du système couplé soumis aux balourds BP et HP - Déplacement du rotor HP au plan inter-arbre	133
IV.12	Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé sou- mis aux balourds BP et HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [1770; 1870]$ - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP au plan inter-arbre	134
IV.13	Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé sou- mis aux balourds BP et HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [2500; 3200]$ - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP au plan inter-arbre	134
IV.14	Comparaison entre les réponses linéaires des deux systèmes couplés soumis aux balourds BP et HP - (—) Modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée et (- - -) Modèle impliquant des aubes poutre	136
IV.15	Comparaison entre les réponses linéaires (en trait mixte) et les ré- ponses non-linéaires (en trait plein) du mode C - (a) Modèlè impli- quant un secteur réduit de roue aubagée, (b) Modèlè impliquant des aubes poutre	136
IV.16	Comparaison entre les solutions non-linéaires stables (en trait plein) et instables (en pointillés) du mode C - (a) Modèlè impliquant un secteur réduit de roue aubagée, (b) Modèlè impliquant des aubes poutre	138
V.1	Coupe du moteur CFM56 série 7	143

V.2	Demi-coupe du moteur industriel (en haut) et vue éclatée du modèle simplifié associé (en bas)	144
V.3	Comparaison des déformées propres à l'arrêt entre le modèle d'ensemble développé dans Matlab (à gauche) et le modèle industriel (à droite)	146
V.4	Diagramme de Campbell du système bi-rotor dans le repère tournant	147
V.5	Diagrammes de Campbell du système bi-rotor dans le repère fixe - (a) Modèle développé dans Matlab, (b) Modèle éléments finis SNECMA	148
V.6	Vue d'ensemble d'une turbine BP montée sur le rotor BP (à gauche) et zoom sur l'assemblage de quatre aubes de turbine BP (à droite) . .	149
V.7	Secteur de référence de la roue de turbine BP considérée	150
V.8	Premiers modes de vibration à un diamètre du secteur de référence de la roue aubagée	151
V.9	Déformée statique du secteur de référence à la vitesse $\Omega_{bp} = 1,55$ trs/min	151
V.10	Critère de MAC pour les cinq premiers modes de vibration à 1 diamètre	153
V.11	Diagramme de Campbell du modèle réduit de roue aubagée	153
V.12	Diagramme de Campbell du modèle couplé dans le repère tournant BP	155
V.13	Réponse linéaire du système couplé soumis au balourd BP - (a) Réponse du rotor BP en l'abscisse y_{FAN} et (b) Réponse en tête d'aube .	157
V.14	Réponse linéaire du système couplé soumis au balourd HP - (a) Réponse du rotor BP en l'abscisse y_{FAN} et (b) Réponse du rotor HP en l'abscisse y_{TuHP}	158
V.15	Réponse linéaire du système couplé soumis au balourd HP - Réponse en tête d'aube	158
V.16	Comparaison des diagrammes de Campbell de chaque système couplé - (a) Modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée 3D et (b) Modèle impliquant des aubes de type poutre	160
V.17	Comparaison des réponses en tête d'aube de chaque système couplé soumis au balourd BP - (a) Modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée 3D et (b) Modèle impliquant des aubes de type poutre .	161
V.18	Comparaison des réponses en tête d'aube de chaque système couplé soumis au balourd HP - (a) Modèle impliquant un secteur réduit de roue aubagée 3D et (b) Modèle impliquant des aubes de type poutre .	161
V.19	Modèle d'une aube de turbine BP industrielle - Zoom sur la zone de contact au niveau du talon	162
V.20	Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé soumis au balourd BP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [1,5 ; 2]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor BP en y_{FAN}	164

V.21 Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé soumis au balourd HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [0,3 ; 0,6]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP en y_{TuHP}	165
V.22 Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé soumis au balourd HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [1,3 ; 2,1]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP en y_{TuHP}	166
V.23 Diagramme de Campbell du modèle couplé contra-rotatif dans le repère tournant BP	168
V.24 Réponse linéaire du système couplé contra-rotatif soumis au balourd BP - Déplacement en tête d'aube au niveau du talon	170
V.25 Réponse linéaire du système couplé contra-rotatif soumis au balourd HP - Déplacement en tête d'aube au niveau du talon	171
V.26 Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé contra-rotatif soumis au balourd BP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [1,4 ; 2]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor BP en y_{FAN}	173
V.27 Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé contra-rotatif soumis au balourd HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [0,2 ; 0,4]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP en y_{TuHP}	174
V.28 Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé contra-rotatif soumis au balourd HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [0,6 ; 1,6]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP en y_{TuHP}	175
V.29 Réponse linéaire (— — —) et non-linéaire (—) du système couplé contra-rotatif soumis au balourd HP sur la plage de vitesses $\Omega_{bp} = [1,6 ; 2,1]$ trs/min - (a) Déplacement en tête d'aube, (b) Déplacement du rotor HP en y_{TuHP}	176

Liste des tableaux

III.1	Valeur des paramètres du système bi-rotor	82
III.2	Valeur des paramètres pour les aubes	84
III.3	Vitesses critiques directes du bi-rotor aubagé	89
IV.1	Valeur des paramètres de la roue aubagée 3D	119
IV.2	Convergence du modèle réduit - Critère sur les fréquences propres . .	121
IV.3	Comparaison des vitesses critiques directes BP et HP entre les deux modèles couplés	125
V.1	Comparaison des fréquences propres à l'arrêt entre le modèle bi-rotor défini dans Matlab et le modèle d'ensemble SNECMA	145
V.2	Convergence du modèle réduit de roue de turbine BP pour $k = 1$ et $\Omega_{bp} = 1,55$ trs/min - Critère sur les fréquences propres	152
V.3	Vitesses critiques directes du système couplé	156
V.4	Vitesses critiques directes du système couplé contra-rotatif	170

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

Monsieur J-C. GOLINVAL

Professeur - Université de Liège - LTAS - chemin des Chevreuils, 1 - Bât. B52 - B-4000 LIEGE 1
BELGIQUE

et de

Monsieur M. LEGRAND

Professeur - Université MC GILL - Département de Génie Mécanique
Salle 270 Pavillon de Génie Mcdonald - 817 rue Sherbrooke Ouest - MONTREAL QUEBEC

Mademoiselle GRUIN Marion

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 14 février 2012

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes



M-A. GALLAND

ECOLE CENTRALE DE LIÈGE
SCOLARITE
3ème Cycle