

THÈSE

présentée devant
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir
le titre de DOCTEUR
SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

Xavier Gloerfelt

BRUIT RAYONNE PAR UN ECOULEMENT
AFFLEURANT UNE CAVITE :
SIMULATION AEROACOUSTIQUE DIRECTE
ET APPLICATION DE METHODES INTEGRALES

Soutenu le 29 novembre 2001

JURY

Examineurs : Dr. C. BAILLY
Pr. S. CANDEL
Pr. A. CHAIGNE (Rapporteur)
Pr. G. COMTE-BELLOT (Présidente)
Pr. D. JUVE
Dr. P. LAFON
Pr. G. LILLEY (Rapporteur)
Dr. P. SAGAUT

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509
École Centrale de Lyon

THÈSE

présentée devant
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir
le titre de DOCTEUR
SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

Xavier Gloerfelt

**BRUIT RAYONNE PAR UN ECOULEMENT
AFFLEURANT UNE CAVITE :
SIMULATION AEROACOUSTIQUE DIRECTE
ET APPLICATION DE METHODES INTEGRALES**

Soutenue le 29 novembre 2001

JURY

Examineurs : Dr. C. BAILLY
Pr. S. CANDEL
Pr. A. CHAIGNE (Rapporteur)
Pr. G. COMTE-BELLOT (Présidente)
Pr. D. JUVE
Dr. P. LAFON
Pr. G. LILLEY (Rapporteur)
Dr. P. SAGAUT

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509
École Centrale de Lyon

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Christophe Bailly et Daniel Juvé pour m'avoir fait confiance et m'avoir laissé une grande liberté d'action pour réaliser ce travail. Je voudrais exprimer ma gratitude envers Christophe Bogey et Christophe Bailly pour m'avoir guidé, conseillé et soutenu durant ces trois années; cette thèse est aussi leur travail.

Je tiens à remercier les membres du jury pour avoir accepté de juger ce travail. D'abord, c'est avec une grande déférence que j'exprime ma gratitude envers Madame la Présidente, Geneviève Comte-Bellot, qui a suivi ce travail avec attention et a toujours manifesté un enthousiasme et surtout une grande justesse. Je remercie Geoffrey Lilley pour sa gentillesse et pour l'intérêt qu'il a porté à cette étude en acceptant d'être rapporteur et de lire ce long texte en français. Je suis reconnaissant envers Antoine Chaigne, qui a également accepté de juger ce travail, parfois un peu technique, et d'en être rapporteur alors qu'il ne s'agit pas exactement de son domaine d'étude. Son analyse est d'autant plus pertinente et objective. Je tiens aussi à remercier Sébastien Candel, pour le prestige de son appréciation et ses commentaires encourageants, Pierre Sagaut, qui a apporté son expertise numérique avec beaucoup d'attention, et Philippe Lafon pour sa confiance renouvelée et pour m'avoir fait partager sa grande expérience en aéroacoustique depuis mon stage de DEA.

Je voudrais aussi remercier l'ensemble des personnes du Centre Acoustique pour les échanges fructueux et l'ambiance détendue qui m'a accompagnée durant ces trois ans. Je salue notamment les thésards passés, présents et futurs, particulièrement Serge, Laurent, Nicolas, Stanislas, Nadine, David ou Olivier. Je tiens à remercier le chef informatique, Pierre, pour son aide précieuse.

J'associe à ces remerciements les personnes de la SNCF, de PSA et d'EDF pour les échanges dans le cadre du programme PREDIT "Simulation Aéroacoustique" et pour m'avoir écouté patiemment.

Enfin, je remercie ma famille pour leur soutien et leur confiance.

Résumé:

Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité: Simulation aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales.

Mon travail de thèse est consacré au calcul direct du bruit d'origine aérodynamique à partir des équations de Navier-Stokes. Cette méthode consiste à déterminer simultanément le champ aérodynamique et les ondes acoustiques qui possèdent des caractéristiques physiques très différentes, sans faire intervenir de modélisation acoustique. Elle nécessite donc l'utilisation de techniques numériques qui prennent en compte les particularités des fluctuations acoustiques.

L'alternative à cette démarche consiste en effet à utiliser une méthode hybride, s'appuyant sur un calcul en deux étapes. La première étape détermine un champ turbulent de vitesse, alors que la seconde utilise un modèle de sources acoustiques combiné avec un opérateur de propagation pour obtenir le rayonnement acoustique.

Le premier chapitre présente le code aéroacoustique ALESIA et les développements nouveaux pour l'étendre aux situations en présence de parois physiques. On a notamment développé une formulation des conditions aux limites de paroi. Ce problème est illustré par des cas-tests acoustiques et visqueux.

Le deuxième chapitre synthétise l'état des connaissances théoriques et expérimentales concernant l'écoulement au dessus d'une cavité et notamment le rayonnement sonore associé. On s'attache plus particulièrement à la boucle de rétroaction aérodynamique pouvant générer les oscillations auto-entretenues observées. Le calcul direct du bruit de cavité par simulation numérique directe (DNS) des équations de Navier-Stokes est mis en oeuvre pour plusieurs configurations bidimensionnelles dans le troisième chapitre. Une première simulation laminaire à bas Reynolds permet de reproduire le couplage pression-vorticité responsable d'un rayonnement intense. L'étude de l'influence de l'épaisseur de la couche limite incidente met en évidence un nouveau régime d'écoulement, peut-être les limites d'une approche 2-D. Une deuxième simulation reproduit à l'échelle 1, par DNS, une configuration étudiée expérimentalement par Karamcheti(1955), où une couche limite laminaire à Mach 0.7 affleure une cavité rectangulaire bidimensionnelle.

Parmi les théories aéroacoustiques disponibles, le quatrième chapitre analyse les possibilités offertes par les méthodes intégrales, afin de déterminer leur pertinence et leur complémentarité avec les calculs directs. Une revue exhaustive des formulations et des applications existantes permet d'ordonner les nombreux développements réalisés dans ce domaine et de déterminer leur champ d'application respectif. Le dernier chapitre discute la résolution numérique de ces formulations. Trois formulations intégrales, l'analogie de Ffowcs Williams et Hawkings, la méthode d'extrapolation de Kirchhoff et la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de Ffowcs Williams et Hawkings sont mises en oeuvre pour plusieurs configurations. L'application à la cavité non compacte de Karamcheti permet d'appréhender les possibilités offertes en terme de gain numérique et d'analyse des sources de bruit.

Table des matières

Introduction	5
1 Méthode numérique d'ordre élevé pour la simulation en aéroacoustique	13
1.1 Traitement des points intérieurs	14
1.1.1 Equations 2-D résolues	14
1.1.2 Discrétisation spatiale	15
1.1.3 Intégration temporelle	16
1.1.4 Critères de stabilité	17
1.2 Conditions aux limites	17
1.2.1 Introduction	17
1.2.2 Conditions de rayonnement	20
1.2.3 Conditions de sortie	23
1.2.4 Conditions d'entrée	25
1.2.5 Conditions limites aux parois	26
1.3 Cas tests de validation	37
1.3.1 Réflexion d'une impulsion de pression en écoulement uniforme	38
1.3.2 Paroi oscillante de Stokes	45
1.3.3 Ecoulement de Poiseuille dans une conduite plane	48
1.3.4 Développement d'une couche limite laminaire sur une plaque plane	60
1.4 Conclusion	65
2 Le bruit de cavité	69
2.1 Introduction	69
2.2 Terminologie et classifications	70
2.3 Aperçu historique du bruit de cavité	72
2.4 Oscillations d'origine dynamique	80
2.4.1 Introduction	80
2.4.2 Description du mécanisme de rétroaction	80

2.4.3	Relation de phase	83
2.5	Conclusion	90
3	Simulation directe du bruit d'un écoulement affleurant une cavité	93
3.1	Introduction	93
3.2	Précédentes simulations d'un écoulement sur une cavité	93
3.2.1	Premières simulations stationnaires	93
3.2.2	Calculs CFD	94
3.2.3	Simulations aéroacoustiques	96
3.3	Simulations de cavités rectangulaires de rapport $L/D = 4$ à Mach 0.5	98
3.3.1	Paramètres de la simulation	98
3.3.2	Etude de l'écoulement sur la cavité	104
3.3.3	Influence de l'épaisseur de la couche limite	113
3.4	Simulation d'une cavité rectangulaire de rapport $L/D = 2$ à Mach 0.7	120
3.4.1	Paramètres de la simulation	120
3.4.2	Rayonnement acoustique	121
3.4.3	Analyse de l'écoulement	122
3.5	Conclusions	139
4	Les méthodes intégrales	143
4.1	Introduction	143
4.2	L'approche analogique	145
4.2.1	L'analogie de Lighthill	145
4.2.2	Extension de l'analogie à un milieu observateur en mouvement	158
4.2.3	Prise en compte de frontières solides	164
4.2.4	Prise en compte de la convection en présence de surfaces	180
4.3	Les méthodes d'extrapolation des ondes acoustiques	190
4.3.1	La méthode de Kirchhoff	190
4.3.2	Méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H	199
4.4	Annexes	201
4.4.1	Dérivées des fonctions de Green dans l'espace spectral	201
4.4.2	La formule de Green convectée	202
4.4.3	Démonstration de la formulation de Kirchhoff	203
5	Mise en œuvre numérique des méthodes intégrales	205
5.1	Introduction	205

5.2	Critères de choix d'une formulation intégrale	206
5.2.1	Méthode d'extrapolation ou analogie acoustique	207
5.2.2	Formulations de Kirchhoff ou de FW-H	207
5.2.3	Principales hypothèses de simplification	208
5.3	Algorithmes de résolution	210
5.3.1	Résolution temporelle ou spectrale	211
5.3.2	Algorithmes dans l'espace temporel	212
5.3.3	Algorithmes dans l'espace spectral	212
5.4	Développement d'un code de résolution des méthodes intégrales pour le calcul du bruit de cavité	214
5.4.1	Source monopolaire dans un milieu au repos	215
5.4.2	Source non périodique dans un milieu au repos	220
5.4.3	Source monopolaire dans un milieu en mouvement uniforme	221
5.4.4	Réflexion d'un monopôle sur une paroi	223
5.4.5	Rayonnement d'une cavité compacte soumise à un écoulement rasant . . .	224
5.4.6	Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$	231
5.5	Conclusion	242
	Conclusion	245
	Références	249

Introduction

L'aéroacoustique étudie le bruit d'origine aérodynamique. Le préfixe *aéro* l'apparente à la mécanique des fluides. Il est en effet indispensable de connaître la nature de l'écoulement qui est à l'origine du rayonnement sonore. Les particularités de l'acoustique, faisant intervenir des fluctuations compressibles de faible amplitude et de nature ondulatoire, font de l'aéroacoustique un domaine particulier, où doivent coexister et interagir l'acoustique et la mécanique des fluides.

L'objet des premières théories du bruit d'origine aérodynamique, pendant la deuxième moitié du XX^{ème} siècle a été de pouvoir extraire les fluctuations acoustiques de la connaissance de l'écoulement. Il s'agit donc d'un raisonnement en deux étapes où l'on détermine d'abord la partie aérodynamique puis l'on modélise les sources de bruit afin de les propager. Pour certaines configurations, il est en effet possible de profiter des particularités des ondes acoustiques pour traiter séparément le problème de mécanique des fluides et la propagation acoustique. Mais cette séparation n'est souvent qu'une approximation ou une hypothèse et les forts couplages entre l'acoustique et la mécanique des fluides sont difficiles à exprimer analytiquement. Dans beaucoup de situations, on est condamné à considérer les équations générales de la mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes.

Seule une résolution numérique de ces équations peut permettre d'accéder à une description complète des interactions aéroacoustiques. Avec l'essor des moyens informatiques, la simulation numérique des écoulements a connu depuis une vingtaine d'années des avancées considérables. Il existe maintenant de nombreux codes de CFD (*Computational Fluid Dynamic*) qui permettent de calculer avec précision les caractéristiques aérodynamiques d'un écoulement turbulent. Cependant le souci de résoudre la partie acoustique se répercute directement sur les algorithmes utilisés et sur les conditions limites du domaine de calcul. On parle alors d'aéroacoustique numérique ou CAA (*Computational AeroAcoustics*).^{287,154} En effet, les codes CFD sont souvent trop dissipatifs et les ondes acoustiques sont atténuées voire dissipées avant d'atteindre les frontières du domaine. Au contraire, en aéroacoustique numérique, les schémas sont très peu dissipatifs et très peu dispersifs. Il devient alors nécessaire de faire sortir les fluctuations acoustiques avec des conditions aux limites non réfléchissantes ou absorbantes.

On peut donc limiter le qualificatif CAA aux développements pour adapter les codes de

mécanique des fluides aux calculs aéroacoustiques On peut aussi inclure dans ce domaine d'étude toutes les applications numériques des théories pour calculer le bruit d'origine aérodynamique. L'extension de la CFD constitue le *calcul direct*, où l'on résout directement les équations de Navier-Stokes pour obtenir les champs acoustiques et aérodynamiques en un seul calcul. L'utilisation conjointe d'un code CFD ou CAA et d'une théorie aéroacoustique donne naissance aux *méthodes hybrides*.

Les théories aéroacoustiques

La caractéristique de ces approches est de séparer le problème en deux étapes : l'obtention de la partie aérodynamique et l'évaluation du rayonnement acoustique correspondant. Cette séparation apparaît assez naturelle compte tenu des fortes disparités et des propriétés propres aux deux parties. C'est ce dernier point qui autorise d'ailleurs cette séparation.

D'abord, en profitant du caractère ondulatoire de l'acoustique, on peut former une équation d'onde. On se ramène à un problème de propagation acoustique pour lequel il faut déterminer les sources. Lighthill,¹⁵⁷ en 1952, a l'idée de former cette équation d'onde à partir des équations de la mécanique des fluides, permettant une des premières écritures des sources aérodynamiques. Le problème de propagation est alors résolu en utilisant une fonction de Green. Connaissant le champ aérodynamique, on doit résoudre une expression intégrale. On peut aussi utiliser cette équation d'onde et la fonction de Green qui lui est associée en espace libre pour former une autre méthode intégrale qui remplace la connaissance des sources aérodynamiques sur un volume donné par celle de certaines données sur une surface englobant ce volume, que l'on appelle *surface de contrôle*. Une telle formulation est connue en électromagnétisme depuis 1883. Il s'agit du théorème de Kirchhoff¹⁴² valable pour tous les phénomènes régis par une équation d'onde et dont la forme primitive est la formule de Green, utilisée en acoustique depuis Rayleigh^{235†}.

En étendant la propriété des écoulements visqueux stationnaires, qui peuvent être décrits par un écoulement potentiel, Liepmann (1954) sépare le champ aérodynamique autour d'un objet du champ acoustique par une surface fictive qui suit l'épaisseur de déplacement instantanée. La difficulté réside dans la détermination de cette épaisseur de déplacement instantanée.⁷⁴

Phillips²²¹ remarque que la propagation acoustique dans un écoulement n'est pas décrite par une simple équation d'onde. Il peut s'y ajouter des phénomènes de convection, de réfraction, de

[†]§293-295, p.143-148. Le théorème mathématique de Green valable pour $\nabla^2\phi = 0$ est étendu par Helmholtz à l'équation $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$. Il s'agit de la version fréquentielle de l'équation d'onde, qui porte le nom d'équation de Helmholtz (§293 : *extension of Green's theorem*). Helmholtz en déduit une nouvelle forme du théorème de réciprocité : *If in a space filled with air which is partly bounded by finitely extended fixed bodies and is partly unbounded, sound waves be excited at any point A, the resulting velocity-potential at a second point B is the same both in magnitude and phase, as it would have been at A, had B been the source of sound.* Rayleigh démontre et illustre le théorème de Helmholtz (§294 : *Helmholtz's theorem*; §295 : *application to double source*).

diffraction ou de diffusion. L'idée est de les enlever du membre de droite de l'équation de Lighthill pour former un opérateur de propagation plus général dans le membre de gauche. L'équation qu'il forme, en 1960, pour un écoulement unidirectionnellement cisailé, ne sépare néanmoins pas encore de manière satisfaisante la partie propagative du terme source. Notamment, sa linéarisation autour de l'écoulement moyen unidirectionnellement cisailé fait apparaître des termes propagatifs proportionnels au gradient moyen qui devraient se trouver dans le membre de gauche. Ce problème est résolu par la formulation de Lilley^{159,160} (1972) qui forme une équation de propagation du troisième ordre, difficile à résoudre avec le formalisme des fonctions de Green. Seules des formes asymptotiques haute ou basse fréquence peuvent être obtenues pour la fonction de Green en espace libre. Colonius⁴³ se ramène à la résolution d'une équation différentielle ordinaire dans l'espace fréquentiel pour obtenir le rayonnement d'une couche de mélange.

Une autre approche consiste à exploiter la différence de longueur caractéristique entre la dimension des tourbillons et la longueur d'onde acoustique pour les faibles nombres de Mach. On peut écrire un développement asymptotique en puissance du nombre de Mach dans les deux régions. On parle de *Matched Asymptotic Expansion*, qui a été appliqué à des configurations spécifiques[†] entre 1967 et 1973 mais reste difficilement transposable dans la plupart des cas.

Une autre alternative, suggérée par Morfey¹⁹³ (1966) consiste à écrire les équations de conservation de l'énergie pour l'acoustique. Cependant, des développements sont nécessaires si l'on veut l'utiliser comme une méthode hybride pour prédire le bruit d'origine aérodynamique.

Dans le souci d'identifier les sources réelles du bruit, Powell²³² (1964) propose une théorie du bruit des tourbillons (*vortex sound*) pour laquelle la vorticité d'un tourbillon compact dans un milieu isentropique et faiblement compressible serait la source principale des champs aérodynamique et acoustique. Cette idée est reprise par Howe¹¹⁷ et Möhring¹⁸⁹ qui établissent une reformulation de l'analogie de Lighthill. Elle utilise comme variable thermodynamique l'*enthalpie de stagnation spécifique* qui permet de former une équation de propagation exacte à partir des équations du mouvement. Les sources du membre de droite apparaissent comme les zones où il y a des gradients de vorticité ou d'entropie. Très séduisante par ses implications physiques, la théorie du *vortex sound* reste théoriquement limitée aux faibles nombres de Mach et son application numérique est rendue délicate par le fait qu'il faille séparer les composantes potentielle et rotationnelle de la vitesse. Elle a permis l'obtention de nombreux résultats analytiques.^{123,205} On peut également noter l'application numérique de la formulation de Möhring par Knio, Collorec et Juvé¹⁴⁴ ou encore Mitchell *et al.*¹⁸⁶ pour prédire le rayonnement acoustique de tourbillons

[†] voir Howe,¹¹⁷ §1. *introduction*, p.626-627 et les références qui s'y trouvent.

chaotiques et de deux tourbillons corotatifs, respectivement.

D'autre part, en remarquant le caractère linéaire et non visqueux des fluctuations acoustiques, le système des équations d'Euler linéarisées (EEL) apparaît comme le seul opérateur de propagation prenant en compte tous les effets de l'écoulement moyen sur le champ sonore. Reste à lui associer des termes sources pour représenter les sources aérodynamiques. En rapprochant les EEL écrites pour un écoulement unidirectionnellement cisailé de l'équation écrite par Lilley, les fluctuations des tensions de Reynolds non linéaires apparaissent comme les termes sources. Béchara, Bailly, Lafon et Candel^{13,9} proposent de résoudre les EEL avec ce terme source. Cette méthode a été utilisée numériquement pour prédire le bruit rayonné par des jets,⁹ un diaphragme en écoulement,^{164,163} deux tourbillons corotatifs ou une couche de mélange.^{21,7}

Dans le cadre d'une application numérique de ces théories aéroacoustiques, deux classes de méthodes émergent et semblent prometteuses : les méthodes intégrales basées sur le formalisme des fonctions de Green et les EEL avec des termes sources. Dans cette étude, on s'intéressera à deux familles de méthodes intégrales : l'approche analogique et les méthodes d'extrapolation.

On peut noter également une stratégie intermédiaire entre les méthodes hybrides et les méthodes directes, proposée par Freund *et al.*,⁸⁰ qui consiste à simplifier les équations résolues dans la partie acoustique. En même temps que l'on avance les équations de Navier-Stokes pour la partie aérodynamique, on résout un opérateur de propagation dans la région acoustique. On greffe en quelque sorte un calcul acoustique sur la simulation directe. La difficulté est de correctement gérer l'interface entre les deux zones. Freund *et al.*⁸⁰ proposent de coupler les EEL au calcul direct pour prédire le bruit d'un jet. Cette approche est également mise en œuvre par Shih *et al.*^{268,269} sous le qualificatif *zonal approach*, pour calculer le bruit d'un jet excité supersonique. Dans un article récent, Freund *et al.*^{81,82} utilisent un propagateur encore plus simplifié et donc moins coûteux, l'équation d'onde classique, pour calculer le bruit rayonné par un jet rond 3-D à Mach 1.92. Pour tenir compte de la non linéarité de la propagation pour les ondes de pression intenses présentes en champ proche, ils proposent aussi un couplage avec la théorie des chocs faibles de Lighthill-Whitham.

Christophe Bogey²¹ est à l'origine des premiers calculs aéroacoustiques directs effectués au Centre Acoustique du LMFA. Dans sa thèse, il a développé un code aéroacoustique 2-D/3-D, appelé ALESIA pour *Appropriate Large Eddy Simulation In Aeroacoustics*, et a montré la faisabilité d'un calcul direct du rayonnement acoustique pour des écoulements complexes en espace libre : deux tourbillons corotatifs, une couche de mélange excitée 2-D ou des jets ronds tridi-

mensionnels par macrosimulation. Ces calculs directs ont servi de référence pour étudier deux méthodes hybrides : l'analogie de Lighthill et l'utilisation des équations d'Euler linéarisées avec un terme source.

Objectifs de la thèse

Dans le même esprit, on se propose d'étudier des situations pour lesquelles une paroi est présente. Celle-ci peut se comporter comme un simple élément réflecteur ou diffractant, ou peut constituer une nouvelle source de bruit. Une situation particulièrement intéressante en aéroacoustique se produit lorsqu'une couche cisailée impacte un objet. Un couplage aéroacoustique peut alors provoquer des oscillations autoentretenues dans l'écoulement qui génèrent un rayonnement acoustique intense, en extrayant de l'énergie à l'écoulement moyen. Ce mécanisme gouverne les caractéristiques d'un grand nombre d'applications et a donné lieu à de nombreuses études théoriques, expérimentales ou numériques.^{241,247,242}

On s'intéresse au cas particulier d'une couche cisailée affleurant une cavité rectangulaire, qui fait partie de cette classe d'écoulements et possède plusieurs particularités intéressantes. D'abord, sa simplicité géométrique en fait une configuration accessible numériquement. En effet, une cavité rectangulaire peut facilement être discrétisée par un maillage cartésien en deux blocs. Cette simplicité géométrique n'implique pas une simplicité des phénomènes mis en jeu. Au contraire, l'écoulement affleurant une cavité induit une grande variété de mécanismes dépendant de nombreux paramètres : boucle de rétroaction aéroacoustique, résonances acoustiques, développement d'instabilités dans la couche cisailée, entrée/sortie de masse, zones de recirculation complexes... C'est pourquoi, les tentatives pour modéliser le phénomène restent limitées à des comportements simplifiés valables pour une plage de fonctionnement réduite. Elles ne permettent pas de répondre aux nombreuses interrogations, concernant notamment le rayonnement acoustique. A ce titre, une simulation numérique peut permettre d'étudier des mécanismes de génération inaccessibles à la modélisation ou à l'expérience, en accédant simultanément à toutes les grandeurs caractéristiques de l'écoulement et du champ acoustique. Cependant, ces "expériences" numériques sont difficiles car il faut extraire des informations acoustiques d'un écoulement. Le rendement acoustique d'un écoulement aérodynamique comme le jet libre, c'est-à-dire la fraction d'énergie mécanique convertie en énergie acoustique, est en effet très faible, de l'ordre de 10^{-5} au plus pour un écoulement subsonique. Cependant, le bruit de cavité possède un rendement beaucoup plus élevé, rendant cette configuration favorable aux simulations numériques. Elle constitue de ce fait une solution de référence pertinente pour appliquer des méthodes hybrides. Enfin, le rayonnement induit par une cavité excitée par un

écoulement est une source sonore qui apparaît dans un grand nombre d'applications pratiques. Sa simulation peut permettre d'améliorer la connaissance des sources de bruit afin de pouvoir développer une stratégie de contrôle adaptée. Cette configuration présente donc de nombreux intérêts fondamentaux, numériques et pratiques.

Organisation du mémoire

La rédaction de ce rapport rend compte de la dualité du sujet : d'une part, le bruit de cavité est un sujet à part entière afin d'appréhender les mécanismes responsables du rayonnement sonore pour cette configuration; d'autre part, le bruit de cavité est une illustration des différentes stratégies aéroacoustiques.

Le premier chapitre présente le code aéroacoustique ALESIA et les développements nouveaux pour l'étendre aux situations en présence de parois physiques. On s'intéressera notamment à la formulation des conditions limites de paroi et leur compatibilité avec les autres techniques numériques. Ce problème est illustré par des cas-tests acoustiques et visqueux afin de valider les méthodes employées.

Le deuxième chapitre synthétise l'état des connaissances théoriques et expérimentales concernant l'écoulement au dessus d'une cavité et notamment le rayonnement sonore associé. Les principaux phénomènes mis en jeu sont décrits et on s'attache plus particulièrement à la boucle de rétroaction aéroacoustique pouvant générer les oscillations autoentretenues observées.

Le calcul direct du bruit de cavité par simulation numérique directe (DNS) des équations de Navier-Stokes est mis en œuvre pour plusieurs configurations bidimensionnelles dans le troisième chapitre. Une première simulation laminaire à bas Reynolds permet de reproduire le couplage aéroacoustique responsable d'un rayonnement intense. L'étude de l'influence de l'épaisseur de la couche limite incidente met en évidence un nouveau régime d'écoulement, peut-être les limites d'une approche 2-D. Une deuxième simulation reproduit à l'échelle 1, par DNS, une configuration étudiée expérimentalement par Karamcheti,¹³⁵ où une couche limite laminaire à Mach 0.7 affleure une cavité rectangulaire bidimensionnelle.

Parmi les théories aéroacoustiques disponibles, le quatrième chapitre analyse les possibilités offertes par les méthodes intégrales, afin de déterminer leur pertinence et leur complémentarité avec les calculs directs. Une revue exhaustive des formulations et des applications existantes permet d'ordonner les nombreux développements réalisés dans ce domaine et de déterminer leur champ d'application respectif.

Le dernier chapitre discute la résolution numérique de ces formulations. Trois formulations intégrales, l'analogie de Ffowcs Williams et Hawkins, la méthode d'extrapolation de Kirchhoff

et la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de Ffowcs Williams et Hawkings sont mises en œuvre pour plusieurs configurations. L'application à la cavité non compacte de Karamcheti permet d'appréhender les possibilités offertes en terme de gain numérique et d'analyse des sources de bruit.

Chapitre 1

Méthode numérique d'ordre élevé pour la simulation en aéroacoustique

Il y a en général deux difficultés principales qui doivent être résolues par un code de CAA : proposer un algorithme efficace pour la propagation des perturbations acoustiques et disposer de conditions aux limites précises pour le domaine de calcul tronqué.

Concernant le premier point, pour obtenir des ondes acoustiques de bonne qualité par simulation numérique directe, l'emploi d'un schéma d'ordre élevé est nécessaire car ces schémas sont moins dispersifs et moins dissipatifs. Ces caractéristiques permettent de calculer des solutions qui sont une bonne approximation des équations aux dérivées partielles (équations d'Euler ou de Navier-Stokes) même sur une grande distance de propagation. De plus, grâce à ces schémas d'ordre élevé, la vitesse de propagation des ondes est généralement proche de la vitesse de propagation des ondes acoustiques, ce que n'assurent pas souvent les schémas d'ordre moins élevé.

L'utilisation pratique de tels schémas d'ordre élevé pour des conditions limites précises est limitée par un certain nombre de contraintes inhérentes à l'implémentation numérique. On décrit ici les conditions limites libres (rayonnement, entrée, sortie) ainsi que l'implémentation d'une paroi rigide plane. Le point commun de ces conditions limites est que l'information se propage du domaine intérieur vers les frontières, rendant nécessaire l'utilisation de schémas décentrés qui peuvent conduire à des instabilités numériques. En outre, pour réaliser une simulation numérique en aéroacoustique, il faut s'assurer que ces ondes parasites ne perturbent pas la solution physique recherchée.

L'autre difficulté pour la mise en place de conditions limites en aéroacoustique vient de la particularité de l'acoustique qui fait intervenir des variables physiques d'ordre de grandeur très différent de celles de la partie aérodynamique avec lesquelles elles doivent coexister. Lorsqu'il y a un facteur 10^{-4} entre les fluctuations acoustiques et les fluctuations aérodynamiques, une réflexion de 0.01% du champ aérodynamique couvrirait le champ acoustique.

1.1 Traitement des points intérieurs

On rappelle les équations résolues par le code ainsi que les schémas de discrétisation spatiale et d'intégration temporelle pour avancer les flux sur les points intérieurs.

1.1.1 Equations 2-D résolues

On résout les équations de Navier-Stokes compressibles portant sur des quantités conservatives dans un système de coordonnées cartésiennes[†] :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x_2} = 0$$

avec :

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho e)^t$$

$$\mathbf{E}_e = (\rho u_1, p + \rho u_1^2, \rho u_1 u_2, \rho u_1 h)^t$$

$$\mathbf{F}_e = (\rho u_2, \rho u_2 u_1, p + \rho u_2^2, \rho u_2 h)^t$$

$$\mathbf{E}_v = (0, \tau_{11}, \tau_{12}, u_1 \tau_{11} + u_2 \tau_{12} - q_1)^t$$

$$\mathbf{F}_v = (0, \tau_{21}, \tau_{22}, u_1 \tau_{21} + u_2 \tau_{22} - q_2)^t$$

\mathbf{U} est le vecteur inconnu, \mathbf{E}_e et \mathbf{F}_e sont les flux eulériens (termes convectifs) et \mathbf{E}_v et \mathbf{F}_v sont les flux visqueux (dissipation visqueuse et conduction thermique). Les quantités ρ , p , u_i représentent la masse volumique, la pression et les composantes de la vitesse. e et h sont respectivement l'énergie interne et l'enthalpie interne du fluide par unité de masse. Le système est complété par l'équation d'état des gaz parfaits qui fournit :

$$p = r\rho T$$

$$e = p/[(\gamma - 1)\rho] + (u_1^2 + u_2^2)/2$$

$$h = e + p/\rho$$

où T est la température, r la constante des gaz parfaits et γ le rapport des chaleurs spécifiques. Le tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} est défini pour un fluide newtonien et les composantes q_i du flux de chaleur suivent la loi de Fourier :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

$$q_i = -\frac{\mu c_p}{\sigma} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

où μ est la viscosité dynamique moléculaire, $\sigma = 0.72$ est le nombre de Prandtl et c_p est la chaleur spécifique à pression constante.

[†]Tout au long du manuscrit, le repère cartésien sera noté indifféremment (x, y) ou (x_1, x_2) , par souci de clarté et de commodité. De même, le vecteur vitesse pourra être noté (u, v) ou (u_1, u_2) .

1.1.2 Discrétisation spatiale

1.1.2.1 Flux eulériens

La discrétisation des flux eulériens se fait avec le schéma DRP (*Dispersion Relation Preserving*) de Tam et Webb,²⁹⁵ préservant les relations de dispersion des modes susceptibles de se propager. Il s'agit d'un schéma explicite aux différences finies optimisé sur 7 points qui est formellement d'ordre 4 mais s'avère plus performant qu'un schéma classique d'ordre 6 pour des perturbations dont la longueur d'onde est discrétisée par 7 points. Il s'écrit sous la forme :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-3}^3 a_l \mathbf{E}_{ei+l,j}$$

Les coefficients a_l utilisés sont ceux révisés par Tam et Shen.²⁹⁴

1.1.2.2 Flux visqueux

Pour les flux visqueux, la version d'origine du code ALESIA utilise un schéma d'ordre 2, qui s'avérait suffisant pour des écoulements libres à nombre de Reynolds élevé :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x} (\mathbf{E}_{vi+1,j} - \mathbf{E}_{vi-1,j})$$

On testera aussi l'ordre 4 pour vérifier que l'approximation faite à l'ordre 2 n'est pas trop pénalisante lorsqu'on traite des écoulements en présence de paroi :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{12\Delta x} (\mathbf{E}_{vi-2,j} - 8\mathbf{E}_{vi-1,j} + 8\mathbf{E}_{vi+1,j} - \mathbf{E}_{vi+2,j})$$

1.1.2.3 Filtrage par viscosité sélective

Une viscosité artificielle s'avère nécessaire pour filtrer la solution calculée. En effet, il a été démontré²⁹⁵ que les schémas aux différences finies d'ordre élevé (comme le schéma DRP de Tam & Webb) produisent des solutions supplémentaires qui n'ont rien à voir avec les solutions physiques du système d'équations aux dérivées partielles que l'on résout. Ce sont des ondes "parasites", qui possèdent une très petite longueur d'onde (oscillations maille à maille) et se propagent à une vitesse très élevée. Elles sont généralement créées au niveau des conditions limites, lorsqu'il existe des forts gradients ou des discontinuités. On introduit donc un filtrage pour dissiper ces hautes fréquences sans affecter la solution physique. Pour cela, Tam *et al.*²⁹⁶ ajoutent des termes de viscosité sélective dans le système à résoudre :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \dots + \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 \quad (1.1)$$

où \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 représentent la dissipation dans les deux directions définie par :

$$(\mathbf{D}_1)_i = -\frac{\nu_a}{(\Delta x_1)^2} \sum_{l=-3}^3 d_j (\mathbf{U}_{i+l} - \bar{\mathbf{U}}_{i+l})$$

où ν_a désigne la viscosité artificielle et $\bar{\mathbf{U}}$ la moyenne temporelle du vecteur inconnu \mathbf{U} . En pratique, on fixe le nombre de Reynolds du schéma $R_s = c_0 \Delta x_1 / \nu_a$ entre 5 et 10. Cela revient donc à résoudre :

$$(\mathbf{D}_1)_i = -\frac{c_0}{R_s \Delta x_1} \sum_{l=-3}^3 d_j (\mathbf{U}_{i+l} - \bar{\mathbf{U}}_{i+l})$$

Les coefficient d_j optimisés, donnés par Tam *et al.*,²⁹⁶ sont équivalents à un filtre à l'ordre 2. On utilise aussi un filtre sur 7 points à l'ordre 6.

1.1.3 Intégration temporelle

Une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 en linéaire¹³² est choisie pour l'intégration temporelle. Elle calcule les variables \mathbf{U}^{n+1} à l'instant $n+1$ à partir de leurs valeurs \mathbf{U}^n à l'instant n en effectuant 4 étapes :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^1 &= \mathbf{U}^n + \alpha_1 \Delta t \mathbf{K}_e^n \\ \mathbf{U}^2 &= \mathbf{U}^n + \alpha_2 \Delta t \mathbf{K}_e^1 \\ \mathbf{U}^3 &= \mathbf{U}^n + \alpha_3 \Delta t \mathbf{K}_e^2 \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \alpha_4 \Delta t (\mathbf{K}_e^3 + \mathbf{K}_v^n + \mathbf{K}_d^n) \end{aligned} \tag{1.2}$$

où \mathbf{K}_e , \mathbf{K}_v et \mathbf{K}_d sont les termes d'intégration des flux eulériens, visqueux et du filtrage sélectif définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^k &= -\frac{\partial \mathbf{E}_e^k}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{F}_e^k}{\partial x_2} \\ \mathbf{K}_v^k &= \frac{\partial \mathbf{E}_v^k}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_v^k}{\partial x_2} \\ \mathbf{K}_d^k &= \mathbf{D}_1^k + \mathbf{D}_2^k \end{aligned}$$

Dans la version d'origine d'ALESIA, les flux visqueux et l'amortissement sélectif ne sont pris en compte que dans la dernière étape. Pour augmenter l'ordre d'intégration des flux visqueux en présence de parois, on testera la prise en compte des flux visqueux à chaque étape :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^1 &= \mathbf{U}^n + \alpha_1 \Delta t (\mathbf{K}_e^n + \mathbf{K}_v^n) \\ \mathbf{U}^2 &= \mathbf{U}^n + \alpha_2 \Delta t (\mathbf{K}_e^1 + \mathbf{K}_v^1) \\ \mathbf{U}^3 &= \mathbf{U}^n + \alpha_3 \Delta t (\mathbf{K}_e^2 + \mathbf{K}_v^2) \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \alpha_4 \Delta t (\mathbf{K}_e^3 + \mathbf{K}_v^3 + \mathbf{K}_d^n) \end{aligned}$$

Ce schéma explicite est peu coûteux en terme de stockage puisque seul le résultat de l'étape précédente est nécessaire pour avancer l'étape suivante.

1.1.4 Critères de stabilité

Comme pour toute méthode explicite, l'étude de stabilité de l'algorithme impose que le pas de temps Δt vérifie trois types de critères : le premier lié aux termes convectifs est le critère de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), le deuxième et le troisième liés aux termes visqueux et aux termes de conduction-diffusion correspondent au critère de Fourier.

1.1.4.1 Critère CFL

Cette condition de stabilité impose que la distance parcourue pendant le temps Δt par une perturbation se propageant à la vitesse $u_i \pm c$ soit en principe inférieure à la distance entre deux points du maillage.¹¹³ Le schéma précédent est assez robuste puisqu'il autorise un CFL_{max} de 1.73 pour les flux eulériens. En coordonnées cartésiennes, le critère s'écrit donc :

$$CFL = \Delta t \times \max_i \left[\frac{|u_i| + c}{\Delta x_i} \right] \leq 1.73$$

1.1.4.2 Critère visqueux

De la même façon il faut respecter un critère de discrétisation spatio-temporelle pour les flux visqueux pour assurer la convergence de l'algorithme. Il s'écrit :

$$C_{visqueux} = \Delta t \times \max_{i,j} \left[\frac{\nu}{\Delta x_i \Delta x_j} \right] \leq 2$$

On peut faire deux remarques. D'abord, en pratique, c'est le critère CFL qui sera toujours le plus restrictif. Par exemple, pour un $(\Delta x_i)_{min}$ de 10^{-6} m et un nombre de Mach de 0.5, le critère CFL impose $\Delta t \leq 3.33 \times 10^{-9}$ s alors que la condition de stabilité visqueuse nécessite $\Delta t \leq 1.33 \times 10^{-7}$ s. Ensuite, on constate que le pas de temps, imposé par la plus petite maille, sera toujours très faible, ce qui est un des principaux inconvénients des méthodes explicites que l'on utilise.

1.2 Conditions aux limites

1.2.1 Introduction

La qualité d'une simulation aéroacoustique dépend fortement de la précision des conditions limites appliquées sur les frontières du domaine de calcul. La solution la plus simple consiste à implanter des conditions périodiques pour lesquelles on peut continuer d'utiliser le schéma intérieur pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Mais ce choix restreint fortement les applications

possibles. Pour simuler des configurations réalistes, il faut pouvoir traiter des conditions de rayonnement, d'entrée ou de sortie de fluide ou bien encore des parois glissantes ou non glissantes. Malgré les nombreuses études sur le sujet, il n'existe pas de formulation idéale et il faut écrire, pour les équations de Navier-Stokes, des conditions qui soient compatibles avec les conditions physiques à imposer, avec les méthodes numériques choisies et qui soient également compatibles entre elles. Pour des codes CFD dissipatifs, les ondes acoustiques sont souvent atténuées voire dissipées avant d'atteindre les frontières du domaine. Au contraire, en aéroacoustique numérique, les schémas sont très peu dissipatifs et il devient nécessaire de faire sortir les fluctuations acoustiques par des conditions non réfléchissantes ou absorbantes. Il faut prendre soin d'éviter toutes les réflexions qui pourraient se superposer aux ondes physiques. Il faut donc autoriser la sortie des ondes acoustiques et surtout celle des fluctuations aérodynamiques car elles sont d'un niveau beaucoup plus élevé et même un faible pourcentage de réflexion peut masquer totalement le rayonnement acoustique. Ces réflexions peuvent même modifier l'écoulement aérodynamique en créant une autoexcitation (*self-forcing*) due au couplage entre les instabilités aérodynamiques de l'écoulement et les ondes numériques réfléchies aux frontières.³³ Ce phénomène devient critique pour les configurations où les interactions entre l'acoustique et l'écoulement sont fortes comme, par exemple, lorsqu'il y a un *feedback* acoustique (impact d'un jet sur un coin, cavité, combustion, ...).

1.2.1.1 Les conditions physiques

Une condition limite est une condition physique lorsqu'elle impose le comportement physique attendu pour une ou plusieurs variables inconnues. Ces conditions sont donc indépendantes des méthodes numériques choisies et le nombre nécessaire et suffisant de conditions à imposer doit correspondre à l'analyse théorique pour que le système à résoudre soit bien posé mathématiquement. Une telle analyse est possible pour le système hyperbolique des équations d'Euler 1D mais le problème est plus complexe pour les équations de Navier-Stokes et il ne peut être résolu que dans certains cas[†]. C'est pourquoi, la plupart des conditions limites existantes ont été écrites pour les équations d'Euler. Afin de les généraliser aux équations de Navier-Stokes, il faut ajouter des conditions visqueuses[‡]. Néanmoins, l'écriture de conditions limites nécessite plus que d'avoir bien posé le problème pour les équations de Navier-Stokes. Il faut parfois ajouter d'autres conditions physiques (l'adhérence à une paroi par exemple) et des conditions numériques pour résoudre les variables pour lesquelles il n'existe pas de condition physique.

[†]voir Poinot et Lele²²⁹ et les références qui s'y trouvent.

[‡]On regroupe ici dans le qualificatif *visqueux* tous les phénomènes physiques de diffusion spécifiques aux équations de Navier-Stokes comme la dissipation visqueuse ou la diffusion thermique.

1.2.1.2 Les conditions numériques

L'implémentation nécessite de traduire numériquement les conditions physiques et de compléter ces conditions afin que le nombre de conditions à imposer numériquement soit égal au nombre de variables inconnues. On parle de condition *forte* lorsqu'on spécifie explicitement le comportement d'une variable sans utiliser les équations intérieures et de condition *faible* lorsqu'au contraire on ne fixe pas l'une des variables du système mais qu'on impose plutôt l'effet attendu par une condition numérique qui n'est pas explicitement requise par la physique du problème. Il y a deux façons d'imposer une condition faible : soit par extrapolation d'une variable à partir des valeurs dans le domaine intérieur, soit en utilisant les équations de conservation pour compléter le système des conditions physiques. Toute extrapolation étant un acte arbitraire, elle n'assure pas la compatibilité avec les équations à résoudre et on préfère, lorsque c'est possible, utiliser les équations à résoudre pour définir des conditions numériques faibles. Pour cela, les principales approches sont de spécifier les invariants de Riemann (conditions de Dirichlet), d'utiliser les variables caractéristiques ou d'écrire une expression asymptotique des équations.

Une autre difficulté de l'implémentation numérique réside dans l'utilisation des différences finies pour discrétiser les conditions à imposer. Même si toutes les conditions sont bien posées, le fait de remplacer un problème continu par un problème discret introduit des erreurs numériques pouvant conduire à des réflexions numériques parasites. Le fait qu'on ne puisse plus conserver le schéma de discrétisation centré près des frontières accroît cette difficulté. Pour un schéma sur 7 points, comme le schéma DRP de Tam et Webb, il faut décentrer les différences finies pour les 3 dernières rangées de points. Même si le fait de décentrer influe peu sur la précision globale du schéma intérieur (si la précision est d'un ordre de grandeur inférieure près des frontières, la précision globale ne sera pas affectée²²⁹), il peut conduire à des instabilités numériques dans l'évaluation des dérivées spatiales. En général, les schémas numériques sont stables pour une différenciation suivant le sens contraire de l'écoulement (*upwind*) et ils deviennent instables pour une différenciation dans le sens de l'écoulement (*downwind*).

La dernière difficulté imposée par le traitement numérique est la compatibilité entre les différentes conditions limites. Pour une configuration en espace libre, on peut utiliser une seule condition (non réflexion) pour toutes les frontières. Dans un cas plus complexe, comme celui de la cavité (voir figure 1.1), il faut coupler des conditions d'entrée, de sortie, de rayonnement pour la frontière supérieure et de parois non glissantes pour les parois de la cavité. Toute discontinuité entre ces conditions peut introduire des ondes parasites. Il faudra donc, autant que possible, conserver le même type d'approche pour toutes les conditions et assurer des transitions

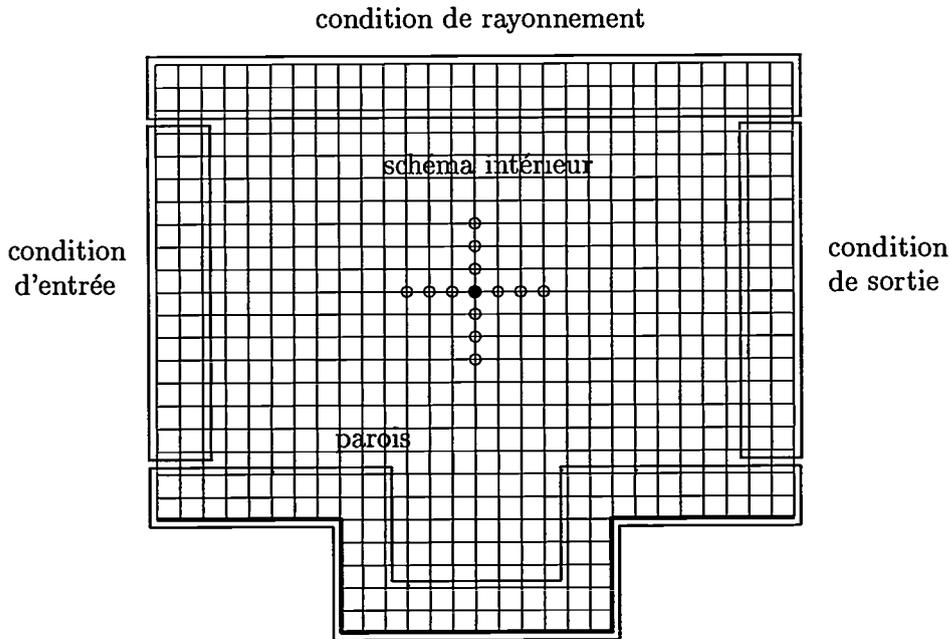


Figure 1.1: Exemple de domaine de calcul pour une configuration de type cavité. Pour évaluer les dérivées aux points marqués par un symbole plein •, on utilise les points voisins marqués par des symboles ouverts ◦. Les points proches des frontières du domaine de calcul nécessitent l'utilisation de schémas décentrés.

progressives entre chacune d'elles ainsi qu'avec le schéma intérieur. Ce dernier point doit être un souci permanent lorsqu'on définit les conditions limites, notamment à l'intersection de 2 conditions différentes (coins).

1.2.2 Conditions de rayonnement

On distingue dans ce qui suit trois conditions non réfléchissantes : la condition de rayonnement qui doit autoriser la sortie des ondes acoustiques sans réflexion notable, la condition d'entrée qui doit combiner la sortie des ondes acoustiques et l'entrée des variables aérodynamiques et, enfin, la condition de sortie qui doit permettre la sortie des fluctuations acoustiques et aérodynamiques.

On traite d'abord la condition de rayonnement. Elle a été étudiée par de nombreux auteurs et il ressort principalement deux types d'approches : celle qui s'appuie sur le concept des caractéristiques monodimensionnelles et celle qui utilise une expression asymptotique en champ acoustique lointain des équations d'Euler.

1.2.2.1 Utilisation des caractéristiques de non réflexion

Pour la résolution des équations d'Euler pour un écoulement monodimensionnel, on peut

écrire une formulation exacte de la condition limite en utilisant une décomposition en variables caractéristiques. Cette méthode a été largement développée par Thompson²⁹⁸ et consiste à diagonaliser le système des équations d'Euler 1D afin de faire apparaître les invariants tourbillonnaire, entropique et acoustique en même temps que leurs vitesses de propagation. Pour généraliser cette approche en 2-D ou en 3-D, on applique les relations caractéristiques 1D dans la direction perpendiculaire à la frontière et on avance les flux dans les autres directions en utilisant le schéma intérieur.²⁹⁹ Pour la résolution des coins du domaine, on applique la même stratégie dans deux voire trois directions du maillage. Le raisonnement a été étendu aux équations de Navier-Stokes par Poinso et Lele.²²⁹

Rappelons d'abord la formulation pour un écoulement bidimensionnel non visqueux. On considère une frontière parallèle à l'axe Ox_2 sur laquelle on résout le système d'équations aux dérivées partielles d'Euler[†] :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_2} + \mathbf{H} = 0$$

On évalue l'équation précédente en deux temps en appliquant les caractéristiques 1-D de Thompson dans la direction x_1 , l'évaluation des dérivées dans la direction Ox_2 ne posant aucun problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t_{x_1}} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t_{x_2}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_2} + \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

Les équations dans la direction x_1 sont diagonalisées afin de faire apparaître les quatre invariants L_i , correspondant respectivement à des perturbations entropique, tourbillonnaire, acoustique progressive et acoustique rétrograde.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + L_1 = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} u'_2}{\partial t} + L_2 = 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{c} \frac{\partial \bar{\rho} u'_1}{\partial t} + L_3 = 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t} - \bar{c} \frac{\partial \bar{\rho} u'_1}{\partial t} + L_4 = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} L_1 = \bar{u}_1 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x_1} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial p'}{\partial x_1} \right) \\ L_2 = \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{\rho} u'_2}{\partial x_1} \\ L_3 = (\bar{u}_1 + \bar{c}) \left(\frac{\partial p'}{\partial x_1} + \bar{c} \frac{\partial \bar{\rho} u'_1}{\partial x_1} \right) \\ L_4 = (\bar{u}_1 - \bar{c}) \left(\frac{\partial p'}{\partial x_1} - \bar{c} \frac{\partial \bar{\rho} u'_1}{\partial x_1} \right) \end{cases}$$

où $\rho' = \rho - \bar{\rho}$, $u'_1 = u_1 - \bar{u}_1$, $u'_2 = u_2 - \bar{u}_2$ et $p' = p - \bar{p}$ définissent les valeurs fluctuantes. Suivant le type de frontière traitée, on évaluera les invariants L_i différemment : les perturbations entrantes sont fixées par l'utilisateur et les perturbations sortantes sont évaluées à partir du calcul des

[†]Le détail des notations est donné dans Bogey,²¹ p.73.

points intérieurs en utilisant des schémas décentrés. L'obtention des invariants permet de calculer les dérivées selon Ox_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'}{\partial t_{x_1}} + L_1 + \frac{L_3 + L_4}{2} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} u'_1}{\partial t_{x_1}} + \frac{L_3 - L_4}{2\bar{c}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} u'_2}{\partial t_{x_1}} + L_2 = 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t_{x_1}} + \frac{L_3 + L_4}{2} = 0 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Pour une condition de non réflexion, les caractéristiques L_i entrantes sont mises à zéro pour simuler une condition de champ libre et les caractéristiques sortantes sont calculées à partir des points intérieurs en décentrant le schéma aux différences finies. Pour le schéma DRP, les coefficients des schémas décentrés sont donnés dans Tam et Webb.²⁹⁵ Lors d'une implémentation pratique, les relations caractéristiques permettent l'avancement des variables pour la dernière rangée de points posant le problème du traitement des deux rangées précédentes (puisque la molécule de discrétisation est sur 7 points). On a essayé plusieurs formulations : calcul des caractéristiques sur les trois dernières rangées ou seulement sur la dernière, les deux autres rangées singulières étant décentrées vers l'intérieur du domaine.

Le principal défaut des caractéristiques est qu'il s'agit d'une méthode monodimensionnelle qui est efficace pour des fluctuations qui frappent normalement la frontière mais s'avère mal adaptée aux incidences obliques. Giles⁹¹ a proposé une amélioration pour prendre en compte ces effets d'incidence oblique, mais sa technique pose des problèmes de stabilité difficiles à résoudre.⁴²

1.2.2.2 Condition de rayonnement de Tam et Dong

La deuxième famille de conditions limites non réfléchissantes utilise une expression asymptotique en champ acoustique lointain des équations d'Euler[†]. La formulation de Tam et Webb²⁹⁵ supposant un écoulement uniforme est étendue par Tam et Dong²⁹¹ au cas d'un écoulement quelconque.

Formulation cylindrique 2-D

Cette formulation s'applique pour des frontières où seules des fluctuations acoustiques doivent

[†]voir la synthèse de Tam et Dong en introduction de la référence²⁹¹ et les références qui s'y trouvent.

sortir. En utilisant les coordonnées cylindriques (r, θ) , la solution asymptotique s'écrit :

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ p \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) \begin{pmatrix} \rho - \bar{\rho} \\ u_1 - \bar{u}_1 \\ u_2 - \bar{u}_2 \\ p - \bar{p} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.4)$$

où $\bar{\rho}$, \bar{u}_1 , \bar{u}_2 et \bar{p} sont les champs moyens et V_g désigne la vitesse de groupe des ondes acoustiques définie par :

$$V_g = \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_r + \sqrt{\bar{c}^2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\theta)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta) \\ \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta) \end{cases} \quad (1.5)$$

$\bar{c} = \sqrt{\gamma \bar{p} / \bar{\rho}}$ est la célérité du son moyennée. L'origine des coordonnées cylindriques correspond théoriquement au point où se situe la source sonore. Tam et Dong ont montré que le résultat n'est pas très sensible au choix de cette origine. Lorsqu'une paroi est présente, on peut choisir l'origine au centre de la paroi afin d'éviter un rayonnement perpendiculaire à la paroi lors du raccordement avec une condition libre.

1.2.3 Conditions de sortie

1.2.3.1 Utilisation des caractéristiques de sortie

Pour une sortie subsonique, en reprenant les notations 2-D du §1.2.2.1, on a 3 caractéristiques L_1 , L_2 , et L_4 sortantes et une caractéristique L_3 entrante. On calcule alors ces invariants pour simuler une condition de champ libre :

$$\begin{cases} L_1 = L_2 = L_4 = 0 \\ L_3 = (\bar{u}_1 + \bar{c}) \left(\frac{\partial p'}{\partial x_1} + \bar{c} \frac{\partial \bar{\rho} u'_1}{\partial x_1} \right) \end{cases} \quad (1.6)$$

On utilise alors les relations caractéristiques (1.3) pour avancer les équations dans la direction x_1 normale à la sortie. Pour la direction parallèle x_2 , les flux sont calculés avec le schéma intérieur.

Dans la pratique, on utilise l'ordre 0 *upwind*, comme proposé par Thompson,²⁹⁹ pour calculer L_3 pour éviter des problèmes de stabilité.

On vient de définir une condition non réfléchissante qui ne fournit aucune information entrante. Notamment, pour la pression statique p_∞ , rien n'indique sa valeur à l'extérieur du domaine de calcul et, en pratique, sa valeur risque de dériver. C'est pourquoi, conformément à la proposition de Rudy et Strikwerda,²⁵⁶ reprise par Poinso et Lele,²²⁹ on ajoute un terme correctif dans le traitement de l'onde acoustique entrante :

$$L_4 = K(p - p_\infty)$$

où $K = \sigma(1 - M^2)\bar{c}/L$ avec M le nombre de Mach, \bar{c} la célérité du son, L la taille du domaine et σ une constante que l'on prendra égale à 0.25.

1.2.3.2 Condition de sortie de Tam et Dong

Formulation cylindrique 2-D

On écrit l'expression asymptotique des équations d'Euler dans le cas où la perturbation totale est la somme d'une perturbation acoustique, tourbillonnaire et entropique. On obtient le système suivant en coordonnées cylindriques (r, θ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla (\rho - \bar{\rho}) = \frac{1}{\bar{c}^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla (p - \bar{p}) \right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla (u_1 - \bar{u}_1) = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial (p - \bar{p})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla (u_2 - \bar{u}_2) = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial (p - \bar{p})}{\partial x_2} \\ \frac{1}{V_g} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (p - \bar{p})}{\partial r} + \frac{(p - \bar{p})}{2r} = 0 \end{array} \right. \quad (1.7)$$

La vitesse de groupe est donnée par (1.5).

Formulation alternative de Dong

Dong⁵⁴ propose une modification des expressions asymptotiques de Tam et Dong pour tenir compte d'un écoulement non uniforme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla (\rho - \bar{\rho}) = \frac{1}{\bar{c}^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla (p - \bar{p}) \right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla (u_1 - \bar{u}_1) = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial (p - \bar{p})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla (u_2 - \bar{u}_2) = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial (p - \bar{p})}{\partial x_2} \\ \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (p - \bar{p})}{\partial r} + \frac{2(p - \bar{p})}{r} = 0 \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Correction des champs moyens

On peut faire ici la même remarque que pour la méthode des caractéristiques : il n'y a pas d'information provenant de l'extérieur, et on perd la spécification des champs moyens par le milieu extérieur, notamment la pression statique p_∞ . Pour éviter une dérive de la pression, on ajoute un terme correctif à chaque itération :

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} = \dots + \alpha (\bar{p} - p_o) \quad (1.9)$$

avec $\alpha = \alpha_o / \Delta t$ suffisamment faible; typiquement, $\alpha_0 \sim 0.01$ à 0.1 .

Elaboration d'une zone éponge

Les conditions de sortie décrites précédemment autorisent la sortie des fluctuations aérodynamiques mais un faible pourcentage est réfléchi. Pour une simulation aéroacoustique, ces réflexions vont masquer le champ acoustique physique. C'est pourquoi, il faut ajouter une zone éponge en sortie afin de les faire disparaître. La construction de cette zone éponge est celle développée par Bogey,²¹ suite au travail de Colonius.⁴²

On combine un étirement du maillage (de l'ordre de 3% à 5% sur les dernières mailles) afin de dissiper les structures tourbillonnaires, qui ne sont alors plus prises en compte par le maillage trop grossier, et des termes de dissipation introduits progressivement pour réduire les ondes parasites générées. Ces termes de dissipation, inspirés de la technique PML (pour *Perfect Matched Layer*), sont ajoutés dans les équations sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \dots - \frac{\bar{c}\sigma(x_1, x_2)}{\Delta x_1} (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \quad \text{avec} \quad \sigma(x_1, x_2) = \sigma_{max} \left(\frac{x_1 - x_0}{x_{max} - x_0} \right)^2 \quad (1.10)$$

x_0 et x_{max} correspondent aux abscisses de début et de fin de la zone éponge et on prend $\sigma_{max} \simeq 0.2$.

1.2.4 Conditions d'entrée

1.2.4.1 Caractéristiques d'entrée

Pour réaliser une condition d'entrée, on peut utiliser une condition non réfléchissante, définie au §1.2.2.1, ou bien imposer certaines variables dans le plan d'entrée. Par exemple, si on spécifie les composantes de la vitesse et la température, avec les notations utilisées, on aura²²⁹ :

$$\begin{cases} L_1 = \frac{1}{2}(\gamma - 1)(L_3 + L_4) \\ L_2 = -\frac{dV_{\text{entrée}}}{dt} \\ L_3 = L_4 - 2\rho\bar{c}\frac{dU_{\text{entrée}}}{dt} \\ L_4 = (\bar{u}_1 - \bar{c}) \left(\frac{\partial p'}{\partial x_1} - \bar{c} \frac{\partial \bar{\rho}u'_1}{\partial x_1} \right) \end{cases} \quad (1.11)$$

On utilise alors les relations caractéristiques (1.3) pour avancer les équations dans la direction x_1 et le schéma intérieur pour les flux dans la direction x_2 , parallèle à la sortie.

1.2.4.2 Condition d'entrée de Tam et Dong

Si on veut continuer d'utiliser une expression en champ lointain des équations d'Euler pour l'entrée du fluide, on peut implanter une condition de rayonnement (1.4) en 2-D. Pour imposer le profil de vitesse, il faut alors avoir recours à des termes correctifs comme ceux décrits dans le paragraphe suivant.

1.2.4.3 Rappel sur la vitesse en entrée

De la même façon que l'on a introduit un terme de rappel sur la pression en sortie, on peut ajouter un terme correctif sur la vitesse en entrée pour éviter une dérive. Cette dérive est due notamment à l'adjonction des termes visqueux dans la condition limite.

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = \dots + \alpha(\bar{u}_i - U_{\text{entrée}}) \quad (1.12)$$

avec $\alpha = \alpha_0/\Delta t$ suffisamment faible; typiquement, $\alpha_0 \sim 0.01$ à 0.1 .

1.2.5 Conditions limites aux parois

Les conditions physiques aux parois sont les conditions naturellement imposées aux lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Pour un fluide eulérien (non visqueux), il suffit de prendre en compte la **condition de glissement** sur une paroi rigide qui se traduit par la nullité de la composante normale de la vitesse relative du fluide par rapport à la paroi.

La question se présente différemment dans l'étude des fluides visqueux pour lesquels une dissipation visqueuse et une diffusion thermique sont simultanément présentes. On constate que les équations scalaires traduisant la conservation de la quantité de mouvement contiennent alors des dérivées secondes des composantes du vecteur vitesse (qui sont des inconnues principales) alors que, pour un écoulement non dissipatif, seules les dérivées premières sont présentes dans les équations. Ce dernier point laisse à penser qu'il convient, pour définir une solution, d'écrire des conditions aux limites de type cinématique plus fortes que précédemment.

Pour un fluide dissipatif, la condition de glissement sur une paroi rigide doit être remplacée par la **condition d'adhérence** : sur une paroi rigide, la vitesse relative du fluide par rapport à la paroi doit être nulle (et non plus seulement la composante normale). L'expérience a montré que cette condition d'adhérence ne devait éventuellement être révisée que dans le cas d'écoulement de gaz très raréfiés.^{306,216}

Numériquement, outre cette condition visqueuse beaucoup plus contraignante, une autre difficulté majeure réside dans l'utilisation d'un schéma d'ordre élevé. En effet, la prise en compte d'une condition limite de paroi pour des schémas utilisant des différences finies ou des volumes finis d'ordre peu élevé a fait l'objet de nombreuses études assez abouties.²³⁹ Pour les schémas d'ordre élevé, la situation est complètement différente et le problème reste encore ouvert.

On peut distinguer quatre types d'approches pour résoudre ce problème : l'utilisation de schémas décentrés à la paroi afin de réaliser le calcul des points de frontière à partir des points intérieurs et en imposant seulement la condition de glissement ou d'adhérence. Si cette

méthode est parfois suffisante pour des schémas d'ordre peu élevé, elle conduit à des instabilités numériques importantes pour des schémas d'ordre élevé comme le schéma DRP de Tam & Webb. La deuxième approche la plus populaire est basée sur l'utilisation de points images^{239,114,84} pour simuler la réflexion au niveau de la paroi (analogie optique). Des points fictifs (souvent appelés points fantômes) sont définis de façon artificielle à l'intérieur de la paroi afin de permettre des réflexions symétriques ou antisymétriques des variables inconnues. On ajoute également souvent à cette méthode les conditions de glissement ou d'adhérence. Une troisième approche, un peu hybride des deux précédentes, est proposée par Tam & Dong,²⁹⁰ qui développent une condition limite de paroi rigide adaptée au schéma DRP de Tam & Webb. Cette méthode repose sur l'utilisation du minimum de points fantômes afin d'apporter autant d'inconnues supplémentaires que de conditions additionnelles (condition de glissement ou d'adhérence); les autres variables étant calculées de façon décentrée. La quatrième possibilité pour la prise en compte des parois est certainement la plus utilisée à l'heure actuelle et repose sur l'utilisation des caractéristiques 1-D de Thompson²⁹⁸ étendues pour un fluide visqueux par Poinso & Lele.²²⁹ Nous avons testé plusieurs formulations dont nous rappelons la justification physique et l'implémentation numérique.

1.2.5.1 Utilisation des caractéristiques de paroi

Cas d'une paroi glissante adiabatique

Typiquement, pour un fluide non visqueux, on traduit le fait que l'amplitude de l'onde réfléchie est égale à l'amplitude de l'onde incidente en imposant $L_3 = L_4$ et on prend les autres invariants nuls pour assurer la nullité de la composante normale de la vitesse. Pour tenir compte des effets visqueux, il faut ajouter deux conditions supplémentaires : nullité de la composante tangentielle du tenseur visqueux $\tau_{21} = 0$ et du flux de chaleur normal $q_2 = 0$.²²⁹

Cas d'une paroi non glissante adiabatique

De même que précédemment, on impose $L_3 = L_4$ et $L_1 = L_2 = 0$ et on ajoute une condition visqueuse qui est la nullité du flux de chaleur normal $q_2 = 0$ (dont on tient compte dans le calcul de $\partial q_2 / \partial x_2$).²²⁹

Cas d'une paroi non glissante isotherme

Pour une paroi isotherme en $y = y_0$, il faut ajouter une condition non visqueuse supplémentaire sur la température aux deux autres qui sont déduites de la condition d'adhérence :

$$u_1(x, y_0, z, t) = u_2(x, y_0, z, t) = 0$$

$$T(x, y_0, z, t) = T_0(x, z, t)$$

où T_0 est la température à la paroi. Aucune condition visqueuse n'est nécessaire et les invariants sont choisis de la même façon que dans les deux cas précédents en incrémentant les flux visqueux normalement.

Cette méthode possède exactement les mêmes défauts que la condition caractéristique de non-réflexion. D'abord, il s'agit d'une condition monodimensionnelle efficace pour des fluctuations qui frappent normalement la frontière mais mal adaptée aux incidences obliques. Ensuite se pose le problème des deux rangées de points adjacentes à la paroi auxquelles on ne peut pas encore appliquer l'algorithme intérieur. On choisit de garder des schémas centrés et on dégrade l'ordre du schéma : ordre 4 pour la troisième rangée, ordre 2 pour la deuxième et caractéristiques sur la paroi.

1.2.5.2 Utilisation de points images à la paroi

Cas d'une paroi glissante

La méthode la plus populaire pour implémenter une paroi glissante consiste en l'utilisation du principe de réflexion. A l'ordre 2, une ligne de points fictifs en $j = w - 1$, à l'intérieur de la paroi, est ajoutée comme sur la figure 1.2, à droite. Pour ces points, on définit des valeurs fictives en imposant une réflexion antisymétrique pour v^\dagger et symétrique pour les autres variables. Une démonstration est donnée pour les équations d'Euler par Goodrich & Hagstrom.⁹⁵

$$v_{w-1} = -v_{w+1}$$

$$f_{w-1} = f_{w+1} \quad f = u, p, \rho, T \text{ ou } \rho e$$

On ajoute en plus la condition de glissement $v_w = 0$ pour prévenir une dérive numérique. Les nouvelles valeurs pour les variables f_w sont alors calculées en utilisant le schéma de discrétisation intérieur en (i, w) (ordre 2 centré dans notre exemple).

Pour un schéma sur 7 points comme le schéma DRP de Tam & Webb, on ajoute trois lignes de points fictifs en dessous de la paroi afin d'imposer des conditions de symétrie à la paroi tout en continuant à utiliser les schémas de différences finies centrés sur 7 points comme pour les points intérieurs (fig. 1.3).

On doit toutefois rappeler le travail de Moretti¹⁹² (1981) qui a montré que la condition limite de réflexion ainsi écrite est erronée. En effet, dans l'analyse de Moretti, ces conditions de symétrie introduisent de nouvelles conditions aux limites $\partial f / \partial y = 0$ pour $f = p, \rho, u$ qui sur-spécifient le problème. Bien sûr, il faut avoir à l'esprit que les points fantômes introduits ne sont pas des points physiques mais sont définis de façon à pouvoir continuer d'utiliser le schéma

[†]Pour une plus grande clarté au niveau des indices, on utilise dans ce paragraphe les notations u, v, x, y plutôt que u_1, u_2, x_1, x_2 .

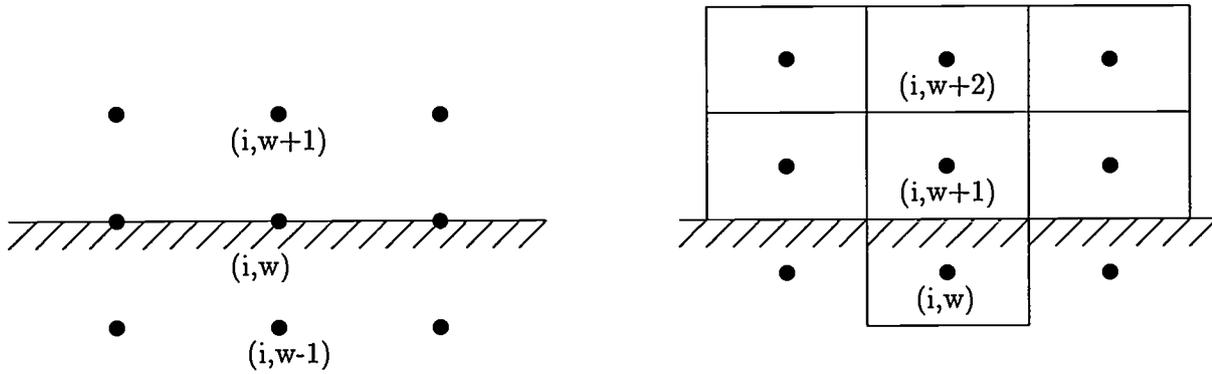


Figure 1.2: Représentation du type de maillage : à droite 1^{er} système de maillage (la paroi est sur des points) et à gauche 2^{ème} système de maillage (la paroi est entre deux rangées de points).

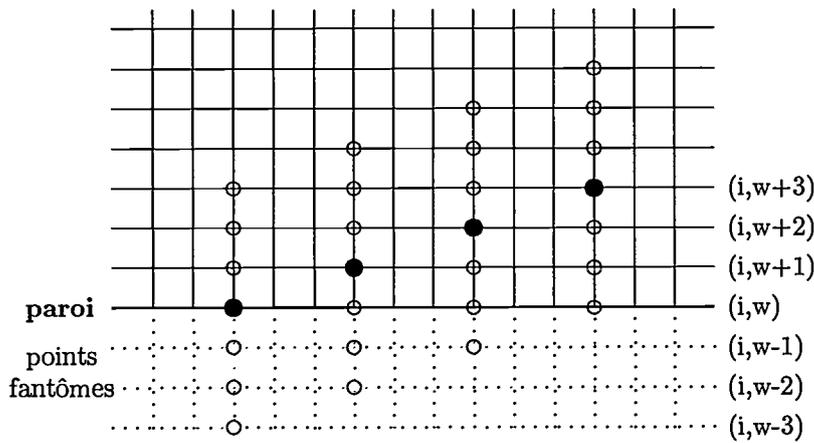


Figure 1.3: Schémas de discrétisation centrés sur 7 points près de la paroi en utilisant le principe de réflexion.

centré intérieur en w . La nature des erreurs générées par cette méthode peut être jugée en réécrivant les équations pour chacune des variables.

Dans le cas non visqueux, la condition $v_w = 0$ est bien posée par le choix de v antisymétrique.

L'équation de la quantité de mouvement en y sous forme non conservative s'écrit :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

et conduit, en tenant compte de $v_w(x) = 0$ et par la même $\partial v / \partial x|_w = 0$, à la condition :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_w = 0$$

L'équation de la quantité de mouvement en x s'écrit sous forme non conservative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

La condition $v_w(x) = 0$ conduit à la nullité du flux en v (second terme du membre de droite).

Pourtant, si on réécrit la même équation sous forme conservative, on a :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} - \frac{\partial \rho u v}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x}$$

Le flux en v , $\partial(\rho u v)/\partial y$, devrait être nul, ce qui n'est pas tout à fait vrai numériquement si l'on considère un schéma d'ordre 2 :

$$\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} \Big|_w = \frac{(\rho u v)_{w+1} - (\rho u v)_{w-1}}{2\Delta y} = \frac{\rho_{w+1} u_{w+1} v_{w+1} - \rho_{w+1} u_{w+1} (-v_{w+1})}{2\Delta y} = \frac{(\rho u v)_{w+1}}{\Delta y} \neq 0$$

On n'assure donc pas en général la nullité de ce terme. On pourrait croire que le fait de raffiner le maillage près de la paroi fasse tendre v_{w+1} vers 0 et assure la condition mais on a aussi, dans ce cas, $\Delta y \rightarrow 0$. Il faut donc être prudent et effectuer une analyse plus fine en réalisant une décomposition de v en série de Taylor :

$$\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} \Big|_w = \frac{(\rho u v)_{w+1}}{\Delta y} = \frac{(\rho u)_{w+1} \left[v_w + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_w \Delta y + O(\Delta y^2) \right]}{\Delta y} = (\rho u)_{w+1} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_w + O(\Delta y)$$

On s'aperçoit alors que cette erreur ne s'annule pas, même pour $\Delta y \rightarrow 0$. Pour un schéma de discrétisation à l'ordre 2, la solution de la méthode de réflexion n'est pas exacte mathématiquement même si elle peut constituer une bonne approximation lorsqu'on utilise un maillage très raffiné près de la paroi. On peut contourner la difficulté en appliquant, par exemple, la méthode aux équations de continuité et d'énergie et en spécifiant directement $\partial(\rho u v)/\partial y$ à zéro dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour u . On peut aussi avoir recours à un deuxième système de maillage²³⁹ (tel qu'il est défini sur la figure 1.2 à gauche) pour obtenir une erreur mathématique sur $\partial(\rho u v)/\partial y$ qui s'annule lorsque $\Delta y \rightarrow 0$.

Cas d'une paroi non glissante

Le problème devient beaucoup plus compliqué pour une paroi non glissante. Si l'utilisation du principe de réflexion a été étudiée²³⁹ pour un schéma d'ordre 2, le problème reste ouvert pour les schémas d'ordre élevé.

Pour un fluide visqueux, on peut déjà écrire facilement trois des quatre conditions nécessaires (en 2-D) pour poser correctement le problème. Les vitesses à la paroi sont données par :

$$u_w = 0 \quad , \quad v_w = 0$$

Pour une température T_0 spécifiée à la paroi (condition isotherme), on impose simplement :

$$T_w = T_0$$

A l'ordre 1, le flux de température à la paroi s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w = \frac{T_{w+1} - T_w}{\Delta y},$$

Il suffit d'imposer la nullité de ce flux pour effectuer un calcul adiabatique de la température. La difficulté réside dans l'écriture de la condition sur la masse volumique ρ . La solution la plus directe est d'évaluer cette variable en utilisant un schéma décentré vers le domaine intérieur. Mais il faut alors utiliser conjointement un maillage raffiné à la paroi (pour avoir v_{w+1} petit) et une viscosité artificielle suffisante pour éviter le développement d'instabilités.

Cette solution s'avère en effet erronée pour un écoulement avec un point de séparation (par exemple l'angle amont de la cavité) ou un point de réattachement (par exemple l'angle aval de la cavité). Roache²³⁹ montre en effet que l'équation de continuité conduit, pour un schéma d'ordre 2, à $v_{w+1} = 0$, ce qui peut être approché numériquement lorsque le maillage est très fin à la paroi mais qui conduit à des erreurs numériques conséquentes dès lors que l'on considère un point de séparation de l'écoulement où $v_{w+1} \neq 0$ (fig. 1.4). Cette incohérence qui apparaît à l'ordre 2 peut être contournée en utilisant le deuxième système de maillage défini sur la figure 1.2 à droite.

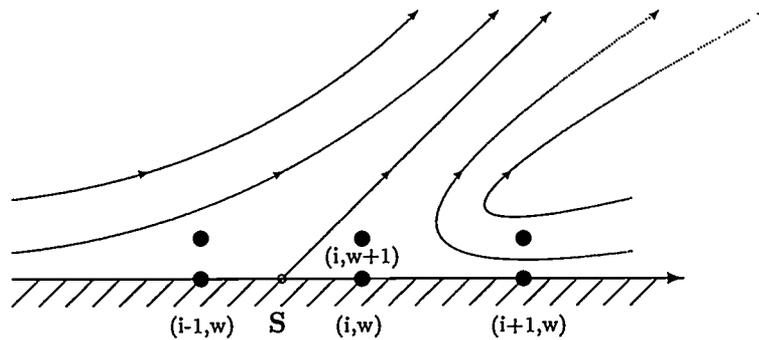


Figure 1.4: Forme des lignes de courant près du point de séparation dans le premier système de maillage.

Une autre approximation couramment utilisée pour avoir un calcul stable consiste à obtenir p_w à partir de la condition $\partial p / \partial y|_w = 0$ (qui conduit à prendre $p_w = p_{w+1}$ à l'ordre 2). L'équation d'état des gaz parfaits permet alors d'accéder à ρ_w :

$$\rho_w = \frac{p_w}{rT_w}.$$

Cette évaluation semble s'appuyer sur l'approximation de la couche limite²⁵⁹ qui donne $\partial p / \partial y = 0$ valable pour toute la couche limite mais est en fait plus douce dans la mesure où elle ne s'applique ici que sur les premiers points. De façon générale, toutes les extrapolations effectuées pour obtenir les valeurs de p ou de ρ à la paroi, n'ont pas une signification physique réelle et ne constituent qu'une simple approximation numérique. De plus, de telles méthodes ne respectent pas les quantités qui doivent être conservées et sont donc inexactes, ce qui peut parfois conduire à des erreurs numériques importantes pour certains écoulements (notamment aux petits nombres de Reynolds, s'il y a une forte interaction onde de choc/couche limite, un point de séparation

ou une surface avec un petit rayon de courbure...).

Pour un schéma du deuxième ordre, la meilleure solution consiste à évaluer toutes les variables dans le premier système de maillage sauf la masse volumique qui sera calculée dans le second système de maillage puis extrapolée sur la paroi. Cette méthode décrite par Roache²³⁹ permet une meilleure évaluation du gradient de pression près de la paroi.

Cependant, pour un schéma d'ordre élevé, cette astuce de calcul ne fonctionne plus et le problème de la détermination de la pression pariétale p_w (et donc de ρ_w) reste ouvert. Lorsqu'on utilise des points images pour imposer la condition d'adhérence, on devra donc se contenter d'imposer la condition de réflexion non visqueuse en surimposant la nullité des composantes de la vitesse.

Implémentation pour un fluide visqueux et une paroi rigide, plane et adiabatique en utilisant un schéma de discrétisation d'ordre élevé

En profitant du fait que la paroi est une ligne de courant, on commence par imposer les valeurs des variables issues de la condition d'adhérence c'est-à-dire le champ de vitesse $\mathbf{u} = 0$ et la température à la paroi en utilisant la condition d'adiabaticité. Ces grandeurs peuvent donc être déterminées sans utiliser les points intérieurs. Reste alors à déterminer ρ_w ou p_w qui ne requièrent pas seulement la connaissance des valeurs à la paroi mais nécessitent aussi des couplages avec la procédure de calcul sur le domaine intérieur.

En utilisant la méthode de réflexion, on met en place trois rangées de points fictifs (voir figure 1.3) choisis antisymétriques pour v et u afin d'assurer la compatibilité avec $u = v = 0$ et symétriques pour p et ρ comme pour une condition non visqueuse.

Ce traitement numérique n'est pas rigoureux puisqu'il utilise des variables non conservatives. Il constitue cependant une approximation correcte de la condition physique et s'avère plus précis que les caractéristiques pour le cas test d'une onde acoustique captive entre deux murs.⁸⁴

1.2.5.3 Condition de paroi de Tam & Dong

Les solutions des équations d'Euler ou de Navier-Stokes satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles pour chaque point intérieur. Un point se trouvant sur une paroi doit satisfaire une condition physique supplémentaire. Or, à chaque variable inconnue que ce soit dans le domaine intérieur ou à la paroi, correspond une équation algébrique. Le nombre d'inconnues correspond alors exactement au nombre d'équations. Mais, lorsqu'on ajoute les conditions à la paroi, cet équilibre n'est plus satisfait et il faut introduire autant d'inconnues supplémentaires (points fantômes) que d'équations nouvelles. Pour un fluide non visqueux, la condition de nullité du flux à travers la paroi impose au minimum un point fantôme supplémentaire alors que pour

un fluide visqueux, en 2-D, la condition d'adhérence nécessite au moins deux points fantômes.²⁹¹

Cas d'une paroi glissante

Dans le cas non visqueux, la condition de glissement à la paroi impose $v = 0$ et peut être interprétée comme une pression exercée par la paroi sur le fluide d'une amplitude assurant $v = 0$ à sa surface. Ceci suggère d'utiliser un point fantôme pour la pression p et le schéma de discrétisation pour les dérivées en y sera modifié en conséquence (voir figure 1.5). Les quantités $\partial\rho/\partial y$, $\partial u/\partial y$ et $\partial v/\partial y$ sont calculées normalement en utilisant les variables du domaine intérieur (schémas décentrés) et pour la dérivée suivant y de p , on étend la molécule de discrétisation au point fantôme derrière la paroi.

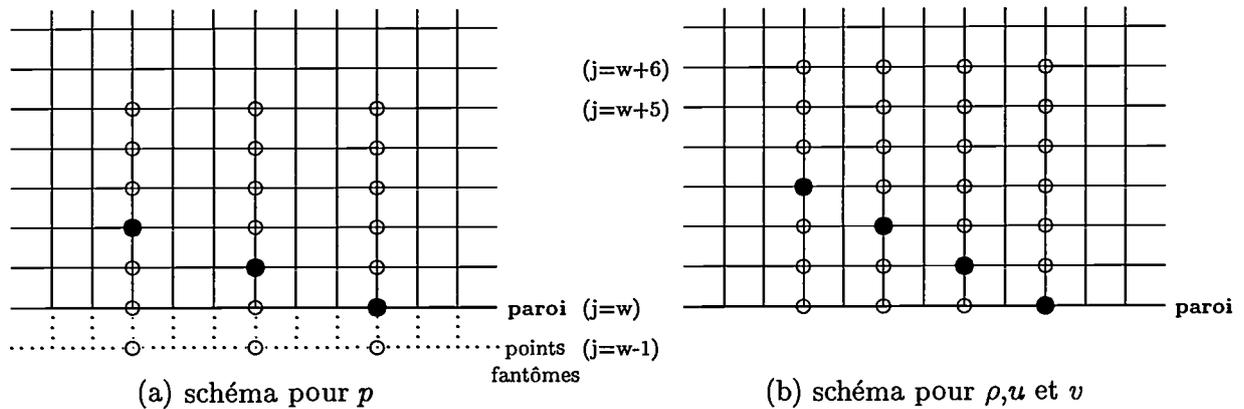


Figure 1.5: Condition de Tam et Dong. Schémas de discrétisation sur 7 points utilisés pour calculer : (a) les dérivées suivant y de p et (b) les dérivées suivant y de ρ , u et v dans la région près de la paroi.

La valeur de la pression en ces points fantômes est obtenue en imposant la condition $v = 0$ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour v et en écrivant le schéma de discrétisation décentré pour p , ce qui conduit à :

$$p_{l,w-1}^{(n)} = -\frac{1}{a_{-1}^{51}} \sum_{i=0}^5 a_i^{51} p_{l,w+i}^{(n)}$$

où a_i^{51} sont les coefficients optimisés du schéma de différences finies décentré, l'exposant 51 indiquant que la molécule de calcul comporte 5 points d'un côté et 1 de l'autre.

Cas d'une paroi non glissante

Si nous nous intéressons maintenant au cas d'un fluide visqueux, il faut ajouter aux équations les termes de contrainte visqueuse qui sont calculés à partir du champ de vitesse en utilisant le schéma centré pour le domaine intérieur et les schémas décentrés pour les points de frontière. À la paroi, la condition d'adhérence se traduit par $u = v = 0$, ce qui conduit à utiliser deux points

fantômes pour chaque point de paroi. En suivant le raisonnement non visqueux, on gardera la valeur imposée pour le point fantôme en pression pour assurer $v = 0$. Physiquement, en plus d'imposer une pression sur le fluide perpendiculairement à la paroi, la paroi exerce en plus une contrainte cisailée τ_{xy} qui ramène la vitesse longitudinale u à zéro. De la même façon que pour la condition $v = 0$, on introduit la condition $u_{l,0}^{(n+1)} = 0$ dans l'équation de quantité de mouvement en x sous sa forme discrétisée aux points de frontière $(l, 0)$ pour obtenir la valeur du point fantôme $(\tau_{xy})_{l,-1}^{(n)}$.

Cette implémentation des parois donne de bons résultats pour la réflexion d'ondes acoustiques. On remarque également la présence d'une couche limite numérique formée par des ondes parasites créées par le schéma de discrétisation, qui permet de se faire une idée de la précision de la solution numérique.²⁹¹ Pour un fluide non visqueux, il faut toutefois surimposer $v = 0$ à la paroi pour éviter une dérive numérique due à ces erreurs. Pour les cas tests visqueux, le deuxième point fantôme sur τ_{xy} n'est pas suffisant pour imposer l'adhérence. Il faut donc imposer $u = 0$ de façon forte. On pourra même imposer seulement cette condition sans créer le deuxième point fantôme. Dans ce cas, les flux visqueux sont simplement décentrés vers l'intérieur (à l'ordre 2 ou 4 dans notre cas). L'utilisation des schémas décentrés de Tam et Webb peut conduire à de fortes instabilités numériques pour des écoulements fortement cisailés ou en présence de singularités géométriques.

1.2.5.4 Condition de Tam & Dong à l'ordre 4

L'utilisation de schémas décentrés à l'ordre 4 permet une meilleure stabilité numérique que celle des schémas décentrés de Tam et Webb. On effectue également une petite économie numérique puisque la molécule de discrétisation n'est plus que sur 5 points. C'est pourquoi, on réécrit la condition de Tam et Dong du paragraphe précédent pour ces nouveaux schémas. La valeur de la pression au point fantôme assurant $v = 0$ vaut :

$$p_{l,w-1}^{(n)} = \frac{1}{3} \left(-10p_{l,w}^{(n)} + 18p_{l,w+1}^{(n)} - 6p_{l,w+2}^{(n)} + p_{l,w+3}^{(n)} \right)$$

Le schéma de discrétisation pour la pression est alors représenté sur la figure 1.6(a) alors que les dérivées des trois autres variables sont décentrées en utilisant les schémas décentrés à l'ordre

4 (figure 1.6(b)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j=w} = \frac{1}{12\Delta y} (-25f_{i,j} + 48f_{i,j+1} - 36f_{i,j+2} + 16f_{i,j+3} - 3f_{i,j+4}) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j=w+1} = \frac{1}{12\Delta y} (-3f_{i,j-1} - 10f_{i,j} + 18f_{i,j+1} - 6f_{i,j+2} + f_{i,j+3}) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j=w+2} = \frac{1}{12\Delta y} (f_{i,j-2} - 8f_{i,j-1} + 8f_{i,j+1} - f_{i,j+2}) \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Comme précédemment, on ajoute à cette condition $u = v = 0$. L'ajout du deuxième point fantôme en visqueux n'assure toujours pas l'adhérence et ne sera pas utilisé.

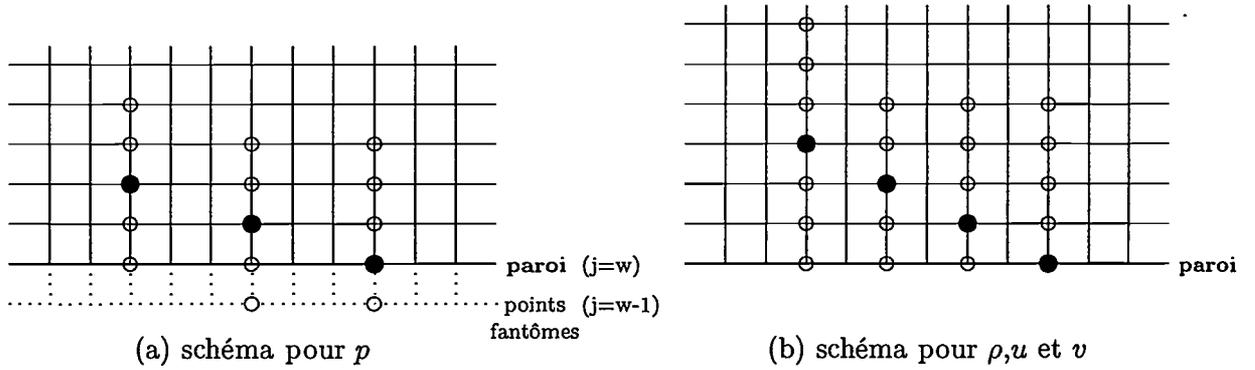


Figure 1.6: Condition de Tam et Dong à l'ordre 4. Schémas de discrétisation utilisés pour calculer : (a) les dérivées suivant y de p et (b) les dérivées suivant y de ρ , u et v dans la région près de la paroi.

1.2.5.5 Condition à l'ordre 2

Le passage à l'ordre 2 pour la condition de paroi offre de nombreuses simplifications par rapport à l'ordre 4 et permet d'établir une condition très robuste, intéressante pour traiter les singularités géométriques (comme l'angle d'impact d'une cavité). En s'appuyant sur les résultats des points images et de Tam et Dong, on peut écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad u = 0 \quad v = 0 \quad w = 0$$

En 3-D, les flux conservatifs exprimés en fonction des 4 variables primitives u , v , p et ρ se

simplifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{e_\rho} = \rho \frac{\partial v}{\partial y} \\ F_{e_{\rho u}} = \rho u \frac{\partial v}{\partial y} \\ F_{e_{\rho v}} = 0 \\ F_{e_{\rho w}} = \rho w \frac{\partial v}{\partial y} \\ F_{e_{\rho e}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\rho(u^2 + w^2)}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right. \quad (1.14)$$

On a donc uniquement besoin de l'évaluation de $\partial v / \partial y$ qui s'effectue avec un schéma décentré à l'ordre 2 :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4v_{i,w+1} - v_{i,w+2}}{2\Delta y} \quad \text{avec} \quad v_{i,w} = 0$$

Pour les rangées de points en $j = w+1$ et $j = w+2$, on utilise des schémas centrés respectivement à l'ordre 2 et 4 pour évaluer les dérivées suivant y des flux conservatifs F_e (voir figure 1.7). On remarque que cette condition ne requiert plus de point fantôme puisque les schémas sont centrés dès $j = w + 1$.

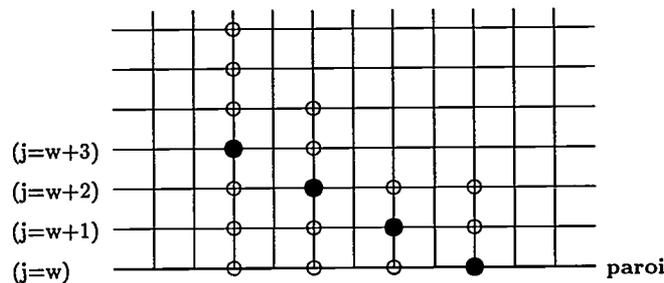


Figure 1.7: Condition à l'ordre 2. Schéma de Tam et Webb pour $j \geq w + 3$, schéma centré à l'ordre 4 pour $j = w + 2$, centré à l'ordre 2 pour $j = w + 1$ et décentré à l'ordre 2 pour $j = w$ (seulement pour v).

1.2.5.6 Conclusion

Pour imposer une condition de réflexion (paroi glissante), on dispose donc de plusieurs méthodes efficaces : caractéristiques, points images ou condition de Tam et Dong. On testera leur précision relative lors du premier cas test.

On s'aperçoit qu'il n'existe pas de formulation simple et exacte pour prendre en compte la condition limite d'adhérence pour un fluide visqueux. Même si certaines conditions sont acceptables mathématiquement, cela ne signifie pas que le problème soit bien posé physiquement (par exemple parce que la condition de paroi génère de l'entropie quand elle n'est pas supposée le faire). C'est pourquoi, il faudrait parler de *traitement* à la paroi plutôt que de *condition* de

paroi en se posant la question de la compatibilité de ce traitement numérique avec la condition physique que l'on veut imposer. Il faut essayer de comprendre la répercussion physique du traitement numérique en prenant soin d'éviter les sur-spécifications qui se produisent lorsqu'on calcule séparément toutes les variables en surimposant la condition d'adhérence. Il n'existe bien sûr pas de condition idéale et il faut chercher un compromis qui minimise les erreurs numériques. Cela passe par une implémentation ordonnée en évitant les redondances mais aussi par des techniques additionnelles comme le raffinement du maillage près de la paroi et l'utilisation d'une viscosité numérique qui filtre les oscillations parasites dues à l'inexactitude de la modélisation. Plusieurs cas tests vont permettre d'établir le compromis précision-robustesse nécessaire pour tenir compte de singularités géométriques (comme les angles de la cavité).

1.3 Cas tests de validation

Afin d'estimer l'efficacité de l'algorithme et des conditions limites, on réalise plusieurs cas tests. Le code de départ, ALESIA 2-D/3-D, a été développé par C. Bogey pour des écoulements libres (sans paroi) et a déjà été validé pour de nombreuses configurations dans sa thèse²¹ : rayonnement de deux tourbillons corotatifs, d'une couche de mélange bidimensionnelle excitée ou d'un jet rond 3-D. Des cas tests de validation des conditions de non-réflexion 2-D et 3-D pour des perturbations acoustiques ou aérodynamiques y sont présentés. L'adjonction des parois dans le code aéroacoustique ALESIA existant nécessite de nouveaux développements et plusieurs vérifications supplémentaires. D'abord, pour un écoulement non visqueux, on doit tester la précision du caractère réfléchissant de la paroi et surtout la compatibilité de l'implémentation numérique avec les méthodes utilisées dans ALESIA, notamment les conditions de non-réflexion. Pour cela, on étudie la réflexion d'une impulsion de pression en écoulement uniforme sur une paroi plane au §1.3.1. Ensuite, pour un écoulement visqueux, la condition d'adhérence à la paroi induit des tensions visqueuses importantes alors qu'elles étaient de second ordre pour des écoulements libres. Des cas tests purement visqueux sont réalisés pour valider le caractère adhérent de la condition de paroi et pour vérifier que l'ordre de résolution des flux visqueux du code ALESIA reste suffisant lorsque les contraintes visqueuses sont déterminantes pour le calcul de l'écoulement. Pour cela, on simule des configurations classiques pour lesquelles une solution des équations de Navier-Stokes est connue : le second problème de Stokes est étudié au §1.3.2, l'écoulement de Poiseuille dans une conduite plane au §1.3.3 et enfin le développement d'une couche limite laminaire est présenté au §1.3.3. On teste ainsi différentes implémentations pour la condition de paroi, pour les flux visqueux et les flux de chaleur, pour les conditions limites d'entrée, de sortie ou de rayonnement sans changer l'algorithme de résolution des flux eulériens.

Ces cas tests sont difficiles pour le code ALESIA car les conditions limites de non réflexion sont basées sur le caractère hyperbolique des équations d'Euler qui n'a pas le rôle déterminant pour ces écoulements essentiellement visqueux. De plus, lors de la comparaison avec les solutions analytiques, il faut garder à l'esprit que celles-ci sont obtenues avec l'hypothèse d'incompressibilité alors que le code résout les équations de Navier-Stokes compressibles. Les effets dus à la compressibilité interviennent essentiellement dans la phase transitoire et pour l'établissement d'une solution parfaitement stationnaire.

1.3.1 Réflexion d'une impulsion de pression en écoulement uniforme

On considère la réflexion d'une impulsion acoustique bidimensionnelle sur une paroi plane en présence d'un écoulement uniforme, comme indiqué sur la figure 1.8. Le mouvement du fluide non visqueux est régi par les équations d'Euler et le nombre de Mach de l'écoulement est $M = U_\infty/c_\infty = 0.5$, où c_∞ est la vitesse du son. L'impulsion acoustique est générée par une perturbation initiale sur la pression avec une répartition gaussienne centrée en $(0, 25)$. Les conditions initiales sont donc :

$$t = 0 \quad u = U_\infty \quad v = 0$$

$$p - p_\infty = \rho - \rho_\infty = \exp \left\{ -\ln 2 \left[\frac{x_1^2 + (x_2 - 25)^2}{(5\Delta x)^2} \right] \right\}$$

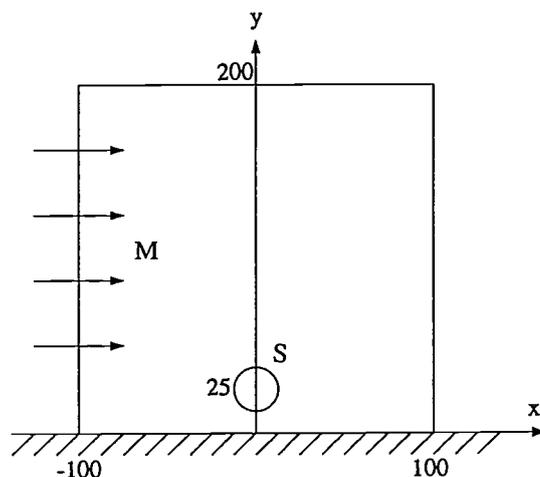


Figure 1.8: Réflexion d'une impulsion de pression sur une paroi en présence d'un écoulement uniforme à $M=0.5$.

Pour la simulation numérique, on utilise un maillage cartésien régulier de 201×201 points avec $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$ m. La pression de référence est fixée à 10^5 Pa et la masse volumique de référence vaut 1.22 kg/m^3 . Le pas de temps Δt vaut $0.7\Delta y/c_\infty = 2.06 \times 10^{-3}$ s.

La configuration choisie est exactement celle proposée dans le 1^{er} problème de la catégorie 4 du 1^{er} workshop ICASE-NASA.¹⁰² On compare les résultats à la solution analytique obtenue pour cette impulsion gaussienne[†].

Pour ce cas test, différentes formulations de la condition de paroi ont été testées :

- **utilisation des caractéristiques**, définies pour une paroi non visqueuse (glissante) au §1.2.5.1.
- **utilisation de points images** sur trois rangées de points pour les 4 variables primitives u_1 , u_2 , p et ρ . On applique une condition antisymétrique pour u_2 et symétrique pour les trois autres variables comme proposé au §1.2.5.2, figure 1.3.
- **condition de Tam et Dong**, avec un point fantôme sur la pression et les autres variables u_1 , u_2 et ρ calculées à partir des points intérieurs en utilisant les schémas décentrés de Tam et Webb (voir §1.2.5.3 et figure 1.5).
- **condition à l'ordre 4** présentée au §1.2.5.4. On utilise un point fantôme comme la condition de Tam et Dong mais pour les trois dernières rangées de points adjacentes à la paroi, on utilise des différences finies d'ordre 4 centrées ou décentrées plutôt que le schéma sur 7 points de Tam et Webb (voir figure 1.6).
- **condition à l'ordre 2** présentée au §1.2.5.5. On dégrade l'ordre du schéma spatial : ordre 4 centré pour la 3^{ème} rangée, ordre 2 centré pour la 2^{ème} et ordre 2 décentré pour la 1^{ère} rangée sauf pour la dérivée de pression qui vaut simplement zéro en appliquant la méthode du point fantôme de Tam et Dong à l'ordre 2 (figure 1.7).

Afin d'établir une comparaison avec les résultats obtenus par les participants au workshop ICASE-NASA, on présente les fluctuations de pression $p - p_\infty$ au temps $t = 100$, adimensionné par $\Delta x/c_\infty$, correspondant à 160 itérations temporelles. Pour ce temps, on visualise deux isocontours positifs et un isocontour négatif sur lesquels on superpose la solution analytique[†]. Les résultats de la figure 1.9 utilisent la condition à l'ordre 2; les autres conditions fournissent exactement la même image. Pour s'en rendre compte, on trace une coupe du champ de pression le long de la ligne horizontale $y = 25$ sur la figure 1.10. Seul un important zoom autour de la dépression située entre les fronts d'onde direct et réfléchi (figure 1.10 à droite) permet de séparer les différentes méthodes. On s'aperçoit que la condition basée sur les caractéristiques

[†]La solution analytique est rappelée page 11 du workshop. L'implémentation numérique utilisée est fournie généreusement par C. Bailly.

[†]Les résultats du workshop pour les mêmes isocontours et le même temps sont rassemblés p.351 à 356 de la référence.¹⁰²

est la moins précise, suivie par la condition qui utilise trois rangées de points images. Les trois autres fournissent des résultats similaires, parfaitement confondus avec la solution analytique (ligne grise). Notons qu'aucune viscosité artificielle n'a été ajoutée pour ces simulations à partir des équations d'Euler.

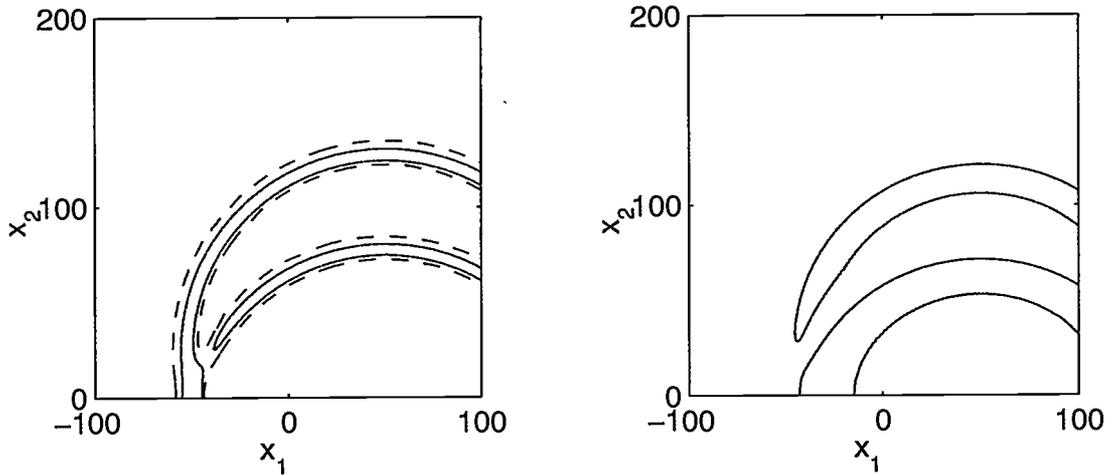


Figure 1.9: Réflexion d'une impulsion de pression sur une paroi à $t = 100$. A gauche, isocontours de pression 1×10^{-2} Pa (---) calculé, 5×10^{-2} Pa (—) calculé et 5×10^{-2} Pa (.....) analytique. A droite, isocontours -1×10^{-2} calculé Pa (—) et -1×10^{-2} Pa (.....) analytique.

On calcule l'erreur par rapport à la solution analytique au temps adimensionnel $t = 100$ avec les normes L_1 et L_2 pour quantifier les écarts entre les méthodes.

$$\text{err}L_1 = \|p - p_{ana}\|_{(1)} = \max_{x_1, x_2} |p - p_{ana}|$$

$$\text{err}L_2 = \|p - p_{ana}\|_{(2)} = \sqrt{\sum_{x_1, x_2} (p - p_{ana})^2}$$

	caractéristiques	3 points images	Tam et Dong	cond. ordre 4	cond. ordre 2
err L_1 (%)	2.51	0.34	0.25	0.25	0.27
err L_2 (%)	0.27	0.04	0.009	0.009	0.02

Tableau 1.1: Erreur par rapport à la solution analytique au temps $t = 100$.

Afin de différencier les trois méthodes utilisant un point fantôme, on trace l'évolution des normes L_1 et L_2 de l'erreur en fonction du temps sur la figure 1.11. On constate d'abord que les erreurs obtenues avec la condition à l'ordre 4 et avec le schéma de Tam et Webb (condition de Tam et Dong) sont superposées et sont légèrement inférieures à celle obtenue avec la condition à l'ordre 2. L'évolution de la norme L_2 sur la figure 1.11(b) indique que les écarts restent faibles jusqu'à $t = 100$ puis augmentent significativement pour les trois méthodes. Ceci correspond au fait, qu'après $t = 100$, les fluctuations de pression ou les ondes parasites atteignent les frontières

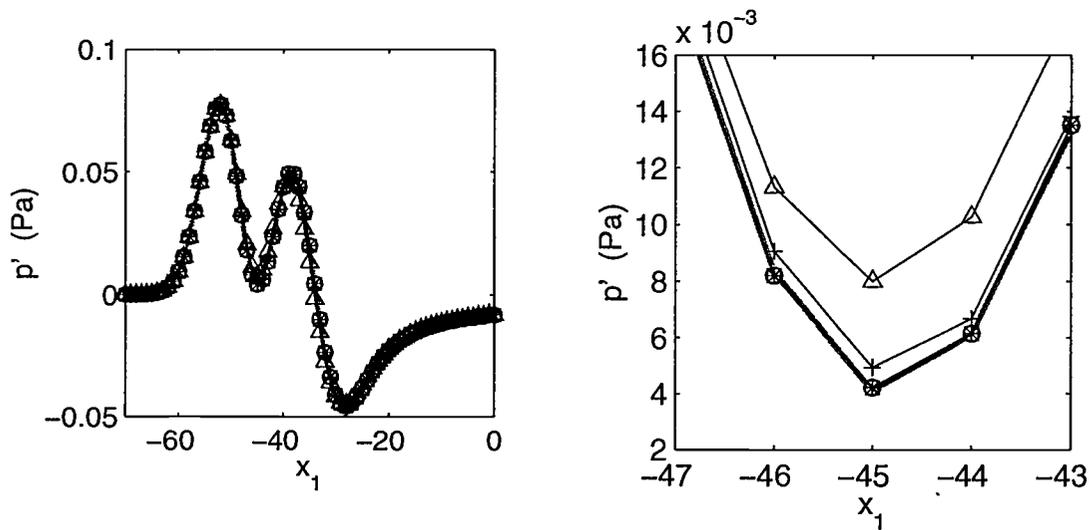


Figure 1.10: Réflexion d'une impulsion de pression sur une paroi. Coupe des fluctuations de pression le long de $y = 25$ m, obtenues avec les différentes conditions de paroi : Δ , caractéristiques; $+$, 3 points images; \square , condition de Tam et Dong; \circ , condition à l'ordre 4; $*$, condition à l'ordre 2; —, solution analytique. A gauche, vue globale et, à droite, zoom.

du domaine de calcul. On visualise alors essentiellement les erreurs dues aux conditions de rayonnement. On peut en tirer deux conclusions importantes. D'abord, les écarts entre les différentes conditions de paroi sont négligeables par rapport aux erreurs résultant des conditions de rayonnement. La condition de paroi ne constituera pas directement le facteur limitant pour la précision globale du calcul. Ensuite, on constate que les écarts entre l'ordre 2 et l'ordre 4 (confondu avec Tam et Dong) sont très largement accrus lorsque les fluctuations réfléchies atteignent les frontières libres. Ceci illustre l'interconnexion entre les différentes conditions limites et le problème de compatibilité entre elles.

L'évolution de la norme L_1 (maximum local de l'erreur) sur la figure 1.11(a) fait ressortir deux pics pour $t = 180$ et $t = 230$, également visibles sur l'évolution de la norme L_2 . Ils correspondent aux instants où les fluctuations de pression réfléchies par la paroi frappent respectivement la frontière amont et la frontière supérieure. Ces deux instants critiques sont tracés sur les figures 1.12 et 1.13. Les erreurs sont visibles sur l'isocontour le plus faible (en gris). Les oscillations numériques sont plus fortes à l'ordre 2 (figure 1.12(a) et 1.13(a)) qu'à l'ordre 4 (figure 1.12(b) et 1.13(b)), notamment dans le coin en haut à gauche. On note même la présence d'une onde réfléchie à l'ordre 2. A $t = 180$, elle est visible en $(x_1 \simeq -40; x_2 \simeq 200)$ et perturbe les autres isocontours (par exemple, l'isocontour 10^{-2} est "coupé" en $(x_1 \simeq 20; x_2 \simeq 150)$). A $t = 230$, elle est facilement identifiable au milieu du domaine. Cette onde réfléchie n'est pas présente à l'ordre 4 et correspond à une onde qui n'est pas physique et se réfléchit dans le domaine de calcul. Elle a pour origine des oscillations maille à maille dues aux différences finies à l'ordre 2. Pour

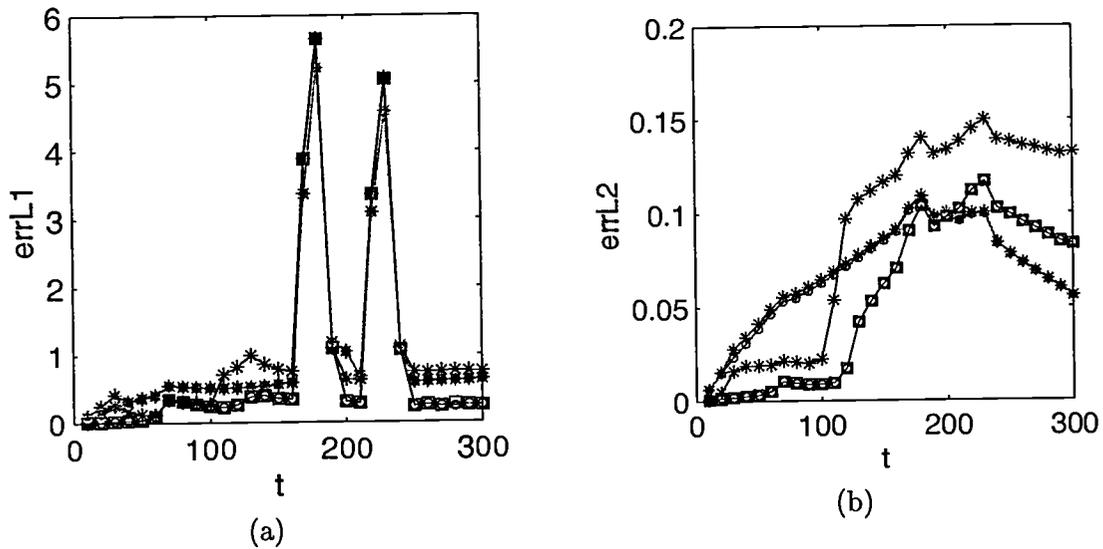


Figure 1.11: Réflexion d'une impulsion de pression sur une paroi. Evolution de l'erreur en fonction du temps adimensionnel. (a), norme L_1 ; (b), norme L_2 . \square , condition de Tam et Dong; \circ , condition à l'ordre 4; $*$, condition à l'ordre 2; \diamond , condition à l'ordre 4 avec filtrage sélectif; $*$, condition à l'ordre 2 avec filtrage sélectif.

réduire ces oscillations, on introduit le filtrage sélectif défini par (1.1) avec $R_s = 5$. L'évolution temporelle des erreurs L_1 et L_2 pour les conditions de paroi à l'ordre 2 et à l'ordre 4 est donnée par les courbes grises de la figure 1.11. On constate qu'en présence de viscosité artificielle, les erreurs des deux conditions de paroi sont presque confondues. Pour $t < 100$, le niveau de l'erreur est augmenté à cause de la dissipation introduite. Après $t = 100$, on atténue les erreurs et les parasites numériques dissipés ne viennent plus se réfléchir sur les frontières libres (surtout à l'ordre 2). On visualise l'effet du filtrage aux deux temps critiques $t = 180$ et $t = 230$ sur la condition à l'ordre 2 (figure 1.12(d) et 1.13(d)) et sur la condition à l'ordre 4 (figure 1.12(e) et 1.13(e)). La différence est nette pour l'ordre 2 où l'onde réfléchie a été totalement dissipée. On constate néanmoins que le caractère dissipatif de la viscosité artificielle a fait disparaître l'isocontour 10^{-2} (ligne continue noire) et a légèrement étalé les autres à $t = 230$.

Ces cas tests illustrent donc bien les principaux aspects d'une simulation acoustique : l'influence de l'ordre du schéma, les oscillations parasites dues aux différences finies, la compatibilité entre les différentes conditions limites et le compromis filtrage des parasites / dissipation de la solution lors de l'adjonction d'une viscosité artificielle. Concernant la condition de paroi, on conclut que le meilleur compromis est la condition à l'ordre 4, plus précise que celle à l'ordre 2 et moins coûteuse que la condition de Tam et Dong. Après l'adjonction du filtrage sélectif, la condition à l'ordre 2 paraît suffisante.

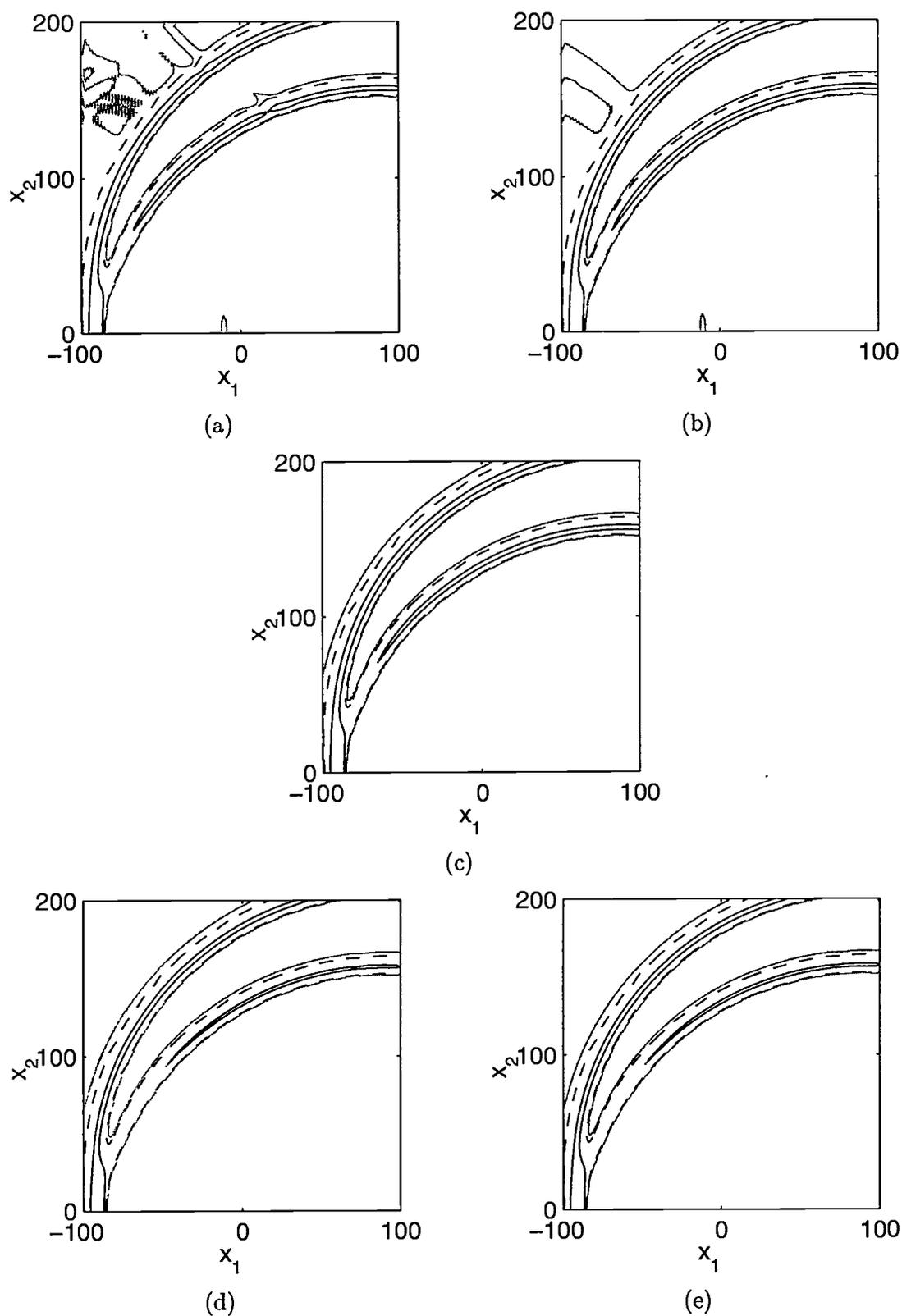


Figure 1.12: Réflexion d'une impulsion de pression sur une paroi à $t = 180$. Isocontours de pression 5×10^{-2} Pa (—), 1×10^{-2} Pa (---) et 1×10^{-3} Pa (-·-·-). (a), condition à l'ordre 2 sans filtrage sélectif; (b), condition à l'ordre 4 sans filtrage sélectif; (c), solution analytique; (d), condition à l'ordre 2 avec filtrage sélectif; (e), condition à l'ordre 4 avec filtrage sélectif;

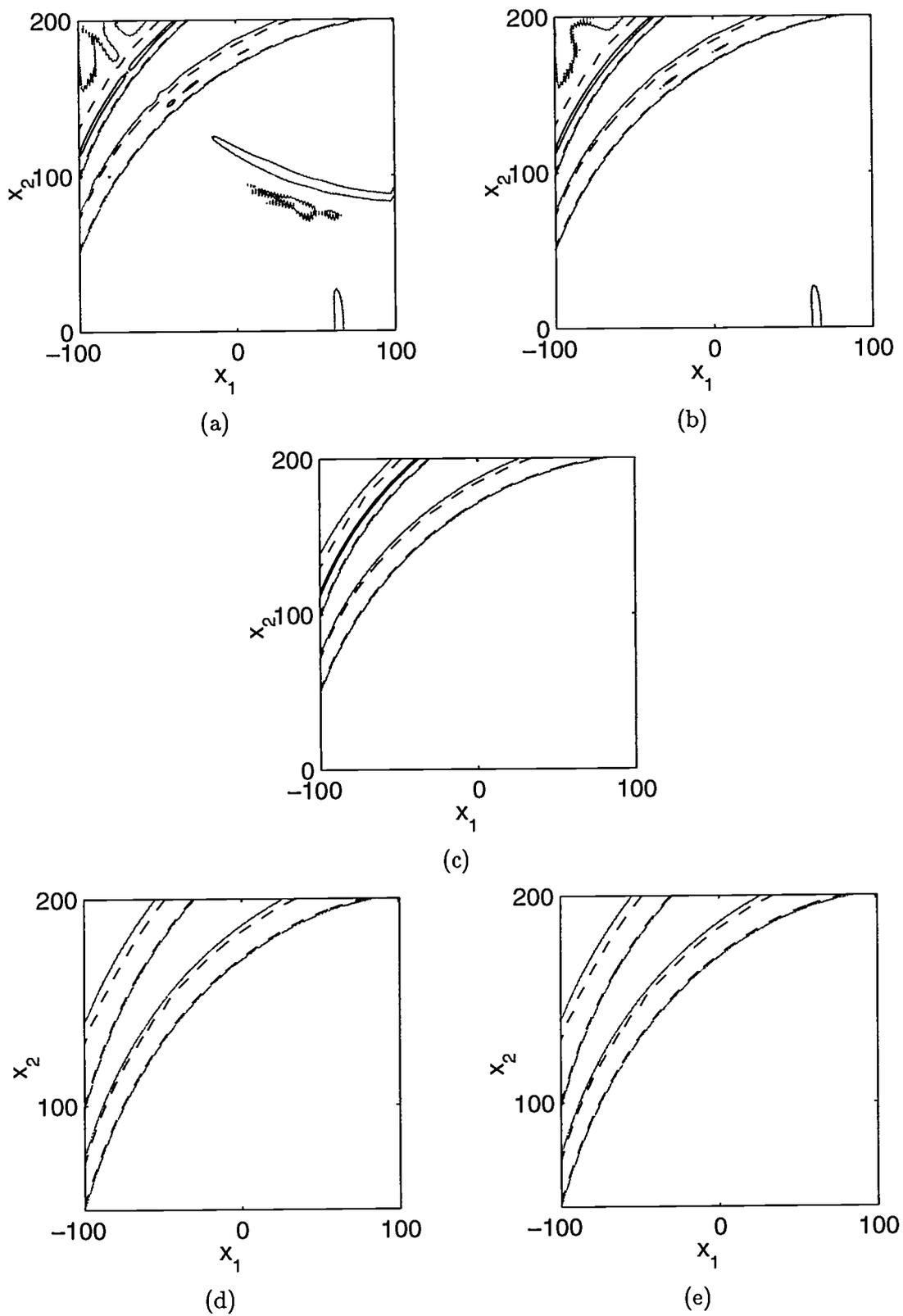


Figure 1.13: Réflexion d'une impulsion de pression sur une paroi à $t = 230$. Isocontours de pression 5×10^{-2} Pa (—), 1×10^{-2} Pa (---) et 1×10^{-3} Pa (-·-·-). (a), condition à l'ordre 2 sans filtrage sélectif; (b), condition à l'ordre 4 sans filtrage sélectif; (c), solution analytique; (d), condition à l'ordre 2 avec filtrage sélectif; (e), condition à l'ordre 4 avec filtrage sélectif;

1.3.2 Paroi oscillante de Stokes

Ce premier cas test visqueux correspond au second problème de Stokes et illustre l'effet d'une frontière oscillante sur un fluide. Le fluide est initialement au repos dans un demi-plan infini au dessus d'une paroi en $y = 0$. Le problème consiste à déterminer les mouvements du fluide lorsque la paroi oscille dans son plan à la vitesse :

$$u(x, 0, t) = u_{max} \cos \omega t$$

C'est une des toutes premières configurations pour lesquelles une solution exacte des équations de Navier-Stokes a été obtenue. On la doit à Stokes (1851)^{280†}. Elle s'écrit :

$$u(x, y, t) = u_{max} \exp(i\omega t) \exp\left(-y\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}\right)$$

ou $u(x, y, t) = u_{max} e^{-\eta} \cos(\omega t - \eta)$

en posant $\eta = y\sqrt{\omega/2\nu}$. On peut définir l'épaisseur δ de la couche de Stokes pour laquelle l'amplitude de la vitesse ne vaut plus que 1% de u_{max} . On obtient :

$$\delta \simeq 6.5\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$$

Ce cas test va permettre d'étudier l'implémentation des flux visqueux. Pour l'évaluation de ces flux, on teste une discrétisation avec des différences finies d'ordre 2 et 4 et une intégration temporelle à chaque sous-étape du schéma de Runge-Kutta (1.2) soit à l'ordre 4 ou seulement à la dernière sous-étape soit à l'ordre 1. Les différentes configurations sont donc :

- ordre 2 en espace et ordre 1 en temps[‡] :

$$\mathbf{K}_{v,i,j}^n = \frac{1}{2\Delta x} (\mathbf{E}_{v_{i+1,j}} - \mathbf{E}_{v_{i-1,j}}) + \frac{1}{2\Delta y} (\mathbf{F}_{v_{i,j+1}} - \mathbf{F}_{v_{i,j-1}})$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^1 = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_1 \Delta t \mathbf{K}_{e,i,j}^n$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^2 = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_2 \Delta t \mathbf{K}_{e,i,j}^1$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^3 = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_3 \Delta t \mathbf{K}_{e,i,j}^2$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_4 \Delta t (\mathbf{K}_{e,i,j}^3 + \mathbf{K}_{v,i,j}^n)$$

- ordre 2 en espace et ordre 4 en temps :

$$\mathbf{K}_{v,i,j}^n = \frac{1}{2\Delta x} (\mathbf{E}_{v_{i+1,j}} - \mathbf{E}_{v_{i-1,j}}) + \frac{1}{2\Delta y} (\mathbf{F}_{v_{i,j+1}} - \mathbf{F}_{v_{i,j-1}})$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^1 = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_1 \Delta t (\mathbf{K}_{e,i,j}^n + \mathbf{K}_{v,i,j}^n)$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^2 = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_2 \Delta t (\mathbf{K}_{e,i,j}^1 + \mathbf{K}_{v,i,j}^1)$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^3 = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_3 \Delta t (\mathbf{K}_{e,i,j}^2 + \mathbf{K}_{v,i,j}^2)$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_4 \Delta t (\mathbf{K}_{e,i,j}^3 + \mathbf{K}_{v,i,j}^3)$$

[†]voir aussi Schlichting,²⁵⁹ p.85, White,³⁰⁶ p.148 ou Panton,²¹⁶ p.266.

[‡]Il s'agit de la version d'origine du code ALESIA. \mathbf{K}_e et \mathbf{K}_v sont les termes d'intégration des flux eulériens et visqueux. Les notations sont définies au §1.1.3.

- ordre 4 en espace et ordre 1 en temps :

$$\mathbf{K}_{\mathbf{v},i,j}^n = \frac{1}{12\Delta x} (\mathbf{E}_{\mathbf{v},i-2,j} - 8\mathbf{E}_{\mathbf{v},i-1,j} + 8\mathbf{E}_{\mathbf{v},i+1,j} - \mathbf{E}_{\mathbf{v},i+2,j}) \\ + \frac{1}{12\Delta y} (\mathbf{F}_{\mathbf{v},i,j-2} - 8\mathbf{F}_{\mathbf{v},i,j-1} + 8\mathbf{F}_{\mathbf{v},i,j+1} - \mathbf{F}_{\mathbf{v},i,j+2})$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^1 = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_1 \Delta t \mathbf{K}_{\mathbf{e},i,j}^n \quad \mathbf{U}_{i,j}^2 = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_2 \Delta t \mathbf{K}_{\mathbf{e},i,j}^1 \\ \mathbf{U}_{i,j}^3 = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_3 \Delta t \mathbf{K}_{\mathbf{e},i,j}^2 \quad \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_4 \Delta t (\mathbf{K}_{\mathbf{e},i,j}^3 + \mathbf{K}_{\mathbf{v},i,j}^n)$$

- ordre 4 en espace et ordre 4 en temps :

$$\mathbf{K}_{\mathbf{v},i,j}^n = \frac{1}{12\Delta x} (\mathbf{E}_{\mathbf{v},i-2,j} - 8\mathbf{E}_{\mathbf{v},i-1,j} + 8\mathbf{E}_{\mathbf{v},i+1,j} - \mathbf{E}_{\mathbf{v},i+2,j}) \\ + \frac{1}{12\Delta y} (\mathbf{F}_{\mathbf{v},i,j-2} - 8\mathbf{F}_{\mathbf{v},i,j-1} + 8\mathbf{F}_{\mathbf{v},i,j+1} - \mathbf{F}_{\mathbf{v},i,j+2})$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^1 = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_1 \Delta t (\mathbf{K}_{\mathbf{e},i,j}^n + \mathbf{K}_{\mathbf{v},i,j}^n) \quad \mathbf{U}_{i,j}^2 = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_2 \Delta t (\mathbf{K}_{\mathbf{e},i,j}^1 + \mathbf{K}_{\mathbf{v},i,j}^1) \\ \mathbf{U}_{i,j}^3 = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_3 \Delta t (\mathbf{K}_{\mathbf{e},i,j}^2 + \mathbf{K}_{\mathbf{v},i,j}^2) \quad \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_4 \Delta t (\mathbf{K}_{\mathbf{e},i,j}^3 + \mathbf{K}_{\mathbf{v},i,j}^3)$$

1.3.2.1 Configuration numérique

Pour simuler une paroi oscillante, on remplace simplement la condition d'adhérence $u(x, 0) = 0$ par $u(x, 0) = u_{max} \cos \omega t$ dans la condition de paroi à l'ordre 2. Pour les frontières du domaine, on impose des conditions de rayonnement définies par (1.4). On utilise un maillage cartésien de 61×71 points. Les mailles sont étirées à un taux de 2% dans la direction verticale à partir de la paroi où l'on a $\Delta y_{min} = 6.37 \times 10^{-8}$ m. Le maillage est régulier dans la direction horizontale avec $\Delta x = 10\Delta y_{min}$. Le CFL vaut 0.7 et fournit $\Delta t \simeq 6.45 \times 10^{-8}$ s. La période des oscillations est $T = 2\pi/\omega = 500\Delta t$ et $u_{max} = 1$ m/s.

La simulation est réalisée sur trois périodes (1500 itérations). On trace sur la figure 1.14(a) l'évolution de la vitesse en fonction de la coordonnée adimensionnelle η au centre du domaine de calcul ($x = 31\Delta x$) pour chaque implémentation des termes visqueux. Les profils sont superposés pour les 4 implémentations et sont en très bon accord avec la solution analytique. La figure 1.14(b) montre l'évolution temporelle de l'erreur relative sur la vitesse définie par :

$$\text{err} = \frac{1}{L_y} \sqrt{\int_0^{L_y} \frac{(u(y) - u_{ana}(y))^2}{u_{max}} dy}$$

La convergence est similaire pour les 4 simulations. On peut noter une légère amélioration de la convergence lorsqu'on augmente l'ordre d'intégration spatiale ou temporelle, conformément à ce qui est attendu. Cependant, les gains réalisés restent très modestes. L'erreur oscille un peu avec une période égale à la demi-période imposée. Elle reste donc corrélée aux mouvements du

fluide, les phases autour de $3T/8$ ou $3T/4$ induisant une erreur maximale. L'erreur locale définie par :

$$\text{err}_y = \frac{|u(y) - u_{ana}(y)|}{u_{max}},$$

est représentée en fonction de η sur la figure 1.14(c) et se révèle peu sensible à l'influence de l'intégration temporelle. Autour de $\eta = 1$, la figure met en évidence une erreur environ 3 fois plus importante pour les différences finies d'ordre 2 par rapport à l'ordre 4. On note surtout des oscillations maille à maille à l'ordre 2.

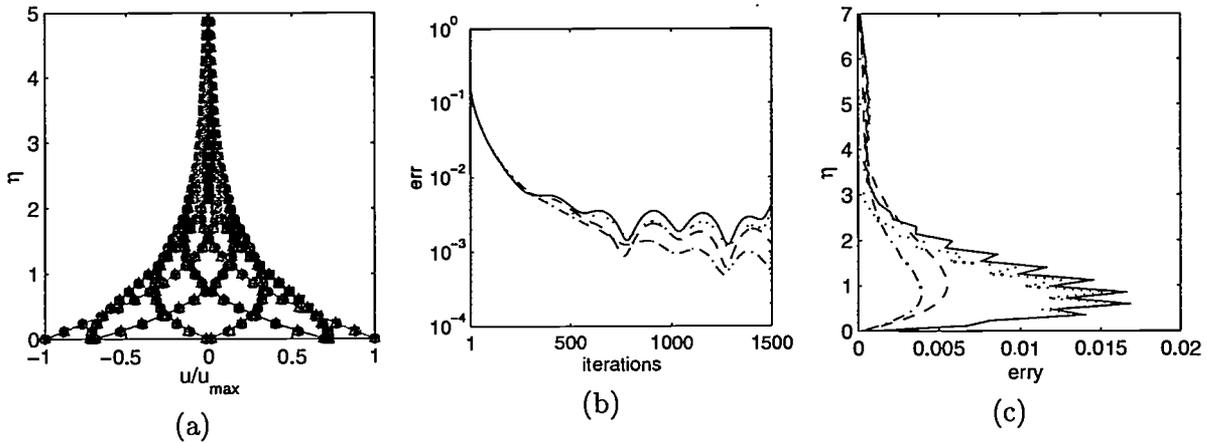


Figure 1.14: Paroi oscillante de Stokes. (a) Profil de vitesse à 8 instants successifs ($\frac{T}{8}; \frac{T}{4}; \frac{3T}{8}; \frac{T}{2}; \frac{5T}{8}; \frac{3T}{4}; \frac{7T}{8}; T$) pour la dernière période calculée. On représente les différentes implémentations des termes visqueux : \square , ordre 2 en espace et ordre 1 en temps; Δ , ordre 2 en espace et ordre 4 en temps; \circ , ordre 4 en espace et ordre 1 en temps; $*$, ordre 4 en espace et ordre 4 en temps; (—), solution analytique. (b) Evolution temporelle de l'erreur et (c) erreur locale suivant la verticale : (—), ordre 2 en espace et ordre 1 en temps; (\cdots), ordre 2 en espace et ordre 4 en temps; (---), ordre 4 en espace et ordre 1 en temps; ($-\cdot-\cdot-$), ordre 4 en espace et ordre 4 en temps.

1.3.2.2 Influence de la discrétisation spatiale

On conserve les mêmes paramètres que dans le paragraphe précédent, $T = 500\Delta t$ et $u_{max} = 1$ m/s. On multiplie Δy_{min} par 2 et on divise Δt par 2 en prenant $CFL = 0.7/2 = 0.35$. On réduit le nombre de points du maillage vertical à 41.

Les profils de vitesse de la figure 1.15(a) restent en bon accord avec la solution analytique. On constate néanmoins des écarts visibles pour les phases $T/4$, $3T/8$, $3T/4$ ou $7T/8$ lorsqu'on utilise un schéma spatial à l'ordre 2. Ces différences sont confirmées par l'évolution temporelle de l'erreur sur la figure 1.15(b). Elle souligne aussi le peu d'influence de l'augmentation de l'ordre d'intégration temporelle. Localement, l'erreur réalisée pour les différences finies à l'ordre 2 peut être 5 fois supérieure à celle réalisée à l'ordre 4 (figure 1.15(c)). Ces erreurs locales sont liées à des oscillations maille à maille encore plus marquées.

On peut conclure de ce cas test que l'utilisation des différences finies d'ordre 2 peut conduire

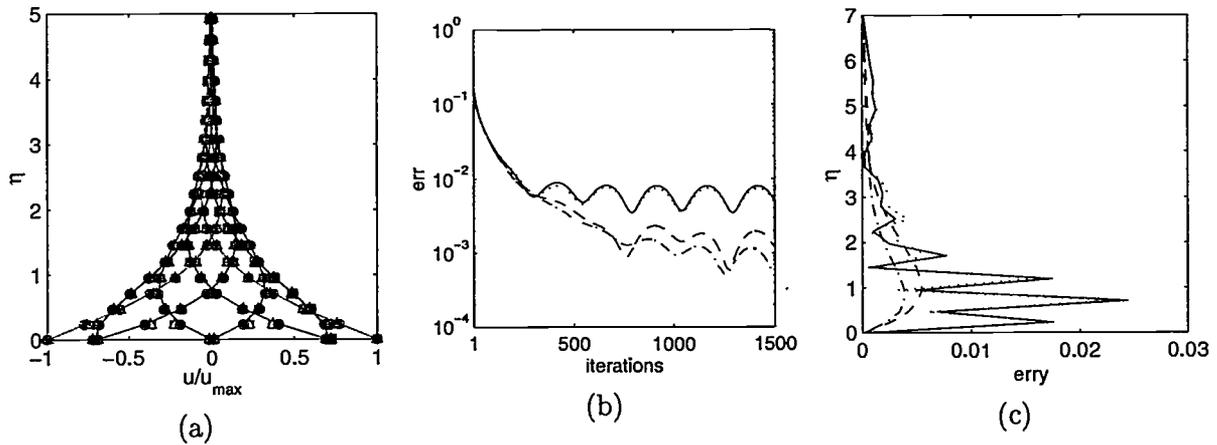


Figure 1.15: Paroi oscillante de Stokes. (a) Profil de vitesse à 8 instants successifs ($\frac{T}{8}; \frac{T}{4}; \frac{3T}{8}; \frac{T}{2}; \frac{5T}{8}; \frac{3T}{4}; \frac{7T}{8}; T$) pour la dernière période calculée. On représente les différentes implémentations des termes visqueux : \square , ordre 2 en espace et ordre 1 en temps; Δ , ordre 2 en espace et ordre 4 en temps; \circ , ordre 4 en espace et ordre 1 en temps; $*$, ordre 4 en espace et ordre 4 en temps; (—), solution analytique. (b) Evolution temporelle de l'erreur et (c) erreur locale suivant la verticale : (—), ordre 2 en espace et ordre 1 en temps; (\cdots), ordre 2 en espace et ordre 4 en temps; (---), ordre 4 en espace et ordre 1 en temps; ($-\cdot-\cdot-$), ordre 4 en espace et ordre 4 en temps.

à des oscillations numériques, absentes à l'ordre 4, même si l'erreur globale reste du même ordre de grandeur. Ces oscillations peuvent être atténuées par un filtrage sélectif supplémentaire. On note également que le gain réalisé en passant l'intégration temporelle de l'ordre 1 à l'ordre 4 est négligeable, certainement parce que l'échelle de temps des phénomènes visqueux est beaucoup plus grande que celle des termes convectifs. Compte tenu du surcoût numérique engendré par l'intégration des flux visqueux à chaque étape du Runge-Kutta ($\simeq 10\%$ du temps de calcul), on continuera d'intégrer ces flux à la dernière étape.

1.3.3 Ecoulement de Poiseuille dans une conduite plane

Ce troisième cas test concerne un écoulement à très bas nombre de Reynolds avec des parois **isothermes non glissantes** : l'écoulement de Poiseuille. La géométrie correspond à un domaine bidimensionnel de demi-largeur l et de longueur L . La condition d'entrée est :

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u_0 \left[\cos\left(\frac{\pi y}{2l}\right)^2 \right] \\ v(0, y, t) = 0 \\ T(0, y, t) = T_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

où u_0 est la vitesse maximale d'entrée. Ce profil est différent du profil de Poiseuille établi mais assure $u = 0$ sur les parois. Il est moins contraignant numériquement qu'un profil constant $u(0, y, t) = u_0$ qui mettrait en défaut la condition d'adhérence, tout en imposant le même débit

massique en entrée :

$$\dot{m} = u_0 l \quad (1.16)$$

La configuration choisie est résumée sur la figure 1.16. Le nombre de Reynolds est $Re = u_0 l / \nu = 15$ et le nombre de Mach vaut $M = u_0 / c_\infty = 0.1$. La pression extérieure est fixée à la pression atmosphérique $p_\infty = 1 \text{ atm}$.

Ce cas test reproduit la configuration étudiée par Poinot et Lele²²⁹ pour tester leur extension des conditions limites caractéristiques aux équations de Navier-Stokes (NSCBC pour *Navier-Stokes Characteristic Boundary Conditions*). Il va nous permettre de tester la compatibilité de différentes conditions d'entrée et de sortie dans un cas défavorable où les contraintes visqueuses (tensions visqueuses et flux de chaleur) régissent l'écoulement. On pourra comparer nos résultats à ceux de Poinot et Lele.

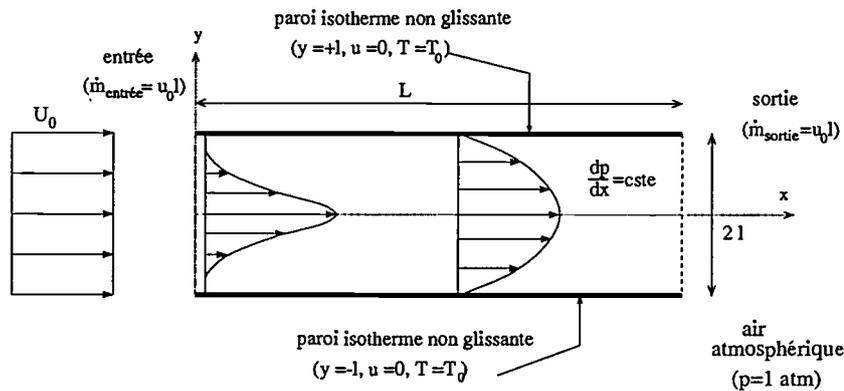


Figure 1.16: Écoulement de Poiseuille dans une conduite plane. Schéma de la configuration étudiée.

1.3.3.1 Solution analytique

Le code de calcul résout les équations de Navier-Stokes compressibles or il n'existe pas de solution stationnaire pour un écoulement de Poiseuille compressible! En effet, comme le soulignent Illingworth¹³⁰ et Panton,²¹⁵ une solution simple est obtenue pour un écoulement incompressible dans la direction x entre deux parois horizontales en $y = \pm l$ car l'écoulement est indépendant de x et donc la vitesse verticale v est exactement nulle. Dans ce cas, la conservation de la masse fournit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

et pour $v = 0$, la masse volumique reste à sa valeur hydrostatique constante. La seconde équation de conservation de la quantité de mouvement est alors réduite à $\partial p / \partial y = 0$ et la pression reste aussi à sa valeur hydrostatique dans un plan $x = cste$. L'équation d'énergie impose cependant une production de chaleur par les contraintes visqueuses. En incompressible, la dynamique est

découplée de la thermique, ce qui se traduit par $\rho = \text{cste}$, et le gradient de pression $\partial p / \partial x$ est fixé par cette dissipation, produisant ainsi une perte de charge. En compressible, la situation est très différente puisque la dynamique et la thermique sont couplées au travers de la pression et de la masse volumique dans une moindre mesure.

Solution pour un fluide incompressible

Dans ce cas, la présence des effets visqueux dans la conduite impose un gradient de pression longitudinal constant :

$$\frac{dp}{dx} = -1.5\nu \frac{\rho_\infty \dot{m}_{\text{entrée}}}{l^3} = -1.5\nu \frac{\rho_\infty u_0}{l^2} \quad \text{en utilisant (1.16)}$$

La première équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2},$$

et, en intégrant avec les conditions limites $u(x, \pm l, t) = 0$, on trouve le profil parabolique classique d'un écoulement de Poiseuille :

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (l^2 - y^2) = u_m \left(1 - \frac{y^2}{l^2} \right) \quad (1.17)$$

où

$$u_m = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} l^2 = \frac{3}{4} u_0$$

Solution pour un fluide compressible

Pour un fluide incompressible, les relations précédentes montrent que la pression n'est pas constante mais est une fonction linéaire de x . Cependant, les équations d'un écoulement incompressible contiennent seulement un gradient de pression constant mais pas la pression de façon explicite. Au contraire, pour un fluide compressible, la pression va dépendre de x et il n'est plus possible de trouver une solution simple stationnaire.

Pour la configuration étudiée, on considère un gaz à très bas nombre de Reynolds. Les fluctuations de masse volumique seront donc très faibles ($\rho \simeq \rho_\infty$). De plus, si on considère une conduite de longueur finie L (voir figure 1.16), la perte de charge entre l'entrée et la sortie est négligeable comparée à la pression atmosphérique extérieure :

$$\frac{L}{l} \frac{1}{\text{Re}} M^2 \simeq 0.014 \ll 1 \quad \text{pour} \quad \frac{L}{l} = 10, \text{Re} = 15 \text{ et } M = 0.1$$

On peut donc négliger les variations de la pression absolue dans la conduite et la solution incompressible (1.17) constitue une bonne approximation pour le profil de vitesse.

Qu'en est-il des variations de température dans la conduite? Peut-on les déterminer pour un écoulement incompressible? Pour cela, il faut considérer l'équation de conservation de l'énergie complète écrite pour la température. Lorsqu'on la déduit de l'énergie interne, elle s'écrit :

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T + \Phi - T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.18)$$

Si on la déduit de l'enthalpie interne, elle s'écrit :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T + \Phi + \beta T \frac{dp}{dt} \quad (1.19)$$

L'hypothèse d'incompressibilité d'un fluide nécessite que le nombre de Mach soit faible donc que l'on peut négliger le terme de dissipation visqueuse. De plus, la conservation de masse impose $\nabla \cdot \mathbf{u} \simeq 0$. La conservation de l'énergie thermique (1.18) devient :

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} \simeq k \nabla^2 T$$

Les termes de convection sont équilibrés par les termes de conduction. En développant la dérivée particulière d/dt en 2-D, on a :

$$\rho c_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] \simeq k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Pour l'écoulement de Poiseuille incompressible, le premier terme du membre de gauche est nul (solution stationnaire), le 2^{ème} terme est nul (écoulement indépendant de x) et le 3^{ème} également (car $v = 0$). Dans le membre de droite, l'écoulement étant indépendant de x , il ne reste que le 2^{ème} terme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \simeq 0$$

Si on intègre avec les conditions limites isothermes ($T(x, \pm l, t) = T_0$), on aboutit à une température constante dans la conduite :

$$T(x, y, t) \simeq T_0$$

Le nombre de Mach $M = 0.1$ n'étant pas négligeable, reprenons le raisonnement à partir de (1.18) mais sans supprimer l'échauffement dû à la dissipation visqueuse. L'équation de conservation devient :

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} \simeq k \nabla^2 T + \Phi, \quad (1.20)$$

qui se réduit, dans la configuration étudiée, à :

$$0 \simeq k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

si l'on suppose T indépendant de x . En remplaçant u par son expression incompressible (1.17), il vient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \simeq -\frac{\mu}{k} u_m^2 \frac{4y^2}{l^4},$$

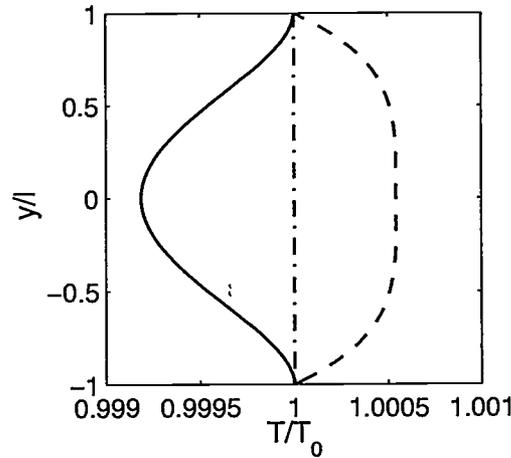


Figure 1.17: Ecoulement de Poiseuille dans une conduite plane. Solution analytique pour la température : (- - -) profil (1.21), (—) profil (1.22), (- · - ·) profil constant (1.20).

qui s'intègre en :

$$T(y) \simeq -\frac{\mu}{k} u_m^2 \frac{y^4}{3l^4} + C_1 y + C_2$$

En exprimant la condition limite $T(x, \pm l, t) = T_0$, on obtient :

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{\mu}{k} \frac{u_m^2}{3} + T_0$$

et la solution s'écrit :

$$T(y) - T_0 \simeq \frac{\mu}{k} \frac{u_m^2}{3} \left(1 - \frac{y^4}{l^4} \right) \quad (1.21)$$

C'est le résultat auquel aboutissent Schlichting^{259†} et White^{306‡}. La distribution de température correspond à une fonction du 4^{ème} degré, traduisant l'échauffement visqueux, avec un maximum de température au centre du canal (voir figure 1.17, ligne pointillée).

Reprenons encore une fois le raisonnement mais en partant cette fois-ci de (1.19) issue de l'enthalpie interne. Pour un gaz parfait, le coefficient d'expansion thermique $\beta = 1/T$ d'où :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T + \Phi + \frac{dp}{dt}$$

qui se réduit pour notre configuration à :

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial p}{\partial x} \simeq 0$$

soit, en utilisant (1.17) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \simeq -\frac{\mu}{k} u_m^2 \frac{4y^2}{l^4} + \frac{u_m y^2}{k l^2} \frac{dp}{dx} - \frac{u_m}{k} \frac{dp}{dx},$$

†formule (12.61) p.277.

‡formule (3.13) p.114.

qui s'intègre en :

$$T(y) \simeq -\frac{1}{2} \frac{\mu}{k} u_m^2 \frac{y^4}{l^4} + \frac{\mu}{k} u_m^2 \frac{y^2}{l^2} + C'_1 y + C'_2$$

Les conditions limites isothermes fournissent :

$$C'_1 = 0, \quad C'_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu}{k} u_m^2 + T_0$$

d'où :

$$T(y) - T_0 \simeq -\frac{\mu}{k} u_m^2 \left(\frac{1}{2} \frac{y^4}{l^4} - \frac{y^2}{l^2} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.22)$$

C'est la solution utilisée par Poinsot et Lele^{229†}. Elle est tracée sur la figure 1.17 (ligne continue).

Pour l'obtenir, on a supposé $\beta = 1/T$ donc que le fluide compressible suit la loi des gaz parfaits.

Il s'agit donc d'une solution incompressible pour un fluide compressible. Si on n'avait fait aucune hypothèse supplémentaire à partir de (1.19), on aurait obtenu :

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \beta T u \frac{dp}{dx} \simeq 0,$$

d'où l'équation différentielle :

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - 2\mu\beta \frac{u_m^2}{l^2} \left(1 - \frac{y^2}{l^2} \right) T + \mu u_m^2 \frac{4y^2}{l^4} \simeq 0,$$

plus difficile à résoudre pour T mais conduisant à un résultat différent de (1.21).

On aboutit au paradoxe suivant. Suivant les hypothèses effectuées, on obtient trois résultats contradictoires pour la distribution de température dans la conduite (regroupés sur la figure 1.17). Laquelle est valable pour un écoulement incompressible? Il faut noter que les variations de température obtenues avec (1.21) et (1.22) sont très faibles : respectivement 5×10^{-5} % et 8×10^{-5} % par rapport à T_0 . Elles ne sont donc pas significatives et la première solution $T(x, y, t) \simeq T_0$ est donc une bonne approximation pour un écoulement incompressible. On aboutit donc à la conclusion formulée par Panton^{216‡} : l'hypothèse d'incompressibilité pour un fluide avec des conditions limites **isothermes** nécessite un nombre de Mach faible et des variations de température faibles. Dans cette limite $\Delta T/T_0 \rightarrow 0$, pour un écoulement de Poiseuille, les termes de conduction et de dissipation et le terme $\nabla \cdot \mathbf{u}$ sont faibles mais les trois termes sont du même ordre de grandeur. L'hypothèse réalisée pour aboutir à (1.21) est donc erronée car les termes issus de $\nabla \cdot \mathbf{u}$ équilibrent ceux dus à la dissipation visqueuse. Si l'on s'intéresse au comportement incompressible d'un fluide compressible et que l'on veut accéder aux petites variations de température, il faut utiliser :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T + \Phi + \frac{dp}{dt}$$

†formule (52) p. 123.

‡§10.10, p.260.

conduisant à (1.22). Il est bien sûr équivalent d'utiliser (1.18) écrite pour un gaz parfait^{††} :

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T + \Phi - p \nabla \cdot \mathbf{u}$$

En effet, la conservation de la masse donne :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

et en utilisant la loi des gaz parfait $p = \rho r T$:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} + T \frac{\partial(1/T)}{\partial t} + \frac{u}{p} \frac{\partial p}{\partial x} + v T \frac{\partial(1/T)}{\partial x} + v \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)$$

Une analyse de l'ordre de grandeur des différents termes conduit à négliger les termes en T et v . De plus, comme la perte de charge est très faible sur la longueur L , on néglige le terme en $\partial p / \partial t$. On a donc :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \simeq \frac{u}{p} \frac{\partial p}{\partial x}$$

et la conservation de l'énergie thermique s'écrit :

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial p}{\partial x} \simeq 0$$

La solution pour l'écoulement de Poiseuille incompressible d'un fluide compressible est donc donnée par (1.22) :

$$T(y) - T_0 \simeq \frac{\mu}{k} u_m^2 \left(-\frac{1}{2} \frac{y^4}{l^4} + \frac{y^2}{l^2} - \frac{1}{2} \right)$$

Le gradient de pression négatif (dilatation) induit un refroidissement qui compense et dépasse l'échauffement dû aux tensions visqueuses comme le soulignent Poinsot et Lele.

1.3.3.2 Influence de la condition d'entrée

Après ces développements préliminaires, revenons au troisième cas test. Pour les premières simulations, on utilise une conduite de longueur $L = 10l$ discrétisée par un maillage cartésien régulier de 101×101 points avec $\Delta y = 1.3 \times 10^{-7}$ m et $\Delta x = 5\Delta y$. On réalise 10000 itérations avec $\Delta t \simeq 0.002\Delta y$. La paroi isotherme est modélisée par la condition de paroi à l'ordre 2 dans laquelle on a remplacé la condition d'adiabaticité $\partial T / \partial y = 0$ par la condition isotherme $T = T_0 = 298.15K$.

On teste d'abord différentes conditions d'entrée :

- condition de rayonnement de Tam et Dong (formule (1.4)).

^{††}Pour un gaz parfait, on a $\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_\rho = \frac{p}{T}$.

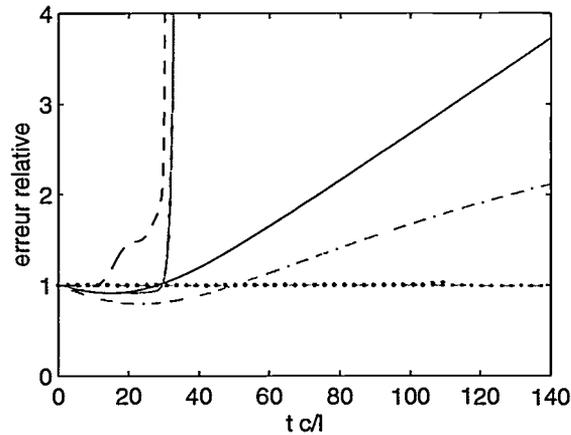


Figure 1.18: Ecoulement de Poiseuille dans une conduite plane. Evolution temporelle de l'erreur dans le plan d'entrée : (—) rayonnement de Tam et Dong, (· · · · ·) rayonnement de Tam et Dong + rappel sur u , (—) caractéristiques de non réflexion sur 1 point, (- · - · -) caractéristiques de non réflexion sur 3 points, (· · · · ·) caractéristiques de non réflexion sur 1 point + rappel sur u , (- - -) caractéristiques de non réflexion sur 3 points + rappel sur u , (- - -) caractéristiques d'entrée.

- **condition de rayonnement de Tam et Dong avec rappel sur u en entrée** (formule (1.12)).
- **caractéristiques de non réflexion sur 1 point** (1.3). Les relations caractéristiques ne sont appliquées que sur la 1^{ère} rangée de points (indice $i=1$). Les 2 autres rangées ($i=2,3$) rendues singulières par le schéma DRP sur 7 points sont décentrées vers l'intérieur du domaine. Les flux perpendiculaires à la condition limite (selon y dans notre cas) sont avancés en utilisant le schéma intérieur et sont simplement décentrés vers l'intérieur pour les coins haut et bas.
- **caractéristiques de non réflexion sur 3 points**. On applique les relations caractéristiques suivant x aux 3 rangées de points singulières ($i=1$ à 3). Les flux en y sont avancés avec le schéma intérieur.
- **caractéristiques de non réflexion sur 1 point avec rappel sur u en entrée** (1.12).
- **caractéristiques de non réflexion sur 3 points avec rappel sur u en entrée** (1.12).
- **caractéristiques d'entrée** (1.11).

On réalise 10000 itérations temporelles et tous les 10 pas de temps, on calcule le taux de convergence de la solution initiale vers la solution analytique incompressible dans le plan d'entrée :

$$\text{err} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{ny} [u(1,j) - u_{ana}(j)]^2}{\sum_{j=1}^{ny} [u_{ini}(j) - u_{ana}(j)]^2}}$$

L'erreur relative doit rester égale à 1 s'il n'y a pas de dérive du profil de vitesse en entrée. Les résultats sont donnés sur la figure 1.18. On constate que seules les conditions limites avec un rappel explicite sur le profil de vitesse parviennent à maintenir le flux d'entrée. Cette forte dérive lorsqu'il n'y pas de rappel est due à la présence des termes visqueux dans la condition d'entrée. Les conditions caractéristiques d'entrée et de non réflexion sur un point diverge rapidement. Lorsque cette dernière condition est imposée sur les trois rangées de points en entrée, le calcul converge mais la vitesse d'entrée augmente continuellement. Le comportement est similaire pour la condition de Tam et Dong avec une dérive un peu plus forte. On note également que le calcul diverge brutalement vers $tc/l = 110$ pour les caractéristiques de non réflexion sur 1 point avec rappel sur u . Enfin, lorsqu'on maintient le profil de vitesse en entrée, la condition de rayonnement de Tam et Dong et l'utilisation des caractéristiques de non réflexion sur 3 points fournissent toutes les deux des résultats satisfaisants. C'est la dernière condition qui est utilisée pour les tests de la condition de sortie.

1.3.3.3 Influence de la condition de sortie

Une fois la meilleure condition d'entrée choisie, on teste différentes conditions de sortie :

- **condition de sortie de Tam et Dong** (formule (1.7)).
- **condition de sortie de Tam et Dong avec rappel sur la pression** (formule (1.9)).
- **condition de sortie de Tam et Dong avec rappel sur la pression et sur la température.**
- **caractéristiques de sortie.** Les relations caractéristiques pour une sortie subsonique suivant x (§1.6) sont imposées sur les 3 dernières rangées de points (indice $i = n_x - 2$ à n_x).
- **caractéristiques de sortie avec rappel sur la pression.** Le rappel est celui proposé par Poinot et Lele avec $\sigma = 0.25$.
- **condition de rayonnement de Tam et Dong** (1.4) avec rappel sur la pression (formule (1.9)).
- **condition de sortie de Dong** (1.8) avec rappel sur la pression (formule (1.9)).

Tous les 10 pas de temps, on calcule le taux de convergence de la solution initiale vers la solution analytique incompressible dans le plan $x = 81\Delta x = 8l$:

$$\text{err} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{ny} [u(81, j) - u_{ana}(j)]^2}{\sum_{j=1}^{ny} [u_{ini}(j) - u_{ana}(j)]^2}}$$

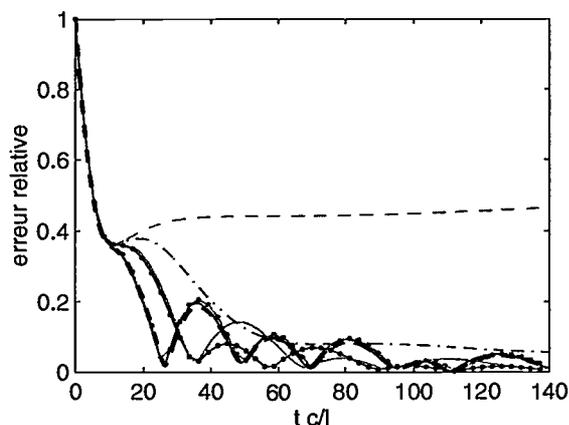


Figure 1.19: Ecoulement de Poiseuille dans une conduite plane. Evolution temporelle de l'erreur dans le plan $x/l = 8$: (---) sortie de Tam et Dong, (- - -) sortie de Tam et Dong + rappel sur p , (—) sortie de Tam et Dong + rappel sur p et T , (- - -) caractéristiques de sortie ($\sigma = 0$), (—) caractéristiques de sortie ($\sigma = 0.25$), (.....) rayonnement de Tam et Dong + rappel sur p , (.....) sortie de Dong + rappel sur p .

Les résultats, sur la figure 1.19, indiquent qu'il est nécessaire de spécifier la pression extérieure pour converger vers la solution incompressible. En effet, la condition de sortie de Tam et Dong et les caractéristiques de sortie sans rappel sur la pression convergent moins vite (voire pas du tout pour les caractéristiques). Les conditions de sortie de Tam et Dong avec rappel sur p ou sur p et T et la condition de rayonnement de Tam et Dong avec rappel sur p fournissent le même taux de convergence. Leurs courbes convergent le plus vite mais conservent ensuite de fortes oscillations qui indiquent que la condition de sortie n'est plus libre pour la pression. Celle-ci est prisonnière dans la boîte de calcul en se réfléchissant sur la condition de sortie puis d'entrée. Pour les conditions de Tam et Dong, le rappel en pression permet bien de spécifier la pression extérieure mais rend la frontière réfléchissante. Différentes valeurs ont été testées pour la force de rappel conduisant au même résultat. La modification de ces conditions par Dong pour faire sortir un champ quelconque semble améliorer la convergence et réduire les oscillations (frontière moins réfléchissante). De la même façon, le rappel sur la pression introduit dans les caractéristiques, permet un bon compromis entre le caractère réfléchissant (maintient de p_∞) et non réfléchissant (sortie des perturbations). Le point d'inflexion des courbes vers $tc/l = 10$ correspond à la transition du profil initial vers un profil parabolique. Ensuite, la vitesse maximale de ce profil converge plus ou moins vers $u_m = 3/4u_0$. Si la pression n'est pas imposée en sortie, le canal peut être considéré comme infini et, d'après la discussion sur l'obtention d'une solution convergée pour un fluide compressible, le gradient de pression dans la conduite va évoluer au cours du temps et on n'aboutira jamais à une solution stationnaire pour u_m . La condition de Tam et Dong sans rappel n'induit pas d'oscillation et pourrait donc donner les meilleurs résultats de ce point de

vue. En fait, on s'intéresse plutôt à la convergence vers une solution stationnaire pour pouvoir comparer les résultats numériques et analytiques.

Les champs de pression, de vitesse et de température dans la conduite obtenus pour $L = 10l$ avec les caractéristiques de sortie et $\sigma = 0.25$ sont représentés sur la figure 1.20 à la fin de la simulation ($tc/l = 140$) lorsque la solution est stationnaire. Un gradient de pression constant s'établit, indépendant de la coordonnée verticale. La figure 1.21(b) montre que ce gradient est conforme à la solution analytique incompressible. La valeur de la pression absolue se stabilise indiquant un état stationnaire dans la conduite. Dans ces conditions, on peut converger vers la solution incompressible. Le profil de vitesse est superposable au profil parabolique dès $x/l = 2.5$ (figure 1.21(a)). La convergence spatiale du profil de température vers la solution (1.22) est plus lente. La transition vers le profil parabolique s'accompagne d'un léger échauffement provoqué par l'action des contraintes visqueuses. En $x/l = 5$, il correspond au profil prédit par (1.21), qui ne considère que la dissipation visqueuse. Le gradient de pression négatif s'établit pour $x/l = 2.5$ et impose ensuite petit à petit son effet, qui se traduit par un léger refroidissement. Les deux effets sont présents en $x/l = 7.5$; le deuxième prédomine à $x/l = 10$ mais n'atteint pas la valeur prédite par (1.22). Les résultats de Poinot et Lele pour la même configuration sont similaires et indiquent que la longueur du canal choisie n'est peut-être pas suffisante pour que le profil de température s'installe.

On va donc réaliser la même simulation pour $L = 30l$. On compare, après 20000 itérations, les champs obtenus avec les trois conditions de sortie qui ont montré les meilleurs taux de convergence : l'utilisation des caractéristiques de sortie avec un rappel $\sigma = 0.25$, la condition de Tam et Dong avec rappel sur p et la formulation alternative de Dong avec le même rappel sur p . Les résultats sont regroupés sur les figure 1.22 à 1.27. Ceux obtenus avec les caractéristiques sont en très bon accord avec la solution analytique incompressible. On note que le profil de température est correctement prédit par (1.22) pour $x/l > 22$. La vitesse maximale du profil parabolique augmente légèrement avec x traduisant certainement le caractère compressible du fluide. On n'aboutira jamais à une solution parfaitement stationnaire mais la solution incompressible reste une bonne approximation. Avec la condition de sortie de Tam et Dong, on note sur les figures 1.24 et 1.25(b) que la valeur de la pression absolue est supérieure au cas précédent. Cet effet n'est pas sensible sur les profils de vitesse dans la conduite mais se répercute sur le profil de température. La valeur p_∞ n'étant pas parfaitement maintenue en sortie, le refroidissement dû au gradient de pression est moins marqué. Le champ de température de la figure 1.24 en bas montre que le refroidissement reste confiné au niveau de la condition de sortie. Le rappel sur la pression n'est donc pas transmis à l'intérieur du canal. Les résultats sont identiques pour la

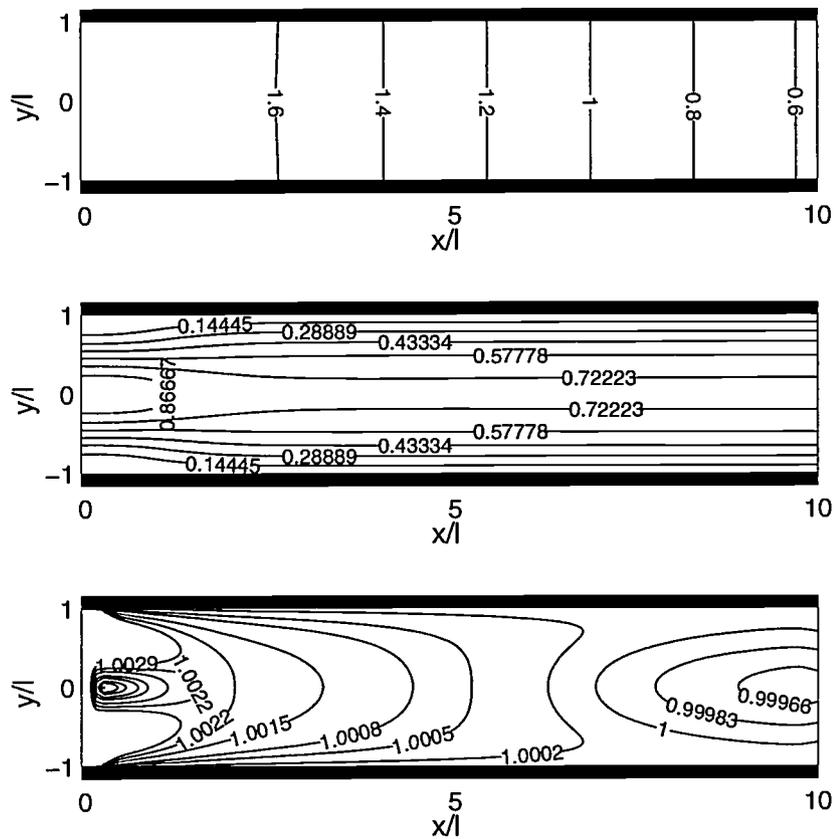


Figure 1.20: Écoulement de Poiseuille dans une conduite plane. En haut, champ de pression $100 \times p/p_{ref}$, au milieu, vitesse u/u_0 et, en bas, température T/T_0 obtenus pour $L = 10l$ avec les caractéristiques de sortie et $\sigma = 0.25$.

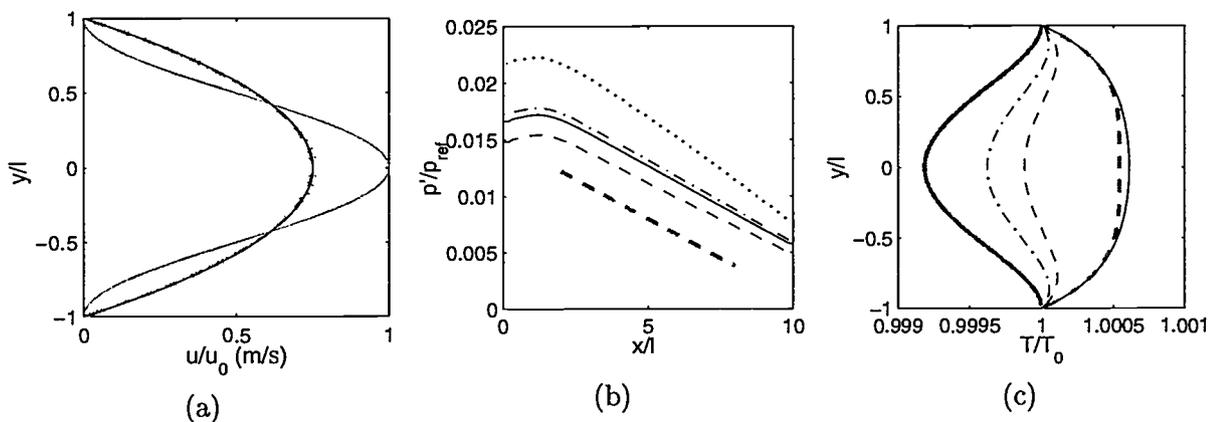


Figure 1.21: Écoulement de Poiseuille dans une conduite plane. (a) profils de vitesse en $x/l = 0$ (—), $x/l = 2.5$ (.....), $x/l = 5$ (---), $x/l = 7.5$ (-.-.-) et $x/l = 10$ (—), comparés à la solution analytique (1.17) (---). (b) évolution temporelle du gradient longitudinal de pression : on trace la pression le long de $y = 0$ pour (.....), $tc/l = 35$; (-.-.-), $tc/l = 70$; (---), $tc/l = 105$; (—), $tc/l = 140$; (---) pente de la solution analytique. (c) profils de température en $x/l = 5$ (—), $x/l = 7.5$ (---) et $x/l = 10$ (-.-.-) comparés aux solutions analytiques (1.21), (---) et (1.22), (—).

condition de Dong avec rappel mais les isocontours de température au niveau de la sortie sont évacués. Cet effet confirme le caractère moins réfléchissant de la condition de Dong, déjà indiqué par la diminution des oscillations de la courbe de convergence. La moins bonne compatibilité du rappel de pression avec les conditions de Tam et Dong et de Dong est soulignée par les petites oscillations numériques présentes sur les derniers isocontours de température. On notera toutefois que ces deux conditions de sortie induisent une convergence plus rapide pour le gradient de pression longitudinal (figures 1.23(b), 1.25(b) et 1.27(b)).

En conclusion, on peut noter le bon comportement du code ALESIA pour un cas test où prédominent les effets visqueux et thermiques. Il permet de valider la prise en compte des flux de chaleur, non présents dans la version originelle. On constate que pour imposer un profil de vitesse en entrée en présence de contraintes visqueuses importantes, il est absolument nécessaire d'appliquer un rappel sur le profil, au moins près des parois. Pour cette configuration particulière où il faut spécifier la valeur de la pression extérieure dans le domaine de calcul pour pouvoir converger vers une solution stationnaire (ou quasi-stationnaire), la meilleure condition de sortie utilise les caractéristiques de sortie discrétisées à l'ordre 1 avec une force de rappel sur la pression $\sigma = 0.25$. La valeur de ce rappel a peu d'influence sur le résultat. En revanche, il coexiste mal avec les conditions basées sur une expression en champ acoustique lointain des équations d'Euler (comme la condition de Tam et Dong ou celle de Dong). La condition de sortie devient alors essentiellement réfléchissante même si la formulation alternative de Dong se comporte mieux. Le principal enseignement de ce cas test visqueux est le rôle déterminant des conditions d'entrée et de sortie qui se révèlent plus contraignantes que le choix d'une condition de paroi ou que l'ordre d'intégration des flux visqueux. Pour tester ces deux derniers points, on simule le développement spatial d'une couche limite laminaire.

1.3.4 Développement d'une couche limite laminaire sur une plaque plane

Ce troisième cas test visqueux doit permettre de confirmer les conclusions des précédents essais. Concernant la condition de paroi, on testera les conditions à l'ordre 4 et à l'ordre 2. Les flux visqueux seront discrétisés avec des différences finies d'ordre 2 et 4. On vérifiera également le comportement des conditions d'entrée et de sortie.

On étudie le développement d'une couche limite laminaire sans gradient de pression à $M = 0.5$. Le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur initiale de la couche limite δ_{ini} vaut $Re_{\delta_{ini}} = 516$. La simulation est initialisée en imposant un profil de couche limite donné par une approximation

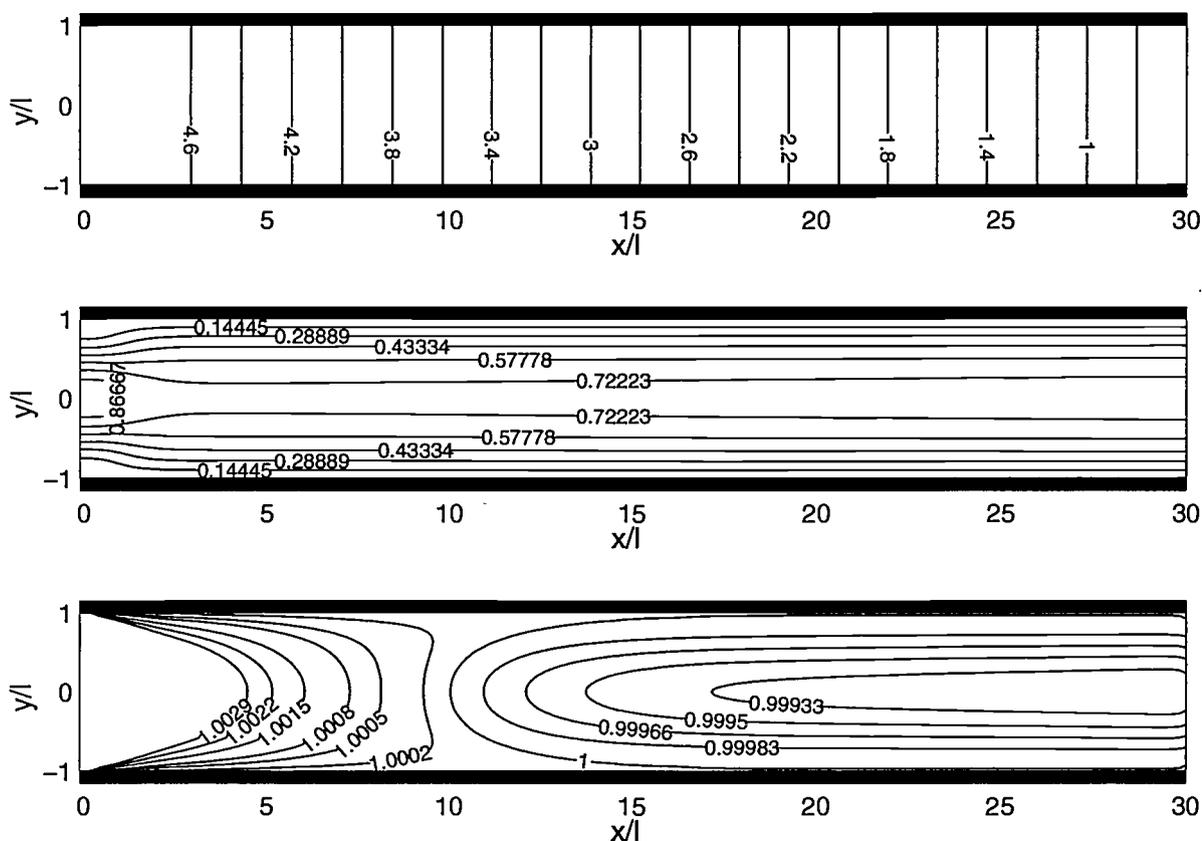


Figure 1.22: Ecoulement de Poiseuille dans une conduite plane. En haut, champ de pression $100 \times p/p_{ref}$, au milieu, vitesse u/u_0 et, en bas, température T/T_0 obtenus pour $L = 30l$ avec les caractéristiques de sortie et $\sigma = 0.25$.

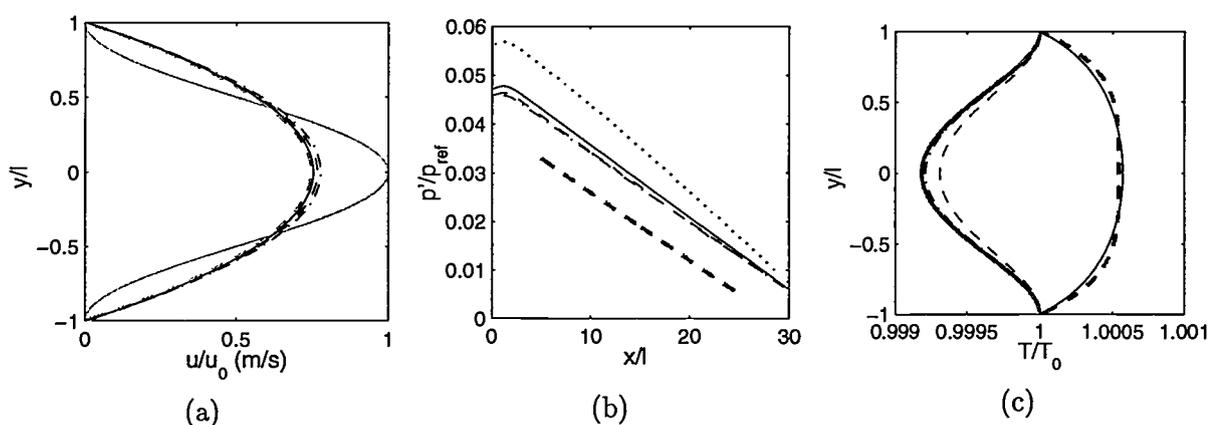


Figure 1.23: Ecoulement de Poiseuille dans une conduite plane. Simulation avec les caractéristiques de sortie et $\sigma = 0.25$. (a) profils de vitesse en $x/l = 0$ (—), $x/l = 10$ (—), $x/l = 20$ (---) et $x/l = 30$ (-·-·-), comparés à la solution analytique (1.17) (-·-·-). (b) évolution temporelle du gradient longitudinal de pression : on trace la pression le long de $y = 0$ pour (·····), $tc/l = 70$; (-·-·-), $tc/l = 140$; (---), $tc/l = 210$; (—), $tc/l = 280$; (-·-·-) pente de la solution analytique. (c) profils de température en $x/l = 8$ (—), $x/l = 18$ (---) et $x/l = 28$ (-·-·-) comparés aux solutions analytiques (1.21), (-·-·-) et (1.22), (—).

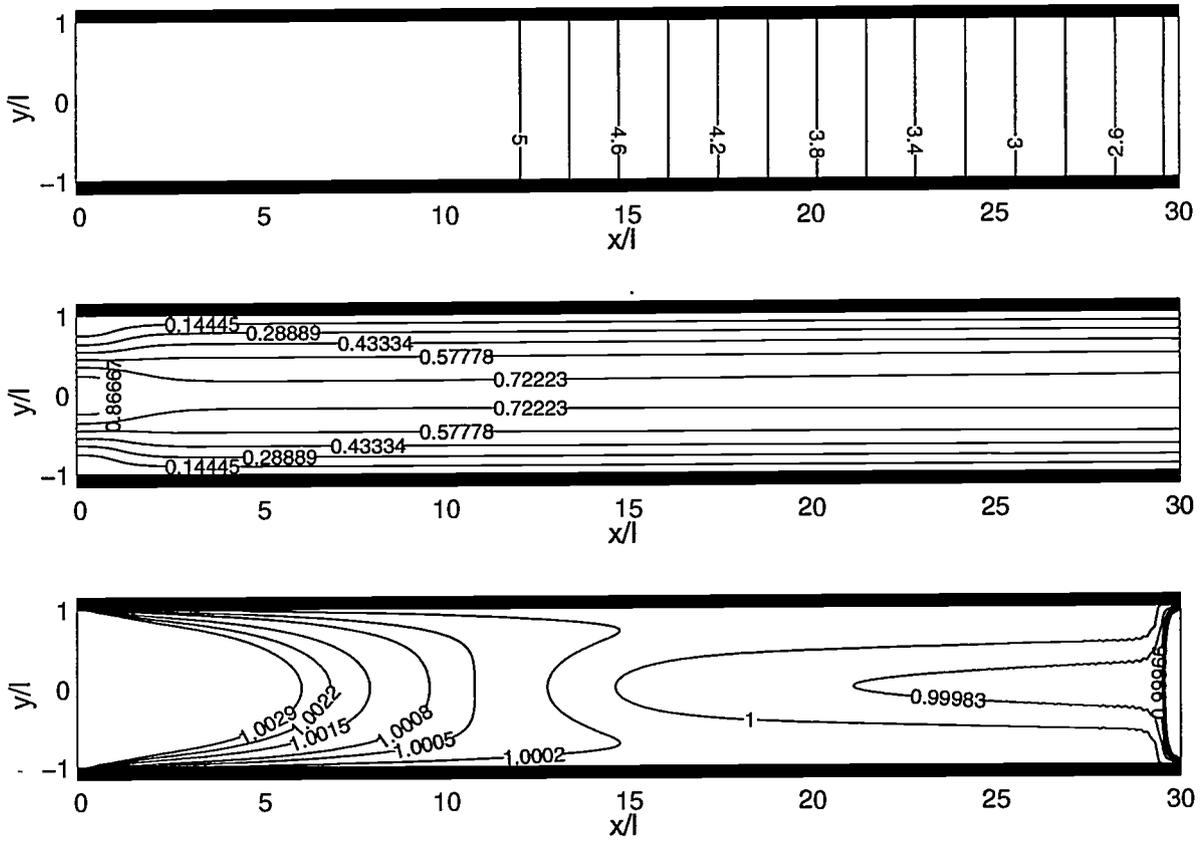


Figure 1.24: Ecoulement de Poiseuille dans une conduite plane. En haut, champ de pression $100 \times p/p_{ref}$, au milieu, vitesse u/u_0 et, en bas, température T/T_0 obtenus pour $L = 30l$ avec la condition de sortie de Tam et Dong et un rappel sur p .

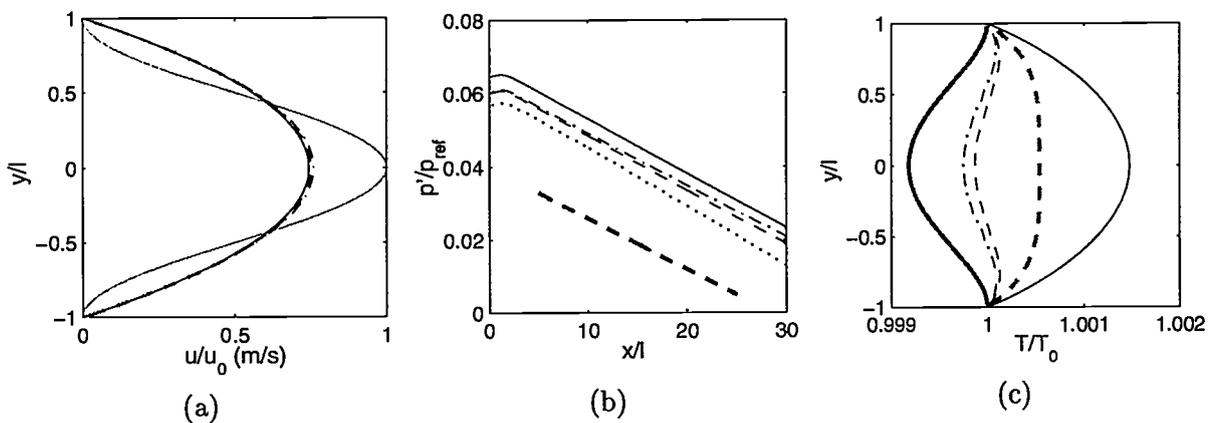


Figure 1.25: Ecoulement de Poiseuille dans une conduite plane. Simulation avec la condition de sortie de Tam et Dong et un rappel sur p . (a) profils de vitesse en $x/l = 0$ (—), $x/l = 10$ (—), $x/l = 20$ (---) et $x/l = 30$ (-·-·-), comparés à la solution analytique (1.17) (-·-·-). (b) évolution temporelle du gradient longitudinal de pression : on trace la pression le long de $y = 0$ pour (·-·-·), $tc/l = 70$; (-·-·-), $tc/l = 140$; (---), $tc/l = 210$; (—), $tc/l = 280$; (---) pente de la solution analytique. (c) profils de température en $x/l = 8$ (—), $x/l = 18$ (---) et $x/l = 28$ (-·-·-) comparés aux solutions analytiques (1.21), (---) et (1.22), (—).

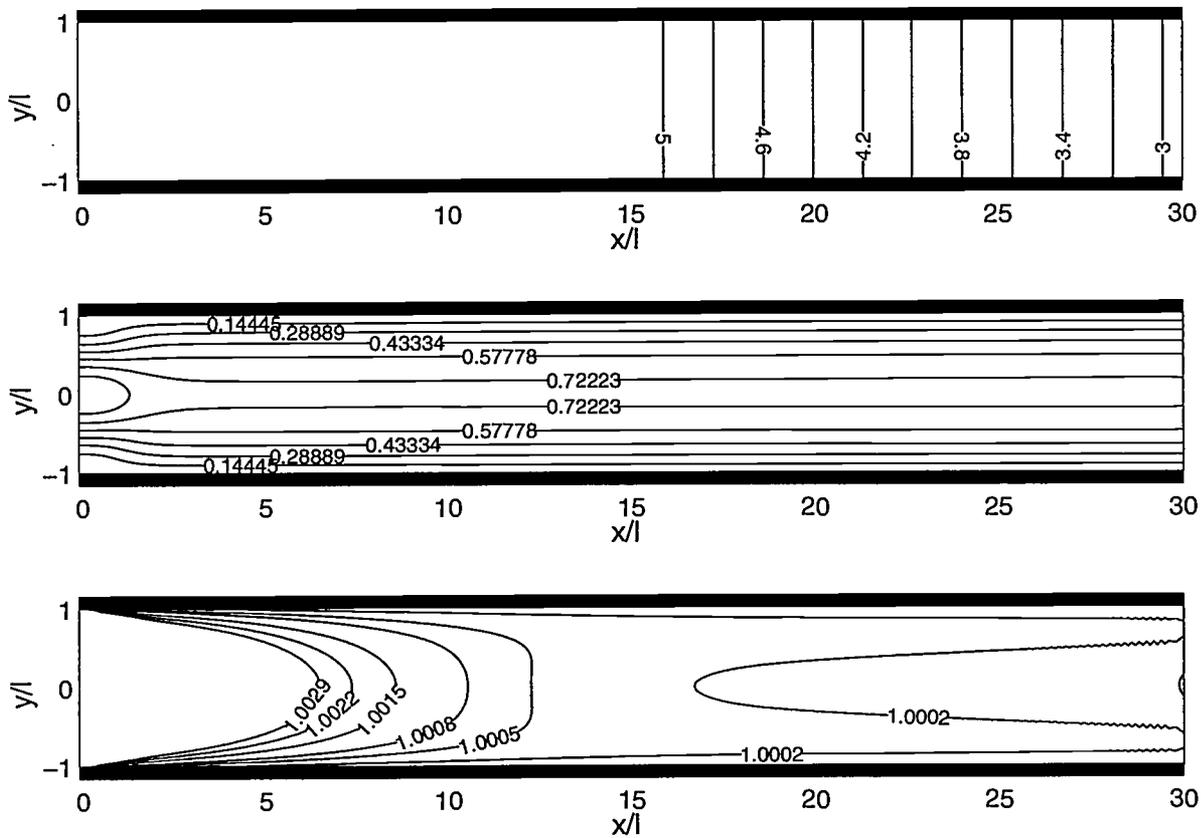


Figure 1.26: Ecoulement de Poiseuille dans une conduite plane. En haut, champ de pression $100 \times p/p_{ref}$, au milieu, vitesse u/u_0 et, en bas, température T/T_0 obtenus pour $L = 30l$ avec la condition de sortie de Dong et un rappel sur p .

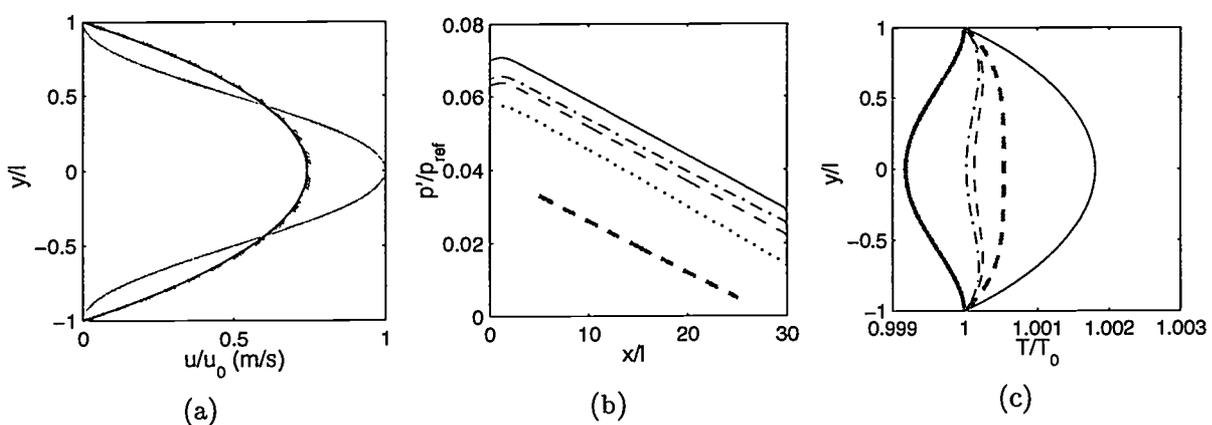


Figure 1.27: Ecoulement de Poiseuille dans une conduite plane. Simulation avec la condition de sortie de Dong et un rappel sur p . (a) profils de vitesse en $x/l = 0$ (—), $x/l = 10$ (—), $x/l = 20$ (---) et $x/l = 30$ (-·-·-), comparés à la solution analytique (1.17) (- - -). (b) évolution temporelle du gradient longitudinal de pression : on trace la pression le long de $y = 0$ pour (·-·-·), $tc/l = 70$; (-·-·-), $tc/l = 140$; (- - -), $tc/l = 210$; (—), $tc/l = 280$; (- - -) pente de la solution analytique. (c) profils de température en $x/l = 8$ (—), $x/l = 18$ (- - -) et $x/l = 28$ (-·-·-) comparés aux solutions analytiques (1.21), (- - -) et (1.22), (—).

polynomiale de la solution de Blasius :

$$u(y) = u_0 \left(\frac{y}{\delta_{ini}} \right) \left[2 - 2 \left(\frac{y}{\delta_{ini}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\delta_{ini}} \right)^3 \right]$$

Les autres variables sont choisies constantes à l'instant initial $p = p_\infty = 1 \text{ atm}$, $T = T_\infty = 298 \text{ K}$, $\rho = \rho_\infty = p_\infty / r T_\infty$ et $v = 0$. Le maillage bidimensionnel utilisé comporte 251×81 points; il est raffiné en y près de la paroi afin de mailler jusqu'aux échelles visqueuses ($\Delta y^+ \simeq 1$) puis les mailles croissent avec une raison géométrique de 2%. En x , le maillage est régulier jusqu'à $i = 121$ puis est étiré avec un taux de 2.5 % afin d'éloigner la condition de sortie. Avec $\Delta y_{min} = 2.8 \times 10^{-6} \text{ m}$ et $\Delta x_{min} = 1.2 \times 10^{-5} \text{ m}$, le domaine s'étend sur $Lx = 67\delta_{ini}$ et $Ly = 12\delta_{ini}$. La condition limite d'entrée utilise les caractéristiques de non réflexion sur 3 points avec rappel sur le profil de vitesse. Les caractéristiques de sortie à l'ordre 1 avec rappel sur la pression ($\sigma = 0.25$) sont implantées en sortie. La frontière supérieure est une condition de rayonnement de Tam et Dong. Le filtrage sélectif est appliqué avec $R_s = 4.5$.

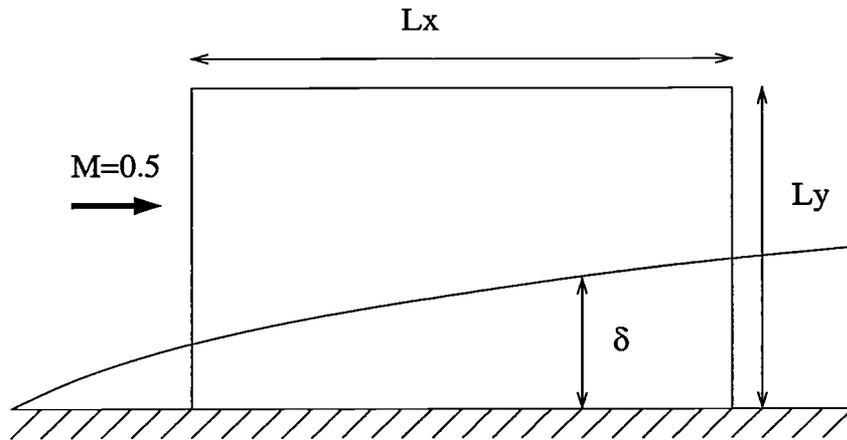


Figure 1.28: Développement d'une couche limite laminaire sur une plaque.

On compare les résultats obtenus après 30000 itérations avec la solution analytique donnée par Blasius (1908).²⁵⁹ La solution autosimilaire de Blasius satisfait :

$$2f''' + f''f = 0, \quad f = f(\eta)$$

où $\eta = y \times \sqrt{u_0/\nu x}$, la notation ' indique une dérivée par rapport à η de la fonction courant réduite f définie par :

$$f = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x u_0}} \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

On intègre numériquement l'équation différentielle et on trace :

$$\frac{u}{u_0} = f'(\eta) \quad \frac{v}{u_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{x u_0} \right)^{\frac{1}{2}} (\eta f' - f)$$

On constate sur la figure 1.29 que les résultats des quatre simulations sont en assez bon accord avec la solution de Blasius. Les principaux écarts sont visibles sur les courbes de la vitesse verticale. En effet, cette vitesse est de l'ordre de 1 m/s pour $\eta > 6$ contre 173 m/s pour u . Elle sera donc beaucoup plus sensible aux erreurs numériques. En comparant les figures 1.29 (b) et (d) ou (f) et (h), on constate que le résultat ne dépend pas de la condition de paroi. On retrouve la conclusion obtenue pour la réflexion d'une impulsion acoustique : la condition de paroi n'est pas le facteur limitant pour la précision de la simulation, même pour un cas test où les effets visqueux prédominent. On utilisera donc la condition à l'ordre 2 qui est plus robuste. Les différences plus nettes entre la discrétisation des termes visqueux à l'ordre 2 (fig. 1.29(b) ou (d)) et à l'ordre 4 (fig. 1.29(f) ou (h)) sont difficiles à interpréter. Elles dépendent plus de la compatibilité avec les conditions limites (notamment en entrée) que de la précision de l'évaluation des flux pour les points intérieurs. La difficulté est liée là encore à la résolution des équations compressibles pour obtenir une solution incompressible. En effet, la prise en compte des contraintes visqueuses, importantes au niveau de la paroi, dans la condition d'entrée crée une discontinuité qui produit plus d'erreurs avec les schémas décentrés à l'ordre 4 qu'avec les schémas décentrés à l'ordre 2. Cette discontinuité génère une source de pression qui intervient comme un gradient de pression adverse certes très faible mais sensible pour le calcul de la vitesse verticale. Il s'agit évidemment d'un cas défavorable car il n'existe pas d'autre source de pression pour organiser l'écoulement. Pour les futurs calculs, on gardera l'implémentation des termes visqueux à l'ordre 2.

1.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de discuter le choix de méthodes numériques adaptées à l'aéroacoustique. Les principaux points abordés sont :

- **les conditions aux limites de champ libre.** On a vu que les conditions correspondant à une expression asymptotique en champ lointain des équations d'Euler, comme celles de Tam et Dong, sont plus performantes que les caractéristiques de part leur formulation multidimensionnelle. On utilise par la suite la condition de rayonnement et la condition de sortie de Tam et Dong. En sortie, on rajoute en plus une technique de type zone éponge pour dissiper les structures tourbillonnaires avant qu'elles n'aient atteint la frontière du domaine de calcul.
- **les conditions de paroi.** On a comparé plusieurs formulations: caractéristiques, points images, points fantômes de Tam et Dong avec le schéma de Tam et Webb, avec des

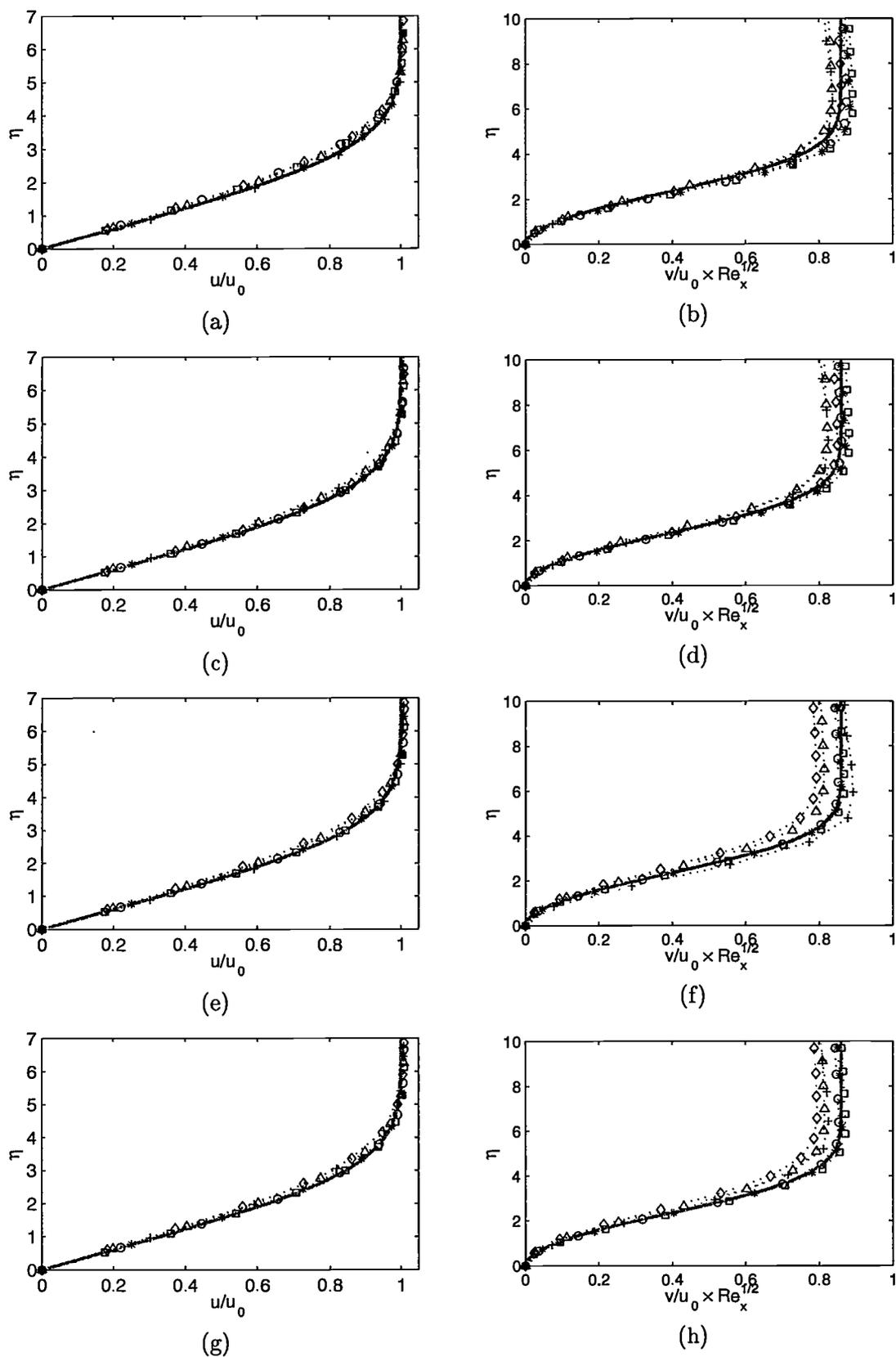


Figure 1.29: Développement d'une couche limite laminaire sur une plaque. A gauche ((a)(c)(e)(g)), profil de u et à droite ((b)(d)(f)(h)), profil de v , comparés à la solution analytique de Blasius (—). Quatre simulations sont présentées : (a),(b) condition de paroi à l'ordre 2 et termes visqueux à l'ordre 2; (c),(d) condition de paroi à l'ordre 4 et termes visqueux à l'ordre 2; (e),(f) condition de paroi à l'ordre 2 et termes visqueux à l'ordre 4; (g),(h) condition de paroi à l'ordre 4 et termes visqueux à l'ordre 4. Les résultats sont tracés pour 6 abscisses : +, $x/\delta_{ini} = 10.5$; *, $x/\delta_{ini} = 21.2$; o, $x/\delta_{ini} = 31.9$; Δ, $x/\delta_{ini} = 37.3$; ◇, $x/\delta_{ini} = 42.7$; □, $x/\delta_{ini} = 48$.

différences finies à l'ordre 4 ou à l'ordre 2. Pour une application comme la cavité, la méthode la plus efficace sera celle à l'ordre 2, qui constitue un bon compromis entre précision et robustesse.

- **les termes visqueux.** On a testé l'implémentation des termes visqueux à l'ordre 2 et à l'ordre 4 en espace et à l'ordre 1 et à l'ordre 4 en temps. Aucune amélioration n'est sensible lorsqu'on augmente l'ordre des schémas par rapport à la condition de départ du code ALESIA (ordre 2 en espace et 1 en temps). En fait, si l'on compare les critères de stabilité eulérien (critère CFL) et visqueux (critère de Fourier), on s'aperçoit que le temps d'évolution des termes visqueux est beaucoup plus lent. On garde donc par la suite la version de départ.
- **les flux de chaleur.** On a ajouté la prise en compte des flux thermiques avec la loi de Fourier. Cette implémentation s'appuie sur les mêmes schémas que pour les flux visqueux et se trouve validée avec précision lors de la simulation de l'écoulement de Poiseuille.
- **le filtrage sélectif.** Il s'agit d'une composante indispensable à une simulation de qualité, surtout avec des schémas centrés. On a vu qu'elle permet d'éliminer des oscillations parasites créées au niveau des parois. Pour chaque simulation, on rappellera le filtrage utilisé et son amplitude.

Chapitre 2

Le bruit de cavité

2.1 Introduction

Le bruit de cavité est une source sonore qui apparaît dans un grand nombre de situations où une ouverture est soumise à un écoulement affleurant. Dans certaines conditions, des oscillations autoentretenues s'installent dans la cavité, à l'origine de pics intenses dans les spectres. Dans ce cas apparaissent des effets indésirables comme les vibrations et la fatigue des structures, la génération de bruit, l'augmentation de la traînée ou la modification des transferts thermiques.

La présence d'une cavité provoque de larges fluctuations de pression, de masse volumique ou de vitesse dans son voisinage ainsi que d'intenses ondes acoustiques. Les premières études expérimentales dans les années 1950-1960 concernent les applications aéronautiques.^{105,90,125} Pour les avions militaires, les soutes à bombes induisent des fluctuations qui peuvent exciter les modes vibratoires de la structure de l'avion. Elles peuvent être responsables de près de 30 % de la traînée totale de l'appareil. Les cavités rectangulaires étudiées sont de grande dimension et peu profondes. Les vitesses considérées sont hautement subsoniques ou supersoniques. La nécessité d'étudier des vitesses plus faibles apparaît dans les années 1970 pour les cavités recevant le train d'atterrissage des avions, qui constituent une source importante de bruit lors des phases d'atterrissage et de décollage.^{108,125}

Le champ d'application s'étend ensuite aux oscillations de grande amplitude présentes dans des systèmes résonants caractérisés par un écoulement sur des cavités de géométries variées. Citons, par exemple, les cavités formées par les différents étages d'un compresseur ou d'une chambre de combustion,¹³⁷ les jonctions en T ou les branches closes des tuyauteries,³¹ les excavations dans les conduites d'air ou d'eau (transport de gaz, circuit vapeur des centrales électriques). De nombreux auteurs ont étudié les interactions entre les tourbillons générés par l'écoulement et une résonance acoustique.^{46,3} En fonction des paramètres géométriques de la cavité, le mécanisme de résonance peut être de type résonateur de Helmholtz.^{119,204} Des oscillations similaires ap-

paraissent dans les souffleries ou les tunnels à eau avec des parois perforées^{141,15} générant des perturbations pour les mesures. A une échelle plus grande, des phénomènes hydrodynamiques instationnaires ont également été observés au niveau des écluses ou de l'entrée des ports.¹⁸⁴

Un autre domaine d'application important est l'aéro-optique. Les fenêtres optiques pour les lasers ou les instrumentations optiques embarquées ne peuvent pas être fermées par une vitre ou une plaque de plexiglas qui gêneraient les mesures. Cependant, les oscillations dues à la cavité ainsi formée peuvent également perturber les mesures et il devient nécessaire de maîtriser le phénomène pour apporter des corrections.^{262,79} Une telle cavité peut aussi induire une signature caractéristique pour les systèmes de détection radar, préjudiciable pour les applications militaires.²⁷²

Dans le domaine des transports terrestres, les cavités sont omniprésentes : l'interstice entre deux wagons ou la cavité allongée recevant les pantographes des trains,²⁰⁶ les cavités des joints de pare-brise,¹¹⁰ le toit ouvrant ou les fenêtres d'une voiture,^{212,237} par exemple. Les oscillations aéroacoustiques induites pénalisent le confort acoustique interne et externe et peuvent générer des vibrations ou une augmentation de la traînée.

Pour finir sur une note positive, il existe un domaine où ces oscillations ne sont pas nuisibles mais sont, au contraire, désirées. Ce sont les instruments à vent comme les flûtes^{304,260} ou les tuyaux d'orgue.⁵⁸

La variété des applications et la complexité du phénomène ont motivé de nombreuses études expérimentales, théoriques et plus récemment numériques, qui se sont intéressées à la nature du mécanisme de génération de bruit par une cavité afin de développer des moyens de contrôle. Plusieurs travaux de synthèse donne une vision globale des phénomènes rencontrés : ceux de Rockwell et Naudascher,^{246,247} de Rockwell,^{241,242} de Komerath *et al.*,¹⁴⁶ de Blake et Powell,^{17,19} de Howe¹²³ ou plus récemment de Colonius.³⁸

2.2 Terminologie et classifications

Etant donnée la diversité des configurations où une cavité excitée par un écoulement provoque des oscillations autoentretenues, il paraît nécessaire d'établir une classification. On se limitera au cas d'une cavité parallélépipédique. L est la longueur de la cavité, D sa profondeur et W sa largeur dans la troisième direction. Les notations sont rappelées sur la figure 2.1.

On peut distinguer trois grandes classes d'interactions entre le fluide et la cavité. La première concerne les interactions d'origine **dynamique** (aéro- ou hydrodynamique) liées aux ondes d'instabilité qui se développent dans la couche cisailée et qui sont amplifiées par un phénomène de bouclage (rétroaction aérodynamique). La deuxième catégorie tient compte des phénomènes

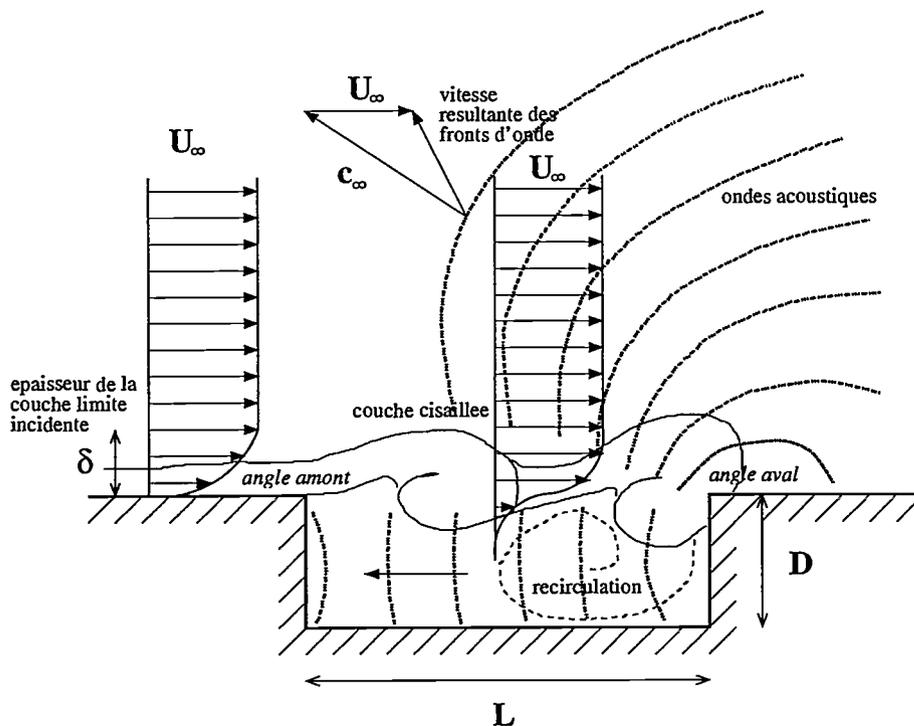


Figure 2.1: Principales notations pour un écoulement affleurant une cavité.

de résonance acoustique associés à la compressibilité du fluide ou au mécanisme d'onde de surface libre (ondes stationnaires dans la cavité et résonateur de Helmholtz). La troisième classe regroupe les interactions de type élastique, c'est-à-dire les phénomènes vibratoires dus aux déplacements élastiques d'une surface solide. Nous nous focaliserons ici plus spécialement sur les interactions d'origine aérodynamiques.

Une première classification est basée sur les rapports géométriques L/D et L/W . On distingue tout d'abord les cavités profondes des cavités peu profondes en fonction du paramètre L/D . Sarohia²⁵⁸ utilise ce rapport pour distinguer des cavités profondes, $L/D < 1$, pour lesquelles un phénomène de résonance acoustique dû aux modes de profondeur se superpose à la rétroaction aéroacoustique, et peut devenir prépondérant à basse vitesse. Pour des cavités peu profondes ($L/D > 1$), le mécanisme principal est le phénomène de bouclage aérodynamique. Pour $L/D > 2$, le fond de la cavité peut jouer un rôle non négligeable, avec l'apparition de plusieurs zones de recirculation dans la cavité pour $L/D > 4$. Pour des cavités encore plus allongées, $L/D > 7$, la couche cisailée, qui se développe au dessus de la cavité, peut se rattacher au fond de la cavité avant de redécoller à l'approche de l'angle aval. On peut alors considérer la cavité comme la succession d'une marche descendante et d'une marche montante. On parle de cavité fermée. Par opposition, on qualifiera la cavité d'ouverte lorsque la couche cisailée se rattache directement à l'angle aval formant un pont entre les deux coins amont et aval.

Les valeurs de L/D pour séparer ces différents comportements ne sont données qu'à titre indicatif et dépendent fortement d'autres paramètres comme la vitesse de l'écoulement ou les caractéristiques de la couche limite incidente. Par exemple, à grande vitesse (hautement subsonique ou supersonique), la boucle de rétroaction peut dominer les oscillations d'une cavité profonde.⁷⁹ Pour déterminer l'influence du fond de la cavité, il faut également considérer le rapport δ/D , entre l'épaisseur de la couche limite incidente et la profondeur de la cavité. Sarohia²⁵⁸ montre qu'au delà d'un certain rapport, la profondeur influe peu sur les fréquences d'oscillation. La recirculation créée dans la cavité peut cependant moduler la trajectoire de la couche cisailée.¹⁴⁸ De même, la transition entre une cavité ouverte et fermée dépend de la vitesse de l'écoulement³⁰⁰ et du rapport L/δ_θ ,⁸⁷ avec δ_θ l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite initiale. Si on veut établir des plages de fonctionnement, il faut donc être prudent. Ainsi, pour $8 < L/D < 11$, le caractère ouvert ou fermé dépend fortement d'autres paramètres. On observe des états transitionnels.²²⁶ Par ailleurs, pour $0.5 < L/D < 2$, qui est la plage où se situent bon nombre des applications, le phénomène de rétroaction pourra être couplé à des résonances acoustiques suivant les modes longitudinaux ou de profondeur.

Un autre paramètre géométrique important est le rapport L/W entre la longueur et la largeur de la cavité. Pour $L/W < 1$, la couche cisailée au dessus de la cavité possède un comportement essentiellement bidimensionnel tandis que, pour $L/W > 1$, des effets tridimensionnels dus aux bords latéraux peuvent apparaître. Mais, là encore, la limite dépend d'autres paramètres, notamment la vitesse et le rapport géométrique L/D . Ainsi des effets tridimensionnels ont été notés pour des faibles vitesses et des cavités plutôt allongées.^{175,143,245}

Enfin, notons qu'une autre terminologie est employée, dans certaines études, pour distinguer les mécanismes responsables des oscillations. Par analogie avec l'*edgetone*, qui caractérise les interactions aérodynamiques entre un jet et un coin, on parle de *sheartone* pour désigner le phénomène responsable des oscillations lorsqu'une seule couche cisailée impacte un coin, ici le coin aval de la cavité. Pour indiquer une résonance acoustique, comme celle des tuyaux d'orgue, on parle de *pipetone*. On réserve enfin le qualificatif *cavity-tone* pour le phénomène d'oscillation dans la cavité dû à une entrée/sortie de fluide au niveau du bord aval.

2.3 Aperçu historique du bruit de cavité

Les travaux expérimentaux de Roshko²⁵¹ (1955) et de Karamcheti¹³⁵ (1955) constituent les premières études du bruit aérodynamique rayonné par des cavités soumises à un écoulement affleurant. Roshko a mis en évidence l'influence des dimensions géométriques sur l'écoulement moyen. Pour des cavités allongées à bas nombres de Mach, il note la présence d'un tourbillon

principal dans la cavité et de tourbillons secondaires dans les coins. Il s'agit respectivement de la zone de recirculation principale et des recirculations secondaires dans les coins inférieurs, qui sont décrites par Moffatt.¹⁸⁸ La conclusion principale de Roshko est que la traînée induite par la cavité est essentiellement liée à la pression de stagnation sur la paroi aval de la cavité lors de l'impact des tourbillons.

L'étude de Karamcheti¹³⁵ considère pour la première fois le rayonnement externe et reste encore à ce jour une des rares références où l'influence de l'écoulement sur le champ sonore rayonné est clairement illustrée. Les visualisations de Karamcheti utilisent des procédés de strioscopie, d'interférométrie et des mesures au fil chaud. Il constate que la directivité est très marquée vers l'amont pour les grands nombres de Mach en raison de la convection des ondes acoustiques par l'écoulement moyen (voir figure 2.2)[†]. Karamcheti observe aussi l'influence du caractère laminaire ou turbulent de la couche limite incidente. Les pics fréquentiels sont beaucoup plus intenses lorsque la couche limite est laminaire et le contenu spectral est plus riche en turbulent.

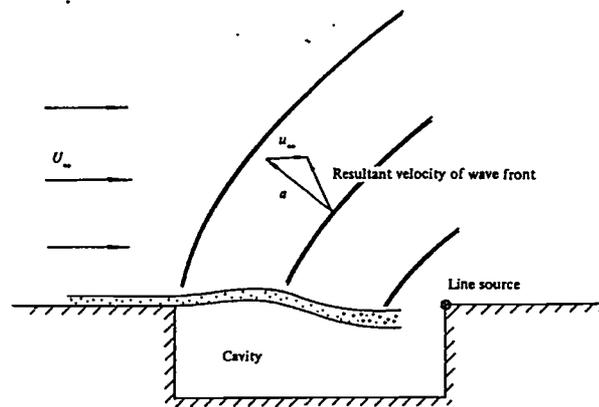


Figure 2.2: Illustration de l'effet de la convection sur les fronts d'onde, d'après Tam et Block.²⁸⁹

En 1958-62, Plumblee, Gibson et Lassiter^{89,227} mettent en évidence un nouveau phénomène pour des cavités profondes, l'apparition de résonances acoustiques. Les auteurs montrent qu'une cavité profonde excitée par un écoulement répond par des modes résonants de profondeur alors qu'une cavité allongée est caractérisée par des modes longitudinaux. Ils postulent que les fluctuations turbulentes large bande constituent le mécanisme d'excitation des modes acoustiques liés à la géométrie de la cavité. Le raisonnement de Plumblee *et al.*, comme noté par plusieurs auteurs^{252,109,285,289,146} est en contradiction avec les observations expérimentales qui soulignent l'existence de pics encore plus intenses pour des écoulements laminares.¹³⁵

Au début des années 1960, Dunham⁵⁶ et Harrington et Dunham¹⁰³ considèrent un écoulement

[†]Cet effet Doppler dû à la convection des fronts d'onde par l'écoulement constant à l'extérieur de la cavité est décrit par Lighthill¹⁵⁸ comme une multiplication de l'intensité rayonnée par le facteur $(1 - M_\infty \cos \theta)^3$. Voir §4.2.2.1 et la figure 4.3.

en eau sur une cavité rectangulaire. Ils étudient les effets d'une excitation de la paroi du fond et constatent que les déplacements de la paroi du fond agissent sur les instabilités qui se développent dans la couche cisillée. Il s'agit de la première mise en évidence d'un couplage fluide-structure dans une cavité.

Les travaux expérimentaux de Maull et East¹⁷⁵ (1963) à basse vitesse démontrent le caractère tridimensionnel de l'écoulement à l'intérieur de la cavité. Des cellules de recirculation apparaissent pour certaines valeurs de la dimension transverse W . L'existence de ces cellules et leur nombre pair ou impair semblent directement liés à la taille de la zone de recirculation principale dans le sens de l'écoulement par rapport à la largeur W (voir figure 2.3). Dans certaines conditions, les cellules transverses ne s'établissent pas de façon stationnaire, ce qui conduit à des effets d'intermittence notés par Roshko²⁵¹ et Mills¹⁸⁵ lorsqu'ils réalisent une coupe de l'écoulement perpendiculairement à la troisième direction. On peut remarquer que ces effets tridimensionnels peuvent se produire pour des rapports $L/W < 1$. De plus, même s'ils sont souvent visibles à basse vitesse, ils peuvent aussi apparaître à grande vitesse.²²⁷ Des observations similaires sont décrites par Kistler et Tan¹⁴³ (1967).

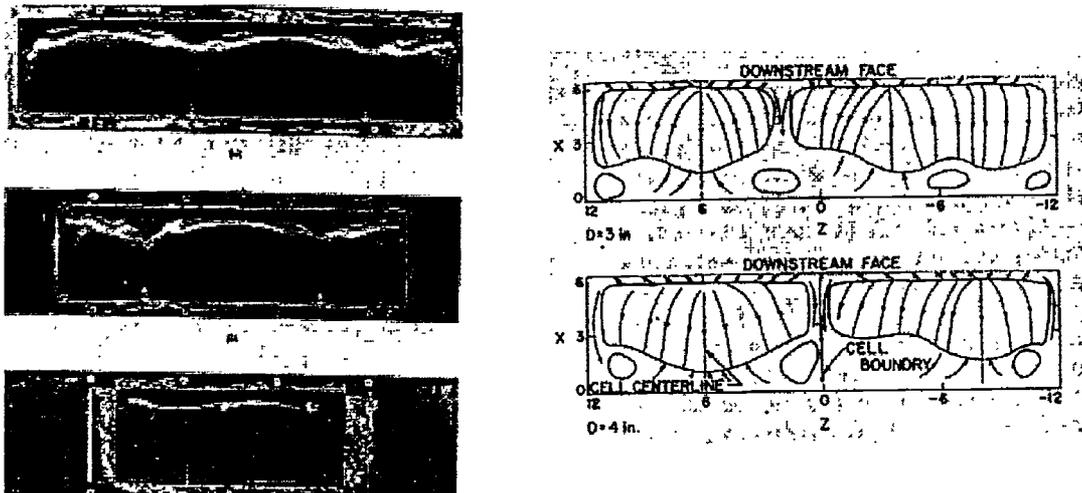


Figure 2.3: Effets tridimensionnels dans la cavité. A gauche, visualisation de l'écoulement au fond de la cavité grâce à un film d'huile, d'après Maull et East.¹⁷⁵ A droite, schéma des cellules de recirculation au fond de la cavité, d'après Kistler et Tan.¹⁴³

La campagne expérimentale menée en 1964 par Rossiter²⁵² pour des rapports L/D entre 1 et 10 et des nombres de Mach entre 0.4 et 1.2 fournit la première explication du couplage aérodynamique qui produit les oscillations autoentretenues. Aux nombres de Reynolds considérés, Rossiter met en évidence la présence de plusieurs modes. Le tracé du nombre de Strouhal $St = fL/U_\infty$ en fonction du nombre de Mach (voir figure 2.4) lui permet d'établir une formule empirique reliant St au nombre de Mach M , au nombre entier de tourbillons dans la couche

cisaillée et à deux constantes semi-empiriques, α qui indique un déphasage entre le moment de l'impact et l'émission acoustique correspondante et κ qui représente la vitesse de convection des tourbillons dans la couche cisaillée:

$$St = \frac{n - \alpha}{1/\kappa + M}$$

La formule de Rossiter est très utilisée car elle dérive d'une description physique simple et elle prédit correctement les fréquences d'oscillations pour une grande plage de configurations. A l'heure actuelle, c'est un des modèles du bruit de cavité les plus populaires. Cependant, elle ignore de nombreux aspects comme les caractéristiques de la couche limite incidente, les modes de résonance acoustique ou l'influence de la profondeur qui peut modifier le régime de l'écoulement, comme l'ont montré Charwat *et al.*³⁷ De plus, le modèle suppose implicitement que la rétroaction est de nature acoustique, ce qui nécessite une petite longueur d'onde par rapport à la longueur de la cavité ($L/\lambda_a \gg 1$) et n'est donc plus valable pour les petites vitesses et les écoulements en milieu liquide.

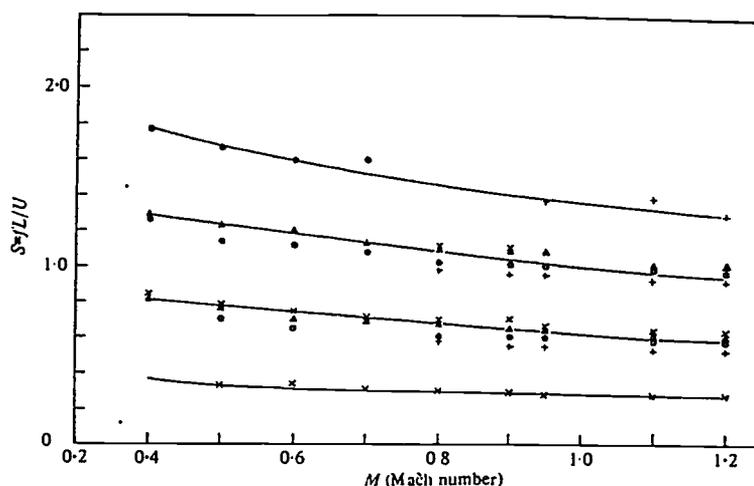


Figure 2.4: Nombre de Strouhal $St = fL/U_\infty$ en fonction du nombre de Mach M : comparaison entre la formule de Rossiter et les mesures expérimentales, d'après Tam et Block.²⁸⁹

L'étude de Spee²⁷⁷ (1966) ajoute un mécanisme nouveau aux observations précédentes. Il constate en effet une entrée/sortie d'air au niveau de l'angle aval qui se traduit par de larges déflexions de la couche cisaillée. Une autre étude en 1966 par East⁵⁷ s'intéresse à des cavités profondes et montre que les oscillations de la couche cisaillée peuvent résulter de deux mécanismes différents: une boucle de rétroaction aéroacoustique décrite par Rossiter et des modes de résonance acoustique comme ceux décrits par Plumblee *et al.* A haute vitesse, le *feedback* aéroacoustique domine et la formule de Rossiter est applicable mais, à basse vitesse, les deux phénomènes coexistent. Lorsque les fréquences préférentielles des deux phénomènes coïncident, une double résonance se produit, qui amplifie considérablement l'amplitude des oscillations.

Un certain nombre d'études se sont ensuite attachées à illustrer expérimentalement et analytiquement la formule de Rossiter. Ainsi, en 1971, Heller, Holmes et Covert¹⁰⁹ prennent en compte les variations de la vitesse du son dans la cavité pour étendre le résultat de Rossiter aux grands nombres de Mach. Ils améliorent la corrélation de la formule avec les fréquences mesurées pour $2 < M < 3$. Bilanin et Covert¹⁶ (1973) considèrent que le mécanisme initiateur est lié aux instabilités qui se développent dans la couche cisailée et modélisent la couche cisailée par une nappe de vorticité. Leur modèle fournit une expression analytique pour les deux constantes semi-empiriques de Rossiter mais révèle des écarts importants sur les fréquences prédites. Ces erreurs résultent sans doute de l'hypothèse de couche infiniment mince. Block tente d'inclure les frontières géométriques de la cavité dans le raisonnement de Bilanin et Covert, en considérant des sources images. La nouvelle formule améliore quelque peu les résultats en tenant compte du rapport L/D mais elle souffre des mêmes limitations que celle de Bilanin et Covert. En 1978, Tam et Block²⁸⁹ tentent d'inclure l'effet d'une épaisseur finie pour la couche limite. La prise en compte de deux nouveaux paramètres, L/D et L/δ_θ , où δ_θ est l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche cisailée, permet d'améliorer la formule de Rossiter. Leur modèle rend bien compte du couplage aéroacoustique mais ne peut pas représenter les modes acoustiques de profondeur, qui apparaissent à basse vitesse. Cependant, Tam et Block pensent que l'énergie qui excite ces modes provient toujours des instabilités de la couche cisailée, plutôt que d'une excitation large bande due à la turbulence. Leurs mesures montrent aussi que la transition entre les modes de profondeur et les oscillations aéroacoustiques se fait de façon progressive.

Heller, Holmes et Covert¹⁰⁹ ont mis en évidence la présence de modes acoustiques longitudinaux pour des cavités allongées, qui se superposent à la boucle de rétroaction. Ils expliquent l'absence des modes de profondeur par un faible facteur de qualité Q , défini comme le rapport entre l'énergie stockée et l'énergie  chang e. Si \mathcal{A} est l'amplitude des oscillations, V le volume de la cavité et S l'aire de la surface ouverte, alors:

$$Q = \frac{\mathcal{A}^2 \times V}{\mathcal{A}^2 \times S} = \frac{V}{S} = D$$

Pour des cavités de faible profondeur, le petit facteur de qualité est compensé par une source plus intense lors de l'impact sur l'angle aval. Heller et Bliss¹⁰⁷ (1975) considèrent l'entrée/sortie de fluide au niveau de l'angle aval comme le mécanisme générateur des oscillations. Ils modélisent alors l'entrée/sortie par un *pseudo-piston* correspondant à la paroi verticale aval. Le problème se réduit à déterminer des ondes acoustiques progressives et rétrogrades qui se réfléchissent sur les parois verticales, comme pour les modes acoustiques longitudinaux. Ces ondes dans la cavité provoquent des mouvements instationnaires de la couche cisailée, qui induisent l'entrée/sortie de masse au niveau de l'angle aval.

Un calcul analytique exact des modes acoustiques d'une cavité rectangulaire à très basse vitesse est effectué par Tam,²⁸⁵ en 1976, pour des écoulements non visqueux, en résolvant une équation d'onde avec les conditions aux limites imposées par la cavité et par le rayonnement acoustique externe. Il déduit de ce calcul le nombre de Mach en dessous duquel un mode de profondeur ne peut pas être excité. Pour des cavités avec $L/D > 1$, il trouve que ces modes sont dissipés par la perte d'énergie due au rayonnement sonore, démontrant mathématiquement le raisonnement qualitatif de Heller, Holmes et Covert sur le facteur de qualité Q .

Sarohia²⁵⁸ (1977) a étudié des cavités axisymétriques pour lesquelles la couche limite est laminaire au bord amont. Il remarque que l'influence de la profondeur D est négligeable sauf lorsque l'épaisseur de la couche limite est du même ordre de grandeur. De plus, Sarohia met en évidence une longueur minimale L_m , en dessous de laquelle les oscillations n'ont pas lieu, confirmant ainsi que le mécanisme dépend de la stabilité de la couche cisailée. Cependant, les mesures de Karamcheti *et al.*[†] pour l'interaction jet-coin (*edgetone*) montrent que la phase et la vitesse de propagation des perturbations ne suit pas la théorie de stabilité linéaire des écoulements parallèles. Wooley et Karamcheti³⁰⁹ étendent alors la théorie à des jets non parallèles, pour lesquels les caractéristiques de stabilité sont des fonctions locales de l'épaisseur de la couche cisailée et du profil moyen de vitesse. Pour un taux d'accroissement $d\theta/dx_1$ de la couche cisailée et une fréquence adimensionnelle $\beta(x_1)$, l'amplification adimensionnelle intégrée est donnée par:

$$\exp \left\{ \int_{\beta_0}^{\beta} \left(\frac{1}{d\theta/dx_1} \right) [-\alpha_i(x_1)\theta(x_1)] \frac{d\beta}{\beta} \right\}$$

Les mesures de phase réalisées par Sarohia montrent par ailleurs que la longueur d'onde principale vérifie la relation $L/\lambda = (n + 1/2)$ où n est un entier. Le modèle précédent doit permettre alors de sélectionner le mode n prédominant. La comparaison du modèle avec les expériences en laminaire est satisfaisante.

Rockwell²⁴⁰ (1977) utilise également les variations locales du nombre d'onde et du facteur d'amplification donnés par la théorie des instabilités linéaires pour obtenir l'amplification intégrée totale. Il obtient le critère suivant pour qu'une perturbation soit autoentretenu:

$$\int_0^L \left[e^{-\int_0^L \alpha_i(x_1) dx_1} \sin \left(\int_0^L \alpha_r(x_1) dx_1 \right) \right] dx_1 = 0$$

En modélisant l'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement δ_θ , les fréquences d'oscillation obtenues sont en très bon accord avec les mesures de Ethembabaoglu[‡]. Ces modèles, basés sur la théorie de stabilité non visqueuse, supposent que les contraintes visqueuses n'influencent pas sensiblement les valeurs locales des caractéristiques de propagation α_r et $-\alpha_i$. De plus,

[†]Références 17 et 19 de Sarohia.²⁵⁸

[‡]référence 10 de Rockwell.²⁴⁰

dans le cas d'une couche cisailée turbulente, Wooley et Karamcheti³⁰⁹ ont montré que ces caractéristiques peuvent être évaluées à partir du profil moyen, négligeant ainsi le rôle des fluctuations turbulentes.

Hardin et Mason⁹⁹ (1977) s'intéressent à la composante large bande du bruit rayonné par une cavité soumise à un écoulement turbulent. Leur modèle original préfigure l'application de l'approche analogique pour obtenir le champ rayonné.

Un apport considérable à la compréhension du phénomène de rétroaction est fourni par l'équipe de Rockwell au début des années 80. Une série d'investigations expérimentales permet de nombreuses visualisations de qualité afin de faire la lumière sur certains aspects mal compris.^{244,245,145,243,248,320,297,136} La plupart de ces expériences sont réalisées en eau. Elles mettent en évidence l'importance des interactions entre la couche cisailée et le coin pour expliquer la présence de composantes basses fréquences.¹⁴⁵

Par la suite, de nombreux auteurs ont étudié expérimentalement des cavités résonantes afin d'établir des modèles pour rendre compte de l'influence des modes de résonance sur la boucle de rétroaction aéroacoustique. Elder^{59,60} propose, en 1978, un modèle élaboré pour rendre compte du couplage entre une résonance acoustique et un mode aérodynamique.

Ronneberger²⁵⁰ (1980) tente de quantifier l'entrée/sortie de fluide au niveau de l'angle aval et d'en faire le paramètre clé de sa modélisation. Les résultats obtenus permettent de caractériser l'impédance de petits orifices soumis à un écoulement affleurant.

L'étude d'une cavité de type résonateur de Hémholtz par Nelson, Halliwell et Doak^{204,205} permet une analyse de l'équilibre énergétique. Les auteurs modélisent la structure tourbillonnaire unique qu'ils observent dans leur expérience et appliquent la théorie du *vortex sound* pour déterminer le champ acoustique associé. Ce modèle prédit la fréquence et l'amplitude des oscillations et sera utilisé par l'équipe d'Hirschberg^{32,220,147} pour calculer les oscillations de cavités dans des conduites de gaz et par Mongeau, Franchek et Kook¹⁹⁰ comme base d'un contrôle actif des oscillations d'un toit ouvrant. Dans ce cas de figure, le modèle de Nelson *et al.* permet de prédire assez fidèlement les fréquences et les amplitudes des oscillations.

L'étude expérimentale de Gharib et Roshko⁸⁷ (1987), sur des cavités axisymétriques en eau, fait ressortir l'influence du rapport L/δ_θ entre la longueur de la cavité et l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite incidente. Ils mettent également en évidence la transition vers un nouveau régime de l'écoulement, le mode de sillage, qui se caractérise par une large augmentation de la traînée de la cavité et un aspect plus chaotique pour les mouvements de la couche cisailée. Ce régime apparaît pour une faible épaisseur de la couche limite.

Howe a développé un modèle basse vitesse par analogie avec l'utilisation de la conductivité

de Rayleigh, utilisée pour caractériser les interactions d'un écoulement avec une ouverture. Un coefficient de traînée constitue la fonction de réponse de la cavité et la partie réelle de ses pôles fournit les fréquences de résonance.^{121,124,122,123}

L'étude de cavités résonantes en eau par Burroughs et Stinebring³⁵ met en évidence la possibilité d'oscillations de type résonateur de Helmholtz en eau. Dans ce cas, un fort couplage fluide-structure conduit à des déformations des parois de la cavité qui modifient la fréquence de résonance. Le couplage fluide-structure élastique semble donc important pour des écoulements en eau.

Meissner a effectué plusieurs études expérimentales¹⁷⁸ et théoriques^{177,179} pour comprendre les interactions entre les oscillations aérodynamiques et résonantes. Le modèle développé est proche de celui de Elder.

L'influence de la forme géométrique du coin aval a fait l'objet de plusieurs recherches expérimentales et numériques: Pereira et Sousa²¹⁸ arrondissent l'angle aval et analysent les modifications du comportement de la couche cisailée. Dequand *et al.* (2001) étudient expérimentalement, analytiquement et numériquement les oscillations dans un résonateur de Helmholtz et les répercussions d'un changement de géométrie des angles.^{50,51}

En 1995, Mast et Pierce¹⁷⁴ utilisent pour la première fois le formalisme des *describing functions* pour décrire un système résonant. L'écoulement et le résonateur sont les deux parties de ce système théorique, dont les prédictions en terme de fréquence et d'amplitude se comparent favorablement avec les mesures. Ce formalisme sera utilisé par Rowley²⁵³ pour déterminer les modes d'oscillations. Les deux parties de son système sont alors l'amplification intégrée des instabilités de la couche cisailée et un rayonnement acoustique monopolaire à l'angle aval. Les résultats obtenus permettent de prédire la succession des modes $n = 1$ à 3 pour les oscillations. Rowley, Colonius et Murray^{254,255,253} utilisent aussi une décomposition en modes propres (POD) à partir des résultats d'une simulation numérique directe pour établir un modèle des oscillations dans la cavité.

L'étude expérimentale de Ahuja et Mendoza² (1996) fournit une base de données très complète sur l'influence de différents paramètres comme les rapports géométriques L/D et L/W , les caractéristiques (épaisseur, turbulence) de la couche limite incidente, ou les effets de la température sur les oscillations. C'est une des rares études qui fournit la directivité en champ lointain et la structure de la pression en champ proche. Ils trouvent une directivité essentiellement omnidirectionnelle. Pour caractériser les effets tridimensionnels, ces auteurs étudient notamment l'influence de la largeur W de la cavité dans la troisième direction¹⁸⁰ et constatent peu d'influence sur le bruit rayonné pour $L/W < 1$.

Les nouvelles techniques expérimentales permettent de nouvelles mesures et visualisations de la structure d'un écoulement affleurant une cavité. On peut citer l'étude complète d'une cavité profonde à Mach 0.8 par Forestier⁷⁹ (2001) ou l'imagerie de particules (PIV) d'un écoulement turbulent au dessus d'une cavité par Lin et Rockwell¹⁶¹ (2001). Garg et Cattafesta⁸⁵ mettent en évidence les structures cohérentes par des mesures strioscopiques. L'influence de la recirculation sur la couche cisailée est étudiée par Kuo et Huang,¹⁴⁸ qui modifient la recirculation en changeant la pente du fond de la cavité.

Enfin, nous laissons de côté les nombreuses études numériques depuis la fin des années 1980, qui seront abordées dans le prochain chapitre, et les nombreuses expériences de contrôle passif ou actif pour réduire l'amplitude des oscillations. Pour ce dernier sujet, on peut consulter les références.^{303,283,139} Les informations données par les simulations et les nombreuses stratégies de contrôle apportent des illustrations instructives des phénomènes décrits précédemment.

2.4 Oscillations d'origine dynamique

2.4.1 Introduction

Depuis l'observation du phénomène d'*edge-tone* par Sondhaus en 1854 lors de l'impact d'un jet libre sur un coin, des oscillations autoentretenues ont été observées dans des configurations très variées où un écoulement cisailé vient impacter un obstacle. On peut mettre en évidence des caractéristiques communes entre les différents types d'oscillations décrits. Rockwell et Naudascher²⁴⁷ puis Rockwell^{241,242} ont synthétisé de nombreux résultats de la littérature. Dans tous ces cas de figure, on observe bien une modification de la couche cisailée lorsqu'on introduit l'obstacle avec une organisation plus grande de l'écoulement et l'apparition d'oscillations autoentretenues. Dans ce qui suit, on se limite aux oscillations d'origine aérodynamique, laissant de côté les résonances acoustiques et les couplages fluide-structure qui peuvent s'y superposer.

2.4.2 Description du mécanisme de rétroaction

Les oscillations très organisées sont autoentretenues à la suite d'un certain nombre d'interactions entre l'écoulement et l'obstacle, que l'on peut schématiser avec le cycle suivant :

- La rétroaction ou *feedback*, qui se fait par la propagation en amont des perturbations de la zone d'impact vers la zone de grande sensibilité de la couche cisailée (c'est-à-dire près de la séparation).
- L'apparition de fluctuations de vorticité dans la couche cisailée.

- La croissance et l'amplification de ces perturbations entre le point de séparation et le point d'impact.
- La production de nouvelles perturbations au niveau de l'impact, qui remontent en amont, fermant la boucle.

2.4.2.1 La rétroaction ou *feedback*

Bien qu'on ne connaisse pas tous les détails du mécanisme de *feedback*, les travaux expérimentaux réalisés dans des conditions variées (écoulement dans l'air à haute ou basse vitesse, écoulement dans l'eau,...) montrent que les perturbations qui se propagent en amont sont de nature acoustique ou aéro-/hydro-dynamique. A grande vitesse, lorsque la longueur d'onde acoustique caractéristique λ est du même ordre de grandeur que la longueur caractéristique de l'obstacle L , il est important de prendre en compte la vitesse du son pour déterminer le délai temporel entre la zone d'impact et la zone de séparation. Powell²³¹ met en évidence un rayonnement acoustique important vers l'amont suggérant d'utiliser de simples sources acoustiques pour modéliser la rétroaction acoustique. Pour des écoulements gazeux à basse vitesse, le phénomène de *feedback* a lieu dans le champ proche de la source acoustique (c'est-à-dire $L/\lambda \ll 1$) et doit donc être considéré comme essentiellement aérodynamique. Enfin, bien entendu, pour des écoulements dans des liquides, la condition $L/\lambda \ll 1$ est toujours satisfaite et la nature des perturbations est purement hydrodynamique.

Plusieurs expériences ont mis en évidence la rétroaction acoustique^{228,61} mais le problème devient plus délicat pour mettre en évidence une rétroaction aérodynamique pour un écoulement basse vitesse dans l'eau. On observe pourtant toujours une influence des structures tourbillonnaires cohérentes sur l'écoulement amont. Ce phénomène a été observé même en l'absence d'obstacle dans des écoulements à petite ou grande vitesse, ce qui pose le problème de savoir dans quelle mesure l'impact sur un obstacle modifie l'organisation des structures cohérentes de l'écoulement pour conduire à cette rétroaction.

Par ailleurs, le fait que ces structures cohérentes aient été observées pour une grande plage de nombres de Reynolds montre qu'une telle organisation de la couche cisailée est présente à la fois pour les écoulements initialement turbulents et pour les écoulements laminaires.

Dans le cas de la cavité, l'organisation des structures turbulentes est encore plus déterministe dans la mesure où la relation de phase entre la séparation et l'impact est quasi-constante. De plus, les oscillations dans une cavité sont contraintes à une conservation de la masse à l'intérieur d'un volume fini.

2.4.2.2 La génération de la vorticité

La conversion des fluctuations de pression qui arrivent dans la zone de séparation de l'écoulement cisailé en fluctuations de vorticité a été étudiée par Morkovin et Paranjape¹⁹⁸ (1971). Ils ont mis en evidence que le gradient de pression transverse joue un rôle primordial dans ce processus de conversion. De plus, ils ont supposé que le mouvement de va-et-vient au niveau du point de séparation permet la transformation des fluctuations de pression irrotationnelles en fluctuations de vorticité rotationnelles. Ce mécanisme peut s'interpréter avec la théorie de la stabilité linéaire.^{182,183,286}

2.4.2.3 L'amplification de ces perturbations

La théorie de la stabilité linéaire des écoulements parallèles non visqueux peut être adaptée pour prendre en compte l'élargissement de la couche cisailée.³⁰⁹ La fréquence des oscillations autoentretenuës correspond alors à l'amplification intégrée maximale entre les deux coins de la cavité.^{240,253} Le comportement de la couche cisailée est proche de celui d'une couche de mélange excitée comme le montre Forestier.⁷⁹

2.4.2.4 La production de fluctuations au niveau de l'impact

L'étude de la déformation des structures tourbillonnaires au voisinage de l'angle aval est intéressante pour connaître la force fluctuante qui s'exerce sur cet angle ainsi que le mode de génération des fluctuations de pression, qui vont ensuite exciter la couche cisailée au niveau de la séparation. La visualisation des tourbillons qui viennent s'écraser sur le bord aval d'une cavité conduit Rockwell et Knisely²⁴⁴ à distinguer trois types d'impact : par destruction complète, où le tourbillon est entièrement emporté dans la cavité; par scission partielle, qui se traduit par la formation de plusieurs tourbillons; et par échappement, où le tourbillon passe au dessus de l'angle aval. Pour des couches limites incidentes fines ou turbulentes, aucun de ces cas de figure ne prédomine mais, sur une période assez longue, on observe une alternance aléatoire (*jitter*) entre ces divers types d'impact, à l'origine de composantes hautes ou basses fréquences dans les spectres.

La zone de recirculation peut modifier la trajectoire des structures tourbillonnaires de la couche cisailée.^{143,148} Cette influence est négligée dans tous les modèles développés et pourrait aussi expliquer la forme variable de l'interaction entre la couche cisailée et l'angle lors de l'impact.²⁴²

Un certain nombre d'articles  tudes^{145,297} tentent de relier la distorsion des tourbillons qui impactent l'angle aval et le champ de pression induit. La nature de l'interaction tourbillon-coin détermine le champ de pression instantané pouvant conduire à la séparation de l'écoulement

de l'angle aval, conduisant alors à la formation de nouveaux tourbillons, visualisés par Tang et Rockwell.²⁹⁷

2.4.3 Relation de phase

La présence de ces oscillations autoentretenues à la fois dans l'écoulement et dans le champ acoustique à des fréquences discrètes bien définies suggère qu'une relation de phase stable existe entre l'amont et l'aval de la cavité. Le fait que cette relation de phase soit verrouillée (Gharib et Roshko⁸⁷ parlent de *lock in*) indique qu'il existe un intervalle de temps privilégié entre le moment de l'impact sur l'angle aval et le moment où la couche cisailée est la plus réceptive au niveau de la séparation au bord amont.

Les fréquences évoluent suivant des paliers lorsqu'on fait varier la vitesse de l'écoulement, la longueur de la cavité ou l'épaisseur de la couche limite incidente. Les techniques expérimentales de visualisation montrent que ces paliers correspondraient à la présence d'un nombre entier n de tourbillons dans la couche cisailée. C'est pourquoi, il semble légitime de considérer que la relation de phase fasse intervenir cet entier.

Depuis les débuts de l'étude de ce phénomène de rétroaction ou *feedback* pour les cavités et d'autres configurations, de nombreuses relations semi-empiriques ont essayé de recalculer une relation de phase à partir de données expérimentales, en donnant une explication *a posteriori*. La formule de Rossiter²⁵² est la plus utilisée. Cependant, si cette relation de phase semi-empirique décrit correctement l'évolution de la fréquence des oscillations pour une plage de fonctionnement usuelle, cela ne veut pas dire pour autant que la modélisation représente fidèlement la physique.

Les premières tentatives pour déterminer les fréquences d'un écoulement influencé par un phénomène de rétroaction proviennent des études pour comprendre le mécanisme intervenant dans l'interaction jet-coin (*jet-edge*). La relation de phase donnée par Powell repose essentiellement sur les données expérimentales de Brown,³⁰ Curle⁴⁷ et Powell.²³¹ En négligeant le temps acoustique entre la buse et le coin, la relation s'écrit pour la fréquence f :

$$f = \left(n + \frac{1}{4} \right) \frac{U_c}{L} \quad , \quad (2.1)$$

où U_c est la vitesse de convection des perturbations, L la distance entre la buse et le coin et n un entier. Il s'agit d'une relation empirique, qui reproduit la répartition en palier des fréquences et le fait que celles-ci ne sont pas reliées de façon harmonique. La valeur $1/4$ n'a jamais été justifiée rigoureusement. La seule justification provient du bon accord avec les rapports entre les fréquences obtenues expérimentalement par Sato (1; 2,2; 3,5 ...) ou Brown³⁰ (1; 2,3; 3,8; 5,4 ...).

A la lumière des résultats obtenus pour l'interaction jet-coin, les premières études sur les cavités dans les années 1950-1960 tentent également d'établir une relation de phase entre l'angle amont et l'angle aval de la cavité. C'est Rossiter en 1964 qui écrit clairement pour la première fois une telle relation.²⁵² Pour un nombre de Mach donné, il remarque que la séquence des pics fréquentiels est de la forme $(n - \alpha)$ avec $n = 1, 2, 3, \dots$ et $\alpha = 1/4$ pour des cavités de rapport L/D entre 1 et 4. Pour tenir compte de l'évolution de la fréquence avec le nombre de Mach M , Rossiter propose la formule empirique suivante pour le nombre de Strouhal St :

$$St = \frac{fL}{U} = \frac{n - \alpha}{\frac{1}{\kappa} + M} \quad (2.2)$$

où κ est une autre constante empirique. $\kappa = 0.57$ fournit des fréquences adimensionnelles en bon accord avec les données expérimentales. Pour des cavités plus allongées (L/D de 4 à 10), Rossiter doit recalculer la constante α en utilisant les valeurs du tableau 2.1.

L/D	α
4	0.25
6	0.38
8	0.54
10	0.58

Tableau 2.1: Valeurs de α en fonction du rapport L/D , Rossiter.²⁵²

Rossiter propose ensuite une interprétation physique pour la formule donnant les fréquences en considérant que le mécanisme est similaire à celui de l'*edgetone*. On peut alors supposer que c'est le rayonnement acoustique qui va provoquer l'apparition de vorticit   à l'angle amont et que cette vorticit   est responsable du rayonnement acoustique lorsqu'elle rencontre le bord aval. On note λ_a la longueur d'onde acoustique et λ_v la longueur d'onde a  rodynamique, correspondant    l'espacement entre deux tourbillons.    $t = 0$, on suppose que la phase de l'onde acoustique qui se dirige vers l'amont est nulle et que la cavit   contient n_a longueurs d'onde compl  tes λ_a .    cet instant, un tourbillon va se trouver    une distance $\alpha_v \lambda_v$ derri  re l'angle aval comme indiqu   sur la figure 2.5 (a).

Au temps $t = t'$, un front d'onde acoustique atteint l'angle amont et, au m  me instant, un tourbillon est g  n  r      cet angle. Depuis $t = 0$, les tourbillons ont avanc   de $U_v t'$ et le tourbillon derri  re l'angle aval se trouve    $\alpha_v \lambda_v + U_v t'$, comme indiqu   sur la figure 2.5 (b). Pour les n_v tourbillons au dessus de la cavit  , on a donc :

$$n_v \lambda_v = L + \alpha_v \lambda_v + U_v t'$$

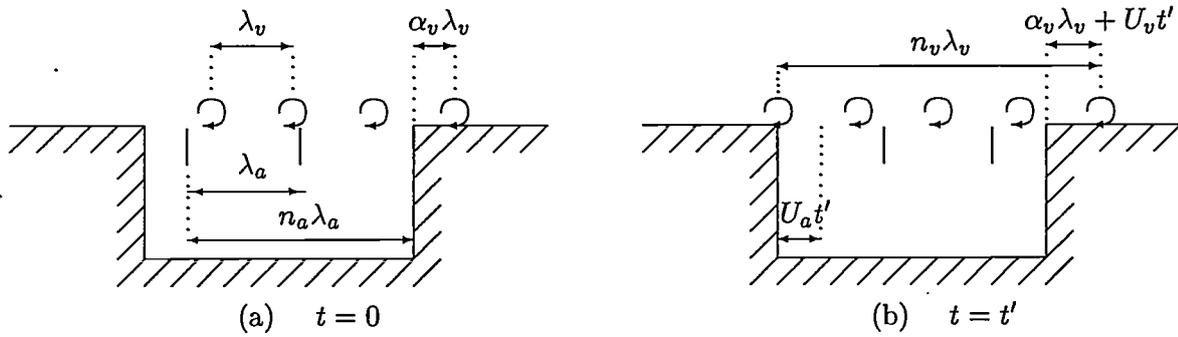


Figure 2.5: Modèle simplifié de l'écoulement affleurant la cavité

Dans le même temps, les fronts d'onde acoustiques se sont déplacés de $U_a t'$ vers l'amont d'où :

$$L = n_a \lambda_a + U_a t'$$

En éliminant t' entre les deux relations précédentes, il vient :

$$\frac{U_v}{U_a} n_a \lambda_a + (n_v - \alpha_v) \lambda_v = L \left(1 + \frac{U_v}{U_a} \right) = kL \left(\frac{1}{k} + M \frac{c_\infty}{U_a} \right)$$

en notant c_∞ la célérité du son au dessus de la cavité, k le rapport U_v/U_∞ et M le nombre de Mach U_∞/c_∞ . En introduisant la fréquence des oscillations $f = U_v/\lambda_v = U_a/\lambda_a$, il vient :

$$\frac{fL}{U_\infty} = \frac{(n_a + n_v - \alpha_v)}{\left(\frac{1}{k} + M \frac{c_\infty}{U_a} \right)} \quad (2.3)$$

Si on compare avec la formule empirique (2.2), le modèle est compatible avec les résultats expérimentaux si l'on prend :

$$\begin{cases} n_v + n_a = n \\ \alpha_v = \alpha \\ k = \kappa \\ c_\infty = U_a \end{cases}$$

La formule de Rossiter (2.2) est donc semi-empirique car on peut interpréter la constante κ comme le rapport de la vitesse de convection des perturbations aérodynamiques sur la vitesse de l'écoulement moyen au dessus de la cavité et la constante α comme un décalage entre l'instant d'arrivée des perturbations sur l'angle aval et l'émission acoustique correspondante. Il faut supposer que la vitesse du son est constante dans la cavité et égale à celle à l'extérieur, ce qui semble raisonnable si les variations de température sont faibles dans la cavité. De plus, le fait de considérer κ comme une constante revient notamment à négliger les éventuelles recirculations dans la cavité.

Heller, Holmes et Covert¹⁰⁹ proposent une amélioration de la formule de Rossiter pour l'étendre aux grands nombres de Mach, $M > 1.2$. Pour ces vitesses élevées, ils regardent

la modification de la célérité du son dans la cavité, qui s'écrit, en suivant Gibson⁸⁹ :

$$\frac{c_{\text{cavité}}}{c_{\infty}} = \sqrt{1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \quad ,$$

où c_{∞} est la vitesse du son en champ libre, γ est rapport des chaleurs spécifique et r le coefficient de récupération thermique défini par:

$$r = \frac{T_c - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}$$

où T_{∞} , T_0 et T_c sont respectivement les températures statique de l'écoulement libre, de stagnation et à l'intérieur de la cavité. Ils trouvent $0.8 < r < 1$ avec r qui tend à augmenter quand le nombre de Mach augmente; ainsi $T_c \simeq T_0$. Ils incluent cette modification dans la formule de Rossiter :

$$\text{St} = \frac{fL}{U} = \frac{n - \alpha}{\frac{1}{\kappa} + \frac{M}{\sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}}} \quad , \quad (2.4)$$

En 1973, Bilanin et Covert¹⁶ tentent de modéliser l'écoulement dans la cavité en gardant l'esprit de l'analyse de Rossiter, l'objectif final étant de trouver une expression théorique pour les deux constantes empiriques. Pour cela, ils modélisent la couche cisillée par une *nappe* de vorticité (vortex sheet) infiniment mince et utilisent une source acoustique linéique sur le bord aval pour rendre compte du rayonnement sonore. Pour compléter le modèle, une pression linéique est imposée sur le bord amont pour simuler l'excitation de la couche cisillée par les ondes acoustiques. En prenant une relation de phase multiple de 2π entre les deux extrémités de la cavité, ils aboutissent à l'expression :

$$\text{St} = \frac{n - \frac{3}{8} - \frac{\phi}{2\pi}}{\frac{\alpha_r U_{\infty}}{\omega} + M \frac{c_+}{c_-}} \quad , \quad (2.5)$$

qui est formellement identique à la formule de Rossiter-Heller *et al.* (2.4), si l'on choisit : $\alpha = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{3}{8}$ et $\kappa = \frac{\omega}{\alpha_r U_{\infty}}$,
 où ϕ et $2\pi \times 3/8$ correspondent aux déphasages dus respectivement aux angles amont et aval, ω est la pulsation d'excitation à l'angle aval et α_r la partie réelle du nombre d'onde dans la direction longitudinale. Cette formule tient compte du facteur de compressibilité introduit par le rapport c_+/c_- entre la célérité à l'extérieur et à l'intérieur de la cavité. Dans ce cas, la constante α ne tient pas seulement compte du caractère complexe de l'interaction entre l'écoulement et la cavité au niveau de l'angle aval mais aussi de celle qui se produit à l'angle amont lors de la génération de la vorticité. Cependant, les résultats obtenus ne se comparent avec les expériences que pour les vitesses hautement supersoniques et des écarts notables sont visibles pour $0.6 < M < 1.2$.

Block²⁰ essaye de généraliser les travaux de Bilanin et Covert afin d'inclure les effets de la profondeur D . Pour cela, elle introduit les sources images par rapport au fond de la cavité pour prendre en compte les réflexions sur le fond. La nouvelle formule est également similaire à celle de Rossiter mais tient compte de l'influence du rapport L/D :

$$\text{St} = \frac{n - \frac{1}{4} - \frac{\beta}{2\pi} - \frac{\phi}{2\pi}}{\frac{1}{\kappa} + M \left(1 + \frac{0.514}{L/D}\right)}, \quad (2.6)$$

où β représente la différence de phase entre la source acoustique et les déplacements positifs de la couche cisailée au niveau de l'angle aval et ϕ celle entre l'onde acoustique qui arrive à l'angle amont et la génération d'instabilités dans la couche cisailée. Cette phase ϕ est identique au ϕ de la formule (2.5) de Bilanin et Covert, qui n'explicitent pas sa valeur. Block suggère qu'elle est suffisamment petite pour être négligée, ce qui correspond au modèle de Rossiter qui ne fait intervenir aucun déphasage à l'angle amont. Quant au déphasage à l'angle aval, Block choisit $\beta = -\pi/2$ supposant que la vorticité est générée lorsque la couche cisailée est un quart de cycle après la position zéro. $\beta/2\pi$ s'annule donc avec le facteur $1/4$ conduisant à un déphasage nul, contre $\alpha = 0.25$ chez Rossiter et $3/8$ chez Bilanin et Covert. Le facteur de compressibilité est supposé egal à 1, car on s'intéresse aux vitesses plutôt lentes et le facteur supplémentaire sur le nombre de Mach $(1 + 0.514D/L)$ est une estimation de la variation de la pente de la phase en fonction de $\omega L/a$. En effet, pour des rapports $L/D \geq 1$, cette fonction peut être approximée par une droite dont la pente varie avec L/D . Finalement, la formule de Block peut s'écrire :

$$\text{St} = \frac{n}{\frac{1}{\kappa} + M \left(1 + \frac{0.514}{L/D}\right)} \quad (2.7)$$

Tam et Block²⁸⁹ tentent d'inclure dans les développements analytiques l'épaisseur finie de la couche cisailée. L'hypothèse d'une pression imposée au bord amont, utilisée par Bilanin et Covert ou Block, est supprimée et la spécification des conditions aux limites doit permettre de rendre compte du mécanisme d'excitation au point de séparation. La prise en compte d'une épaisseur finie est effectuée en considérant un profil de vitesse en tangente hyperbolique. Les fréquences prédites avec le modèle de Tam et Block[†] sont en bon accord avec leurs propres mesures pour $M > 0.2$ et les mesures de Rossiter pour $0.4 < M < 0.2$. En dessous de Mach 0.2, les mesures suivent plutôt les modes de profondeur de la cavité[‡]. Ces résonances acoustiques ne sont pas incluses dans la relation de phase issue de la formule de Rossiter.

[†]équations (21) et (19) de la référence.²⁸⁹

[‡]formules (24) et (25) de la référence.²⁸⁹

Les observations expérimentales de Sarohia²⁵⁸ le conduise à établir une relation pour le nombre de Strouhal sous la forme :

$$\frac{fL}{U_\infty} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{U_c}{U_\infty} , \quad (2.8)$$

où U_∞ et U_c sont respectivement la vitesse de l'écoulement au dessus de la cavité et la vitesse de convection des perturbations et n est un entier. La valeur $1/2$ permet de recaler les fréquences adimensionnelles par rapport aux mesures expérimentales. Elle est en désaccord avec la valeur $-1/4$ de Rossiter²⁵² mais se trouve confirmée par les observations de Hussain et Zaman¹²⁷ sur l'interaction entre une couche cisailée et un barreau (sonde). Ces derniers aboutissent à une différence de phase entre les coins amont et aval, déduite de (2.8) :

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{\Phi}{2\pi} = \left(n + \frac{1}{2} \right) , \quad (2.9)$$

Lorsqu'un jet hautement subsonique ou supersonique vient impacter une plaque, des sons purs apparaissent. Les fréquences de ces sons résultent de boucles de rétroaction faisant intervenir les instabilités qui se développent au niveau de la tuyère du jet et qui se propagent vers l'aval et les ondes acoustiques générées au niveau de la plaque et qui se propagent vers l'amont, excitant à nouveau le jet à la sortie de la tuyère. En notant U_c et U_a les vitesses de phase respectives des instabilités se propageant vers l'aval et des perturbations acoustiques revenant vers l'amont, L la distance entre la tuyère et la plaque et f les fréquences des sons émis, Tam et Norum²⁹³ écrivent alors la condition de bouclage :

$$f = \frac{n}{L \left(\frac{1}{U_c} + \frac{1}{U_a} \right)} , \quad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

soit :

$$\frac{L}{U_c} + \frac{L}{U_a} = \frac{n}{f} \quad (2.10)$$

Cette relation est similaire à celle de Rossiter si on néglige le temps de retard introduit par ce dernier. En appliquant la théorie des instabilités au jet bidimensionnel modélisé par des *nappes* de vorticité, Tam et Ahuja²⁹³ parviennent à déterminer la fréquence des sons émis en bon accord avec les expériences pour une large plage de nombres de Mach.

La formule (2.10) est donc caractéristique d'un phénomène de *feedback* aéroacoustique. Elle peut donc être utilisée dans un grand nombre de configurations pour lesquelles le *feedback* est acoustique et les pics fréquentiels sont répartis sur des paliers. C'est déjà elle qui régit le comportement d'écoulements sans obstacle. En effet, dans ce cas, Laufer et Monkewitz¹⁵³ proposent comme critère :

$$\frac{L}{U_c} + \frac{L}{c_\infty} = \frac{n}{f}$$

où U_c et c_∞ sont les vitesses de phase respectives des instabilités vers l'aval et des ondes acoustiques vers l'amont, L est une échelle caractéristique de longueur, f la fréquence des oscillations et n un entier représentant les différents paliers. Pour ces écoulements libres, l'influence sur l'amont peut être interprétée en considérant la formule d'induction de Biot-Savart associée aux changements de concentration de vorticités dus, par exemple, à des appariements de tourbillons ou à des interactions instationnaires (interaction tourbillon-onde de choc ...). Comme le souligne Rockwell,²⁴¹ lorsque la rétroaction est acoustique, c'est-à-dire si $L/\lambda_a \gg 1$, le mécanisme intervenant dans les écoulements libres est très similaire à celui qui se produit lors de l'impact sur un obstacle. Dans le cas contraire, où la rétroaction s'effectue dans le champ proche acoustique, $L/\lambda_a \ll 1$, l'influence de l'amont sur l'aval est nettement plus marquée pour les écoulements en présence d'obstacles.²⁴⁴

En considérant la théorie linéaire de stabilité de Michalke, Blake¹⁷ déduit que les mouvements de la couche cisailée au dessus d'une cavité sont associés à la vitesse transversale v et, dans l'approximation de perturbations linéaires, possèdent une évolution à peu près sinusoidale (sauf peut-être au niveau des angles amont et aval). Les mouvements oscillants de la couche cisailée à l'angle aval se traduisent par un mouvement de va-et-vient du fluide, qui se répercute en amont via la boucle de rétroaction en imposant les mouvements à l'angle amont de façon synchronisée. Pour illustrer cela, Blake considère tout d'abord une expression simplifiée où le mouvement sinusoidal amplifié de la couche cisailée est modélisé par :

$$v(y) = v_0 e^{\alpha_i x} e^{i(\alpha_r x - \omega t)} \quad 0 < x < L \quad (2.11)$$

où le taux d'amplification de la vitesse transversale est $e^{\alpha_i x}$. Le modèle (2.11) implique que le mouvement à l'angle aval vérifie :

$$v(L) = v_0 e^{\alpha_i L} e^{i(\alpha_r L - \omega t)}$$

La condition de synchronisation maximale est telle que, quand le maximum d'entrée de fluide se produit à l'angle aval (impliquant une augmentation de pression dans la cavité), la vitesse transverse à l'angle amont soit petite et en phase de croissance. La phase $\alpha_r L$ de $v(L)$ par rapport à $v(0)$ doit donc être inférieure de $\pi/2$ par rapport à un cycle complet soit :

$$\alpha_r L = 2n\pi - \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

En tenant compte du fait que $\alpha_r = \frac{\omega}{U_c} = \frac{2\pi f}{U_c}$, on en déduit la relation suivante :

$$\frac{fL}{U_c} = n - \frac{1}{4} \quad \text{soit} \quad \frac{L}{\lambda} = \frac{\Phi}{2\pi} = n - \frac{1}{4}$$

Par ce raisonnement, on retrouve une justification de la valeur $1/4$ notée par Brown et Powell et reprise par Rossiter pour caler la constante $\alpha = 1/4$. Pour améliorer le modèle, Blake propose de tenir compte du caractère réel de la cavité en introduisant un déphasage supplémentaire β , représentant le retard éventuel entre l'interaction avec l'angle aval et la réponse de la couche cisailée.

$$\frac{\Phi}{2\pi} = n \pm \frac{1}{4} - \frac{\beta}{2\pi} \quad (2.12)$$

A relativement faible vitesse, l'approximation $\beta = 0$ est généralement valable car l'hypothèse de quasi-incompressibilité se justifie alors. Les éléments de (2.12) qui peuvent varier d'un écoulement à un autre sont les suivants :

- La vitesse de convection des instabilités qui se traduit par un signe + ou - devant le $1/4$, correspondant à une condition d'entrée ou de sortie du fluide dans la cavité.
- Le déphasage β qui tient compte du caractère complexe de l'interaction au niveau de l'angle aval.
- Un déphasage supplémentaire pour traduire le temps de réponse de la couche cisailée au niveau de la séparation pour générer de nouvelles instabilités.

On constate que la formule proposée par Rossiter est formellement similaire en prenant $\beta = 2\pi fL/c_\infty$ correspondant au temps de retour de l'onde acoustique dans le cas d'un *feedback* aéroacoustique. Quand la cavité est petite, comparée à la longueur d'onde acoustique (limite hydrodynamique), le temps de retour devient négligeable et l'influence de l'amont sur l'aval est quasi-instantanée.

Ziada et Rockwell³¹⁹ mesurent précisément la valeur de la phase pour des écoulements incompressibles en eau, pour lesquels l'influence sur l'angle amont est immédiate. Ils trouvent sans ambiguïté la valeur $2n\pi$ pour la différence de phase mesurée sur une ligne où $u_1 = 0.95U_\infty$. La même valeur est trouvée par Ho et Nosseir¹¹⁶ pour un jet impactant une plaque, par Rockwell et Schachenmann²⁴⁸ pour une cavité résonante ou par Gharib et Roshko⁸⁷ pour des cavités axisymétriques en eau. Ziada et Rockwell³¹⁹ montrent aussi que l'évaluation de la phase est sensible à la position de la mesure et ils interprètent les valeurs différentes de $2n\pi$ observées par d'autres expérimentateurs comme un effet de la couche cisailée sur les mesures.

2.5 Conclusion

Les oscillations aéroacoustiques dans une cavité résultent d'une boucle de rétroaction dans laquelle les perturbations tourbillonnaires générées à l'angle amont (bord de séparation) sont

convectées en aval dans la couche cisailée et viennent impacter l'angle aval, ce qui crée des ondes de pression qui remontent en amont provoquant l'apparition de nouvelles structures tourbillonnaires en atteignant l'angle amont de la cavité. Ces perturbations sont de nature aérodynamique et/ou acoustique et transmettent l'information en amont, fermant ainsi la boucle de rétroaction. La relation de phase entre l'amont et l'aval due à la géométrie de la cavité joue un rôle fondamental dans la détermination des oscillations à des fréquences discrètes.

Les principaux paramètres pour déterminer la fréquence des oscillations autoentretenues sont le rapport L/D et le nombre de Mach M . Cependant des paramètres secondaires peuvent prendre de l'importance dans certains cas. Ainsi, le rapport L/δ_θ influe directement sur la sélection du mode aéroacoustique et peut conditionner la transition vers un nouveau régime d'écoulement. Le rapport δ/D caractérise l'influence de la profondeur de la cavité sur l'écoulement. Au delà, d'une certaine valeur de ce rapport, l'effet de la profondeur est négligeable en terme de mode acoustique mais il reste déterminant sur le comportement de la zone de recirculation, à l'origine d'une partie des effets tridimensionnels. On retient aussi que la couche cisailée a un comportement essentiellement bidimensionnel pour $L/W < 1$.

Chapitre 3

Simulation directe du bruit d'un écoulement affleurant une cavité

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de réaliser une simulation d'un écoulement affleurant une cavité par simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes. Une solution de ces équations générales de la mécanique des fluides prise sous forme compressible contient à la fois les grandeurs aérodynamique et acoustique de l'écoulement. Dans notre cas, le domaine de calcul est pris suffisamment grand pour inclure une partie du champ acoustique rayonné. Les résultats vont donc permettre de relier les caractéristiques de l'écoulement aérodynamique autour de la cavité au champ acoustique correspondant.

Les outils numériques mis en œuvre pour réaliser une telle simulation sont décrits dans le chapitre 1. Le choix d'une configuration numérique pertinente et de paramètres accessibles avec les moyens informatiques disponibles est effectué en analysant les précédentes simulations d'un écoulement sur une cavité. Si elles sont très nombreuses depuis ces quinze dernières années, peu d'entre elles abordent le rayonnement acoustique associé.

3.2 Précédentes simulations d'un écoulement sur une cavité

3.2.1 Premières simulations stationnaires

De par sa grande simplicité géométrique, l'écoulement dans une cavité constitue une des premières configurations où l'on a pu étudier un écoulement complexe en présence de parois. Il s'agit de simulations 2-D des équations de Navier-Stokes incompressibles pour déterminer l'écoulement de recirculation dans la cavité dont une des faces est soumise à un écoulement imposé (cavité entraînée ou *driven cavity*). Les premiers calculs pour un écoulement constant, dans les années 1960, sont rappelés par Burggraf³⁴ ou Pan et Acrivos.²¹⁴ L'écoulement est caractérisé par des lignes de courant fermées dans la cavité. Les simulations de Pan et Acrivos (1967)

se comparent favorablement avec les solutions de similarité proposées par Moffatt¹⁸⁸ et avec les mesures, notamment pour la position des zones de recirculation et la présence de tourbillons secondaires dans les coins. Nallasamy et Prasad²⁰³ (1977) étudient les caractéristiques de ces tourbillons secondaires, notamment l'influence du nombre de Reynolds.

O'Brien²⁰⁹ (1972) remplace l'écoulement uniforme par un écoulement cisailé dans un canal, de type écoulement de Couette, et analyse l'influence sur les lignes de courant. Brandeis²⁴ (1981) utilise un profil de couche limite simplifié. Il cherche également une solution stationnaire des équations de Navier-Stokes incompressibles et constate, en faisant varier les dimensions de la cavité, que le point de réattachement est toujours situé en dessous du coin aval et que sa position dépend de la longueur de la cavité.

3.2.2 Calculs CFD

Les premiers calculs CFD instationnaires d'un écoulement au dessus d'une cavité sont dus à Hankey et Shang.⁹⁸ Ils résolvent les équations de Navier-Stokes moyennées (RANS pour *Reynolds Averaged Navier-Stokes*) avec un schéma aux différences finies de McCormack et un modèle de viscosité turbulente, dit de *relaxation*, de Cebeci-Smith. Waskiewicz, Shang et Hankey³⁰⁵ ont également appliqué cet algorithme pour simuler le sillage derrière une plaque. Shang et Hankey emploient un maillage 2-D de 78×52 points pour discrétiser leur domaine incluant une cavité de rapport $L/D = 2.25$ à Mach 1.5. Les résultats de cette première simulation sont encourageants et se comparent favorablement aux mesures de Heller et Bliss,¹⁰⁷ notamment pour la distribution de pression sur les parois de la cavité. L'essor des calculs RANS avec de nouveaux modèles de turbulence va permettre de nombreuses simulations dans les années 90. Il s'agit de simulations en supersonique, qui sont souvent validées par comparaison de la répartition des coefficients de pression avec les données expérimentales. Le modèle de turbulence couplé aux RANS varie suivant les auteurs : Baysal et Stallings¹¹ emploient le modèle de Baldwin-Lomax, Suhs²⁸² et Shih et al.²⁶⁷ implémentent le modèle $k - \epsilon$. Tam, Orkwis et Disimile²⁸⁴ étudient l'influence du modèle de turbulence et montrent que le résultat est sensible à la dissipation introduite. Il notent même de meilleurs résultats pour un calcul en laminaire. De même, Slimon et Wagner²⁷⁵ obtiennent des résultats fortement dépendants du modèle de turbulence. Orkwis et al.²¹⁰ étudient également l'implémentation de plusieurs résolutions temporelles.

Les premiers calculs tridimensionnels par Rizzetta²³⁸ (1988) avec les RANS instationnaires et le modèle de Baldwin-Lomax ne font pas ressortir de gain sensible par rapport à une simulation 2-D, démontrant le caractère fortement bidimensionnel de la couche cisailée au dessus de la cavité, au moins pour la configuration étudiée.

L'avantage des RANS est qu'elles s'appuient sur des codes CFD maintenant bien éprouvés,

souvent interfacés à un mailleur, ce qui permet d'étudier l'influence de modifications de la géométrie de la cavité. Plusieurs auteurs ont ainsi étudié numériquement les effets d'un contrôle passif. Kim et Chokani¹⁴⁰ remplacent le fond de la cavité par une surface poreuse et obtiennent les mêmes tendances que celles de l'expérience correspondante. Baysal *et al.*¹² remplacent le coin aval par une rampe, Lamp et Chokani¹⁵¹ simulent le contrôle par un jet pulsé et Zhang *et al.*³¹⁶ modifient la géométrie de l'angle amont. Ota *et al.*²¹² maillent l'habitacle d'une voiture et simulent un écoulement au dessus du toit ouvrant avec le code Golde, afin de caractériser la résonance. Sinha *et al.*^{273,272} utilisent le code CRUNCH, basé sur les RANS avec un modèle $k - \epsilon$ ou de type LES à une équation avec des fonctions de paroi et obtiennent des simulations 3-D instationnaires. Soemarwoto et Kok²⁷⁶ (2001) effectuent une simulation tridimensionnelle avec un modèle $k - \omega$ pour une cavité de rapport $L/D = 4.5$ avec un Mach $M = 1.2$ afin d'étudier les répercussions sur l'écoulement lorsqu'on remplace l'angle droit aval par une rampe à 45° .

D'autres méthodes ont été testées. Ghaddar *et al.*⁸⁶ utilisent une simulation numérique directe résolue avec une méthode spectrale car ils se placent dans un canal et périodisent la cavité dans la direction x_1 . Najm et Ghoniem²⁰² résolvent une méthode de vortex pour analyser le mécanisme des instabilités dans une cavité en canal. Ils notent pour la première fois la présence d'un nouveau régime d'écoulement, le mode de sillage dont on reparlera un peu plus loin (§3.3.3). Pereira et Sousa^{217,219} réalisent une simulation directe des équations de Navier-Stokes incompressibles en eau, à l'aide d'une discrétisation temporelle de Leith, et suggèrent une modulation de l'écoulement par la zone de recirculation. Une simulation numérique directe 2-D à faible Reynolds est utilisée par Kestens¹³⁹ pour étudier numériquement le contrôle en boucle ouverte ou fermée des oscillations dans la cavité. On peut également noter la simulation tridimensionnelle d'une cavité profonde ($L/D = 0.42$ et $L/W = 2$) à Mach 0.8 dans un canal par simulation numérique directe par Labbé, Troff et Sagaut¹⁵⁰ à $Re = 1000$ en 1998. Ils utilisent le code PEGASE³⁰² de l'ONERA qui résout les équations de Navier-Stokes compressibles. Une première simulation, avec un maillage $121 \times 50 \times 121$ points dans la cavité et $343 \times 50 \times 121$ points en dehors, montre les oscillations de la couche cisailée et les effets tridimensionnels dans la cavité. La même configuration mais avec un nombre de Reynolds similaire à celui de l'expérience de Forestier⁷⁹ a été simulée par Larchevêque, Troff et Sagaut¹⁵² par LES avec le même code et illustre la structure 3-D de l'écoulement. Une autre approche par DNS a été récemment entreprise par Hamed⁹⁷ avec des premiers résultats en 2-D.

Ricot, Maillard et Bailly²³⁷ ont mis en évidence la capacité d'un code industriel utilisant la méthode gaz sur réseau (méthode de Lattice Boltzmann), PowerFLOW, à reproduire le comportement résonant d'une cavité. Ils retrouvent qualitativement et quantitativement les princi-

pales caractéristiques des oscillations pour une cavité de type résonateur de Helmholtz, étudiée expérimentalement par Nelson *et al.*²⁰⁴

3.2.3 Simulations aéroacoustiques

3.2.3.1 Méthodes hybrides

Une approche originale a été développée par Hardin et Pope¹⁰⁰ pour calculer le rayonnement acoustique à partir d'un premier calcul CFD, résolvant les RANS instationnaires incompressibles. Ils déterminent alors un terme source pour les équations acoustiques. Ce modèle a été appliqué au cas de la cavité en 1995¹⁰¹ et fournit une bonne estimation de la fréquence et de la directivité du champ sonore. Une autre application au bruit de cavité est présentée par Slimon et Wagner²⁷⁵ qui expliquent leurs résultats surprenants par la grande sensibilité du calcul CFD au modèle de turbulence choisi. Plus tard, Moon *et al.*¹⁹¹ utilisent ce modèle pour obtenir le rayonnement d'une cavité profonde. Leurs résultats sont décevants et seule la grande dépendance vis à vis du maillage est mise en évidence. Cette méthode a été modifiée par Shen et Sorensen²⁶³ et appliquée avec peu de succès par Ewert *et al.*⁶² D'autres études semblent nécessaires pour conclure quant à la validité de cette approche hybride.

On peut également noter parmi les approches hybrides, le calcul de Hardin et Mason⁹⁹ pour déterminer le bruit large bande.

Enfin, l'analogie de Curle en présence d'un écoulement a été appliquée par Zhang, Rona et Lilley^{317,160} pour obtenir des spectres en champ lointain, après un premier calcul RANS fermé par un modèle $k - \omega$.

3.2.3.2 Calculs directs en supersonique

Pour un écoulement supersonique au dessus de la cavité, le rayonnement acoustique consiste en une famille d'ondes de choc, décrites par Heller et Delfs.¹⁰⁶ Compte tenu de l'amplitude de ces ondes de choc, un calcul CFD est suffisant pour obtenir le rayonnement acoustique. De plus, ces ondes acoustiques ne peuvent pas remonter l'écoulement. Plusieurs simulations des RANS compressibles instationnaires ont permis d'obtenir une structure du champ rayonné conforme aux visualisations expérimentales.

On peut citer les simulations de Zhang *et al.*^{313,312,317,160} qui ont développé une approche où sont résolues les RANS instationnaires avec un modèle de turbulence de type $k - \omega$ incluant des corrections pour prendre en compte le caractère compressible. Les résultats pour des nombres de Mach 1.5 et 2.5 sont en bon accord avec leurs propres expériences.^{314,315}

Pour éviter les problèmes liés au choix du modèle turbulent, Rona et Dieudonné²⁴⁹ considèrent un écoulement laminaire à Mach 1.5 au dessus d'une cavité, et ils étudient l'influence du maillage

sur les résultats acoustiques obtenus.

3.2.3.3 Calculs directs en subsonique

Les premières simulations 2-D en subsonique permettant d'obtenir le rayonnement acoustique ont été réalisées en 1999 par Colonius, Basu et Rowley⁴⁰ et Shieh et Morris²⁶⁵ pour des cavités avec un nombre de Reynolds basé sur la profondeur D , $Re_D \simeq 5000$. Il s'agit, comme dans notre étude, de simulations numériques directes (DNS) utilisant des algorithmes CAA et des conditions aux limites non réfléchissantes. Le rayonnement acoustique obtenu par Rowley, Colonius et Murray²⁵⁴ (2000) est en bon accord avec les visualisations strioscopiques de Karamcheti.¹³⁵ Cependant, dans les études de Colonius *et al.*,^{40,39} on constate une transition du régime classique décrit par Rossiter, et appelé ici *mode de cisaillement*, vers un nouveau régime, qualifié de *mode de sillage* car il possède certaines caractéristiques d'un écoulement de sillage derrière un objet. Ce régime a été mis en évidence par les résultats expérimentaux de Gharib et Roshko⁸⁷ lorsqu'on allonge la cavité ou que l'on diminue l'épaisseur de la couche limite incidente. Dans leur étude, Shieh et Morris²⁶⁵ n'obtiennent que ce second régime d'écoulement. En 2000, Shieh et Morris²⁶⁶ ont appliqué les développements de la CAA aux RANS instationnaires compressibles afin de pouvoir atteindre un grand nombre de Reynolds ($Re_D \simeq 2 \times 10^5$). Le modèle à une équation de Spalart-Allmaras est utilisé, couplé au modèle *Detached Eddy Simulation* (DES) pour les régions de séparation de l'écoulement. La transition d'un régime de cisaillement vers un régime de sillage est toujours observée.

Un cas test portant sur la simulation aéroacoustique d'un écoulement affleurant la cavité d'un joint de portière, proposé au troisième *Workshop* en aéroacoustique numérique en novembre 1999, a donné lieu à plusieurs simulations directes. Il s'agit d'une cavité de rapport $L/D = 0.58$ (avec $D = 2.8$ cm) soumise à une couche limite turbulente épaisse ($\delta = 2.2$ cm) à une vitesse de 50.9 m/s ($M \simeq 0.15$). Moon *et al.*¹⁹¹ ont utilisé la méthode hybride de Hardin et Pope et constatent une forte dépendance vis à vis du maillage. Ashcroft, Takeda et Zhang^{5,4} utilisent le code CFD CFL3-D, résolvant les RANS 2-D/3-D compressibles en utilisant une discrétisation en volumes finis à l'ordre 2 et le modèle turbulent $k - \omega$ de Wilcox. Les résultats sont en bon accord avec les mesures de référence de Henderson¹¹⁰ tant au niveau de la fréquence que de l'amplitude des oscillations. Shieh et Morris²⁶⁴ utilisent les RANS avec le modèle DES et constatent, contrairement à Ashcroft *et al.*, qu'il faut diminuer l'épaisseur de la couche limite pour obtenir des oscillations autoentretenues. Ils prennent $\delta = 1.4$ mm. De même, Kurbatskii et Tam¹⁴⁹ réduisent δ à 2 mm. Leur simulation numérique directe (DNS) s'appuie sur l'algorithme DRP de Tam et Webb, et utilise un maillage multi-blocs développé par Tam et Kurbatskii.²⁹² Ce cas test est reproduit par Heo et Lee¹¹² qui utilisent les mêmes méthodes numériques que

Colonius *et al.*⁴⁰ Le spectre acoustique est sensiblement plus fidèle aux mesures. Heo et Lee réalisent également une étude paramétrique pour déterminer l'influence de plaques, qui réduisent l'ouverture de la cavité (*cover-plates*). Ces modifications géométriques se répercutent sur la fréquence et la directivité du rayonnement.

3.3 Simulations de cavités rectangulaires de rapport $L/D = 4$ à Mach 0.5

3.3.1 Paramètres de la simulation

3.3.1.1 Le choix d'une configuration de base

Un des points les plus délicats lorsqu'on décide de réaliser une simulation numérique consiste à définir une configuration de calcul qui soit compatible avec les méthodes numériques choisies (chap 1) et qui soit à la fois simple et caractéristique des phénomènes physiques. Ce choix doit être représentatif du phénomène que l'on veut simuler et suffisamment documenté dans la littérature pour se convaincre du caractère quasi-irréprochable de la simulation.

Résolution bidimensionnelle

L'écoulement affleurant une cavité et le champ acoustique correspondant sont des phénomènes physiques tridimensionnels mais une simulation bidimensionnelle en constitue une bonne approximation. Il s'agit évidemment d'un compromis mais qui n'est pas très pénalisant pour étudier les mécanismes de génération de bruit mis en jeu dans un tel écoulement. Il faut néanmoins toujours garder à l'esprit le caractère 2-D de la simulation lors de l'analyse des résultats afin d'en voir les limitations. Pour se convaincre du bien fondé d'un tel choix dans notre cas, voici quelques arguments.

La présence de grosses structures appelées aussi structures cohérentes de la turbulence a été observée pour une grande classe d'écoulements cisailés comme les jets, les sillages ou les zones de mélange. Ces structures possèdent un mode d'amplification essentiellement bidimensionnel si le nombre de Mach convectif reste suffisamment faible (< 0.6 pour un jet).

De plus, l'écoulement au dessus d'une cavité est essentiellement bidimensionnel pour un rapport $L/W < 1$ entre la longueur L de la cavité et sa largeur W dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. Ce résultat est démontré expérimentalement par Ahuja & Mendoza,² par exemple, et numériquement par Rizzetta.²³⁸ C'est pourquoi, de nombreux expérimentateurs utilisent les parois latérales de la veine d'essai pour définir la largeur de leur cavité. Dans leur expérience sur une cavité de type résonateur, Nelson *et al.*²⁰⁴ indiquent que les structures tourbillonnaires qui apparaissent sont bien corrélées dans toute la direction transverse confirmant que l'écoulement

pris dans un plan médian peut être considéré comme essentiellement bidimensionnel. De même, Forestier⁷⁹ met en évidence par des interspectres que l'écoulement est fortement corrélé dans la direction transverse pour une vitesse transonique $M = 0.8$.

On choisit donc de réaliser une simulation bidimensionnelle en restant conscient des quelques écarts de comportement inhérents à une approche 2-D, notamment au niveau de la zone de recirculation qui peut être fortement tridimensionnelle.^{175,143} L'avantage principal d'une résolution 2-D réside dans l'importante simplification numérique qu'elle autorise. Cette simplification se trouve dans le développement du code de calcul, beaucoup moins lourd en 2-D et donc plus facile à mettre au point et à optimiser mais aussi, et surtout, elle se répercute sur le coût du calcul en mémoire comme en temps, permettant ainsi plus de tests pour faciliter la mise au point.

Choix de la géométrie

La configuration géométrique de base sera une cavité rectangulaire bidimensionnelle de rapport longueur sur hauteur $L/D = 4$. Une telle valeur du paramètre géométrique principal possède deux avantages : D'abord, elle classe sans ambiguïté la cavité dans la catégorie des cavités peu profondes, *shallow cavity*, pour lesquelles le phénomène physique responsable des oscillations autoentretenu est bien décrit par une boucle de rétroaction, appelée *feedback* aéroacoustique. De plus, c'est une géométrie qui a fait l'objet de nombreuses investigations expérimentales, numériques ou théoriques.

Vitesse de l'écoulement

On a vu précédemment que l'une des difficultés qui rendent la CAA délicate, réside dans le fait que les fluctuations aérodynamiques et acoustiques possèdent des ordres de grandeur très différents. Cette différence est d'autant plus marquée que la vitesse est faible. Ce qui veut dire qu'une simulation à basse vitesse devra être beaucoup plus précise numériquement afin de récupérer les fluctuations acoustiques. C'est pourquoi, la plupart des études numériques réalisées considèrent un écoulement supersonique. Il nous semble plus intéressant d'envisager un cas subsonique d'un intérêt pratique plus large (notamment dans le domaine des transports) et moins courant dans la littérature. Pour la configuration de base, on choisit un écoulement d'air à un nombre de Mach de 0.5 au dessus de la cavité.

Choix des dimensions physiques

Ce choix est avant tout imposé par les contraintes numériques. Le choix d'une résolution par DNS, s'il possède le grand avantage de ne pas faire intervenir de modélisation qui pourraient rendre suspects les résultats, impose néanmoins de mailler toutes les échelles constituant le

spectre de l'énergie cinétique. Si on prend la profondeur D de la cavité pour caractériser les plus grandes échelles et l'échelle de Kolmogorov l_η , caractéristique des plus petites structures dissipant l'énergie turbulente, le rapport s'écrit :

$$\frac{D}{l_\eta} \sim \frac{D}{\nu^{3/4} \epsilon^{-1/4}} \sim \frac{D}{\nu^{3/4} (u^3/D)^{-1/4}} \sim \text{Re}_D^{3/4} \quad \text{où} \quad \text{Re}_D = \frac{uD}{\nu}$$

On voit donc que le nombre de points du maillage N nécessaire pour décrire toutes les échelles de la turbulence va évoluer comme $\text{Re}_D^{9/4}$ en trois dimensions et $\text{Re}_D^{3/2}$ en 2-D. On se rend alors mieux compte de l'économie substantielle réalisée lorsqu'on se contente d'une simulation bidimensionnelle. En pratique, on retient en général entre 5 et 10 l_η pour l'échelle la plus petite. Dans notre cas, c'est la présence de parois dans l'écoulement qui va déterminer l'échelle la plus petite. On maille en effet jusqu'aux échelles visqueuses, c'est-à-dire jusqu'à $y^+ < 5$ en terme de coordonnées de paroi. Une telle contrainte, conjuguée à la nécessité d'inclure une partie du champ acoustique rayonné dans le domaine de calcul nous conduit, en choisissant un maillage modeste de l'ordre de 150000 points pour avoir une grande souplesse de calcul, à un nombre de Reynolds basé sur la hauteur de la cavité D , $\text{Re}_D = \frac{U_\infty D}{\nu} \simeq 4800$ ou, plus explicitement, une profondeur $D \simeq 4.2 \times 10^{-4}$ m. Une telle valeur peut paraître peu réaliste mais les études tendent à montrer une relative indépendance vis-à-vis du nombre de Reynolds. On choisit ainsi une valeur $\text{Re}_D \simeq 5000$ comparable aux autres DNS déjà publiées,^{40,265} ce qui sera pour nous une première validation de qualité. De plus, le nombre de points est assez loin des limites actuelles des supercalculateurs, ce qui rend le maillage souple d'utilisation dans le cadre d'une mise au point. On pourra ainsi utiliser pleinement les possibilités des machines pour un passage en 3-D ou une augmentation du nombre de Reynolds.

3.3.1.2 Construction du maillage

Le maillage constitue la toile de fond de toute simulation et sa construction doit être rigoureuse et suivre un certain nombre de règles élémentaires afin de s'assurer qu'il supporte bien les caractéristiques de l'écoulement que l'on veut simuler.

Dans notre cas, le code développé en interne dans l'équipe est limité à des configurations géométriques simples. Comme ce code est basé sur un schéma aux différences finies d'ordre élevé, l'approche la plus naturelle et la plus simple conduit à utiliser un maillage cartésien. Ce maillage est non régulier afin de raffiner les zones où l'écoulement est complexe (zone de fort cisaillement, parois ...) en économisant des points dans les zones moins complexes (quand on n'a que de l'acoustique par exemple).

Cependant, le schéma de discrétisation DRP est optimisé dans l'espace des nombres d'onde pour un maillage régulier et il est très important d'éviter toute discontinuité ou tout changement

brusque dans le maillage. C'est pourquoi, l'évolution de la taille des mailles des zones raffinées vers les zones plus grossières suit une progression géométrique dont le taux d'étirement est toujours pris inférieur à 5 %. La plus petite taille de maille est imposée par la condition $y^+ \simeq 1$ sur les parois et on s'assure toujours que la maille la plus large (dans la partie où il n'y a que de l'acoustique) respecte la discrétisation de 6 points par longueur d'onde imposée par le schéma DRP pour la plus haute fréquence que l'on veut propager.

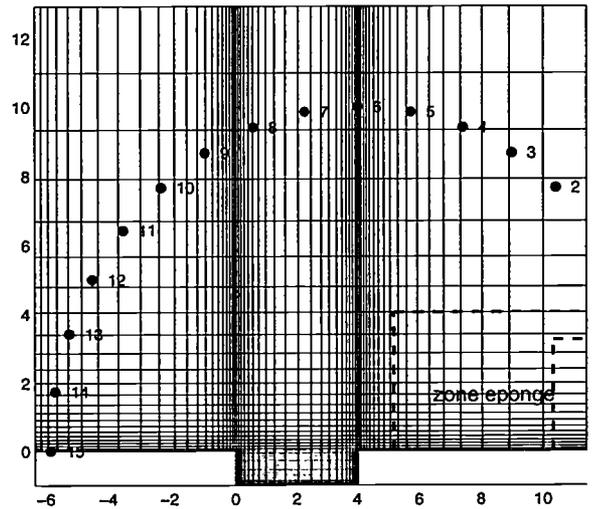


Figure 3.1: Cavité $L/D = 4$ et $M = 0.5$. Vue du maillage cartésien irrégulier utilisé; les coordonnées horizontale x_1 et verticale x_2 ont été adimensionnalisées par D . On a représenté 1 point sur 8 pour plus de lisibilité. Les capteurs numériques pour le calcul de la directivité sont représentés en bleu et les pointillés rouges indiquent l'emplacement de la zone éponge.

Une visualisation du maillage utilisé est présentée sur la figure 3.1. Il comporte 166×151 points dans la cavité et 445×190 en dehors. Il s'étend de $-6D$ à $10D$ dans la direction x_1 et de $-D$ à $13D$ dans la direction x_2 afin d'inclure une portion du champ sonore rayonné et d'éloigner les conditions limites de la région d'intérêt. On s'aperçoit que le maillage est resserré sur toutes les parois horizontales et verticales, du même coup au niveau des angles amont et aval de la cavité. Ce raffinement correspond, en terme de variable de paroi, à $\Delta y_{min}^+ \simeq 0.88$ et $\Delta x_{min}^+ \simeq 0.95$ pour la simulation avec une couche limite épaisse ($L/\delta_\theta = 63$). On obtient $\Delta y_{min}^+ \simeq 2.8$ pour la simulation avec $L/\delta_\theta = 280$. Par ailleurs, on remarque que le maillage est légèrement resserré sur la condition d'entrée afin d'éviter une dérive du profil de vitesse d'entrée dans la condition limite. Au contraire, les mailles sont fortement étirées en sortie, ce qui correspond à une des composantes de la zone éponge construite en sortie de la zone cisailée afin de dissiper les tourbillons, détruisant par la même le bruit d'origine numérique produit lors de leur sortie et qui pourrait masquer ou parasiter le champ acoustique physique. Cette procédure, qui est l'un des points clés d'une simulation aéroacoustique de qualité, est décrite

plus en détail dans le §1.2.3.2.

3.3.1.3 Paramètres numériques

Conditions initiales

Le calcul est initialisé en imposant le profil de vitesse sur toute la longueur du domaine. La vitesse u_1 vaut donc zéro dans la cavité et U_∞ au dessus, les deux zones étant reliées par un profil $u_1(x_2)$ correspondant à une expression polynomiale approchée de la solution de Blasius, définissant une couche limite laminaire sur une plaque plane :

$$u_1(x_2) = U_\infty \left(\frac{x_2}{\delta} \right) \left(2 - 2 \left(\frac{x_2}{\delta} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{\delta} \right)^3 \right)$$

Les trois autres variables sont prises constantes : $u_2 = 0$, $p = p_\infty$ et $\rho = \rho_\infty$. Ce choix impose les valeurs des 4 variables conservatives ρ , ρu_1 , ρu_2 , ρe , qui vont initialiser les équations de Navier-Stokes. Comme la solution à $t = 0$ ne satisfait pas ces équations, on obtient d'abord une solution transitoire. Le transitoire n'a pas de signification physique et pour s'assurer qu'il n'influence en rien l'écoulement une fois établi, on doit pouvoir utiliser des conditions initiales sous une forme différente mais équivalente physiquement et obtenir les mêmes champs physiques après un transitoire différent. Cette vérification est effectuée par Kestens¹³⁹ qui initialise la couche limite sur toute la longueur du domaine ou bien seulement dans le plan d'entrée. Le transitoire est bien entendu différent mais la solution finale est identique. Le choix d'une initialisation sur tout le domaine a l'avantage de réduire la durée du transitoire. Aucune excitation supplémentaire n'est nécessaire.

Dans le cas d'écoulements faisant intervenir un *feedback* aéroacoustique, le doute subsiste quant à l'initiation des oscillations puisqu'aucune excitation n'est nécessaire pour faire démarrer le calcul. Une visualisation détaillée de la période transitoire montre effectivement que les premières instabilités qui se développent dans la couche cisailée sont certainement excitées par l'impulsion de pression créée au début du transitoire. Si la couche limite initiale est très fine, ces instabilités peuvent former un couple de tourbillons non physique dont l'impact sur l'angle aval de la cavité va tout de suite lancer la boucle de rétroaction qui conduira petit à petit à un régime pseudo-stationnaire avec un cycle bien établi. Ce type de transitoire est décrit par Buell et Huerre³³ lors de la simulation d'une couche de mélange. Si la couche limite est plus épaisse (plutôt pour une vitesse donnée qu'en fonction des dimensions géométriques de la cavité), on ne voit pas ce transitoire artificiel mais une période transitoire plus progressive où l'interaction entre les instabilités et l'angle aval se développe progressivement jusqu'à atteindre un degré où la boucle de rétroaction est parfaitement établie. On remarque que la fréquence principale des oscillations apparaît très tôt, confirmant qu'il s'agit bien aussi d'un mécanisme d'instabilité dans

ce cas.

Conditions aux limites

Les conditions limites imposées au cours du calcul sont rappelées sur le schéma de la figure 1.1. Leur implémentation est décrite dans le chap. 1 consacré aux méthodes numériques. La condition limite de paroi utilise des extrapolations des variables primitives sur trois rangées de points fictifs; elle est décrite au §1.2.5.2. On a tenté d'évaluer les performances et surtout l'indépendance vis-à-vis de ces conditions limites sur des portions du maillage de la cavité afin de se persuader que le traitement des frontières du domaine produit un bruit d'origine numérique suffisamment faible pour ne pas perturber le champ acoustique physique ni produire une excitation artificielle qui pourrait modifier l'écoulement. Ce type d'autoexcitation (*self-forcing*) peut en effet contrôler le développement des instabilités en créant une nouvelle boucle de rétroaction dont la dimension caractéristique est la taille de la boîte de calcul. Buell et Huerre³³ notent une telle autoexcitation pour le développement d'une couche de mélange; les ondes acoustiques enfermées dans la boîte de calcul produisent un forçage de la condition de sortie sur la condition d'entrée. Le fait que le mécanisme fondamental régissant les oscillations dans la cavité soit également une boucle de rétroaction aéroacoustique rend ce type de simulation encore plus sensible aux effets de cette autoexcitation. C'est pourquoi, le rôle de la zone éponge en sortie est primordial en dissipant les tourbillons et le rayonnement acoustique afin qu'il ne soit pas réfléchi par la condition limite de sortie.

Kurbatskii et Tam¹⁴⁹ soulignent aussi l'importance du placement des conditions limites pour éviter une influence sur le développement aérodynamique. Ils montrent que leur plus petit domaine testé renforce les oscillations et modifie la fréquence d'oscillation. Les conditions de rayonnement, qui sont efficaces pour faire sortir des perturbations acoustiques, se comportent mal lorsqu'elles sont proches des fluctuations aérodynamiques et peuvent réfléchir une partie de l'énergie créant une autoexcitation.

La viscosité sélective

C'est le dernier ingrédient indispensable d'une simulation de qualité. Le schéma et/ou les conditions limites génèrent des ondes parasites non physiques, notamment des oscillations maille à maille. Le rôle de la viscosité sélective est de filtrer ces hautes fréquences sans trop toucher au contenu énergétique physique. Le filtrage de Tam *et al.*²⁹⁶ permet ainsi de ne pas dissiper les fluctuations sur 6 points, qui sont supportées par le schéma DRP.

D'autre part, le pas de temps imposé par la condition de stabilité ($CFL = 0.7$) et la maille la plus petite donnée par $\Delta y^+ \simeq 1$ est très petit, $\Delta t = 5.7 \times 10^{-9}$ s. On doit donc réaliser un grand

nombre d'itérations temporelles pour obtenir plusieurs cycles d'oscillations après le transitoire mais les conditions limites ont alors tendance à devenir instables. La viscosité sélective permet donc de maintenir une stabilité suffisante. Ces problèmes de stabilité sont aggravés par la présence des angles droits, difficiles à décrire numériquement et donc fortement instables.

C'est pourquoi, le filtrage sélectif est appliqué avec un nombre de Reynolds du maillage $R_S = 4.5$. Un second filtrage est réalisé près des parois et des angles droits avec une décroissance gaussienne. Les simulations présentées sont le résultats de calcul sur 50000 itérations avec un temps de $1.5\mu s$ par point et par itération sur un CRAY C98 (ou $0.3\mu s$ /point/itération sur un NEC SX-5).

3.3.2 Etude de l'écoulement sur la cavité

3.3.2.1 Visualisation de l'écoulement

Une première réponse sur la nature qualitative de l'écoulement qui se développe au dessus de la cavité est obtenue en visualisant le champ de vorticité $\Omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ autour de la cavité. La figure 3.2 indique la présence de deux structures tourbillonnaires dans la couche cisailée. Deux zones de recirculation principales sont visibles dans la cavité et les tourbillons contrarotatifs, crées à l'angle aval par la conservation de la vorticité, induisent deux zones de recirculation secondaires contrarotatives en amont des deux recirculations principales. Ces différentes recirculations quasi-stationnaires dans la cavité sont mises en évidence sur la figure 3.3.

Le tracé du critère de tourbillon de Jeong et Hussain,^{133,139} qui s'écrit en 2-D comme :

$$\Lambda = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} < 0$$

est présenté sur la figure 3.5. On aperçoit une structure très intense au milieu de la couche cisailée, à $t = 0$, qui va impacter l'angle aval sur les images suivantes. Lors de sa scission, les deux parties résultantes ne sont pas d'égale intensité. Au temps $3T/4$, on constate en effet que la partie éjectée est moins intense que celle qui reste dans la cavité. Rockwell et Knisely²⁴⁴ ont étudié l'influence de la position verticale du tourbillon lorsqu'il impacte l'angle droit d'une cavité en appliquant un décalage vertical ϵ entre les coins amont et aval. Pour un offset ϵ négatif, le tourbillon impacte violemment et sa majeure partie est dirigée dans la cavité (*complete clipping*); pour un offset nul, le tourbillon se scinde en deux parties égales (*partial clipping*) et, pour ϵ positif, le tourbillon passe au dessus de l'angle aval et s'échappe dans la couche limite rattachée (*escape of vortex*). La figure 3.5 semble indiquer un processus entre le *complete clipping* et le *partial clipping* (fig. 3.4).

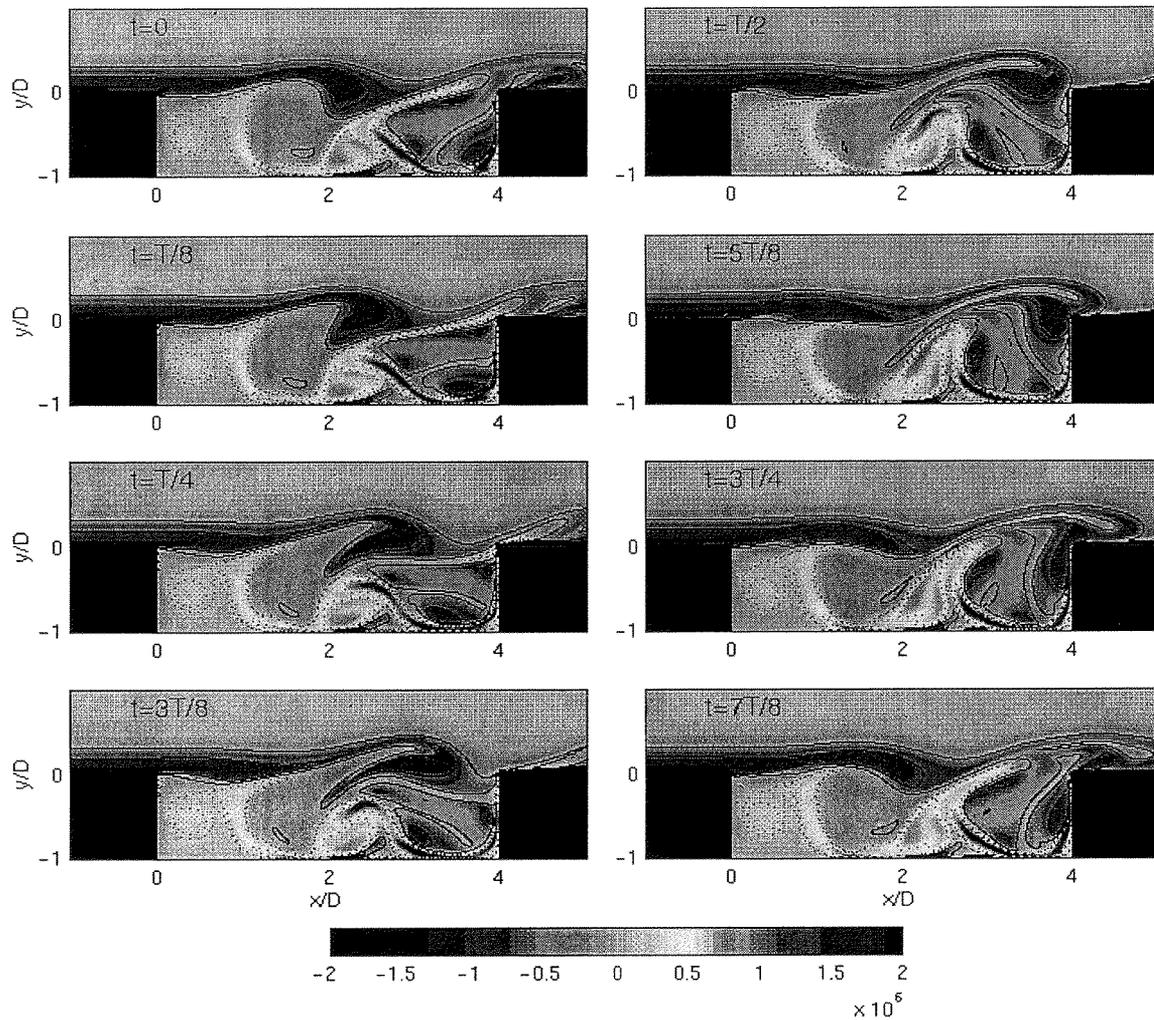


Figure 3.2: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$. Visualisation du champ de vorticité pendant un cycle d'oscillation ($T \simeq 2240\Delta t = 1.28 \times 10^{-5}$ s). On n'a représenté qu'une partie du domaine de calcul autour de la cavité. Niveaux de vorticité donnés en s^{-1} . On a noté $x_1 = x$ et $x_2 = y$.

Le critère montre également la naissance d'une nouvelle structure tourbillonnaire au niveau du point de séparation, à $t = 0$ et qui se situe vers $x_1/D = 2$   la fin du cycle. Sa croissance au cours de la convection est très nette. On en conclut qu'il y a toujours deux tourbillons au dessus de la cavité (mode 2 de Rossiter) et que la vitesse de convection semble à peu près constante $U_c = L/T = L \times f_0$. On remarque également la présence de vorticité à l'intérieur de la cavité. Cette vorticité n'est pas en fait un seul tourbillon mais est formée de plusieurs petites structures provenant du processus d'éclatement des tourbillons sur le coin aval. La partie centrale de la recirculation n'est pas tourbillonnaire.

La figure 3.6 présente des profils de la vitesse moyenne au dessus de la cavité. Les profils de droite sont typiques de la vitesse verticale \bar{u}_2 et sont en accord qualitatif avec ceux reportés, par

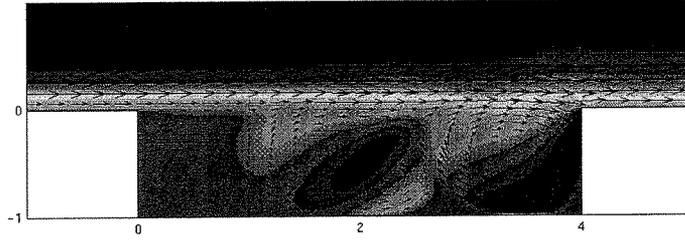


Figure 3.3: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$. Visualisation de la vitesse moyenne \bar{u}_1 avec des niveaux entre -50 et 50 m/s, à laquelle on a superposé les vecteurs vitesses moyennes.

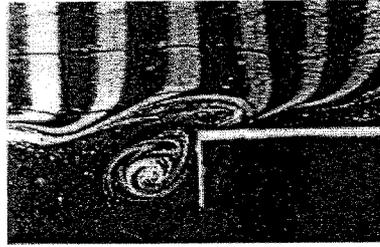


Figure 3.4: Illustration du processus de *complete clipping* d'après Rockwell et Knisely.²⁴⁴ Visualisation avec des bulles d'hydrogène en eau; $Re_{\theta_0} = 106$, $L/\theta_0 = 142$ et $\epsilon/\theta_{R_0} = 2.0$. $\theta \equiv \delta_\theta$

exemple, par Gharib et Roshko^{87†}. On utilise la coordonnée verticale adimensionnelle η , définie par :

$$\eta = \frac{x_2 - x_{2_{0.5}}}{\delta_\theta}$$

où $x_{2_{0.5}}$ est l'ordonnée pour laquelle \bar{u}_1 vaut $0.5U_\infty$ et δ_θ est l'épaisseur de quantité de mouvement. Le lieu des points $x_{2_{0.5}}$ est situé au dessus de la ligne de séparation reliant les deux angles de la cavité, comme relevé expérimentalement par Sarohia,²⁵⁸ Knisely et Rockwell²⁴⁴ ou Gharib et Roshko.⁸⁷ La superposition des profils de \bar{u}_1 lorsqu'ils sont tracés en fonction de la coordonnée η adimensionnée par δ_θ semble indiquer une croissance linéaire de la couche cisillée.

Pendant, le tracé de l'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\delta_\theta(x_1) = \int_0^\infty \frac{\rho u_1}{\rho_\infty U_\infty} \left(1 - \frac{\rho u_1}{\rho_\infty U_\infty} \right) dx_2$$

en fonction de x_1/δ_{θ_0} , où δ_{θ_0} est la valeur déduite du profil de Blasius initial, sur la figure 3.7 de droite, fait ressortir deux bosses très marquées. Celles-ci sont liées aux deux zones de recirculation principales, certainement surestimées par le caractère 2-D de la simulation. La pente moyenne fournit $d\delta_\theta/dx_1 \simeq 0.021$, conforme aux valeurs trouvées expérimentalement : $0.006 < d\delta_\theta/dx_1 < 0.031$. L'épaisseur de vorticité, définie par :

$$\delta_\omega = \frac{\Delta U}{|\partial u_1/\partial x_2|_{max}} = \frac{U_\infty}{|\partial u_1/\partial x_2|_{max}}$$

[†]figure 10, p.511 de réf.⁸⁷

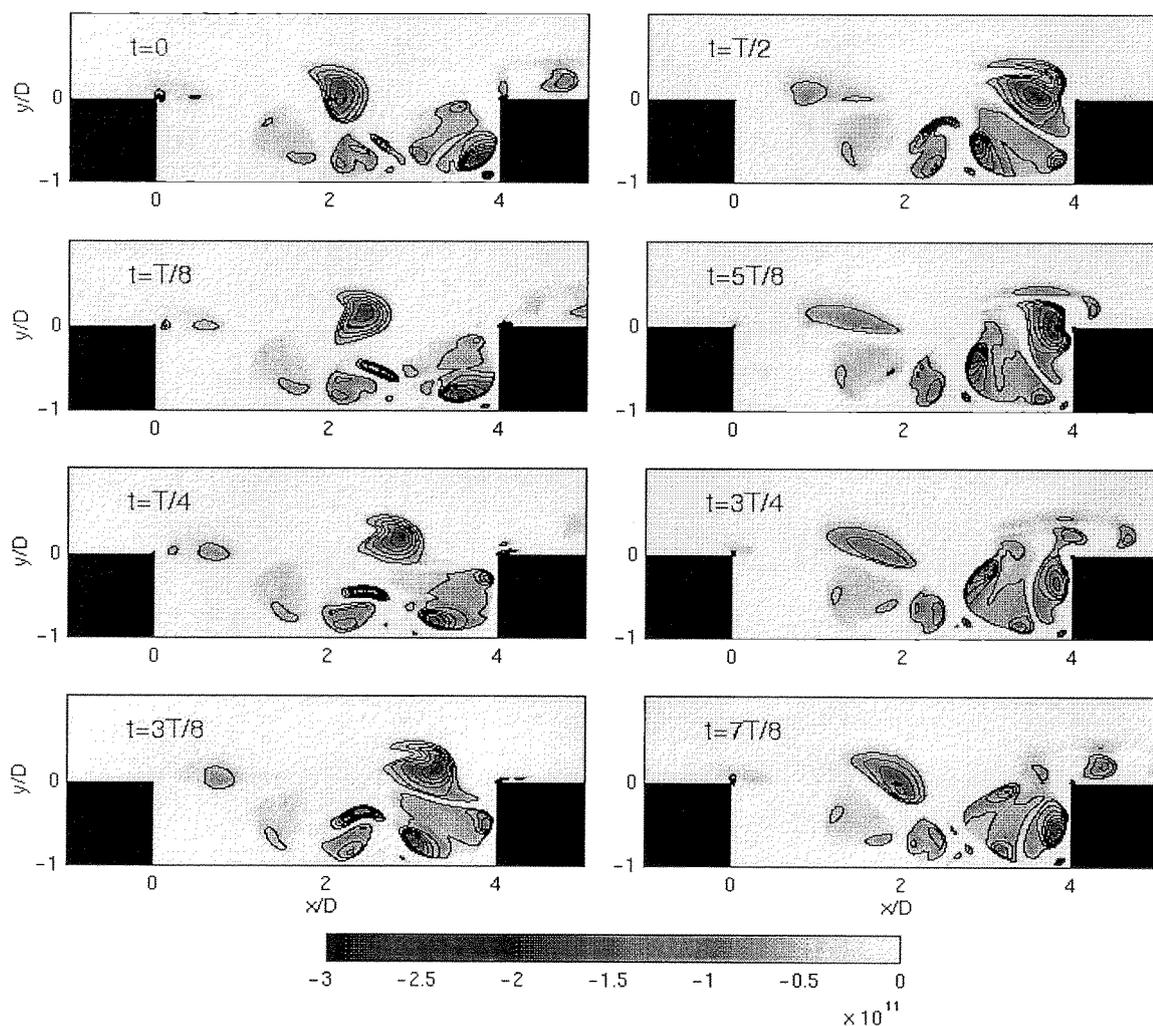


Figure 3.5: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$. Visualisation du critère de vorticité de Jeong et Hussain¹³³ aux mêmes instants que ceux de la figure 3.2. On a noté $x_1 = x$ et $x_2 = y$.

est moins sensible à la présence des tourbillons de recirculation et permet une meilleure estimation du taux d'accroissement de la couche cisailée. On trouve $d\delta_\omega/dx_1 \simeq 0.088$ pour la pente moyenne. Le taux d'accroissement typique d'une couche de mélange se situe entre 0.13 et 0.19 (voir tableau 3.1).

La figure 3.8 montre l'élargissement de la couche cisailée. Cet élargissement n'est pas linéaire mais procède plutôt par *bouffées* comme les deux épaisseurs caractéristiques tracées précédemment.

3.3.2.2 Mise en place d'un couplage aéroacoustique

Le tracé des autocorrélations pendant la phase de transitoire puis lorsque les oscillations autoentret enes sont installées, sur la figure 3.9, fait ressortir une corrélation fortement accrue entre les signaux à différentes positions longitudinales lorsque le cycle est établi. Cette forte

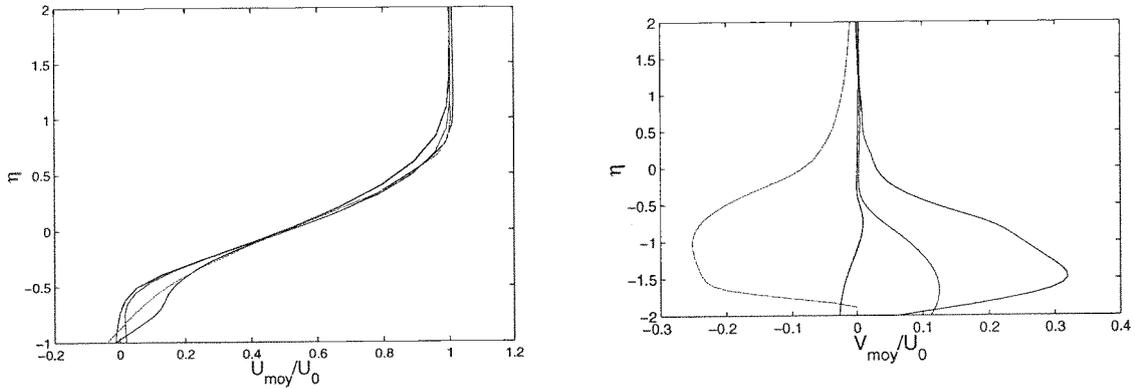


Figure 3.6: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$. Profils moyens de la vitesse horizontale $\bar{u}_1 = U_{moy}$ et verticale $\bar{u}_2 = V_{moy}$ en fonction de la coordonnée adimensionnelle $\eta = \frac{x_2 - x_{20.5}}{\delta_\theta}$, où $x_{20.5}$ est l'ordonnée pour laquelle \bar{u}_1 vaut $0.5U_\infty$. On a représenté 4 positions longitudinales : (—) : $\frac{x}{\theta_0} = 3$; (—) : $\frac{x}{\theta_0} = 15.4$; (—) : $\frac{x}{\theta_0} = 44$; (—) : $\frac{x}{\theta_0} = 59$. $\theta_0 = \delta_{\theta_0}$ est l'épaisseur initiale de quantité de mouvement.

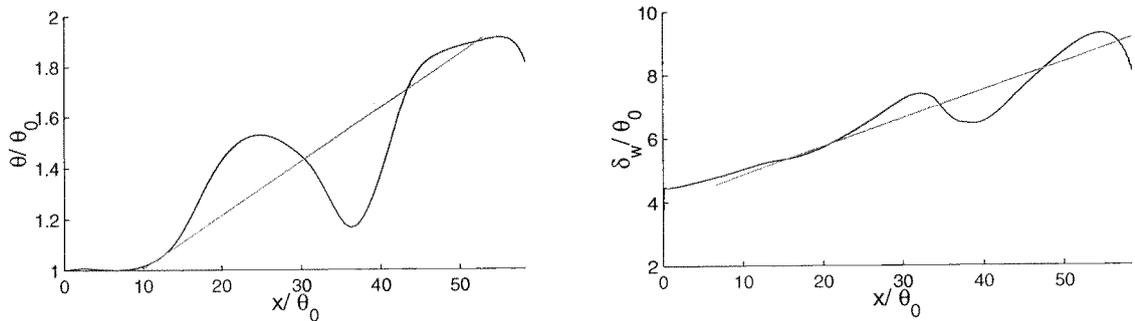


Figure 3.7: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$. Développement de la couche cisailée. A gauche, épaisseur de quantité de mouvement $\delta_\theta = \theta$ et, à droite, épaisseur de vorticité δ_ω entre les angles amont et aval de la cavité. On a noté $x_1 = x$.

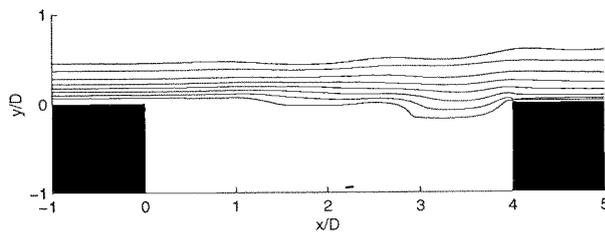


Figure 3.8: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$. Tracé de 8 isocontours de la vitesse moyenne \bar{u}_1 pour 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160 m/s. On a noté $x_1 = x$ et $x_2 = y$.

organisation de l'écoulement est également notée expérimentalement. Rockwell et Knisely²⁴⁴ tracent, par exemple, les autocorrélations entre les signaux de vitesse pour différentes positions longitudinales dans la couche cisailée et soulignent des résultats similaires[†]. Forestier⁷⁹ fournit les interspectres lorsqu'il déplace horizontalement une sonde fil chaud et constate une forte corrélation pour la fréquence fondamentale et ses premiers harmoniques.

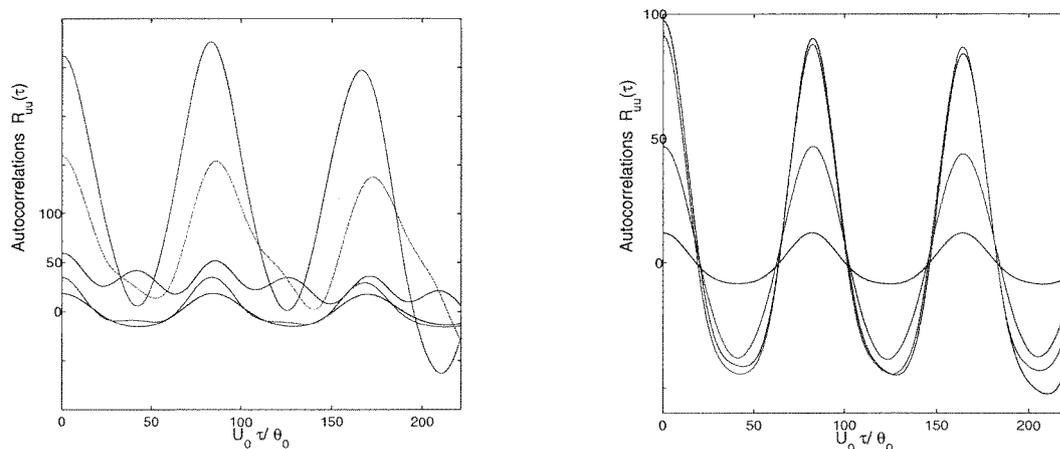


Figure 3.9: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$. Tracé des autocorrélations des fluctuations de vitesse $R_{uu}(\tau)$ à gauche, pour le régime transitoire et, à droite pour le régime établi, pour différentes positions (—) : $\frac{x}{\theta_0} = 3$; (—) : $\frac{x}{\theta_0} = 12$; (—) : $\frac{x}{\theta_0} = 21$; (—) : $\frac{x}{\theta_0} = 30$; (—) : $\frac{x}{\theta_0} = 39$. $\theta_0 = \delta_{\theta_0}$.

Le champ acoustique rayonné, représenté par le tracé de la dilatation $\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$, sur la figure 3.10, consiste en un rayonnement régulier à la fréquence fondamentale f_0 des oscillations aérodynamiques. On peut remarquer un espacement entre deux trains d'ondes, formés d'une onde de pression positive et d'une onde négative. Cet espacement suggère que la génération acoustique est plus courte que la période du cycle et est liée à un événement particulier : l'impact des tourbillons. Celui-ci induit un pic négatif de pression, de courte durée et intense, visible sur l'évolution temporelle des fluctuations de pression de la figure 3.11, au point ($x_1 = -0.2D$, $x_2 = 10D$).

Ces oscillations régulières se traduisent par un pic intense pour la densité spectrale de puissance des fluctuations de pression de la figure 3.11 à droite. L'aspect grossier du spectre est dû à la faible durée du signal temporel disponible pour réaliser l'analyse spectrale. Le Strouhal associé à cette fréquence fondamentale f_0 est $St_1 = 0.76$. Le deuxième pic pour $St_2 = 1.52$ suggère la présence du premier harmonique de f_0 . La largeur de ces pics est due au nombre réduit de cycles pour effectuer les statistiques. La directivité du rayonnement acoustique, calculée sur les capteurs numériques de la figure 3.1 formant un cercle de rayon $10D$ centré sur l'angle aval, est donnée sur la figure 3.12. Elle est maximale vers l'amont, pour $\theta \simeq 130^\circ$, conformément aux

[†] figure 4 de réf.²⁴⁴

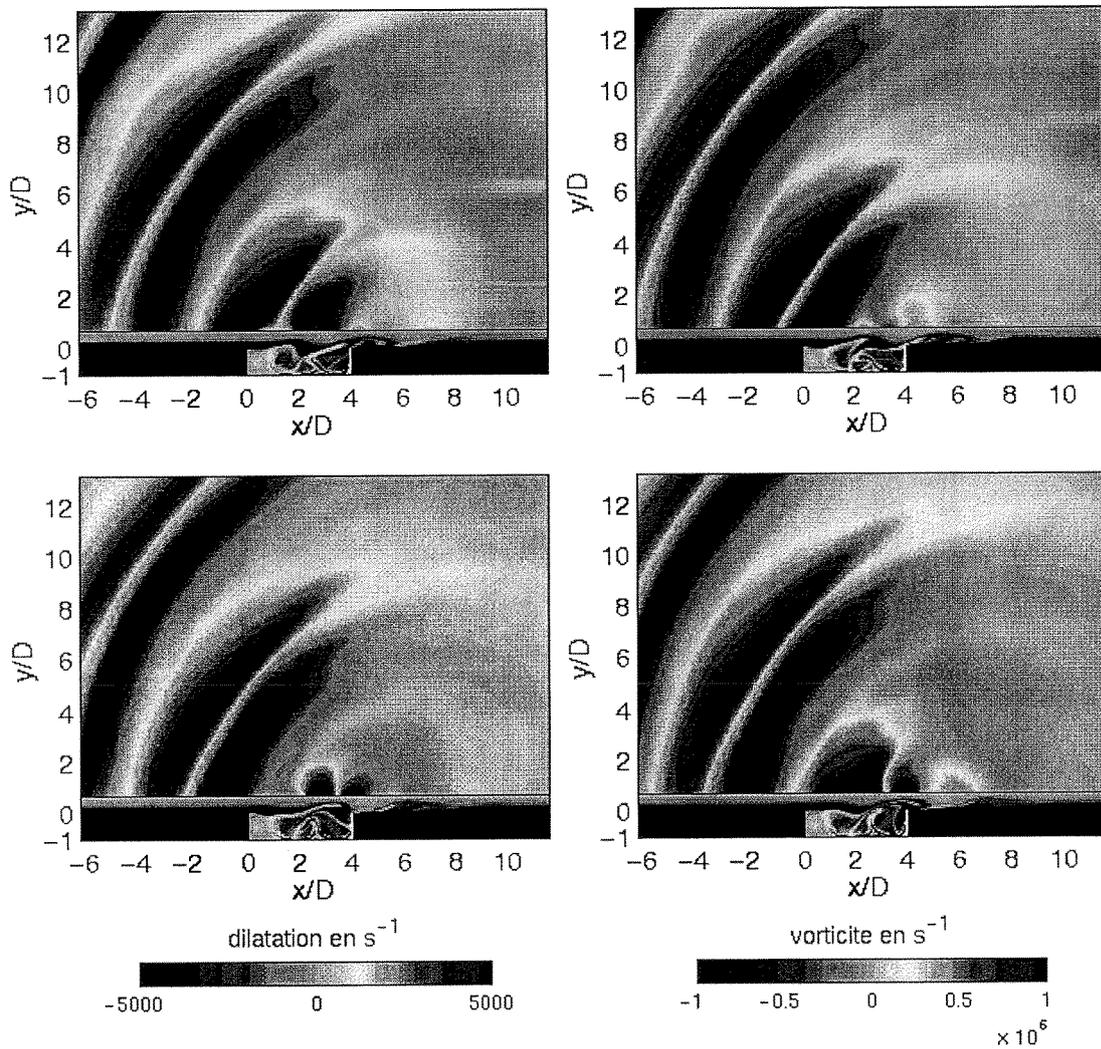


Figure 3.10: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$. Représentation du champ de dilatation sur la partie supérieure et de la vorticité sur la partie inférieure pour quatre instants successifs durant un cycle d'oscillation. On a noté $x_1 = x$ et $x_2 = y$.

visualisations strosopiques de Karamcheti¹³⁵ pour un écoulement laminaire à Mach 0.5.

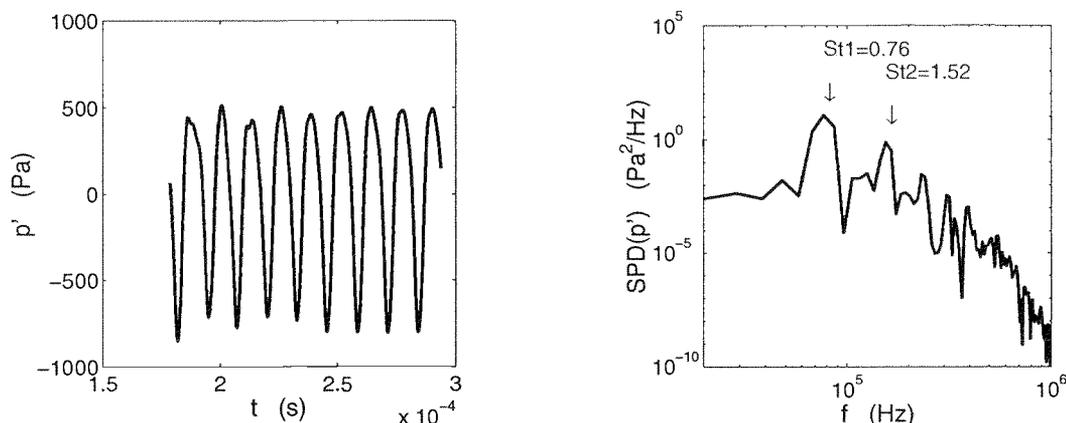


Figure 3.11: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$. Evolution temporelle des fluctuations de pression au point $(x_1 = -0.2D, x_2 = 10D)$, à gauche et spectre des fluctuations de pression au même point, à droite.

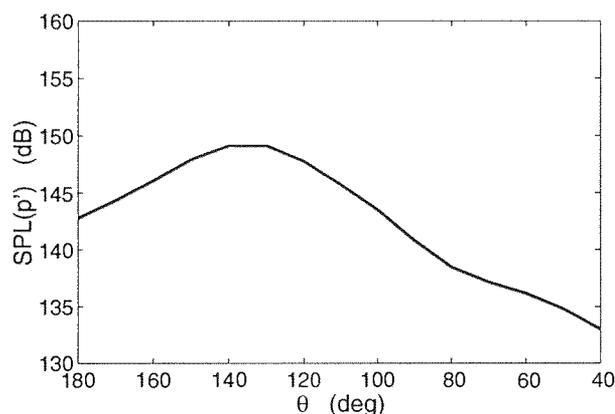


Figure 3.12: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$. Directivité en champ lointain calculée sur les capteurs indiqués sur la figure 3.1.

La couche cisailée au dessus de la cavité diffère d'un écoulement cisailé libre par la condition limite imposée par l'angle aval, qui se traduit par une relation de phase stable entre les signaux à l'amont et en aval, responsable des pics fréquentiels intenses dans le spectre acoustique. A partir de cette relation de phase, Rossiter²⁵² exprime les nombres de Strouhal en fonction du nombre de Mach M , d'un entier n représentant le nombre de tourbillons dans la cavité et de deux constantes semi-empiriques, $\kappa = U_c/U_\infty$ où U_c est la vitesse de convection des tourbillons et $\alpha = 0.25$ exprimant un déphasage temporel entre l'impact d'un tourbillon et l'émission acoustique associée :

$$St = \frac{fL}{U_\infty} = \frac{n - \alpha}{\frac{1}{\kappa} + M}$$

On compare, sur la figure 3.13, les nombres de Strouhal de la simulation à ceux prédits par la formule de Rossiter en utilisant les deux valeurs communément adoptées pour les constantes semi-empiriques : $\alpha = 0.25$ et $\kappa = 0.57$. La fréquence fondamentale, $St_1 = 0.76$ est proche du mode $n = 2$, alors que le deuxième pic pour $St_2 = 1.52$ ne semble pas relié à un mode de Rossiter mais représente plutôt un harmonique.

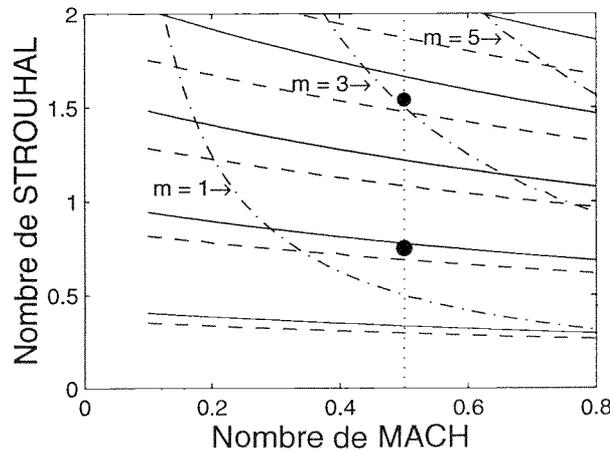


Figure 3.13: Cavit e $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$. Comparaison des nombres de Strouhal de la simulation avec les pr edictions de la formule de Rossiter : (—) formule de Rossiter, $\alpha = 0.25$, $\kappa = 0.57$, $n = 1, 2, 3, 4$; (---) formule de Rossiter, $\alpha = 0.25$, $\kappa = 0.49$, $n = 1, 2, 3, 4$; (····) modes acoustiques longitudinaux $St_L = m/4 \times 1/M$, $m = 1, 3, 5$.

Il est possible d'am eliorer le mod ele en calculant la fonction d'intercorr elation de la composante transversale de la vitesse sur la ligne $x_2 = 0$:

$$\frac{\overline{u'_2(x_1, t) \times u'_2(x_2, t + \tau)}}{\sqrt{\overline{u'_2(x_1, t)^2}} \times \sqrt{\overline{u'_2(x_2, t)^2}}} \quad (3.1)$$

Pour acc ed er  a la vitesse de convection des tourbillons U_c , on trace la distance de s eparation entre les maxima des coefficients de corr elation en fonction du temps de retard τ (fig. 3.14). La nouvelle valeur de la vitesse de convection $U_c \simeq 0.49U_\infty$. On trace alors les courbes de Rossiter pour la nouvelle valeur $\kappa = 0.49$ (courbes vertes de la figure 3.13). La fr equ ence fondamentale demeure proche du mode $n = 2$. Par contre, le tracée des modes acoustiques longitudinaux :

$$\frac{fL}{c_\infty} = \frac{m}{4} \quad \text{et} \quad St_L = \frac{fL}{U_\infty} = \frac{m}{4} \times \frac{1}{M}, \quad m = 1, 3, 5, \dots,$$

en bleu, indique que le pic principal se trouve entre $m = 1$ et $m = 3$. Le second pic correspond au mode longitudinal $m = 3$ mais ce doit  etre une co incidence. Finalement, aucune r esonance n'est av er ee et le m ecanisme de g en eration des oscillations est bien d ecrit par la boucle de r etroaction a eroacoustique de Rossiter, avec 2 tourbillons dans la couche cisail ee.

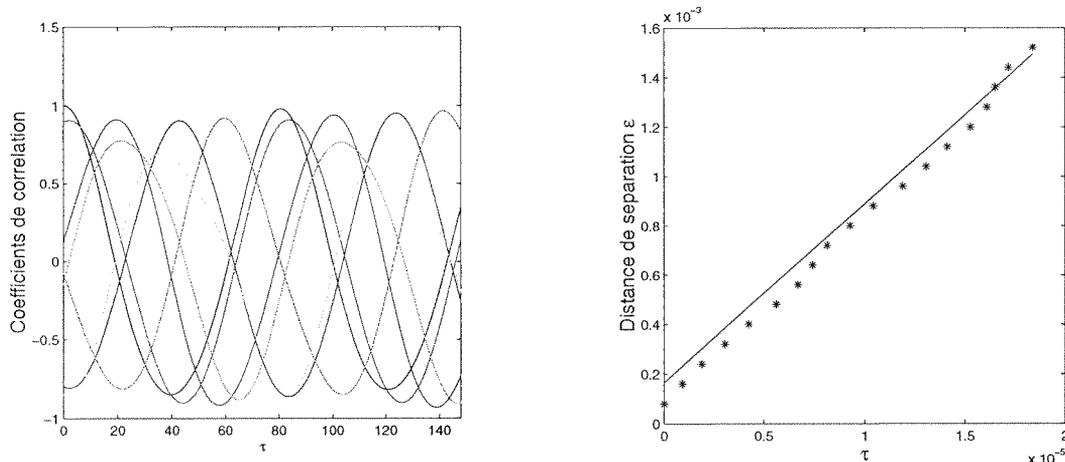


Figure 3.14: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$. Coefficients de corrélation normalisés de la vitesse transversale tous les $dx = 9\delta_\theta$ avec pour point de référence $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ (à gauche). Distances de séparation ϵ entre les maxima des coefficients de corrélation en fonction du temps de retard τ (à droite).

3.3.3 Influence de l'épaisseur de la couche limite

Les instabilités qui se développent dans la couche cisailée sont une composante essentielle du phénomène de bouclage qui est à l'origine des pics fréquentiels intenses. C'est pourquoi, il nous semble naturel de supposer que les caractéristiques de la couche limite en amont influent sur le comportement de la cavité. On se propose d'appréhender ce paramètre en étudiant deux simulations avec des épaisseurs de couche limite initiale $\delta_{ini} = 1.8 \times 10^{-4}$ m et $\delta_{ini} = 4.5 \times 10^{-5}$ m, correspondant à des rapports longueur sur épaisseur de quantité de mouvement $L/\delta_\theta \simeq 63$ et $L/\delta_\theta \simeq 280$ respectivement, sans changer la vitesse U_∞ de l'écoulement.

3.3.3.1 Deux régimes d'écoulement

L'écoulement décrit précédemment pour une couche limite vérifiant $L/\delta_\theta = 63$ est conforme au phénomène de couplage aéroacoustique pour un mode 2 de Rossiter et sera qualifié dans ce qui suit de *mode de cisaillement*, en suivant la terminologie de Gharib et Roshko.⁸⁷ Lorsque l'on diminue l'épaisseur de la couche limite incidente, on pourrait s'attendre à l'apparition d'un mode 3 de cisaillement mais l'on constate la bifurcation vers un nouveau régime d'écoulement, caractérisé par la formation d'une seule structure de la taille de la cavité et qui est éjectée périodiquement. Ces caractéristiques font penser au sillage derrière un objet. Gharib et Roshko⁸⁷ notent une telle transition lorsqu'on augmente L/δ_θ au delà d'une certaine valeur pour une vitesse donnée. Ils parlent alors de *mode de sillage* pour ce nouveau régime, qui s'accompagne d'une large augmentation de la traînée induite par la cavité.

Le champ de vorticit e durant un cycle d'oscillation du mode de sillage, sur la figure 3.15,

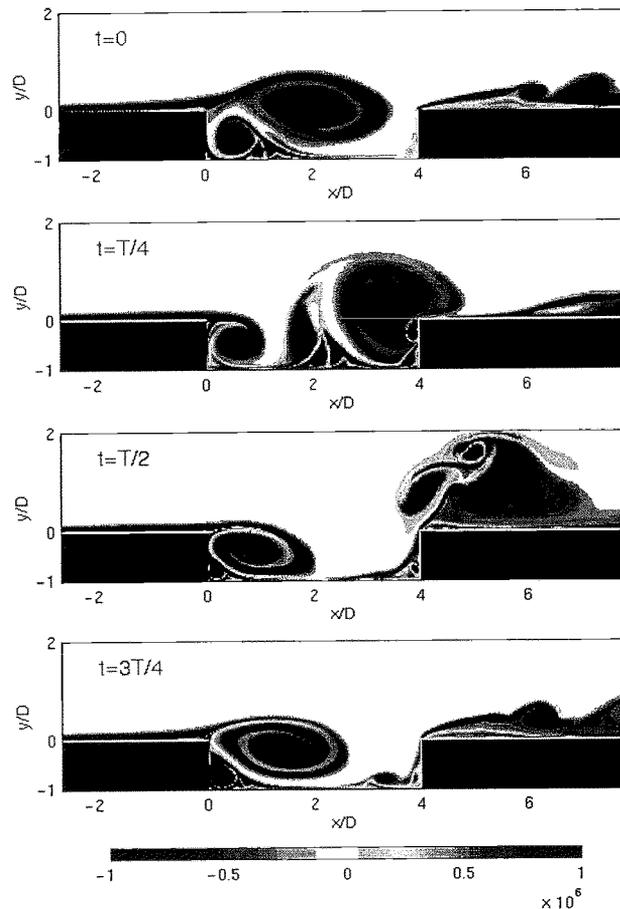


Figure 3.15: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 280$. Visualisation du champ de vorticité pendant un cycle d'oscillation. On n'a représenté qu'une partie du domaine de calcul autour de la cavité. Niveaux de vorticité donnés en s^{-1} . On a noté $x_1 = x$ et $x_2 = y$.

montre qu'un tourbillon est formé au bord de séparation et grossit jusqu'à ce qu'il atteigne presque la taille de la cavité. Lorsqu'il se forme, le fluide est entrainé dans la cavité et de la vorticité contrarotative, par rapport à celle de la couche cisillée, est crée entre cette grosse structure et la paroi amont. Cette vorticité s'accumule et détache le tourbillon principal du bord amont, qui est ensuite violemment éjecté par le bord aval. L'impact sur le coin aval du dipôle de tourbillons, formé par la grosse structure et le tourbillon contrarotatif, et son éjection s'accompagnent d'une très forte fluctuation de masse volumique et de pression (voir figure 3.17).

Le champ acoustique rayonné, représenté par le tracé de la dilatation, comparé à celui du mode de cisaillement sur la figure 3.16, possède une structure plus complexe. Le bruit est moins régulier et d'un niveau supérieur à celui du régime de cisaillement. Ces observations sont corroborées par la densité spectrale de puissance des fluctuations de pression à la limite du domaine acoustique au point $x/D = 0.2$ et $y/D = 10$, reportée sur la figure 3.17. Les niveaux sonores sont plus forts pour le régime de sillage, où le tourbillon vient impacter de

façon violente l'angle aval, générant un brusque pic positif au niveau de l'angle aval. Le contenu fréquentiel est aussi plus riche dans ce cas. La composante associée au cycle tourbillonnaire ne ressort pas clairement sur le spectre en raison du petit nombre de cycles utilisés pour l'analyse spectrale. Il faudrait périodiser le signal temporel pour faire ressortir le pic correspondant à l'impact périodique de la grosse structure. L'évolution temporelle, sur la figure 3.17, à gauche, montre que l'impulsion générée est très intense mais de courte durée.

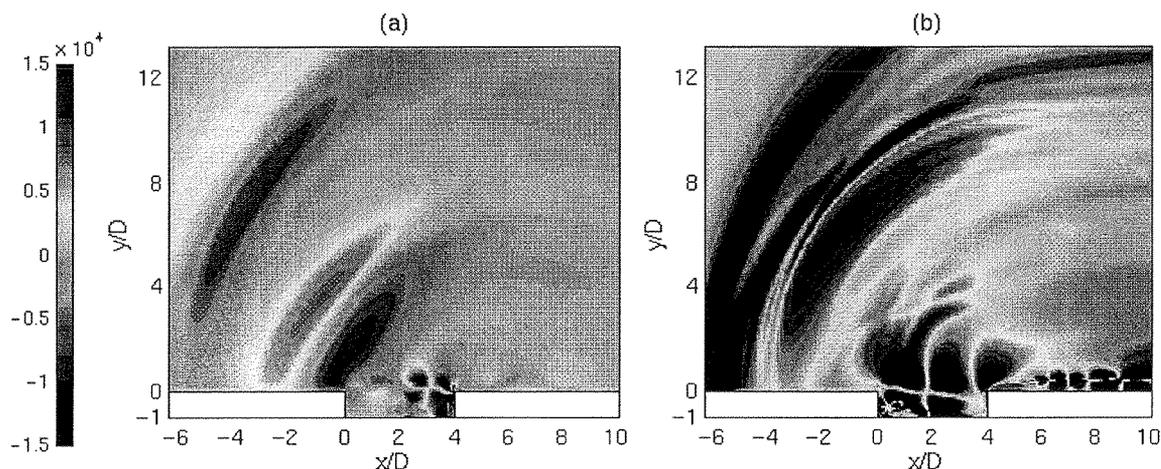


Figure 3.16: Comparaison de la dilatation calculée sur le domaine entier pour les configurations $L/D = 4$ avec (a) $L/\delta_\theta = 63$ et (b) $L/\delta_\theta = 280$. Niveaux de dilatation en s^{-1} . On a noté $x_1 = x$ et $x_2 = y$.

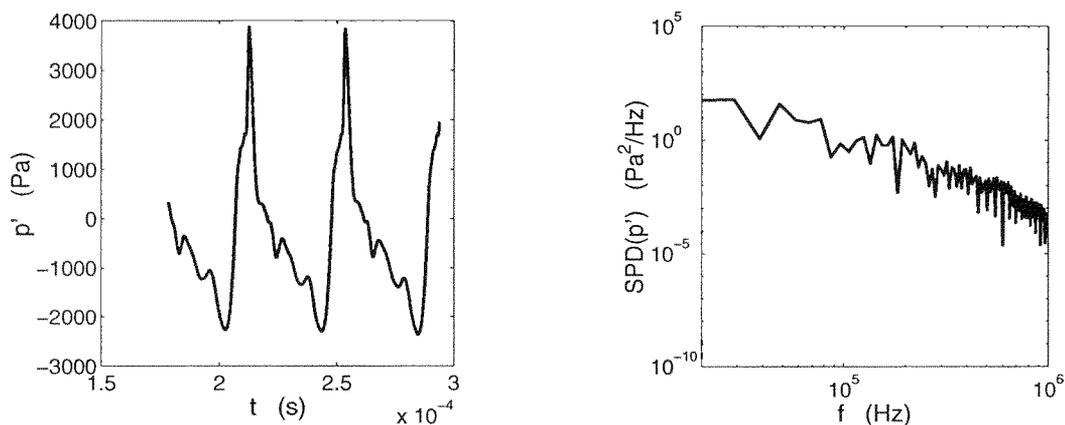


Figure 3.17: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 280$. Evolution temporelle des fluctuations de pression au point ($x = 0.2 - D$, $y = 10D$), à gauche et spectre des fluctuations de pression au même point, à droite.

La directivité en champ lointain, comparée à celle du mode de cisaillement sur la figure 3.18, a une allure similaire vers l'aval mais supérieure de 5 à 6 dB. Elle est renforcée sur l'axe dans la direction amont.

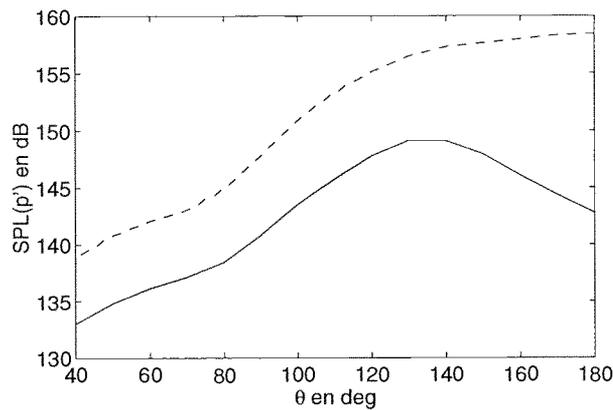


Figure 3.18: Cavité $L/D = 4$, $M = 0.5$ et $L/\delta_\theta = 280$. Directivité en champ lointain calculée sur les capteurs indiqués sur la figure 3.1 : (—), $L/\delta_\theta = 63$ et (---), $L/\delta_\theta = 280$.

3.3.3.2 Caractère physique du mode de sillage

Transition vers une cavité fermée?

Pour la configuration étudiée la transition vers un mode de sillage semble s'effectuer pour un rapport $L/\delta_\theta \simeq 100$, où seule l'épaisseur de la couche limite laminaire incidente a été modifiée. Mais on peut faire varier également le rapport géométrique de la cavité L/D , la vitesse de l'écoulement, ou le nombre de Reynolds. Rowley²⁵³ a effectué un grand nombre d'essais en faisant varier le rapport L/D pour un nombre de Mach et une épaisseur de couche limite fixés (série L1-L5), le nombre de Mach pour une épaisseur de couche limite donnée et un rapport géométrique fixé $L/D = 4$ (série 4M2-4M8) ou $L/D = 2$ (série 2M2-2M8) et l'épaisseur de couche limite pour un Mach et un rapport $L/D = 4$ fixés (séries TK4a-d et R4a-c)[†]. Les trois paramètres induisent une transition entre un mode de cisaillement et un mode de sillage. Pour la série L1-L5, le mode sillage apparaît pour L/δ_θ entre 75 et 102. La série TK4a-d indique également une transition pour L/δ_θ entre 75 et 102. Le mode de sillage est présent à partir de $L/\delta_\theta = 74.5$ dans la série R4a-c. Enfin, pour les séries 4M2-4M8 et 2M2-2M8, le rapport L/δ_θ est constant. La cavité de rapport 2 oscille toujours en mode de cisaillement et la cavité de rapport 4 est régie par un mode de sillage pour $M > 0.3$ et un mode de cisaillement pour $M = 0.2$. La vitesse de l'écoulement peut donc avoir une répercussion sur la transition mais le paramètre fondamental, comme l'ont souligné auparavant Gharib et Roshko,⁸⁷ semble être le rapport L/δ_θ . Nous avons également réalisé plusieurs simulations supplémentaires, non rapportées ici, en faisant varier L/D ou M , qui amènent aux mêmes conclusions. Par ailleurs, Shieh et Morris²⁶⁶ ont étudié l'influence du nombre de Reynolds en effectuant des simulations

[†]Une partie des résultats est reportée dans Colonius *et al.*⁴⁰ Le tableau 3.1 de la référence²⁵³ récapitule ces paramètres.

similaires à celles de Colonius *et al.*⁴⁰ mais en prenant un nombre de Reynolds de 2×10^5 , au lieu de $Re_D \simeq 5000$. La couche limite incidente est maintenant turbulente. De plus, pour atteindre ce grand nombre de Reynolds, ils utilisent une approche numérique différente basée sur un calcul RANS, car une DNS serait trop coûteuse. Avec ce nombre de Reynolds plus élevé et une résolution différente, ils notent la même bifurcation des oscillations vers un mode de sillage pour la cavité allongée $L/D = 4.4$ (soit $L/\delta_\theta \simeq 100$) et vers un mode de cisaillement pour la cavité $L/D = 2$ (soit $L/\delta_\theta \simeq 150$). Dans notre cas, pour $L/\delta_\theta \simeq 63$, un mode de cisaillement s'établit pour la cavité $L/D = 4$. Toutes ces simulations font apparaître que le paramètre clé est le rapport entre la longueur de la cavité et l'épaisseur de la couche limite incidente.

Ce raisonnement rencontre cependant un obstacle de taille. Ce mode d'oscillation particulier a été mis en évidence par Gharib et Rohsko⁸⁷ pour un écoulement incompressible (en eau) sur des cavités axisymétriques et à basse vitesse ($U_\infty = 23$ cm/s). Mais, il n'a jamais été observé pour des cavités en air avec des rapports $L/D < 7$. Au contraire, les oscillations pour des rapports L/D , des vitesses et des épaisseurs de couche limite comparables aux cas simulés (mais des nombres de Reynolds plus élevés) suivent un mode de cisaillement. Par exemple, lorsqu'on simule en DNS, à l'échelle 1, l'une des configurations expérimentales de Karamcheti¹³⁵ avec un petit rapport $L/D = 3$ ($D = 2.54$ mm), un Mach élevé $M=0.8$, et une épaisseur de couche limite incidente donnant $L/\delta_\theta \simeq 103^\dagger$, on obtient progressivement un mode de sillage alors qu'un mode de cisaillement est observé par Karamcheti. Ce désaccord est aussi indiqué par la figure 17 de la référence,²⁶⁶ où Shieh et Morris comparent la distribution des coefficients de pression sur le fond de la cavité pour leur simulation avec $L/D = 4.4$ et $Re_D = 2 \times 10^5$ et les mesures de Plentovich²²⁵ pour une cavité $L/D = 4.4$ et $Re_D = 1.3 \times 10^6$. Les mesures s'écartent fortement des résultats simulés et seraient plutôt similaires en terme d'évolution et de niveaux à leur simulation pour $L/D = 2$, qui suit un mode de cisaillement. On pourrait rapprocher l'allure des C_p du calcul avec $L/D = 4.4$ à d'autres distributions obtenues par Plentovich *et al.*²²⁶ pour des cavités dites *fermées* (voir §2.2). En effet, pour des cavités plus allongées, en fonction de la vitesse considérée, on peut évoluer vers un régime de cavité fermée. L'écoulement se rattache alors au fond de la cavité avant de se redécoller juste avant l'angle aval. Il n'y a alors plus de couplage entre les bords amont et aval; la cavité peut être considérée comme la succession d'une marche descendante puis d'une marche montante.^{131,206} Pour des écoulements supersoniques, Stallings et Wilcox²⁷⁹ et Plentovich *et al.*^{226†} montrent qu'une telle transition est progressive et

[†]Karamcheti n'indique pas l'épaisseur de la couche limite qui arrive sur le bord amont de ses cavités. Par contre, il fournit la maquette du montage expérimental : la couche limite laminaire se développe sur 8.89 cm avant de rencontrer la cavité. En suivant la formule de Blasius, on peut estimer son épaisseur $\delta = 0.37$ mm et $\delta = 7.4 \times \delta_\theta$ d'où $L/\delta_\theta \simeq 103$.

[†]Ces mesures sont regroupées dans le rapport de Tracy et Plentovich³⁰¹ et se basent essentiellement sur les distributions de pression sur les parois de la cavité.

passe par des états *transitionnels* pour $8 < L/D < 13$. Ces modes transitionnels ouverts pour $L/D = 6$ à 8 ou transitionnels fermés pour $L/D = 9$ à 11 sont reproduits numériquement par Henderson, Badcock et Richards¹¹¹ avec les RANS fermées par un modèle $k - \omega$ et sont validés par comparaison avec les distributions de pression sur le fond et sur la paroi aval. Ces simulations apportent une interprétation supplémentaire grâce aux visualisations de l'écoulement. Les lignes de courant pour $L/D = 10$ sont assez similaires à celles obtenues par Shieh et Morris²⁶⁶† pour un mode de sillage. De plus, le caractère progressif de la transition est reportée par Colonius *et al.*⁴⁰‡, qui notent un régime mixte, où les oscillations commencent en mode de cisaillement mais basculent en mode de sillage au bout d'un certain temps‡.

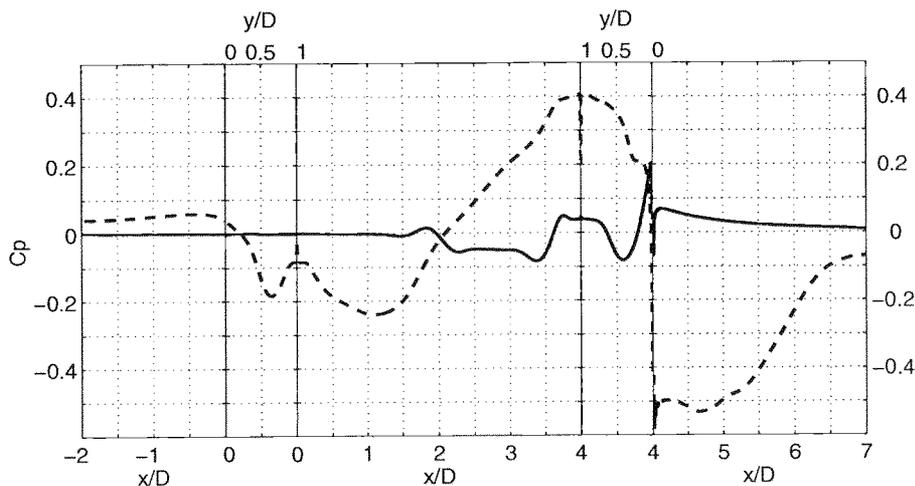


Figure 3.19: Comparaison du coefficient de pression moyen C_p le long des parois de la cavité pour les configurations $L/\delta_\theta = 63$ (—) et $L/\delta_\theta = 280$ (- - -). On a noté $x_1 = x$ et $x_2 = y$.

La répartition du coefficient de pression C_p le long des parois de la cavité, tracée sur la figure 3.19 pour les deux simulations, confirme certaines similarités avec la transition vers une cavité fermée. Même si une comparaison directe avec des données expérimentales est rendue difficile par la différence de nombres de Reynolds entre les simulations réalisées et les expériences compressibles disponibles, l'allure des courbes dans le premier cas est qualitativement similaire à celle observée pour une cavité $L/D = 4$ ²⁵² alors que les coefficients de pression calculés dans le second cas ressemblent aux mesures pour des cavités plus allongées $L/D = 10$.²⁵² Pour le régime de sillage, on observe une première phase de diminution de C_p sur le fond de la cavité, due à l'accélération de l'écoulement lorsqu'il entre dans la cavité puis une phase d'augmentation liée à la décélération des structures avant l'angle aval. Le minimum vers $x_1/D = 1$ correspond à un point de rattachement mais ce recollement n'est pas stationnaire, contrairement à celui qui

†figure 15 de Shieh et Morris.²⁶⁶

‡Pour plus de détails, on peut se reporter à la thèse de Rowley,²⁵³ §3.3, p.45-53.

‡Voir, par exemple, le cas L3 de la figure 5 de réf.⁴⁰ (ou figure 3.16 de réf.²⁵⁴)

caractérise les cavités fermées. Sur la paroi verticale aval, le coefficient de pression chute brutalement correspondant à une éjection de fluide hors de la cavité lors de l'impact. Pour le mode de cisaillement, il n'y a ni point de séparation ni point de réattachement et les coefficients de pression sont relativement constants avec toutefois une nette augmentation sur la paroi verticale au niveau de l'angle aval, associée à l'injection de fluide dans la cavité lors de l'impact.

La donnée du coefficient de pression sur les parois verticales amont et aval permet le calcul du coefficient de traînée de la cavité. On trouve $C_D \simeq 0.01$ pour le premier cas et $C_D \simeq 0.30$ dans le second, ce qui est en bon accord avec les résultats expérimentaux de Gharib & Roshko⁸⁷ et confirme le changement de régime.

Le calcul des corrélations spatio-temporelles de vitesse est également possible sur la ligne $x_2 = 0$ reliant le bord amont et le bord aval et donne accès à la vitesse de convection des grosses structures. La valeur $U_c \simeq 0.27U_\infty$, déterminée pour le régime de sillage, montre le nécessaire ralentissement du fluide par la cavité.

Naissance du mode de sillage

Rowley²⁵⁴ suggère que la transition vers le mode de sillage pourrait provenir de l'apparition d'une instabilité absolue, qui conduira ensuite à une instabilité globale puisque les oscillations sont autoentretenuës. Pour le mode de cisaillement, l'instabilité globale proviendrait plutôt d'instabilités convectives dans la couche cisailée.

Si l'on regarde la naissance de ce mode de sillage, en visualisant l'évolution de la vorticit e durant la phase transitoire, on s'aperçoit que le tourbillon contrarotatif, crée par la conservation de la vorticit e au niveau de l'angle aval, joue un r ole fondamental. C'est lui qui provoque la premi ere  ejection de vorticit e et sectionne alors la couche cisail ee. Celle-ci est alors emport ee par la zone de recirculation principale. Najm et Ghoniem²⁰² montrent de la m eme façon, pour leurs simulations, que la recirculation prend la forme d'une grosse structure et remplace le r ole habituel de la couche cisail ee lorsque la longueur de la cavit e est grande par rapport à l'épaisseur de la couche limite incidente. Ce m ecanisme semble donc liée au non m elange de deux tourbillons de sens opposée en 2-D, qui s'effectuerait en 3-D par l'étirement dans la troisi eme direction. Il peut donc s'agir d'un artefact num erique inh erent à l'approche bidimensionnelle.

Cependant, l'entraînement de la couche cisail ee par une poche de recirculation ou le d ecollement de la couche cisail ee que l'on peut remarquer au niveau de l'angle amont, suite à l' ejection de la grosse structure peuvent être rapprochées de certaines observations exp erimentales pour des instabilit es de combustion par Keller *et al.*¹³⁷ D'apr es cette étude, ce d ecollement serait responsable du ph enom ene de *flashback* ou retour de flamme, observée en combustion dans certaines conditions.

Les différents points de vue considérés ne sont pas inconciliables. Ce type d'écoulement 2-D peut exister dans la nature, les instabilités de combustion en sont la meilleure preuve, et est associé à une cascade inverse d'énergie. Sa présence, lorsqu'une couche limite fine affleure une cavité en air n'est certainement pas réaliste mais liée à la représentation 2-D.

3.4 Simulation d'une cavité rectangulaire de rapport $L/D = 2$ à Mach 0.7

3.4.1 Paramètres de la simulation

On reproduit numériquement à l'échelle 1 l'expérience de Karamcheti,¹³⁵ qui a étudié le rayonnement acoustique de cavités bidimensionnelles. On choisit ici la configuration $L/D = 2$, où $L = 5.08$ mm et $D = 2.54$ mm sont respectivement la longueur et la profondeur de la cavité, avec un écoulement laminaire à Mach $M = 0.7$. Le maillage cartésien à pas variable comporte 147×161 points dans la cavité et 501×440 points en dehors. Il est représenté sur la figure 3.20. Le domaine de calcul s'étend ainsi sur $8.5 D$ verticalement et $12 D$ horizontalement afin d'inclure une portion du champ rayonné. On impose $\Delta y_{min}^+ = 0.8$ en variable de paroi pour mailler jusqu'aux échelles visqueuses. Le nombre de Reynolds basé sur D est $Re_D = 41000$, la température de l'air vaut 298.15 K et la pression statique est fixée à 1 atm. Le calcul est initialisé avec une expression polynomiale du profil de Blasius correspondant à une épaisseur de couche limite $\delta \approx 0.2D$, sans aucune excitation. Le rapport L/δ_0 est environ de 50 pour cette configuration.

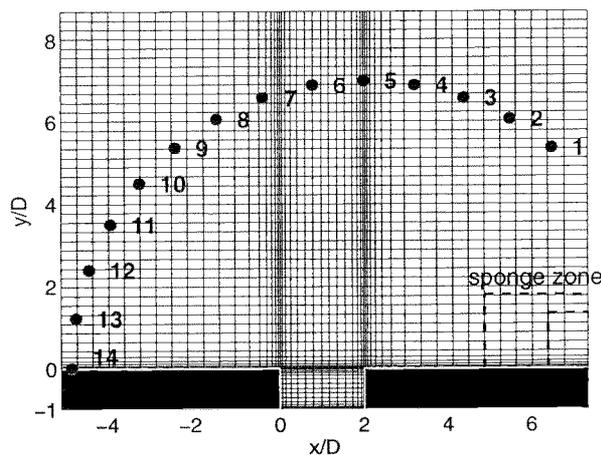


Figure 3.20: Cavité $L/D = 2$ et $M = 0.7$. Vue du maillage cartésien irrégulier utilisé. On a représenté 1 point sur 10 pour plus de lisibilité. Les capteurs numériques pour le calcul de la directivité sont représentés en rouge et les pointillés bleus indiquent l'emplacement de la zone éponge.

Les méthodes numériques employées sont identiques à celles des simulations précédentes.

Seule la condition limite de paroi a été modifiée : on utilise ici la condition à l'ordre 2, décrite au §1.2.5.5.

3.4.2 Rayonnement acoustique

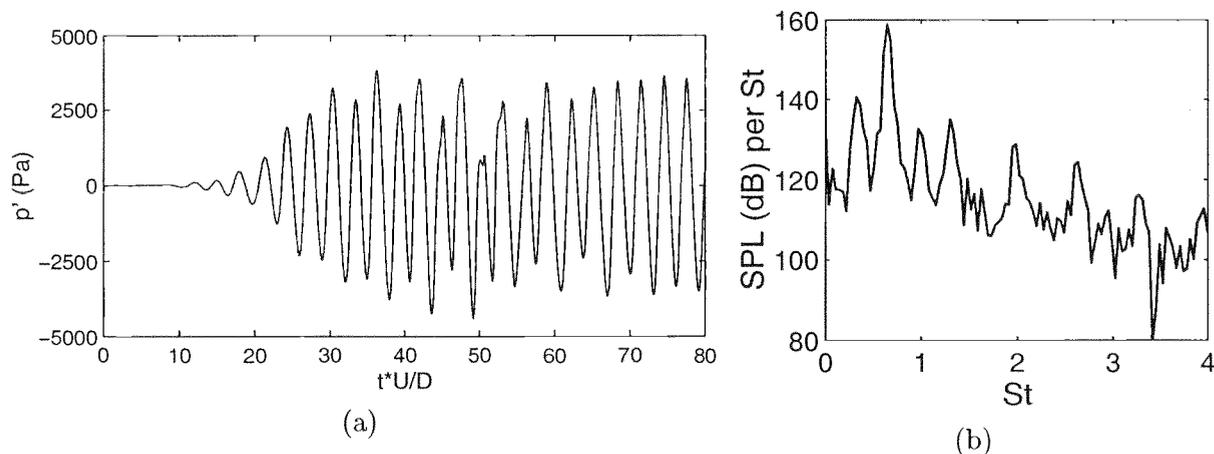


Figure 3.21: Cavité $L/D = 2$ et $M = 0.7$. A gauche, évolution temporelle de la pression au point $x_1/D = -0.04$ et $x_2/D = 2 - D$ (marqué par un point rouge sur la figure 3.22). A droite, spectre des fluctuations de pression au même point en fonction du nombre de Strouhal.

La figure 3.21 de gauche indique l'évolution temporelle de la pression depuis le début de la simulation au point $x_1/D = -0.04$ et $x_2/D = 2$, situé au début de la région acoustique. L'écoulement atteint un état oscillatoire autoentretenu au bout d'un temps adimensionnel de $25D/U_\infty$ et reste encore très irrégulier jusqu'à $65D/U_\infty$. Pendant la première partie du transitoire, les modes naturels de la cavité croissent puis saturent en amplitude. Le transitoire continue encore pendant le temps nécessaire à la zone de recirculation pour s'installer dans la cavité. La densité spectrale correspondant à la portion du signal après $40D/U_\infty$ est donnée par la figure 3.21 de droite. Elle fait ressortir un pic principal pour la fréquence fondamentale des oscillations, $f_0 = 32$ kHz soit un nombre de Strouhal $St = fL/U_\infty = 0.66$. Trois pics plus faibles pour $St = 1.30$, $St = 1.96$ et $St = 2.62$ indiquent la présence des harmoniques $2f_0$, $3f_0$ et $4f_0$. La plus grande partie de l'énergie est concentrée à la fréquence fondamentale et au premier sous-harmonique. Le Strouhal expérimental déduit des mesures de Karamcheti¹³⁵ est $St = 0.69$, correspondant à une erreur de 4.3 % sur la fréquence prédite. Cet écart peut provenir du caractère 2-D de la simulation et/ou du choix des paramètres de la simulation par rapport aux conditions expérimentales. La température ambiante de l'expérience est plus élevée et aucune caractérisation précise de la couche limite incidente n'est donnée par Karamcheti[†]. Pour cette configuration, avec deux tourbillons dans la couche cisailée, la formule de Rossiter fournit $St = 0.71$, en assez bonne concordance avec la valeur mesurée, en utilisant les paramètres

[†]voir 1^{ère} note de bas de page, p.117.

semi-empiriques $\alpha = 0.25$ et $\kappa = 0.57$, calculés pour s'accorder avec les mesures de Rossiter.²⁵²

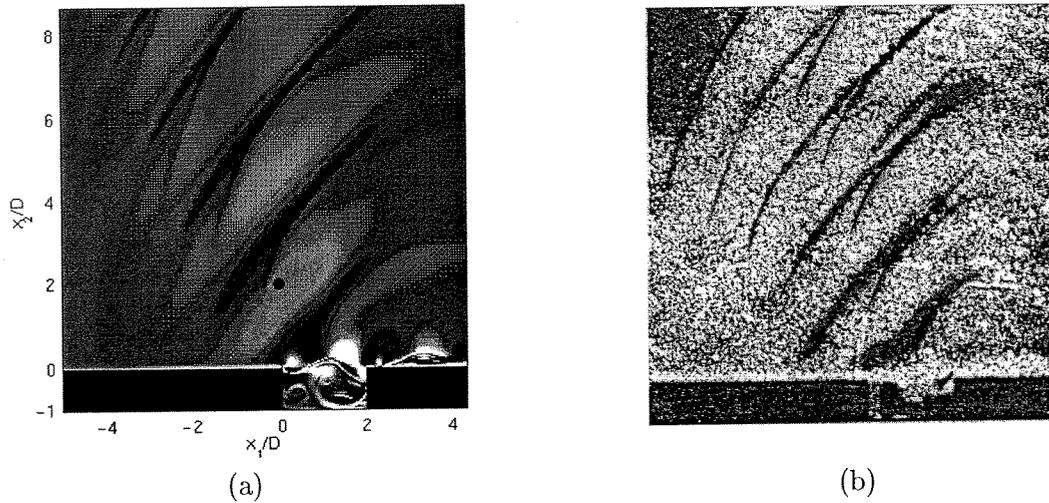


Figure 3.22: Cavité $L/D = 2$ et $M = 0.7$. Représentation strioscopique correspondant aux gradients verticaux de masse volumique : (a) présent calcul, (b) expérience de Karamcheti.¹³⁵

Pour visualiser le champ acoustique rayonné, on utilise une vue strioscopique (représentation de type Schlieren), qui correspond aux gradients verticaux de masse volumique, sur la figure 3.22. On constate que les gradients positifs (en sombre) résultent de la superposition de deux types d'ondes, qui interf rent durant leur propagation. Le rayonnement obtenu est en bon accord qualitatif avec la représentation strioscopique expérimentale pour la même configuration. Karamcheti a estimé l'intensité des ondes émises par un procédé d'interférométrie. Il constate que le champ acoustique peut être très intense avec des niveaux atteignant 163 dB à une distance de $3D$ dans la direction de propagation. La directivité en champ lointain est calculée sur les capteurs numériques de la figure 3.20, formant un cercle de rayon $7D$ autour de l'angle aval. Elle indique un niveau de 160 dB pour un angle de 120° , mesuré depuis l'axe Ox_1 . En considérant une décroissance cylindrique en $1/\sqrt{r}$, on obtient 161 dB à une distance de $3D$, en bon accord avec les mesures. La directivité est très marquée vers l'amont (120°). Elle provient de la combinaison entre la directivité du champ diffracté par la cavité (interférences avec les ondes réfléchies) et celle liée à la propagation dans un milieu en mouvement (convection par l'écoulement moyen et réfraction par la zone de recirculation et la couche cisailée).

3.4.3 Analyse de l'écoulement

La figure 3.23, à gauche, présente le champ de vorticité sur une période lorsque les oscillations sont bien établies. Sur la figure 3.23(a), on observe deux structures tourbillonnaires dans la couche cisailée, qui apparaît au point de séparation amont et se rattache à l'angle aval fermant la cavité. Le premier tourbillon vient juste d'être formé à l'angle amont. Sur les images suivantes,

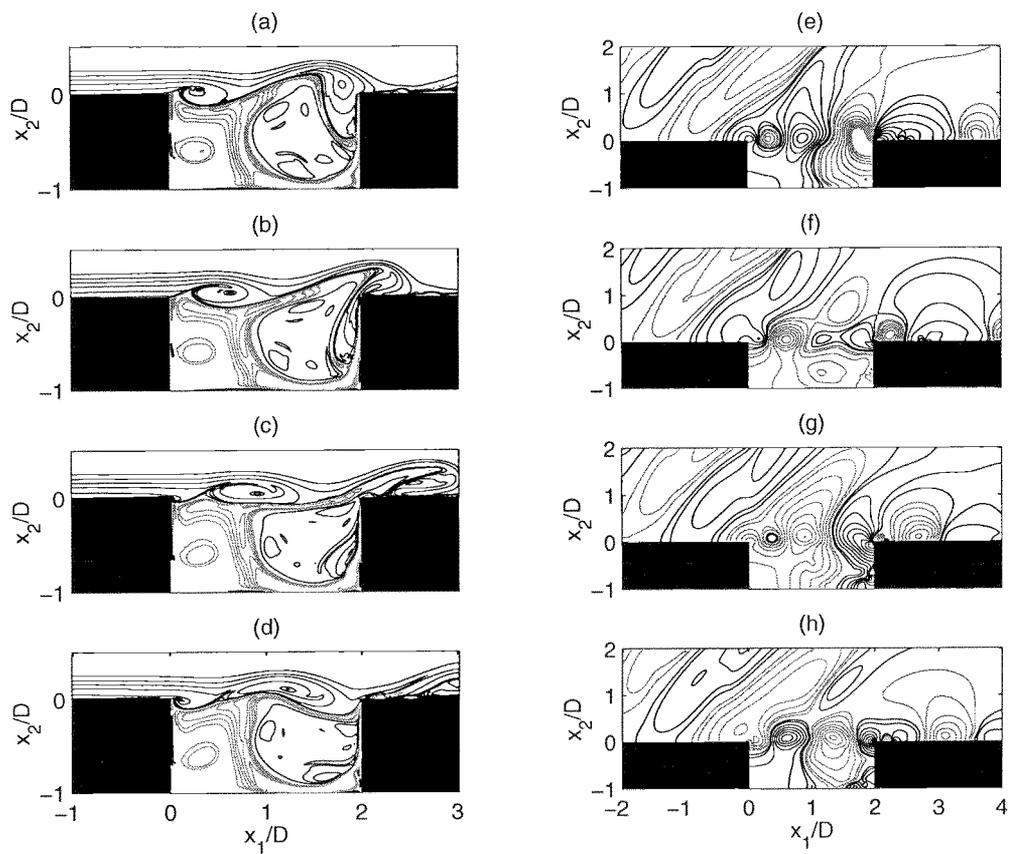


Figure 3.23: Isocontours instantanés de vorticité (à gauche) et de pression (à droite) pour quatre temps successifs durant un cycle d'oscillation. On a tracé 16 isocontours entre $\Omega D/U_\infty = -10.5$ et 1.36 pour la vorticité et 22 isocontours entre -10^4 et 10^4 Pa pour la pression : (—) isocontours négatifs, (---) isocontours positifs dans la région autour de la cavité.

il croît en étant convecté par la couche cisailée. La seconde structure tourbillonnaire atteint l'angle aval au premier instant représenté. Lorsqu'elle impacte le coin aval (fig. 3.23(b)), elle est scindée en deux parties. L'une d'entre elles est éjectée dans la couche limite réattachée après le coin aval et augmente son épaisseur. L'autre est aspirée dans la cavité et vient alimenter la zone de recirculation déjà existante (fig. 3.23(c)). Sur la figure 3.23(d), le tourbillon formé à l'angle amont sur la première image arrive sur le bord aval et son impact va initier un nouveau cycle.

Le champ de pression aux mêmes instants est représenté sur la figure 3.23, à droite. Il ne permet pas d'identifier l'origine du rayonnement acoustique car trois composantes de la pression sont superposées. La première est associée aux deux structures tourbillonnaires présentes dans la couche cisailée. Les zones de basse pression dans la couche cisailée permettent d'identifier les tourbillons et sont séparées par des régions de haute pression. Les deux centres dépressionnaires sont clairement visibles sur la figure 3.23(h). Le premier marque la formation d'une nouvelle structure tourbillonnaire et le second représente le second tourbillon juste avant qu'il n'impacte l'angle aval. La seconde composante de la pression consiste en une zone dépressionnaire correspondant au tourbillon principal, qui occupe la moitié de la cavité en aval et qui est identifiable sur les figures 3.23(f) et (g). Cette recirculation se traduit par des lignes de courant fermées sur la figure 3.24 (on remarque également sur cette figure la présence de zones de recirculation secondaires dans les coins de la cavité). Enfin, la troisième composante de la pression est associée aux ondes acoustiques générées par l'écoulement. On voit la naissance d'une onde de pression positive durant le cycle présenté. L'onde générée par le cycle précédent se situe au niveau de l'angle amont sur la figure 3.23(e) et sort de la cavité sur la figure 3.23(h). On s'aperçoit sur cette image que ce front d'onde est en fait formé de deux ondes différentes. Mais on n'est pas en mesure de séparer l'origine de ces deux ondes en raison de l'aspect complexe de la pression dans la cavité, résultant de la superposition des différentes composantes et dominé par les fluctuations d'origine aérodynamique.

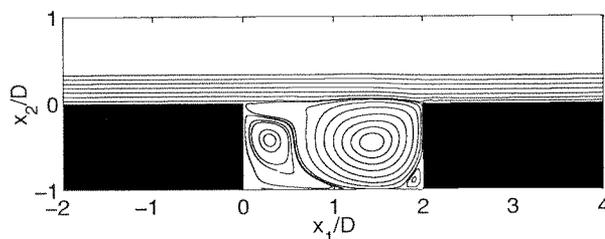


Figure 3.24: Cavité $L/D = 2$ et $M = 0.7$. Visualisation des lignes de courant de l'écoulement au-dessus et dans la cavité.

Comme indiqué par la figure 3.25, au début du développement de la couche cisailée, le profil

de vitesse moyenne passe d'un profil de couche limite à un profil de couche cisailée, souvent approximé par une fonction en tangente hyperbolique. On remarque de fortes perturbations du profil dans la deuxième partie de la cavité. Cet effet moyen de la recirculation semble largement surestimé par rapport aux profils relevés expérimentalement à plus haut Reynolds par Sinha *et al.*²⁷⁴ Il s'agit en fait plutôt d'un effet du caractère plan de la simulation que du nombre de Reynolds.

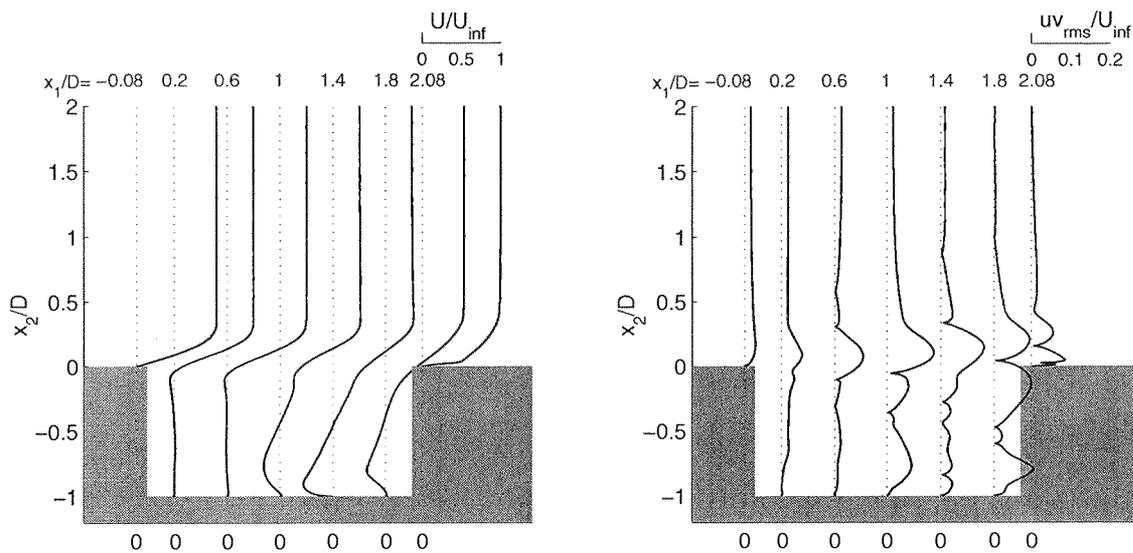


Figure 3.25: Cavité $L/D = 2$, $M = 0.7$. A gauche, profils moyens de la vitesse horizontale \bar{u}_1 et, à droite, profils des tensions de Reynolds uv_{rms} pour plusieurs positions x_1 . u_{rms} , v_{rms} et uv_{rms} sont définis par (3.2).

Le tracé des profils des fluctuations turbulentes :

$$u_{rms} = \frac{\sqrt{u_1'^2}}{U_\infty} \quad v_{rms} = \frac{\sqrt{u_2'^2}}{U_\infty} \quad uv_{rms} = \frac{\sqrt{|u_1' u_2'|}}{U_\infty} \quad (3.2)$$

pour plusieurs positions longitudinales sur la figure 3.26 indique des niveaux de fluctuations de l'ordre de 0.15. Sarohia²⁵⁸ (1977) note une valeur similaire près de l'angle aval. Les valeurs typiques pour une couche de mélange se situent entre 0.16 et 0.18 pour u_{rms} et entre 0.12 et 0.14 pour v_{rms} . Forestier⁷⁹ pour un plus grand nombre de Reynolds et un rapport L/δ_θ plus important note des valeurs beaucoup plus élevées qui se rapprochent de celles obtenues pour une couche de mélange excitée (voir tableau 3.1).

Les profils de u_{rms} font ressortir très rapidement un double pic. Pour les couches de mélange forcées²¹¹ ou des cavités avec un grand L/δ_θ ,^{244,79} le second pic apparaît progressivement. Il est beaucoup plus marqué dans les expériences de Ziada et Rockwell^{318,320} sur l'interaction entre une couche cisailée et un coin. Ces derniers comparent ce double pic à celui obtenu en considérant

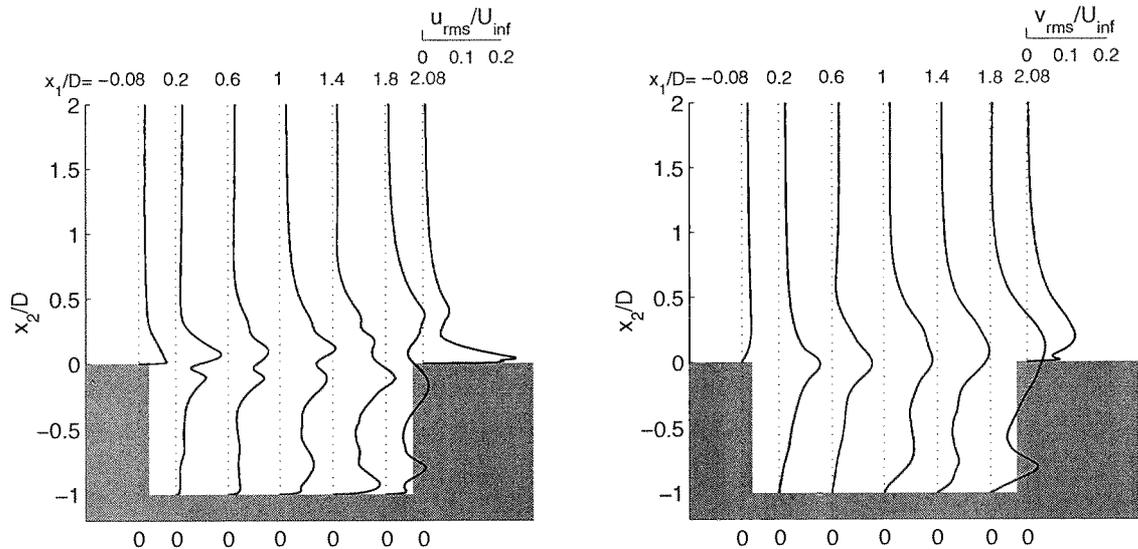


Figure 3.26: Cavité $L/D = 2$, $M = 0.7$. A gauche, profils des fluctuations de vitesse horizontale u_{rms} et, à droite, profils des fluctuations de vitesse verticale v_{rms} pour plusieurs positions x_1 . u_{rms} , v_{rms} et uv_{rms} sont définis par (3.2).

un tourbillon de Stuart,²⁸¹ défini par :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2) = U_c + \frac{\sinh(2\pi x_2/\lambda)}{\cosh(2\pi x_2/\lambda) + \alpha \cos[2\pi(x_1 - U_c t)/\lambda]} \\ u_2(x_1, x_2) = \frac{\alpha \sin[2\pi(x_1 - U_c t)/\lambda]}{\cosh(2\pi x_2/\lambda) + \alpha \cos[2\pi(x_1 - U_c t)/\lambda]} \end{cases} \quad (3.3)$$

On prend comme vitesse de convection $U_c = 0.5U_\infty$, comme taille $\lambda = D$ et comme coefficient d'anisotropie $\alpha = 0.7$. Le champ de vorticité correspondant est tracé sur la figure 3.27. On calcule les fluctuations moyennes u_{rms} et v_{rms} obtenues avec ce champ de vitesse durant une période et on les compare aux résultats de la simulation (fig. 3.28).

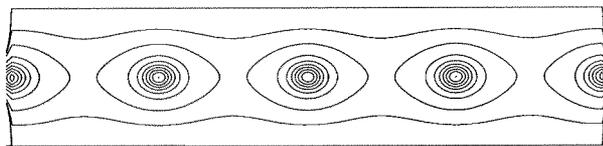


Figure 3.27: Champ de vorticité pour des tourbillons de Stuart, défini par (3.3), $\lambda = D$ et $\alpha = 0.7$.

Les profils depuis le fond de la cavité et jusqu'à une distance D au dessus, pour des positions longitudinales entre $x_1/D = 0.18$ et $x_1/D = 1.27$, sont proches des prédictions du modèle de Stuart dans la couche cisailée et s'en écartent dans la cavité, dominée par l'écoulement de recirculation qui est renforcé en 2-D. Au dessus ($x_2/D > 0.3$), on note l'émergence d'un pic secondaire lorsqu'on se rapproche de l'angle aval. Ces fluctuations sont importantes pour les deux derniers profils de v_{rms} , en $x_1/D = 1.08$ et $x_1/D = 1.27$, indiquant que ces perturbations

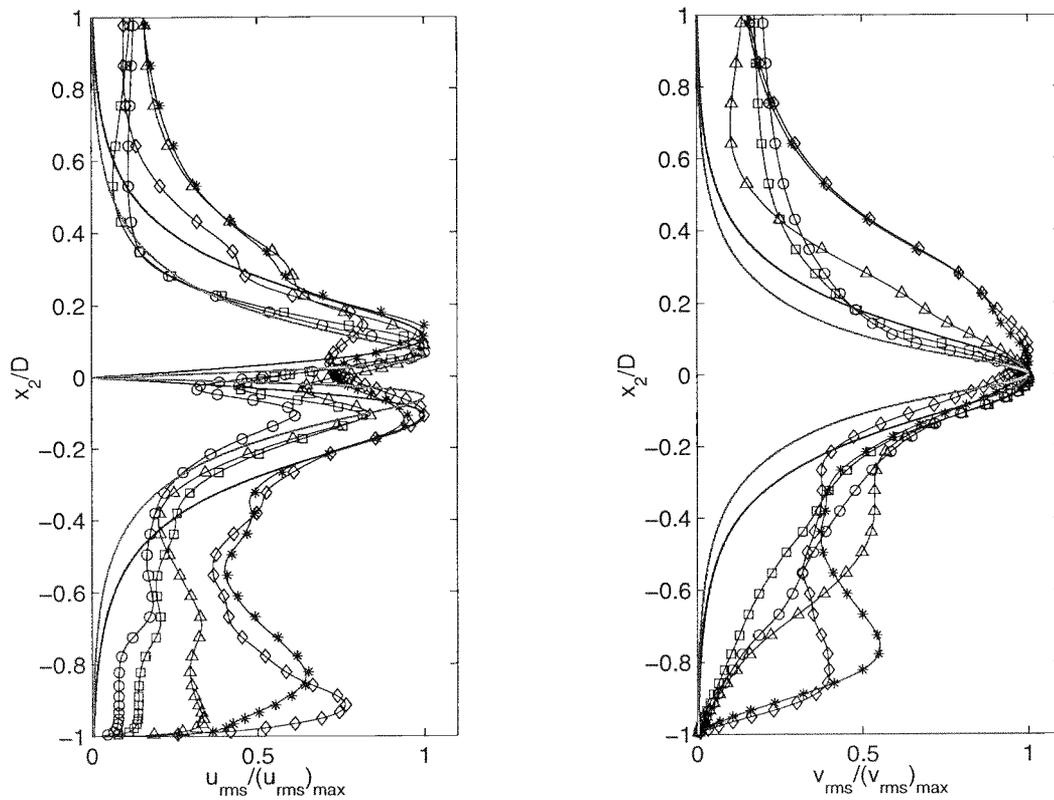


Figure 3.28: Cavité $L/D = 2$, $M = 0.7$. A gauche, profils des fluctuations de vitesse horizontale u_{rms} normalisées et, à droite, profils des fluctuations de vitesse verticale v_{rms} normalisées, comparés aux fluctuations obtenues avec des tourbillons de Stuart. \circ : $x_1/D = 0.18$; \square : $x_1/D = 0.32$; \triangle : $x_1/D = 0.70$; $*$: $x_1/D = 1.08$; \diamond : $x_1/D = 1.27$; (—) : tourbillon de Stuart avec $\alpha = 0.7$; (—) : tourbillon de Stuart avec $\alpha = 0.95$.

u_{rms}	v_{rms}	$(uv_{rms})^2$	$d\delta_\theta/dx_1$	$(d\delta_\omega/dx_1)/\eta$	Référence
0.176	0.138	0.009	-	0.19	Wynanski & Fiedler ³¹⁰ (1969)
0.19	0.12	0.012	-	0.16	Spencer & Jones ²⁷⁸ (1971)
0.18	0.14	0.01	-	0.163	Bell & Mehta ¹⁴ (1990)
0.21	0.3	0.036	-	-	Oster & Wynanski ²¹¹ (1982)
0.23	0.22	0.018	-	-	Fiedler & Mensing ⁷⁸ (1985)
-	-	0.012	-	-	Kistler & Tan ¹⁴³ (1967)
0.15	-	-	0.006-0.021	0.025-0.088	Sarohia ²⁵⁸ (1977)
-	-	0.013	0.031	~ 0.124	Gharib & Roshko ⁸⁷ (1987)
0.23	0.23	0.023	0.035-0.07	0.16	Forestier ⁷⁹ (2001)
0.16	0.14	0.013	0.006	0.03-0.2	présent calcul ($L/D = 2, M=0.7$)

Tableau 3.1: Valeurs maximales des tensions de Reynolds et taux d'accroissement mesurés dans une couche cisailée pour différentes études portant sur des couches de mélange se développant naturellement, sur des couches de mélange forcées et sur des écoulements affleurant une cavité. u_{rms} , v_{rms} et uv_{rms} sont définis par (3.2).

proviennent des ondes acoustiques intenses rayonnées depuis l'angle aval. Pour ces deux profils, dans la cavité, on remarque des pics secondaires pour les deux fluctuations, qui vont se traduire par d'importantes tensions de Reynolds. Elles proviennent d'un écoulement de type jet plan le long de la paroi verticale et sur la première moitié du fond, représenté sur la figure 3.29 de gauche en traçant la vorticité moyenne.

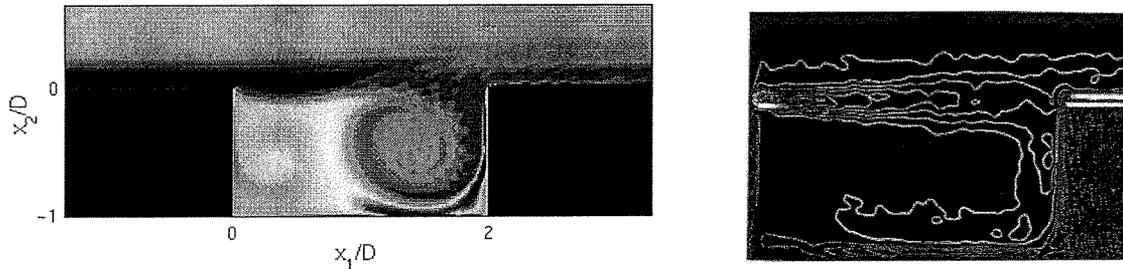


Figure 3.29: Cavité $L/D = 2$, $M = 0.7$. A gauche, représentation du jet plan issu de l'angle aval. On a tracé la vorticité moyenne. A droite, visualisation par imagerie de particules (PIV) de Lin et Rockwell,¹⁶¹ représentant des isocontours de vorticité moyenne $\bar{\omega}$ à partir d'une séquence aléatoire d'images PIV.

Ce jet plan a été mis en évidence par les visualisations PIV de Lin et Rockwell¹⁶¹ (fig. 3.29, droite). Il est constitué des portions de tourbillons scindés lors de l'impact sur l'angle aval puis projet s dans la cavité. Il va induire la large zone de recirculation qui occupe la deuxième moitié de la cavité. Lorsqu'on regarde de plus près l'évolution spatiale de u_{rms} , on constate que le double pic apparaît très tôt. Rappelons que les courbes sont normalisées mais la figure 3.26 montre une relative constance des niveaux globaux. On remarque aussi un élargissement vertical des perturbations, qui se traduit par une meilleure concordance avec un tourbillon de Stuart pour $\alpha = 0.95$ en amont et $\alpha = 0.7$ en aval. Cette invariance de la distribution de

perturbations, pour cet écoulement instationnaire, suggère une saturation de toutes les fluctuations longitudinales dans la couche cisailée. Cette saturation quasi-instantanée est confirmée par l'évolution de l'amplitude des fluctuations, reproduite sur la figure 3.30, le long de la ligne $x_2 = 0$, joignant les deux angles de la cavité. Les fluctuations verticales conservent la forme en cloche, caractéristique d'une couche cisailée libre. L'expérience de Oster et Wygnanski²¹¹ pour une couche de mélange excitée indique la présence du double pic pour u_{rms} et note une augmentation sensible des amplitudes de v_{rms} par rapport à la troisième composante w_{rms} . Ceci suggère une bidimensionnalisation de l'écoulement, qui explique pourquoi les taux de fluctuations évalués pour u_2 sont conformes aux expériences, et non largement surestimés.

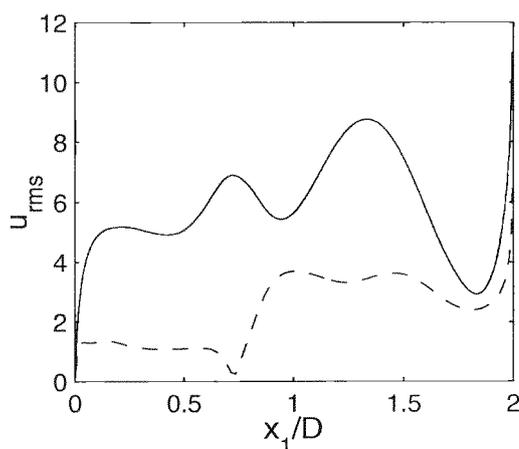


Figure 3.30: Cavité $L/D = 2$, $M = 0.7$. Croissance de l'amplitude des fluctuations de vitesse u_1 : (—) composante $u_{rms}(f_0)$ à la fréquence fondamentale; (---) composante $u_{rms}(2f_0)$ du premier harmonique.

L'élargissement de la couche cisailée au dessus de la cavité est représenté par l'évolution de deux épaisseurs caractéristiques, adimensionnalisées par l'épaisseur de quantité de mouvement δ_{θ_R} au niveau de l'angle amont. Elle vaut $\delta_{\theta_R} = 1.03 \times 10^{-4}$ m. Les valeurs mesurées de l'épaisseur lorsqu'on atteint 99 % de U_∞ et de l'épaisseur de déplacement sont $\delta = 6.29 \times 10^{-4}$ m et $\delta^* = 2.68 \times 10^{-4}$ m, fournissant un facteur de forme $H = \delta^*/\delta_\theta = 2.6$, proche de la valeur 2.5 mesurée par Gharib et Roshko,⁸⁷ pour une couche laminaire en eau ayant à peu près le même Re_{δ_θ} . L'épaisseur de quantité de mouvement sur la figure 3.32 de gauche ne croît pas linéairement mais l'on peut distinguer deux régions de croissance quasi-uniforme. Les rares études expérimentales sur la cavité qui fournissent cette donnée montrent plutôt une croissance linéaire^{258,87†}. Sarohia constate que le taux d'accroissement de δ_θ varie en fonction de la longueur L et plus particulièrement en fonction du rapport L/δ_θ mais aucun saut brusque n'est noté lorsqu'on change de mode d'oscillation. Ils mesurent $d\delta_\theta/dx_1$ entre 0.006 pour $L/\delta_\theta = 52.5$ et

†figure 7 de Sarohia²⁵⁸ et figure 9 de Gharib et Roshko.⁸⁷

0.022 pour $L/\delta_\theta = 105.2$ avec un écoulement d'air laminaire affleurant une cavité axisymétrique. Gharib et Roshko obtiennent la valeur $d\delta_\theta/dx_1 = 0.031$ pour des cavités axisymétriques de rapport L/δ_θ entre 85 et 119 en eau à basse vitesse. Cette valeur est comparable à celle d'une couche de mélange turbulente à haut nombre de Reynolds ($d\delta_\theta/dx_1 \simeq 0.035$). Ils ne notent pas non plus de saut lorsqu'on change de mode. Dans notre cas, on estime le taux d'accroissement moyen de $d\delta_\theta/dx_1$ à 0.006, pour la première région linéaire, ce qui est largement plus faible que les valeurs reportées pour une couche de mélange ou pour des cavités avec un grand rapport L/δ_θ . Cette valeur peut néanmoins être rapprochée de celle trouvée par Sarohia pour une couche limite incidente laminaire et relativement épaisse, $L/\delta_\theta = 52.5$. Rappelons que, dans notre cas, on a $L/\delta_\theta \simeq 50$. Pour la deuxième partie linéaire, le taux de croissance est de 0.0207, proche des valeurs de Sarohia pour des rapports L/δ_θ plus élevés. L'évolution spatiale de l'épaisseur de vorticité, sur la figure 3.32 de droite, n'est pas non plus linéaire et comporte deux paliers, avec une valeur moyenne $(d\delta_\omega/dx_1)_{moyen}$ de 0.1. Les portions de faible croissance s'effectuent à un taux d'environ 0.03, en accord avec les mesures de Sarohia et celles de forte croissance avec $(d\delta_\omega/dx_1) = 0.2$ s'apparentent aux couches de mélange. Les mesures de Forestier⁷⁹ (2001) montrent pour la première fois une évolution non linéaire de ces deux épaisseurs[‡] pour une cavité de rapport $L/D = 0.42$ et un nombre de Mach de 0.8. Les taux reportés sont beaucoup plus élevés (entre 0.035 et 0.07 pour $d\delta_\theta/dx_1$) mais la couche limite est beaucoup plus fine que dans notre simulation, $L/\delta_\theta \simeq 110$. Forestier distingue trois régions de croissance : une première pour $0 \leq x/\delta_{\theta_0} \leq 25$ avec un taux d'accroissement $d\delta_\theta/dx_1 \simeq 0.07$, environ deux fois supérieur à celui observé pour le développement naturel d'une couche de mélange; une deuxième pour $25 \leq x/\delta_{\theta_0} \leq 55$, avec un taux de 0.035, proche de celui observé pour une couche de mélange à l'équilibre et une troisième région pour $55 \leq x/\delta_{\theta_0} \leq 100$ qui semble dominée par l'impact et l'importante vitesse verticale qui s'ensuit. Le taux d'accroissement dans cette dernière région est similaire à celui de la première. L'épaisseur chute alors brutalement avant le bord aval, qui provoque une importante déformation du profil de vitesse. Oster et Wygnanski²¹¹ (1982) ont étudié une couche de mélange excitée par un volet oscillant. Ils notent alors des taux d'accroissement non linéaires (qui pourraient s'avérer oscillants) et distinguent également plusieurs régions. La première possède un taux supérieur à celle d'une couche de mélange non excitée. Dans la deuxième région, le développement de la couche cisailée est freiné voire stoppé. Enfin, dans la troisième région, l'accroissement se poursuit avec un taux comparable à celui de région initiale. Ho et Huang¹¹⁵ notent également qu'une couche cisailée fortement excitée s'épaissit deux fois plus vite qu'une couche à l'équilibre ($d\delta_\theta/dx_1 \simeq 0.07$). Il

[‡]Voir §6.7, p.86-94 et les figures 6.14 et 6.15 de la réf.⁷⁹

visualisent l'effet d'une excitation de forte amplitude à une fréquence inférieure d'une décade aux fréquences naturelles des instabilités de la couche cisailée et constatent la création rapide de grosses structures. Ils suggèrent un processus de fusion des petites structures, appelé *interaction collective* pour expliquer ce fort taux d'accroissement. Il s'agit d'une fusion en cascade des petites structures, dont la longueur d'onde correspond aux modes naturels d'instabilité, sous l'effet d'une modulation basse fréquence de leurs trajectoires par l'excitation externe. Pour que ce phénomène apparaisse, il est nécessaire que ce forçage ait une grande amplitude et que sa fréquence soit inférieure au mode naturellement le plus amplifié. Pour un profil en tangente hyperbolique, d'après la théorie de stabilité linéaire pour un écoulement parallèle, la couche cisailée sera la plus instable pour les perturbations dont le nombre d'onde a une amplitude telle que :

$$\alpha\delta = 0.42$$

où δ est l'épaisseur de la couche cisailée et α est le nombre d'onde des perturbations autour du champ moyen écrites sous la forme :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, t) = \mathbf{u}(x_2)e^{i\alpha(x_1-ct)}$$

avec une vitesse de propagation complexe c , dont la partie réelle c_r vérifie $\omega/\alpha = c_r$. Pour ce type de profil, on a $\delta_\theta = \delta/2$ et $c_r = 0.5U_\infty$. Le nombre de Strouhal basé sur δ_θ des perturbations les plus instables est donc :

$$St_\theta = \frac{f\delta_\theta}{U_\infty} = 0.017$$

Le développement des instabilités pour une couche de mélange excitée à été reproduit numériquement par Ghoniem et Ng⁸⁸ ou par Bogey^{21†} par exemple. Ghoniem et al. constatent qu'une faible amplitude des perturbations est nécessaire pour organiser fortement la couche cisailée et que le forçage sature rapidement la croissance des épaisseurs de vorticité ou de quantité de mouvement, conduisant à un palier oscillant. Pour des fréquences d'excitation inférieure à celle du mode le plus instable, on constate d'abord la formation de structures dont la taille peut être reliée à la longueur d'onde du forçage puis le développement de la couche cisailée est inhibé, formant un train de tourbillons que l'on peut rapprocher des visualisations d'Oster et Wygnanski.²¹¹ La transition rapide vers cette organisation correspond au processus d'interaction collective décrit précédemment, pour lequel le centre fictif des tourbillons est déplacé par la modulation basse fréquence et accélère les appariements, qui permettent l'épaississement par fusion de deux tourbillons plus petits. En aval du train de tourbillons, le développement naturel reprend quand les centres des tourbillons se sont suffisamment éloignés pour échapper à l'excitation. Si la

[†]figure 10-12 p.713 de réf.⁸⁸ et figure 4.3, p.89 de réf.²¹

fréquence de l'excitation est plus grande que la fréquence naturellement instable, Ghoniem et Ng remarquent que celle-ci n'a aucun effet et la couche de mélange se développe naturellement. Une condition nécessaire pour l'apparition de cette organisation est donc :

$$St_\theta \geq 0.017$$

Ce mécanisme est également décrit par Bogey,²¹ dont nous reproduisons un des résultats sur la figure 3.31.

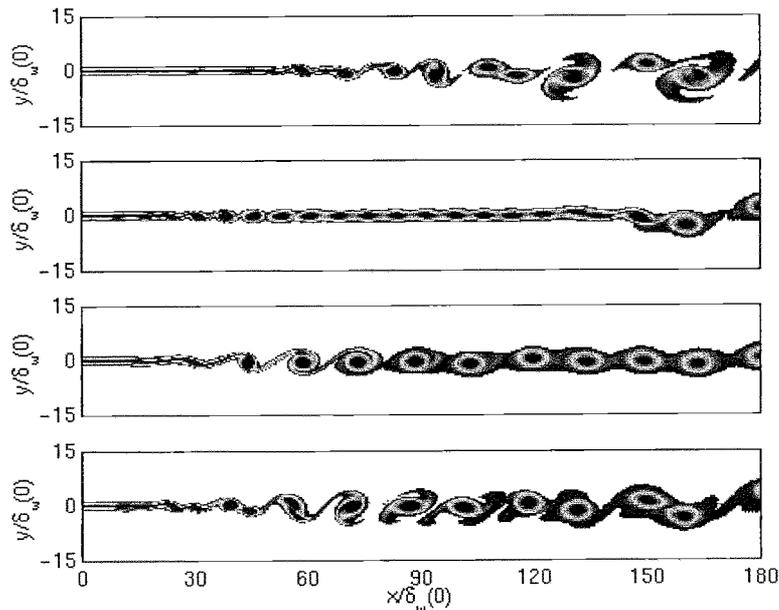


Figure 3.31: Représentation de la vorticité dans une couche de mélange pour quatre excitations différentes.²¹ De haut en bas : excitation aléatoire, excitation à la fréquence fondamentale des instabilités, excitation au premier sous-harmonique et excitation combinée à ces deux fréquences.

Pour notre configuration, compte tenu du fait qu'il faille imposer un petit rapport $L/\delta_{\theta_R} = 49.3$, pour ne pas transitionner vers un mode de sillage d  à la conservation de la vorticité en 2-D, on obtient un $St_\theta = f_0 \delta_{\theta_R} / U_\infty \simeq 0.014$, qui est proche du $St_\theta \simeq 0.017$, caractérisant les modes les plus instables d'un profil en tangente hyperbolique. Le mécanisme consiste alors plus simplement en la formation directe de tourbillons à la fréquence imposée, sans aucune fusion ou appariement. On obtient donc un taux d'accroissement fortement réduit. On crée en quelque sorte directement le train de tourbillons pour la fréquence fondamentale. L'évolution de δ_w illustre la saturation de la couche cisailée, avec deux paliers correspondant aux deux tourbillons. Pour l'épaisseur de quantité de mouvement, la deuxième région de croissance pour $x_1/D = 1.7$ à $x_1/D = 2$ possède à peu près la taille des structures lorsqu'elles arrivent sur l'angle aval. Rockwell et Knisely²⁴⁴ notent également l'émergence d'une région dominée par l'interaction d'un tourbillon avec l'angle aval. Cette région d'influence du coin aval s'étendrait sur une distance de l'ordre

de la longueur d'onde du tourbillon. L'interaction avec l'angle s'accompagne du changement de signe des tensions croisées dû à la présence de fortes vitesses verticales. Cette description semble coïncider avec la troisième région notée par Forestier.⁷⁹ Sa longueur représente $45\theta_0$; or les visualisations strioscopiques font apparaître une structure tourbillonnaire S1 juste avant l'angle aval d'une taille de $0.45L$ soit $50\theta_0$. Forestier met en évidence la présence d'un gradient $\partial v/\partial x$, qui peut être vu comme la naissance du jet plan noté précédemment ou la conséquence d'une entrée/sortie de fluide, décrite par Heller et Bliss.¹⁰⁷

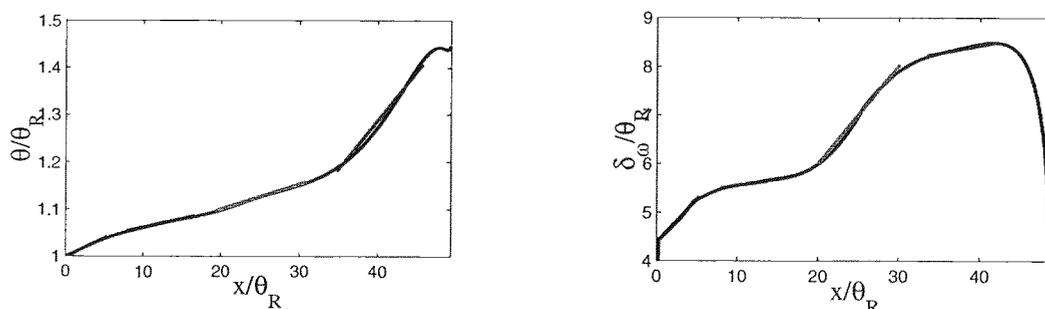


Figure 3.32: Cavité $L/D = 2$, $M = 0.7$. Développement de la couche cisillée. À gauche, épaisseur de quantité de mouvement $\delta_\theta = \theta$ et, à droite, épaisseur de vorticité entre les angles amont et aval de la cavité. θ_R est l'épaisseur de quantité de mouvement au niveau de l'angle amont. Les quatres pentes représentées ont une valeur de $(0.008, 0.004, 0.005, 0.02)$ pour δ_θ et $(0.18, 0.03, 0.2, 0.03)$ pour δ_ω .

3.4.3.1 Les mécanismes de génération de bruit

Le rayonnement des instabilités

Nosseir et Ho²⁰⁷ caractérisent les sources acoustiques du rayonnement d'un jet impactant sur une plaque en traçant les corrélations entre des microphones en champ proche et un microphone en champ lointain. Ils déterminent deux sources. La principale se situe au niveau de la zone d'impact des structures tourbillonnaires du jet sur la plaque. Une source secondaire haute fréquence provient de la sortie de la buse et correspond au rayonnement des instabilités excitées dans la région de séparation. En fait, cette source est associée au processus d'interaction collective, induit par l'excitation fournie par la rétroaction aéroacoustique entre la buse et la plaque, similaire à celle décrite entre les deux angles d'une cavité soumise à un écoulement affleurant. Dans notre cas, on a vu que la fréquence d'autoexcitation n'est pas assez basse fréquence et les tourbillons sont générés directement. La source de bruit associée à l'interaction collective n'est donc pas présente.

La création des tourbillons à l'angle amont provient de l'imposition d'une condition visqueuse de Kutta. En effet, pour des écoulements à grand Reynolds et petit nombre de cisaillement, la viscosité influe beaucoup sur l'écoulement autour des angles; elle induit une séparation, décrite

par la condition de Kutta, qui statue que la vitesse doit rester finie. Cependant, si l'on réfère aux développements de la théorie *vortex sound*,^{117,118} l'effet de l'imposition de la condition se traduit par l'annulation du bruit émis par l'angle lorsque de la turbulence gelée passe au dessus. L'annulation est produite par les tourbillons créés, qui estompent les gradients de pression dans le voisinage de l'angle. La simple formation d'un tourbillon ne fait donc pas de bruit. Seul le processus d'interaction collective peut parfois constituer une source sonore au niveau de l'angle amont.

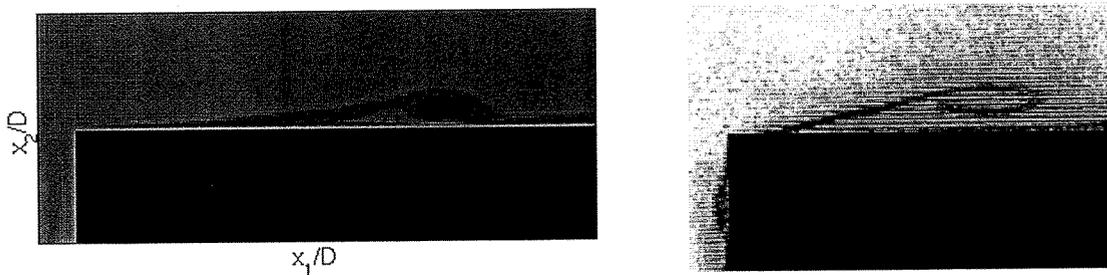


Figure 3.33: Visualisations de la vorticit e cr ee à l'angle aval :   gauche champ de vorticit e pour la simulation numérique de la cavité $L/D = 2$, $M = 0.7$;   droite, zoom de l'angle aval d'une cavité lors d'un impact, visualisation par injection d'encre de Tang et Rockwell.²⁹⁷

L'impact des structures tourbillonnaires

Toutes les visualisations corrèlent fortement le rayonnement acoustique et les  v nements instationnaires lors de l'impact d'un tourbillon sur le coin. Tang et Rockwell²⁹⁷ ont étudié précisément les interactions entre les tourbillons et l'angle aval d'une cavité en eau. L'impact provoque un pic de pression négative prononcé sur les faces de l'angle et l'ordre de grandeur de ces fluctuations peut atteindre $p_{rmsmax} = \mathcal{O}(\rho u_{rmsmax} U_\infty)$. Lorsqu'une portion du tourbillon est aspirée dans la cavité le long de la paroi verticale aval, la fluctuation sur la paroi du haut est proportionnelle à la taille de la portion aspirée car plus cette scission est faible, moins il y aura de perturbations. L'étude de la force exercée sur les deux parois, en intégrant les distributions instantanées de pression, révèle que les forces ont tendance à être déphasées de π lorsqu'une large portion du tourbillon impactant est dirigée dans la cavité.

La théorie du *vortex sound*,¹²⁰ montre que bruit acoustique généré par un angle est dissipé par la création de vorticité. Les champs de vorticité et les visualisations de Tang et Rockwell²⁹⁷ indiquent effectivement la création de vorticité au niveau de l'angle aval, comme illustré par la figure 3.33. Cependant, ce phénomène de dissipation est négligeable comparé aux fluctuations de pression et de masse volumique générées par l'impact.

Conformément à la théorie du *vortex sound*, les sources de bruit sont associées à la déformation des tourbillons, qui induit des forts gradients et des accélérations de la vorticité. Le rayonnement

provient donc essentiellement de l'impact régulier des structures tourbillonnaires.

L'entrée/sortie de masse

Rockwell et Knisely²⁴⁴ tentent de quantifier l'entrée/sortie de masse au niveau de l'angle aval, en représentant les fluctuations de la vitesse verticale dans le voisinage de l'angle[†]. Ils utilisent les fluctuations le long de $x_2 = 0$ car la valeur moyenne de u_2 est quasiment nulle sur cette ligne et u_2' représente bien les mouvements du fluide. Pour notre simulation, on a directement accès à l'évolution temporelle de u_2 et l'on trace les profils longitudinaux pendant une période d'oscillation T sur la figure 3.34. Ces courbes ont une allure sinusoïdale sur 1.5 cycles, sauf près de $x_1/D = 2$, où l'on note de larges déflexions. La première région est associée à la présence des tourbillons dans la couche cisailée, avec des variations de phase correspondant à leur convection. Ces oscillations subissent une grande distorsion dans le voisinage de l'angle aval, due à l'impact. Une comparaison avec l'évolution de l'amplitude de la vitesse verticale pour un tourbillon non impactant de Stuart, donnée par :

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{\Gamma}{2\lambda} \frac{\alpha \sin(2\pi x_1/\lambda)}{\cosh(2\pi x_2/\lambda) + \alpha \cos(2\pi x_1/\lambda)}, \quad (3.4)$$

où Γ est l'intensité de la recirculation, λ l'espacement entre les tourbillons et α représente la concentration de vorticité, se compare favorablement avec l'évolution des fluctuations de vitesse verticale dans la première région. On a pris $\alpha = 0.1$; $\alpha = 0$ correspondrait à une vorticité uniforme sur la ligne $x_2 = 0$ alors que $\alpha = 1$ caractériserait des tourbillons ponctuels sur cette ligne.

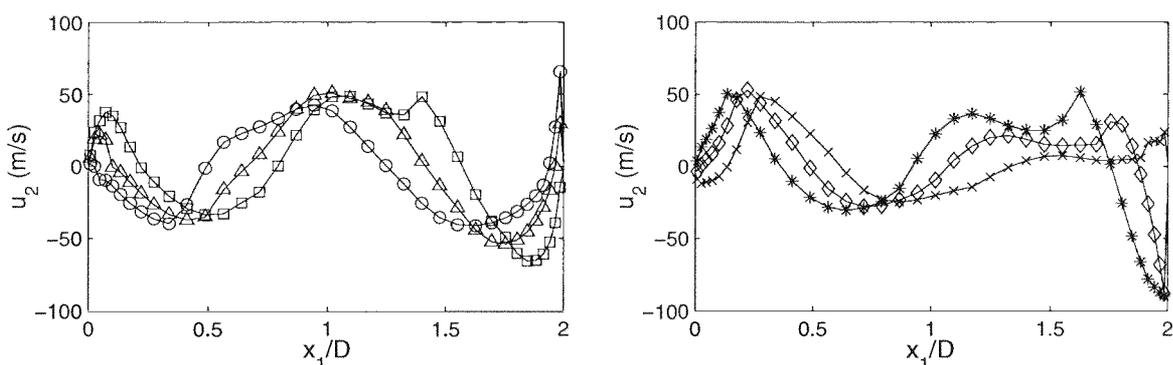


Figure 3.34: Cavité $L/D = 2$, $M = 0.7$. Profils de la vitesse verticale u_2 le long de la droite $x_2 = 0$ pour différents temps t/T durant une période T : \circ : 0; \triangle : $\frac{1}{8}$; \square : $\frac{2}{8}$; $*$: $\frac{3}{8}$; \diamond : $\frac{4}{8}$; \times : $\frac{5}{8}$.

Les oscillations des fortes déflexions près de l'angle représentent l'entrée/sortie de fluide au cours d'un cycle, considérée comme le phénomène fondamental par Heller et Bliss.¹⁰⁷ Le

[†]Figure 19, p.429 de la réf.²⁴⁴

rayonnement acoustique correspondant à cette entrée/sortie de masse serait dipolaire à cause de l'opposition entre les fronts d'onde dans la cavité et à l'extérieur. Cependant, les visualisations ne montrent pas un tel déphasage entre les ondes à l'extérieur et dans la cavité. En fait, le modèle de fluctuations de type *pseudo-piston* de Heller et Bliss est plus proche de la réalité car il induit des fluctuations horizontales. L'effet piston est en fait l'écrasement périodique des tourbillons sur l'angle aval.

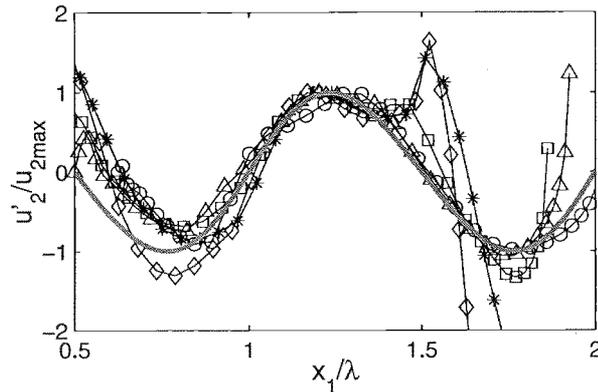


Figure 3.35: Cavité $L/D = 2$, $M = 0.7$. Profils de la vitesse verticale u_2 normalisés, le long de la droite $x_2 = 0$ pour différents temps t/T durant une demi période $T/2$: Δ : $\frac{1}{8}$; \square : $\frac{1}{4}$; $*$: $\frac{3}{8}$; \diamond : $\frac{1}{2}$, comparés au calcul de v_{rms} pour un tourbillon de Stuart (3.4) avec $\alpha = 0.1$: (—). Pour la simulation, on a pris $\lambda = 1.4D$ et on fait coïncider le maximum.

Relation de phase entre les bords amont et aval

Le paragraphe 2.4.3 montre que la relation de phase entre les signaux pris aux angles amont et aval caractérise la boucle de rétroaction. La durée $N \times T_0$ de N de cycles d'oscillation est la somme du temps nécessaire aux perturbations, convectées à la vitesse U_c , pour aller de l'angle amont à l'angle aval, et du temps pour que les ondes acoustiques, qui se propagent à la vitesse c , aillent de l'angle aval à l'angle amont :

$$N \times T_0 = \frac{L}{U_c} + \frac{L}{c}$$

On se propose de comparer ce modèle global aux phases issues de la simulation en transformant un signal dans l'espace de Fourier et en calculant la phase de la représentation complexe à une fréquence f comme :

$$\Phi_g(x_1, x_2, f) = \tan^{-1} \left[\frac{\Im \{ \hat{g}(x_1, x_2, f) \}}{\Re \{ \hat{g}(x_1, x_2, f) \}} \right]$$

où $\hat{g}(x_1, x_2, f)$ est la transformée de Fourier de la variable $g(x_1, x_2, t)$. On trace sur la figure 3.36 la phase des fluctuations de vitesse verticale Φ_{u_2} et de pression Φ_p le long de la droite $x_2 = 0$,

joignant les coins amont et aval, à la fréquence fondamentale f_0 des oscillations. On constate que $|\Phi/2\pi| \simeq 1.5$. On en déduit qu'il y a $N = 1.5$ cycles aérodynamiques dans la couche cisailée.

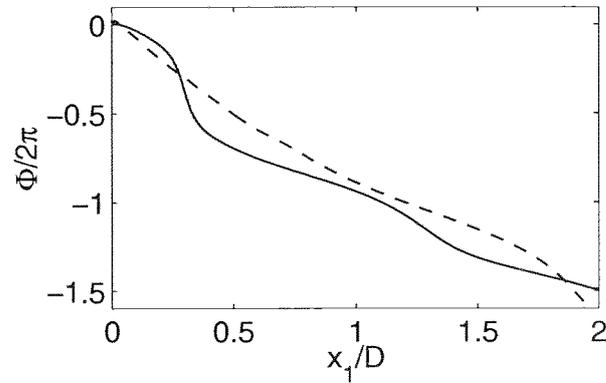


Figure 3.36: Cavité $L/D = 2$, $M = 0.7$. Phase entre les angles amont et aval de la cavité. (—) : phase de la composante fondamentale des fluctuations de vitesse verticale $\tilde{u}_2(f_0)$ et (---) : phase de la composante fondamentale des fluctuations de pression $\tilde{p}_2(f_0)$. On calcule la phase le long de la ligne $x_2 = 0$ entre $x_1/D = 0$ et $x_1/D = 2$; la référence est prise en $x_1 = 0$.

On évalue la vitesse U_c de propagation des perturbations aérodynamiques à partir du calcul de l'évolution temporelle des coefficients de corrélation (3.1) sur la ligne $x_2 = 0$ entre les deux coins. On suit alors la position spatiale d'un pic pour déterminer une distance de séparation notée ϵ en fonction du temps sur la figure 3.37. On obtient une droite dont la pente est $\kappa = U_c/U_\infty = 0.65$. Cette valeur est sensiblement supérieure à $\kappa = 0.57$, fournie par la formule de Rossiter. On calcule alors $\frac{f_0 L}{U_c} = 1.03$, avec $f_0 = 32$ kHz, $L = 5.08$ mm et $U_c = 0.65 \times M \times U_\infty = 157.4$ m/s.

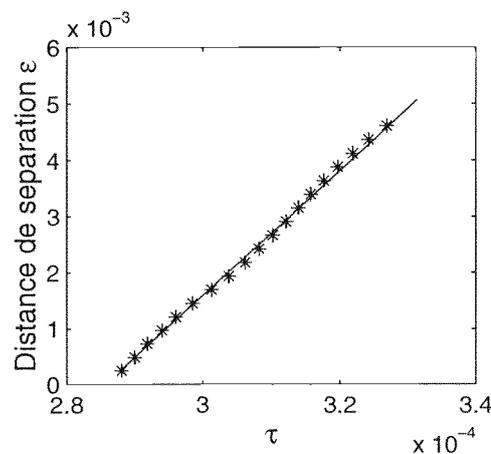


Figure 3.37: Cavité $L/D = 2$, $M = 0.7$. Distance de séparation ϵ entre les maxima des coefficients de corrélation de la vitesse verticale en fonction du temps de retard τ . Les coefficients de corrélation sont calculés tous les $\Delta x_1 = L/20$ avec pour point de référence $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. La pente fournit la vitesse de propagation des perturbations.

Il reste à évaluer la vitesse de phase des perturbations de pression dans la cavité. Pour cela, on trace la phase des fluctuations de pression au fond de la cavité sur la figure 3.38. On trouve $\Phi_p/2\pi = 0.48$. Si on approxime la vitesse du son dans la cavité par celle du milieu ambiant $c = c_\infty$, on obtient $\frac{f_0 L}{c_\infty} = 0.47$, avec $c_\infty = 346.15$ m/s. Quand on additionne les phases des perturbations aérodynamiques vers l'aval et des perturbations acoustiques vers l'amont :

$$\frac{f_0 L}{U_c} + \frac{f_0 L}{c} = 1.03 + 0.47 = 1.5,$$

on retrouve la valeur $N = 1.5$. Cette valeur peut s'écrire $n + 1/2$ avec ici, $n = 1$. Cette valeur $1/2$ est en désaccord avec la valeur semi-empirique -0.25 , donnée par Rossiter. Notons toutefois qu'une valeur identique $1/2$ est trouvée par Sarohia²⁵⁸ et Hussain et Zaman¹²⁷ pour corroborer leurs résultats expérimentaux.

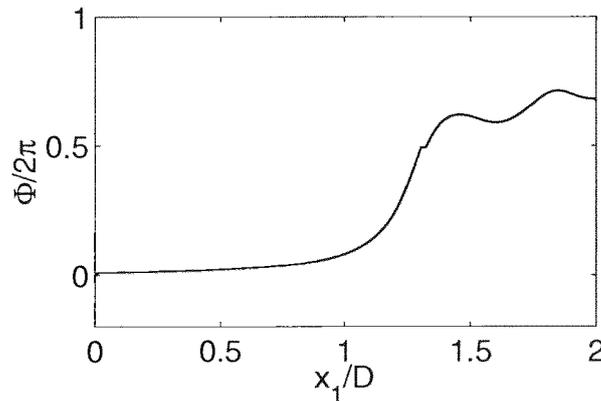


Figure 3.38: Cavité $L/D = 2$, $M = 0.7$. Phase de la composante fondamentale des fluctuations de pression $\tilde{p}_2(f_0)$ sur le fond de la cavité $x_2 = -D$.

Finalement, la relation entre les coins amont et aval peut s'écrire :

$$St_L = \frac{f_0 L}{U_\infty} = \frac{N}{\frac{1}{\kappa} + M} = \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{1}{\kappa} + M} \quad (3.5)$$

où $\kappa = U_c/U_\infty = 0.65$. On obtient, dans notre configuration $N = 1.5$ ou $n = 1$ et $M = 0.7$, $St_L = 0.67$, en bonne concordance avec la valeur issue de la simulation $St_L = 0.66$. Sur la figure 3.39, on compare aussi les courbes fournies par (3.5) à celles de la formule de Rossiter. On ajoute le résultat de la simulation $L/D = 4$ et $M = 0.5$ et les valeurs expérimentales obtenues par Karamcheti¹³⁵ pour différents nombres de Mach. On constate un bon accord global avec la formule (3.5); seul le nombre de Strouhal déterminé par Karamcheti pour $M = 0.4$ s'en écarte. Pour cette valeur, le mode acoustique $m = 1$ semble prédominer.

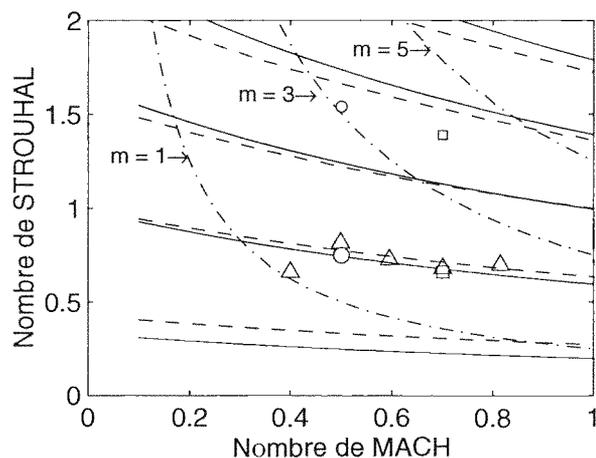


Figure 3.39: Evolution des fréquences adimensionnelles St_L en fonction du nombre de Mach. (—) : formule (3.5); (---) : formule de Rossiter; (- · - ·) : modes acoustiques longitudinaux $\frac{m}{4} \times \frac{1}{M}$, $m = 1, 3, 5, \dots$; \circ : simulation $L/D = 4$, $M=0.5$ et $L/\delta_\theta = 63$; \square : simulation $L/D = 2$, $M=0.7$ et $L/\delta_\theta = 50$; Δ : résultats expérimentaux de Karamcheti.¹³⁵

3.5 Conclusions

Ce chapitre a montré que les développements numériques pour calculer l'écoulement et le champ acoustique par résolution des équations de Navier-Stokes permettent de reproduire le rayonnement acoustique d'un écoulement affleurant une cavité. On valide en particulier la robustesse de la condition de paroi dans le cas très défavorable où l'écoulement impacte un angle droit et sa compatibilité avec les conditions limites de rayonnement. Les répercussions des erreurs numériques dues à l'indétermination des variables au niveau des points singuliers, que représentent les deux angles de la cavité, sont minimisées par la procédure d'extrapolation et par le raffinement du maillage. L'efficacité de l'ajout d'une zone éponge pour la sortie des structures tourbillonnaires est illustrée et empêche un forçage de l'écoulement par les réflexions numériques sur la frontière de sortie.

Le choix d'une simulation bidimensionnelle est appuyé par la physique essentiellement 2-D de la couche cisailée et se trouve tout à fait justifié en laminaire. Le problème d'une résolution dans un plan de l'écoulement est que la conservation de la vorticité empêche le mélange de deux volumes fluides de vorticité de signe opposé, qui se fait par étirement dans la troisième direction.¹²⁶ Ainsi, les tourbillons, de sens de rotation opposé à ceux de la couche cisailée, générés par l'impact sur l'angle aval et mis en évidence expérimentalement par Tang et Rockwell,²⁹⁷ ne peuvent se mélanger avec la zone de recirculation principale dans la cavité. Les simulations indiquent des recirculations très intenses dues à ce non mélange. Le problème devient critique lorsque la couche cisailée est très mince. L'intensité du tourbillon contrarotatif est

alors suffisante pour couper la couche cisailée, qui est alors entraînée par la recirculation. Le régime d'écoulement est complètement modifié et prend la forme d'un mode de sillage. Cette prédominance de la recirculation sur la couche cisailée a été observée expérimentalement pour des cavités axisymétriques en eau, pour les cavités dites fermées ou pour les instabilités de combustion. Cependant, cette bifurcation d'un mode régi par les instabilités de la couche cisailée vers un mode régi par les instabilités de la recirculation, discutée par plusieurs auteurs,^{40,266,253} est un artefact du 2-D pour les configurations traitées. Pour simuler une couche limite très fine au dessus de la cavité, il faut donc recourir à une résolution 3-D. Compte tenu de l'augmentation considérable du coût numérique, l'utilisation de la simulation des grandes échelles (LES) devient nécessaire afin de conserver des géométries raisonnables.

Pour une couche limite telle que $L/\delta_\theta < 70$, les simulations numériques directes présentées reproduisent bien la boucle de rétroaction responsable des oscillations autoentretenuës et de la forte organisation de l'écoulement. L'obtention grâce à la DNS de toutes les variables instationnaires permet de valider les champs aérodynamique et acoustique par rapport aux résultats de la littérature afin de les relier. On est maintenant en mesure de décrire le mécanisme responsable des oscillations dans la cavité. Les instabilités convectives qui se développent dans la couche cisailée génèrent des ondes de pression lorsqu'elles impactent l'angle aval. Ces perturbations se propagent jusqu'à l'angle amont et excitent la couche cisailée à son point de séparation. Ce forçage périodique provoque une grande organisation des structures tourbillonnaires, qui forment un train de tourbillons au dessus de la cavité. L'établissement d'une relation de phase privilégiée entre les coins amont et aval impose le nombre de cycles des oscillations N de telle sorte que l'amplification totale des instabilités soit maximale. Ce nombre N fixe de tourbillons, convectés dans la couche cisailée à la vitesse U_c , se traduit par un impact périodique des structures sur l'angle aval. L'interaction de la vorticité avec la paroi induit un transfert d'énergie de l'écoulement vers le champ acoustique. Les ondes de pression générées bouclent la rétroaction. La relation de phase mise en évidence numériquement, notée expérimentalement par deux auteurs,^{258,127} est donnée par la formule (3.5). Les principaux écarts par rapport à la formule de Rossiter concernent la présence d'un nombre demi-entier de cycles dans la couche cisailée, l'absence de déphasage entre l'impact et l'émission acoustique correspondante et une vitesse de convection telle que $\kappa = 0.65$, diff rent de la valeur 0.57 proposée par Rossiter. C'est la vitesse de convection variable qui est représentée artificiellement par un déphasage supplémentaire dans le raisonnement de Rossiter.

La structure du champ acoustique est conforme aux visualisations par strioscopie de Karamcheti et montre des fronts d'onde déformés par l'effet Doppler d  à la convection par l'écoulement

moyen. La fréquence du rayonnement est déterminée à quelques pourcents et son amplitude possède le bon ordre de grandeur. On visualise les interactions entre deux types d'ondes dans le champ rayonné, dont on ne peut pas déterminer les origines en examinant le champ de pression. En effet, en champ proche, la pression est dominée par les perturbations aérodynamiques. Le rayonnement acoustique associé aux fluctuations de masse volumique provoquées par l'impact périodique (effet piston) est souvent modélisé par une source monopolaire dans les développements analytiques. La comparaison numérique avec la structure du champ rayonné par un monopôle placé à l'angle aval de la cavité indique que les deux types d'ondes observés correspondent à l'interférence entre une onde directe et une onde réfléchie. Cependant, l'analyse du rayonnement d'un cylindre ou d'un coin isolé²³¹ met en évidence un rayonnement de nature dipolaire, dû aux forces exercées sur les parois. La comparaison avec le terme dipolaire de l'analogie de Curle,⁴⁸ basé sur la force de pression exercée sur la surface, est l'origine de l'idée souvent avancée, qui consiste à traduire l'interaction entre un écoulement et une surface par un rayonnement dipolaire. Les méthodes intégrales vont donc pouvoir aider à l'analyse du rayonnement et du rôle joué par les surfaces.

Chapitre 4

Les méthodes intégrales

4.1 Introduction

Lighthill présentait un *second âge d'or* pour les méthodes intégrales avec les possibilités d'applications numériques. Les nombreuses publications récentes et les débats suscités par cette approche montrent que ce type de méthode reste d'actualité. Une controverse émise par certains auteurs comme Tam²⁸⁸ ou Fedorchenko⁷¹ prétend pourtant que cette théorie est erronée. Ces études ont le mérite de souligner les faiblesses et les limites d'applicabilité des méthodes intégrales mais omettent de parler des configurations où elles ont montré leur intérêt et leur véracité.

L'objectif de ce chapitre est d'évaluer leur intérêt comme méthode numérique complémentaire ou alternative au calcul aéroacoustique direct. Dans un premier temps, on propose un classement des nombreuses formulations et variantes. Les développements analytiques pour les obtenir sont rappelés de manière progressive afin de mieux appréhender leurs relations et leur champ d'application. Cette énumération quasi-exhaustive a pour but d'offrir une vision unifiée car les multiples facettes présentées dans la littérature pourraient rebuter un lecteur peu averti. On insiste également sur les différentes conventions possibles pour le sens de la normale, pour l'expression de l'équation d'onde ou pour la définition de la transformée de Fourier, qui rendent souvent délicates les comparaisons entre les différents articles. Le classement réalisé distingue deux grandes classes d'approches :

L'approche analogique, correspondant au raisonnement de Lighthill, consiste à diviser l'espace en une région source et une région où se trouve l'observateur (appelée milieu observateur). Une reformulation exacte des équations de la mécanique des fluides permet d'établir une équation des ondes inhomogène dont les termes du membre de droite représentent les sources sonores, de nature *quadripolaire*. Pour étendre le résultat de Lighthill aux configurations incluant des surfaces, on peut utiliser la formulation de Kirchhoff¹⁴² avec l'intégrale volumique (c'est le point de départ des démonstrations de Curle⁴⁸ ou de Blake¹⁸) ou la formulation de Ffowcs Williams et Hawkins (FW-H). Ces deux formulations sont exactement équivalentes et

peuvent être toutes les deux écrites pour une surface en mouvement quelconque ou lorsqu'il y a un écoulement uniforme dans le milieu d'observation. La première est l'*approche analogique basée sur la formulation de Kirchhoff* (analogie de Curle dans certains cas; c'est l'approche utilisée par Zhang, Rona et Lilley,³¹⁷ par exemple). La deuxième est l'*analogie de Ffowcs Williams et Hawkings*. Les surfaces prises en compte ne sont pas forcément matérielles et l'on peut utiliser une surface poreuse, comme le souligne Ffowcs Williams.^{55,45} Si l'on continue d'intégrer les sources quadripolaires, on suit toujours le raisonnement analogique de Lighthill.

L'autre classe de méthodes regroupe **les méthodes d'extrapolation** (WEM : Wave Extrapolation Method), qui ne sont pas limitées à l'aéroacoustique mais possèdent des développements dans d'autres branches : électromagnétisme, optique, sismique ou acoustique classique. En acoustique, la plus connue est la *méthode de Kirchhoff* basée sur le théorème de Kirchhoff (1883). Elle permet de calculer le champ acoustique à partir des données sur une surface de contrôle qui se trouve dans la région linéaire (au sens acoustique) et qui englobe toutes les sources de bruit. Compte tenu de la grande similarité entre la formulation de Kirchhoff et celle de FW-H, la formulation de FW-H peut donc servir de base à une méthode d'extrapolation que l'on nommera *méthode d'extrapolation des ondes basée sur l'équation de FW-H*. Elle est parfois appelée méthode de FW-H poreuse (ou à partir d'une surface poreuse). Or, comme noté précédemment, on peut également utiliser une surface poreuse pour l'analogie acoustique. Cette dénomination n'est donc pas assez distinctive. L'autre terminologie rencontrée dans la littérature (proposée par di Francescantonio⁵²) est méthode K-FW-H (Kirchhoff-Ffowcs Williams-Hawkings) pour rappeler qu'il s'agit d'une méthode similaire à celle de Kirchhoff mais basée sur l'équation de FW-H. Cette appellation n'est pas non plus sans ambiguïté puisqu'on a vu que la formulation de Kirchhoff peut également servir de base à l'approche analogique.

Ces méthodes d'extrapolation peuvent être appliquées à des configurations purement acoustiques, pour lesquelles une approche analogique n'est pas envisageable puisqu'on ne peut pas distinguer une région source aérodynamique d'une région acoustique. Il s'agit donc bien de deux méthodes distinctes utilisant les mêmes développements mathématiques mais répondant à des philosophies d'application différentes. Le trouble provient du fait que l'on peut passer continuellement de l'une à l'autre. Si l'on considère l'application de l'analogie en prenant une surface poreuse Σ qui inclut toutes les sources aérodynamiques, on a alors $T_{ij} = 0$ en dehors de la surface Σ et on n'évalue plus que des intégrales surfaciques. La méthode est alors exactement équivalente à une méthode d'extrapolation à partir de Σ . Nous tenons toutefois à différencier ces deux approches pour rappeler leurs spécificités.

Concrètement, on parle donc d'analogie acoustique (en référence à celle de Lighthill) lorsqu'on

ANALOGIE en l'absence de surface	démonstrations de Blake ou Curle $\iiint Q_{kir}^V$	analogie de Lighthill $\iiint Q_{fwh}^V$	équivalente analytiquement
ANALOGIE avec surface	analogie basée sur la formulation de Kirchhoff $\iiint Q_{kir}^V + \iint Q_{kir}^S$	analogie de FW-H $\iiint Q_{fwh}^V + \iint Q_{fwh}^S$	$\iiint Q_{kir}^V + \iint Q_{kir}^S =$ $\iiint Q_{fwh}^V + \iint Q_{fwh}^S$
W.E.M. à partir d'une surface	méthode de Kirchhoff $\iint Q_{kir}^S$	WEM basée sur l'équation de FW-H $\iint Q_{fwh}^S$	équivalente si $T_{ij} = 0$ sur Σ différentes si $T_{ij} \neq 0$ car $\iint Q_{kir}^S \neq \iint Q_{fwh}^S$

Tableau 4.1: Tableau récapitulatif des différentes familles d'approche. WEM= Wave Extrapolation Method; kir= Kirchhoff; fwh= Ffowcs Williams et Hawkins. $\iiint Q^V$ représente les intégrales volumiques et $\iint Q^S$ les intégrales surfaciques sur Σ .

évalue les sources quadripolaires et de méthodes d'extrapolation des ondes lorsqu'on utilise une surface perméable sans terme quadripolaire (voir tableau 4.1).

4.2 L'approche analogique

4.2.1 L'analogie de Lighthill

4.2.1.1 L'équation de Lighthill

La théorie du bruit d'origine aérodynamique de Lighthill¹⁵⁷ consiste à établir une analogie entre un problème régi par les équations générales de la mécanique des fluides et la théorie classique de l'acoustique. On remplace ainsi la résolution des équations de Navier-Stokes non linéaires par la solution d'une équation d'onde inhomogène.

Les équations de départ sont les équations exprimant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans un fluide compressible :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij})}{\partial x_j} = 0 \quad ,$$

s'il n'y a ni source de masse ni force extérieure agissant sur le fluide. La première étape du raisonnement consiste à combiner ces deux équations pour faire apparaître une équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_\infty^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.1)$$

où l'on a introduit la vitesse du son c_∞ et le tenseur de Lighthill défini par :

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + (p - c_\infty^2 \rho) \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (4.2)$$

L'équation (4.1), gouvernant les fluctuations de masse volumique dans le fluide réel, peut être comparée à celle qui régit un milieu acoustique uniforme au repos. En effet, dans un tel milieu de masse volumique ρ_∞ et de vitesse du son c_∞ , uniformes, les fluctuations de masse volumique $\rho_a = \rho - \rho_\infty$ satisfont une équation d'onde homogène :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_\infty^2 \nabla^2 \right\} \rho_a = 0$$

Dans ce milieu uniforme, la célérité du son relie les fluctuations de pression aux fluctuations de masse volumique [†] :

$$p_a = c_\infty^2 \rho_a \quad \text{d'où} \quad \square^2 p_a \equiv \left\{ \nabla^2 - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} p_a = 0$$

On peut noter que l'équation de Lighthill est exacte puisqu'il s'agit d'une recombinaison des équations de la mécanique des fluides sans hypothèse. Cependant, elle n'est pas soluble puisqu'on ne dispose plus que d'une seule équation pour cinq inconnues. C'est donc l'interprétation qui en est faite qui rend la *manœuvre brillante*. L'idée clé est de considérer que l'observateur est entouré par un milieu uniforme et au repos, le champ acoustique étant défini comme les perturbations linéaires de ρ dans ce milieu. On distingue de ce fait une **région source** bien localisée, où l'écoulement génère le son de façon complexe et non linéaire, et un **domaine observateur**, dominé par un phénomène de propagation linéaire. Les fluctuations de masse volumique ρ_a dans le domaine observateur sont alors solution d'une équation des ondes inhomogène dans laquelle le membre de gauche est une équation d'onde classique et le membre de droite correspond à une distribution de forces externes agissant sur le milieu acoustique fictif comme des sources.

Le milieu observateur étant uniforme, caractérisé par les valeurs constantes p_∞ de la pression et ρ_∞ de la masse volumique, on peut remplacer p et ρ dans (4.1) par $p - p_\infty$ et $\rho - \rho_\infty$. De plus, en dehors de la région source V_0 , les fluctuations de masse volumique sont purement acoustiques, $\rho_a = \rho - \rho_\infty$, et $T_{ij} = 0$. On a donc :

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} - c_\infty^2 \nabla^2 \rho_a = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{ou} \quad \nabla^2 p_a - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.3)$$

avec :

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + ((p - p_\infty) - c_\infty^2 (\rho - \rho_\infty)) \delta_{ij} - \tau_{ij} = \rho u_i u_j + (p - c_\infty^2 \rho) \delta_{ij} - \tau_{ij}$$

[†]Attention, certains auteurs utilisent la convention de signe opposée pour la définition de l'opérateur d'Alembertien \square^2 . Ce choix se répercute sur le signe de la fonction de Green.

A ce stade, il ne s'agit plus d'une équation implicite pour la fluctuation de masse volumique car les fluctuations des membres de droite et de gauche sont *supposées* indépendantes. A gauche, c'est la fluctuation acoustique ρ_a et, à droite, $\rho' = \rho - \rho_\infty$ que l'on peut décomposer en $\rho' = \rho_a + \rho_t + \rho_0 - \rho_\infty$, où ρ_a , ρ_t , ρ_0 et ρ_∞ sont respectivement la composante acoustique, la fluctuation aérodynamique, la moyenne temporelle locale dans le volume source V_0 et la valeur à l'infini (c'est-à-dire celle de la zone d'observation). Cette hypothèse d'indépendance suppose que le ρ_a du milieu observateur n'influe pas sur le ρ' source, ce qui semble raisonnable s'il n'y a pas de réflecteur présent. C'est ce qui fait dire à Lighthill que l'on considère le cas où il n'y a pas de rétroaction acoustique sur le terme source[†]. Ceci n'exclut évidemment pas qu'il y ait une rétroaction acoustique à l'intérieur même de la région source. Cette rétroaction gouverne en effet de nombreux écoulements en présence d'un obstacle. Pour traiter ces configurations, il suffit que la région où s'effectue cette influence soit incluse dans le domaine source.

Analysons maintenant la nature des termes sources du membre de droite de (4.3). Ces termes contiennent une dérivée spatiale d'ordre 2 et représentent donc une distribution de quadripôles dans la théorie classique de l'acoustique.^{44,73} Un quadripôle est obtenu en prenant la limite de deux dipôles identiques, de signes opposés et adjacents. On distingue alors deux directions privilégiées, l'une est l'axe propre des dipôles et l'autre correspond à la position relative des deux dipôles. Lorsque ces deux axes coïncident, on parle de quadripôle *longitudinal* et lorsqu'ils sont perpendiculaires, il s'agit d'un quadripôle *latéral* (fig. 4.1).

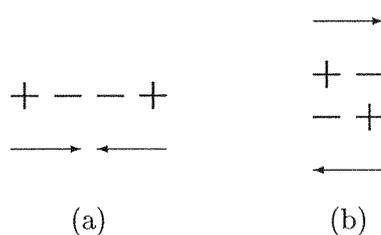


Figure 4.1: (a), quadripôle longitudinal; (b), quadripôle latéral

Ainsi, le membre de droite de (4.3) est composé de trois quadripôles longitudinaux T_{11} , T_{22} et T_{33} et de trois quadripôles latéraux $2T_{12}$, $2T_{13}$ et $2T_{23}$. Cependant cette interprétation ne reflète pas forcément une réalité physique car le champ acoustique résultant est une combinaison complexe de ces quadripôles (par le biais d'interférences entre les signaux acoustiques issus de chaque composante par exemple). Cet aspect est également illustré par l'équation de Doak,^{53,304} qui choisit de former l'équation des ondes sur les fluctuations de pression en effectuant la même recombinaison que Lighthill mais en additionnant le terme $(1/c_\infty^2)(\partial^2 p' / \partial t^2)$ dans chaque membre

[†]voir Lighthill,¹⁵⁷ page 565.

plutôt que $-c_\infty^2(\partial^2 \rho' / \partial x_i^2)$. Il vient alors :

$$\frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho u_i u_j - \tau_{ij}) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{p'}{c_\infty^2} - \rho' \right) \quad (4.4)$$

Le terme en $((p'/c_\infty^2) - \rho')$ représente donc une injection volumique dans l'équation de Doak (4.4), correspondant à un rayonnement monopolaire et posséderait donc une nature différente de celle déduite de l'écriture de Lighthill. Ceci illustre l'ambiguïté d'une interprétation physique qui essaierait d'effectuer une hiérarchie entre les sources sur la base de leur écriture multipolaire.

4.2.1.2 Les fonctions de Green en espace libre

Afin de résoudre l'équation de Lighthill, on utilise le formalisme des fonctions de Green qui permet d'exprimer la solution d'une équation d'onde inhomogène sous forme d'une équation intégrale.

La fonction de Green en espace libre $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)$ est la réponse, à la position \mathbf{x} et au temps t , à une impulsion provenant de \mathbf{y} au temps τ . On la définit comme la solution de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) \quad (4.5)$$

où δ est la fonction généralisée Dirac qui possède la propriété :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \delta(x - x_0) dx = \psi(x_0)$$

Il s'agit donc d'une solution d'une équation d'onde (4.5) avec l'inhomogénéité concentrée en un point dans l'espace et dans le temps. Elle doit satisfaire une condition de causalité car aucune réponse n'a pu atteindre l'observateur avant que l'impulsion ne soit émise :

$$G = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad \text{pour} \quad t \leq \tau \quad (4.6)$$

Une autre propriété importante de la fonction de Green est le principe de réciprocité^{199,235} :

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) = G(\mathbf{x}, -t | \mathbf{y}, -\tau)$$

- *Fonction de Green 3-D dans le domaine temporel*

La solution de l'équation des ondes tridimensionnelle (4.5) s'écrit :

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) = -\frac{\delta(g)}{4\pi r} \quad (4.7)$$

où $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ et $g(\tau) = \tau - t + \frac{r}{c_\infty}$.

- *Fonction de Green 3-D dans le domaine spectral*

On définit la transformée de Fourier temporelle[†],

$$\mathcal{F}[\phi(\mathbf{x}, t)] = \phi(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.8)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi(\mathbf{x}, \omega)] = \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{x}, \omega) e^{+i\omega t} d\omega \quad (4.9)$$

L'équation des ondes (4.5) devient une équation de Helmholtz avec l'inhomogénéité concentrée en un point :

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.10)$$

La fonction de Green 3-D solution de (4.10) s'écrit^{44,123} :

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) = -\frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} \quad (4.11)$$

où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation, f est la fréquence et $k = \omega/c_\infty$ le nombre d'onde.

- *Fonction de Green 2-D dans le domaine temporel*

En 2-D, la fonction Dirac qui apparaît dans la solution est remplacée par une fonction de Heaviside[†] :

$$G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) = -\frac{c_\infty H((t - \tau) - r/c_\infty)}{2\pi \sqrt{c_\infty^2 (t - \tau)^2 - r^2}} \quad (4.12)$$

où $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. La fonction de Heaviside est la fonction généralisée définie par :

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

- *Fonction de Green 2-D dans le domaine spectral*

Avec la convention de signes adoptée pour la transformation[†], la fonction de Green bidimensionnelle spectrale, solution de (4.10) est :

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (4.14)$$

où $H_0^{(2)}$ est la fonction de Hankel de 2^{ème} espèce, d'ordre 0.

[†]On n'utilise pas une notation particulière pour la fonction transformée de Fourier mais, à la place, on indique à chaque fois les arguments appropriés de la fonction. La convention de signe de la transformation varie d'un auteur à l'autre et son choix détermine les développements analytiques comme, par exemple, l'espèce de la fonction de Hankel en 2-D et le signe du facteur dans l'exponentielle en 3-D.

[†]L'écriture de la fonction de Green dépend de l'équation des ondes dont on cherche une solution. Nous avons choisi $\Delta G - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau)$. Pilon²²³ ou Guo⁹⁶ ont choisi l'opposé $\frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau)$, ce qui change le signe de la fonction de Green. Crighton,⁴⁴ Lockard¹⁶² ou Bogey *et al.*²³ cherchent la solution de $\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c_\infty^2 \Delta G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau)$, qui est l'équation des ondes vérifiée par la masse volumique. La fonction de Green (2.11) de Pilon²²³ est erronée.

[†]Il s'agit de la même convention de signe que Lockard¹⁶² (formules (14),(15) p.901) qui conduit aux fonctions de Hankel de 2^{ème} espèce. Guo⁹⁶ (formule (2.11) p.206), Crighton⁴⁴ (formule (A.17) p.92) ou Howe¹²³ (formule (1.7.10) p.37) utilisent la convention opposée et aboutissent à des fonctions de Hankel de 1^{ère} espèce et de signe opposé. Attention, la transformée donnée par Pilon²²³ (p.11) est incompatible avec l'espèce des fonctions de Hankel qu'il utilise.

4.2.1.3 Les formulations intégrales

Elles sont obtenues par convolution de la fonction de Green avec le terme source issu de (4.3) :

$$p_a = c_\infty^2 \rho_a = -G * \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$$

Les formulations spatiales

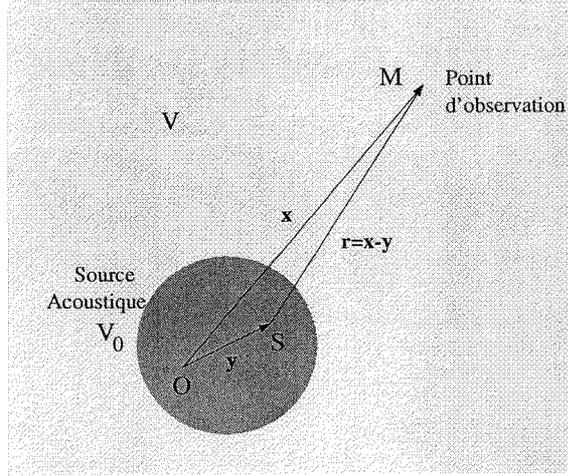


Figure 4.2: Notations utilisées pour l'analogie de Lighthill.

En notant $\mathbf{x} = (x_i)^t$ un point observateur et $\mathbf{y} = (y_i)^t$ un point source, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ la distance entre ces points (voir fig.4.2), le produit de convolution avec la fonction de Green 3-D (4.7) s'écrit :

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}(\mathbf{y}, \tau) \delta\left(\tau - t + \frac{r}{c_\infty}\right) dy d\tau$$

En utilisant les propriétés de la fonction Dirac, on exprime l'intégration temporelle pour obtenir une équation aux potentiels retardés :

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty}\right) dy \quad (4.15)$$

Cette expression est la *formulation spatiale avec dérivées par rapport à la source*.

On utilise maintenant les propriétés du produit de convolution, noté $*$, dans le volume V_0 fermé par une surface Σ_0 , sur laquelle $T_{ij} \equiv 0$:

$$G * \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} * T_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (G * T_{ij}) \quad ,$$

qui permet de sortir les dérivées de l'intégrale :

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{1}{r} T_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty}\right) dy \quad (4.16)$$

C'est la *formulation spatiale avec dérivées par rapport aux coordonnées du point d'observation*.

Ces deux formulations montrent aussi de façon explicite que le champ rayonné à une grande distance (comparée à la longueur d'onde acoustique) dépend du fait que les rayons acoustiques qui frappent le point d'observation simultanément ne sont pas émis de façon simultanée. Cette propriété résulte directement de la prise en compte des temps retardés dans les termes sources. En effet, si l'influence de ces temps retardés peut être négligeable entre les points source (au moins pour un nombre de Mach $M \ll 1$), une petite erreur sur leur évaluation peut changer considérablement le champ lointain. D'ailleurs, l'approximation faite en négligeant leur effet pour calculer le champ rayonné n'est pas correcte puisque :

$$\iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \left(\mathbf{y}, t - \frac{x}{c_\infty} \right) d\mathbf{y} = 0 \quad !$$

Les formulations temporelles

Elles sont obtenues en appliquant la transformation suivante^{63,52} :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\delta(g)}{r} \right]_{\tau^*} = -\frac{1}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{r_i \delta(g)}{r^2} \right]_{\tau^*} - \frac{r_i \delta(g)}{r^3} \quad (4.17)$$

où l'indice τ^* indique que les grandeurs sont évaluées au temps retardé $\tau^* = t - r/c_\infty$. L'expression (4.16) devient alors :

$$\begin{aligned} 4\pi p_a(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \left[\frac{r_i r_j}{r^3} T_{ij} \right]_{\tau^*} d\mathbf{y} + \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \left[\left(\frac{3r_i r_j}{r^4} - \frac{\delta_{ij}}{r^2} \right) T_{ij} \right]_{\tau^*} d\mathbf{y} \\ & + \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \left[\left(\frac{3r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) T_{ij} \right]_{\tau^*} d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Il s'agit de la *formulation temporelle avec dérivées par rapport au temps de l'observateur*. Certains auteurs^{52,27} l'écrivent sous une forme raccourcie en introduisant $T_{rr} = T_{ij} r_i r_j / r^2$ et $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$.

$$4\pi p_a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \left[\frac{T_{rr}}{r} \right]_{\tau^*} d\mathbf{y} + \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \left[\frac{3T_{rr} - T_{ii}}{r^2} \right]_{\tau^*} d\mathbf{y} + \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \left[\frac{3T_{rr} - T_{ii}}{r^3} \right]_{\tau^*} d\mathbf{y} \quad (4.19)$$

Si on suppose que le point d'observation se situe en champ lointain *géométrique* ($r \gg 1$ soit $|x| \gg |y|$), on ne conserve que la contribution $\mathcal{O}(1/r)$; les autres termes en $\mathcal{O}(1/r^2)$ ou $\mathcal{O}(1/r^3)$ interviennent dans le champ proche et décroissent très rapidement. On obtient alors une *formulation temporelle* de l'intégrale de Lighthill simplifiée, valable en champ lointain *géométrique* :

$$p_a(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{4\pi c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{r_i r_j}{r^3} T_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) d\mathbf{y} \quad (4.20)$$

Si, de plus, on suppose que le point d'observation se situe en champ lointain *acoustique*, c'est-à-dire $\lambda_0 \gg l_0$, où l_0 est une dimension caractéristique des structures aérodynamiques sources et λ_0 la longueur d'onde acoustique principale, on a :

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \simeq |\mathbf{x}| - \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{x^2} \simeq |\mathbf{x}| = x \quad \text{si } |x| \gg |y|$$

$$\text{et : } \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \simeq \frac{1}{c_\infty} \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial t}$$

L'équation (4.16) devient :

$$p_a(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{4\pi c_\infty^2} \frac{x_i x_j}{x^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} T_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) d\mathbf{y} \quad (4.21)$$

Cette nouvelle formulation temporelle, encore plus approximée, s'appuie donc sur deux hypothèses de champ lointain :

- | | | |
|------|---------------------------------|----------------------------|
| (i) | $ \mathbf{x} \gg \mathbf{y} $ | champ lointain géométrique |
| (ii) | $\lambda_0 \gg l_0$ | champ lointain acoustique |

La condition (ii) correspond à l'hypothèse de compacité. Cette formulation est employée dans les développements analytiques car le facteur de directivité $x_i x_j / x^3$ est hors de l'intégrale. Cependant, elle n'est valable que si la région source est *acoustiquement compacte*[†].

Notons enfin que, puisque p_a , dans le champ rayonné donné par (4.20), est une dérivée par rapport au temps, sa moyenne temporelle est nulle en tout point de la région source. Cette formulation utilise donc implicitement un terme source centré $T_{ij}(\mathbf{y}, \tau) - (T_{ij})_0(\mathbf{y})$, où $()_0$ désigne la moyenne temporelle. Comme le montre Bogey sur le cas de la couche de mélange[†], la composante moyenne $(T_{ij})_0$ peut être du même ordre de grandeur que sa partie centrée $T_{ij} - (T_{ij})_0$, mais le rayonnement qu'elle induit décroît plus rapidement et sa contribution devient négligeable en champ lointain. En effet, la contribution p_{moy} induite par $(T_{ij})_0$ s'écrit :

$$p_{moy}(\mathbf{x}) \simeq \frac{1}{4\pi c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\left(\frac{1}{x} \right) \iiint_{V_0(\mathbf{y})} (T_{ij})_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right]$$

Elle décroît donc selon une loi en $1/r^3$ lorsqu'on s'éloigne de la source alors que la partie instantanée suit une loi en $1/r$ en 3-D.

[†]Attention, tout comme l'hypothèse de champ lointain a deux significations à ne pas confondre ((i) et (ii)), l'hypothèse de compacité peut intervenir à deux niveaux : l'hypothèse de source *acoustique* compacte est identique à l'hypothèse de champ lointain *acoustique* et l'hypothèse de région source *aérodynamique* compacte signifie que la vorticité est confinée dans une région de dimension L très inférieure à la longueur d'onde caractéristique λ_0 . Dans le cas contraire, on parle de région source étendue ou *extensive source region* en anglais.

[†]voir Bogey²¹ p.75-76 et p.109-111.

On peut également écrire une *formulation temporelle avec dérivées par rapport au temps de la source*. En effet, pour un terme source $Q(\mathbf{y}, \tau)$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}[Q(\mathbf{y}, \tau)]_{\tau^*} = \left[\frac{\partial Q(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau^*}$$

d'où

$$\begin{aligned} p_a(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \left[\frac{r_i r_j}{r^3} \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial \tau^2} + \left(\frac{3r_i r_j}{r^4} - \frac{\delta_{ij}}{r^2} \right) \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \tau} \right. \\ & \left. + \left(\frac{3r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) T_{ij} \right] \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Les formulations spectrales

On s'intéresse ici au champ rayonné par un écoulement à une fréquence particulière $\omega/2\pi$ en introduisant la transformée de Fourier en temps définie par (4.8). Ainsi, l'équation des ondes inhomogène (4.3) est transformée en une équation de Helmholtz inhomogène :

$$-\omega^2 \rho_a(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} - c_\infty^2 \nabla^2 \rho_a(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} = \frac{\partial^2 T_{ij}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_i \partial x_j} e^{i\omega t}$$

avec $\omega = 2\pi f$. En posant $k = \omega/c_\infty$, il vient :

$$(\nabla^2 + k^2) p_a(\mathbf{x}, \omega) = - \frac{\partial^2 T_{ij}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.23)$$

On a simplifié les deux membres par $e^{i\omega t}$, ce qui évite l'introduction des temps retardés par la suite. Pour résoudre cette équation de Helmholtz inhomogène, on utilise la fonction de Green en espace libre formulée dans l'espace spectral. En 3-D, elle est donnée par (4.11) et conduit à la formulation intégrale suivante[†] :

$$4\pi p_a(\mathbf{x}, \omega) = \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{\exp(-ikr)}{r} \frac{\partial^2 T_{ij}(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} d\mathbf{y} \quad (4.24)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{\exp(-ikr)}{r} T_{ij}(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \quad (4.25)$$

$$= \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left(\frac{\exp(-ikr)}{r} \right) T_{ij}(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \quad (4.26)$$

en utilisant les propriétés du produit de convolution :

$$A * B' = A' * B = (A * B)'$$

La dernière formulation (4.26) permet d'appliquer la double dérivation à la fonction de Green plutôt qu'aux sources quadripolaires. Or l'évaluation des dérivées de T_{ij} peut conduire à des

[†]Cette formulation est donnée par Crighton.⁴⁴ Il faut cependant changer le signe des formulations 3-D p.43 et 2-D p.45. Il faut également multiplier la formulation 2-D par 4π .

erreurs d'évaluation numérique alors que les dérivées de G peuvent être formées de façon analytique exacte (voir annexe §4.4.1) :

$$4\pi p_a(\mathbf{x}, \omega) = \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \left[k^2 \frac{r_i r_j}{r^3} + ik \left(\frac{3r_i r_j}{r^4} - \frac{\delta_{ij}}{r^2} \right) + \left(\frac{3r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) \right] \exp(-ikr) T_{ij}(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \quad (4.27)$$

On revient ensuite dans l'espace temporel en effectuant la transformée de Fourier inverse :

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_a(\mathbf{x}, \omega) e^{+i\omega t} d\omega$$

Cette écriture dans l'espace spectral est particulièrement intéressante d'un point de vue physique car elle permet de bien voir la structure en ondes de la solution à travers la phase de $\exp(i(\omega t - kr))$ et le facteur de décroissance sphérique $1/r$.

L'autre avantage de l'espace spectral est que la fonction de Green possède la même forme pour toutes les équations d'onde. Ainsi, la transposition de l'analogie en deux dimensions s'appuie sur la fonction de Green 2-D dans l'espace de Fourier (4.14) et fournit de la même façon :

$$p_a(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{i}{4} \iint_{S_0(\mathbf{y})} H_0^{(2)}(kr) \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y}$$

ou

$$p_a(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{i}{4} \iint_{S_0(\mathbf{y})} \frac{\partial^2 H_0^{(2)}(kr)}{\partial y_i \partial y_j} T_{ij}(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \quad (4.28)$$

Comme pour (4.26), on développe analytiquement les dérivées de la fonction de Green 2-D, en utilisant les propriétés de la fonction de Hankel[†] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_1 \partial y_2} = -\frac{ik^2}{4} \frac{r_1 r_2}{r^2} \left[H_0^{(2)}(kr) - \frac{2}{kr} H_1^{(2)}(kr) \right] \\ \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_1^2} = -\frac{ik^2}{4} \left[\frac{r_1^2}{r^2} H_0^{(2)}(kr) - \frac{1}{kr} \frac{r_1^2 - r_2^2}{r^2} H_1^{(2)}(kr) \right] \\ \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_2^2} = -\frac{ik^2}{4} \left[\frac{r_2^2}{r^2} H_0^{(2)}(kr) - \frac{1}{kr} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r^2} H_1^{(2)}(kr) \right] \end{array} \right. \quad (4.29)$$

En les écrivant sous forme condensée (voir annexe §4.4.1), la *formulation spectrale 2-D* de l'analogie de Lighthill s'écrit :

$$p_a(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i}{4} \iint_{S_0(\mathbf{y})} \left[k^2 \frac{r_i r_j}{r^2} H_0^{(2)}(kr) - k \left(\frac{2r_i r_j}{r^2} - \frac{\delta_{ij}}{r} \right) H_1^{(2)}(kr) \right] T_{ij}(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \quad (4.30)$$

[†]La relation de récurrence s'écrit¹ : $[\mathcal{C}_\nu(z)]' = \mathcal{C}_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} \mathcal{C}_\nu(z)$ avec $\mathcal{C} = \{J, Y, H^{(1)}, H^{(2)}\}$ et ν l'ordre de la fonction. Ainsi $[H_0^{(2)}(z)]' = -H_1^{(2)}(z)$ et $[H_1^{(2)}(z)]' = H_0^{(2)}(z) - \frac{1}{z} H_1^{(2)}(z)$

ou :

$$p_a(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{i}{4} \iint_{S_0(\mathbf{y})} \left[k^2 \frac{r_i r_j}{r^2} H_2^{(2)}(kr) - k \frac{\delta_{ij}}{r} H_1^{(2)}(kr) \right] T_{ij}(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \quad (4.31)$$

C'est la formulation (4.30) qui sera utilisée pour la résolution de problèmes 2-D car elle est plus facilement calculable que la formulation bidimensionnelle dans l'espace temporel qui fait intervenir une fonction de Green (4.12), basée sur une fonction de Heaviside. En effet, la solution s'écrit alors :

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 T_{ij}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial y_i \partial y_j} \frac{c_\infty H((t - \tau) - r/c_\infty)}{2\pi \sqrt{c_\infty^2 (t - \tau)^2 - r^2}} d\mathbf{y} d\tau$$

La double intégration spatiale sur tout l'espace bidimensionnel (avec $d\mathbf{y} = dy_1 dy_2$) peut être réduite à la surface source $S_0(\mathbf{y})$. Pour l'intégration temporelle, la fonction de Heaviside permet de remplacer la limite supérieure par une valeur finie τ_0 mais la limite basse reste toujours infinie.

En champ lointain *géométrique* ($kr \gg 1$), on peut remplacer $H_0^{(2)}$ par son équivalent :

$$H_0^{(2)}(kr) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-ikr + i\frac{\pi}{4}} \quad \text{pour } kr \geq 4 \quad (4.32)$$

On remarque alors que, pour chacune des dérivées du système (4.29), le premier terme, facteur de $H_0^{(2)}$, possède une décroissance en $1/r^{1/2}$ alors que le deuxième terme, facteur de $H_1^{(2)}$, va décroître en $1/r^{3/2}$. Comme pour le cas de la formulation temporelle, on peut négliger l'influence des termes en $\mathcal{O}(1/r^{3/2})$ en *champ géométrique lointain* dans l'expression (4.30) :

$$p_a(\mathbf{x}, \omega) \simeq \frac{ik^2}{4} \iint_{S_0(\mathbf{y})} \frac{r_i r_j}{r^2} H_0^{(2)}(kr) T_{ij}(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \quad (4.33)$$

ou dans l'expression (4.31)[†] :

$$p_a(\mathbf{x}, \omega) \simeq -\frac{ik^2}{4} \iint_{S_0(\mathbf{y})} \frac{r_i r_j}{r^2} H_2^{(2)}(kr) T_{ij}(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \quad (4.34)$$

Si l'on compare l'écriture asymptotique (4.32) de la fonction de Green 2-D à la fonction de Green 3-D dans l'espace de Fourier, on constate que le rayonnement 2-D a le même comportement que le rayonnement 3-D avec une avance de phase de $\pi/4$ et un facteur d'expansion cylindrique en $1/\sqrt{r}$ plutôt que sphérique en $1/r$.

Dans ce qui précède, la transformée de Fourier monodimensionnelle ne s'applique qu'à la coordonnée temporelle. On peut également introduire la transformée de Fourier en espace et en temps :

$$\phi(\mathbf{k}, \omega) = \int \phi(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} d\mathbf{x} dt$$

et analyser le résultat dans l'espace (\mathbf{k}, ω) .^{44,10}

[†]Une autre façon d'aboutir à ce résultat est donnée par Mitchell *et al.*,¹⁸⁶ Appendix A, page 196.

4.2.1.4 Analyse des termes sources

Le terme source (4.2) regroupe trois contributions :

Les tensions de Reynolds $\rho u_i u_j$

Cette source est associée aux fluctuations des tensions de Reynolds dues à la turbulence ou plutôt à la vorticité, comme le montre la théorie du *vortex sound*. En introduisant la décomposition symbolique $u_i = u_{i0} + u_{it} + u_{ia}$, où u_{i0} , u_{it} et u_{ia} sont respectivement les composantes moyenne, turbulente et acoustique, le terme source s'écrit :

$$\rho u_i u_j \simeq \rho_\infty (u_{it} u_{jt} + u_{it} u_{j0} + u_{i0} u_{jt} + u_{ia} u_{ja} + u_{ia} u_{j0} + u_{i0} u_{ja} + u_{ia} u_{jt} + u_{it} u_{ja}) + \rho' (u_{i0} u_{j0} + \dots)$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur. Ce terme contient donc non seulement les interactions turbulence-turbulence mais aussi les interactions entre l'écoulement moyen et la turbulence ainsi que les interactions acoustique-acoustique, acoustique-écoulement moyen (effets de convection ou de réfraction) et acoustique-turbulence beaucoup plus faibles. Une petite erreur sur l'expression des deux premiers termes (interactions turbulence-turbulence et turbulence-écoulement moyen) peut donc masquer totalement l'effet des composantes acoustiques.

Les contraintes visqueuses τ_{ij}

Ce terme représente la production de bruit par les fluctuations du tenseur de Navier τ_{ij} . En l'absence de parois, on peut négliger sa contribution même si les effets visqueux peuvent avoir une répercussion sur les autres termes[†].

L'entropie $(p'/c_\infty^2) - \rho'$

Cette composante est associée à la production de bruit due à la différence entre les vitesses du son c_0 dans l'écoulement et c_∞ dans le milieu observateur et aux changements de l'entropie du fluide par des phénomènes de combustion ou de transferts thermiques. La région source est alors un milieu inhomogène dans lequel la masse volumique moyenne varie. En suivant le raisonnement de Howe^{123†}, on introduit les moyennes temporelles sur V_0 en suivant l'écoulement moyen, ρ_0 pour la masse volumique locale et c_0 pour la célérité du son locale :

$$(p - p_\infty) = c_0^2 (\rho - \rho_0) \quad \text{avec} \quad \frac{D\rho_0}{Dt} = 0$$

[†] voir la discussion de Kambe¹³⁴ ou Obermeier.²⁰⁸

[†] paragraphe 2.1.3 p.105 de réf.¹²³

Le terme source devient (Morfey,¹⁹⁴ 1973) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{p - p_\infty}{c_0^2} - (\rho - \rho_0) \right\} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ (p - p_\infty) \left(\frac{1}{c_\infty^2} - \frac{1}{c_0^2} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\rho_0 - \rho_\infty) \frac{Du_j}{Dt} \right\} \\ &\quad - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \{ (\rho_0 - \rho_\infty) u_i u_j \} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\rho_0 - \rho_\infty) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ u_j (\rho_0 - \rho_\infty) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\} \end{aligned}$$

On simplifie en utilisant les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse pour former la nouvelle équation d'onde :

$$\square^2 \rho' \simeq \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho_\infty u_i u_j) + c_\infty \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{1}{\rho_\infty} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\} + c_\infty^2 \rho_\infty \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\rho_\infty c_\infty^2} - \frac{1}{\rho c_0^2} \right)$$

où l'on a négligé les contraintes visqueuses et les termes d'ordre supérieur. Si les sources sont acoustiquement compactes, le premier terme est de nature quadripolaire, équivalent à une puissance $l^2 \rho_\infty U^3 M^5$ en notant l une échelle de longueur caractéristique, U une échelle de vitesse et M le nombre de Mach. Le second correspond à un dipôle proportionnel aux variations de température :

$$\text{puissance du dipôle} \sim l^2 \left(\frac{\rho - \rho_\infty}{\rho} \right)^2 \rho_\infty U^3 M^3 \sim l^2 \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 \rho_\infty U^3 M^3$$

Pour un écoulement à bas nombre de Mach, ce dipôle n'est donc significatif que si les fluctuations de masse volumique⁷⁷ ou de température¹³⁸ ΔT sont importantes. Le troisième terme, de type monopolaire, est nul pour un gaz parfait et ne prend de l'importance que dans les cas où la compressibilité à l'intérieur de la zone source est très différente de celle à l'extérieur (c'est le cas, par exemple, pour le bruit de bulles dans l'eau^{44,74}).

S'il n'y a pas de fortes inhomogénéités de masse volumique dans la région source, le tenseur de Lighthill se réduit donc aux tensions de Reynolds $\rho_\infty u_i u_j$. C'est l'hypothèse courante pour la plupart des applications, notamment pour les jets froids.¹⁵⁷

4.2.1.5 Limites et applications de l'analogie

Rappelons les deux grandes hypothèses de l'analogie de Lighthill :

- (i) $T_{ij} = 0$ dans la région où l'on veut prédire le bruit. Cela revient à dire que le milieu acoustique fictif, uniforme et au repos, correspond bien à une région du fluide réel en dehors des sources.
- (ii) Il existe un moyen de calculer T_{ij} indépendamment de l'équation (4.3).

Ces deux conditions restreignent très fortement le champ d'application de l'analogie et ne peuvent souvent qu'être approchées. La première hypothèse (i) est une bonne approximation pour une grande classe d'écoulements, qui inclut notamment les jets. Elle est cependant mise

en défaut pour des jets avec un *co-flow* ou pour les couches de mélange. La seconde condition (ii) est plus difficile à remplir. La première méthode consiste à déterminer T_{ij} de façon analytique en utilisant des solutions des équations de Navier-Stokes. Néanmoins, de telles solutions ne sont connues que dans des cas très simples[†]. La deuxième possibilité est de déterminer T_{ij} expérimentalement. Mais il paraît difficile de mesurer T_{ij} sur tout le domaine source sans le perturber. Cette approche n'est donc pas réaliste pour évaluer l'intégrale de volume. La troisième solution consiste à calculer T_{ij} numériquement, ce qui semble le meilleur choix dans les cas où l'on est capable de simuler le champ aérodynamique. Il faut toutefois disposer d'informations instationnaires suffisamment précises. Pour cela, on peut réaliser une simulation par DNS (étude du rayonnement d'une turbulence homogène et isotrope par Witkowska *et al.*,³⁰⁸ de jets axisymétriques excités et de deux tourbillons corotatifs par Mitchell, Lele et Moin,^{186,187} d'un jet rond tridimensionnel par Colonius et Freund⁴¹), par LES (rayonnement d'une couche de mélange ou d'un jet tridimensionnel excité par Bogey *et al.*,²¹⁻²³ d'un jet rectangulaire par Séror²⁶¹ ou d'un jet supersonique excité par Shih *et al.*²⁶⁹) ou en utilisant les RANS instationnaires (rayonnement d'un jet plan par Bastin¹⁰).

4.2.2 Extension de l'analogie à un milieu observateur en mouvement

Une des faiblesses de l'analogie de Lighthill vient du fait qu'elle est limitée au cas d'un milieu observateur uniforme et au repos. Si l'on cherche à inclure les effets d'un écoulement moyen quelconque sur la région d'observation, il faut adopter un modèle de propagation plus général que l'équation des ondes classique. Ce nouvel opérateur de propagation doit permettre de tenir compte des effets de convection, de réfraction, de diffusion ou de diffraction des ondes acoustiques. La convection des fronts d'onde résulte de la composante stationnaire moyenne (cas d'un écoulement uniforme par exemple). La présence de gradients de vitesse (caractère cisailé de l'écoulement par exemple) va introduire des effets de réfraction. La composante instationnaire du champ moyen (écoulement turbulent par exemple) induit quant à elle une réfraction et une diffusion de l'acoustique. Enfin, des inhomogénéités peuvent conférer un caractère diffractant au milieu observateur. Cependant, l'analogie de Lighthill exclut la présence d'objets diffractants ou de réflecteurs. On verra plus tard comment en tenir compte.

Il est important de bien distinguer les modifications du champ acoustique par l'écoulement moyen dans la région source et dans la région d'observation. Les premiers sont **déjà contenus** dans l'expression du tenseur de Lighthill et les seconds nécessitent une modification de

[†]On peut renvoyer le lecteur à l'article de Crighton⁴⁴ de 1975 ou aux synthèses de Ffowcs-Williams⁷⁴ en 1977 et Goldstein⁹³ en 1984 qui détaillent de nombreuses applications analytiques.

l'opérateur de propagation.

4.2.2.1 Prise en compte d'un écoulement uniforme

Il existe deux possibilités pour prendre en compte l'effet d'un écoulement dans le milieu d'observation. Soit on considère que les sources sont mobiles par rapport à l'observateur fixe dans un milieu au repos et on effectue le calcul en coordonnées Lagrangiennes sur les sources; soit on considère que les sources sont fixes et que l'observateur, fixe, se trouve dans un milieu en mouvement pour lequel on écrit une équation des ondes convectée.

Utilisation des coordonnées Lagrangiennes

Lighthill,¹⁵⁷ dès 1952, propose de tenir compte d'une vitesse uniforme subsonique \mathbf{U}_∞ dans le milieu observateur en introduisant un repère mobile, c'est-à-dire une représentation Lagrangienne du tenseur T_{ij} :

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} + U_\infty \frac{r}{c_\infty} = \mathbf{y} + \mathbf{M}|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{U}_\infty}{c_\infty}$$

On a alors $d\mathbf{z} = d\mathbf{y} \left(1 - \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = d\mathbf{y} (1 - M_r)$ et l'analogie s'écrit :

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \tilde{T}_{ij} \left(\mathbf{z}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \frac{d\mathbf{z}}{r - \mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \quad (4.35)$$

La formulation temporelle en champ lointain géométrique devient :

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{r_i r_j}{r^3 (1 - M_r)^3} \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} T_{ij} \left(\mathbf{z}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) d\mathbf{z} \quad (4.36)$$

Si l'on note θ l'angle entre l'observateur et la direction de propagation, l'amplitude des fluctuations de masse volumique est multipliée par un facteur de directivité $(1 - M \cos \theta)^{-3}$, dû au mouvement des axes. Lighthill a tracé l'influence de ce facteur sur les distributions de quadripôles longitudinaux (fig. 4.3(a)) et latéraux (fig. 4.3(b)). On constate que la convection induit une directivité marquée vers l'amont[†].

Par ce changement de repère, on a reporté les effets de convection dans le milieu observateur sur les termes sources, considérant que le volume V_0 est en translation uniforme \mathbf{U}_∞ dans un milieu au repos. Pour une application numérique, la difficulté d'une telle approche réside dans le fait qu'il faille disposer de la représentation Lagrangienne des sources. Pour cela, les interpolations nécessaires risquent de générer des erreurs numériques notamment pour les grands nombres de Mach ou lorsque la source n'est pas compacte.

[†]On retrouvera ce résultat pour le rayonnement induit par un écoulement affleurant une cavité.

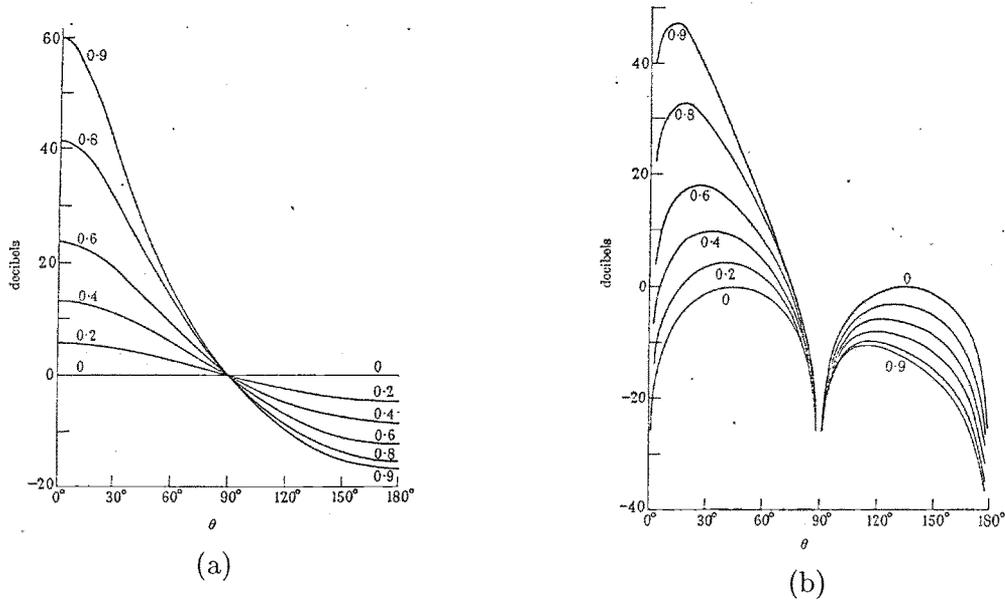


Figure 4.3: Changement de la directivité d'un quadripôle résultant d'une translation dans la direction de l'un de ses axes. Le nombre de Mach est indiqué au dessus de chaque courbe et l'angle θ est mesuré depuis l'amont de l'axe de translation : (a) quadripôle longitudinal; (b) quadripôle latéral (d'après Lighthill¹⁵⁷).

Utilisation d'une équation d'onde convectée

L'autre possibilité, développée par Goldstein,⁹² consiste à écrire une équation des ondes convectées dans le milieu observateur :

$$\nabla^2 p'(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{D_\infty^2}{Dt^2} p'(\mathbf{x}, t) = -\tilde{Q}(\mathbf{x}, t) \quad (4.37)$$

où D_∞/Dt est l'opérateur *dérivée en suivant l'écoulement moyen*[†], défini par :

$$\frac{D_\infty}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (4.38)$$

$\tilde{Q}(\mathbf{x}, t)$ est la distribution de sources dans le volume V_0 . Il est important de noter qu'en formant cette nouvelle équation, différente de l'équation de Lighthill (4.3), le terme source a été modifié :

$$\tilde{Q}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}, t)$$

avec[‡] :

$$\tilde{T}_{ij} = \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j + ((p - p_\infty) - c_\infty^2(\rho - \rho_\infty)) \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad \text{et} \quad \tilde{u}_i = u_i - \delta_{i1} U_\infty$$

[†]On considère ici le cas d'un écoulement moyen avec une composante constante U_∞ dans la direction x_1 , $\mathbf{U}_\infty = (U_\infty, 0)^t$ en 2-D et $\mathbf{U}_\infty = (U_\infty, 0, 0)^t$ en 3-D. On peut généraliser les formulations au cas où l'écoulement moyen possède trois composantes quelconques mais constantes U_i^∞ dans les trois directions x_i .

[‡]voir Goldstein,⁹² page 190. On a remplacé ici la notation u'_i par \tilde{u}_i pour éviter la confusion avec la notation déjà utilisée pour signifier $u'_i = u_i - u_0$, valeur fluctuante obtenue en retranchant la moyenne temporelle u_0 locale au volume V_0 , qui n'est pas forcément uniforme spatialement. Au contraire, les valeurs U_i^∞ sont constantes. Sinon, on aurait $\tilde{u}_i(\mathbf{y}, \tau) = u_i(\mathbf{y}, \tau) - \delta_{ij} U_j^\infty(\mathbf{x})$ et le terme source dépendrait du point d'observation, violant le postulat d'indépendance des deux milieux, nécessaire à l'analogie acoustique.

La différence fondamentale entre l'écriture de Goldstein et celle de Lighthill est que le premier applique le passage en coordonnées Lagrangiennes sur le volume source de l'équation de Lighthill afin de regrouper les termes responsables de la convection dans l'opérateur de propagation alors que le second utilise le changement de repère dans la formulation intégrale afin de les faire apparaître sur les termes sources.

Pour calculer la solution intégrale de l'équation (4.37), il faut déterminer une fonction de Green convectée \tilde{G} , solution de :

$$\nabla^2 \tilde{G}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{D_\infty^2}{Dt^2} \tilde{G}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau)$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est un point d'observation au temps t et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ est un point source au temps τ . Elle doit en plus vérifier une condition de causalité :

$$\tilde{G} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{D_\infty \tilde{G}}{Dt} = 0 \quad \text{pour} \quad t \leq \tau$$

Les fonctions de Green convectées en espace libre

- *Fonction de Green convectée 3-D dans le domaine temporel*

On utilise la transformation de Prandtl-Glauert :

$$x_{1\beta} = x_1 \quad x_{2\beta} = \beta x_2 \quad x_{3\beta} = \beta x_3 \quad \text{avec} \quad \beta^2 = 1 - M_\infty^2, \quad M_\infty = U_\infty / c_\infty$$

pour obtenir la fonction de Green convectée¹²³ :

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) = -\frac{\delta(\tau - t + \tau^*)}{4\pi r_\beta} \quad (4.39)$$

$$\text{avec} \quad r_\beta = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \beta^2 [(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]} \quad (4.40)$$

$$\text{et} \quad \tau^* = \frac{r_\beta - M_\infty(x_1 - y_1)}{c_\infty \beta^2} \quad (4.41)$$

- *Fonction de Green 3-D convectée dans le domaine spectral*

En appliquant la transformée de Fourier définie par (4.8), la fonction de Green devient :

$$\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \omega) = -\frac{\exp\left(-i \frac{k}{\beta^2} [r_\beta - M_\infty(x_1 - y_1)]\right)}{4\pi r_\beta} \quad (4.42)$$

où ω est la pulsation et $k = \omega / c_\infty$ le nombre d'onde.

- *Fonction de Green 2-D convectée dans le domaine spectral*

Avec la convention de signe adoptée pour la transformée de Fourier,

$$\tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) = \frac{i}{4\beta} \exp\left(i \frac{M_\infty k(x_1 - y_1)}{\beta^2}\right) H_0^{(2)}\left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta\right) \quad (4.43)$$

$$r_\beta \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{i}{4\beta} \sqrt{\frac{2\beta^2}{\pi k r_\beta}} \exp\left(-i \frac{k}{\beta^2} [r_\beta - M_\infty(x_1 - y_1)] + i \frac{\pi}{4}\right)$$

où $H_0^{(2)}$ est la fonction de Hankel de 2^{ème} espèce, d'ordre 0 et $r_\beta = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \beta^2(x_2 - y_2)^2}$.

4.2.2.2 Prise en compte d'un écoulement cisailé unidirectionnel

Il s'agit d'un écoulement moyen stationnaire de la forme :

$$u_i(\mathbf{x}, t) = U_1^\infty(x_2) \delta_{1i} + u'_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{où} \quad \mathbf{x} = \{x_i\}_{i \in \{1; \dim\}} \quad (\dim=2 \text{ ou } 3) \quad (4.44)$$

Phillips²²¹ est le premier en 1960 à tenter d'étendre l'analogie à un milieu en mouvement en essayant d'introduire les effets de l'écoulement moyen dans l'opérateur de propagation plutôt que dans le terme source. Pour cela, il forme l'équation des ondes convectée suivante, pour les fluctuations du logarithme de la pression $\pi' = \ln(p'/p_\infty)$:

$$\left\{ \frac{D^2}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right\} \pi' = \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \gamma \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{c_p} \frac{Ds}{Dt} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) \quad (4.45)$$

où D/Dt désigne l'opérateur de dérivation en suivant l'écoulement moyen, défini par :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_1^\infty \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad (4.46)$$

p_∞ est la pression de référence, s l'entropie spécifique, $\gamma = c_p/c_v$ le rapport de la chaleur spécifique à pression constante sur la chaleur spécifique à volume constant.

Dans le cas d'un écoulement cisailé unidirectionnel bidimensionnel, défini par (4.44), l'équation de Phillips (4.45) prend la forme;

$$\left\{ \frac{D^2}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right\} \pi' = \underbrace{2\gamma \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} \frac{dU_1^\infty}{dx_2}}_{\text{terme I}} + \underbrace{\left\{ \gamma \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \gamma \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\}}_{\text{terme II}} \quad (4.47)$$

Cette équation permet d'éliminer ρ du terme source. Cependant, l'opérateur de propagation ne contient pas toutes les interactions entre l'écoulement moyen et l'acoustique. Il manque en effet le terme proportionnel au cisaillement dU_1^∞/dx_2 , responsable d'une réfraction des ondes acoustiques, qui est ici inclus dans le terme I. Pour le mettre en évidence, considérons un opérateur complet qui est donné par le système des équations d'Euler linéarisées (EEL). Pour le logarithme de la pression $\pi = \ln(p/p_\infty)$, ce système s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial t} + \gamma \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{c_\infty^2}{\gamma} \frac{\partial \pi}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

puis en linéarisant autour de l'écoulement moyen (4.44) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi'}{\partial t} + U_1^\infty \frac{\partial \pi'}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_1^\infty \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} + u'_2 \frac{dU_1^\infty}{dx_2} + \frac{c_\infty^2}{\gamma} \frac{\partial \pi'}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

qui permet de former une équation de propagation pour les fluctuations en π' et en u'_2 :

$$\frac{D^2 \pi'}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_\infty^2 \frac{\partial \pi'}{\partial x_i} \right) - 2\gamma \frac{dU_1^\infty}{dx_2} \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} = 0 \quad (4.48)$$

en utilisant la dérivation en suivant l'écoulement moyen définie par (4.46). Si l'on compare ce résultat à l'équation (4.47), on constate que, pour former l'équation convectée inhomogène, il faut passer le terme I dans l'opérateur de propagation. Le seul terme source qui reste est alors le terme II qui représente le bruit propre centré (*self noise* dans la terminologie de Ribner²³⁶). Cependant, l'opérateur de propagation porte à la fois sur les fluctuations de π' et de u'_2 et ne peut pas être résolu par la méthode de Green classique. Par contre, l'opérateur étant déduit directement des EEL, on peut résoudre les EEL en prenant le terme II comme source S_i dans le membre de droite :

$$\begin{cases} \frac{\partial p'}{\partial t} + u_{jo} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial p_o}{\partial x_j} + \gamma p_o \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} + \gamma p' \frac{\partial u_{jo}}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u_{jo} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u_{io}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{p'}{\rho_o^2 c_o^2} \frac{\partial p_o}{\partial x_i} = S_i \end{cases} \quad (4.49)$$

avec un terme source s'écrivant :

$$S_i = - \left\{ u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right\}$$

Comme les écoulements réels sont rarement bidimensionnels et unidirectionnellement cisailés, Bailly, Lafon & Candel étendent la formulation à des cas plus complexes : jet circulaire,⁸ diaphragme tridimensionnel en écoulement,^{164,163} rayonnement de deux tourbillons corotatifs ou des appariements dans une couche de mélange.⁷

Revenons à l'approche analogique classique. Pour résoudre le problème lié à la dépendance de l'opérateur de propagation en π' et u'_2 dans le cas d'un écoulement bidimensionnel unidirectionnellement cisailé (4.44), Lilley^{159,160,94} propose en 1972 d'appliquer une dérivation supplémentaire $\partial/\partial t$ pour former une équation de propagation du troisième ordre :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{D^2 \pi'}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_\infty^2 \frac{\partial \pi'}{\partial x_i} \right) \right\} - 2\gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_\infty^2 \frac{\partial \pi'}{\partial x_i} \right) = Q(\mathbf{x}, t) \quad (4.50)$$

Pour une discussion sur la forme du terme source Q , on pourra se référer à l'étude numérique de Colonius *et al.*⁴³ On peut faire plusieurs remarques sur l'opérateur de propagation. D'abord,

il fait intervenir un opérateur différentiel du troisième ordre qui est difficile à résoudre numériquement car la fonction de Green appropriée n'est pas connue. On peut seulement obtenir des développements asymptotiques en hautes ou basses fréquences s'appuyant sur la fonction de Green en espace libre au repos.⁹³ Colonius a contourné le problème en passant dans l'espace de Fourier pour former une équation différentielle ordinaire. Par ailleurs, la forme de l'opérateur de propagation est similaire à celle de l'équation de Rayleigh appliquée à un écoulement unidirectionnellement cisailé, appelée équation de Pridmore-Brown⁴³(1958), qui permet de déterminer les modes d'instabilités hydrodynamiques linéaires. L'équation de Lilley concerne donc non seulement les fluctuations acoustiques mais aussi les fluctuations rotationnelles de nature convective et non propagative.

L'équation de Lilley a été appliquée numériquement par Colonius *et al.*⁴³ sur le cas de la couche de mélange bidimensionnelle pour laquelle il analyse l'applicabilité de la méthode et l'expression des termes sources. Bien sûr, dans le cas d'une couche de mélange, le cisaillement est quasiment entièrement contenu dans la région source et le milieu observateur peut alors être traité avec l'analogie de Goldstein (voir §4.2.2.1) avec une vitesse uniforme de part et d'autre de la zone de cisaillement, incluse dans le domaine source. Dans ce cas, la difficulté réside plutôt dans la troncature de la zone aérodynamique en aval.

4.2.3 Prise en compte de frontières solides

En développant sa théorie du bruit aérodynamique, Lighthill s'est placé dans le cas où il n'y a pas de frontière solide mais il souligne, dans son second article[†] de 1954, que le bruit dipolaire dû à des frontières solides immobiles ou en mouvement, vibrantes ou rigides, peut être la cause principale de bruit dans certaines configurations. C'est Curle⁴⁸ qui l'écrit formellement pour la première fois en 1955. Sa formulation intégrale, valable pour une surface rigide, immobile, repose sur l'utilisation de la formule de Kirchhoff (1883). En 1960, Powell²³⁰ généralise l'analogie de Curle au cas où la surface n'est pas entièrement immergée dans la région aérodynamique. Il analyse le rôle de la surface dans l'approche analogique et établit un *théorème de réflexion* pour les surfaces planes. En 1969, Ffowcs Williams et Hawkins⁷⁶ écrivent l'équation qui portera leurs noms et qui généralise l'équation de Lighthill au cas d'un écoulement en présence d'une surface *en mouvement quelconque*. L'autre apport fondamental de Ffowcs Williams et Hawkins réside dans l'utilisation des fonctions généralisées pour aboutir à leur équation. Ce formalisme va également permettre d'étendre la formulation de Kirchhoff au cas des surfaces en mouvement quelconque.

[†] voir Lighthill,¹⁵⁸ page 2, 1^{ère} note de bas de page.

On dispose donc de deux formulations équivalentes pour prendre en compte l'effet d'une surface en mouvement dans l'analogie de Lighthill : la formulation de Ffowcs Williams et Hawkins présentée au §4.2.3.1 et la formulation de Kirchhoff décrite au §4.2.3.2, utilisée par Curle et étendue par Farassat et Myers.⁶⁷

4.2.3.1 L'analogie de Ffowcs Williams et Hawkins

L'équation de Ffowcs Williams et Hawkins

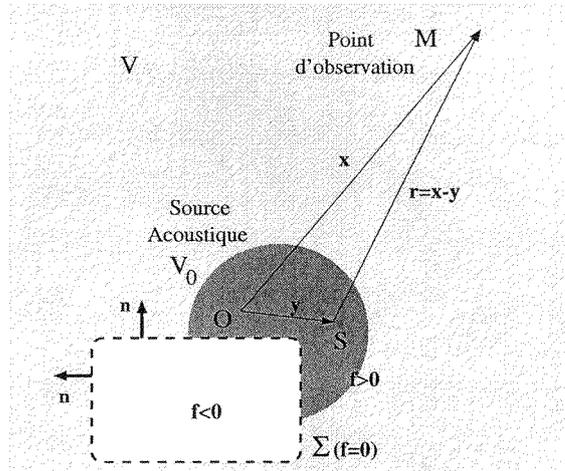


Figure 4.4: Notations utilisées pour l'analogie de Ffowcs Williams et Hawkins.

On considère une surface Σ partiellement incluse dans la région source V_0 . Σ est définie de telle façon que $f(\mathbf{x}, t) = 0$ pour les points sur Σ , f soit positive dans le fluide et négative à l'intérieur de Σ . La surface peut être matérielle ou non sans changer le raisonnement et se déplace à la vitesse \mathbf{u}^Σ . On a donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}^\Sigma \cdot \nabla f = 0$$

ou encore :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + u_i^\Sigma \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} = 0 = \frac{\partial f(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} + u_i^\Sigma \frac{\partial f(\mathbf{y}, \tau)}{\partial y_i}$$

La normale à la surface Σ est donnée par :

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \mathbf{n} \quad ,$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire qui pointe vers l'extérieur de la surface, soit encore vers $f > 0$ [†].

Ces conventions sont rappelées sur la figure 4.4 et permettent l'introduction de la variable

[†]Le sens de la normale peut évidemment être choisi d'un côté ou de l'autre de la surface. Classiquement, pour l'analogie acoustique, les premiers auteurs (Lighthill, Curle, Ffowcs Williams et Hawkins, Powell, Goldstein...) ont choisi pour convention une normale qui pointe vers l'extérieur du fluide (c'est-à-dire vers l'intérieur de la surface). Pour les développements de la méthode de Kirchhoff, les auteurs (Pierce, Farassat et Myers, Brentner, ...) ont choisi une normale qui pointe vers l'extérieur de la surface (c'est-à-dire vers l'intérieur du fluide). Cependant,

généralisée $\rho H(f)$, définie sur tout l'espace, en notant H la fonction de Heaviside définie par (4.13). On remplace ainsi un problème sur ρ avec une discontinuité due à la frontière Σ par un problème sur $\rho H(f)$ valable dans tout l'espace. C'est maintenant la fonction $H(f)$ qui contient la discontinuité. Cette fonction n'existe que dans le cadre des fonctions généralisées⁶⁴ et vérifie les relations :

$$\nabla H(f) = \delta(f) \nabla f \quad \text{et} \quad \frac{\partial H(f)}{\partial t} = \delta(f) \frac{\partial f}{\partial t} = -\delta(f) u_j^\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

On peut alors réécrire les équations de la mécanique des fluides en les multipliant par $H(f)$ afin de construire l'équation de Lighthill portant sur les fluctuations généralisées $\rho H(f)$. L'équation de conservation de la masse devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho - \rho_\infty) H(f)] + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j H(f)] = \rho (u_j - u_j^\Sigma) \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \rho_\infty u_j^\Sigma \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (4.51)$$

Pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\rho u_i H(f)] + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho u_i u_j + (p - p_\infty) \delta_{ij} - \tau_{ij}) H(f)] = \\ [(p - p_\infty) \delta_{ij} - \tau_{ij} + \rho u_i (u_j - u_j^\Sigma)] \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (4.52)$$

On forme alors $\frac{\partial}{\partial t}(4.51) - \frac{\partial}{\partial x_i}(4.52)$ et on retranche $c_\infty^2 \nabla^2 [(\rho - \rho_\infty) H(f)]$ dans chacun des membres pour obtenir l'équation de Ffowcs Williams et Hawkings :

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_\infty^2 \nabla^2 \right\} [(\rho - \rho_\infty) H(f)](\mathbf{x}, t) \\ = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [T_{ij} H(f)](\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} [F_i \delta(f)](\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} [Q \delta(f)](\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.53)$$

avec :

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + [(p - p_\infty) - c_\infty^2 (\rho - \rho_\infty)] \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (4.54)$$

$$F_i = -[\rho u_i (u_j - u_j^\Sigma) + (p - p_\infty) \delta_{ij} - \tau_{ij}] \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (4.55)$$

$$Q = [\rho (u_j - u_j^\Sigma) + \rho_\infty u_j^\Sigma] \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (4.56)$$

On remarque qu'en l'absence de Σ , on retrouve l'équation de Lighthill. La présence de Σ induit deux termes supplémentaires : un terme dipolaire F_i et un terme monopolaire Q .

lorsque les deux méthodes sont présentées simultanément, on n'utilise souvent qu'une seule convention. C'est le cas, par exemple, de Farassat, Brentner ou Di Francescantonio qui utilisent la convention de normale de la méthode de Kirchhoff pour présenter l'analogie de FW-H, ce qui change tous les signes des intégrales de surface par rapport aux premières publications sur l'analogie. De la même façon, nous n'utiliserons qu'une seule convention, celle de la méthode de Kirchhoff, afin d'uniformiser les développements analytiques. Elle présente l'avantage de fournir $\nabla f / |\nabla f| = \mathbf{n}$ alors que la convention de l'analogie impose $\nabla f / |\nabla f| = -\mathbf{n}$, ce qui change tous les signes des intégrales surfaciques lorsqu'on introduit la normale. A chaque fois, on rappellera sur des schémas le sens de la normale choisi.

En plus d'avoir étudié pour la première fois le cas d'une surface en mouvement, les auteurs introduisent le concept des fonctions généralisées, qui va marquer les développements futurs^{45,64†}. Si cette approche est séduisante, la présence de $H(f)$ et de $\delta(f)$ dans les termes sources rend délicate une interprétation tant qu'on n'a pas exprimé la solution intégrale.

Formulations spatiales de l'analogie de FW-H

Etant donné qu'on a formé une équation des ondes inhomogène (4.53) valable dans tout l'espace, on peut adopter le raisonnement de Lighthill en introduisant un milieu observateur uniforme et au repos et une distribution de source (4.54), (4.55) et (4.56) sur le volume V_0 . On est ainsi ramené à un problème de propagation inhomogène résolu à l'aide de la fonction de Green en espace libre :

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) = -\frac{\delta(g)}{4\pi r} \quad \text{avec} \quad g(\tau) = \tau - t + \frac{r}{c_\infty} \quad \text{et} \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

La solution s'écrit :

$$[(p - p_\infty)H(f)](\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial^2 [T_{ij}H(f)]}{\partial x_i \partial x_j} * G - \frac{\partial [F_i \delta(f)]}{\partial x_i} * G - \frac{\partial [Q \delta(f)]}{\partial t} * G$$

soit en utilisant les lois du produit de convolution, noté $*$:

$$[(p - p_\infty)H(f)](\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [T_{ij}H(f) * G] - \frac{\partial}{\partial x_i} [F_i \delta(f) * G] - \frac{\partial}{\partial t} [Q \delta(f) * G]$$

En exprimant le produit de convolution :

$$\begin{aligned} 4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} [T_{ij}H(f)](\mathbf{y}, \tau) \frac{\delta(g)}{r} d\mathbf{y} d\tau \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} [F_i \delta(f)](\mathbf{y}, \tau) \frac{\delta(g)}{r} d\mathbf{y} d\tau \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} [Q \delta(f)](\mathbf{y}, \tau) \frac{\delta(g)}{r} d\mathbf{y} d\tau \end{aligned} \quad (4.57)$$

Le produit de T_{ij} par la fonction de Heaviside permet de réduire l'intégration sur tout l'espace en une intégration sur $f > 0$ (en dehors de Σ). On peut encore la réduire sur la partie de V_0 où $f > 0$, en considérant que $T_{ij} = 0$ en dehors de V_0 . On explicite également les intégrations avec

[†]On peut noter que toutes les approches mathématiques basées sur le formalisme des fonctions de Green pour obtenir les formulations de Kirchhoff ou de FW-H utilisent des dérivations qui sont en fait des dérivées généralisées puisque G contient une discontinuité.

$\delta(f)^\dagger$:

$$\begin{aligned} 4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0(f>0)} \int_{-\infty}^{\infty} T_{ij}(\mathbf{y}, \tau) \frac{\delta(g)}{r} d\mathbf{y} d\tau \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma(f=0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\nabla f|} F_i(\mathbf{y}, \tau) \frac{\delta(g)}{r} d\Sigma d\tau \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma(f=0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\nabla f|} Q(\mathbf{y}, \tau) \frac{\delta(g)}{r} d\Sigma d\tau \end{aligned}$$

De même, pour expliciter l'intégration temporelle avec $\delta(g)$, on effectue le changement de variable de τ en g :

$$\begin{aligned} 4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0(f>0)} \int_{-\infty}^{\infty} T_{ij}(\mathbf{y}, \tau) \frac{\delta(g)}{r \left| \frac{dg}{d\tau} \right|} d\mathbf{y} dg \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma(f=0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\nabla f|} F_i(\mathbf{y}, \tau) \frac{\delta(g)}{r \left| \frac{dg}{d\tau} \right|} d\Sigma dg \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma(f=0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\nabla f|} Q(\mathbf{y}, \tau) \frac{\delta(g)}{r \left| \frac{dg}{d\tau} \right|} d\Sigma dg \end{aligned}$$

avec :

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(t - \tau - \frac{r}{c_\infty} \right) = -1 + \frac{1}{c_\infty} \frac{r_i}{r} u_i^\Sigma = -1 + M_r^\Sigma$$

D'où la formulation spatiale de l'analogie de Ffowcs Williams et Hawkins avec dérivées par rapport à l'observateur :

$$\begin{aligned} 4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0(f>0)} \frac{1}{r |1 - M_r^\Sigma|} T_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) d\mathbf{y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma(f=0)} \frac{1}{r |1 - M_r^\Sigma|} \frac{1}{|\nabla f|} F_i \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) d\Sigma(\mathbf{y}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma(f=0)} \frac{1}{r |1 - M_r^\Sigma|} \frac{1}{|\nabla f|} Q \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) d\Sigma(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

où T_{ij} , F_i et Q sont définis respectivement par (4.54), (4.55) et (4.56). On peut encore l'écrire :

[†]On utilise la propriété fondamentale de la fonction Dirac et le changement de variables x en $g(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \delta\{g(x)\} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_0) \delta(g) \frac{dg}{\left| \frac{dg}{dx} \right|_{x_0}} = \frac{\psi(x_0)}{\left| \frac{dg}{dx} \right|_{x_0}} \text{ avec } g(x_0) = 0 \text{ et } x_0 \text{ unique}$$

$$\begin{aligned}
4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0} \left[\frac{1}{r|1-M_r^\Sigma|} T_{ij} \right]_{\tau^*} d\mathbf{y} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r|1-M_r^\Sigma|} P_{ij} \right]_{\tau^*} n_j d\Sigma(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r|1-M_r^\Sigma|} \rho_\infty u_n^\Sigma \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r|1-M_r^\Sigma|} \rho (u_n - u_n^\Sigma) \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r|1-M_r^\Sigma|} \rho u_i (u_n - u_n^\Sigma) \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{4.58}$$

où $P_{ij} = [(p - p_\infty)\delta_{ij} - \tau_{ij}]$ et $u_n = u_j n_j$. L'indice τ^* indique que les variables sont évaluées au temps retardé $t - r/c_\infty$.

Si la surface est rigide (imperméable et non vibrante), on a $u_n = u_n^\Sigma$ et les deux dernières intégrales de (4.58) sont nulles. Ces deux intégrales représentent donc les sources dues au caractère poreux ou vibratoire de la surface. Si, de plus, la surface est immobile ($u_n^\Sigma = 0$ et $M_r^\Sigma = 0$), (4.58) devient :

$$4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0} T_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \frac{d\mathbf{y}}{r} - \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma} P_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) n_j \frac{d\Sigma(\mathbf{y})}{r} \tag{4.59}$$

Il s'agit de la formulation finale obtenue par Curle⁴⁸ † en 1955 pour une surface rigide et immobile à partir de la formule de Kirchhoff.

Enfin, le dernier cas de figure apparaît lorsque la surface est immobile mais peut être poreuse ou vibrante. On applique alors seulement $u_n^\Sigma = 0$ et $M_r^\Sigma = 0$:

$$\begin{aligned}
4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0} \frac{[T_{ij}]_{\tau^*}}{r} d\mathbf{y} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma} \frac{[P_{ij}]_{\tau^*}}{r} n_j d\Sigma(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \frac{[\rho u_n]_{\tau^*}}{r} d\Sigma(\mathbf{y}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma} \frac{[\rho u_i u_n]_{\tau^*}}{r} d\Sigma(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Pour ces formulations spatiales, les dérivées sont exprimées par rapport au repère de l'observateur, ce qui limite fortement les possibilités d'application numérique. C'est pourquoi, certains auteurs transforment les dérivées spatiales et temporelles par rapport à l'observateur en dérivées spatiales et temporelles par rapport aux temps et à la position de la source[‡]. Pour une surface non poreuse, en utilisant les relations,

$$\text{pour une source } Q = Q(\mathbf{y}, \tau), \quad \frac{\partial}{\partial t} [Q(\mathbf{y}, \tau)]_{\tau^*} = \left[\frac{1}{|1 - M_r^\Sigma|} \frac{\partial Q(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau^*} \tag{4.61}$$

† formule (2.18), page 510. On rappelle que notre convention pour le sens de la normale est l'inverse de celle de Curle.

‡ Cette nouvelle formulation de l'analogie de FW-H est souvent qualifiée de formulation (1A) en référence aux articles originaux de Farassat et Succi⁷⁰ et Brentner²⁵ où la formule (4.62) est développée.

$$\text{ainsi que } \dot{r} = -u_r^\Sigma, \quad \dot{r}_i = -u_i^\Sigma, \quad \left(\frac{\dot{r}_i}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_i}{r}\right) = \frac{-u_i^\Sigma + (r_i/r)u_r^\Sigma}{r},$$

on obtient en regroupant les termes en $1/r$ et en $1/r^2$:

$$\begin{aligned} 4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) &= \iiint_{V_0} \left[\frac{1}{r|1-M_r^\Sigma|} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \right]_{\tau^*} dy \\ &+ \iint_{\Sigma} \left[\frac{A_1}{r(1-M_r^\Sigma)^2} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) + \iint_{\Sigma} \left[\frac{A_2}{r^2(1-M_r^\Sigma)^2} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.62)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= \rho_\infty \dot{u}_n^\Sigma + (P_{ij} \dot{n}_j) \frac{r_i}{rc_\infty} \\ A_2 &= P_{ij} n_j \frac{r_i}{r} - P_{ij} n_j M_i^\Sigma + \Lambda(1-M_r^\Sigma)^{-1} \left(\rho_\infty u_n^\Sigma + P_{ij} n_j \frac{r_i}{rc_\infty} \right) \end{aligned}$$

On a noté $M_i^\Sigma = u_i^\Sigma/c_\infty$ le nombre de Mach du mouvement de la surface Σ et $M_r^\Sigma = \mathbf{u}^\Sigma \cdot \mathbf{r}/rc_\infty$ le nombre de Mach du mouvement de la surface dans la direction du rayonnement. Un point au dessus d'une variable indique une dérivation par rapport au temps de la source τ . Il s'agit de la formulation (1A)[†] originale. Elle a été étendue par Pilon²²² pour une surface poreuse[‡].

Changement de variables de Di Francescantonio

Di Francescantonio⁵² propose d'introduire la vitesse modifiée U_i et le tenseur des contraintes modifié L_{ij} qui prennent en compte un flux de fluide à travers la surface Σ (caractère poreux). Ces grandeurs *modifiées* sont définies par :

$$\begin{aligned} U_i &= u_i + \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} - 1 \right) (u_i - u_i^\Sigma) & L_{ij} &= P_{ij} + \rho u_i (u_j - u_j^\Sigma) \\ &= \left(1 - \frac{\rho}{\rho_\infty} \right) u_i^\Sigma + \frac{\rho u_i}{\rho_\infty} \end{aligned} \quad (4.63)$$

La formulation spatiale avec dérivées par rapport à l'observateur s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0} \left[\frac{1}{r|1-M_r^\Sigma|} T_{ij} \right]_{\tau^*} dy \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r|1-M_r^\Sigma|} L_{ij} \right]_{\tau^*} n_j d\Sigma(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r|1-M_r^\Sigma|} \rho_\infty U_n \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.64)$$

On obtient alors une expression formellement identique à l'analogie dans le cas non poreux; ici le caractère poreux est inclus dans le changement de variables. On peut également réécrire cette formulation spatiale avec les dérivées par rapport à la source pour obtenir une forme

[†]Certains auteurs^{70,25,222} notent $\hat{r}_i = r_i/r$ et $L_i = P_{ij} n_j$.

[‡]formule (3.7), p.40. Il manque des termes dans A_3 et A_4 .

plus compacte de (4.62). Cette nouvelle formulation est donnée par DiFrancescantonio^{52†}, par Brentner et Farassat^{29‡} et par Farassat et Brentner^{65‡}. Elle a été appliquée par Singer *et al.*^{269‡} au calcul de la diffraction par le bord de fuite d'un profil.

Formulations temporelles de l'analogie de FW-H

On applique la formule (4.17) pour transformer la dérivée spatiale du terme dipolaire en dérivée temporelle.^{63,52} La transformation du terme quadripolaire est donnée par (4.18).

$$\begin{aligned}
4\pi p_a(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \left[\frac{r_i r_j}{r^3} \frac{T_{ij}}{|1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\mathbf{y} + \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \left[\left(\frac{3r_i r_j}{r^4} - \frac{\delta_{ij}}{r^2} \right) \frac{T_{ij}}{|1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\mathbf{y} \\
& + \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \left[\left(\frac{3r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) \frac{T_{ij}}{|1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\mathbf{y} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\rho_\infty u_n^\Sigma + \rho (u_n - u_n^\Sigma)}{r |1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) \\
& + \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{r_i P_{ij} n_j - \rho u_i r_i (u_n - u_n^\Sigma)}{r^2 |1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) + \iint_{\Sigma} \left[\frac{r_i P_{ij} n_j - \rho u_i r_i (u_n - u_n^\Sigma)}{r^3 |1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Il s'agit de la *formulation temporelle de l'analogie de FW-H avec dérivées par rapport à l'observateur*^{52†}. En champ lointain géométrique ($|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$), on peut négliger les termes en $\mathcal{O}(1/r^2)$ et $\mathcal{O}(1/r^3)$, conduisant à une formulation approximée intéressante pour les applications :

$$\begin{aligned}
4\pi p_a(\mathbf{x}, t) \simeq & \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \left[\frac{r_i r_j}{r^3} \frac{T_{ij}}{|1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\mathbf{y} \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\rho_\infty u_n^\Sigma + \rho (u_n - u_n^\Sigma)}{r |1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) \\
& + \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{r_i P_{ij} n_j - \rho u_i r_i (u_n - u_n^\Sigma)}{r^2 |1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{4.66}$$

On peut également écrire une formulation temporelle avec dérivées par rapport au temps de la source en utilisant la relation (4.61).

4.2.3.2 La formulation de Kirchhoff

[†]formule (19) p.499 où $K = \Lambda$ et $F_i = L_{ij} n_j$.

[‡]formule (17) p.1382, qui sépare les trois composantes p'_T (*thickness noise*, monopolaire), p'_L (*loading noise*, dipolaire) et p'_Q (*quadrupole noise*, quadripolaire). On note ici $L_i = L_{ij} n_j$.

[‡]formule (12) p.160, formellement identique à la formule (17) de réf²⁹ mais écrite pour une surface non poreuse.

[‡]formules (4), (5), (6) p.544. Dans (5), il faut lire p'_T au lieu de p'_L .

[†]formule (12). Attention, le premier terme du membre de droite est v_n et non u_n . Les notations sont ambiguës.

Publié en 1883, le théorème de Kirchhoff¹⁴¹ a d'abord été utilisé pour résoudre des problèmes de diffraction des ondes lumineuses et d'autres problèmes en électromagnétisme. C'est Curle⁴⁸ en 1955 qui l'utilise pour la première fois pour étendre l'analogie de Lighthill, traduisant l'influence des frontières solides par des intégrales de surface.

Nous discutons ici de la formulation de Kirchhoff avec l'intégrale volumique dans le cadre de l'approche analogique. Cette formulation est également la base de la méthode de Kirchhoff, détaillée au §4.3.1, qui permet d'étendre le champ acoustique, connu sur une surface, à un domaine observateur. Même si l'équation de départ est la même, la philosophie de cette application est différente de celle de l'analogie acoustique. En conservant l'intégrale des termes quadripolaires, on va donc obtenir une formulation analogique alternative à celle de Ffowcs Williams et Hawkings et présentant l'avantage de garder les dérivées des termes sources par rapport aux coordonnées des points sources.

Pour cela, on résout le problème qui consiste à déterminer le champ ϕ en un point d'observation \mathbf{x} à l'intérieur d'un volume V fermé par une surface Σ , matérielle ou non (fig. 4.5), sachant que, dans le volume V , ϕ satisfait l'équation des ondes inhomogène suivante :

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = Q(\mathbf{x}, t)$$

où Q désigne ici un terme source quelconque.

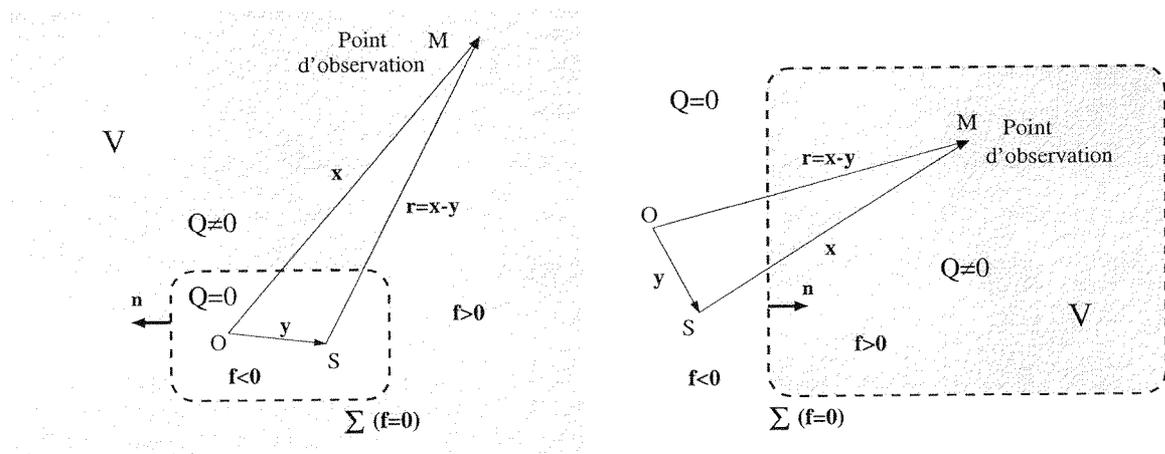


Figure 4.5: Notations utilisées pour la formule de Green. Les deux figures sont équivalentes. A gauche, V est supposé infini; il est donc bien fermé par Σ .

La formule de Green

En définissant la fonction f telle que $f = 0$ sur la surface Σ , $f > 0$ à l'intérieur de V et $f < 0$ à l'extérieur de V , on multiplie l'équation précédente par la fonction de Heaviside $H(f)$

qui vaut 1 dans V et 0 à l'extérieur :

$$H(f) \left\{ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right\} = H(f) \times Q$$

On cherche ensuite à écrire une équation d'onde pour $H\phi$ en utilisant :

$$\begin{aligned} \nabla^2(H\phi) &= \nabla \cdot (\nabla H\phi) = \nabla \cdot (H\nabla\phi + \phi\nabla H) \\ &= H\nabla^2\phi + \nabla H \cdot \nabla\phi + \nabla \cdot (\phi\nabla H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \quad \nabla^2(H\phi) - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(H\phi) &= H\nabla^2\phi + \nabla H \cdot \nabla\phi + \nabla \cdot (\phi\nabla H) - \frac{1}{c_\infty^2} H \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ &= HQ + (\nabla H \cdot \nabla\phi + \nabla \cdot (\phi\nabla H)) \end{aligned}$$

La solution intégrale à cette équation s'exprime à partir de la fonction de Green $G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau)$ du problème en espace libre :

$$\begin{aligned} H(f)\phi(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} H(f)Q(\mathbf{y}, \tau)G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) dyd\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) \{ \nabla H \cdot \nabla\phi + \nabla \cdot (\phi\nabla H) \} dyd\tau \end{aligned}$$

La présence de la fonction de Heaviside dans le premier terme annule la contribution de l'intégrale volumique pour $f < 0$. Cette intégrale se réduit donc à une intégration sur le volume V . Le deuxième terme est modifié en incluant G dans les gradients et en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} H(f)\phi(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{V(\mathbf{y})(f>0)} Q(\mathbf{y}, \tau)G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) dyd\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ G \frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \phi \frac{\partial G}{\partial y_i} \right\} \frac{\partial H}{\partial y_i} dyd\tau \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\text{or : } \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta(f)$$

et, pour une fonction ψ quelconque :

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta(f) d\mathbf{y} = \iint_{\Sigma(f=0)} \psi(\mathbf{y}) \frac{\frac{\partial f}{\partial y_i}}{|\nabla f|} d\Sigma(\mathbf{y}) = \iint_{\Sigma(f=0)} \psi(\mathbf{y}) n_i d\Sigma(\mathbf{y})$$

en définissant f de telle façon que $\nabla f/|\nabla f|$ soit le vecteur unitaire normal à Σ qui pointe à l'intérieur de V (vers $f > 0$). On le note $\mathbf{n} = (n_i)^t$. (4.67) devient alors :

$$\begin{aligned} H(f)\phi(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{V(\mathbf{y})(f>0)} Q(\mathbf{y}, \tau)G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) dyd\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma(f=0)} \left\{ G \frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \phi \frac{\partial G}{\partial y_i} \right\} n_i d\Sigma(\mathbf{y}) d\tau \end{aligned} \quad (4.68)$$

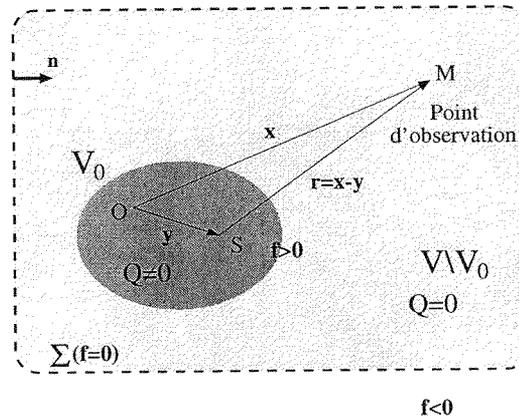


Figure 4.6: Σ est immatérielle et V est partagé en un domaine source V_0 et un domaine observateur $V \setminus V_0$.

C'est la *formule de Green* dont nous allons voir plusieurs applications car il s'agit du point de départ de nombreux raisonnements.

Tout d'abord, considérons la configuration de la figure 4.6, où Σ est une surface immatérielle limite d'un volume V partagé en deux régions : une région source V_0 dans laquelle $Q(\mathbf{y}, \tau) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}$ et un domaine observateur $V \setminus V_0$ où $Q(\mathbf{x}, t) = 0$. ϕ représente les fluctuations de pression. On cherche alors le champ rayonné par $V_0(\mathbf{y})$ en \mathbf{x} . On peut choisir la surface Σ à une distance r_Σ suffisamment grande de la source V_0 de façon à ce que les ondes acoustiques n'aient pas eu le temps d'atteindre Σ (soit $r_\Sigma > c_\infty t$); la contribution de la surface Σ est alors nulle et l'équation (4.68) se réduit à :

$$H(f)p'(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau$$

En explicitant la fonction de Green 3-D en espace libre (4.7) :

$$H(f)p'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \left(t - \frac{r}{c_\infty} \right) d\mathbf{y}$$

On retrouve ainsi la formulation spatiale de l'intégrale de Lighthill avec les dérivées par rapport aux coordonnées des points sources (4.15).

Considérons maintenant les cas où Σ est matérielle, au moins de façon partielle, la portion matérielle étant au moins en partie située à $r_\Sigma < c_\infty t$.

La première possibilité pour résoudre ce cas de figure est de choisir une fonction de Green dite *exacte*. On entend par là une fonction de Green qui satisfait $G = 0$ et $\partial G / \partial n = \partial G / \partial y_i \times n_i = 0$

sur la surface Σ de la configuration étudiée. Dans ce cas, l'équation (4.68) se réduit à l'intégrale volumique :

$$H(f)\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{V(\mathbf{y})} Q(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau$$

La difficulté de l'évaluation de l'intégrale de surface est transférée ici sur l'évaluation d'une fonction de Green appropriée. Celle-ci peut se faire grâce à des techniques comme l'analyse dans l'espace de Fourier ou l'utilisation des transformées conformes. On peut aussi utiliser des formes asymptotiques hautes ou basses fréquences de la fonction de Green.⁹³ Par exemple, Howe a développé le concept de fonction de Green *compacte*^{117,123†}. Il s'agit de fonctions de Green pour une région source $V_0(y)$ compacte, donc d'une approximation basse fréquence. On peut aussi obtenir une évaluation numérique de la fonction de Green par une méthode d'éléments de frontière.

Un exemple d'une telle fonction de Green exacte est donné par Ffowcs Williams et Hall⁷⁵ (1970) dans le cas d'un plan infini $y_3 = 0$ en considérant les source *images* $\mathbf{y}^* = (y_1, y_2, -y_3)^t$:

$$G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) = \frac{1}{4\pi c_\infty^2 r} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_\infty}\right) + \frac{1}{4\pi c_\infty^2 r^*} \delta\left(t - \tau - \frac{r^*}{c_\infty}\right)$$

avec $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ et $r^* = |\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|$.

On peut également déterminer une fonction de Green exacte dans d'autres configurations simples : sphère rigide compacte, demi-plan infini ou secteur angulaire (voir Ffowcs Williams,⁴⁵ chap. 11). Si ces développements ont permis d'établir quelques lois analytiques intéressantes, dans le cas d'une évaluation numérique, il est plus simple d'évaluer directement l'intégrale de surface en utilisant la fonction de Green 3-D en espace libre.

Une méthode intermédiaire a été développée par Davis et Atassi⁴⁹ pour calculer le bruit d'un profil 2-D puis a été appliquée au cas d'un jet supersonique par Mankbadi *et al.*^{171,172} en 1996. En utilisant la méthode des images, on construit une fonction de Green appropriée telle que $G = 0$ sur la surface de calcul mais $\partial G/\partial n$ est non nul. Lors de l'évaluation de (4.68), l'intégrale contenant la dérivée de la pression est nulle par construction. L'avantage de cette méthode appelée *Surface Integral Formulation* (SIF) est d'éviter le calcul de la dérivée à la paroi qui doit être effectué *a posteriori* pour une formulation de Kirchhoff classique et peut conduire à des erreurs numériques. La difficulté est là encore reportée sur le calcul de la fonction de Green. Pour le cas du jet, Mankbadi *et al.* utilisent la fonction de Green pour l'émission acoustique d'un cylindre, donnée par Morse et Ingard.¹⁹⁹ Ils utilisent la méthode des images pour assurer la nullité de G sur la surface cylindrique. La résolution s'effectue dans l'espace spectral et

† voir réf.¹¹⁷ annexe, p.668-671 ou réf.¹²³ p.65-72.

nécessite l'intégration numérique de plusieurs fonctions de Hankel, qui requiert un temps de calcul supérieur à celui nécessaire à l'intégration d'une formulation de Kirchhoff classique. Lorsque le calcul aérodynamique est suffisamment précis, il est donc préférable d'évaluer numériquement $\partial p/\partial n$ afin de pouvoir utiliser une fonction de Green en espace libre plus facile à mettre en œuvre et à généraliser pour des surfaces d'intégration quelconques.

La formulation de Kirchhoff

Afin d'obtenir le maximum de généralité, la configuration étudiée considère une surface $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ qui délimite un volume V , divisé en une région source V_0 et un domaine observateur $V \setminus V_0$.²³⁰ La figure 4.7 donne quelques configurations possibles : (a) peut représenter le sillage derrière un objet et (b) une source près d'une surface infinie. Ce dernier cas de figure peut être illustré avec l'exemple d'une cavité avec Σ_0 et Σ_1 correspondant aux parois matérielles ((c)) ou à une surface fictive ((d)). Les notations sont identiques pour tous ces exemples. La surface Σ réunit des surfaces matérielles ou immatérielles Σ_1 partiellement ou entièrement incluses dans $V \setminus V_0$, des surfaces matérielles ou immatérielles Σ_0 partiellement ou entièrement incluses dans V_0 et une surface non matérielle Σ_2 qui clôt le volume V . Cette dernière est située à $r_{\Sigma_2} > c_\infty t$ de la région source, de telle façon qu'aucune onde acoustique n'ait pu l'atteindre. Pour la configuration (a), des surfaces Σ_3 et Σ'_3 relie Σ_2 à l'objet $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$. Ces deux surfaces supplémentaires permettent de fermer Σ mais n'interviendront pas car leurs contributions s'annulent exactement. La surface Σ est stationnaire et ses normales \mathbf{n} pointent vers l'intérieur de V soit vers l'extérieur de Σ . La formule de Green s'écrit alors :

$$H(f)\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} Q(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1} \left\{ G \frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \phi \frac{\partial G}{\partial y_i} \right\} n_i d\Sigma(\mathbf{y}) d\tau \quad (4.69)$$

L'intégrale sur Σ_2 est nulle ($r_{\Sigma_2} > c_\infty t$) donc Σ est réduite à $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$. Remarquons que si le volume V_0 est à l'extérieur de V c'est-à-dire dans $\Sigma(f < 0)$, l'intégrale de volume disparaît : il s'agit alors de la configuration de la méthode de Kirchhoff (voir §4.3.1).

Transformons maintenant l'intégrale de surface pour lui donner la forme classique de la formulation de Kirchhoff. En utilisant la fonction de Green 3-D :

$$G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) = -\frac{\delta(g)}{4\pi r} \quad g = \tau - t + \frac{r}{c_\infty} \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y},$$

Le premier terme de l'intégrale surfacique s'évalue de la façon suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) \frac{\partial \phi(\mathbf{y}, \tau)}{\partial y_i} n_i d\tau = -\frac{1}{4\pi r} \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) n_i$$

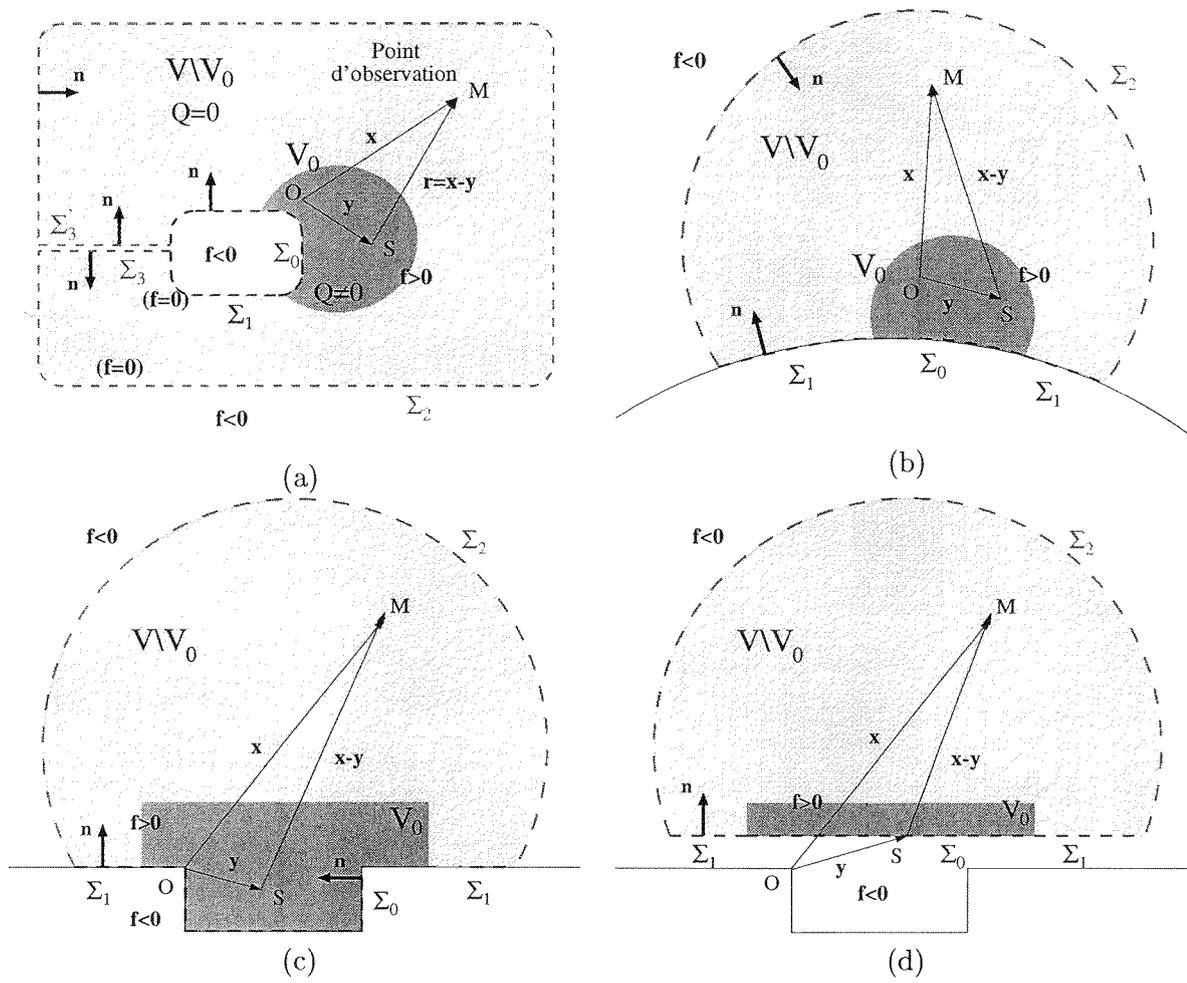


Figure 4.7: Quelques exemples de configuration.

Pour transformer le deuxième terme, on évalue le gradient de G :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{y}, \tau) \frac{\partial G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)}{\partial y_i} n_i d\tau = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \delta(g) \frac{\partial(1/r)}{\partial y_i} n_i d\tau - \frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \frac{\partial \delta(g)}{\partial y_i} n_i d\tau \quad (4.70)$$

or :

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y_i}$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial y_i} (\delta(g)) = \delta'(g) \frac{\partial g}{\partial y_i} = \delta'(g) \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial r}{\partial y_i}$$

On inclut ces résultats dans (4.70) et on intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{y}, \tau) \frac{\partial G(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)}{\partial y_i} n_i d\tau &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \delta(g) d\tau - \frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial r}{\partial n} \phi \delta'(g) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \phi \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) + \frac{1}{4\pi r c_\infty} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \end{aligned}$$

milieu réel, la formulation (4.60) de l'analogie de FW-H pour une surface perméable immobile s'écrit :

$$\begin{aligned}
4\pi p'(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0} \frac{[T_{ij}]_{\tau^*}}{r} d\mathbf{y} \\
&\quad - \iint_{\Sigma_0} \frac{1}{r} \left[(\rho - \rho_\infty) \frac{\partial u_n^\Sigma}{\partial \tau} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma_0} \frac{1}{r} [\rho u_i u_n^\Sigma - P_{ij} n_j]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) \\
&\quad - \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{r} \left[(\rho - \rho_\infty) \frac{\partial u_n^\Sigma}{\partial \tau} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{r} [p n_i]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Pour le tenseur image T'_{ij} , fermé par la surface $\Sigma'_0 + \Sigma'_1 + \Sigma'_2$, le rayonnement acoustique à l'extérieur, c'est-à-dire pour un point observateur \mathbf{x} , est exactement nul, puisqu'il s'agit de sources virtuelles, soit :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V'_0} \frac{[T'_{ij}]_{\tau^*}}{r'} d\mathbf{y}' \\
&\quad - \iint_{\Sigma'_0} \frac{1}{r'} \left[(\rho' - \rho'_\infty) \frac{\partial u'_n{}^\Sigma}{\partial \tau} \right]_{\tau^*} d\Sigma'(\mathbf{y}') + \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma'_0} \frac{1}{r'} [\rho' u'_i u'_n{}^\Sigma - P'_{ij} n'_j]_{\tau^*} d\Sigma'(\mathbf{y}') \\
&\quad - \iint_{\Sigma'_1} \frac{1}{r'} \left[(\rho' - \rho'_\infty) \frac{\partial u'_n{}^\Sigma}{\partial \tau} \right]_{\tau^*} d\Sigma'(\mathbf{y}') - \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma'_1} \frac{1}{r'} [p' n'_i]_{\tau^*} d\Sigma'(\mathbf{y}')
\end{aligned} \tag{4.73}$$

On additionne (4.72) et (4.73) en remarquant que, sur la frontière, $\mathbf{n} = -\mathbf{n}'$, $u_i^\Sigma = u'_i{}^\Sigma$ et $p = p'$:

$$\begin{aligned}
4\pi p'(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0+V'_0} \frac{[T_{ij}]_{\tau^*}}{r} d\mathbf{y} \\
&\quad - \iint_{\Sigma_0} \frac{2}{r} \left[(\rho - \rho_\infty) \frac{\partial u_n^\Sigma}{\partial \tau} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) - \iint_{\Sigma_1} \frac{2}{r} \left[(\rho - \rho_\infty) \frac{\partial u_n^\Sigma}{\partial \tau} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_s} \iint_{\Sigma_0} \frac{2}{r} [\rho u_s^\Sigma u_n^\Sigma + \tau_{sj} n_j]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{4.74}$$

où u_s indique les fluctuations dans le plan de la surface ($s = 1$ sur notre figure). Si la surface $\Sigma_0 + \Sigma_1$ est rigide ($\mathbf{u}^\Sigma = 0$) et le fluide non visqueux ($\tau_{sj} = 0$), on obtient :

$$4\pi p'(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_{V_0+V'_0} \frac{[T_{ij}]_{\tau^*}}{r} d\mathbf{y} \tag{4.75}$$

qui est le fondement du théorème de Powell :

The pressure dipole distribution on a plane, infinite and rigid surface accounts for the reflection in that surface of the volume distribution of acoustic quadrupole generators of a contiguous inviscid fluid flow, and for nothing more, when these distributions are determined in accordance with Lighthill's concept of aerodynamic noise generation and its natural extension.

Ce résultat est indépendant du nombre de Mach ou de la longueur d'onde acoustique, tous les effets de diffraction et de réfraction étant contenus dans le tenseur de Lighthill. Il illustre la confusion qui peut survenir lorsqu'on interprète l'analogie de Curle/FW-H en disant que le rayonnement d'une surface dans un écoulement résulte de trois sources physiques. Le théorème de Powell montre que ce n'est pas vrai pour une surface plane ou lorsque le rayon de courbure de la surface est grand devant la longueur d'onde de l'acoustique.^{72,18} On illustrera ce théorème dans le prochain chapitre.

4.2.4 Prise en compte de la convection en présence de surfaces

On a vu, au §4.2.2, l'extension de l'analogie de Lighthill lorsqu'il y a un écoulement uniforme dans le milieu d'observation et, au §4.2.3, la contribution des surfaces au champ rayonné. On se propose maintenant de réunir ces deux extensions.

4.2.4.1 Formulations convectées de l'analogie de FW-H

Comme on l'a vu au §4.2.2, on peut tenir compte d'une vitesse de convection uniforme dans le milieu d'observation en transformant la formulation intégrale de FW-H dans un repère mobile ou bien en écrivant une équation de FW-H convectée. La première possibilité, qui consiste à appliquer un changement en coordonnées lagrangiennes directement sur (4.58), est utilisée par Ffowcs Williams et Hawkings⁷⁶ ou Howe.¹²³ Pour la seconde solution, il y a deux façons de former une équation de FW-H convectée : soit on applique la transformation galiléenne de la position de l'observateur $(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ dans le repère en mouvement à la vitesse \mathbf{U}_∞ vers la position fixe (\mathbf{x}, t) dans le repère lié à la cavité, telle que $x_i = \tilde{x}_i + U_i t$, (voir figure 4.9) sur l'équation de FW-H (4.53), soit on reformule les équations de Navier-Stokes dans le repère en mouvement et on reformule une nouvelle équation de FW-H. La première possibilité est utilisée par Lockard¹⁶²; on présente ici l'établissement d'une équation de FW-H convectée à partir des équations de la mécanique des fluides.

En utilisant l'équation de conservation de la masse volumique, on a :

$$\frac{D_\infty}{Dt} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_i^\infty \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = -\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} + U_i^\infty \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = -\frac{\partial \rho (u_i - U_i^\infty)}{\partial x_i}$$

et en définissant $\tilde{u}_i = u_i - U_i^\infty$:

$$\frac{D_\infty}{Dt} \rho = -\frac{\partial \rho \tilde{u}_i}{\partial x_i}$$

On écrit alors l'équation de conservation pour les variables généralisées :

$$\frac{D_\infty}{Dt} [(\rho - \rho_\infty)H(f)] + \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho \tilde{u}_i H(f)] = (\rho - \rho_\infty) \frac{D_\infty H(f)}{Dt} + \rho \tilde{u}_i \frac{\partial H(f)}{\partial x_i}$$

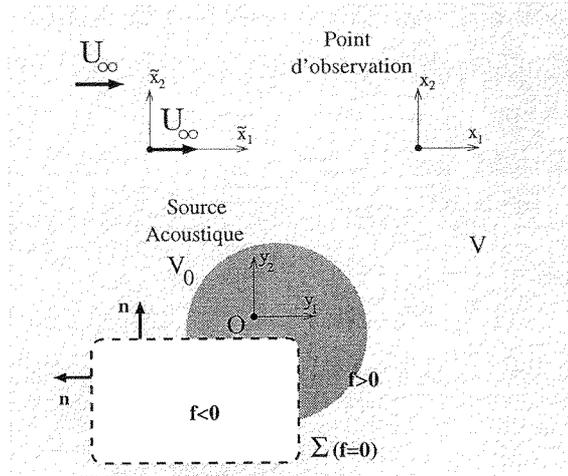


Figure 4.9: Systèmes de coordonnées pour un milieu en mouvement uniforme.

or, pour une surface immobile,

$$\frac{D_\infty}{Dt} H(f) = \frac{\partial}{\partial t} H(f) + U_i^\infty \frac{\partial}{\partial x_i} H(f) = U_i^\infty \frac{\partial}{\partial x_i} H(f) \quad ,$$

donc :

$$\frac{D_\infty}{Dt} [(\rho - \rho_\infty)H(f)] + \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho \tilde{u}_i H(f)] = (\rho - \rho_\infty) U_i^\infty \frac{\partial H(f)}{\partial x_i} + \rho \tilde{u}_i \frac{\partial H(f)}{\partial x_i} \quad (4.76)$$

De même, on réécrit l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour \tilde{u}_i :

$$\begin{aligned} \frac{D_\infty}{Dt} \rho \tilde{u}_i &= \frac{\partial}{\partial t} [\rho(u_i - U_i^\infty)] + U_j^\infty \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho(u_i - U_i^\infty)] \\ &= \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} - U_i^\infty \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_j^\infty \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} - U_i^\infty U_j^\infty \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \end{aligned}$$

On remplace les dérivées temporelles en utilisant les équations de conservation de la masse volumique et de la quantité de mouvement pour u_i :

$$\frac{D_\infty}{Dt} \rho \tilde{u}_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + U_i^\infty \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} + U_j^\infty \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} - U_i^\infty U_j^\infty \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$$

or :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j - \rho u_i U_j^\infty - \rho u_j U_i^\infty + \rho U_i^\infty U_j^\infty) \\ &= \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} - U_i^\infty \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} - U_j^\infty \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} + U_i^\infty U_j^\infty \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \end{aligned}$$

soit :

$$\frac{D_\infty}{Dt} \rho \tilde{u}_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j}$$

ou encore :

$$\frac{D_\infty}{Dt} \rho \tilde{u}_i + c_\infty^2 \frac{\partial (\rho - \rho_\infty)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{T}_{ij}}{\partial x_j}$$

en posant $\tilde{T}_{ij} = \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j + (p - c_\infty^2(\rho - \rho_\infty))\delta_{ij} - \tau_{ij}$.

On introduit alors les variables généralisées :

$$\frac{D_\infty}{Dt} [\rho \tilde{u}_i H(f)] + c_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho - \rho_\infty)H(f)] = -\frac{\partial}{\partial x_j} [\tilde{T}_{ij} H(f)] + [\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j + p\delta_{ij} - \tau_{ij}] \frac{\partial H(f)}{\partial x_j} + \rho \tilde{u}_i \frac{D_\infty H(f)}{Dt}$$

soit, pour une surface immobile :

$$\begin{aligned} \frac{D_\infty}{Dt} [\rho \tilde{u}_i H(f)] + c_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho - \rho_\infty)H(f)] = \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} [\tilde{T}_{ij} H(f)] + [\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j + p\delta_{ij} - \tau_{ij}] \frac{\partial H(f)}{\partial x_j} + \rho \tilde{u}_i U_j^\infty \frac{\partial H(f)}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\text{où } \frac{\partial H(f)}{\partial x_j} = \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

On forme ensuite la combinaison $\frac{D_\infty}{Dt}(4.76) - \frac{\partial}{\partial x_i}(4.77)$:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{D_\infty^2}{Dt^2} - c_\infty^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right\} [(\rho - \rho_\infty)H(f)] = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [\tilde{T}_{ij} H(f)] + \frac{D_\infty}{Dt} \left[((\rho - \rho_\infty)U_i^\infty + \rho \tilde{u}_i) \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(p\delta_{ij} - \tau_{ij} + \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \rho \tilde{u}_i U_j^\infty) \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \end{aligned}$$

On exprime la dérivée en suivant l'écoulement extérieur du membre de droite :

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{D_\infty^2}{Dt^2} - c_\infty^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right\} [(\rho - \rho_\infty)H(f)] = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [\tilde{T}_{ij} H(f)] + \frac{\partial}{\partial t} \left[((\rho - \rho_\infty)U_i^\infty + \rho \tilde{u}_i) \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[((\rho - \rho_\infty)U_i^\infty U_j^\infty + \rho \tilde{u}_j U_i^\infty) \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(p\delta_{ij} - \tau_{ij} + \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \rho \tilde{u}_i U_j^\infty) \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \end{aligned}$$

Enfin, on regroupe les termes sous la forme :

$$\left\{ \frac{D_\infty^2}{Dt^2} - c_\infty^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right\} [(\rho - \rho_\infty)H(f)] = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [\tilde{T}_{ij} H(f)] + \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{Q} \delta(f)] + \frac{\partial}{\partial x_i} [\tilde{F}_i \delta(f)] \quad (4.78)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ij} &= \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j + (p - c_\infty^2(\rho - \rho_\infty))\delta_{ij} - \tau_{ij} \\ \tilde{F}_i &= -[\rho(\tilde{u}_i - U_i^\infty)(\tilde{u}_j + U_j^\infty) + \rho_\infty U_i^\infty U_j^\infty + p\delta_{ij} - \tau_{ij}] \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ \tilde{Q} &= [(\rho - \rho_\infty)U_i^\infty + \rho \tilde{u}_i] \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

ou par rapport aux vitesses totales u_i :

$$\tilde{T}_{ij} = \rho(u_i - U_i^\infty)(u_j - U_j^\infty) + (p - c_\infty^2(\rho - \rho_\infty))\delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (4.79)$$

$$\tilde{F}_i = -[\rho(u_i - 2U_i^\infty)u_j + \rho_\infty U_i^\infty U_j^\infty + p\delta_{ij} - \tau_{ij}] \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (4.80)$$

$$\tilde{Q} = [\rho u_i - \rho_\infty U_i^\infty] \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (4.81)$$

Il s'agit de l'équation de Ffowcs Williams et Hawkins *convectée*. L'obtention des formulations intégrales s'effectue alors de la même façon que pour l'équation dans un milieu immobile décrite au §4.2.3.1.

Formulation fréquentielle

En remplaçant les variables par leur représentation dans l'espace de Fourier, donnée par (4.9), on forme une équation de Helmholtz inhomogène convectée à partir de (4.78) :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 - 2iM_i k \frac{\partial}{\partial x_i} - M_i M_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) (H(f) c_\infty^2 \rho'(\mathbf{x}, \omega)) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\tilde{F}_i(\mathbf{x}, \omega) \delta(f) \right] - i\omega \left[\tilde{Q}(\mathbf{x}, \omega) \delta(f) \right] - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\tilde{T}_{ij}(\mathbf{x}, \omega) H(f) \right] \end{aligned} \quad (4.82)$$

En convoluant avec la fonction de Green, solution de l'équation de Helmholtz, on obtient :

$$H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) = - \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial x_i} \tilde{F}_i(\mathbf{y}, \omega) \delta(f) d\mathbf{y} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} & - \iiint_{-\infty}^{\infty} i\omega \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) \tilde{Q}(\mathbf{y}, \omega) \delta(f) d\mathbf{y} \\ & - \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{T}_{ij}(\mathbf{y}, \omega) H(f) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.84)$$

En utilisant :

$$\frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial x_i} = - \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i},$$

(4.84) devient :

$$\begin{aligned} H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) &= - \iiint_{f>0} \tilde{T}_{ij}(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial^2 \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} d\mathbf{y} \\ &+ \iint_{f=0} \tilde{F}_i(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} d\Sigma(\mathbf{y}) - \iint_{f=0} i\omega \tilde{Q}(\mathbf{y}, \omega) \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) d\Sigma(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.85)$$

On applique ainsi les dérivées sur la fonction de Green, évitant une différentiation des variables primitives, qui peut générer des erreurs numériques. La dérivation de la fonction de Green peut en effet s'effectuer analytiquement. Par exemple, en 2-D, (4.85) s'écrit :

$$\begin{aligned} H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) &= - \iint_{f>0} \tilde{T}_{ij}(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial^2 \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} d\mathbf{y} \\ &+ \int_{f=0} \tilde{F}_i(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} dl(\mathbf{y}) - \int_{f=0} i\omega \tilde{Q}(\mathbf{y}, \omega) \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) dl(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.86)$$

En notant $r_i = x_i - y_i$, la fonction de Green (4.43) a pour expression :

$$\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \omega) = \mathcal{A}(r_1) H_0^{(2)} \left(\frac{kr_\beta}{\beta^2} \right)$$

où on a posé

$$\mathcal{A}(r_1) = \frac{i}{4\beta} \exp \left(\frac{iMkr_1}{\beta^2} \right)$$

Les dérivées premières qui interviennent dans le terme dipolaire sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_1} = -\mathcal{A}(r_1) \left\{ \frac{iMk}{\beta^2} H_0^{(2)} \left(\frac{kr_\beta}{\beta^2} \right) - \frac{k}{\beta^2} \frac{r_1}{r_\beta} H_1^{(2)} \left(\frac{kr_\beta}{\beta^2} \right) \right\} \\ \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_2} = \mathcal{A}(r_1) \left\{ \frac{kr_2}{r_\beta} H_1^{(2)} \left(\frac{kr_\beta}{\beta^2} \right) \right\} \end{cases} \quad (4.87)$$

Les dérivées secondes qui interviennent dans le terme quadripolaire s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_1 \partial y_2} = -\mathcal{A}(r_1) \left\{ \frac{k^2 r_1 r_2}{\beta^2 r_\beta^2} H_0^{(2)} \left(\frac{kr_\beta}{\beta^2} \right) + \frac{kr_2}{r_\beta} \left(\frac{iMk}{\beta^2} - \frac{2r_1}{r_\beta^2} \right) H_1^{(2)} \left(\frac{kr_\beta}{\beta^2} \right) \right\} \\ \frac{\partial^2 \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_1^2} = -\mathcal{A}(r_1) \frac{k^2}{\beta^4} \left\{ \left(M^2 + \frac{r_1^2}{r_\beta^2} \right) H_0^{(2)} \left(\frac{kr_\beta}{\beta^2} \right) + \left(\frac{2iMr_1}{r_\beta} - \frac{\beta^2 r_1^2 - \beta^2 r_2^2}{k r_\beta^3} \right) H_1^{(2)} \left(\frac{kr_\beta}{\beta^2} \right) \right\} \\ \frac{\partial^2 \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_2^2} = -\mathcal{A}(r_1) \left\{ \frac{k^2 r_2^2}{r_\beta^2} H_0^{(2)} \left(\frac{kr_\beta}{\beta^2} \right) + \frac{k}{r_\beta} \left(\frac{r_1^2 - \beta^2 r_2^2}{r_\beta^2} \right) H_1^{(2)} \left(\frac{kr_\beta}{\beta^2} \right) \right\} \end{cases} \quad (4.88)$$

4.2.4.2 Formulations de Kirchhoff convectées

Comme pour l'équation de FW-H, ces formulations peuvent être obtenues de deux façons : soit on considère que la surface a un mouvement de translation uniforme dans un milieu au repos et on utilise un repère mobile; soit on considère que la surface est immobile dans un milieu en translation uniforme et on utilise une équation des ondes convectée.

Passage en coordonnées Lagrangiennes

La première possibilité correspond au changement de repère présenté par Ffowcs Williams et Hawkings⁷⁶ et conduit à l'expression :

$$\begin{aligned} 4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) &= \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{1}{r(1-M_r)} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} T_{ij}(\mathbf{z}, \tau^*) d\mathbf{z} \\ &- \iint_{\Sigma(f=0)} \left[\frac{1}{r(1-M_r)} \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{p}{r^2(1-M_r)} + \frac{1}{rc_\infty} \frac{1}{(1-M_r)} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right] (\mathbf{z}, \tau^*) d\Sigma(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\text{où } \tau^* = t - \frac{r}{c_\infty} \quad \mathbf{z} = \mathbf{y} - U_\infty \mathbf{e}_1 \tau^* \quad M_r = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}}{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \frac{U_\infty \mathbf{e}_1}{c_\infty}.$$

La difficulté dans l'application de cette formulation provient du fait qu'il faille exprimer les sources dans le système des coordonnées Lagrangiennes \mathbf{z} . Elle a été évaluée numériquement par Zhang, Rona et Lilley³¹⁷ pour obtenir la directivité en champ lointain du rayonnement d'une cavité de rapport $L/D = 3$ soumise à un écoulement supersonique à Mach 1.5 et 2.5. La

formulation utilisée, avec nos notations[†], s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (\rho - \rho_\infty)(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi c_\infty} \iiint_{V_0(\mathbf{y})} \frac{\partial^2 T_{ij}(\mathbf{z}, \tau^*)}{\partial z_i \partial z_j} \frac{d\mathbf{z}}{r^*} \\
 & - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial \rho(\mathbf{z}, \tau^*)}{\partial n} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{(\rho(\mathbf{z}, \tau^*) - \rho_\infty)}{r^*} - \frac{1}{r^* c_\infty} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \rho u_i(\mathbf{z}, \tau^*)}{\partial y_i} \right] d\Sigma(\mathbf{z})
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

où $r^* = r(1 - M_r)$. Une visualisation des termes sources T_{ij} montre la prédominance des quadripôles longitudinaux T_{11} mais aucune validation n'est proposée pour la pression en champ lointain.

Utilisation d'une équation d'onde convectée

La formulation de Kirchhoff convectée 3-D dans l'espace temporel :

Cette deuxième solution est employée par Morino¹⁹⁵ en écrivant l'équation des ondes convectée suivante :

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_\infty^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi = 0$$

On utilise alors la transformation de Prandtl-Glauert :

$$x_{1\beta} = x_1 \quad x_{2\beta} = \beta x_2 \quad x_{3\beta} = \beta x_3 \quad \text{avec} \quad \beta^2 = 1 - M_\infty^2, \quad M_\infty = U_\infty / c_\infty \tag{4.91}$$

pour obtenir les fonctions de Green convectées^{122†} qui sont rappelées au §4.2.2.1[†]. Le point de départ du raisonnement est la formule de Green convectée (voir annexe §4.4.2), que l'on écrit pour la pression :

$$\begin{aligned}
 H(f)p'(\mathbf{x}, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{V(\mathbf{y})} \tilde{Q}(\mathbf{y}, \tau) \tilde{G}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau \\
 & + \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} \left\{ \tilde{G} \frac{\partial p}{\partial y_i} - p \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_i} \right\} n_i d\Sigma(\mathbf{y}) d\tau \\
 & + \frac{U_\infty}{c_\infty^2} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} \left\{ p \frac{D_\infty \tilde{G}}{D\tau} - \tilde{G} \frac{D_\infty p}{D\tau} \right\} n_1 d\Sigma(\mathbf{y}) d\tau
 \end{aligned}$$

[†]Zhang *et al.* utilisent la convention inverse pour le sens de la normale. La dérivée temporelle a été remplacée en utilisant l'équation de conservation de la masse.

[†]§1.7.2, p.38-39 de réf.¹²²

[†]formule (4.39) en 3-D dans l'espace temporel, (4.43) en 2-D et (4.42) en 3-D dans l'espace spectral.

On développe la dernière intégrale :

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} \left\{ p \frac{D_{\infty} \tilde{G}}{D\tau} - \tilde{G} \frac{D_{\infty} p}{D\tau} \right\} n_1 d\Sigma(\mathbf{y}) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} \left\{ p \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tau} + p \delta_{1i} U_{\infty} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_i} - \tilde{G} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \tilde{G} \delta_{1i} U_{\infty} \frac{\partial p}{\partial y_i} \right\} n_1 d\Sigma(\mathbf{y}) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} \left\{ p \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tau} - \tilde{G} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right\} n_1 d\Sigma(\mathbf{y}) d\tau - U_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} \left\{ \tilde{G} \frac{\partial p}{\partial y_i} - p \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_i} \right\} n_1 d\Sigma(\mathbf{y}) d\tau
\end{aligned}$$

La formule de Green convectée devient :

$$\begin{aligned}
H(f)p'(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{V(\mathbf{y})} \tilde{Q}(\mathbf{y}, \tau) \tilde{G}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} \left\{ \tilde{G} \frac{\partial p}{\partial y_i} - p \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_i} \right\} (n_i - M_{\infty}^2 n_1) d\Sigma(\mathbf{y}) d\tau \\
&+ \frac{M_{\infty}}{c_{\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} \left\{ p \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tau} - \tilde{G} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right\} n_1 d\Sigma(\mathbf{y}) d\tau \tag{4.92}
\end{aligned}$$

Le premier terme de l'intégrale surfacique s'évalue de la façon suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) \frac{\partial p(\mathbf{y}, \tau)}{\partial y_i} d\tau = -\frac{1}{4\pi r_{\beta}} \frac{\partial p}{\partial y_i}(\mathbf{y}, t - \tau^*)$$

avec τ^* défini par (4.41). Pour transformer le deuxième terme, on évalue le gradient de \tilde{G} :

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y}, \tau) \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)}{\partial y_i} d\tau = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[p \delta(\tau - t + \tau^*) \frac{\partial(1/r_{\beta})}{\partial y_i} + \frac{p}{r_{\beta}} \frac{\partial \delta(\tau - t + \tau^*)}{\partial y_i} \right] d\tau$$

avec :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r_{\beta}} \right) &= -\frac{1}{r_{\beta}^2} \frac{\partial r_{\beta}}{\partial y_i} \\
\frac{\partial \delta(\tau - t + \tau^*)}{\partial y_i} &= \frac{\partial \delta(\tau - t + \tau^*)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau^*}{\partial y_i} = \delta'(\tau - t + \tau^*) \frac{1}{c_{\infty} \beta^2} \frac{\partial [r_{\beta} - M_{\infty}(x_1 - y_1)]}{\partial y_i} \\
&= \delta'(\tau - t + \tau^*) \frac{1}{c_{\infty} \beta^2} \left[\frac{\partial r_{\beta}}{\partial y_i} - M_{\infty} \frac{\partial (x_1 - y_1)}{\partial y_i} \right] \\
&= \delta'(\tau - t + \tau^*) \frac{1}{c_{\infty} \beta^2} \left[\frac{\partial r_{\beta}}{\partial y_i} + M_{\infty} \frac{\partial y_1}{\partial y_i} \right]
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} p \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_i} d\tau &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p}{r_{\beta}^2} \frac{\partial r_{\beta}}{\partial y_i} \delta(\tau - t + \tau^*) - \frac{1}{r_{\beta} c_{\infty} \beta^2} \left[\frac{\partial r_{\beta}}{\partial y_i} + M_{\infty} \frac{\partial y_1}{\partial y_i} \right] p \delta'(\tau - t + \tau^*) \right] d\tau \\
&= \frac{1}{4\pi r_{\beta}^2} \frac{\partial r_{\beta}}{\partial y_i} p(\mathbf{y}, t - \tau^*) + \frac{1}{4\pi r_{\beta} c_{\infty} \beta^2} \left[\frac{\partial r_{\beta}}{\partial y_i} + M_{\infty} \frac{\partial y_1}{\partial y_i} \right] \frac{\partial p(\mathbf{y}, t - \tau^*)}{\partial \tau}
\end{aligned}$$

On évalue ensuite le troisième terme de (4.92) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tau} - \tilde{G} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right\} d\tau &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{p}{r_\beta} \frac{\partial \delta(\tau - t + \tau^*)}{\partial \tau} - \frac{\delta(\tau - t + \tau^*)}{r_\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right\} d\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[-\frac{1}{r_\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right] (\mathbf{y}, t - \tau^*) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2}{r_\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right] (\mathbf{y}, t - \tau^*) \end{aligned}$$

On regroupe enfin tous les termes en tenant compte de $\tilde{Q} = \partial^2 \tilde{T}_{ij} / \partial y_i \partial y_j$ où \tilde{T}_{ij} est donné par (4.79) :

$$\begin{aligned} 4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) &= \iiint_{V(\mathbf{y})} \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} (\mathbf{y}, t - \tau^*) d\mathbf{y} \\ &\quad - \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial p}{\partial y_i} + \frac{p}{r_\beta^2} \frac{\partial r_\beta}{\partial y_i} + \frac{1}{r_\beta c_\infty \beta^2} \left(\frac{\partial r_\beta}{\partial y_i} + M_\infty \frac{\partial y_1}{\partial y_i} \right) \frac{\partial p}{\partial \tau} \right\} (\mathbf{y}, t - \tau^*) (n_i - M_\infty^2 n_1) d\Sigma(\mathbf{y}) \\ &\quad + \frac{M_\infty}{c_\infty} \iint_{\Sigma} \frac{2}{r_\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} n_1 d\Sigma(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} 2M_\infty \frac{1}{r_\beta c_\infty \beta^2} \frac{\partial y_1}{\partial y_i} \frac{\partial p}{\partial \tau} (n_i - M_\infty^2 n_1) &\stackrel{i=1}{=} 2M_\infty \frac{1}{r_\beta c_\infty \beta^2} \beta^2 \frac{\partial p}{\partial \tau} n_1 = \frac{2}{r_\beta} \frac{M_\infty}{c_\infty} \frac{\partial p}{\partial \tau} n_1 \\ &\stackrel{i \neq 1}{=} 0 \quad , \end{aligned}$$

on obtient la formulation de Kirchhoff 3-D convectée dans l'espace temporel :

$$\begin{aligned} 4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) &= \iiint_{V(\mathbf{y})} \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} (\mathbf{y}, t - \tau^*) d\mathbf{y} \\ &\quad - \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial p}{\partial y_i} + \frac{p}{r_\beta^2} \frac{\partial r_\beta}{\partial y_i} + \frac{1}{r_\beta c_\infty \beta^2} \left(\frac{\partial r_\beta}{\partial y_i} - M_\infty \frac{\partial y_1}{\partial y_i} \right) \frac{\partial p}{\partial \tau} \right\} (\mathbf{y}, t - \tau^*) (n_i - M_\infty^2 n_1) d\Sigma(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.93)$$

Une formulation de Kirchhoff convectée sans l'intégrale volumique a été publiée par Morino.¹⁹⁵ Elle a ensuite été reprise par Lyrantzis^{165†} puis par Lyrantzis et Mankbadi^{166,167‡}, qui l'appliquent au cas d'une source monopolaire en mouvement. C'est également cette formulation qui est appliquée pour prédire le bruit de jets supersoniques par Gamet^{82‡} et par Shih *et al.*^{268‡}.

Avec nos notations, la formule donnée par Morino s'écrit :

$$4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) = - \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial p}{\partial n_\beta} + \frac{p}{r_\beta^2} \frac{\partial r_\beta}{\partial n_\beta} + \frac{1}{r_\beta c_\infty \beta^2} \frac{\partial p}{\partial \tau} \left[\frac{\partial r_\beta}{\partial n_\beta} - M_\infty \frac{\partial y_1}{\partial n_\beta} \right] \right\} (\mathbf{y}, t - \tau^*) d\Sigma_\beta(\mathbf{y}) \quad (4.94)$$

[†]formule (13). Il faut changer le signe du 1er et du 3ème terme du crochet et remplacer x_0 par x'_0 dans la parenthèse.

[‡]formule (2). Il faut remplacer t par τ dans le 3ème terme et $x - x$ par $x - x'$ dans l'expression de r_0 .

[‡]résultats peu probants. La formule (7.5) possède les mêmes erreurs que la formule (13) de Lyrantzis. (7.14) est erroné.

[‡]formule (6). Il faut remplacer dS par sa transformée dS_0 .

où n_β et $d\Sigma_\beta$ sont les transformées de Prandtl-Glauert de n et $d\Sigma^\sharp$.

Formulation 3-D dans l'espace spectral :

On transforme l'équation de Green convectée (4.92) en utilisant la transformée de Fourier, définie par l'équation (4.8). Pour une fréquence $f = 2\pi/\omega$:

$$\begin{aligned} H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) &= \iiint_{V(\mathbf{y})} \tilde{Q}(\mathbf{y}, \omega) \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \\ &+ \iint_{\Sigma} \left\{ \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial p(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} - p(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} \right\} (n_i - M_\infty^2 n_i) d\Sigma(\mathbf{y}) \\ &- 2i\omega \frac{M_\infty}{c_\infty} \iint_{\Sigma} p(\mathbf{y}, \omega) \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) n_1 d\Sigma(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.95)$$

On exprime alors la fonction de Green 3-D dans l'espace spectral (4.42) :

$$\frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} = \frac{1}{4\pi} \exp \left\{ -\frac{ik}{\beta^2} [r_\beta - M_\infty (x_1 - y_1)] \right\} \left[\frac{1}{r_\beta^2} \frac{\partial r_\beta}{\partial y_i} + \frac{ik}{r_\beta \beta^2} \left(\frac{\partial r_\beta}{\partial y_i} + M_\infty \frac{\partial y_1}{\partial y_i} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) &= \iiint_{V(\mathbf{y})} \tilde{Q}(\mathbf{y}, \omega) \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \\ &- \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r_\beta} \frac{\partial p(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} + \frac{p(\mathbf{y}, \omega)}{r_\beta^2} \frac{\partial r_\beta}{\partial y_i} + \frac{i\omega}{r_\beta c_\infty \beta^2} p(\mathbf{y}, \omega) \left(\frac{\partial r_\beta}{\partial y_i} + M_\infty \frac{\partial y_1}{\partial y_i} \right) - \frac{2i\omega M_\infty}{r_\beta c_\infty \beta^2} p(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial y_1}{\partial y_i} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c_\infty \beta^2} [r_\beta - M_\infty (x_1 - y_1)] \right\} (n_i - M_\infty^2 n_i) d\Sigma(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) &= \iiint_{V(\mathbf{y})} \tilde{Q}(\mathbf{y}, \omega) \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \\ &- \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r_\beta} \frac{\partial p(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} + \frac{p(\mathbf{y}, \omega)}{r_\beta^2} \frac{\partial r_\beta}{\partial y_i} + \frac{i\omega}{r_\beta c_\infty \beta^2} p(\mathbf{y}, \omega) \left(\frac{\partial r_\beta}{\partial y_i} - M_\infty \frac{\partial y_1}{\partial y_i} \right) \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c_\infty \beta^2} [r_\beta - M_\infty (x_1 - y_1)] \right\} (n_i - M_\infty^2 n_i) d\Sigma(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.96)$$

[‡]Le facteur $(1 - \delta_{1i} M_\infty^2)$ de (4.93) est pris en compte dans la formulation de Morino en appliquant la transformée de Prandtl-Glauert à n et à $d\Sigma$.

$$\begin{aligned} &\text{equation (4.93) :} \\ &\text{si } i=1 \quad (1 - \delta_{1i} M_\infty^2) = \beta^2 \\ &\text{si } i \neq 1 \quad (1 - \delta_{1i} M_\infty^2) = 1 \end{aligned}$$

equation (4.94) :

$$\begin{aligned} \text{si } i=1 \quad \frac{d\Sigma_\beta}{n_\beta} &= \frac{dx_{2\beta} dx_{3\beta}}{x_{1\beta}} = \frac{\beta^2 dx_2 dx_3}{x_1} = \frac{\beta^2 d\Sigma}{n} \\ \text{si } i=2 \quad \frac{d\Sigma_\beta}{n_\beta} &= \frac{dx_{1\beta} dx_{3\beta}}{x_{2\beta}} = \frac{\beta dx_1 dx_3}{\beta x_2} = \frac{d\Sigma}{n} \\ \text{si } i=3 \quad \frac{d\Sigma_\beta}{n_\beta} &= \frac{dx_{1\beta} dx_{2\beta}}{x_{3\beta}} = \frac{\beta dx_1 dx_2}{\beta x_3} = \frac{d\Sigma}{n} \end{aligned}$$

ou en appliquant la transformée de Prandtl-Glauert à n et à $d\Sigma$:

$$\begin{aligned}
H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{V(\mathbf{y})} \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} \times \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c_\infty \beta^2} [r_\beta - M_\infty(x_1 - y_1)] \right\} d\mathbf{y} \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r_\beta} \frac{\partial p(\mathbf{y}, \omega)}{\partial n_\beta} + \frac{p(\mathbf{y}, \omega)}{r_\beta^2} \frac{\partial r_\beta}{\partial n_\beta} + \frac{i\omega}{r_\beta c_\infty \beta^2} p(\mathbf{y}, \omega) \left(\frac{\partial r_\beta}{\partial n_\beta} - M_\infty \frac{\partial y_1}{\partial n_\beta} \right) \right] \\
&\quad \times \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c_\infty \beta^2} [r_\beta - M_\infty(x_1 - y_1)] \right\} d\Sigma_\beta(\mathbf{y}) \quad (4.97)
\end{aligned}$$

Une formulation convectée, fréquentielle de l'équation de Kirchhoff, sans l'intégrale volumique, a été publiée par Lyrintzis et Mankbadi^{166,167†} dans le cas d'une source harmonique.

Formulation 2-D dans l'espace spectral :

On explicite la fonction de Green 2-D dans l'espace spectral (4.43) dans la formule de Green convectée dans l'espace spectral (4.95) :

$$\frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} = \frac{i}{4\beta} \exp \left(i \frac{M_\infty k(x_1 - y_1)}{\beta^2} \right) \left\{ -\frac{k}{\beta^2} \frac{\partial r_\beta}{\partial y_i} H_1^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) - i \frac{M_\infty k}{\beta^2} \frac{\partial y_1}{\partial y_i} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) &= \iint_{V(\mathbf{y})} \tilde{Q}(\mathbf{y}, \omega) \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \\
&\quad + \frac{i}{4\beta} \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial p(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) + \frac{kp(\mathbf{y}, \omega)}{\beta^2} \left[\frac{\partial r_\beta}{\partial y_i} H_1^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + iM_\infty \frac{\partial y_1}{\partial y_i} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) - 2iM_\infty \frac{\partial y_1}{\partial y_i} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) \right] \right\} \\
&\quad \times \exp \left(i \frac{M_\infty k(x_1 - y_1)}{\beta^2} \right) (n_i - M_\infty^2 n_1) d\Sigma(\mathbf{y}) \quad (4.98)
\end{aligned}$$

et, en explicitant l'intégrale de volume et en utilisant la transformation de Prandtl-Glauert (4.91) pour n et $d\Sigma$:

$$\begin{aligned}
H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) &= -\frac{i}{4\beta} \iiint_{V(\mathbf{y})} \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) \times \exp \left(i \frac{M_\infty k(x_1 - y_1)}{\beta^2} \right) d\mathbf{y} \\
&\quad + \frac{i\beta}{4} \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial p(\mathbf{y}, \omega)}{\partial n_\beta} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) + \frac{kp(\mathbf{y}, \omega)}{\beta^2} \left[\frac{\partial r_\beta}{\partial n_\beta} H_1^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - iM_\infty \frac{\partial y_1}{\partial n_\beta} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) \right] \right\} \times \exp \left(i \frac{M_\infty k(x_1 - y_1)}{\beta^2} \right) d\Sigma_\beta(\mathbf{y}) \quad (4.99)
\end{aligned}$$

[†]formule (3). La convention utilisée pour la transformation de Fourier est l'inverse de celle adoptée ici.

4.3 Les méthodes d'extrapolation des ondes acoustiques

Les méthodes d'extrapolation des ondes, ou WEM pour *Wave Extrapolation Methods*, sont d'un grand intérêt pratique dans de nombreux domaines³⁶ comme la sismique, l'électromagnétisme, l'optique, ou l'acoustique sous-marine.

Ces méthodes sont généralement basées sur des expressions intégrales du champ en utilisant le formalisme des fonctions de Green. On présente ici deux formulations intégrales qui permettent d'étendre le champ acoustique dans un milieu observateur à partir de sa donnée sur une surface de contrôle Σ . La méthode de Kirchhoff classique ainsi que ses extensions sont présentées au §4.3.1 et une méthode d'extrapolation basée sur l'équation de Ffowcs Williams et Hawkings parfois appelée méthode FW-H surface poreuse est détaillée au §4.3.2.

4.3.1 La méthode de Kirchhoff

Elle permet de résoudre des problèmes acoustiques complexes en profitant de la grande similarité entre les équations de l'acoustique classique et de l'électromagnétisme. Elle s'appuie sur la théorie de Kirchhoff,¹⁴¹ d'abord appliqué à des problèmes de diffraction de la lumière. Elle a permis de nombreuses applications pour la propagation d'ondes acoustiques (voir Pierce²²¹) avant d'être utilisée comme une méthode hybride pour les calculs aéroacoustiques. Il s'agit d'une méthode de propagation du rayonnement acoustique dans un volume V à partir des données sur une surface fermée Σ englobant les sources de bruit et tous les effets non linéaires. A l'intérieur de Σ , les sources sonores, le champ proche et les interactions non linéaires sont calculés numériquement en utilisant un code CFD par exemple. A l'extérieur de cette surface de contrôle, le champ de pression est linéaire et peut être décrit par une simple équation d'onde. Comme pour l'approche analogique, on utilise alors le formalisme des fonctions de Green pour se ramener à la résolution d'une expression intégrale. Mais ici, l'intégration s'effectue uniquement sur Σ . On réduit ainsi le problème d'une dimension par rapport aux approches analogiques qui nécessitent l'évaluation d'intégrales volumiques pour les termes quadripolaires, très coûteuses numériquement.

4.3.1.1 Cas d'une surface stationnaire

Lorsque le milieu observateur V est uniforme, au repos, on peut utiliser la formule de Kirchhoff classique. La surface de contrôle, définie par $f = 0$, englobe toutes les sources de bruit. Le volume V à l'extérieur de Σ , défini par $f > 0$, est régi par l'équation des ondes classique :

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \equiv \square^2 \phi = 0$$

où ϕ peut être la pression ou le potentiel des fluctuations de vitesse et c_∞ la célérité du son. Les notations sont rappelées sur la figure 4.10.

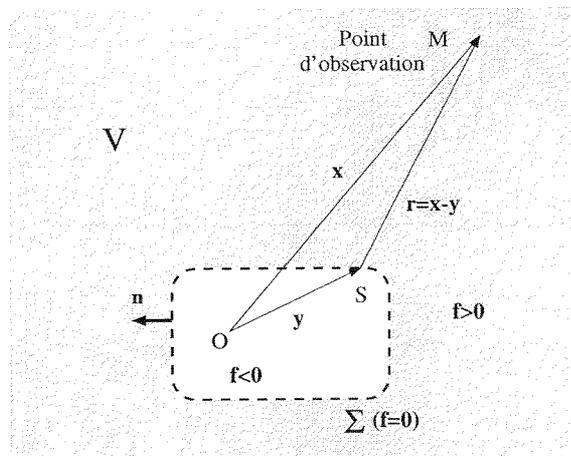


Figure 4.10: Notations utilisées pour la méthode de Kirchhoff.

Formulation dans l'espace temporel

L'obtention de la formule de Kirchhoff peut s'effectuer de deux manières : soit en s'appuyant sur une approche utilisant les fonctions de Green avec comme point de départ la formule de Green, soit en utilisant le concept des fonctions généralisées. La première solution est développée en détail au §4.2.3.2 dans le cadre de l'analogie acoustique. Si la surface Σ inclut toutes les sources, l'intégrale volumique de (4.71) disparaît et on obtient la formule de Kirchhoff classique :

$$4\pi H(f)\phi(\mathbf{x}, t) = - \iint_{\Sigma(f=0)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\phi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{1}{rc_\infty} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) \quad (4.100)$$

où $[\]_{\tau^*}$ indique que les variables sont évaluées au temps retardé $\tau^* = t - r/c_\infty$. La deuxième démonstration est donnée dans l'annexe §4.4.3. En définissant $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ soit $r_i = x_i - y_i$, il vient :

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial y_i} n_i = - \frac{\partial r}{\partial r_i} n_i = - \frac{r_i}{r} n_i = - \cos \theta$$

où θ est l'angle entre la normale \mathbf{n} et la direction de rayonnement \mathbf{r} . L'équation (4.124) s'écrit alors[†] :

$$4\pi H(f)\phi(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma(f=0)} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{c_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) + \iint_{\Sigma(f=0)} \frac{[\phi]_{\tau^*} \cos \theta}{r^2} d\Sigma(\mathbf{y})$$

La définition de la fonction de Heaviside implique que cette expression fournit un champ exactement nul à l'intérieur de Σ . Cette propriété constitue un bon critère de vérification de la méthode lors d'une implémentation numérique.

[†]Toutes les formules présentées par Lyrintzis¹⁶⁵ sont erronées. Il faut remplacer $\partial r/\partial n$ par $-\partial r/\partial n$. Par ailleurs, il manque un $\cos \theta$ dans le troisième terme de la formule (2.15) donnée par Pilon,²²² p.13.

Formulation dans l'espace spectral

On peut également exprimer cette formule dans l'espace spectral en utilisant la transformée de Fourier inverse, définie par l'équation (4.9). (4.123) devient alors :

$$\frac{\bar{\partial}^2}{\partial x_i^2} [H(f)\phi(\mathbf{x}, \omega)] + k^2 H(f)\phi(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \omega)}{\partial n} \delta(f) + \frac{\bar{\partial}}{\partial x_i} [\phi(\mathbf{x}, \omega) n_i \delta(f)]$$

où on a simplifié par $\exp(i\omega t)$ pour éviter une écriture aux temps retardés. On peut alors convoluer avec la fonction de Green 3-D dans l'espace spectral (4.11) :

$$4\pi H(f)\phi(\mathbf{x}, \omega) = \iint_{\Sigma} e^{-i\omega r/c_\infty} \left[-\frac{1}{r} \left(\frac{i\omega}{c_\infty} \cos \theta \phi(\mathbf{y}, \omega) + \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{y}, \omega) \right) + \frac{\phi(\mathbf{y}, \omega) \cos \theta}{r^2} \right] d\Sigma(\mathbf{y}) \quad (4.101)$$

La formulation spectrale est beaucoup moins utilisée que la version temporelle. Elle est néanmoins très intéressante pour traiter des problèmes bidimensionnels car la fonction de Green 2-D dans l'espace temporel ne contient plus la fonction Dirac, qui conduit aux temps retardés. On doit alors intégrer temporellement jusqu'à $-\infty$.^{222,161} Il est alors préférable d'utiliser une version spectrale qui, après convolution, s'écrit :

$$4iH(f)\phi(\mathbf{x}, \omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi(\mathbf{y}, \omega)}{\partial n} H_0^{(2)}(kr) \delta(f) dy - \frac{\bar{\partial}}{\partial x_i} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{y}, \omega) n_i H_0^{(2)}(kr) \delta(f) dy$$

Ici, l'opérateur gradient du deuxième terme, lorsqu'on l'exprime à l'intérieur de l'intégrale, agit seulement sur la fonction de Hankel^{222†} :

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial x_i} H_0^{(2)}(kr) = \frac{\bar{\partial}(kr)}{\partial x_i} (-H_1^{(2)}(kr)) = -k \frac{\partial r}{\partial x_i} H_1^{(2)}(kr) = k \frac{\partial r}{\partial y_i} H_1^{(2)}(kr)$$

d'où :

$$4iH(f)\phi(\mathbf{x}, \omega) = - \int_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial \phi(\mathbf{y}, \omega)}{\partial n} H_0^{(2)}(kr) + \frac{\partial r}{\partial n} k \phi(\mathbf{y}, \omega) H_1^{(2)}(kr) \right\} d\Sigma(\mathbf{y})$$

4.3.1.2 Cas d'une surface en mouvement

Dès 1930, Morgans¹⁹⁴ étend la formulation classique, limitée au cas d'une surface stationnaire, au cas d'une surface en mouvement en utilisant le formalisme des fonctions de Green. Cette approche fastidieuse a été critiquée par Ffowcs Williams et Hawkins^{75,103} qui considèrent que le résultat final est erroné. Farassat et Myers^{67,68} y voient plutôt une ambiguïté dont Morgans était parfaitement conscient. Toujours en utilisant une approche basée sur les fonctions de Green, Morino¹⁹⁵ étend la formulation au cas particulier où la surface de contrôle est en mouvement de translation uniforme par rapport au milieu observateur. C'est l'utilisation des fonctions généralisées, introduites en aéroacoustique par Ffowcs Williams et Hawkins,⁷⁵ qui va

[†]formule (2.19), p.15

permettre d'étendre la formulation de Kirchhoff au cas d'une surface en mouvement quelconque en évitant les ambiguïtés et la complexité du résultat de Morgans. Farassat et Myers⁶⁷ écrivent cette formulation pour une surface déformable en mouvement quelconque.

Mouvement uniforme

En utilisant l'équivalence par changement de repère galiléen entre le problème où la surface est en mouvement de translation uniforme dans un milieu au repos et celui où la surface est immobile avec un écoulement dans le milieu d'observation, les formulations pour prendre en compte un mouvement uniforme de la surface de contrôle sont celles du §4.2.4.2 sans l'intégrale de volume.

- *Formulation 3-D dans l'espace temporel*

$$4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) = - \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{1}{r_{\beta}} \frac{\partial p}{\partial n_{\beta}} + \frac{p}{r_{\beta}^2} \frac{\partial r_{\beta}}{\partial n_{\beta}} + \frac{1}{r_{\beta} c_{\infty} \beta^2} \frac{\partial p}{\partial \tau} \left[\frac{\partial r_{\beta}}{\partial n_{\beta}} - M_{\infty} \frac{\partial y_1}{\partial n_{\beta}} \right] \right\}_{\tau^*} d\Sigma_{\beta}(\mathbf{y}) \quad (4.102)$$

où l'indice τ^* indique que les variables sont évaluées au temps retardé défini par (4.41).

- *Formulation 3-D dans l'espace spectral*

$$H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r_{\beta}} \frac{\partial p(\mathbf{y}, \omega)}{\partial n_{\beta}} + \frac{p(\mathbf{y}, \omega)}{r_{\beta}^2} \frac{\partial r_{\beta}}{\partial n_{\beta}} + \frac{i\omega}{r_{\beta} c_{\infty} \beta^2} p(\mathbf{y}, \omega) \left(\frac{\partial r_{\beta}}{\partial n_{\beta}} - M_{\infty} \frac{\partial y_1}{\partial n_{\beta}} \right) \right] \times \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c_{\infty} \beta^2} [r_{\beta} - M_{\infty} (x_1 - y_1)] \right\} d\Sigma_{\beta}(\mathbf{y}) \quad (4.103)$$

- *Formulation 2-D dans l'espace spectral*

$$H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i\beta}{4} \int_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial p(\mathbf{y}, \omega)}{\partial n_{\beta}} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_{\beta} \right) + \frac{kp(\mathbf{y}, \omega)}{\beta^2} \left[\frac{\partial r_{\beta}}{\partial n_{\beta}} H_1^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_{\beta} \right) - i M_{\infty} \frac{\partial y_1}{\partial n_{\beta}} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_{\beta} \right) \right] \right\} \times \exp \left(i \frac{M_{\infty} k (x_1 - y_1)}{\beta^2} \right) d\Sigma_{\beta}(\mathbf{y}) \quad (4.104)$$

Mouvement quelconque subsonique

Pour établir la formule de Kirchhoff dans le cas où la surface est en mouvement arbitraire ou peut se déformer, on réutilise le développement de Farassat et Myers mais, dans ce cas, la fonction f , qui définit la surface, est une fonction du temps. En notant v_n la vitesse normale de

la surface Σ , on a $v_n = -\partial f/\partial t$. La dérivée temporelle généralisée de la fonction généralisée $\tilde{\phi}$ définie précédemment s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial}\tilde{\phi}}{\partial t} &= \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} + \phi \frac{\partial f}{\partial t} \delta(f) = \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} - \phi v_n \delta(f) \\ \text{et : } \frac{\bar{\partial}^2\tilde{\phi}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial t^2} - \frac{\partial\phi}{\partial t} v_n \delta(f) - \frac{\bar{\partial}}{\partial t} [\phi v_n \delta(f)] \end{aligned}$$

On réécrit le d'Alembertien généralisé en tenant compte de ces nouveaux termes :

$$\bar{\square}^2\tilde{\phi} = \bar{\square}^2 H\phi = - \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} + \frac{1}{c_\infty} M_{n\Sigma} \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \delta(f) - \frac{1}{c_\infty} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} [M_{n\Sigma} \phi \delta(f)] - \frac{\bar{\partial}}{\partial x_i} [\phi n_i \delta(f)]$$

où $M_{n\Sigma} = v_n/c_\infty$ est le nombre de Mach local du mouvement de la surface Σ dans la direction normale à Σ . On convolue ensuite avec la fonction de Green 3-D en espace libre :

$$\begin{aligned} 4\pi H(f)\phi(\mathbf{x}, t) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} + \frac{1}{c_\infty} M_{n\Sigma} \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \delta(f)\delta(g) \, dyd\tau \\ &\quad - \frac{1}{c_\infty} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} M_{n\Sigma} \phi \delta(f)\delta(g) \, dyd\tau \\ &\quad - \frac{\bar{\partial}}{\partial x_i} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \phi n_i \delta(f)\delta(g) \, dyd\tau \end{aligned} \quad (4.105)$$

A ce stade, si l'on transforme les variables spatiales \mathbf{y} en variables lagrangiennes \mathbf{z} et que l'on effectue la transformation $\tau \rightarrow g$, le résultat de l'intégration des fonctions Dirac va conduire à une expression intégrale similaire à celle de Ffowcs Williams et Hawkins où les dérivations spatiales et temporelles sont à l'extérieur des intégrales donc exprimées par rapport à l'observateur, ce qui les rend difficiles à résoudre numériquement. Farassat et Myers préfèrent manipuler les équations de façon à garder les opérateurs dans les intégrales. Pour cela, ils commencent par transformer le gradient spatial de la dernière intégrale de (4.105) en dérivée temporelle en utilisant :

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial x_i} \left[\frac{\delta(g)}{r} \right] = \frac{1}{c_\infty} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \frac{\delta(g)}{r} \right] + \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\delta(g)}{r^2} \quad (4.106)$$

d'où (4.105) devient :

$$\begin{aligned} 4\pi H(f)\phi(\mathbf{x}, t) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} + \frac{1}{c_\infty} M_{n\Sigma} \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \delta(f)\delta(g) \, dyd\tau \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \delta(f)\delta(g) \, dyd\tau \\ &\quad - \frac{1}{c_\infty} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} + M_{n\Sigma} \right) \delta(f)\delta(g) \, dyd\tau \end{aligned}$$

Pour appliquer la dérivée temporelle par rapport à l'observateur de la dernière intégrale à l'intérieur de l'intégrale, par rapport au temps de la source, on introduit les coordonnées locales à la surface (u^1, u^2, u^3) . La surface $f = 0$ est paramétrée par les coordonnées curvilignes (u^1, u^2) et $u^3 = f$. On transforme alors τ en g . Le jacobien de $\mathbf{y} \rightarrow (u^1, u^2, u^3)$ est 1 et celui

de $\tau \rightarrow g$ est $1/(1 - M_r^\Sigma)$, où M_r^Σ est le nombre de Mach du mouvement de la surface Σ dans la direction de l'observateur, c'est-à-dire : $M_r^\Sigma = \mathbf{u}^\Sigma \cdot \mathbf{r}/rc_\infty$.

L'intégration des Dirac par rapport à \mathbf{u} et g fournit :

$$\begin{aligned}
4\pi H(f)\phi(\mathbf{x}, t) = & - \iint_{\mathcal{D}(\Sigma)} \left[\frac{\sqrt{g_{(2)}}}{r(1 - M_r^\Sigma)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{M_n^\Sigma}{c_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) \right]_{\tau^*} du^1 du^2 \\
& - \iint_{\mathcal{D}(\Sigma)} \left[\frac{\sqrt{g_{(2)}}}{1 - M_r^\Sigma} \frac{\phi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \right]_{\tau^*} du^1 du^2 \\
& - \iint_{\mathcal{D}(\Sigma)} \left\{ \frac{1}{c_\infty r(1 - M_r^\Sigma)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\phi \sqrt{g_{(2)}}}{1 - M_r^\Sigma} \left(\frac{\partial r}{\partial n} + M_n^\Sigma \right) \right] \right\}_{\tau^*} du^1 du^2 \quad (4.107)
\end{aligned}$$

où $g_{(2)} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ est le déterminant du tenseur métrique $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$ pour Σ et $\mathcal{D}(\Sigma)$ est le domaine de Σ dans l'espace défini par (u^1, u^2) . L'indice τ^* indique que les grandeurs sont évaluées au temps retardé, solution de :

$$g = \tau - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(u^1, u^2, 0, \tau)|}{c_\infty} = 0 \quad (4.108)$$

Ce résultat est la formulation de Farassat et Myers pour surface en mouvement quelconque et qui peut se déformer[†]. Afin de pouvoir l'appliquer numériquement, Farassat et Myers ont développé analytiquement les dérivées temporelles $\partial/\partial\tau$ par rapport au temps de la source puis ils ont groupé les termes en $1/r$ et $1/r^2$:

$$4\pi H(f)\phi(\mathbf{x}, t) = - \iint_{\Sigma'} \left[\frac{E_1}{r(1 - M_r^\Sigma)} + \frac{\phi E_2}{r^2(1 - M_r^\Sigma)^2} \right]_{\tau^*} d\Sigma' \quad (4.109)$$

avec :

$$\begin{aligned}
E_1 = & ((M_n^\Sigma)^2 - 1) \frac{\partial \phi}{\partial n} + M_n^\Sigma (M^\Sigma \cdot \nabla_2 \phi) - \frac{M_n^\Sigma}{c_\infty} \dot{\phi} + \frac{1}{c_\infty(1 - M_r^\Sigma)^2} \left[\dot{M}_r^\Sigma (\cos \theta - M_n^\Sigma) \phi \right] \\
& + \frac{1}{c_\infty(1 - M_r^\Sigma)} \left[(\dot{n}_r - \dot{M}_n^\Sigma - \dot{n}_M) \phi + (\cos \theta - M_n^\Sigma) \dot{\phi} + (\cos \theta - M_n^\Sigma) \phi \dot{\sigma} \right] \quad (4.110)
\end{aligned}$$

$$E_2 = \frac{1 - M^2}{(1 - M_r^\Sigma)^2} (\cos \theta - M_n^\Sigma) \quad (4.111)$$

[†]Pour plus de détails, on peut se reporter aux références.^{67,64,222} Un exemple de calcul de $g_{(2)}$ y est présenté pour une surface Σ sphérique.

Les notations sont les suivantes :

$$\Sigma' = \mathcal{D}(\Sigma) \quad d\Sigma' = [\sqrt{g(2)}]_{\tau^*} du^1 du^2$$

M^Σ : vecteur nombre de Mach tangent à Σ

∇_2 : opérateur gradient par rapport à Σ

\dot{x} : dérivée temporelle par rapport au temps de la source avec (u^1, u^2, u^3) constant

$\dot{\phi} = c_\infty M_n^\Sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} + c_\infty M^\Sigma \cdot \nabla_2 \phi + \frac{\partial \phi}{\partial \tau}$: dérivée convectée en suivant le mouvement de Σ

$$\begin{aligned} \dot{M}_r^\Sigma &= \dot{M}_i \frac{r_i}{r} & \dot{n}_r &= \dot{n}_i \frac{r_i}{r} & \cos \theta &= -\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{n} = -\frac{r_i}{r} n_i \\ \dot{M}_n^\Sigma &= \dot{M}_i n_i & \dot{n}_M &= \dot{n}_i M_i & \dot{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{g(2)}} \frac{\partial \sqrt{g(2)}}{\partial \tau} \end{aligned}$$

Si la surface est rigide, $g(2) = 1$ et le nouvel élément de surface $d\Sigma' = [\sqrt{g(2)}]_{\tau^*} du^1 du^2$ devient $d\Sigma' = d\Sigma$. On a également $\dot{\sigma} = 0$. Pour une surface en translation uniforme, on peut simplifier en prenant $\dot{n}_i = 0$ et $\dot{M}_i = 0$. Pour une surface en rotation, on a $\dot{n} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, où $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse de rotation.

La version simplifiée de (4.109) dans le cas d'une surface rigide (non déformable mais pas forcément matérielle) en mouvement rectiligne uniforme a été écrite par Myers et Hausmann¹⁹⁹ :

$$4\pi H(f)\phi(\mathbf{x}, t) = - \iint_{\Sigma} \left[\frac{\tilde{E}_1}{r(1 - M_r^\Sigma)} + \frac{\phi E_2}{r^2(1 - M_r^\Sigma)} \right]_{\tau^*} d\Sigma \quad (4.112)$$

avec :

$$\tilde{E}_1 = ((M_n^\Sigma)^2 - 1) \frac{\partial \phi}{\partial n} + M_n^\Sigma (M^\Sigma \cdot \nabla \phi) + \left[\frac{\cos \theta - M_n^\Sigma}{c_\infty(1 - M_r^\Sigma)} - \frac{M_n^\Sigma}{c_\infty} \right] \frac{\partial \phi}{\partial \tau}$$

C'est cette formulation qui a été utilisée par Myers et Hausmann pour calculer le champ acoustique rayonné par une source monopolaire en mouvement¹⁹⁹ ou diffracté par un profil en mouvement,²⁰⁰ par Pilon²²² dans le cas d'une source acoustique monopolaire ou dipolaire en mouvement ou par Özyörük²¹² pour calculer le bruit produit par un jet rond subsonique.

Une autre formulation pour un mouvement subsonique arbitraire a été obtenue par Morino et Tseng^{196†} sous une forme un peu différente de celle de Farassat et Myers dans le cas où l'observateur se déplace à la vitesse de la surface Σ . Cette formulation est intéressante dans le cas du bruit d'un rotor d'hélicoptère pour lequel l'observateur (pilote) se déplace effectivement avec l'écoulement moyen. De plus, cette formule est plus facilement transposable en supersonique que celle de Farassat et Myers.

Mouvement quelconque supersonique

Si la surface est en mouvement supersonique, l'équation (4.108) des temps retardés n'admet plus une solution unique.¹⁹⁵ L'équation (4.107) est toujours valable mais présente des singularités

[†] formule (26) dans Lyrantzis.¹⁶⁵

dans certaines directions où le facteur Doppler $1 - M_r^\Sigma$ du dénominateur peut s'annuler. Une solution consiste à utiliser des formulations différentes qui ne présentent plus de discontinuités dans l'espace-temps considéré.

Dans leur article de 1969, Ffowcs Williams et Hawkins⁷⁵ proposent quatre formulations différentes[†], où une double transformation en espace et en temps a été appliquée. Le principe est le suivant. On cherche à résoudre le problème $\square^2\phi = Q(\mathbf{x}, t)\delta(f)$ où Q représente des sources surfaciques[‡]. En convoluant avec la fonction de Green 3-D en espace libre, on aboutit à l'intégrale :

$$4\pi\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} Q(\mathbf{y}, \tau) \delta(f) \delta(g) dyd\tau \quad (4.113)$$

Si $\mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}, \tau)$ est la vitesse dans le repère eulérien fixe (O, \mathbf{y}) d'un élément $\boldsymbol{\eta}$, vérifiant $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y}$ à l'instant initial $\tau = t_0$, alors :

$$\mathbf{y}(\boldsymbol{\eta}, \tau) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}, \tau') d\tau', \quad \tau > t_0 \quad (4.114)$$

Par conservation de la masse d'un élément durant le mouvement arbitraire, l'élément de volume $d\mathbf{y}$ est égal à $Jd\boldsymbol{\eta}$, où J est le jacobien de la transformation. On effectue également une transformation temporelle. La variable τ est remplacée par une nouvelle variable λ telle que :

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right|_{\boldsymbol{\eta}} = c_\infty \alpha$$

α est un facteur d'échelle qui permet de relier les échelles temporelles et spatiales considérées.

En appliquant ces deux transformations à (4.113), il vient :

$$4\pi\phi(\mathbf{x}, t) = \iiint_{\sigma} \frac{q(\boldsymbol{\eta}, \lambda)}{\sqrt{(1 - M_r^\Sigma)^2 + B^2 \sin^2 \theta}} \frac{A}{r} d\sigma \quad (4.115)$$

où on a noté $q(\boldsymbol{\eta}, \tau)$ la transformée de $Q(\mathbf{y}, \tau)$, θ l'angle entre $\nabla_{\boldsymbol{\eta}} f$ et $\nabla_{\boldsymbol{\eta}} g$,

$$\begin{aligned} A &= J \left| \frac{\nabla_{\mathbf{y}} f}{\nabla_{\boldsymbol{\eta}} f} \right| \\ B^2 &= \alpha^2 (1 + 2a_r + a_i^2) \\ a_i &= \frac{r_j}{r} \int_{t_0}^{\tau} c_\infty \frac{\partial M_j^\Sigma}{\partial \eta_i} d\tau' - c_\infty (1 - M_r^\Sigma) \left. \frac{\partial \tau}{\partial \eta_i} \right|_{\lambda} \end{aligned}$$

σ est le sous-espace défini par $f = 0$ et $g = 0$. Il s'agit de la forme la plus générale donnée par Ffowcs Williams et Hawkins (formule (4.6)). L'intégrale est singulière si $\sin \theta = 0$, ce qui se produit lorsque la surface se déplace à la vitesse c_∞ avec sa normale parallèle à la direction de

[†]Formules (3.21), (3.22), (3.23) et (3.24), p.329. La première (3.21), qui correspond au résultat de Lowson,¹⁶⁴ possède toujours les mêmes singularités pour $1 - M_r^\Sigma = 0$.

[‡]Le raisonnement reste valable pour d'autres types de sources. La formule (4.23) de Farassat⁶⁴ détaille les différentes possibilités.

rayonnement. Cette singularité est intégrable (§7 de réf⁷⁵). La formulation aux temps retardés dans ce cas serait :

$$4\pi\phi(\mathbf{x}, t) = \iint_{f=0} \left[\frac{Q(\mathbf{y}, \tau)}{r|1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\sigma \quad (4.116)$$

où $[\]_{\tau^*}$ indique l'évaluation au temps retardé τ^* . Les caractères spatial et temporel des sources sont traités séparément. Le champ sonore est généré par une distribution spatiale de sources qui évoluent dans le temps. L'approche globale dans un espace de dimension 4 proposée par Ffowcs Williams et Hawkings considère des sources distribuées sur une hypersurface. Même si l'approche est plus complexe, elle réduit les singularités possibles au cas où l'hypersurface est parallèle à l'axe temporel.

Farassat et Myers⁶⁹ (1995) proposent une autre formulation où le calcul s'effectue sur les surfaces d'émission acoustique afin toujours d'éviter les singularités du facteur Doppler dans la direction de rayonnement. Le point de départ est (4.113). On effectue alors l'intégration temporelle en changeant τ en g pour faire apparaître les temps retardés, avant d'avoir explicité le produit par $\delta(f)$:

$$4\pi\phi(\mathbf{x}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} [Q(\mathbf{y}, \tau)]_{\tau^*} \delta(F) d\mathbf{y}$$

où : $F(\mathbf{y}; \mathbf{x}, t) = [f(\mathbf{y}, \tau)]_{\tau^*} = f\left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty}\right)$.

On a alors $|\nabla F| = (1 + M_{n_\Sigma}^2 - 2M_{n_\Sigma} \cos \theta)^{1/2} \equiv \Lambda$

où $M_{n_\Sigma} = u_n^\Sigma / c_\infty$, $u_n^\Sigma = -\partial f / \partial t$ et $\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$. On a donc :

$$4\pi\phi(\mathbf{x}, t) = \iint_{F=0} \frac{1}{r} \left[\frac{Q(\mathbf{y}, \tau)}{\Lambda} \right]_{\tau^*} d\Sigma'(\mathbf{y}) \quad (4.117)$$

où $d\Sigma'$ est un élément de la surface $F = 0$. La surface $\Sigma'(F = 0)$ correspond à l'intersection entre la surface $\Sigma(f = 0)$ et la sphère de rayon $r = c_\infty(t - \tau)$. Il s'agit des surfaces d'émission acoustique ou *emission-surface*.⁶⁴ L'intégration sur ces surfaces évite les singularités dans la plupart des cas. La seule singularité se produit lorsque le nombre de Mach dans la direction normale $M_{n_\Sigma} = 1$ et $\cos \theta = 0$ mais Farassat a montré que l'équation est encore intégrable. La singularité $\Lambda = 0$ est donc beaucoup moins restrictive que l'annulation du facteur Doppler dans les algorithmes utilisant les temps retardés. Pour les applications au bruit des rotors, elle présente un second avantage : à partir d'une approximation de champ lointain proposée par Yu *et al.*,³¹⁰ on peut intégrer analytiquement les termes quadripolaires dans la direction azimuthale, réduisant d'une dimension l'intégrale volumique. C'est la formule (Q1), ou (Q1A) sous sa forme pratique, établies par Brentner^{27†}. Cependant, la principale difficulté pour l'application numérique de

[†]On remplace T_{ij} par $Q_{ij} = \int_{f>0} T_{ij} dz$, où z est la direction perpendiculaire au disque formé par le rotor. La formule (Q1) est la formule (6) de réf.²⁷ et (Q1A) est donnée par (17).

la méthode *emission-surface* réside dans la construction de la surface Σ' . La solution intégrale à l'équation de FW-H, donnée par Howe^{122†}, s'appuie également sur une surface d'émission acoustique F (*retarded surface*).

Une autre possibilité de calcul consiste à effectuer l'intégration sur une autre surface qui est l'intersection de la surface de contrôle $f = 0$ et des sphères des temps retardés $g = 0$, c'est-à-dire les sphères de rayon $r = c_\infty(t - \tau)$ centrées sur le point observateur (\mathbf{x}, t) fixé. On parle de *collapsing sphere* car le rayon de la sphère diminue lorsque τ approche t . Pour le problème (4.113) considéré précédemment, la solution intégrale s'écrit :

$$4\pi\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t \iint_{\substack{f=0 \\ g=0}} \frac{Q(\mathbf{y}, \tau)}{r \sin\theta} c_\infty d\Gamma d\tau \quad (4.118)$$

Cette méthode développée par Farassat et Brown^{66,26} peut permettre d'éviter les singularités du facteur Doppler pour un mouvement supersonique mais est très coûteuse numériquement car il faut construire les surfaces d'intersection de nombreuses fois pour chaque point observateur (\mathbf{x}, t) .

4.3.2 Méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H

Dans les développements de l'analogie de FW-H, on a vu qu'il n'est pas nécessaire que la surface d'intégration corresponde aux parois physiques d'un objet. Ainsi, la non-imposition de la condition d'imperméabilité permet d'étendre l'analogie à des surfaces fictives (comme le front d'une flamme) ou des parois poreuses ou vibrantes^{45†}. Même si l'article original de 1969 traite de surfaces physiques, la formulation de FW-H est déjà perçue comme une alternative à celle de Kirchhoff[‡]. Ainsi, l'application de l'analogie de FW-H à une surface de type Kirchhoff qui englobe toutes les sources de bruit conduit, en supprimant l'intégrale de volume, à une méthode d'extrapolation similaire à la méthode de Kirchhoff^{55,45‡}. Nous la qualifierons de *méthode d'extrapolation des ondes basée sur l'équation de FW-H* (abrégiée en FW-H WEM pour *FW-H Wave Extrapolation Method*). Elle est parfois appelée méthode FW-H *surface poreuse* ou version *perméable* de la méthode de FW-H car elle correspond à l'application de l'analogie de FW-H pour une surface Σ poreuse (au sens perméable pour la vitesse)²³² et qui englobe toutes les sources de bruit et tous les effets non linéaires. On a donc $T_{ij} = 0$ à l'extérieur de Σ et l'intégrale de volume disparaît naturellement. Di Francescantonio⁵² nomme cette formule KFWH (pour Kirchhoff-FW-H) pour souligner le fait que la surface d'application $f = 0$ ne correspond pas aux parois physiques et qu'elle est maintenant perméable. Comme pour la méthode de Kirchhoff, l'effet

[†]formule (2.2.3), p.111.

[‡]§11.10, p.338.

[‡]référence,⁷⁵ p.326.

[‡]référence,⁵⁵ §9.2.

des sources quadripolaires est transféré dans les sources surfaciques. Di Francescantonio valide cette nouvelle application de l'équation de FW-H dans le cas du champ acoustique lointain d'un rotor d'hélicoptère mais ne montre pas clairement d'avantages pour la méthode FW-H WEM sur celle de Kirchhoff. Prieur et Rahier²³³ arrivent aux mêmes conclusions en comparant ces deux méthodes d'extrapolation.

En conservant les notations et les conventions définies au §4.2.3.1, l'obtention de l'expression intégrale à partir de l'équation de FW-H (4.53) s'effectue de la même manière que pour la formulation analogique (4.58) mais sans l'intégrale de volume puisque $T_{ij} = 0$ pour $f > 0$.

$$\begin{aligned}
4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) = & -\frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r|1 - M_r^\Sigma|} P_{ij} \right]_{\tau^*} n_j d\Sigma(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r|1 - M_r^\Sigma|} \rho_\infty u_n^\Sigma \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r|1 - M_r^\Sigma|} \rho (u_n - u_n^\Sigma) \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r|1 - M_r^\Sigma|} \rho u_i (u_n - u_n^\Sigma) \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{4.119}$$

Avec le changement de variable de di Francescantonio,⁵² la formulation s'écrit :

$$4\pi H(f)p'(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r|1 - M_r^\Sigma|} L_{ij} \right]_{\tau^*} n_j d\Sigma(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r|1 - M_r^\Sigma|} \rho_\infty U_n \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) \tag{4.120}$$

On peut aussi utiliser une version temporelle :

$$\begin{aligned}
4\pi p'(\mathbf{x}, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\rho_\infty u_n^\Sigma + \rho (u_n - u_n^\Sigma)}{r|1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) + \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{r_i P_{ij} n_j - \rho u_i r_i (u_n - u_n^\Sigma)}{r^2 |1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) \\
& + \iint_{\Sigma} \left[\frac{r_i P_{ij} n_j - \rho u_i r_i (u_n - u_n^\Sigma)}{r^3 |1 - M_r^\Sigma|} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}),
\end{aligned} \tag{4.121}$$

que l'on peut simplifier en négligeant la dernière intégrale.

De la même façon, on peut écrire des formulations convectées de la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H en supprimant l'intégrale de volume dans les versions poreuses convectées de l'analogie de FW-H, données au §4.2.4.1.

4.4 Annexes

4.4.1 Dérivées des fonctions de Green dans l'espace spectral

4.4.1.1 Fonction de Green 3-D

$$G(x|y, \omega) = -\frac{\exp(-ikr)}{4\pi r}$$

Dérivées premières :

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\exp(-ikr)}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \exp(-ikr)}{\partial y_i} + \exp(-ikr) \frac{\partial(1/r)}{\partial y_i} = \left(\frac{-ik}{r} \frac{\partial r}{\partial y_i} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y_i} \right) \exp(-ikr)$$

$$\text{or : } \quad \frac{\partial r}{\partial y_i} = -\frac{r_i}{r}, \quad \text{et :}$$

$$\frac{\partial G(x|y, \omega)}{\partial y_i} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{ikr_i}{r^2} + \frac{r_i}{r^3} \right) \exp(-ikr)$$

Dérivées secondes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left(\frac{\exp(-ikr)}{r} \right) &= \left[ik \left(\frac{\frac{\partial r_i}{\partial y_j} r^2 - \frac{\partial r^2}{\partial y_j} r_i}{r^4} \right) + \left(\frac{\frac{\partial r_i}{\partial y_j} r^3 - \frac{\partial r^3}{\partial y_j} r_i}{r^6} \right) - \left(\frac{ikr_i}{r^2} + \frac{r_i}{r^3} \right) ik \frac{\partial r}{\partial y_j} \right] \exp(-ikr) \end{aligned}$$

$$\text{or : } \quad \frac{\partial r}{\partial y_j} = -\frac{r_j}{r}, \quad \frac{\partial r^2}{\partial y_j} = -2r_j, \quad \frac{\partial r^3}{\partial y_j} = -3rr_j, \quad \frac{\partial r_i}{\partial y_j} = -\delta_{ij}$$

d'où :

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left(\frac{\exp(-ikr)}{r} \right) = \left[-\frac{ik}{r^2} \delta_{ij} + ik \frac{2r_i r_j}{r^4} - \frac{1}{r^3} \delta_{ij} + \frac{3r_i r_j}{r^5} + k^2 \frac{r_i r_j}{r^3} + ik \frac{r_i r_j}{r^4} \right] \exp(-ikr),$$

et, en regroupant par puissance de $1/r$:

$$\frac{\partial^2 G(x|y, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} = -\frac{1}{4\pi} \left[k^2 \frac{r_i r_j}{r^3} + ik \left(\frac{3r_i r_j}{r^4} - \frac{\delta_{ij}}{r^2} \right) + \left(\frac{3r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) \right] \exp(-ikr)$$

4.4.1.2 Fonction de Green 2-D

$$G(x|y, \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr)$$

Dérivées premières :

$$\left[H_0^{(2)}(kr) \right]' = -k \frac{\partial r}{\partial y_i} H_1^{(2)}(kr)$$

d'où :

$$\frac{\partial G(x|y, \omega)}{\partial y_i} = \frac{ik}{4} \frac{r_i}{r} H_1^{(2)}(kr)$$

Dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left(H_0^{(2)}(kr) \right) = k \left[\left(\frac{r_i r_j}{r^3} - \frac{\delta_{ij}}{r} \right) H_1^{(2)}(kr) - k \frac{r_i r_j}{r^2} \left[H_1^{(2)}(kr) \right]' \right]$$

or, en utilisant les propriétés de récurrence de la fonction de Hankel :

$$\left[H_1^{(2)}(kr) \right]' = H_0^{(2)}(kr) - \frac{1}{kr} H_1^{(2)}(kr) = -H_2^{(2)}(kr) + \frac{1}{kr} H_1^{(2)}(kr)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(x|y, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} &= \frac{i}{4} \left[k^2 \frac{r_i r_j}{r^2} H_2^{(2)}(kr) - k \frac{\delta_{ij}}{r} H_1^{(2)}(kr) \right] \\ &= \frac{i}{4} \left[-k^2 \frac{r_i r_j}{r^2} H_0^{(2)}(kr) + k \left(\frac{2r_i r_j}{r^3} - \frac{\delta_{ij}}{r} \right) H_1^{(2)}(kr) \right] \end{aligned}$$

4.4.2 La formule de Green convectée

En définissant la fonction f telle que $f = 0$ sur la surface Σ , $f > 0$ à l'intérieur de V et $f < 0$ à l'extérieur de V , on multiplie l'équation des ondes convectée par la fonction de Heaviside $H(f)$ qui vaut 1 dans V et 0 à l'extérieur :

$$H(f) \left\{ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{D_\infty^2 \phi}{Dt^2} \right\} = H(f) \times \tilde{Q}$$

On cherche ensuite à écrire une équation d'onde pour $H\phi$ en utilisant :

$$\begin{aligned} \nabla^2(H\phi) &= H\nabla^2\phi + \nabla H \cdot \nabla\phi + \nabla \cdot (\phi \nabla H) \\ \frac{D_\infty}{Dt}(H\phi) &= H \frac{D_\infty \phi}{Dt} + \phi \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla H \\ \frac{D_\infty^2}{Dt^2}(H\phi) &= H \frac{D_\infty^2 \phi}{Dt^2} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla H \frac{D_\infty \phi}{Dt} + \phi \mathbf{U}_\infty \cdot \frac{D_\infty}{Dt}(\nabla H) + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla H \frac{D_\infty \phi}{Dt} \end{aligned}$$

d'où :

$$\nabla^2(H\phi) - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{D_\infty^2}{Dt^2}(H\phi) = H\tilde{Q} + \left(\nabla H \cdot \nabla\phi - \frac{2}{c_\infty^2} \frac{D_\infty \phi}{Dt} \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla H + \nabla \cdot (\phi \nabla H) - \frac{1}{c_\infty^2} \phi \mathbf{U}_\infty \cdot \frac{D_\infty}{Dt}(\nabla H) \right)$$

La solution intégrale à cette équation s'exprime à partir de la fonction de Green convectée $\tilde{G}(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau)$ du problème en espace libre :

$$\begin{aligned} H(f)\phi(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} H(f)\tilde{Q}(\mathbf{y}, \tau) \tilde{G}(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) dyd\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) \left\{ \nabla H \cdot \nabla\phi - \frac{2}{c_\infty^2} \frac{D_\infty \phi}{D\tau} \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla H + \nabla \cdot (\phi \nabla H) - \frac{1}{c_\infty^2} \phi \mathbf{U}_\infty \cdot \frac{D_\infty}{D\tau}(\nabla H) \right\} dyd\tau \end{aligned}$$

On inclut \tilde{G} dans les gradients et on intègre par parties les deux derniers termes :

$$\begin{aligned} H(f)\phi(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} H(f)\tilde{Q}(\mathbf{y}, \tau) \tilde{G}(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) dyd\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \tilde{G} \nabla \phi - \phi \nabla \tilde{G} - \frac{2}{c_\infty^2} \tilde{G} \frac{D_\infty \phi}{D\tau} \mathbf{U}_\infty + \frac{1}{c_\infty^2} \frac{D_\infty(\tilde{G}\phi)}{D\tau} \mathbf{U}_\infty \right\} \cdot \nabla H dyd\tau \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
 H(f)\phi(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{V(\mathbf{y})(f>0)} \tilde{Q}(\mathbf{y}, \tau) \tilde{G}(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) dyd\tau \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \tilde{G} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \delta_{1i} \frac{U_{\infty}}{c_{\infty}^2} \frac{D_{\infty} \phi}{D\tau} \right) - \phi \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_i} - \delta_{1i} \frac{U_{\infty}}{c_{\infty}^2} \frac{D_{\infty} \tilde{G}}{D\tau} \right) \right\} \frac{\partial H}{\partial y_i} dyd\tau \\
 \text{or : } \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} &= \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta(f),
 \end{aligned}$$

$$\text{et : } \quad \iiint_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta(f) d\mathbf{y} = \iint_{\Sigma(f=0)} \psi(\mathbf{y}) \frac{\frac{\partial f}{\partial y_i}}{|\nabla f|} d\Sigma(\mathbf{y}) = \iint_{\Sigma(f=0)} \psi(\mathbf{y}) n_i d\Sigma(\mathbf{y})$$

On choisit f de telle façon que $\nabla f/|\nabla f|$ soit le vecteur unitaire normal à Σ qui pointe à l'extérieur de Σ . On a alors :

$$\begin{aligned}
 H(f)\phi(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{V(\mathbf{y})(f>0)} \tilde{Q}(\mathbf{y}, \tau) \tilde{G}(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) dyd\tau \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma(f=0)} \left\{ \tilde{G} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \delta_{1i} \frac{U_{\infty}}{c_{\infty}^2} \frac{D_{\infty} \phi}{D\tau} \right) - \phi \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_i} - \delta_{1i} \frac{U_{\infty}}{c_{\infty}^2} \frac{D_{\infty} \tilde{G}}{D\tau} \right) \right\} n_i d\Sigma(\mathbf{y}) d\tau
 \end{aligned} \tag{4.122}$$

Une autre démonstration est donnée par Goldstein⁹¹ (formule (1.65) p.29 et annexe 1.B p.59) ou par Morino¹⁹⁵ en utilisant le théorème de Green.

4.4.3 Démonstration de la formulation de Kirchhoff

En suivant le développement de Farassat et Myers,⁶⁷ on introduit la fonction $\tilde{\phi}$ généralisée, définie par :

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = H(f)\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \phi(\mathbf{x}, t) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

$\tilde{\phi}$ est alors une fonction discontinue dont les dérivées n'existent pas sur $f = 0$ et il faut introduire le concept de dérivation généralisée (opérateurs surlignés) :

$$\begin{cases} \bar{\partial} \tilde{\phi} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \tilde{\phi} \frac{\partial f}{\partial t} \delta(f) = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} & \text{pour une surface immobile} \\ \bar{\nabla} \tilde{\phi} = \nabla \tilde{\phi} + \phi \nabla f \delta(f) \end{cases}$$

En définissant $\nabla f = \mathbf{n}$, où \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire à Σ pointant à l'intérieur de V , on a :

$$\bar{\nabla}^2 \tilde{\phi} = \bar{\nabla}(\nabla \tilde{\phi} + \phi \mathbf{n} \delta(f)) = \nabla^2 \tilde{\phi} + \nabla \phi \mathbf{n} \delta(f) + \bar{\nabla}[\phi \mathbf{n} \delta(f)] = \nabla^2 \tilde{\phi} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta(f) + \bar{\nabla}[\phi \mathbf{n} \delta(f)]$$

On note que $\square^2 \tilde{\phi} = 0$ dans tout l'espace mais $\bar{\square}^2 \tilde{\phi} \neq 0$. En effet :

$$\bar{\square}^2 \tilde{\phi} = \bar{\square}^2 H\phi = \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta(f) + \bar{\nabla}[\phi \mathbf{n} \delta(f)] \tag{4.123}$$

En convoluant avec la fonction de Green $G = -\delta(g)/4\pi r$ où $g = \tau - t + r/c_\infty$, il vient :

$$\begin{aligned} 4\pi H(f)\phi(\mathbf{x}, t) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta(g) \delta(f) \, dy d\tau - \bar{\nabla} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi \mathbf{n} \delta(f)}{r} \delta(g) \, dy d\tau \\ &= - \iint_{f=0} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) - \frac{\bar{\partial}}{\partial x_i} \iint_{f=0} \frac{[\phi n_i]_{\tau^*}}{r} d\Sigma(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Et, en appliquant l'opérateur gradient à l'intérieur de l'intégrale pour le second terme, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial}}{\partial x_i} \left\{ \phi \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \frac{n_i}{r} \right\} &= \frac{\bar{\partial}}{\partial x_i} \phi \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \frac{n_i}{r} + \phi \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \frac{\bar{\partial}(1/r)}{\partial x_i} n_i \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \phi \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \frac{\bar{\partial} \tau}{\partial x_i} \frac{n_i}{r} + \phi \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) n_i \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \phi \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \left(-\frac{1}{c_\infty} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \frac{n_i}{r} + \phi \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y_i} n_i \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \phi \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial r}{\partial y_i} \frac{n_i}{r} + \phi \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &= \left[\frac{1}{rc_\infty} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\phi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_\infty} \right) \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$4\pi H(f)\phi(\mathbf{x}, t) = - \iint_{\Sigma(f=0)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\phi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{1}{rc_\infty} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right]_{\tau^*} d\Sigma(\mathbf{y}) \quad (4.124)$$

On retrouve la formule de Kirchhoff (4.100).

Chapitre 5

Mise en œuvre numérique des méthodes intégrales

5.1 Introduction

Il existe deux points clés pour résoudre numériquement une méthode intégrale. Il faut choisir une formulation adaptée au problème à résoudre parmi les nombreuses formulations présentées précédemment. On doit alors lui associer un algorithme[†] de résolution numérique adapté à la formulation et donc aussi à la configuration étudiée.

Une fois la méthode choisie, il reste à déterminer les sources nécessaires à l'intégration. Pour répondre à cette question, on peut se référer aux théories aéroacoustiques de Powell²³² (1964), Howe¹¹⁷ (1975) ou Möhring¹⁸⁹ (1978), qui ont montré que les termes sources peuvent être écrits en terme de vorticité. Le domaine source sera donc la région où la vorticité est non nulle. Si cette définition convient au cas des écoulements compacts comme, par exemple, le cas de deux tourbillons corotatifs, elle semble difficile à mettre en œuvre lorsque la vorticité décroît très lentement dans le sens de l'écoulement. C'est le cas dans toutes les applications basées sur un écoulement cisailé (jets, couches de mélange, profils ou cavités dans un écoulement...). Le terme source est alors très étendu (on parle d'*extensive source region*^{170,186}). En général, on peut restreindre le domaine source en ne gardant que les zones où la vorticité varie *beaucoup* (zone des appariements, fin du cône potentiel d'un jet, bord de fuite d'un profil, angle aval d'une cavité,...). Cependant, la zone tourbillonnaire négligée peut prendre de l'importance pour des grands nombres de Mach. Comme elle est relativement homogène, on peut alors tenter de modéliser les T_{ij} dans cette zone, comme le propose Mankbadi¹⁷⁰ *et al.* ou Mitchell¹⁸⁶ *et al.* Le même type de raisonnement est utilisé par Pilon & Lyrantzis²²⁴ pour étendre la méthode de Kirchhoff au cas où la surface coupe une zone tourbillonnaire. Dans ce cas, la contribution du

[†]Le terme d'algorithme représente ici l'ensemble des techniques numériques utilisées pour évaluer l'équation intégrale.

volume V_0 est évaluée avec la méthode de Kirchhoff (4.100) et les sources secondaires du jet (après ou avant V_0 dans la direction longitudinale) sont évaluées par une intégrale de volume modélisée. Brentner et Farassat^{29†} ont introduit des normes de Sobolev pour essayer de quantifier les écarts entre les régions acoustique et aérodynamique.

5.2 Critères de choix d'une formulation intégrale

On a distingué dans ce qui précède deux grandes classes de méthodes : les formulations analogiques lorsqu'on évalue les termes quadripolaires de Lighthill ou les méthodes d'extrapolation des ondes à partir des données sur une surface de contrôle. Pour chaque classe, on a présenté deux familles d'approches. La première consiste en une recombinaison des équations de la mécanique des fluides pour aboutir à l'équation de FW-H[†]. L'autre famille a pour point de départ la formule de Green et aboutit à la formulation de Kirchhoff, utilisable pour tout phénomène ondulatoire alors que la première est spécifique à l'aéroacoustique. Lorsqu'aucune simplification n'a encore été réalisée, ces deux approches sont rigoureusement équivalentes analytiquement. Elles utilisent seulement des variables de calcul différentes : $(u, v, p$ et $\rho)$ pour les équations de Lighthill (4.15) et de FW-H (4.58) et $(p$ et $\partial p/\partial n)$ pour la formulation de Kirchhoff (4.100). Elles ne sont donc plus tout à fait équivalentes lorsqu'on remplace l'équation intégrale par un problème discret. Lorsqu'on néglige une partie des termes quadripolaires (c'est le cas des méthodes d'extrapolation où on n'a pas rigoureusement T_{ij} en dehors de la surface de calcul), ces deux familles d'approches ne sont plus équivalentes analytiquement car des termes supplémentaires sont présents dans la méthode d'extrapolation des ondes basée sur l'équation de FW-H par rapport à la méthode de Kirchhoff.²⁹ Ces termes supplémentaires prennent en compte une partie des non linéarités des termes sources et peuvent avoir une influence lorsque la surface de calcul est placée dans une région où la non linéarité des termes sources est importante sans être une source propagative. Si cette non linéarité représente une source de bruit non négligeable, il est alors impératif de la prendre en compte en déplaçant la surface de contrôle pour l'englober ou en évaluant l'intégrale volumique correspondante.

Une vue plus synthétique des différentes approches possibles est donnée par le tableau 4.1, dans l'introduction du chapitre précédent. Cependant, on a vu que, pour une même case du tableau, on peut établir de nombreuses formulations en fonction de la complexité de la situation physique et/ou du choix d'une transformation géométrique adaptée. La configuration physique étudiée intervient essentiellement par la présence ou l'absence de surfaces rigides ou déformables, imperméables ou poreuses, immobiles ou en mouvement et par la présence ou

[†]p. 1384-1385.

[†]qui se réduit à l'équation de Lighthill en l'absence de surface.

l'absence d'un écoulement uniforme ou non dans le milieu d'observation. Finalement, le choix d'une formulation va s'effectuer à trois niveaux :

1. choix d'une approche analogique ou d'une méthode d'extrapolation des ondes (WEM),
2. choix d'une dérivation analytique à partir de la formulation de Kirchhoff ou de FW-H,
3. application des hypothèses de simplification liées à la configuration étudiée.

5.2.1 Méthode d'extrapolation ou analogie acoustique

D'un point de vue numérique, les méthodes d'extrapolation sont plus attrayantes car elles réduisent d'une dimension le problème à résoudre. Elles ne font intervenir en effet que des intégrales surfaciques en 3-D (resp. linéiques en 2-D). L'intégrale volumique en 3-D (resp. surfacique en 2-D) de l'analogie est non seulement coûteuse informatiquement mais s'avère plus sensible aux erreurs d'évaluation numérique à cause de la nature quadripolaire du terme source (qui nécessite des dérivées secondes) et du caractère fini du volume (resp. de la surface) source qui induit nécessairement des problèmes de troncature. Ces troncatures sont moins pénalisantes pour les intégrales surfaciques (resp. linéiques) qui nécessitent l'évaluation de dérivées premières. En revanche, une approche analogique peut s'avérer nécessaire lorsque les sources aérodynamiques sont très étendues²²⁴ ou lorsque la surface de contrôle doit couper un sillage. C'est le cas par exemple si l'on veut prédire le bruit des pales en rotation. Les premiers calculs, en évaluant que les composantes monopolaire (*thickness noise*) et dipolaire (*loading noise*), ont montré un faible accord avec les données expérimentales et la nécessité d'évaluer la composante quadripolaire.²⁷ L'analogie acoustique peut aussi fournir des informations supplémentaires sur la nature et la localisation des sources de bruit.

5.2.2 Formulations de Kirchhoff ou de FW-H

5.2.2.1 Pour les méthodes analogiques

On a vu qu'elles sont équivalentes analytiquement mais pas numériquement. Si on utilise une formulation spatiale, la formulation de Kirchhoff (4.71) est plus adaptée à une résolution numérique car les dérivées sont exprimées dans le repère de la source et on peut donc les évaluer lors du calcul CFD/CAA des variables sources. Pour la formulation spatiale de FW-H (4.58), les dérivées sont exprimées par rapport à l'observateur et le calcul en un point d'observation deviendrait dépendant du calcul des points voisins. On a vu cependant qu'il est possible de transformer la formulation de FW-H pour opérer les différentiations par rapport au temps et à la position de la source (4.62). Si on choisit une formulation temporelle ou spectrale, les deux approches ne diffèrent que par le choix des variables sources à calculer. On a besoin de $(p,$

$\partial p/\partial n$) pour la formulation de Kirchhoff et de (u, v, p, ρ) pour celle de FW-H. La première a donc l'avantage de nécessiter le stockage de deux variables au lieu de quatre. En revanche, la deuxième utilise directement les variables calculées par les codes CFD/CAA alors que la méthode de Kirchhoff nécessite une évaluation *a posteriori* de la dérivée $\partial p/\partial n$. Par ailleurs, en appliquant les dérivations sur la fonction de Green dans l'expression de FW-H (formule (4.85), par exemple), on n'a pas à dériver les variables sources, ce qui représente un gain de temps et limite les erreurs de différenciation discrète puisque les dérivées de la fonction de Green peuvent être obtenues analytiquement. Dans ce cas, on aura plus de termes à intégrer numériquement donc un temps de calcul plus long et des sources supplémentaires d'erreurs numériques. Pour les formulations temporelles ou spectrales, les deux approches possèdent donc des avantages et des inconvénients à chaque étape de la résolution (calcul des sources - stockage - évaluation de l'intégrale) et il est difficile de dire laquelle s'avèrera la plus efficace globalement.

5.2.2.2 Pour les méthodes d'extrapolation

Tous les arguments précédents s'appliquent exactement de la même façon. Ils constitueront les critères de sélection si $T_{ij} = 0$ sur la surface de calcul. Dans le cas contraire, la nature des non linéarités présentes dans les sources surfaciques peut amener à préférer l'équation de FW-H. En effet, cette formulation (4.119) tient compte d'une partie des non linéarités aérodynamiques alors que celle de Kirchhoff (4.100) est valable pour une surface placée dans une région acoustique. Comme le montrent Brentner et Farassat,²⁹ dans certains cas, lorsque la surface de calcul est trop près des fluctuations aérodynamiques, le résultat de la méthode de Kirchhoff peut être totalement erroné alors que la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H continue à donner des résultats satisfaisants. C'est ce qui ressort des calculs de Brentner et Farassat²⁹ pour une surface englobant une pale de rotor ou de Singer *et al.*²⁷⁰ dans le cas d'une surface autour d'un cylindre en écoulement. Les figures 5.1 et 5.2 rappellent leurs résultats. On s'aperçoit que la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H est peu sensible à la position de la surface d'intégration.

5.2.3 Principales hypothèses de simplification

Il serait pénalisant d'implémenter une formulation générale qui prenne en compte toutes les extensions analytiques réalisées. Pour des applications spécifiques, il est plus judicieux de réaliser les simplifications analytiques possibles, la formulation adaptée résultant d'une combinaison de toutes ces contraintes.

- pour un milieu observateur au repos, on utilise une équation des ondes et une fonction de Green classiques, non convectées.

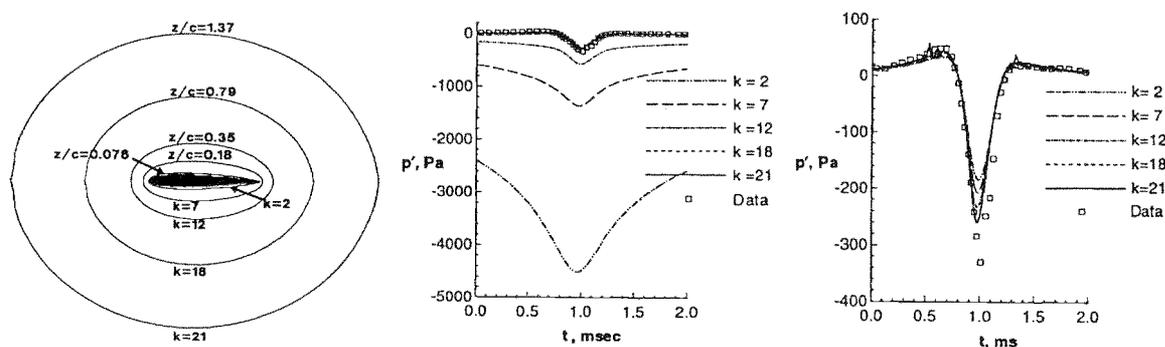


Figure 5.1: Calcul du bruit rayonné par une pale de rotor (d'après Brentner et Farassat²⁹). A gauche, coupe montrant la position des différentes surfaces d'intégration et la distance verticale adimensionnée par la corde c de la pale ainsi que l'indice de maillage correspondant k . Au centre et à droite, pression acoustique prédite, respectivement, par la méthode de Kirchhoff et par la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H, à partir des différentes surfaces d'intégration. (Observateur situé à $3.09R$ dans le plan de la pale de type UH-1H avec un Mach d'aspiration $M_H = 0.88$).

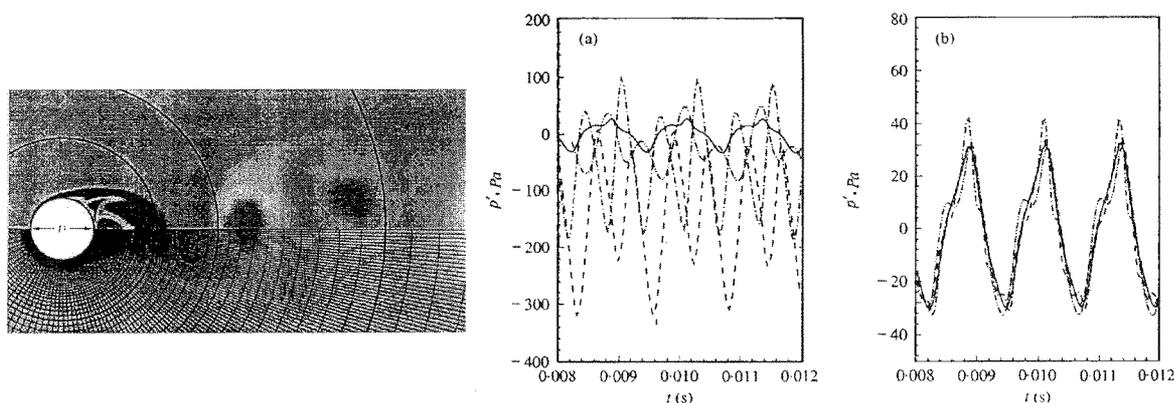


Figure 5.2: Rayonnement acoustique d'un cylindre en écoulement (d'après Singer, Brentner, Lockard et Lilley²⁷⁰). A gauche, visualisation du champ de vortécité calculé par un code CFD 2-D avec le maillage curviligne représenté dans la moitié inférieure et les différentes surfaces de contrôle dans la moitié supérieure. Au centre et à droite, pression acoustique prédite, respectivement, par la méthode de Kirchhoff et par la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H à partir des différentes surfaces d'intégration : (—) $r = 0.5D$ (surface du cylindre), (---) $r = 1.5D$, (-·-·-) $r = 2.5D$, (-·-·-·) $r = 5.1D$. Le diamètre du cylindre est $D = 0.019$ m, le nombre de Mach de l'écoulement $M=0.2$ et le nombre de Reynolds correspondant vaut $Re_D = 1000$. L'observateur est situé à $128D$ dans la direction perpendiculaire à l'écoulement.

- pour une surface immobile, on applique $u^\Sigma = 0$.
- pour une surface en mouvement uniforme, on applique $\dot{u}^\Sigma = 0$.
- pour une surface imperméable, on applique $u_n = 0$.
- pour une surface non déformable, on applique $\dot{\sigma} = 0$ et $d\Sigma' = \sqrt{g_2} = d\Sigma$.
- pour une surface en rotation : on applique $u^\Sigma = \omega^\Sigma r$.

5.2.3.1 Transformation géométrique

Lorsque le milieu observateur est en mouvement par rapport aux sources ou que la région source est en mouvement par rapport à l'observateur, on peut appliquer un passage en coordonnées Lagrangiennes dans les formulations intégrales ou bien reformuler les expressions intégrales à partir d'une équation des ondes convectée. L'inconvénient du passage en coordonnées Lagrangiennes est qu'il faut exprimer les sources dans le repère mobile, en les interpolant à partir du repère dans lequel on a réalisé la simulation aérodynamique. Les erreurs d'interpolation peuvent devenir critique pour les grands nombres de Mach. Dans la suite, on utilisera une équation des ondes convectée pour traduire l'effet de l'écoulement sur le milieu d'observation.

5.2.3.2 Mouvement supersonique ou subsonique

Si toutes les formulations développées sont applicables en subsonique, des singularités apparaissent en supersonique dans l'évaluation des intégrales à cause de la nullité du facteur Doppler pour $M_r = 1$. Une solution consiste à établir des formulations mathématiques qui évitent ces singularités (voir §4.3.1.2). En effet, de la même façon que l'utilisation des fonctions généralisées a permis de tenir compte de la discontinuité introduite par une surface, on peut prendre en compte d'autres discontinuités comme une surface de choc.

Ianniello^{128,129} propose un algorithme non compact pour intégrer la formulation (Q1) des termes quadripolaires sur les surfaces d'émission acoustique. Une autre méthode de résolution des formulations du type de (4.117) est donnée par Lorensen et Cline (voir réf.²⁶).

Dans ce qui suit, on ne s'intéressera qu'à des mouvements subsoniques.

5.3 Algorithmes de résolution

Après le choix délicat mais crucial d'une formulation adaptée, il faut lui associer un algorithme de résolution qui soit précis, efficace (au sens du coût numérique induit), robuste (en évitant les singularités par exemple) et qui soit approprié à la formulation retenue. On distingue

tout d'abord les calculs dans l'espace temporel de ceux dans l'espace spectral où on résout l'équation intégrale de façon harmonique.

5.3.1 Résolution temporelle ou spectrale

Pour répondre à cette question, la première démarche consiste à répertorier les applications numériques précédentes. C'est dans le cadre du calcul du bruit de pales en rotation (rotor des hélicoptères, hélices, machines tournantes...) que les méthodes intégrales ont été appliquées numériquement en premier.^{169,28} De nombreuses formulations alternatives ont été développées pour cette classe d'écoulements. Une revue complète des formulations linéaires est effectuée par Farassat.⁶³ On parle ici de formulation *linéaire* lorsqu'on néglige l'intégrale volumique quadripolaire. Parmi les très nombreuses études sur le sujet, on note une large prédominance des approches temporelles.²⁶ On peut néanmoins noter deux applications dans l'espace spectral. Prieur²³³ intègre l'analogie de FW-H dans l'espace spectral pour prédire le bruit d'un rotor. Le domaine fréquentiel lui permet d'effectuer une intégration analytique dans la direction azimutale homogène, en utilisant des fonctions de Bessel (formule (5) de la réf.²³³). Pour des applications transoniques, la singularité du facteur Doppler n'apparaît plus explicitement car on résout l'intégrale de façon harmonique. Atassi *et al.*⁶ utilisent une approche fréquentielle pour obtenir une expression du champ acoustique lointain dû à un profil en écoulement qui ne fait intervenir que la pression sur la surface. Les applications au bruit de jet^{187,213,224,269,41,23} utilisent uniquement des algorithmes temporels sauf Bastin¹⁰ qui réalise l'intégration dans l'espace (k, ω) .

Lockard¹⁶² et Guo⁹⁶ soulignent l'intérêt d'une approche fréquentielle pour les configurations bidimensionnelles. Dans ce cas, la présence d'une fonction de Heaviside à la place d'un Dirac rend délicate une intégration dans l'espace temporel (voir §4.2.1.3). En 3-D, la formulation spectrale permet de s'affranchir de l'évaluation des potentiels retardés, qui est souvent une source d'erreur prépondérante lors des calculs numériques.²⁶ En outre, les dérivations peuvent alors être appliquées sur la fonction de Green, ce qui évite de différencier les variables aérodynamiques sources. Pour un calcul fréquentiel, il faut intégrer les formulations pour chaque fréquence. En contrepartie, lorsqu'on revient dans l'espace physique en appliquant la transformée de Fourier inverse, on obtient le champ acoustique pour les n_{it} temps. Comme en pratique, on peut souvent se contenter d'intégrer pour les premières fréquences si le signal est périodique ou pseudopériodique, l'obtention de l'évolution temporelle ou du niveau rms avec une méthode spectrale s'effectue avec un moindre coût par rapport à un calcul temporel, qui nécessite autant de réalisations que l'on cherche de temps.

Au final, une approche fréquentielle est bien adaptée aux calculs 2-D et aux écoulements périodiques ou pseudopériodiques. Pour un écoulement totalement turbulent, il vaut mieux

opter pour une résolution temporelle.

5.3.2 Algorithmes dans l'espace temporel

On commence par déterminer spatialement et temporellement les termes sources à enregistrer. Le calcul des formulations intégrales impose la résolution d'un problème aux temps retardés, délicat à mettre en œuvre numériquement. Pour obtenir le champ acoustique à un temps t , il faut évaluer le terme source au temps retardé $t - r/c_\infty$. Connaissant la taille du domaine d'observation (x_i) et de la région source (y_j), on peut donc déterminer l'intervalle temporel nécessaire^{10,21} :

$$t_i + \frac{|x_i - y_j|_{max}}{c_\infty} \leq t \leq t_f + \frac{|x_i - y_j|_{min}}{c_\infty}$$

où t_i et t_f sont les temps de début et de fin d'enregistrement. Par ailleurs, comme les temps retardés ne coïncident généralement pas avec les itérations enregistrées, une procédure d'interpolation est nécessaire. Le fait de remplacer le temps retardé par le temps le plus proche (approximation d'ordre 0) conduit à un rayonnement parasite.²⁵⁷ Bogey²¹ suggère l'utilisation d'une interpolation temporelle à l'ordre 4 avec des polynômes de Lagrange. Meadows et Atkins¹⁷⁶ montrent qu'il faut parfois surdiscrétiser les termes sources pour rendre compte de leur évolution dans l'espace des temps retardés. Une interpolation spatiale des données peut alors s'avérer nécessaire. Pilon^{223†} teste l'utilisation de polynômes de Gauss-Legendre pour réaliser l'interpolation spatiale. Brentner²⁶ fait une synthèse détaillée de ces techniques d'interpolation, depuis la simple *mid-panel quadrature*, qui consiste à prendre la valeur au milieu de chaque segment source, jusqu'aux algorithmes très précis d'*adaptive quadrature*, qui adapte l'ordre de l'interpolation spatiale ou temporelle d'après une première estimation de la solution. On évalue alors la formulation intégrale avec une méthode des trapèzes, par exemple, pour \mathbf{x} et t fixés.

Une approche complètement différente consiste à considérer le temps de la source comme *dominant*.²⁶ Cette fois-ci, plutôt que de choisir à l'avance un temps t au point d'observation, on évalue à quel temps un signal émis au temps τ atteint l'observateur \mathbf{x} . Pour cela, il faut résoudre l'équation $t - \tau - |x(t) - y(\tau)|/c_\infty = 0$, qui est souvent plus simple à résoudre que l'équation des temps retardés car le mouvement de l'observateur est toujours supposé très simple. On va donc obtenir une série de solutions pour différents temps d'observation. On réalise une interpolation temporelle pour déterminer le signal au temps t requis.

5.3.3 Algorithmes dans l'espace spectral

Comme pour une approche temporelle, la première étape est l'enregistrement et la lecture

†p. 34-36.

des données aérodynamiques. Il faut ensuite les transformer dans l'espace fréquentiel en utilisant une transformation de Fourier discrète (DFT) :

$$\hat{F}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) e^{-2\pi i j n / N}$$

où $t_j = T \times j/N$, le temps total T étant discrétisé par N itérations temporelles. Il y a trois précautions interdépendantes à prendre lorsqu'on transforme un signal qui n'est pas parfaitement périodique. D'abord, les données doivent être enregistrées durant un temps suffisamment long pour représenter les composantes basses fréquences. Ensuite, le taux d'échantillonnage doit être suffisamment élevé pour prendre en compte les hautes fréquences. Enfin, on ajoute parfois des techniques de fenêtrage et de moyenne sur des segments du signal pour compenser le caractère apériodique.

Le taux d'échantillonnage le plus élevé possible est donné par le pas de temps de la DNS mais souvent, on peut utiliser une valeur plus faible. Par exemple, dans le cas de la cavité non compacte (§5.4.6), la période correspondant à la fréquence fondamentale f_0 est de $5240 \Delta t$, indiquant qu'une fréquence de $2620f_0$ peut être résolue, ce qui est bien supérieur à la plage d'intérêt. Cependant, ce choix du taux d'échantillonnage n'est pas seulement dicté par la fréquence la plus élevée que l'on veut résoudre. Un taux trop bas pourrait faire ressortir des erreurs d'*aliasing*. Pour les minimiser, il faut un taux d'échantillonnage tel que le contenu énergétique des plus hautes fréquences résolues soit négligeable devant la portion la plus énergétique du spectre. Dans l'exemple cité, on choisit un pas de temps d'enregistrement égal à $40\Delta t$, qui est assez élevé (121 points par période), mais on n'intègre que pour les premières fréquences (jusqu'à $10f_0$), négligeant la contribution des très hautes fréquences, théoriquement encore résolues par le taux sélectionné. Le fait qu'on réalise des produits des variables enregistrées complique encore le traitement en introduisant des fréquences plus élevées que celles décrivant les deux fonctions individuellement. De même, une différentiation tend à augmenter les grands nombres d'onde qui produisent des hautes fréquences.

Le calcul peut être également contaminé par la mauvaise représentation des basses fréquences. Celles-ci peuvent ne pas être physiques mais résulter d'erreurs numériques. La source principale de ces basses fréquences est probablement la zone éponge de sortie.^{43,21}

Examinons maintenant les effets d'un fenêtrage, qui permettent de réduire cet effet. La technique la plus simple consiste à tronquer les données entre un temps initial et un temps final : la fenêtre est une simple boîte. La discontinuité qui en résulte peut créer des hautes fréquences parasites, qui proviennent de la convolution avec un sinus cardinal, qui est la transformée de la boîte. Pour éviter cette discontinuité, on peut multiplier le signal par une fonction fenêtre,

nulle à chacune des extrémités de la boîte et assurant une transition douce vers une valeur de 1 au centre du signal. Colonius *et al.*⁴³ utilisent une fenêtre de Welch et Bastin¹⁰ obtient les meilleurs résultats avec une fenêtre de Hann :

$$\mathcal{H}(t_n) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin^2\left(\frac{n\pi}{N}\right) \quad n = 0, \dots, N - 1$$

On a testé ce fenêtrage pour le calcul du rayonnement de deux tourbillons corotatifs et constaté une dégradation des résultats. Colonius *et al.*[†] parviennent à la même conclusion. Pour les composantes périodiques du signal (dont la période est une fraction de la durée d'enregistrement), le fenêtrage tend à étaler les pics fréquentiels sur les fréquences voisines. Cet effet peut être supérieur aux erreurs dues aux basses fréquences. On peut tenter de le compenser en utilisant une moyenne sur des segments se recouvrant par moitié afin de casser la tendance qui se crée entre les deux bouts du signal et qui agit sur une fréquence particulière. Néanmoins, les techniques de fenêtrage ne semblent pas adaptées aux signaux périodiques ou pseudopériodiques que l'on considère dans ce qui suit.

Pour évaluer les transformées de Fourier discrètes (DFT), on utilise des algorithmes de FFT. On ne tient pas compte de la composante continue a_0 , ce qui permet de centrer automatiquement les signaux. De plus, on n'intègre que pour les fréquences positives. La contribution des fréquences négatives étant égale, il suffit de doubler le résultat à la fin du calcul. L'intégration est réalisée avec une méthode des trapèzes en chaque point d'un maillage discrétisant le domaine d'observation. On revient dans l'espace physique par la transformation de Fourier inverse.

5.4 Développement d'un code de résolution des méthodes intégrales pour le calcul du bruit de cavité

On applique maintenant les développements et les recommandations des paragraphes précédents au calcul du bruit d'un écoulement affleurant une cavité. Dans ce cas, les surfaces formant la cavité sont immobiles, rigides et imperméables et l'observateur est dans un milieu en mouvement uniforme à la vitesse de l'écoulement libre U_∞ . Profitant du caractère pseudopériodique des oscillations autoentretenuës par la cavité, on choisit une résolution dans l'espace spectral. Les calculs directs 2-D par DNS du chapitre 3 vont fournir les termes sources à introduire dans les formulations et vont constituer une solution de référence pour évaluer les résultats obtenus avec les méthodes intégrales. Trois formulations sont retenues :

[†]Voir discussion p.89 à 96

- la formulation convectée, spectrale de l'analogie de FW-H :

$$H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) = - \iint_{f>0} \tilde{T}_{ij}(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial^2 \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} d\mathbf{y} \\ + \int_{f=0} \tilde{F}_i(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} dl(\mathbf{y}) - \int_{f=0} i\omega \tilde{Q}(\mathbf{y}, \omega) \tilde{G}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) dl(\mathbf{y}) \quad (5.1)$$

où les termes sources modifiés par la prise en compte de la convection et de la condition d'imperméabilité $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ s'écrivent :

$$\tilde{T}_{ij} = \rho(u_i - U_i)(u_j - U_j) + (p - c_\infty^2 \rho) \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (5.2)$$

$$\tilde{F}_i = -[p\delta_{ij} - \tau_{ij}] n_j \quad (5.3)$$

$$\tilde{Q} = 0 \quad (5.4)$$

Les dérivées de la fonction de Green sont données par (4.87) et (4.88).

- la formulation convectée, spectrale de la méthode de Kirchhoff :

$$H(f)p'(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i\beta}{4} \int_{f=0} \left\{ \frac{\partial p(\mathbf{y}, \omega)}{\partial n_\beta} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) + \frac{k}{\beta^2} p(\mathbf{y}, \omega) \left[\frac{\partial r_\beta}{\partial n_\beta} H_1^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) \right. \right. \\ \left. \left. - iM \frac{\partial y_1}{\partial n_\beta} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} r_\beta \right) \right] \times \exp \left(i \frac{Mk(x_1 - y_1)}{\beta^2} \right) \right\} d\Sigma_\beta \quad (5.5)$$

- la formulation convectée, spectrale de la méthode d'extrapolation des ondes basée sur l'équation de FW-H :

$$p'(\mathbf{x}, \omega) = \int_{f=0} \tilde{F}_i(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} dl(\mathbf{y}) - \int_{f=0} i\omega \tilde{Q}(\mathbf{y}, \omega) G(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \omega) dl(\mathbf{y}) \quad (5.6)$$

avec les deux termes sources :

$$\tilde{F}_i = -[\rho(u_i - 2U_i)u_j + p\delta_{ij} - \tau_{ij}] n_j \quad (5.7)$$

$$\tilde{Q} = \rho u_j n_j \quad (5.8)$$

On va donc résoudre ces trois méthodes intégrales afin de déterminer celle qui est la mieux adaptée au calcul du bruit de cavité. A chaque fois, on étudiera avec soin l'influence du choix des termes sources et le champ acoustique calculé.

5.4.1 Source monopolaire dans un milieu au repos

Il s'agit d'un cas test purement acoustique donc on ne peut pas appliquer l'analogie acoustique, qui suppose une séparation nette entre une région acoustique et une région aérodynamique. Il va permettre de valider l'implémentation des intégrales pour des surfaces immobiles pour les

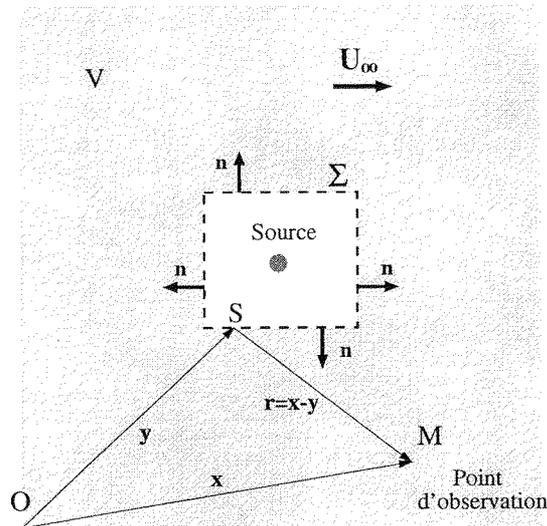


Figure 5.3: Source monopolaire dans un milieu au repos. Configuration et notations.

deux méthodes d'extrapolation : la méthode de Kirchhoff et la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H.

On considère le rayonnement acoustique d'une source de type monopôle, placée au centre du domaine, discrétisé par un maillage cartésien régulier de 201×201 points avec $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.5$ m. La source se trouve au point (101; 101) soit à (50 m; 50 m) de l'origine, comme indiqué sur la figure 5.3. Dans ce cas, la solution de référence sur ce domaine est fournie par la solution analytique bidimensionnelle dans l'espace fréquentiel, en présence d'un écoulement uniforme de nombre de Mach $M = U_\infty/c_\infty$, dans la direction x_1 , donnée par⁵⁵ :

$$\phi(x_1, x_2, t) = A \frac{i}{4\beta} \exp \{ -i\omega t + iMkx_1/\beta^2 \} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} \sqrt{x_1^2 + \beta^2 x_2^2} \right) \quad (5.9)$$

$$\text{avec } p' = -\rho_\infty \Re \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right\}, u' = \Re \{ \nabla \phi \} \text{ et } \rho' = \frac{p'}{c_\infty^2}$$

où $\Re \{ \}$ désigne la partie réelle. L'amplitude de la source est $A = 5$ Pa et sa longueur d'onde $\lambda = 10$ m. On considère d'abord le cas d'un milieu uniforme au repos ($M=0$), caractérisé par une pression $p_\infty = 10^5$ Pa, une masse volumique $\rho_\infty = 1.22$ kg/m³ et une célérité du son $c_\infty = 340$ m/s, toutes les trois constantes. En 2-D, l'extrapolation est réalisée à partir d'une ligne. On choisit un carré de côté $80\Delta x_1 = 4\lambda$ centré sur la source, soit 4×81 points. L'évaluation des données sur cette ligne, soit (u_1, u_2, p, ρ) pour la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H et $(p, \partial p/\partial n)$ pour la méthode de Kirchhoff, est obtenue en résolvant la solution analytique pour $n_{it} = 50$ enregistrements temporels avec un pas de temps $\Delta t = \lambda/(100c_\infty)$. Le domaine d'observation considéré correspond au maillage utilisé pour calculer la solution de référence, décalé d'une demi maille pour éviter les singularités d'intégration. Il s'agit donc d'un

maillage cartésien régulier de 201×201 points avec $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.5$ m et une origine en (0.25 m; 0.25 m).

5.4.1.1 Méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H

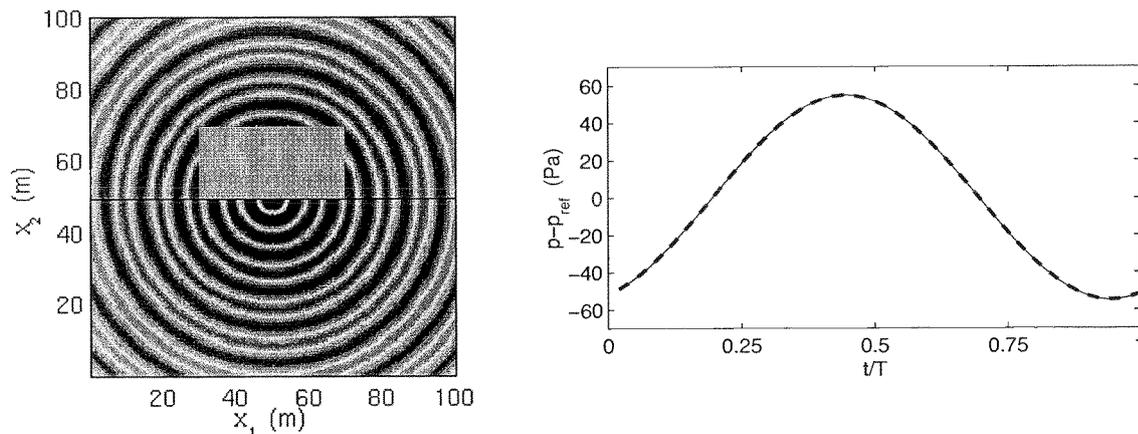


Figure 5.4: Source monopolaire dans un milieu au repos. À gauche, champ de pression obtenu, au même instant, avec la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H ($x_2 > 50$) et la solution analytique ($x_2 < 50$). À droite, évolution temporelle de la pression fluctuante au point situé en (75 m; 75 m) sur une période T : (—) solution analytique; (- - -) FW-H WEM. On note $p_{ref} = p_\infty$.

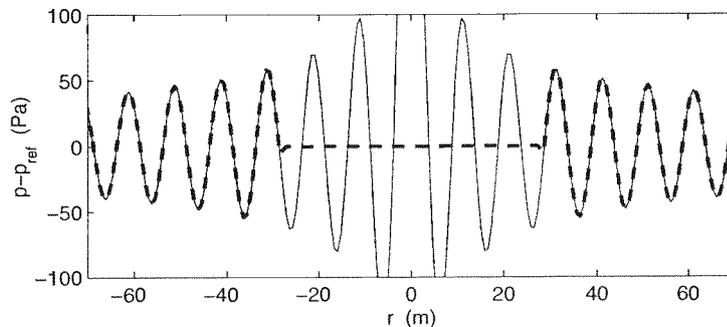


Figure 5.5: Source monopolaire dans un milieu au repos. Profil de pression le long de la droite $x_1 = x_2$: (—) solution analytique; (- - -) méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Le champ de pression calculé par cette méthode est représenté sur la figure 5.4. En dehors de la ligne de contrôle, il est en parfait accord avec la solution analytique. À l'intérieur de la ligne de contrôle, le champ de pression est nul. Cela provient directement des développements mathématiques qui imposent $H(f) = 0$ pour $f < 0$. Cette propriété peut constituer un bon indicateur de la précision de la méthode. En effet, lorsqu'on commet des erreurs, les interférences à l'intérieur de Σ ne sont plus parfaitement destructives. L'écart par rapport au champ nul sera proportionnel aux erreurs commises. L'amplitude de la pression, tracée le long de la droite $x_1 = x_2$ sur la figure 5.5, amène les mêmes conclusions.

Les champs spatiaux sont tracés au temps final, correspondant au dernier enregistrement temporel, mais, lorsqu'on effectue la transformée de Fourier inverse, on a accès aux 50 instants temporels discrétisant la période T . L'évolution temporelle obtenue avec la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H au point situé en (75 m; 75 m) se superpose avec la solution analytique sur la figure 5.4, à droite. L'erreur moyenne $\frac{1}{n_{it}} \sqrt{\sum_t (p' - p'_{ana})^2}$ entre les deux courbes est de 0.11 %, certainement due à un décalage de phase.

5.4.1.2 Méthode de Kirchhoff

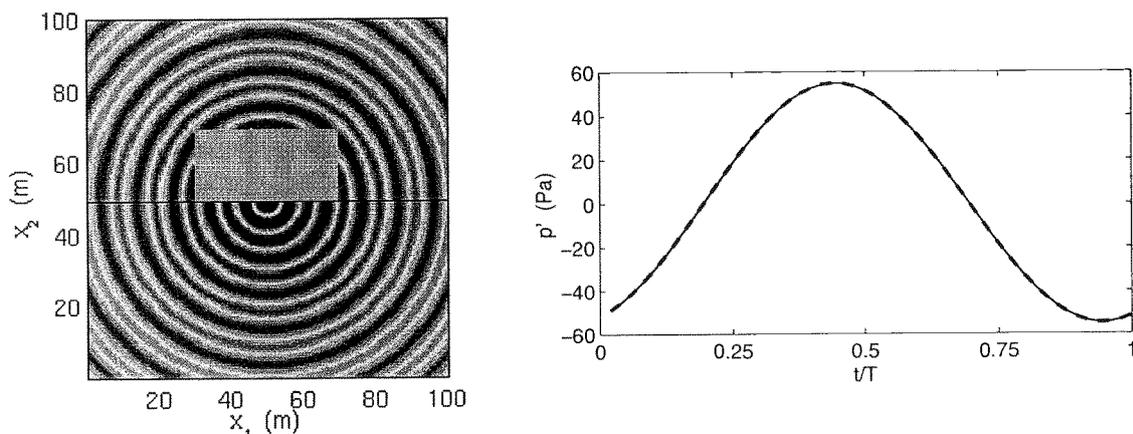


Figure 5.6: Source monopolaire dans un milieu au repos. A gauche, champ de pression obtenu, au même instant, avec la méthode de Kirchhoff ($x_2 > 50$) et avec la solution analytique ($x_2 < 50$). A droite, évolution temporelle de la pression fluctuante au point situé en (75 m; 75 m) : (—) solution analytique et (- - -) méthode de Kirchhoff.

Les résultats obtenus avec la méthode de Kirchhoff pour le rayonnement de la source monopolaire sont identiques à ceux obtenus avec la méthode d'extrapolation basée sur l'équation FW-H. L'erreur calculée est très légèrement inférieure à 0.11 %.

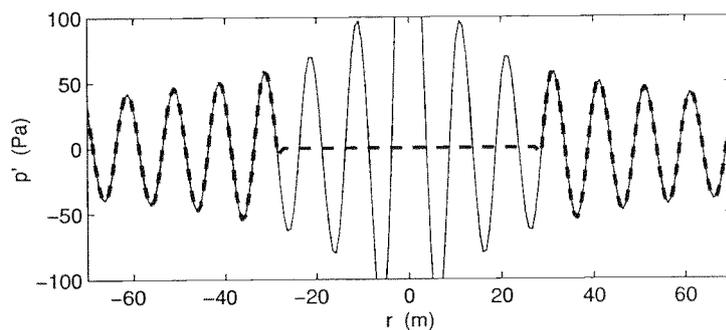


Figure 5.7: Source monopolaire dans un milieu au repos. Profil de pression le long de la droite $x_1 = x_2$: (—) solution analytique; (- - -) méthode de Kirchhoff. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

5.4.1.3 Influence du nombre de points par longueur d'onde sur la précision

On profite de ce cas test, qui est exact pour la méthode et pour la solution de référence, pour évaluer la précision de la résolution numérique. Pour cela, on peut étudier l'influence de la discrétisation spatiale ou temporelle. On choisit une source monopolaire de longueur d'onde $\lambda = 25$ m avec les mêmes paramètres numériques que précédemment et on étudie l'influence du nombre de points sur un côté du carré, soit le nombre de points par longueur d'onde.

$$\text{erreur relative} = \frac{(p'_{wem} - p'_{anal})_{rms}}{(p'_{anal})_{rms}} \text{ au point } (151; 151) = (75 \text{ m}; 75 \text{ m})$$

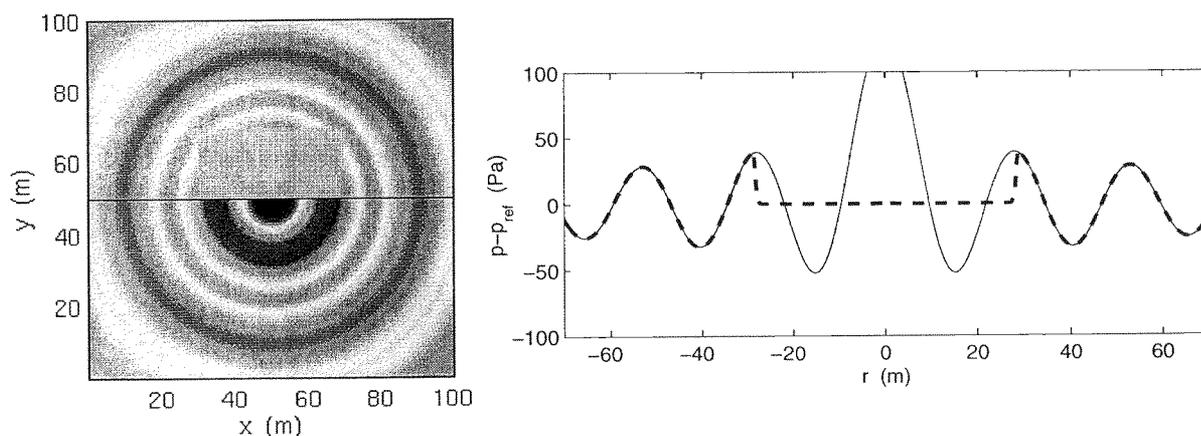


Figure 5.8: Source monopolaire dans un milieu au repos avec $\lambda = 25$ m. A gauche, champ de pression obtenu, au même instant, avec la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H ($x_2 > 50$) et la solution analytique ($x_2 < 50$). A droite, profil de pression le long de la droite $x_1 = x_2$: (—) solution analytique; (---) méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

On constate que les deux méthodes d'extrapolation fournissent les mêmes erreurs numériques (très légèrement plus faible pour la méthode de Kirchhoff mais les écarts ne sont pas très significatifs).

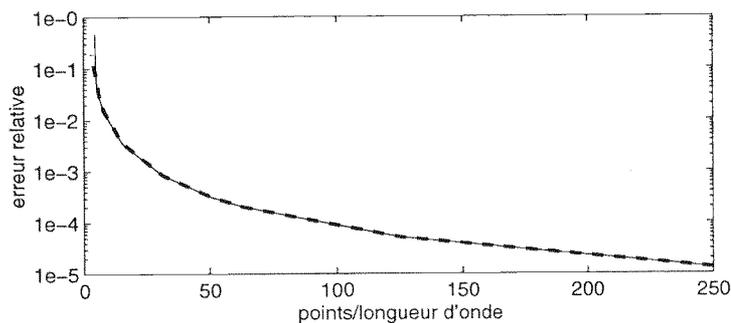


Figure 5.9: Influence du nombre de points par longueur d'onde sur la précision : (—) méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H; (---) méthode de Kirchhoff.

5.4.2 Source non périodique dans un milieu au repos

Si la pertinence d'une méthode fréquentielle apparaît évidente pour une configuration périodique, il convient d'étudier les répercussions du caractère apériodique ou pseudopériodique du signal source. L'apériodicité des données peut avoir plusieurs origines : la présence de fréquences plus basses que la durée de l'enregistrement ou plus hautes que la fréquence de Nyquist, ou des fréquences entre ces deux extrêmes mais dont la période n'est pas une fraction entière de la durée de l'enregistrement.

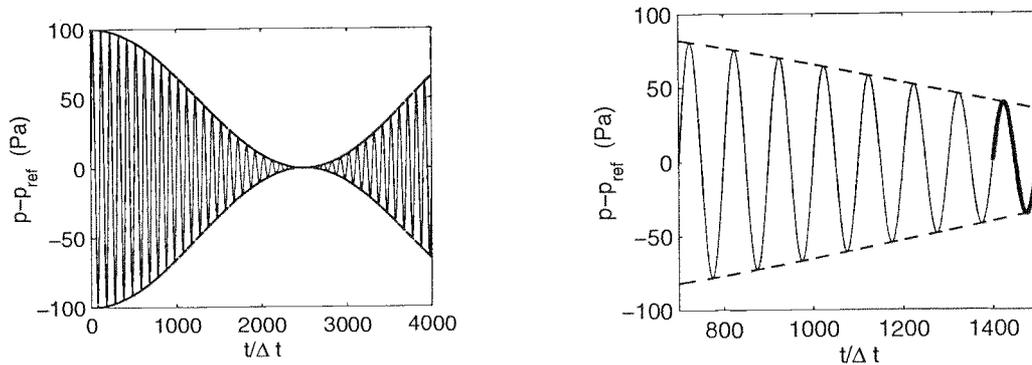


Figure 5.10: Source non périodique dans un milieu au repos. Signal temporel de pression modulé (—) $50 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi c_\infty t}{500} \right) \right) \times \sin(\omega t)$ et enveloppe (---) $\pm 50 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi c_\infty t}{500} \right) \right)$.

On considère une source pseudopériodique formée par un monopôle $\sin(\omega t)$ modulé par une sinusoïde $\left(1 + \cos \left(\frac{2\pi c_\infty t}{500} \right) \right)$, représenté sur la figure 5.10, à gauche. Le signal temporel source pour appliquer les méthodes d'extrapolation est tracé à droite. On utilise soit une seule période d'oscillation (la dernière période enregistrée, en gras), soit 8 périodes du signal, correspondant à une petite fraction de la période de modulation. Le domaine de calcul et la ligne de contrôle sont les mêmes que pour l'exemple précédent. L'amplitude de la source est de 50 Pa et sa longueur d'onde $\lambda = 10$ m.

La distance maximale de propagation (selon la diagonale du domaine) vaut $50\sqrt{2} \simeq 71$ m. Les 8 périodes enregistrées correspondent à $800\Delta t = 800 \times \lambda / (100c_\infty)$, soit une distance de propagation de 8λ soit 80 m. L'historique du rayonnement sur le domaine choisi est donc entièrement inclus dans les 8 périodes sources.

Les résultats obtenus avec la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H sont donnés sur les figures 5.11 et 5.12 lorsqu'on utilise la dernière période ou les 8 périodes. On constate que le champ de pression obtenu par l'intégration sur une seule période décroît plus rapidement que la solution analytique, obtenue en modulant (5.9). Cela est dû au fait que l'on a appliqué la décroissance en $1/\sqrt{r}$ sur la dernière période, qui a la plus faible amplitude. Dans le

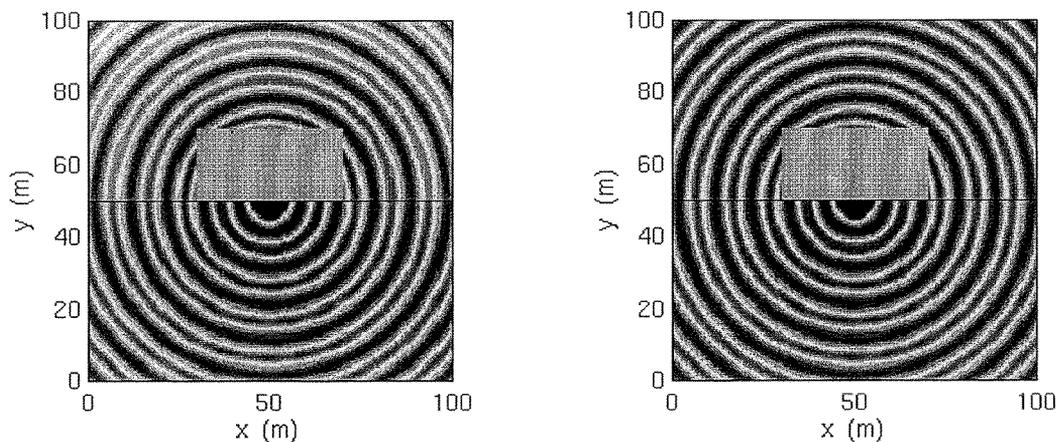


Figure 5.11: Source non périodique dans un milieu au repos. Champ de pression calculé avec la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H en intégrant, à gauche, sur 1 période et, à droite, sur 8 périodes. On représente les résultats de la méthode FW-H WEM pour $x_2 > 50$ et la solution analytique pour $x_2 < 50$.

champ acoustique de référence, les fronts d'onde les plus éloignés correspondent chronologiquement à une oscillation de plus forte amplitude. Lorsqu'on intègre sur 8 périodes, on obtient un très bon accord avec la solution analytique au temps final $1500\Delta t$, prouvant la capacité de la méthode à prendre en compte des sources aperiodiques.

Aucun fenêtrage n'a été utilisé dans cet exemple. Par construction de la méthode, la période d'échantillonnage correspond à la fréquence de Nyquist, prévenant tout effet d'*aliasing*. Les effets de bord dus à la duplication d'un signal non périodique ne pénalisent pas le calcul.

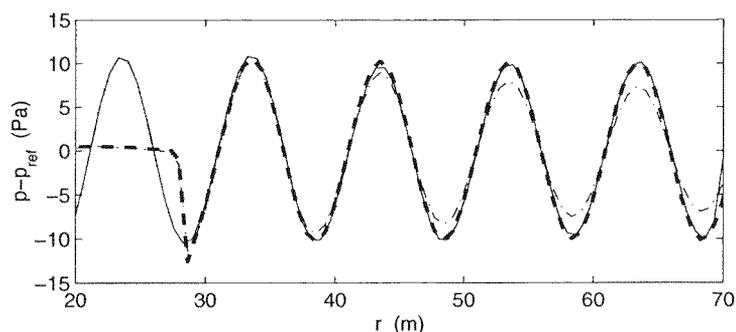


Figure 5.12: Source non périodique dans un milieu au repos. Profil de pression le long de la droite $x_1 = x_2$: (—) solution analytique; (- - -) intégration de la méthode FW-H WEM sur 1 période; (- · - ·) intégration de la méthode FW-H WEM sur 8 périodes. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

5.4.3 Source monopolaire dans un milieu en mouvement uniforme

Ce cas test va permettre de valider la prise en compte de la convection dans le milieu d'observation. On présente les résultats obtenus avec les deux méthodes d'extrapolation : la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H convectée et la méthode de Kirchhoff

convectée.

La configuration numérique est identique à celle utilisée pour le monopôle dans un milieu au repos. La seule différence est l'ajout d'un écoulement à Mach $M=0.3$ dans le domaine.

5.4.3.1 Méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H

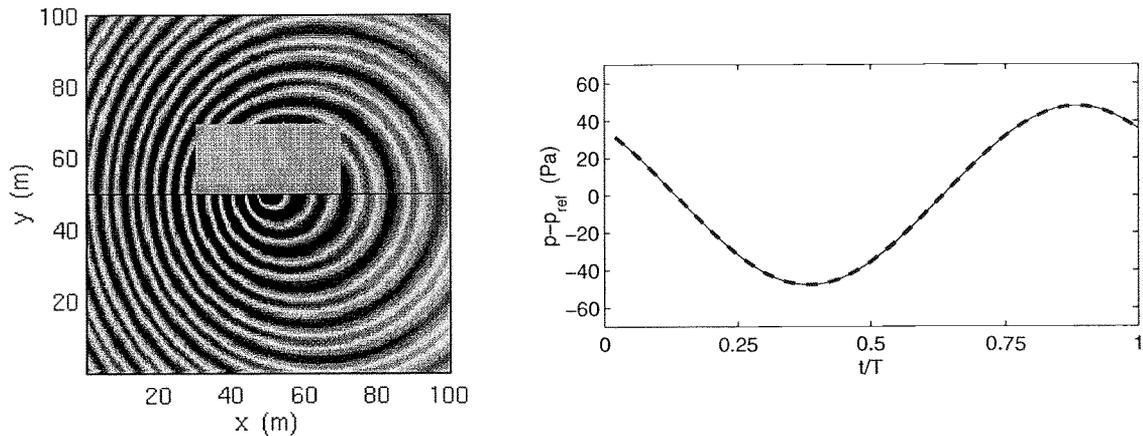


Figure 5.13: Source monopolaire dans un milieu en mouvement uniforme à Mach 0.3. A gauche, champ de pression obtenu, au même instant, avec la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H ($x_2 > 50$) et avec la solution analytique ($x_2 < 50$). A droite, évolution temporelle de la pression fluctuante au point situé en (75 m; 75 m) : (—) solution analytique et (---) FW-H WEM.

Les résultats de la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H pour le champ de pression (fig. 5.13, gauche), pour l'évolution temporelle (fig. 5.13, droite) et pour l'amplitude suivant $x_1 = x_2$ (fig. 5.14) sont en parfait accord avec la solution analytique (5.9) où $M=0.3$.

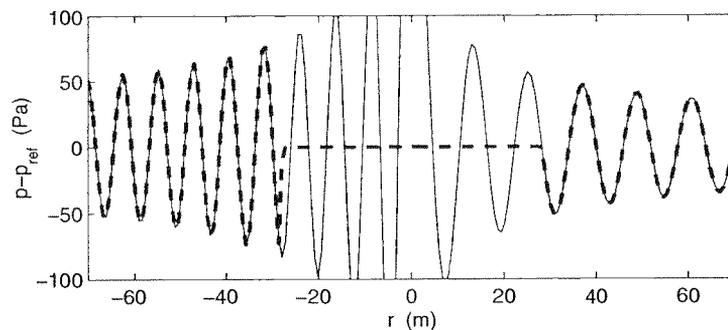


Figure 5.14: Source monopolaire dans un milieu en mouvement uniforme à Mach 0.3. Profil de pression le long de la droite $x_1 = x_2$: (—) solution analytique; (---) méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

5.4.3.2 Méthode de Kirchhoff

Les mêmes quantités que précédemment, tracées sur les figures 5.15 et 5.16, obtenues avec la méthode de Kirchhoff convectée, concordent également avec la solution de référence. Les deux

méthodes induisent une erreur très inférieure au pourcent (0.04 % pour FW-H WEM et 0.06 % pour Kirchhoff WEM).

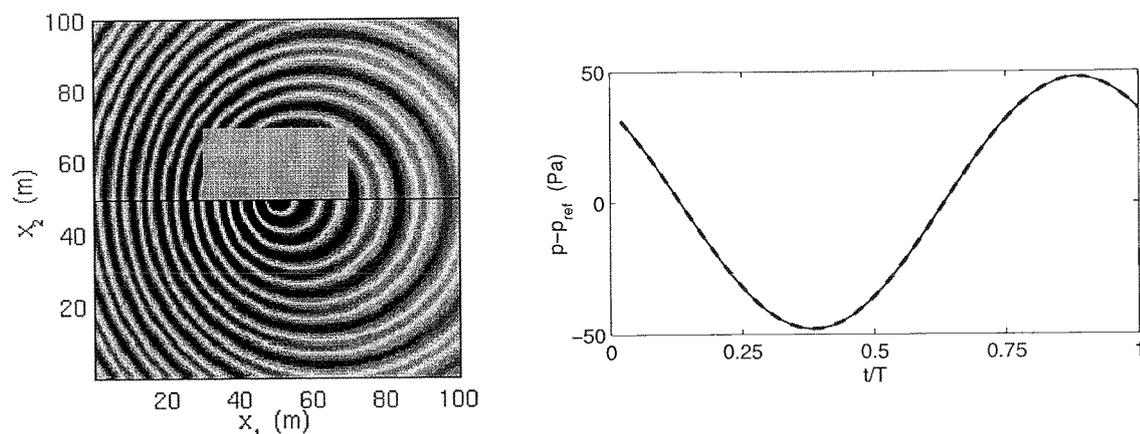


Figure 5.15: Source monopolaire dans un milieu en mouvement uniforme à Mach 0.3. A gauche, champ de pression obtenu, au même instant, avec la méthode de Kirchhoff ($x_2 > 50$) et avec la solution analytique ($x_2 < 50$). A droite, évolution temporelle de la pression fluctuante au point situé en (75 m; 75 m) : (—) solution analytique et (---) méthode de Kirchhoff.

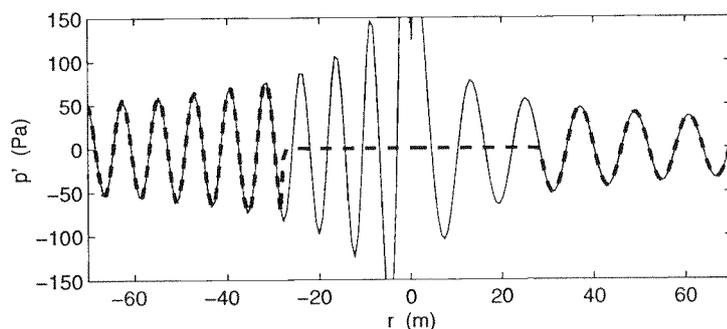


Figure 5.16: Source monopolaire dans un milieu en mouvement uniforme à Mach 0.3. Profil de pression le long de la droite $x_1 = x_2$: (—) solution analytique; (---) méthode de Kirchhoff. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

5.4.4 Réflexion d'un monopôle sur une paroi

Le dernier cas test acoustique considère la réflexion d'une source monopolaire sur une paroi physique. La paroi réfléchissante se situe en $x_2 = 0$ et la source est placée à (50 m; 10 m) de l'origine. La solution de référence est obtenue par simulation numérique directe des équations d'Euler sur un maillage cartésien régulier de 201×201 points avec $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.5$ m. On prend comme précédemment $\Delta t = \lambda/(100c_\infty)$ soit $CFL = 0.2$. La frontière inférieure est une condition de paroi glissante obtenue avec des points images[†]; les autres frontières sont des

[†]voir §2.2.7.2.

conditions de champ libre de Tam et Dong. La source est définie par :

$$S(x_1, x_2, t) = A \frac{\omega}{\gamma - 1} \times \sin(\omega t) \times \exp \left\{ -\frac{\log 2}{9\Delta x_1^2} ((x_1 - 50)^2 + (x_2 - 10)^2) \right\}$$

ajoutée à chaque itération dans l'équation de l'énergie avec $A = 50$ Pa, $\lambda = 10$ m, $k = 2\pi/\lambda$ et $\omega = kc_\infty$. On applique la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H sur un maillage cartésien régulier de 201×201 points avec $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.5$ m. Les termes sources sont enregistrés sur la ligne brisée représentée sur la figure 5.17 à gauche. Celle-ci suit d'abord la paroi depuis le début du domaine, entoure la source suivant les trois côtés d'un carré d'arête $80\Delta x_1$ puis suit à nouveau la paroi jusqu'à la fin du domaine. On a donc bien inclus toute la paroi dans les sources.

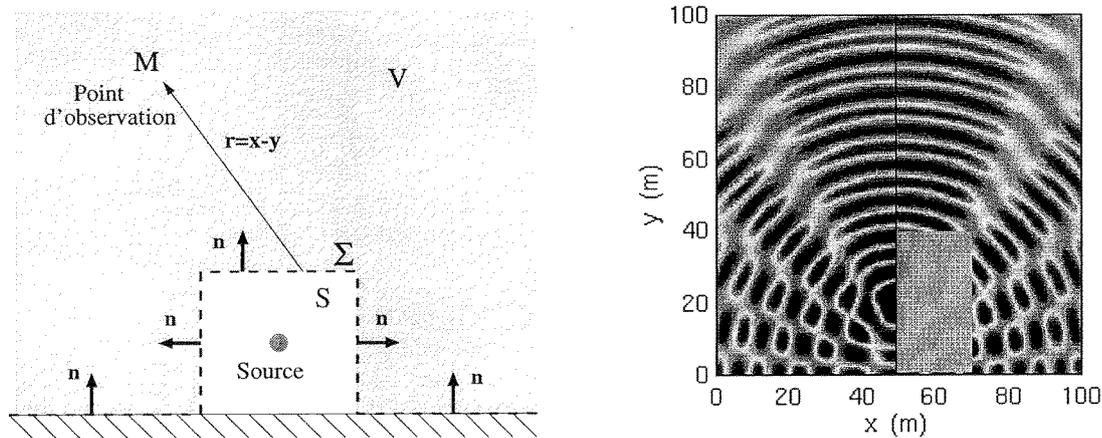


Figure 5.17: Réflexion d'un monopôle sur une paroi. À gauche, configuration et notations; à droite, champ de pression calculé par DNS pour $x_1 < 50$ et par la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H pour $x_1 > 50$.

La figure d'interférence entre les ondes directes et les ondes réfléchies obtenue pour le champ de pression extrapolé sur la figure 5.17 à droite est en parfait accord avec les résultats de la DNS. La coupe selon $x_1 = x_2$ de la figure 5.18 confirme la prise en compte correcte des frontières solides dans la méthode intégrale.

5.4.5 Rayonnement d'une cavité compacte soumise à un écoulement rasant

Cette configuration va permettre de valider l'intégration des sources volumiques (surfiques en 2-D) en présence d'un écoulement par comparaison avec une méthode d'extrapolation des ondes. On applique donc deux méthodes intégrales différentes : l'analogie de FW-H (5.1) et la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H (5.6). Pour cette dernière, on étudie l'influence du placement de la surface (ligne en 2-D) de contrôle, en choisissant une ligne d'extrapolation dans la région acoustique et une autre proche de la région aérodynamique.

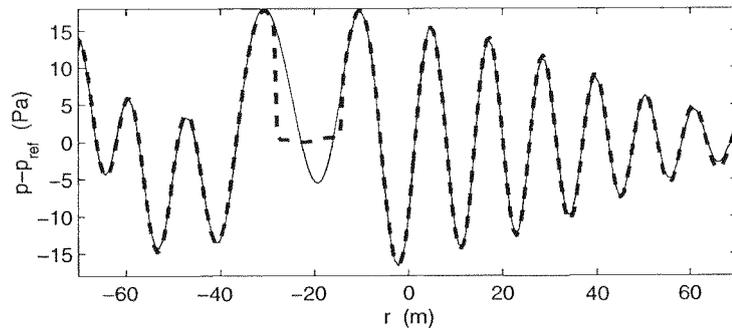


Figure 5.18: Réflexion d'un monopôle sur une paroi. Profil de pression le long de la droite $x_1 = x_2$: (—) solution analytique; (---) méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

5.4.5.1 Paramètres de la simulation

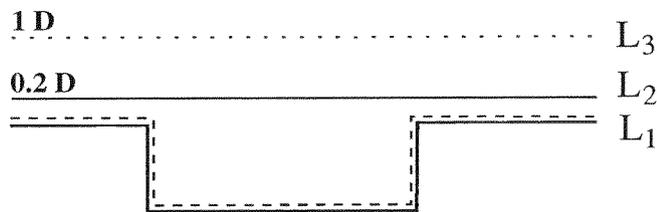


Figure 5.19: Schéma des sources linéiques utilisées pour l'évaluation des formulations intégrales.

Les termes sources issus de la DNS, réalisée au §3.3, sont enregistrés dans la région source pendant une période d'oscillation T avec un pas de temps d'échantillonnage égal à 10 fois le pas de temps de la DNS, soit 121 itérations emporelles. Pour la méthode d'extrapolation des ondes basée sur l'équation de FW-H, (u_1, u_2, p, ρ) sont enregistrés sur deux lignes fictives, horizontales, traversant le domaine de la DNS (voir fig. 5.19). La première L_3 se trouve dans la région acoustique, $x_2 = 2D$ et la deuxième L_2 est près de la région aérodynamique en $x_2 = 0.5D$. Pour appliquer l'analogie de FW-H, les variables sont enregistrées sur la ligne brisée L_1 de la figure 5.19) et sur deux surfaces rectangulaires : l'une, à l'intérieur de la cavité, s'étend de 0 à $4D$ horizontalement et de $-D$ à 0 verticalement; l'autre, à l'extérieur, couvre la zone $(-2D; 7D) \times (0; 2D)$.

Le maillage acoustique utilisé est cartésien régulier de 108×96 points qui représente l'essentiel du domaine de la DNS $16D \times 15D$, avec $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 7 \times 10^{-5}$ m. Cette région d'observation est caractérisée par une pression statique $p_\infty = 10^5$ Pa, une masse volumique $\rho_\infty = 1.17$ kg/m³ et une célérité du son $c_\infty = 346$ m/s.

5.4.5.2 Comparaison des différentes méthodes

La comparaison des champs de pression sur la figure 5.20, montre que les deux méthodes

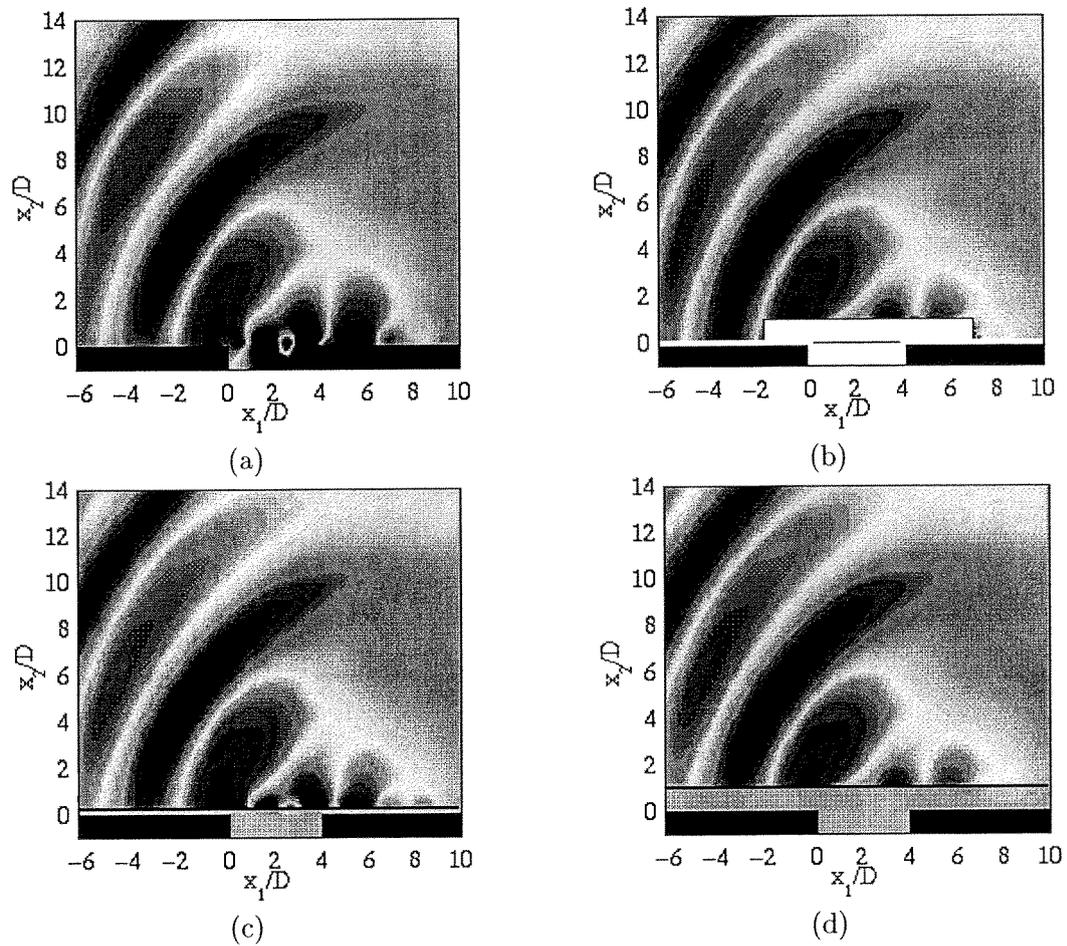


Figure 5.20: Cavité compacte $L/D = 4$ et $M=0.5$. Comparaison des champs de pression calculés avec les différentes méthodes intégrales : (a) Solution de référence (calcul direct DNS); (b) Analogie de FW-H (surfaces en blanc + ligne L_1); (c) Méthode d'extrapolation FW-H à partir de la ligne L_2 ; (d) Méthode d'extrapolation FW-H à partir de la ligne L_3 .

intégrales mises en œuvre permettent de calculer le rayonnement acoustique en bon accord avec la solution de référence fournie par le calcul direct par DNS. On valide ainsi le calcul de l'intégrale des termes quadripolaires. Le tracé des profils le long de $x_1 + x_2 = 4D$ et des évolutions temporelles sur une période T des fluctuations de pression, respectivement sur les figures 5.21 et 5.22 confirme la concordance avec la solution de référence pour les méthodes intégrales testées. En particulier, on constate que la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H est peu sensible au choix de la ligne de contrôle, qu'elle soit proche ou éloignée de la région source. Les résultats quasi-identiques pour les calculs à partir de L_2 et de L_3 indiquent que la plupart des sources sont incluses en dessous de L_2 .

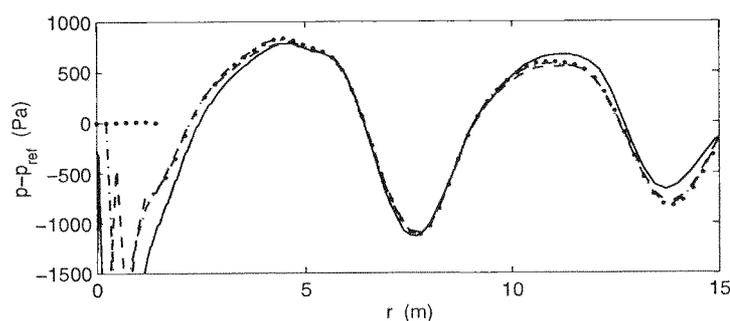


Figure 5.21: Cavité compacte $L/D = 4$ et $M=0.5$. Profil des fluctuations de pression le long de la droite $x_1 + x_2 = 4D$, qui a pour pente -1 et pour origine le coin aval. Comparaison des différentes méthodes intégrales : (—) Solution de référence (calcul direct DNS); (---) Analogie de FW-H; (····) Méthode d'extrapolation FW-H à partir de la surface L_2 ; (·····) Méthode d'extrapolation FW-H à partir de la surface L_3 .

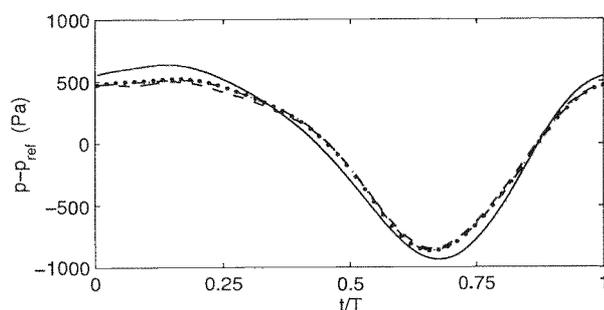


Figure 5.22: Cavité compacte $L/D = 4$ et $M=0.5$. Evolution temporelle sur la période T enregistrée avec les mêmes légendes que pour la figure 5.21.

5.4.5.3 Analyse du champ acoustique

Sur les figures 5.23 et 5.24, on sépare les contributions des différentes surfaces et des différentes lignes. On constate que l'intégration des termes quadripolaires sur la surface du haut fournit un champ de pression beaucoup plus faible que celui obtenu avec la surface dans la cavité. Ceci

explique que la méthode d'extrapolation marche toujours bien lorsque la ligne de contrôle est très proche de la cavité (ligne L_2). La décomposition des contributions des différentes parois physiques formant la cavité (fig. 5.24) indique que ce sont celles du fond de la cavité et de la paroi verticale aval qui sont prédominantes. On s'aperçoit que le rôle de la paroi horizontale aval est presque négligeable, contrairement à la configuration jet-coïn isolé, où les parois de part et d'autre de l'angle ont une contribution égale.²³¹

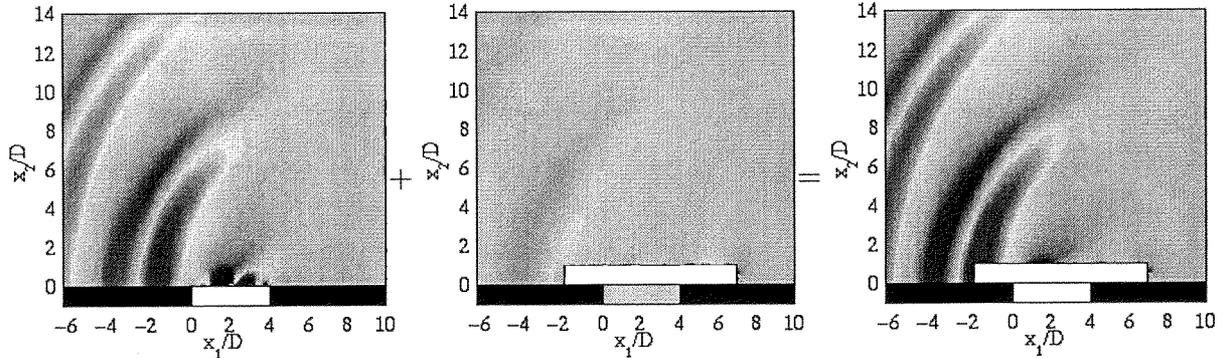


Figure 5.23: Cavité compacte $L/D = 4$ et $M=0.5$. Champs de pression obtenus avec les intégrales des termes quadripolaires (5.2). De gauche à droite, intégration sur la surface du bas, intégration sur la surface du haut et somme des deux intégrales surfaciques.

Une information majeure ressort de l'analyse séparée des contributions volumiques (surfiques en 2-D) et surfaciques (linéiques en 2-D). On s'aperçoit lorsqu'on trace les coupes selon $x_1 + x_2 = 4D$, sur la figure 5.25, que les deux parties possèdent à peu près la même amplitude. Cela rejoint les conclusions du théorème de réflexion de Powell qui trouve, dans le cas d'une surface plane, que les deux contributions sont égales et que l'on peut alors remplacer l'intégrale de surface par l'intégrale de volume sur les sources T'_{ij} , images de T_{ij} par la surface. Dans notre cas, cela revient à dire que l'intégrale volumique (surfique en 2-D) représente essentiellement le champ rayonné directement et l'intégrale surfacique (linéique en 2-D) le champ réfléchi par les parois de la cavité. L'écart principal par rapport à l'hypothèse de Powell réside dans la présence des coins amont et aval qui peuvent se comporter comme des objets diffractants, dont ne tient pas compte le théorème de réflexion. Le fait que l'amplitude des deux contributions soit proche implique que le champ diffracté par ces angles est relativement faible.

Si l'on compare les résultats de la méthode d'extrapolation à la contribution des intégrales linéiques sur les parois (fig. 5.26), on constate des champs de pression assez similaires mais déphasés. Ce déphasage est visible si l'on trace les profils le long de $x_1 + x_2 = 4D$ ou l'évolution temporelle en un point. En fait, en suivant l'analyse précédente, il s'agit du champ réfléchi dans le premier cas et du champ total dans le deuxième. Le théorème de réflexion de Powell

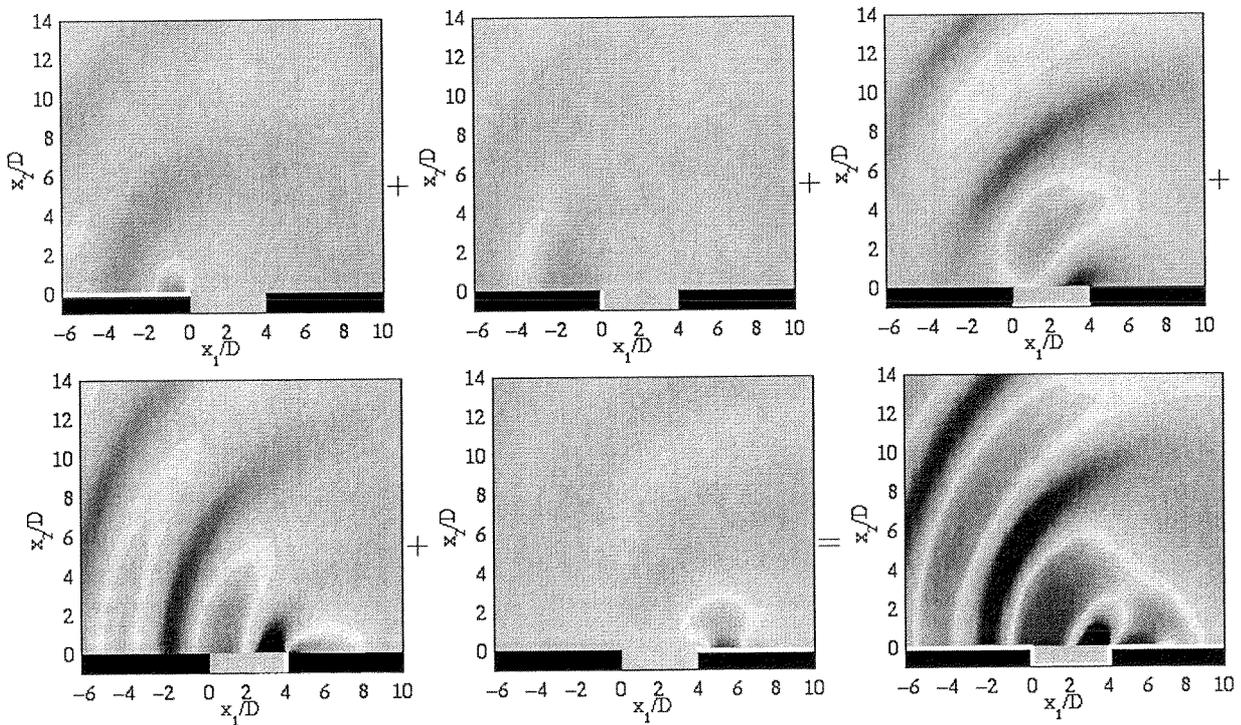


Figure 5.24: Cavité compacte $L/D = 4$ et $M=0.5$. Champs de pression obtenus avec les intégrales des termes monopolaires (5.4) et dipolaires (5.3). De gauche à droite et de haut en bas, intégration sur la ligne horizontale amont, intégration sur la ligne verticale amont, intégration sur la ligne horizontale au fond de la cavité, intégration sur la ligne verticale aval, intégration sur la ligne horizontale aval, et somme de ces cinq intégrales linéiques.

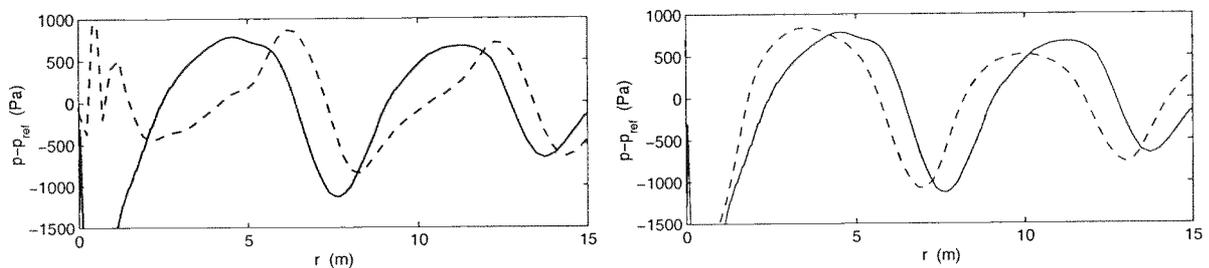


Figure 5.25: Cavité compacte $L/D = 4$ et $M=0.5$. Profil des fluctuations de pression le long de la droite $x_1 + x_2 = 4D$. A gauche, comparaison de la pression calculée à partir des intégrales surfaciques (---) avec le profil issu de la DNS (—). A droite, comparaison de la pression calculée à partir des intégrales linéiques (- - -) avec le profil issu de la DNS (—).

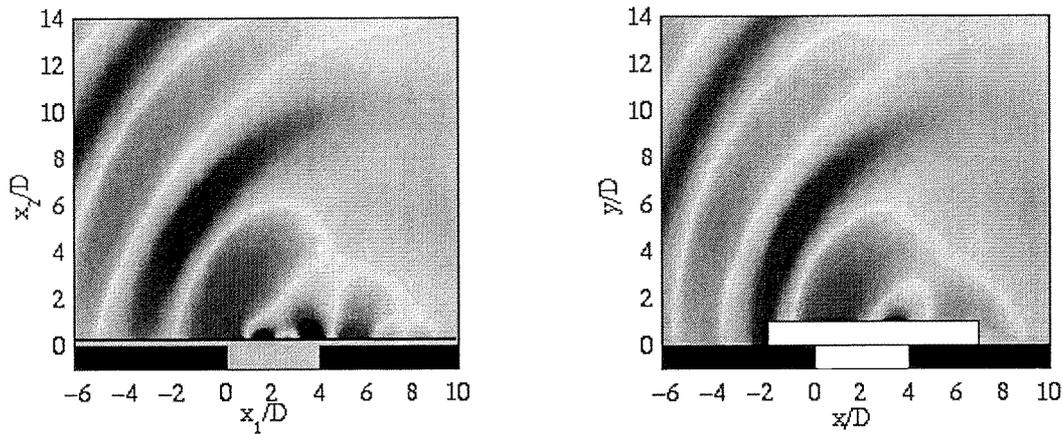


Figure 5.26: Cavité compacte $L/D = 4$ et $M=0.5$. Comparaison des champs de pression calculés avec la méthode d'extrapolation FW-H à partir de la ligne L_2 (  gauche) et avec les intégrales linéiques de l'analogie de FW-H (ligne brisée L_1).

implique, pour une plaque plane, que le champ réfléchi représente 50 % du champ rayonné et le champ direct les autres 50 %. Or le champ réfléchi semble déjà du même niveau que le champ total! Ce n'est pourtant pas contradictoire à cause du jeu des interférences destructives d  à la corrélation évidente entre les deux signaux direct et réfléchi. Ces interférences destructives représentent donc 50 % de la somme des deux composantes soit 100 % du champ total. Ce résultat représente le processus de réflexion sur un objet acoustiquement compact, parfaitement illustré par notre calcul. Il peut expliquer un certain nombre de contradictions notées dans la littérature. Par exemple, Ho et Nosseir,^{116,207} dans leur étude sur un jet impactant une plaque, notent que la source principale provient de la région d'impact. Ils caractérisent l'intensité de la source sur la plaque et trouvent une intensité proche de celle du rayonnement total. Ils concluent sur une non-vérification du théorème de Powell puisque les sources surfaciques ne représentent pas 50 % du champ total. On a vu que ce n'est pas contradictoire. Un autre exemple est donné par le calcul du rayonnement produit par un volet de type *slat* en amont d'un profil d'aile par Singer, Lockard et Brentner.²⁷¹ Ils caractérisent la source principale au niveau du *slat*; il s'agit d'un *feedback* aéroacoustique du même type que le jet impactant ou la cavité. Pour déterminer la directivité du champ rayonné, ils utilisent la formulation de FW-H sans les termes quadripolaires pour résoudre une méthode intégrale à partir de deux surfaces : l'une sur les parois physiques et l'autre englobant l'ensemble et incluant, par là-même, le domaine de rétroaction formé par la cavité entre le *slat* et le profil. Ils constatent des rayonnements de niveaux voisins mais dont les lobes de directivité sont plus nombreux dans le premier cas. Ils ne tranchent pas sur le caractère correct de l'un ou de l'autre. Pourtant, d'après l'analyse précédente, le premier rayonnement semble provenir des multiples réflexions dans la cavité sous le *slat* et le second en

incluant une partie des sources quadripolaires représente essentiellement le champ total. Pour cette configuration le champ diffracté n'est peut-être plus négligeable.

5.4.6 Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$

5.4.6.1 Configuration étudiée

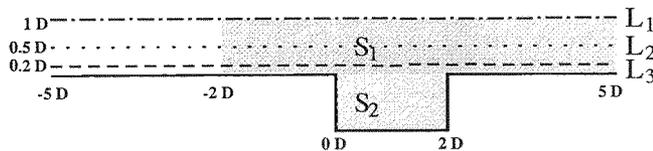


Figure 5.27: Schéma des sources linéaire et surfacique utilisées pour l'évaluation des formulations intégrales.

Les termes sources issus de la DNS, réalisée au §3.4, sont enregistrés dans la région source pendant une période d'oscillation T en profitant du caractère pseudopériodique du phénomène. Le pas de temps d'échantillonnage est 40 fois le pas de temps de la DNS, correspondant à 131 points par longueur d'onde pour la fréquence fondamentale f_0 . Pour la méthode d'extrapolation des ondes basée sur l'équation de FW-H, (u_1, u_2, p, ρ) sont enregistrés sur trois lignes fictives, horizontales, traversant le domaine de la DNS (voir fig. 5.27). Ces lignes comportent 501 points, dont la répartition est donnée par le maillage de la DNS. L_1 est situé en $x_2 = 1D$ dans la région acoustique alors que L_3 , en $x_2 = 0.2D$, se trouve juste au-dessus de la couche cisailée. La ligne L_2 est intermédiaire, en $x_2 = 0.5D$. Pour appliquer la méthode de Kirchhoff convectée, on enregistre p et $\partial p / \partial n$ sur ces trois lignes. Les dérivées normales aux lignes, $\partial p / \partial y_2$ sont calculées *a posteriori* en utilisant le schéma DRP de Tam et Webb. Enfin, pour l'analogie de FW-H, on stocke (u_1, u_2, p, ρ) sur les parois physiques de la cavité et sur les surfaces S_1 et S_2 représentées sur la figure 5.27. S_2 est la surface à l'intérieur de la cavité $(0; 2D) \times (-D; 0)$ et S_1 est un rectangle au dessus de la cavité d'une hauteur de $1D$ et qui s'étend de $-2D$ à $5D$ dans la direction x_1 . Cette surface a été choisie suffisamment large pour limiter les effets dus à la troncature spatiale des termes sources. La grille acoustique est un maillage cartésien régulier de 176×184 points qui couvre l'essentiel du domaine de la DNS $(-5D; 5D) \times (-D; 8D)$. Cette région d'observation est caractérisée par une pression statique $p_\infty = 10^5$ Pa, une masse volumique $\rho_\infty = 1.17$ kg/m³ et une célérité du son $c_\infty = 346$ m/s.

5.4.6.2 Méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H

L'extrapolation est réalisée à partir des trois lignes L_1 , L_2 et L_3 de la figure 5.27 au temps

$t = T$. Les résultats de l'intégration de (5.6) avec les termes sources (5.7) et (5.8) et un nombre de Mach $M=0.7$ dans le domaine observateur sont comparés à ceux de la DNS sur la figure 5.28. Les cartographies du champ de pression montrent que le champ acoustique extrapolé à partir des trois lignes est conforme à celui calculé directement à partir des équations de la mécanique des fluides.

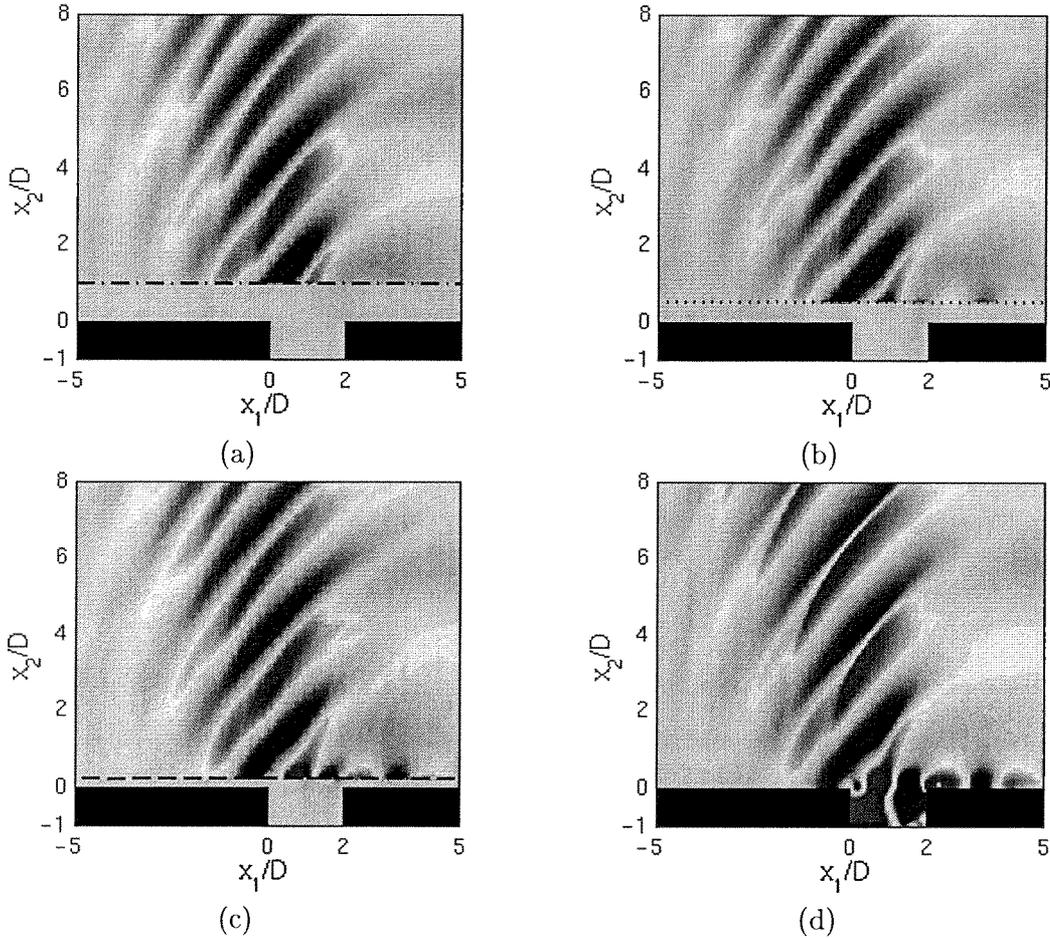


Figure 5.28: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Champ de pression calculé au même instant par la méthode d'extrapolation des ondes (a) à partir de L_1 , (b) à partir de L_2 , (c) à partir de L_3 et (d) calcul direct par DNS.

Ce bon accord est confirmé par les coupes de la pression le long de la droite $x_1 + x_2 = 2D$, qui a pour origine l'angle aval de la cavité et pour pente -1 (fig. 5.29). L'amplitude calculée à partir de L_1 , L_2 , et L_3 pour r respectivement inférieur à $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}/2$ et $\sqrt{2}/5$ est nulle puisqu'on se trouve dans la surface de contrôle ($H(f) = 0$). Les courbes pour L_1 et L_2 sont quasiment superposées. On peut noter une légère différence pour L_3 au niveau des creux secondaires en $r \simeq 5$ et $r \simeq 6.7$. L'extrapolation à partir de L_3 ne reproduit pas ces creux correspondant à une interférence destructive. La visualisation du champ de pression montre également que les contours des fronts d'onde sont plus étalés pour ce calcul. Les directivités en champ lointain

calculées sur un cercle de rayon $7D$ centré sur l'angle aval de la cavité (voir fig. 3.20) à partir des évolutions temporelles fournies par la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H sont comparées à celle obtenue avec la DNS sur la figure 5.30. Les extrapolations à partir des trois lignes indiquent une directivité du rayonnement en bon accord avec le calcul direct, les écarts observés sont de l'ordre du dB.

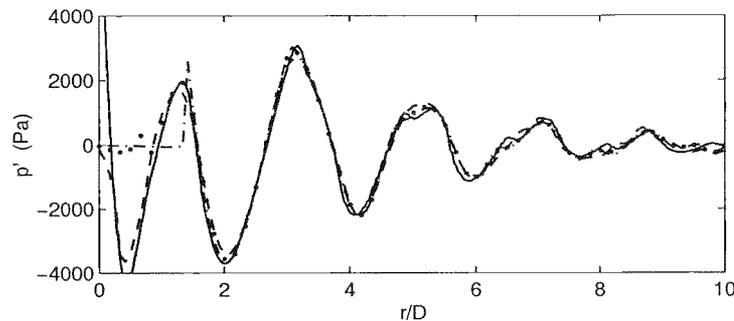


Figure 5.29: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Profils de pression suivant la droite $x_2 = 2D - x_1$: (—) DNS, (---) FW-H WEM à partir L_1 , (· · · · ·) FW-H WEM à partir L_2 , (- - -) FW-H WEM à partir L_3 . $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

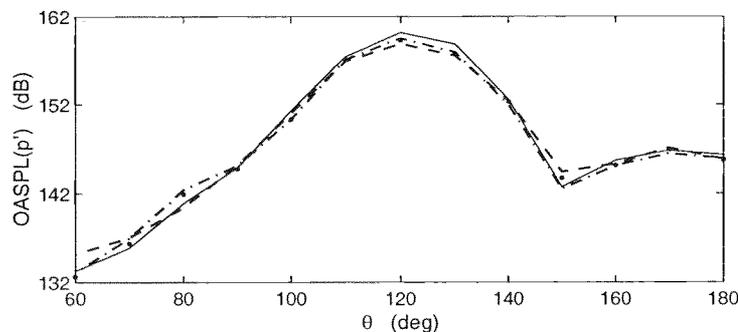


Figure 5.30: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Directivité en champ lointain, évaluée sur les capteurs représentés sur la figure 3.20. L'angle θ est mesuré depuis l'axe Ox_1 et les légendes sont identiques à celles de la figure 5.29.

5.4.6.3 Méthode de Kirchhoff convectée

Pour analyser les résultats de l'intégration de (5.5), les mêmes données que dans le paragraphe précédent sont tracées sur les figures 5.31, 5.32 et 5.33. L'analyse est identique à celle de la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H. La concordance entre les deux méthodes d'extrapolation est attendue lorsque la ligne de contrôle est dans la région acoustique (pour L_1 par exemple) mais les résultats de Brentner et Farassat²⁹ et Singer *et al.*,²⁷⁰ rappelés sur les figures 5.1 et 5.2, montrent que la méthode de Kirchhoff peut conduire à des résultats erronés lorsque la ligne de contrôle est très proche des sources non linéaires alors que la méthode FW-H

poreux fournit encore des résultats corrects. Cette différence de comportement est expliquée par la présence de termes supplémentaires, non linéaires, dans les intégrales de la formulation FW-H WEM. En effet, pour un milieu au repos, on a :

$$\iiint_V \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \frac{dy}{r} = \iint_{\Sigma} n_i \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} \frac{d\Sigma(\mathbf{y})}{r} + \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{\Sigma} n_j T_{ij} \frac{d\Sigma(\mathbf{y})}{r} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iiint_V T_{ij} \frac{dy}{r}$$

A droite, il s'agit du terme volumique qui apparaît dans la formulation de Kirchhoff (formule (4.71)) et, à gauche, de celui qui intervient dans la formulation de FW-H (formule (4.58)). Lorsqu'on supprime les intégrales de volume, puisqu'on suppose que toutes les sources sont incluses dans la surface de contrôle, il reste deux intégrales supplémentaires portant sur des termes non linéaires dans la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H. Ces deux intégrales sont bien négligeables si la surface est dans une région acoustique mais pourraient prendre de l'importance lorsqu'elle est située près des non linéarités aérodynamiques. Dans notre cas, le rôle de ces termes apparaît négligeable. Les applications de di Francescantonio⁵² et Prieur et Rahier²³⁴ amènent la même conclusion et ne permettent pas non plus de départager les deux méthodes d'extrapolation. On pourra néanmoins préférer la méthode FW-H WEM car elle utilise directement les variables de la simulation directe alors que la méthode de Kirchhoff requiert une dérivation supplémentaire pour évaluer les gradients normaux de pression. La méthode de Kirchhoff est légèrement plus rapide (10 minutes sur un Dec α contre 13 pour la méthode FW-H WEM) car il y a moins de termes à intégrer mais il faut lui ajouter le temps nécessaire pour calculer $\partial p / \partial n$.

5.4.6.4 Analogie de Ffowcs Williams et Hawkings

Le champ de pression obtenu en intégrant (5.1) avec les termes sources (5.2), (5.3) et (5.4) est comparé à celui fourni par la DNS sur la figure 5.34. La concordance est correcte mais l'on note des oscillations parasites en haut du domaine observateur qui n'étaient pas présentes avec les méthodes d'extrapolation. Cette dégradation du champ prédit est notable sur les coupes de la pression le long de $x_1 + x_2 = 2D$ de la figure 5.35. Ces écarts sont liés aux effets de troncature spatiale des sources notamment sur les faces en $x_1 = -2D$ et $x_1 = 5D$ de la surface S_1 . Cela provient du fait que les sources ne décroissent pas à zéro à l'intérieur du domaine de calcul de la DNS. Notamment au niveau de la sortie, les termes quadripolaires T_{ij} ne décroissent que dans la zone éponge. Cette décroissance n'est d'ailleurs pas physique car on a introduit des termes dissipatifs dans la zone éponge de la DNS. Ce problème n'est pas spécifique à l'utilisation d'une zone éponge mais est lié à la nécessité générale de définir un domaine de calcul fini. Si la zone éponge n'avait pas été utilisée, cela aurait sans aucun doute conduit à une troncature encore plus importante qui aurait non seulement contaminé le champ calculé avec les méthodes

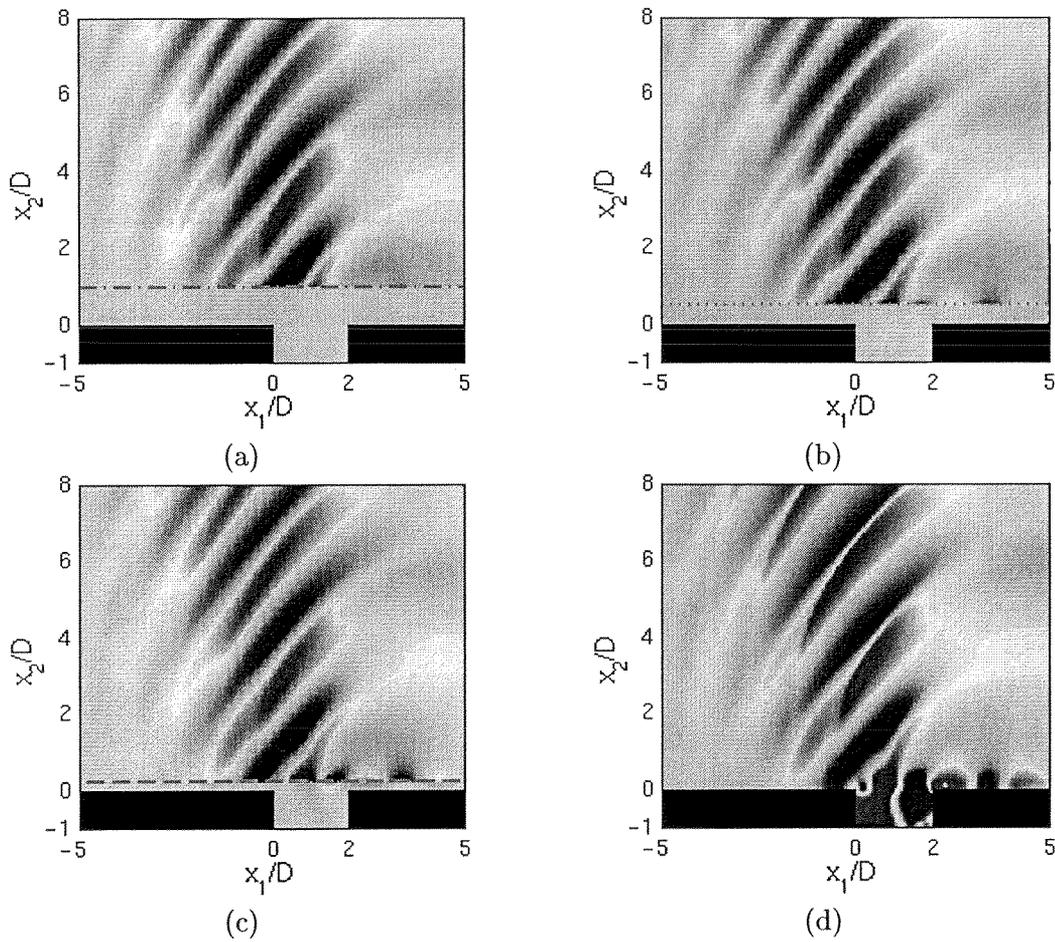


Figure 5.31: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Champ de pression calculé au même instant par la méthode de Kirchhoff (a) à partir de L_1 , (b) à partir de L_2 , (c) à partir de L_3 et (d) calcul direct par DNS.

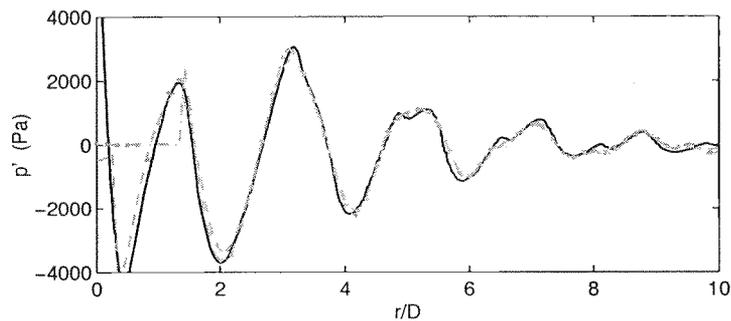


Figure 5.32: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Profils de pression suivant la droite $x_2 = 2D - x_1$ obtenus avec la méthode de Kirchhoff : (—) DNS, (---) Kirchhoff WEM à partir L_1 , (.....) Kirchhoff WEM à partir L_2 , (- - -) Kirchhoff WEM à partir L_3 . $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

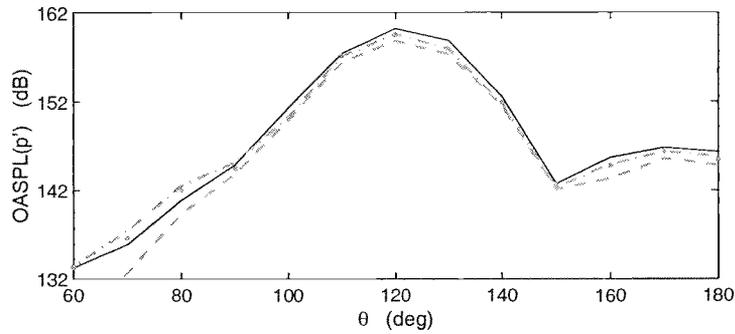


Figure 5.33: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Directivité en champ lointain obtenue avec la méthode de Kirchhoff, évaluée sur les capteurs représentés sur la figure 3.20. L'angle θ est mesuré depuis l'axe Ox_1 et les légendes sont identiques à celles de la figure 5.32.

intégrales mais aussi parasité le champ obtenu par la DNS. Son absence peut également avoir des répercussions sur l'écoulement aérodynamique en provoquant un forçage acoustique dû à la réflexion sur la sortie. On ne peut pas non plus incriminer la méthode de résolution dans l'espace fréquentiel car toutes les méthodes contiendraient cette influence de la troncature. Les deux problèmes liés à la troncature des termes sources (par la zone éponge ou par une gaussienne) sont, d'une part, la nécessité d'avoir un domaine source qui contienne toutes les sources physiques de bruit et, d'autre part, la modification de la dynamique de l'écoulement introduite par la zone éponge. Mais ces deux sources d'erreur se répercutent à la fois sur les champs acoustiques calculés par la DNS et par les méthodes intégrales.

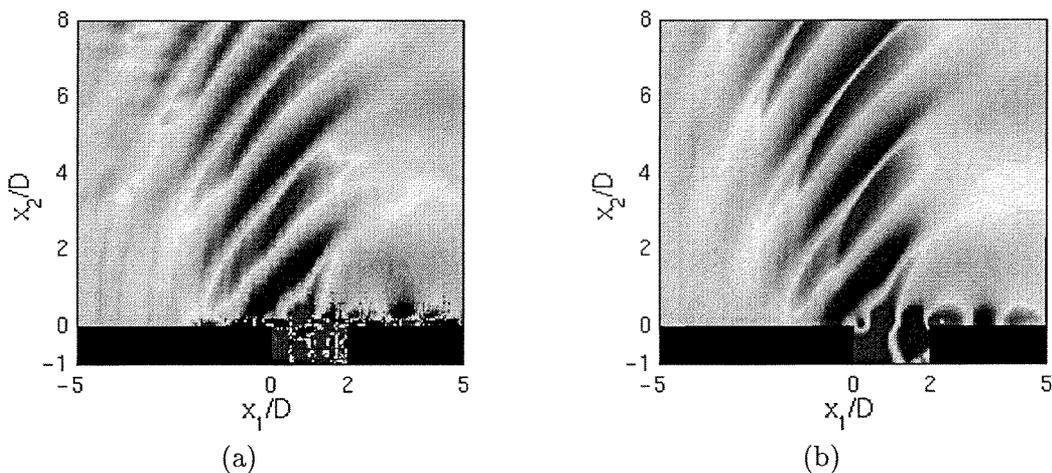


Figure 5.34: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Champ de pression calculé au même instant avec : (a), l'analogie de FW-H et (b), le calcul direct par DNS.

La directivité obtenue avec l'analogie est en bon accord avec les méthodes d'extrapolation et le calcul direct sur la figure 5.36. Un écart sensible peut être noté pour les petits angles (c'est-à-dire dans la direction aval) qui confirme que les principales erreurs sont dues à la troncature

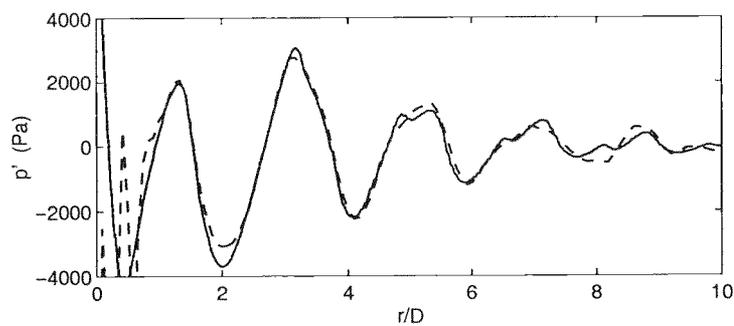


Figure 5.35: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Profils de pression suivant la droite $x_2 = 2D - x_1$ obtenus avec : (—) le calcul direct par DNS, (---) l'analogie de FW-H. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

imposée par la fin du domaine de calcul.

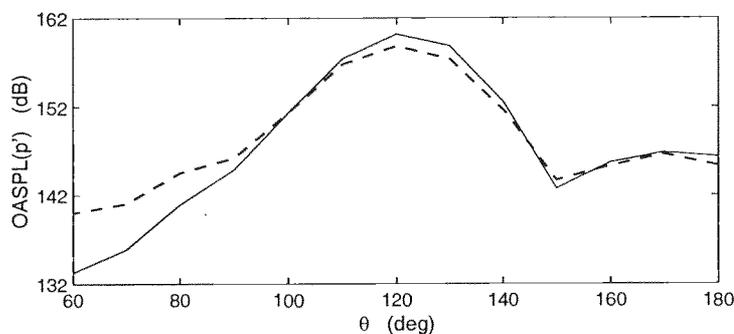


Figure 5.36: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Directivité en champ lointain obtenue avec : (—) le calcul direct par DNS et (---) l'analogie de FW-H, évaluée sur les capteurs représentés sur la figure 3.20. L'angle θ est mesuré depuis l'axe Ox_1 .

L'approche analogique est donc moins précise que les méthodes d'extrapolation et plus coûteuse puisqu'il faut évaluer des intégrales de surface alors que les méthodes d'extrapolation n'utilisent que des intégrales linéiques en 2-D. Cependant, les résultats de l'analogie contiennent plus d'informations sur la nature du rayonnement acoustique. En effet, on peut séparer la contribution des intégrales volumiques (surfaciques, en 2-D) de celle des intégrales surfaciques (linéiques, en 2-D). Une telle séparation est présentée sur la figure 5.37. En suivant le théorème de réflexion de Powell,²³⁰ comme pour la cavité compacte, les sources quadripolaires représentent le champ direct et les intégrales de surface les ondes réfléchies. On est donc en mesure d'identifier clairement les deux types de fronts d'onde qui apparaissent dans le champ acoustique de la DNS. La distinction entre les ondes directes et réfléchies indique que la cavité n'est plus acoustiquement compacte c'est-à-dire $\lambda_{\text{effectif}} < L$. On a $f_0 L / c_\infty = L / \lambda$ d'où $L = 0.47\lambda$. Mais le facteur Doppler, dû à la convection par l'écoulement moyen resserre les fronts d'onde en amont de la source, soit $\lambda_{\text{effectif}} = (1 - M)\lambda = 0.75L$.

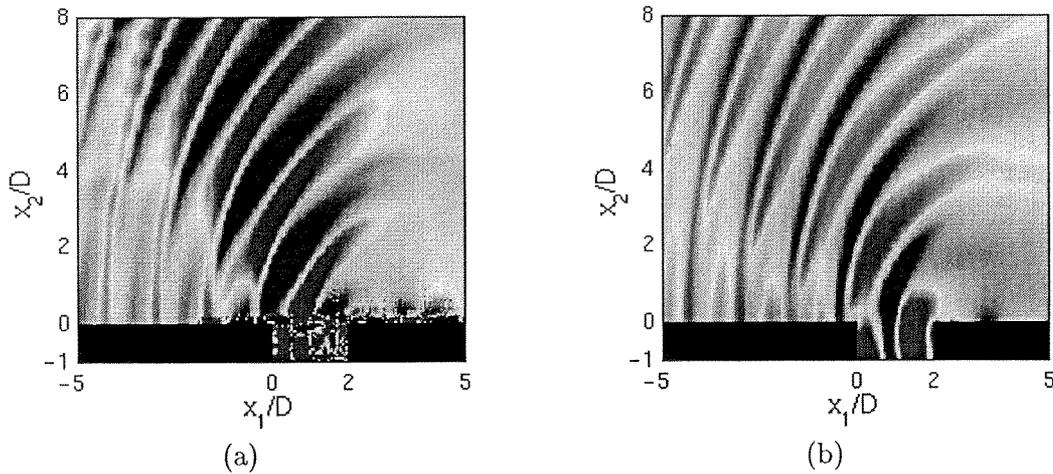


Figure 5.37: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Séparation des contributions des intégrales surfaciques (a) et des intégrales linéiques (b) au champ de pression calculé avec l'analogie de FW-H.

5.4.6.5 Propagation acoustique non linéaire

L'évolution temporelle de la pression au point $(-1.28D; 6.14D)$ durant la période T calculée avec les différentes méthodes intégrales est présentée sur la figure 5.38. Les courbes obtenues avec les méthodes intégrales ont une forme à peu près sinusoïdale alors que celle du calcul direct possède plutôt une forme en N , indiquant un raidissement des fronts d'onde. Celui-ci est caractéristique d'une propagation non linéaire due à des niveaux acoustiques intenses. Ces fortes pressions induisent en effet une célérité variable dans le domaine observateur qui déforme les fronts d'onde. Le milieu observateur n'est plus uniforme alors que, dans les développements analytiques, la vitesse du son est supposée constante, égale à c_∞ . Les méthodes intégrales ne sont donc pas capables de rendre compte de cette propagation non linéaire.

Dans le cas général, les inhomogénéités présentes dans le milieu observateur peuvent être de différentes natures. Elles peuvent être associées à une vitesse du son non constante ou aux changements d'entropie du fluide par des phénomènes de combustion ou de transferts thermiques. On exclut bien entendu la présence d'objets réflecteurs ou de particules diffractantes. Dans notre cas, on ne s'intéresse qu'aux variations au premier ordre de la célérité du son dans le milieu observateur dues à la propagation d'ondes acoustiques de forte amplitude. On se place dans le cas où ces fortes perturbations acoustiques sont suffisamment élevées pour induire une propagation non linéaire mais conservent une amplitude faible devant la pression moyenne p_∞ , de l'ordre de quelques pourcents. Ainsi, pour une pression de référence de 10^5 Pa, une perturbation de 1000 à 3000 Pa reste linéaire mais sa propagation ne l'est plus.

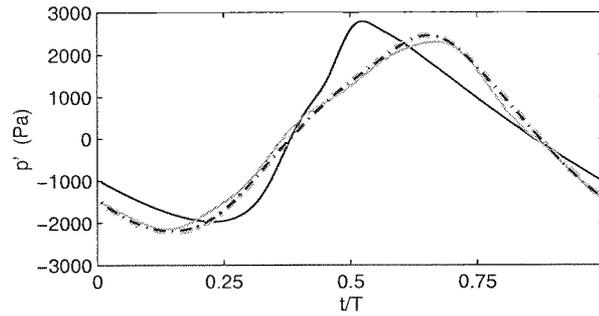


Figure 5.38: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Evolution temporelle de la pression au point $(-1.28D; 6.14D)$ durant la période T , obtenus avec : (—) le calcul direct par DNS, (⋯) l'analogie de FW-H, (- · - ·) la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FH-W à partir de L_1 , (· · · ·) la méthode de Kirchhoff convectée à partir de L_1 .

Un développement limité au 1^{er} ordre des grandeurs locales dans une onde de pression s'écrit :

$$p = p_\infty + p_a \quad \text{et} \quad \rho = \rho_\infty + \rho_a$$

où p_∞ et ρ_∞ sont les valeurs moyennes, supposées constantes dans le milieu d'observation et p_a et ρ_a sont les perturbations acoustiques, supposées linéaires donc vérifiant $p_a = c^2 \rho_a$. La célérité du son locale c est définie pour un gaz parfait par la relation :

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \frac{p_a}{\rho_a},$$

dont on déduit :

$$\frac{p_a}{p} = \gamma \frac{\rho_a}{\rho} \quad \text{soit} \quad \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

Il s'agit donc d'une transformation adiabatique qui vérifie :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cste} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma$$

En introduisant $c_\infty^2 = \gamma p_\infty / \rho_\infty$, on obtient :

$$c^2 = \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \frac{p}{p_\infty} \frac{\rho_\infty}{\rho} = c_\infty^2 \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

soit :

$$c = c_\infty \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = c_\infty \left(\frac{p_\infty + p_a}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = c_\infty \left(1 + \frac{p_a}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

et un développement limité au 1^{er} ordre donne :

$$c \simeq c_\infty \left(1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{p_a}{p_\infty} \right) \quad (5.10)$$

Cette variation de la vitesse du son lors du passage d'une onde acoustique de forte amplitude peut être vue comme l'effet d'une variation de température liée à la variation de la pression¹⁵⁵ :

une compression s'accompagne d'un échauffement et une dépression d'un refroidissement. Les écarts obtenus avec ce développement au 1^{er} ordre en utilisant la pression acoustique p_a de la DNS sont représentés sur la figure 5.39(b) et comparés à la valeur exacte $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ fournie par la DNS (fig. 5.39(a)). L'accord est évident même si des différences peuvent être observées à l'intérieur de la cavité.

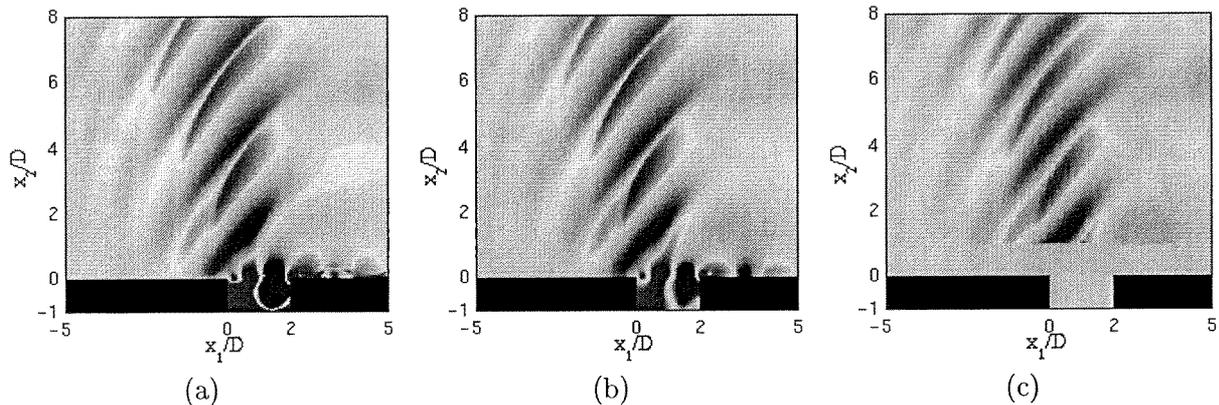


Figure 5.39: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Visualisation de la célérité du son sur le domaine de calcul : (a) valeur obtenue par la DNS : $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$, (b) équation (5.10) à partir de p_a fourni par la DNS, (c) équation (5.10) à partir de p_a fourni par la méthode d'extrapolation des ondes à partir de L_1 . Les niveaux sont tracés entre $c_\infty - 2$ et $c_\infty + 2$ m/s avec $c_\infty = 346.15$ m/s.

Cet effet non linéaire n'est pas reproduit par l'opérateur de propagation utilisé, qui est une simple équation d'onde convectée avec une célérité constante c_∞ . La solution à cette équation est exprimée à partir de la convolution avec la fonction de Green associée. Si l'on veut prendre en compte les variations de la célérité du son, il faut remplacer la vitesse du son c_∞ par sa valeur effective $c(x, t)$ pour chaque point observateur \mathbf{x} et chaque temps d'observation t . Cependant, cette valeur effective n'est pas connue a priori. On peut contourner la difficulté par une méthode itérative : on calcule d'abord le champ acoustique avec c_∞ constante puis on évalue la vitesse locale c avec (5.10). On recalcule alors l'expression intégrale avec cette vitesse variable. La cartographie de la célérité effective obtenue à partir de la méthode FW-H WEM avec c_∞ constante, tracée sur la figure 5.39(c), est en bon accord avec celle du calcul direct. Une coupe sur la figure 5.40 confirme cet accord global; les principales différences sont visibles pour les grandes distances de propagation pour lesquelles la déformation intégrée des fronts d'onde devient significative.

Une autre méthode consiste à utiliser la théorie des chocs faibles de Lighthill-Whitham.^{156,307} Freund *et al.*⁸² l'ont appliquée numériquement pour prolonger le calcul acoustique du rayonnement d'un jet à Mach 1.92. Mais il s'agit d'une méthode couplée avec le calcul direct plutôt que d'une méthode intégrale. De plus, elle est difficilement transposable au cas où il y a un écoulement uniforme car on a alors $p_a = -\rho_\infty \Re \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right\}$. Le fait que la directivité obtenue

avec les différentes méthodes intégrales soit conforme à celle de la DNS, alors que l'évolution temporelle omet les non linéarités, indique que les niveaux globaux intégrés sont semblables. C'est une illustration de la loi des aires.^{307,156}

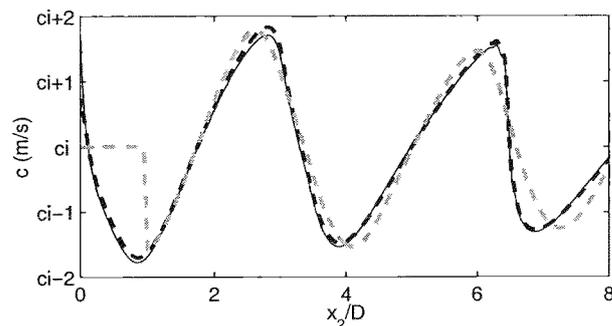


Figure 5.40: Rayonnement d'une cavité non compacte à $M=0.7$. Coupe de la célérité du son c selon la droite $x_1 = 0$: (—) valeur obtenue par la DNS, (---) équation (5.10) à partir de p_a fourni par la DNS, (- - -) équation (5.10) à partir de p_a fourni par la méthode d'extrapolation des ondes à partir de L_1 . On note $c_i = c_\infty$.

5.5 Conclusion

Les deux méthodes d'extrapolation donnent des résultats semblables et sont toutes les deux peu sensibles à la position de la ligne de contrôle, même lorsque celle-ci est très proche de la zone aérodynamique. Les méthodes d'extrapolation constituent une solution complémentaire efficace pour étendre en champ lointain le champ acoustique calculé en champ proche par un calcul direct. Elles peuvent également permettre d'obtenir le bruit rayonné à partir de codes CFD qui résolvent mal les fluctuations acoustiques (caractère trop dispersif ou dissipatif des schémas ou pas temporel ou spatial trop grands).¹⁷³ C'est un outil très économique pour évaluer la directivité en champ lointain puisque la méthode est indépendante du point et du temps d'observation choisis.

L'approche analogique est moins précise que les méthodes d'extrapolation. De plus, le coût informatique est largement accru autant en terme de stockage que de temps de calcul pour l'intégration (voir tableau 5.1). Pour la simulation précédente, la partie acoustique du maillage représente plus de la moitié du nombre total de points et s'étend verticalement sur $6D$. Afin d'assurer les 6 points par longueur d'onde imposés par le schéma de Tam et Webb pour la plus haute fréquence à propager, on obtient un Strouhal de coupure $St_c = f_{min}L/U_\infty = L/(6\Delta y_{acous}M_\infty) \simeq 21$. Le temps de calcul correspondant à la région aérodynamique représente l'autre moitié. On ne peut pas tellement diminuer cette taille car, comme on l'a vu, il faut garder les conditions limites suffisamment loin pour éviter une autoexcitation.¹⁴⁹ Le coût total

	temps	taille
méthode de Kirchhoff	11 min	1 MB
FW-H WEM	13 min	2 MB
analogie de FW-H	7 h	70 MB
calcul direct	320 h	240 MB

Tableau 5.1: Coût numérique des différentes méthodes intégrales sur un Dec- α . On compare au calcul DNS réalisé sur un NEC SX-5, en établissant une correspondance. Il faut rajouter le temps de calcul DNS aux temps nécessaires pour résoudre une méthode intégrale. Ce temps représente environ la moitié de la durée de la DNS.

d'une méthode intégrale inclut le temps de calcul des sources additionné à celui de l'évaluation numérique de la formulation. Pour la méthode de Kirchhoff, il faut encore ajouter le post-traitement pour évaluer les dérivées normales de la pression, qui représente 0.03 % du calcul DNS, soit de nombreuses minutes. Ces remarques indiquent donc que le gain réalisé sera d'autant plus grand que l'on désire obtenir des distances de propagation importantes. Parmi les méthodes analysées, l'analogie est donc de loin la plus coûteuse et propose un gain réduit par rapport au calcul direct, la méthode d'extrapolation de FW-H est un peu plus rapide que celle de Kirchhoff si l'on tient compte du calcul des dérivées mais on stocke seulement 2 variables pour la méthode de Kirchhoff contre 4 pour la méthode FW-H WEM.

Par ailleurs, l'approche analogique est sensible aux erreurs de troncature sur l'intégrale volumique. Cependant, elle fournit des éléments d'analyse intéressants en séparant le champ rayonné du champ réfléchi. En aucun cas, elle ne prétend définir les sources réelles de bruit et encore moins séparer les fluctuations aérodynamiques et acoustiques. Il s'agit simplement d'une *manœuvre brillante* pour calculer le champ sonore si, rappelons-le encore une fois, l'on est capable de distinguer une région aérodynamique et une région acoustique uniforme.

Les méthodes intégrales sont un allié d'autant plus précieux qu'elles sont efficaces pour des faibles nombres de Mach alors qu'une approche directe est délicate pour les faibles vitesses en raison des écarts très importants entre les fluctuations aérodynamiques et acoustiques.

Conclusion

Ce document présente dans une première partie la mise en œuvre du calcul direct du champ sonore produit par des écoulements en présence de parois par résolution des équations de Navier-Stokes. Le développement et la validation d'une condition de paroi, l'étude de l'influence des termes visqueux et le réglage des paramètres numériques ont permis d'étendre le code ALESIA à des situations complexes comme le calcul du bruit d'une cavité excitée par un écoulement. Cette configuration est résolue par simulation numérique directe bidimensionnelle et démontre la pertinence de la méthode. L'obtention simultanée de toutes les variables permet en effet de réaliser des expériences numériques complètes qui permettent d'étudier les mécanismes de génération de bruit en reliant les grandeurs calculées entre elles. Il s'agit aussi d'un allié précieux pour évaluer les différentes théories de l'aéroacoustique et leur intérêt pratique.

L'étude bibliographique du bruit de cavité fait ressortir plusieurs types d'interaction entre l'écoulement et la cavité. On peut observer un couplage aérodynamique, caractéristique des couches cisailées impactant un obstacle, un couplage acoustique avec les résonances suivant les modes de cavité ou de type Helmholtz et/ou un couplage fluide-structure par les modes vibratoires. On s'intéresse dans cette étude au couplage aérodynamique. Les modèles analytiques développés pour représenter cette boucle de rétroaction s'appuient sur une relation de phase stable entre les signaux amont et aval. Cependant, les différentes études proposent des critères différents qui peuvent aboutir à des relations contradictoires. La formule de Rossiter (1964) est une des premières écritures de cette relation et connaît beaucoup de succès pour corroborer les résultats expérimentaux mais aucune justification claire des deux constantes empiriques n'a encore été fournie. Enfin, la présence de la zone de recirculation dans la cavité, souvent négligée dans les modèles théoriques, peut influencer le développement de la couche cisailée. Cette interaction n'est pas encore clairement établie aujourd'hui.

La simulation d'une configuration expérimentale de Karamcheti à l'échelle 1, où une couche limite laminaire à $M=0.7$ affleure une cavité rectangulaire de rapport $L/D = 2$ avec $\delta = 0.2D$ et $Re_D = 41000$, est validée en détail par rapport aux résultats expérimentaux disponibles. Les différentes étapes de la boucle de rétroaction qui génère les oscillations autoentretenues de l'écoulement sont illustrées et permettent de reconstituer le mécanisme physique. En particulier,

une relation de phase similaire à celle proposée par Rossiter est mise en évidence mais les valeurs des constantes sont différentes. Les nouvelles valeurs sont validées par les résultats numériques présentés, ainsi que par les données expérimentales de Karamcheti, Sarohia ou Hussain et Zaman. Cette différence de phase imposée entre les angles amont et aval de la cavité permet la détermination de la fréquence adimensionnelle des oscillations, en fonction du nombre de Mach, du rapport entre la vitesse de convection des perturbations aérodynamiques et du nombre N de cycles dans la couche cisailée, qui peut être demi-entier (formule (3.5)).

Ces simulations bidimensionnelles surestiment toutefois la recirculation induite dans la cavité. Si la représentation plane de l'écoulement ne pénalise pas les simulations pour une couche cisailée relativement épaisse, la prise en compte d'une couche limite incidente très fine ($L/\delta_\theta > 70$) conduit à une bifurcation vers un régime de sillage, dominé par la recirculation. Le passage en 3-D est alors nécessaire pour rendre compte du mélange turbulent dans la cavité. Il est également indispensable pour étudier l'effet d'un écoulement turbulent. Cependant, l'augmentation du nombre de Reynolds et la résolution tridimensionnelle amènent très rapidement aux limites actuelles des supercalculateurs. Une approche par simulation des grandes échelles peut permettre d'accéder à des dimensions pratiques. Cette méthode est bien appropriée à ce type d'écoulement, dominé par le comportement des grosses structures. Durant cette thèse, la version 3-D d'ALESIA a été modifiée pour mettre en œuvre de telles simulations par macrosimulation. Les premiers résultats prometteurs ne sont pas inclus dans ce mémoire.

La validation de qualité du calcul du champ sonore rayonné par un écoulement affleurant une cavité peut servir de référence pour l'évaluation de méthodes hybrides. En particulier, une analyse détaillée des méthodes intégrales formulées dans la littérature depuis l'analogie de Lighthill, permet de classer ces méthodes en deux grandes classes : les méthodes d'extrapolation à partir d'une surface de contrôle et les méthodes analogiques qui évaluent les sources aérodynamiques quadripolaires T_{ij} et leurs répercussions sur les surfaces. Les méthodes d'extrapolation sont particulièrement intéressantes d'un point de vue numérique car elles réduisent le calcul d'une dimension. L'application au bruit de cavité confirme l'efficacité de deux méthodes d'extrapolation : la méthode de Kirchhoff convectée 2-D dans l'espace spectral, développée dans cette étude, et la méthode d'extrapolation de Ffowcs Williams et Hawkins à partir d'une surface poreuse, sous la forme bidimensionnelle écrite par Lockard (2000). Ces formulations intégrales constituent une stratégie complémentaire des codes CAA pour prolonger le champ proche en champ lointain. La mise en œuvre de l'analogie de Ffowcs Williams et Hawkins en 2-D, dans l'espace fréquentiel, se compare également favorablement avec la solution de référence de la simulation numérique directe (DNS). Cette approche est cependant plus coûteuse numériquement et s'avère sensible

aux erreurs dues à la troncature spatiale des termes sources. L'analyse de la contribution séparée des termes volumiques et surfaciques constitue un résultat important pour comprendre les implications du théorème de Powell et permet une meilleure interprétation des sources de bruit. On distingue notamment l'onde directe de l'onde réfléchie, qui sont encore identifiables sur le calcul direct de la cavité à Mach 0.7, qui est non compacte acoustiquement à la fréquence des oscillations. Cette constatation contredit la vue réductrice qui consisterait à interpréter l'interaction fluide-paroi comme le rayonnement d'une force appliquée par la paroi sur le fluide. Si cette vue permet d'appréhender certains phénomènes comme le rayonnement d'un écoulement sur un cylindre ou sur un coin, elle n'est pas généralisable. Dans ces configurations, le rayonnement dipolaire provient d'une relation de phase cohérente entre les surfaces, donc du caractère diffractant de l'objet. Pour une couche cisailée impactant un obstacle, le champ sonore est plutôt lié aux fortes perturbations induites par l'impact de l'écoulement sur l'obstacle.

Les forts niveaux acoustiques générés par cette interaction induisent une propagation non linéaire des fronts d'onde qui n'est pas prise en compte par les méthodes intégrales, qui supposent une célérité du son c_∞ constante. L'évaluation de la célérité réelle par une méthode itérative apparaît prometteuse pour prendre en compte ces effets de propagation non linéaire. Il serait également intéressant d'utiliser ce cas test pour étudier les termes sources à introduire dans les équations d'Euler linéarisées ou évaluer l'applicabilité de la théorie du *vortex sound*, avec une fonction de Green compacte appropriée.

Enfin, l'analyse des simulations peut aider à l'établissement de lois de contrôle de l'écoulement. En particulier, pour le cas de la cavité, la connaissance des mécanismes de génération de bruit peut permettre la mise au point d'une stratégie de contrôle actif de l'écoulement appropriée. Les simulations directes peuvent aider à tester l'effet d'un contrôle en permettant d'agir de manière idéale sur une quantité.^{139,181}

Références

- ¹ABRAMOVITZ, M. & STEGUN, I.A., 1965, *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York.
- ²AHUJA, K.K. & MENDOZA, J., 1996, Effects of cavity dimensions, boundary layer, and temperature in cavity noise with emphasis on benchmark data to validate computational aeroacoustic codes, NASA CR-4653.
- ³ARCHIBALD, F.S., 1975, Self-excitation of an acoustic resonator by vortex shedding, *J. Sound Vib.*, **38**, p. 81–103.
- ⁴ASHCROFT, G., TAKEDA, K. & ZHANG, X., 2000, Computational modeling of aeroacoustics of a door cavity flow oscillation, *Seventh International Congress on Sound and Vibration, 4-7 July, Garmisch-Partenkirchen, Germany*.
- ⁵ASHCROFT, G.B., TAKEDA, K. & ZHANG, X., 1999, Computations of self-induced oscillatory flow in an automobile door cavity, dans *3rd Computational Aeroacoustics Workshop*, p. 355–361, Ohio Aerospace Institute, Cleveland, nov. 8-10.
- ⁶ATASSI, H.M., DUSEY, M & DAVIS, C.M., 1993, Acoustic radiation from a thin airfoil in nonuniform subsonic flows, *AIAA Journal*, **31**(1), p. 12–19.
- ⁷BAILLY, C., BOGEY, C. & JUVÉ, D., 2000, Computation of flow noise using source terms in linearized Euler's equations, *AIAA Paper 2000-2047*. Accepted in *AIAA Journal*.
- ⁸BAILLY, C. & JUVÉ, D., 1999, A stochastic approach to compute subsonic noise using linearized Euler's equations, *AIAA Paper 99-1872*.
- ⁹BAILLY, C., LAFON, P. & CANDEL, S., 1995, A stochastic approach to compute noise generation and radiation of free turbulent flows, *AIAA Paper 95-092*.

- ¹⁰BASTIN, F., 1995, *Etude numérique du bruit de jet rayonné par les structures cohérentes de la turbulence*, thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris.
- ¹¹BAYSAL, O. & STALLINGS, R.L., 1987, Computational and experimental investigation of cavity flowfields, *AIAA Journal*, **26**(1), p. 6–7.
- ¹²BAYSAL, O., TEN, G.-W. & FOULADI, K., 1994, Navier-Stokes computations of cavity aeroacoustics with suppression devices, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, **116**, p. 105–112.
- ¹³BÉCHARA, W., BAILLY, C., LAFON, P. & CANDEL, S., 1994, Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows, *AIAA Journal*, **32**(3), p. 455–463.
- ¹⁴BELL, J.H. & MEHTA, R.D., 1990, Development of two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers, *AIAA Journal*, **28**(12), p. 2034–2042.
- ¹⁵BETTS, P.C., 1972, Self-induced oscillations in an open water tunnel with slotted walls, *J. Fluid Mech.*, **55**(3), p. 401–417.
- ¹⁶BILANIN, A.J. & COVERT, E.E., 1973, Estimation of possible excitation frequencies for shallow rectangular cavities, *AIAA Journal*, **11**, p. 347–351.
- ¹⁷BLAKE, W.K., 1986, *Mechanics of flow-induced sound and vibration*, vol. 1: General concepts and elementary sources, chap. 3, p. 130–149. Academic Press, Inc.
- ¹⁸BLAKE, W.K., 1986, *Mechanics of flow-induced sound and vibration*, vol. 1: General concepts and elementary sources, chap. 2, p. 68–89. Academic Press, Inc.
- ¹⁹BLAKE, W.K. & POWELL, A., 1986, The development of contemporary views of flow-tone generation, dans *Recent advances in aeroacoustics*, Springer-Verlag, p. 247–345.
- ²⁰BLOCK, P.J.W., 1976, Noise response of cavities of varying dimensions at subsonic speeds, NASA, *Tech. Note D-8351*.
- ²¹BOGEY, C., 2000, *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides*, thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. No 2000-11.
- ²²BOGEY, C., BAILLY, C. & JUVÉ, D., 2000, Numerical simulation of sound generated by vortex pairing in a mixing layer, *AIAA Journal*, **38**(12), p. 2210–2218.
- ²³BOGEY, C., BAILLY, C. & JUVÉ, D., 2001, Noise computation using Lighthill's equation with inclusion of mean flow - acoustics interactions, *AIAA Paper 2001-2255*.

-
- ²⁴BRANDEIS, J., 1981, Flow separation in shear-layer-driven cavities, *AIAA Journal*, **20**(7), p. 908–914.
- ²⁵BRENTNER, K.S., 1986, Prediction of helicopter discrete frequency rotor noise - A computer program incorporating realistic blade motions and advanced formulation, NASA, Technical Report TM-87721.
- ²⁶BRENTNER, K.S., 1996, Numerical algorithms for acoustic integrals - the devil is in details, *AIAA Paper 96-1706*.
- ²⁷BRENTNER, K.S., 1997, An efficient and robust method for predicting helicopter high-speed impulsive noise, *J. Sound Vib.*, **203**(1), p. 87–100.
- ²⁸BRENTNER, K.S. & FARASSAT, F., 1994, Helicopter noise prediction: The current status and future direction, *J. Sound Vib.*, **170**(1), p. 79–96.
- ²⁹BRENTNER, K.S. & FARASSAT, F., 1998, An analytical comparison of the acoustic analogy and Kirchhoff formulation for moving surfaces, *AIAA Journal*, **36**(8), p. 1379–1386.
- ³⁰BROWN, G.B., 1937, The vortex motion causing edge tones, *Proceedings of the Physical Society*, London, **49**, p. 493.
- ³¹BRUGGEMAN, J.C., 1987, *Flow-induced pulsations in pipe systems*, PhD. thesis, Eindhoven University of Technology.
- ³²BRUGGEMAN, J.C., HIRSCHBERG, A., VAN DONGEN, M.E.H., WIJNANDS, A.P.J. & GORTER, J., 1991, Self-sustained aero-acoustic pulsations in gas transport systems: Experimental study of the influence of closed side branches, *J. Sound Vib.*, **150**(3), p. 371–393.
- ³³BUELL, J.C. & HUERRE, P., 1988, Inflow/outflow boundary conditions and global dynamics of spatial mixing layer, *Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program 1988*.
- ³⁴BURGGRAF, O.R., 1966, Analytical and numerical studies of the structures of steady separated flows, *J. Fluid Mech.*, **24**, p. 113–151.
- ³⁵BURROUGHS, C.B. & STINEBRING, D.R., 1994, Cavity flow tones in water, *J. Acoust. Soc. Am.*, **95**(3), p. 1256–1263.
- ³⁶CANDEL, S. & CHASSAIGNON, C., 1984, Radial extrapolation of wave fields by spectral methods, *J. Acoust. Soc. Am.*, **76**(6), p. 1823–1828.

-
- ³⁷CHARWAT, A.F., ROOS, J.N., DEWEY, F.C. & HITZ, J.A., 1961, An investigation of separated flows. Part 1. The pressure field, *Journal of Aerospace Sciences*, **28**, p. 457–470.
- ³⁸COLONIUS, T., 2001, An overview of simulation, modeling and active control of flow/acoustic resonance in open cavities, *AIAA Paper 2001-0076*.
- ³⁹COLONIUS, T., BASU, A.J. & ROWLEY, C.W., 1999, Computation of sound generation and flow/acoustic instabilities in the flow past an open cavity, *FEDSM99-7228*.
- ⁴⁰COLONIUS, T., BASU, A.J. & ROWLEY, C.W., 1999, Numerical investigation of the flow past a cavity, *AIAA Paper 99-1912*.
- ⁴¹COLONIUS, T. & FREUND, J.B., 2000, Application of Lighthill equation to a Mach 1.92 turbulent jet, *AIAA Journal*, **38**(2), p. 368–370.
- ⁴²COLONIUS, T., LELE, S.K. & MOIN, P., 1994, Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation, *AIAA Journal*, **31**(9), p. 1574–1582.
- ⁴³COLONIUS, T., MOIN, P. & LELE, S.K., 1995, Direct computation of aerodynamic sound, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Report No.TF-65.
- ⁴⁴CRIGHTON, D.G., 1975, Basic principles of aerodynamic sound generation, *Prog. Aerospace Sci.*, **16**(1), p. 31–96.
- ⁴⁵CRIGHTON, D.G., DOWLING, A.P., FLOWERS WILLIAMS, J.E., HECKL, M. & LEPPINGTON, F.G., 1992, *Modern methods in analytical acoustics: Lectures notes*, Springer Verlag, London.
- ⁴⁶CUMPSTY, N.A. & WHITEHEAD, D.S., 1971, The excitation of acoustic resonances by vortex shedding, *J. Sound Vib.*, **18**, p. 353–369.
- ⁴⁷CURLE, N., 1953, The mechanics of edge tones, *Proceedings of the Physical Society, Series A*, London, **216**, p. 245.
- ⁴⁸CURLE, N., 1955, The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound, *Proc. of the Royal Society of London*, **A 231**, p. 505–514.
- ⁴⁹DAVIS, C.M. & ATASSI, H.M., 1991, The far-field acoustic pressure of an airfoil in nonuniform subsonic flows, *ASME Winter Annual Meeting, Atlanta, Georgia*, no. NCA-Vol.11/FED-Vol.130, p. 107–117.
- ⁵⁰DEQUAND, S., HULSHOFF, S., VAN KUIJK, H., WILLEMS, J. & HIRSCHBERG, A., 2001, Self-sustained oscillations in a Helmholtz-like resonator: Part II: Detailed flow measurements and numerical simulations, *AIAA Paper 2001-2228*.

-
- ⁵¹DEQUAND, S., LUO, J., WILLEMS, J. & HIRSCHBERG, A., 2001, Self-sustained oscillations in a Helmholtz-like resonator: Part I: Acoustical measurements and analytical models, *AIAA Paper 2001-2251*.
- ⁵²DI FRANCESCANTONIO, P., 1997, A new boundary integral formulation for the prediction of sound radiation, *J. Sound Vib.*, **202**(4), p. 491–509.
- ⁵³DOAK, P.E., 1998, Fluctuating total enthalpy as the basic generalized acoustic field, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **10**, p. 115–133.
- ⁵⁴DONG, T.Z., 1997, On boundary conditions for acoustic computations in non-uniform mean flows, *J. Comput. Acous.*, **5**(3), p. 297–315.
- ⁵⁵DOWLING, A.P. & FLOWCS WILLIAMS, J.E., 1983, *Sound and sources of sound*, chap. 9, p. 207–208. Westergate: Horwood publishing.
- ⁵⁶DUNHAM, W.H., 1962, Flow-induced cavity resonance in viscous compressible and incompressible fluids, ONR, Fourth Symposium on Naval Hydrodynamics, Vol. 3, *Report ARC-73*.
- ⁵⁷EAST, L.F., 1966, Aerodynamically induced resonance in rectangular cavities, *J. Sound Vib.*, **3**, p. 277–287.
- ⁵⁸ELDER, S.A., 1973, On the mechanisms of sound production in organ pipes, *J. Acoust. Soc. Am.*, **54**(6), p. 1554–1564.
- ⁵⁹ELDER, S.A., 1978, Self-excited depth-mode resonance for a wall-mounted cavity in turbulent flow, *J. Acoust. Soc. Am.*, **64**(3), p. 877–890.
- ⁶⁰ELDER, S.A., 1979, Forced oscillations of a separated shear layer with application to cavity flow-tone effects, *J. Acoust. Soc. Am.*, **67**(3), p. 774–781.
- ⁶¹EVERZT, E., KLOEPPEL, V. & QUICK, A.W., 1976, Tech. Horsch. Aachen, Technical Report DLR-FB 76-20.
- ⁶²EWERT, R., MEINKE, M. & SCHRÖDER, W., 2001, Computation of aeroacoustic sound via hybrid CFD/CAA-methods, *AGARD RTO-AVT Symposium on Developpement in Computational Aero- and Hydroacoustics, Manchester, UK*.
- ⁶³FARASSAT, F., 1981, Linear acoustic formulas for calculation of rotating blade noise, *AIAA Journal*, **19**(9), p. 1122–1130.

-
- ⁶⁴FARASSAT, F., 1996, Introduction to generalized functions with applications in aerodynamics and aeroacoustics, NASA, Technical Report TM-110285.
- ⁶⁵FARASSAT, F. & BRENTNER, K.S., 1998, The acoustic analogy and the prediction of the noise of rotating blades, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **10**, p. 155–170.
- ⁶⁶FARASSAT, F. & BROWN, T.J., 1977, A new capability for predicting helicopter rotor and propeller noise including the effect of forward motion, NASA, Technical Report TM X-74037.
- ⁶⁷FARASSAT, F. & MYERS, M.K., 1988, Extension of Kirchhoff's formula to radiation from moving surfaces, *J. Sound Vib.*, **123**(3), p. 451–460.
- ⁶⁸FARASSAT, F. & MYERS, M.K., 1989, Authors' reply to "Comments on extension of Kirchhoff's to radiation from moving surfaces", *J. Sound Vib.*, **133**(1), p. 190.
- ⁶⁹FARASSAT, F. & MYERS, M.K., 1995, The Kirchhoff formula for a supersonically moving surface, *AIAA Paper 95-062*.
- ⁷⁰FARASSAT, F. & SUCCI, G.P., 1983, The prediction of helicopter discrete frequency noise, *Vertica*, **7**(4), p. 309–320.
- ⁷¹FEDORCHENKO, A.T., 2000, On some fundamental flaws in present aeroacoustic theory, *J. Sound Vib.*, **232**(4), p. 719–782.
- ⁷²FFOWCS WILLIAMS, J.E., 1965, Sound radiation from turbulent boundary layers formed on compliant surfaces, *J. Fluid Mech.*, **22**(2), p. 347–358.
- ⁷³FFOWCS WILLIAMS, J.E., 1969, Hydrodynamic noise, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **1**, p. 197–222.
- ⁷⁴FFOWCS WILLIAMS, J.E., 1977, Aeroacoustics, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **9**, p. 447–468.
- ⁷⁵FFOWCS WILLIAMS, J.E. & HALL, L.H., 1970, Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half-plane, *J. Fluid Mech.*, **40**, p. 657–670.
- ⁷⁶FFOWCS WILLIAMS, J.E. & HAWKINGS, D.L., 1969, Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **A264**(1151), p. 321–342.
- ⁷⁷FFOWCS WILLIAMS, J.E. & HOWE, M.S., 1975, The generation of sound density inhomogeneities in low Mach number nozzle flows, *J. Fluid Mech.*, **70**(3), p. 605–622.
- ⁷⁸FIEDLER, H.E. & MENSING, P., 1985, The plane turbulent boundary layer with periodic excitation, *J. Fluid Mech.*, **150**, p. 281–309.

-
- ⁷⁹FORESTIER, N., 2001, *Etude expérimentale d'une couche cisailée au-dessus d'une cavité en régime transonique*, thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. No 2001-.
- ⁸⁰FREUND, J.B., LELE, S.K. & MOIN, P., 1993, Matching of near/far-field equation sets for direct computations of aerodynamic sound, *AIAA Paper 93-4326*.
- ⁸¹FREUND, J.B., LELE, S.K. & MOIN, P., 1998, Direct simulation of a Mach 1.92 jet and its radiated sound field, *Confederation of European Aerospace Societies*.
- ⁸²FREUND, J.B., LELE, S.K. & MOIN, P., 2000, Numerical simulation of a Mach 1.92 turbulent jet and its sound field, *AIAA Journal*, **38**(11), p. 2023–2031.
- ⁸³GAMET, L., 1996, *Simulations numériques d'écoulements compressibles; Application à l'aéroacoustique des jets*, thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace. No 1996-183.
- ⁸⁴GAMET, L. Finite volume formulation of wall boundary conditions for high order compact schemes. Non publié, 1999.
- ⁸⁵GARG, S. & CATTAFESTA III, L.N., 2001, Quantitative Schlieren measurements of coherent structures in a cavity shear layer, *Experiments in Fluids*, **30**, p. 123–134.
- ⁸⁶GHADDAR, N.K., KORCZAKI, K.Z., MIKIC, B.B. & PATERA, A.T., 1986, Numerical investigation of incompressible flow in grooved channels. Part 1. Stability and self-sustained oscillations, *J. Fluid Mech.*, **163**, p. 99–127.
- ⁸⁷GHARIB, M. & ROSHKO, A., 1987, The effect of flow oscillations on cavity drag, *J. Fluid Mech.*, **177**, p. 501–530.
- ⁸⁸GHONIEM, A.F. & NG, K.K., 1987, Numerical study of the dynamics of a forced shear layer, *Phys. Fluids*, **30**(3), p. 706–721.
- ⁸⁹GIBSON, J.E., 1958, *An analysis of supersonic cavity flow*, S.M. thesis, M.I.T. Dept. of Aeronautics and Astronautics, Cambridge, Mass.
- ⁹⁰GIBSON, J.S., 1974, Non-engine aerodynamic noise investigation of a large aircraft, NASA, *Contractor Rep.* 2378.
- ⁹¹GILES, M.B., 1990, Nonreflecting boundary conditions for Euler equation calculations, *AIAA Journal*, **28**(12), p. 2050–2058.
- ⁹²GOLDSTEIN, M.E., 1976, *Aeroacoustics*, McGraw-Hill, New York.

- ⁹³GOLDSTEIN, M.E., 1984, Aeroacoustics of turbulent shear flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **16**, p. 263–285.
- ⁹⁴GOLDSTEIN, M.E., 2001, An exact form of Lilley's equation with a velocity quadrupole/temperature dipole source term, *J. Fluid Mech.*, **443**, p. 231–236.
- ⁹⁵GOODRICH, J.W. & HAGSTROM, T., 1999, High order implementations of accurate boundary conditions, *AIAA Paper 99-1942*.
- ⁹⁶GUO, Y.P., 2000, Application of the Ffowcs Williams-Hawkings equation to two-dimensional problems, *J. Fluid Mech.*, **403**, p. 201–221.
- ⁹⁷HAMED, A., 2001, DNS of high speed flow over a cavity, dans *3rd AFOSR International Conference on Direct Numerical Simulation and Large Eddy Simulation (TAICDL)*, Arlington, Texas, aug. 5-9.
- ⁹⁸HANKEY, W.L. & SHANG, J.S., 1980, Analyses of pressure oscillations in an open cavity, *AIAA Journal*, **18**(8), p. 892–898.
- ⁹⁹HARDIN, J.C. & MASON, J.P., 1977, Broadband noise generation by a vortex model of cavity flow, *AIAA Journal*, **15**(5), p. 632–637.
- ¹⁰⁰HARDIN, J.C. & POPE, D.S., 1994, An acoustic/viscous splitting technique for computational aeroacoustics, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **6**, p. 323–340.
- ¹⁰¹HARDIN, J.C. & POPE, D.S., 1995, Sound generation by flow over a two-dimensional cavity, *AIAA Journal*, **33**(3), p. 407–412.
- ¹⁰²HARDIN, J.C., RISTORCELLI, J.R. & TAM, C.K.W., éditeurs, 1995, *Workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics*, ICASE/LaRC. NASA CP - 3300.
- ¹⁰³HARRINGTON, M.C. & DUNHAM, W.H., 1960, Studies of the mechanism for flow-induced cavity resonances, *J. Acoust. Soc. Am.*, **32**, p. 921.
- ¹⁰⁴HAWKINGS, D.L., 1989, Comments on "Extension of Kirchhoff's formula to radiation from moving surfaces", *J. Sound Vib.*, **133**(1), p. 189.
- ¹⁰⁵HEALY, G.J., 1974, Measurements and analysis of aircraft far-field aerodynamic noise, NASA, *Contractor Rep. 2377*.
- ¹⁰⁶HELLER, H. & DELFS, J., 1996, Cavity pressure oscillations: the generating mechanism visualized, *J. Sound Vib.*, **196**(2), p. 248–252.

-
- ¹⁰⁷HELLER, H.H. & BLISS, D.B., 1975, The physical mechanism of flow-induced pressure fluctuations in cavities and concepts for their suppression, *AIAA Paper*, no. 75-491.
- ¹⁰⁸HELLER, H.H. & DOBRZYNSKI, W.M., 1977, Sound radiation by aircraft wheel well/landing gear configurations, *J. Aircr.*, **14**(8), p. 768-774.
- ¹⁰⁹HELLER, H.H., HOLMES, D.G. & COVERT, E.E., 1971, Flow-induced pressure oscillations in shallow cavities, *J. Sound Vib.*, **18**, p. 545-553.
- ¹¹⁰HENDERSON, B., 1999, Category 6 - Automobile noise involving feedback - Sound generation by low speed cavity flows, dans *3rd Computational Aeroacoustics Workshop*, p. 95-100, Ohio Aerospace Institute, Cleveland, nov. 8-10.
- ¹¹¹HENDERSON, J., BADCOCK, K. & RICHARDS, B.E., 2000, Subsonic and transonic transitional cavity flows, *AIAA Paper 2000-1966*.
- ¹¹²HEO, D.N. & LEE, D.J., 2001, Numerical investigation of the cover-plates effects on the rectangular open cavity, *AIAA Paper 2001-2127*.
- ¹¹³HIRSCH, C., 1990, *Numerical computation of internal and external flows, Volume 1: Fundamentals of numerical discretization*, chap. 8. John Wiley & Sons.
- ¹¹⁴HIRSCH, C., 1990, *Numerical computation of internal and external flows, Volume 2: Computational methods for inviscid and viscous flows*, chap. 19. John Wiley & Sons.
- ¹¹⁵HO, C.-M. & HUANG, L.-S., 1982, Subharmonics and vortex merging in mixing layers, *J. Fluid Mech.*, **119**, p. 443-473.
- ¹¹⁶HO, C.-M. & NOSSEIR, N.S., 1981, Dynamics of an impinging jet. Part 1. The feedback phenomenon, *J. Fluid Mech.*, **105**, p. 119-142.
- ¹¹⁷HOWE, M.S., 1975, Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess noise and the theory of the flute, *J. Fluid Mech.*, **71**, p. 625-673.
- ¹¹⁸HOWE, M.S., 1976, The influence of vortex shedding on the generation of sound by convected turbulence, *J. Fluid Mech.*, **76**(4), p. 711-740.
- ¹¹⁹HOWE, M.S., 1976, On the Helmholtz resonator, *J. Sound Vib.*, **45**, p. 427-440.
- ¹²⁰HOWE, M.S., 1980, The dissipation of sound at an edge, *J. Sound Vib.*, **70**(3), p. 407-411.
- ¹²¹HOWE, M.S., 1981, The influence of mean shear on unsteady aperture flow, with application to acoustical diffraction and self-sustained cavity oscillations, *J. Fluid Mech.*, **109**, p. 125-146.

- ¹²²HOWE, M.S., 1997, Edge, cavity and aperture tones at very low Mach numbers, *J. Fluid Mech.*, **330**, p. 61–84.
- ¹²³HOWE, M.S., 1998, *Acoustics of fluid-structures interactions*, Cambridge University Press.
- ¹²⁴HOWE, M.S., SCOTT, M.I. & SIPCIC, S.R., 1996, The influence of tangential mean flow on the Rayleigh conductivity of an aperture, *Proc. of the Royal Society of London*, **A 452**, p. 2303–2317.
- ¹²⁵HUBBARD, H.H., éditeur, 1995, *Aeroacoustics of flight vehicles - Theory and practice*, vol. 1: Noise sources, Acoustical Society of America through the American Institute of Physics.
- ¹²⁶HUSSAIN, A.K.M.F., 1986, Coherent structures and turbulence, *J. Fluid Mech.*, **173**, p. 303–356.
- ¹²⁷HUSSAIN, A.K.M.F. & ZAMAN, K.B.M.Q., 1978, The free shear layer tone phenomenon and probe interference, *J. Fluid Mech.*, **87**(2), p. 349–383.
- ¹²⁸IANNIELLO, S., 1999, Algorithm to integrate the Ffowcs Williams-Hawkings equation on supersonic rotating domain, *AIAA Journal*, **37**(9), p. 1040–1047.
- ¹²⁹IANNIELLO, S., 1999, Quadrupole noise predictions through the Ffowcs Williams-Hawkings equation, *AIAA Journal*, **37**(9), p. 1048–1054.
- ¹³⁰ILLINGWORTH, C.R., 1950, Some solutions of the equations of flow of a viscous compressible fluid, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **46**, p. 469–478.
- ¹³¹JACOB, M., GRADOZ, V., LOUISOT, A., JUVÉ, D. & GUERRAND, S., 1999, Comparison of sound radiated by shallow cavities and backward facing steps, *AIAA Paper 99-1892*.
- ¹³²JAMESON, A., SCHMIDT, W. & TURKEL, E., 1981, Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes, *AIAA Paper 81-1259*.
- ¹³³JEONG, J. & HUSSAIN, F., 1995, On the identification of a vortex, *J. Fluid Mech.*, **285**, p. 69–94.
- ¹³⁴KAMBE, T., 1984, Influence of viscosity on aerodynamic sound emission in free space, *J. Sound Vib.*, **95**(3), p. 351–360.
- ¹³⁵KARAMCHETI, K., 1955, Acoustic radiation from two-dimensional rectangular cutouts in aerodynamic surfaces, NACA, *Tech. Note 3487*.

-
- ¹³⁶KAYKAYOGLU, R. & ROCKWELL, D., 1985, Vortices incident upon a leading edge: instantaneous pressure fields, *J. Fluid Mech.*, **156**, p. 439–461.
- ¹³⁷KELLER, J.O., VANEVELD, L., KORSCHOLT, D., HUBBARD, G.L., GHONIEM, A.F., DAILY, J.W. & OPPENHEIM, A.K., 1981, Mechanism of instabilities in turbulent combustion leading to flashback, *AIAA Journal*, **20**(2), p. 254–262.
- ¹³⁸KEMPTON, A.J., 1976, Heat diffusion as a source of aerodynamic sound, *J. Fluid Mech.*, **78**(1), p. 1–31.
- ¹³⁹KESTENS, T., 1999, *Etude numérique du contrôle adaptatif multivoies des instabilités aéroacoustiques des cavités*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse. Voir aussi AIAA Paper 98-2348.
- ¹⁴⁰KIM, I. & CHOKANI, N., 1990, Navier-Stokes simulation of unsteady supersonic cavity flow-field with passive control, *AIAA Paper 90-3101-CP*.
- ¹⁴¹KING, J.L., BOYLE, P. & OGLE, J.B., 1958, Instability in slotted wall tunnel, *J. Fluid Mech.*, **4**, p. 283–305.
- ¹⁴²KIRCHHOFF, G.R., 1883, Towards a theory of light rays, *Annalen der Physik und Chemie*, **18**, p. 663–695.
- ¹⁴³KISTLER, A.C. & TAN, F.C., 1967, Some properties of turbulent separated flows, *The Physics of Fluids Supplement Boundary Layers and Turbulence*, p. S165–173.
- ¹⁴⁴KNIO, O., COLLOREC, L. & JUVÉ, D., 1995, Numerical study of the sound emitted by two-dimensional regular and chaotic vortex configurations, *J. Comput. Phys.*, **116**, p. 226–246.
- ¹⁴⁵KNISELY, C. & ROCKWELL, D., 1982, Self-sustained low frequency components in an impinging shear layer, *J. Fluid Mech.*, **116**, p. 157–186.
- ¹⁴⁶KOMERATH, N.M., AHUJA, K.K. & CHAMBERS, F.W., 1987, Prediction and measurement of flows over cavities - A survey, *AIAA Paper 87-0166*.
- ¹⁴⁷KRIESEL, P.C., PETERS, M.C.A.M., HIRSCHBERG, A., WIJNANDS, A.P.J., IAFRATI, A., RICCARDI, G., PIVA, R. & BRUGGEMAN, J.C., 1995, High amplitude vortex-induced pulsations in a gas transport system, *J. Sound Vib.*, **184**(2), p. 343–368.
- ¹⁴⁸KUO, C.-H. & HUANG, S.H., 2001, Influence of flow path modification on oscillation of cavity shear layer, *Experiments in Fluids*, **31**, p. 162–178.

- ¹⁴⁹KURBATSKII, K.K. & TAM, C.K.W., 1999, Direct numerical simulation of automobile cavity tones, dans *3rd Computational Aeroacoustics Workshop*, p. 371–383, Ohio Aerospace Institute, Cleveland, nov. 8-10.
- ¹⁵⁰LABBÉ, O., TROFF, B. & SAGAUT, P., 1998, Direct numerical simulation of flow in an open cavity, dans *4th Eccomas 98 - Computational Fluids Dynamics Conference*, p. 95–100, Athens, Greece, sept. 7-11.
- ¹⁵¹LAMP, A.M. & CHOKANI, N., 1997, Computation of cavity flows with suppression using jet blowing, *Journal of Aircraft*, **34**(4), p. 545–551.
- ¹⁵²LARCHEVÊQUE, L., LABBÉ, O., MARY, I. & SAGAUT, P., 2001, Large-eddy simulation of subsonic flow over a deep, open cavity, dans *3rd AFOSR International Conference on Direct Numerical Simulation and Large Eddy Simulation (TAICDL)*, Arlington, Texas, aug. 5-9.
- ¹⁵³LAUFER, J. & MONKEWITZ, P., 1980, On turbulent jet flow in a new perspective, *AIAA Paper 80-0962*.
- ¹⁵⁴LELE, S.K., 1997, Computational aeroacoustics: a review, dans *35th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, AIAA Paper 97-0018, Reno, NV, January 6-10.
- ¹⁵⁵LÉWY, S., 2001, *Acoustique industrielle et aéroacoustique*, chap. 9, p. 305–310. Collection Acoustique SFA, Hermès Science.
- ¹⁵⁶LIGHTHILL, J., 1974, *Waves in fluids*, Cambridge University Press.
- ¹⁵⁷LIGHTHILL, M.J., 1952, On sound generated aerodynamically I. General theory, *Proc. of the Royal Society of London*, **A 211**, p. 564–587.
- ¹⁵⁸LIGHTHILL, M.J., 1954, On sound generated aerodynamically II. Turbulence as a source of sound, *Proc. of the Royal Society of London*, **A 222**, p. 1–32.
- ¹⁵⁹LILLEY, G.M., 1972, The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol. IV - Theory of turbulence generated jet noise, noise radiation from upstream sources, and combustion noise. Part II: Generation of sound in a mixing region, Air Force Aero Propulsion Laboratory, Technical Report AFAPL-TR-72-53, Vol. 4.
- ¹⁶⁰LILLEY, G.M., ZHANG, X. & RONA, A., 1997, Progress in computational aeroacoustics in predicting the noise radiated from turbulent flows, *International Journal of Acoustics and Vibration*, **2**(1), p. 3–10.

-
- ¹⁶¹LIN, J.C. & ROCKWELL, D., 2001, Organized oscillations of initially turbulent flow past a cavity, *AIAA Journal*, **39**(6), p. 1139–1151.
- ¹⁶²LOCKARD, D.P., 2000, An efficient, two-dimensional implementation of the Ffowcs Williams and Hawkings equation, *J. Sound Vib.*, **229**(4), p. 897–911.
- ¹⁶³LONGATTE, E., 1998, *Modélisation de la propagation et de la génération du bruit au sein des écoulements turbulents internes*, thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris.
- ¹⁶⁴LONGATTE, E., LAFON, P. & CANDEL, S., 1998, Computation of noise generation by turbulence in internal flows, *AIAA Paper 98-2332*.
- ¹⁶⁵LOWSON, M.V., 1965, The sound field for singularities in motion, *Proc. Roy. Soc.*, **A221**, p. 564–587.
- ¹⁶⁶LYRINTZIS, A.S., 1994, Review: the use of Kirchhoff's method in computational aeroacoustics, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **116**, p. 665–676.
- ¹⁶⁷LYRINTZIS, A.S. & MANKBADI, R.R., 1995, On the prediction of the far-field jet noise using Kirchhoff's formulation, *AIAA Paper 95-0508*.
- ¹⁶⁸LYRINTZIS, A.S. & MANKBADI, R.R., 1996, Prediction of the far-field jet noise using Kirchhoff's formulation, *AIAA Journal*, **34**(2), p. 413–416.
- ¹⁶⁹LYRINTZIS, A.S. & XUE, Y., 1991, Study of the noise mechanisms of transonic blade-vortex interactions, *AIAA Journal*, **29**(10), p. 1562–1572.
- ¹⁷⁰MANKBADI, R.R., HAYER, M.E. & POVINELLI, L.A., 1994, Structure of supersonic jet flow and its radiated sound, *AIAA Journal*, **32**(5), p. 897–906.
- ¹⁷¹MANKBADI, R.R., SHIH, S.H., HIXON, D.R., STUART, J.T. & POVINELLI, L.A., 1996, Extension of near field to far field jet noise prediction, *AIAA Paper 96-2651*.
- ¹⁷²MANKBADI, R.R., SHIH, S.H., HIXON, D.R., STUART, J.T. & POVINELLI, L.A., 1996, A Surface-Integral Formulation for jet noise prediction based on pressure signal alone, *J. Comput. Acous.*, **6**(3), p. 307–320.
- ¹⁷³MANOHA, E., DELAHAY, C., REDONNET, S., BEN KHELIL, S., GUILLEN, P., SAGAUT, P. & MARY, I., 2001, Numerical prediction of the unsteady flow and radiated noise from a 3-D lifting airfoil, *AGARD RTO-AVT Symposium on Developpement in Computational Aero- and Hydroacoustics, Manchester, UK*.

- ¹⁷⁴MAST, T.D. & PIERCE, A.D., 1995, Describing-function theory for flow excitation of resonators, *J. Acoust. Soc. Am.*, **97**(1), p. 163–172.
- ¹⁷⁵MAULL, D.J. & EAST, L.F., 1963, Three-dimensional flow in cavities, *J. Fluid Mech.*, **16**, p. 620–632.
- ¹⁷⁶MEADOWS, K.R. & ATKINS, H.L., 1996, Towards a highly accurate implementation of the Kirchhoff approach for computational aeroacoustics, *Journal of Computational Acoustics*, **4**(2), p. 225–241.
- ¹⁷⁷MEISSNER, M., 1987, Self-sustained deep cavity oscillations induced by grazing flow, *Acustica*, **62**(3), p. 220–228.
- ¹⁷⁸MEISSNER, M., 1992, Discrete sound induced by low Mach number flow over side branch deep cavity in rectangular duct, *Archives of Acoustics*, **17**(2), p. 287–305.
- ¹⁷⁹MEISSNER, M., 1993, Experimental investigation of discrete sound production in deep cavity exposed to airflow, *Archives of Acoustics*, **18**(1), p. 131–156.
- ¹⁸⁰MENDOZA, J. & AHUJA, K.K., 1995, The effects of width on cavity noise, *AIAA Paper 95-054*.
- ¹⁸¹METTENLEITER, M., 2000, *Contrôle adaptatif des instabilités aéroacoustiques - Application aux systèmes de propulsion*, thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris.
- ¹⁸²MICHALKE, A., 1965, On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer, *J. Fluid Mech.*, **23**(3), p. 521–544.
- ¹⁸³MICHALKE, A., 1972, The instability of free shear layers, *Progress in Aerospace Sciences*, **12**, p. 213–239.
- ¹⁸⁴MILES, J.W. & LEE, Y.K., 1973, Helmholtz resonance of harbors, *J. Fluid Mech.*, **67**(3), p. 445–467.
- ¹⁸⁵MILLS, R.D., 1961, *The flow in rectangular cavities*, Ph.D. thesis, University of London.
- ¹⁸⁶MITCHELL, B.E., LELE, S.K. & MOIN, P., 1995, Direct computation of the sound from a compressible co-rotating vortex pair, *J. Fluid Mech.*, **285**, p. 181–202.
- ¹⁸⁷MITCHELL, B.E., LELE, S.K. & MOIN, P., 1995, Direct computation of the sound generated by subsonic and supersonic axisymmetric jets, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Report No.TF-66.

-
- ¹⁸⁸MOFFATT, H.K., 1964, Viscous and resistive eddies near a sharp corner, *Fluid Mech.*, **18**, p. 1–18.
- ¹⁸⁹MÖHRING, W., 1978, On vortex sound at low Mach number, *J. Fluid Mech.*, **85**, p. 685–691.
- ¹⁹⁰MONGEAU, L., FRANCHEK, M.A. & KOOK, H., 1999, Control of interior pressure fluctuations due to flow over vehicle openings, *Society of Automotive Engineers*, 99NV-211.
- ¹⁹¹MOON, Y.J., SUNG, R.K., CHO, Y. & CHUNG, J.M., 1999, Aeroacoustic computations of the unsteady flows over a rectangular cavity with a lip, dans *3rd Computational Aeroacoustics Workshop*, p. 347–353, Ohio Aerospace Institute, Cleveland, nov. 8-10.
- ¹⁹²MORETTI, G., 1981, A physical approach to the numerical treatment of boundaries in gas dynamics, *Symposium on Numerical Boundary Condition Procedures*, p. 73. NASA Ames Symposium CP-2201 ou N81-33861.
- ¹⁹³MORFEY, C.L., 1966, ISVR, Report.
- ¹⁹⁴MORFEY, C.L., 1973, Amplification of aerodynamic noise by convected flow inhomogeneities, *J. Sound Vib.*, **31**(4), p. 391–397.
- ¹⁹⁵MORGANS, W.R., 1930, The Kirchhoff formula extended to a moving surface, *Philosophical Magazine*, **9**, p. 141–161.
- ¹⁹⁶MORINO, L., 1985, Mathematical foundations of integral methods, dans *Computational Methods in Potential Aerodynamics*, édité par Morino, L., Springer-Verlag, p. 271–291.
- ¹⁹⁷MORINO, L. & TSENG, K., 1990, A general theory of unsteady potential flows with applications to airplanes and rotors, dans *Developments in Boundary Element Methods*, édité par Banerjee, P.K. & Morino, L., Elsevier Applied Science Publisher, vol. 6, p. 271–291.
- ¹⁹⁸MORKOVIN, M.V. & PARANJAPE, S.V., 1971, On acoustic excitation of shear layers, *Z. Flugwiss.*, **8/9**(2), p. 328–335.
- ¹⁹⁹MORSE, P.M. & INGARD, K.U., 1968, *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, New York.
- ²⁰⁰MYERS, M.K. & HAUSMANN, J.S., 1990, On the application of the Kirchhoff formula for moving surfaces, *J. Sound Vib.*, **139**(1), p. 174–178.
- ²⁰¹MYERS, M.K. & HAUSMANN, J.S., 1992, Computation of acoustic scattering from a moving rigid surface, *J. Acoust. Soc. Am.*, **91**(5), p. 2594–2605.

-
- ²⁰²NAJM, H.N. & GHONIEM, A.F., 1991, Numerical simulation of the convective instability in a dump combustor, *AIAA Journal*, **29**(6), p. 911–919.
- ²⁰³NALLASAMY, M. & PRASAD, K.K., 1977, On cavity flow at high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, **79**(2), p. 391–414.
- ²⁰⁴NELSON, P.A., HALLIWELL, N.A. & DOAK, P.E., 1981, Fluid dynamics of a flow excited resonance, Part I: Experiment, *J. Sound Vib.*, **78**(1), p. 15–38.
- ²⁰⁵NELSON, P.A., HALLIWELL, N.A. & DOAK, P.E., 1983, Fluid dynamics of a flow excited resonance, Part II: Flow acoustic interaction, *J. Sound Vib.*, **91**(3), p. 375–402.
- ²⁰⁶NOGER, C., LAZURE, H. & PATRAT, J.-C., 1999, Etude aéroacoustique d'une cavité peu profonde soumise à un écoulement affleurant, dans *XIVe Congrès Français de Mécanique, Toulouse*.
- ²⁰⁷NOSSEIR, N.S. & HO, C.-M., 1982, Dynamics of an impinging jet. Part 2. The noise generation, *J. Fluid Mech.*, **116**, p. 379–391.
- ²⁰⁸OBERMEIER, F., 1985, Aerodynamic sound generation caused by viscous processes, *J. Sound Vib.*, **99**, p. 111–120.
- ²⁰⁹O'BRIEN, V., 1972, Closed streamlines associated with channel flow over a cavity, *Phys. Fluids*, **15**(12), p. 2089–2097.
- ²¹⁰ORKWIS, P.D., SEKAR, B., CHAKRAVARTHY, S. & PEROOMIAN, O., 1998, Comparison of three Navier-Stokes solvers for supersonic open cavity simulations, *AIAA Journal*, **36**(5), p. 865–867.
- ²¹¹OSTER, D. & WYGNANSKI, I., 1982, The forced mixing layer between parallel streams, *J. Fluid Mech.*, **123**, p. 91–130.
- ²¹²OTA, D.K., CHAKRAVARTHY, S.R., BECKER, T. & STURZNEGGER, T., 1994, Computational study of resonance suppression of open sunroofs, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **116**, p. 877–882.
- ²¹³ÖZYÖRÜK, Y., 1995, *Sound radiation from ducted fans using computational aeroacoustics on parallel computers*, thèse de doctorat, Pennsylvania State University.
- ²¹⁴PAN, F. & ACRIVOS, A., 1967, Steady flows in rectangular cavities, *J. Fluid Mech.*, **28**(4), p. 643–655.

-
- ²¹⁵PANTON, R.L. private communication. juin 2001.
- ²¹⁶PANTON, R.L., 1984, *Incompressible flow*, John Wiley & Sons.
- ²¹⁷PEREIRA, J.C.F. & SOUSA, J.M.M., 1993, Finite volume calculations of self-sustained oscillations in a grooved-channel, *J. Comput. Phys.*, **106**, p. 19–29.
- ²¹⁸PEREIRA, J.C.F. & SOUSA, J.M.M., 1994, Influence of impingement edge geometry on cavity flow oscillations, *AIAA Journal*, **32**(8), p. 1737–1740.
- ²¹⁹PEREIRA, J.C.F. & SOUSA, J.M.M., 1995, Experimental and numerical investigation of flow oscillations in a rectangular cavity, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **117**, p. 68–74.
- ²²⁰PETERS, M.C.A.M. & HIRSCHBERG, A., 1993, Acoustically induced periodic vortex shedding at sharp edged open channel ends: simple vortex models, *J. Sound Vib.*, **161**(2), p. 281–299.
- ²²¹PHILLIPS, O.M., 1960, On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers, *J. Fluid Mech.*, **9**(1), p. 1–28.
- ²²²PIERCE, A.D., 1981, *Acoustics, an introduction to its physical principles and applications*, McGraw-Hill, New York.
- ²²³PILON, A.R., 1997, *Development of improved surface integral methods for jet aeroacoustics predictions*, PhD Thesis, University of Minnesota.
- ²²⁴PILON, A.R. & LYRINTZIS, A.S., 1996, An improved Kirchhoff methods for jet aeroacoustics, *AIAA Paper 96-1709*.
- ²²⁵PLENTOVICH, E.B., 1990, Three-dimensional cavity flow fields at subsonic and transonic speeds, NASA Technical Memorandum, Technical Report 4209.
- ²²⁶PLENTOVICH, E.B., STALLINGS JR, R.L. & TRACY, M.B., 1993, Experimental cavity pressure measurements at subsonic and transonic speeds, NASA Technical Paper, Technical Report 3358.
- ²²⁷PLUMBLEE, H.E., GIBSON, J.S. & LASSITER, L.W., 1962, A theoretical and experimental investigation of the acoustic response of cavities in an aerodynamic flow, U.S. Air Force, Rep. WADD-TR-61-75.
- ²²⁸PODELVAART, L.J., WIJNANDS, A.P.J., VAN MOLL, L.H.A.M. & VAN VOORHUISEN, E.J., 1974, Modes of vibration, Audio-Visuell Cent., Eindhoven Univ. Tech., Technical report.

- ²²⁹POINSOT, T.J. & LELE, S.K., 1992, Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows, *J. Comput. Phys.*, **101**, p. 104–129.
- ²³⁰POWELL, A., 1960, Aerodynamic noise and the plane boundary, *J. Acoust. Soc. Am.*, **32**(8), p. 982–990.
- ²³¹POWELL, A., 1961, On the edgetone, *J. Acoust. Soc. Am.*, **33**(4), p. 395–409.
- ²³²POWELL, A., 1964, Theory of vortex sound, *J. Acoust. Soc. Am.*, **36**, p. 177–195.
- ²³³PRIEUR, J., 1988, Calculation of transonic rotor noise using a frequency domain formulation, *AIAA Journal*, **26**(2), p. 156–162.
- ²³⁴PRIEUR, J. & RAHIER, G., 1998, Comparison of Ffowcs Williams-Hawkings and Kirchhoff rotor noise calculations, *AIAA Paper 98-2376*.
- ²³⁵RAYLEIGH, J.W.S., 1945, *The theory of sound*, vol. II, Dover Publications, New York, revised édition.
- ²³⁶RIBNER, H.S., 1977, On the role of the shear term in jet noise, *J. Sound Vib.*, **52**(1), p. 121–132.
- ²³⁷RICOT, D., MAILLARD, V. & BAILLY, C., 2001, Numerical simulation of the unsteady flow past a cavity and application to the sunroof buffeting, *AIAA Paper 2001-2112*.
- ²³⁸RIZZETTA, D.P., 1988, Numerical simulation of supersonic flow over a three dimensional cavity, *AIAA Journal*, **26**(7), p. 799–807.
- ²³⁹ROACHE, P.J., 1976, *Computational Fluid Dynamics*, chap. V-G. Hermosa.
- ²⁴⁰ROCKWELL, D., 1977, Prediction of oscillation frequencies for unstable flow past cavities, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **99**, p. 294–300.
- ²⁴¹ROCKWELL, D., 1983, Oscillations of impinging shear layers, *AIAA Journal*, **21**(5), p. 645–664.
- ²⁴²ROCKWELL, D., 1998, Vortex-body interactions, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **30**, p. 199–229.
- ²⁴³ROCKWELL, D. & KARADOĞAN, H., 1982, Oscillations of an impinging turbulent jet: coherence characterization via conditional sampling, *J. Sound Vib.*, **83**(1), p. 111–124.
- ²⁴⁴ROCKWELL, D. & KNISELY, C., 1979, The organized nature of flow impingement upon a corner, *J. Fluid Mech.*, **93**, p. 413–432.

-
- ²⁴⁵ROCKWELL, D. & KNISELY, C., 1980, Vortex-edge interaction: Mechanisms for generating low frequency components, *Phys. Fluids*, **23**(2), p. 239–240.
- ²⁴⁶ROCKWELL, D. & NAUDASCHER, E., 1978, Review - self-sustaining oscillations of flow past cavities, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **100**, p. 152–165.
- ²⁴⁷ROCKWELL, D. & NAUDASCHER, E., 1979, Self-sustained oscillations of impinging free shear layer, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11**, p. 67–94.
- ²⁴⁸ROCKWELL, D. & SCHACHENMANN, H., 1982, Self-generation of organized waves in an impinging turbulent jet at low Mach number, *J. Fluid Mech.*, **117**, p. 425–441.
- ²⁴⁹RONA, A. & DIEUDONNÉ, W., 2000, A flow-resonant model of transonic laminar open cavity instability, *AIAA Paper 2000-1967*.
- ²⁵⁰RONNEBERGER, D., 1980, The dynamics of shearing flow over a cavity - A visual study related to the acoustic impedance of small orifices, *J. Sound Vib.*, **71**(4), p. 565–581.
- ²⁵¹ROSHKO, A., 1955, Some measurements of flow in a rectangular cutout, NACA, *Tech. Note* 3488.
- ²⁵²ROSSITER, J.E., 1964, Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds, Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, Technical Report 3438.
- ²⁵³ROWLEY, C.W., 2001, *Modeling, simulation, and control of cavity flow oscillations*, PhD thesis, California Institute of Technology.
- ²⁵⁴ROWLEY, C.W., COLONIUS, T. & MURRAY, R.M., 2000, POD based models of self-sustained oscillations in the flow past an open cavity, *AIAA Paper 2000-1969*.
- ²⁵⁵ROWLEY, C.W., COLONIUS, T. & MURRAY, R.M., 2001, Dynamical models for control of cavity oscillations, *AIAA Paper 2001-1969*.
- ²⁵⁶RUDY, D.H. & STRIKWERDA, J.C., 1980, A non-reflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations, *J. Comput. Phys.*, **36**, p. 55–70.
- ²⁵⁷SARKAR, S. & HUSSAINI, M.Y., 1993, Computation of the acoustic radiation from bounded homogeneous flows, dans *Computational aeroacoustics*, édité par Hardin, J.C. and Hussaini, M.Y., Springer-Verlag, p. 335–355.

- ²⁵⁸SAROHIA, V., 1977, Experimental oscillations in flows over shallow cavities, *AIAA Journal*, **15**(7), p. 984–991.
- ²⁵⁹SCHLICHTING, H., 1968, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, 6^{ème} édition.
- ²⁶⁰SÉGOUFIN, C., 2000, *Production du son par interaction écoulement/résonateur acoustique*, thèse de doctorat, Université Paris 6.
- ²⁶¹SEROR, C., 2000, *Simulation des grandes échelles pour la prédiction du bruit des écoulements turbulents*, thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay.
- ²⁶²SHEN, P., 1979, Supersonic flow over a deep cavity for a laser application, *AIAA Journal*, **17**(2), p. 216–219.
- ²⁶³SHEN, W.Z. & SORENSEN, J.N., 1999, Aeroacoustic modelling of low-speed flows, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **13**, p. 271–289.
- ²⁶⁴SHIEH, C.M. & MORRIS, P.J., 1999, A parallel numerical simulation of automobile noise involving feedback, dans *3rd Computational Aeroacoustics Workshop*, p. 363–370, Ohio Aerospace Institute, Cleveland, nov. 8-10.
- ²⁶⁵SHIEH, C.M. & MORRIS, P.J., 1999, Parallel numerical simulation of subsonic cavity noise, *AIAA Paper 99-1891*.
- ²⁶⁶SHIEH, C.M. & MORRIS, P.J., 2000, Parallel computational aeroacoustic simulation of turbulent subsonic cavity flow, *AIAA Paper 2000-1914*.
- ²⁶⁷SHIH, S.H., HAMED, A. & YEUAN, J.J., 1994, Unsteady supersonic cavity flow simulations using coupled $k-\epsilon$ and Navier-Stokes equations, *AIAA Journal*, **32**(10), p. 2015–2021.
- ²⁶⁸SHIH, S.H., HIXON, D.R. & MANKBADI, R.R., 1995, A zonal approach for prediction of jet noise, *AIAA Paper 95-144*.
- ²⁶⁹SHIH, S.H., HIXON, D.R., MANKBADI, R.R., PILON, A. & LYRINTZIS, A., 1997, Evaluation of far-field jet noise prediction methods, *AIAA Paper 97-0282*.
- ²⁷⁰SINGER, B.A., BRENTNER, K.S., LOCKARD, D.P. & LILLEY, G.M., 2000, Simulation of acoustic scattering from a trailing edge, *J. Sound Vib.*, **230**(3), p. 541–560.
- ²⁷¹SINGER, B.A., LOCKARD, D.P. & BRENTNER, K.S., 2000, Computational aeroacoustic analysis of slat trailing-edge flow, *AIAA Journal*, **38**(9), p. 1558–1564.

-
- ²⁷²SINHA, N., ARUNAJATESAN, S., SHIPMAN, J. & SEINER, J.M., 2001, High fidelity simulation and measurements of aircraft weapons bay dynamics, *AIAA Paper 2001-2125*.
- ²⁷³SINHA, N., ARUNAJATESAN, S. & UKEILEY, L.S., 2000, High fidelity simulation of weapons bay aeroacoustics and active flow control, *AIAA Paper 2000-1968*.
- ²⁷⁴SINHA, S.N., GUPTA, A.K. & OBERAI, M.M., 1982, Laminar separating flow over backsteps and cavities, Part ii: Cavities, *AIAA Journal*, **20**(3), p. 370–375.
- ²⁷⁵SLIMON, S.A., DAVIS, D.W. & WAGNER, C.A., 1998, Far-field aeroacoustic computation of unsteady cavity flow, *36th Aerospace Science Meeting & Exhibition, AIAA 98-0285*.
- ²⁷⁶SOEMARWOTO, B.I. & KOK, J.C., 2001, Computations of three-dimensional unsteady cavity flow to study the effect of different downstream geometries, *AGARD RTO-AVT Symposium on Developpement in Computational Aero- and Hydroacoustics, Manchester, UK*.
- ²⁷⁷SPEE, B.M., 1966, Wind tunnel experiments on unsteady cavity flow at high subsonic speeds, *AGARD Current Paper*, **4**, p. 941–974.
- ²⁷⁸SPENCER, B.W. & JONES, B.G., 1971, Statistical investigation of pressure and velocity fields in the turbulent two-stream mixing layer, *AIAA Paper 71-613*.
- ²⁷⁹STALLINGS JR, R.L. & WILCOX JR, F.J., 1983, Experimental cavity pressure distributions at supersonics speeds, NASA Technical Paper, Technical Report 2683.
- ²⁸⁰STOKES, G.G., 1851, On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Cambr. Phil. Trans.*, **IX**(8).
- ²⁸¹STUART, J.T., 1967, On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers, *J. Fluid Mech.*, **29**(3), p. 417–440.
- ²⁸²SUHS, N.E., 1993, Unsteady flow computations for a three dimensional cavity with an without an acoustic suppression device, *AIAA Paper 93-3402*.
- ²⁸³SUNYACH, M. & BÉRA, J.C., 1997, Active control of flow instabilities generated by cavities, dans *Aeroacoustics and active noise control, 1997-07*, von Karman Institute for Fluid Dynamics.
- ²⁸⁴TAM, C.-J., ORKWIS, P.D. & DISIMILE, P.J., 1995, Comparison of Baldwin-Lomax turbulence models for two-dimensional open cavity computations, *AIAA Journal*, **34**(3), p. 629–631.

- ²⁸⁵TAM, C.K.W., 1976, The acoustic modes of a two-dimensional rectangular cavity, *J. Sound Vib.*, **49**, p. 353–364.
- ²⁸⁶TAM, C.K.W., 1978, Excitation of instability waves in two-dimensional shear layer by sound, *J. Fluid Mech.*, **89**(2), p. 357–371.
- ²⁸⁷TAM, C.K.W., 1995, Computational aeroacoustics: issues and methods, *AIAA Journal*, **33**(10), p. 1788–1796.
- ²⁸⁸TAM, C.K.W., 2001, On the failure of the acoustic analogy theory to identify the correct noise sources, *AIAA Paper 2001-2117*.
- ²⁸⁹TAM, C.K.W. & BLOCK, P.J.W., 1978, On the tones and pressure oscillations induced by flow over rectangular cavities, *J. Fluid Mech.*, **89**(2), p. 373–399.
- ²⁹⁰TAM, C.K.W. & DONG, Z., 1994, Wall boundary conditions for high-order finite difference schemes in computational aeroacoustics, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, p. 303–322. Voir aussi *AIAA Paper 94-0457*.
- ²⁹¹TAM, C.K.W. & DONG, Z., 1996, Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow, *J. Comput. Acous.*, **4**(2), p. 175–201.
- ²⁹²TAM, C.K.W. & KURBATSKII, K.A., 1999, Micro-fluid dynamics and acoustics of resonant liners, *AIAA Paper 99-1850*.
- ²⁹³TAM, C.K.W. & NORUM, T.D., 1992, Impingement tones of large aspect ratio supersonic rectangular jets, *AIAA Journal*, **30**(2), p. 304–311.
- ²⁹⁴TAM, C.K.W. & SHEN, H., 1993, Direct computation of nonlinear pulses using high order finite difference scheme, *AIAA Paper 93-4325*.
- ²⁹⁵TAM, C.K.W. & WEBB, J.C., 1993, Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics, *J. Comput. Phys.*, **107**, p. 262–281.
- ²⁹⁶TAM, C.K.W., WEBB, J.C. & DONG, Z., 1993, A study of the short wave components in computational acoustics, *J. Comput. Acous.*, **1**(1), p. 1–30.
- ²⁹⁷TANG, Y.-P. & ROCKWELL, D., 1983, Instantaneous pressure fields at a corner associated with vortex impingement, *J. Fluid Mech.*, **126**, p. 187–204.

-
- ²⁹⁸THOMPSON, K.W., 1987, Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems, *J. Comput. Phys.*, **68**, p. 1–24.
- ²⁹⁹THOMPSON, K.W., 1990, Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems, II, *J. Comput. Phys.*, **89**, p. 439–461.
- ³⁰⁰TRACY, M.B. & PLENTOVICH, E.B., 1993, Characterization of cavity flow fields using pressure data obtained in the Langley 0.3-meter transonic cryogenic tunnel, NASA Technical Memorandum, Technical Report 4436.
- ³⁰¹TRACY, M.B. & PLENTOVICH, E.B., 1997, Cavity unsteady-pressure measurements at subsonic and transonic speeds, NASA Technical Paper, Technical Report 3669.
- ³⁰²TROFF, B., LABBÉ, O. & SAGAUT, P., 1998, Parallel implementation of DNS solver, dans *4th Eccomas 98 - Computational Fluids Dynamics Conference*, p. 95–100, Athens, Greece, sept. 7–11.
- ³⁰³VAKILI, A.D., WOLFE, R.C. & NAGLE, P.A., 1995, Active control of cavity aeroacoustics, *AIAA Paper 95-175*.
- ³⁰⁴VERGE, M.P., 1995, *Aeroacoustics of confined jets, with applications to the physical modeling of recorder-like instruments*, thèse de doctorat, Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- ³⁰⁵WASKIEWICZ, J.D., SHANG, J.S. & HANKEY, W.L., 1980, Numerical simulation of near wakes utilizing a relaxation turbulence model, *AIAA Journal*, **18**(12), p. 1440–1445.
- ³⁰⁶WHITE, F.M., 1974, *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill.
- ³⁰⁷WHITHAM, G.B., 1974, *Linear and nonlinear waves*, p. 312–338. Wiley, New York.
- ³⁰⁸WITKOWSKA, A., BRASSEUR, J.G. & JUVÉ, D., 1996, Numerical study of noise from isotropic turbulence, *J. Comput. Acous.*, **5**(3), p. 317–336.
- ³⁰⁹WOOLEY, J.P. & KARAMCHETI, K., 1974, Role of jet stability in edgetone generation, *AIAA Journal*, **12**(11), p. 1457–1458.
- ³¹⁰WYGNANSKI, I. & FIEDLER, H., 1969, Some measurements in the self-preserving jet, *J. Fluid Mech.*, **38**(3), p. 577–612.
- ³¹¹YU, Y.H., CARADONNA, F.X. & SCHMITZ, F.H., 1978, The influence of the transonic flow-field on high-speed helicopter impulsive noise, *4th European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum*, Paper 58.

- ³¹²ZHANG, X., 1995, Compressible cavity flow oscillation due to shear layer instabilities and pressure feedback, *AIAA Journal*, **33**(8), p. 1404–1411.
- ³¹³ZHANG, X. & EDWARDS, J.A., 1988, Computational analysis of unsteady cavity flows driven by thick shear layers, *Aeronautical Journal*, **92**(919), p. 365–374.
- ³¹⁴ZHANG, X. & EDWARDS, J.A., 1990, An investigation of supersonic oscillatory cavity flows driven by a thick shear layer, *Aeronautical Journal*, **94**(940), p. 355–364.
- ³¹⁵ZHANG, X. & EDWARDS, J.A., 1992, Experimental investigation of supersonic flow over two cavities in tandem, *AIAA Journal*, **30**(5), p. 1182–1190.
- ³¹⁶ZHANG, X., RONA, A. & EDWARDS, J.A., 1998, An observation of pressure waves around a shallow cavity, *J. Sound Vib.*, **214**(4), p. 771–778.
- ³¹⁷ZHANG, X., RONA, A. & LILLEY, G.M., 1995, Far-field noise radiation from an unsteady supersonic cavity, *AIAA Paper 95-040*.
- ³¹⁸ZIADA, S. & ROCKWELL, D., 1981, Generation of higher harmonics in a self-oscillating mixing layer edge system, *AIAA Journal*, **20**, p. 196–199.
- ³¹⁹ZIADA, S. & ROCKWELL, D., 1982, Oscillations of an unstable mixing layer impinging upon an edge, *J. Fluid Mech.*, **124**, p. 307–334.
- ³²⁰ZIADA, S. & ROCKWELL, D., 1982, Vortex-leading-edge interaction, *J. Fluid Mech.*, **118**, p. 79–107.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 30 Mars 1992,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur D. JUVE

et les rapports de

Monsieur A. CHAIGNE

Professeur - Ecole Polytechnique - Unité d'Enseignement et de Recherche en Mécanique (UME) Chemin de la Hunière - 91761 PALAISEAU Cedex

et de

Monsieur G. LILLEY

Professeur - NASA Mail Stop 128 - Langley Research Center - Hampton VA 23681-2199 (USA)

Monsieur GLOERFELT Xavier

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL et ACOUSTIQUE (MEGA)

Fait à Ecully, le 27 novembre 2001

P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur des Etudes

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'F. Leboeuf', written over a horizontal line that ends in an arrowhead pointing to the right. The signature is somewhat stylized and overlaps the line.

F. LEBOEUF

Résumé:

Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité: Simulation aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales.

Mon travail de thèse est consacré au calcul direct du bruit d'origine aérodynamique à partir des équations de Navier-Stokes. Cette méthode consiste à déterminer simultanément le champ aérodynamique et les ondes acoustiques qui possèdent des caractéristiques physiques très différentes, sans faire intervenir de modélisation acoustique. Elle nécessite donc l'utilisation de techniques numériques qui prennent en compte les particularités des fluctuations acoustiques.

L'alternative à cette démarche consiste en effet à utiliser une méthode hybride, s'appuyant sur un calcul en deux étapes. La première étape détermine un champ turbulent de vitesse, alors que la seconde utilise un modèle de sources acoustiques combiné avec un opérateur de propagation pour obtenir le rayonnement acoustique.

Le premier chapitre présente le code aéroacoustique ALESIA et les développements nouveaux pour l'étendre aux situations en présence de parois physiques. On a notamment développé une formulation des conditions aux limites de paroi. Ce problème est illustré par des cas-tests acoustiques et visqueux.

Le deuxième chapitre synthétise l'état des connaissances théoriques et expérimentales concernant l'écoulement au dessus d'une cavité et notamment le rayonnement sonore associé. On s'attache plus particulièrement à la boucle de rétroaction aérodynamique pouvant générer les oscillations auto-entretenues observées. Le calcul direct du bruit de cavité par simulation numérique directe (DNS) des équations de Navier-Stokes est mis en oeuvre pour plusieurs configurations bidimensionnelles dans le troisième chapitre. Une première simulation laminaire à bas Reynolds permet de reproduire le couplage pression-vorticité responsable d'un rayonnement intense. L'étude de l'influence de l'épaisseur de la couche limite incidente met en évidence un nouveau régime d'écoulement, peut-être les limites d'une approche 2-D. Une deuxième simulation reproduit à l'échelle 1, par DNS, une configuration étudiée expérimentalement par Karamcheti(1955), où une couche limite laminaire à Mach 0.7 affleure une cavité rectangulaire bidimensionnelle.

Parmi les théories aéroacoustiques disponibles, le quatrième chapitre analyse les possibilités offertes par les méthodes intégrales, afin de déterminer leur pertinence et leur complémentarité avec les calculs directs. Une revue exhaustive des formulations et des applications existantes permet d'ordonner les nombreux développements réalisés dans ce domaine et de déterminer leur champ d'application respectif. Le dernier chapitre discute la résolution numérique de ces formulations. Les formulations intégrales, l'analogie de Ffowcs Williams et Hawkins, la méthode de d'extrapolation de Hoff et la méthode d'extrapolation basée sur l'équation de Ffowcs Williams et Hawkins sont mises en oeuvre pour plusieurs configurations. L'application à la cavité non couplée de Karamcheti permet d'appréhender les possibilités offertes en terme de gain numérique et d'analyse des

